

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**UM ESTUDO SOBRE OTIMIZAÇÃO AEROELÁSTICA USANDO COMPÓSITOS LAMINADOS  
DE RIGIDEZ VARIÁVEL NA MAXIMIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE FLUTTER**

por

**Guilherme Roldo**

**Monografia apresentada ao Departamento de  
Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia  
da Universidade Federal do Rio Grande do  
Sul, como parte dos requisitos para obtenção  
do diploma de Engenheiro Mecânico.**

**Porto Alegre, junho de 2016**



**Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica**

**UM ESTUDO SOBRE OTIMIZAÇÃO AEROELÁSTICA USANDO COMPÓSITOS LAMINADOS  
DE RIGIDEZ VARIÁVEL NA MAXIMIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE FLUTTER**

por

**Guilherme Roldo**

**ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
ENGENHEIRO MECÂNICO  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Prof. Juan Pablo Raggio Quintas  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica**

**Área de concentração: Mecânica dos Sólidos**

**Orientador: Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler**

**Coorientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo de Souza**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon**

**Comissão de avaliação:**

**Prof. Dr. Rogério José Marczak**

**Prof. Dr. Ignacio Iturrioz**

**Prof. Dr. Herbert Martins Gomes**

**Porto Alegre, 27 de junho de 2016**

## AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho a todos aqueles que contribuíram para que eu completasse esta etapa da minha vida.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Lino e Lorena, por terem sempre me estimulado a buscar conhecimento e por sempre terem me apoiado.

Agradeço à Elâine, minha companheira em tudo, que compreendeu minha frequente ausência durante estes últimos meses, me apoiou e incentivou, e que torna minha vida mais feliz.

Agradeço ao meu orientador Prof. Jakson Manfredini Vassoler, e àqueles que não constam como orientadores deste trabalho por meras questões formais, Dr. Carlos Eduardo de Souza e Dr. Daniel Milbrath De Leon, pelo apoio e disponibilidade durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca (in memoriam), que me apresentou e despertou minha curiosidade a este assunto fascinante e esteve sempre disposto a ensinar.

**ROLDO, G. Um Estudo sobre Otimização Aeroelástica Usando Compósitos Laminados de Rigidez Variável na Maximização da Velocidade de Flutter.** 2016. 23. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

## **RESUMO**

Este trabalho estuda como o uso de compósitos laminados de rigidez variável no projeto de estruturas aeronáuticas pode aumentar a performance aeroelástica destas estruturas. O fenômeno aeroelástico de interesse neste trabalho é o *flutter*, instabilidade aeroelástica ocasionada pelo acoplamento entre forças aerodinâmicas e um ou mais modos vibracionais da estrutura. Este fenômeno apresenta características potencialmente destrutivas, e, portanto, deve-se assegurar que sua ocorrência ocorra fora do envelope de voo da aeronave. Para isto, estratégias de otimização utilizando programação linear e algoritmo genético são usadas para maximizar a velocidade de ocorrência de flutter, usando como variáveis de projeto as orientações das fibras do material, que podem variar ao longo da asa. Neste trabalho são estudados os casos de orientação constante das fibras e de orientação variável linearmente. Uma placa plana de grafite-epóxi é usada neste trabalho como modelo simplificado representando uma asa de um veículo aéreo não tripulado (VANT). O método dos elementos finitos é utilizado para discretizar a estrutura com elementos de casca, permitindo obter as matrizes de rigidez e massa. A resposta modal da estrutura é dada pela resolução do problema de autovalores e autovetores da equação de movimento harmônico livre. Os cálculos de aerodinâmica não-estacionária são realizados através do método de painéis com o software comercial ZAERO. Resultados para compósitos tradicionais, com fibras unidirecionais, e de rigidez variável linearmente são apresentados, para laminados constituídos por 1 e 2 lâminas. Para os casos estudados, o uso de compósitos de rigidez variável apresenta um aumento na velocidade de início de *flutter* de, aproximadamente, 2% comparado aos compósitos tradicionais.

**PALAVRAS-CHAVE:** *aeroelastic tailoring*, compósitos laminados, compósitos de rigidez variável, *flutter*.

**ROLDO, G. A Study on the Aeroelastic Optimization Using Laminated Composite Materials of Variable Stiffness to Maximize Flutter Speed.** 2016. 23. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016..

## **ABSTRACT**

This work studies how the use of variable stiffness composite laminates in the design of aeronautical structures can enhance the aeroelastic performance of these structures. The aeroelastic phenomenon of interest in this work is flutter, an aeroelastic instability caused by the coupling of aerodynamical forces and one or more vibrational modes of the structure. This phenomenon presents potentially destructive characteristics and, thus, it must be assured that its occurrence is outside the flight envelope of the airplane. Optimization strategies using linear programming and genetic algorithm are employed to maximize the flutter occurrence speed, using as design variables the fiber orientations of the material, which may vary along the wing. In this work, both constant orientation and linearly varying orientations are studied. A flat plate made of graphite-epoxy is used in this work as a simplified model of a drone's wing. The finite element method performs the discretization of the structure using shell elements, assembling the mass and stiffness matrices. The structure's modal response is given through the free harmonic motion equation eigenproblem. The unsteady aerodynamics calculations are performed by the commercial software ZAERO. Results for traditional composite, with unidirectional fibers, and variable stiffness composite are presented, for laminates of 1 and 2 plies. The use of variable stiffness composites presents an increase in flutter onset speed of, approximately 2% when compared to unidirectional composites.

**KEYWORDS:** aeroelastic tailoring, laminate composites, variable stiffness composites, flutter.

## ÍNDICE

	Pág.
1	INTRODUÇÃO ..... 1
2	OBJETIVOS ..... 1
3	AEROELASTIC TAILORING ..... 1
4	AEROELASTICIDADE ..... 3
5	OTIMIZAÇÃO ..... 4
5.1	MÉTODOS DE GRADIENTE ..... 4
5.2	ALGORITMOS EVOLUTIVOS ..... 5
6	MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS ..... 5
7	ANÁLISE ESTRUTURAL ..... 6
7.1	ANÁLISE MODAL ..... 6
7.2	ELEMENTOS FINITOS ..... 7
8	METODOLOGIA ..... 8
9	RESULTADOS ..... 9
9.1	COMPÓSITOS UNIDIRECIONAIS ..... 9
9.1.1	Lâmina Única ..... 9
9.1.2	Duas Lâminas ..... 10
9.2	COMPÓSITOS DE ORIENTAÇÃO VARIÁVEL ..... 11
9.2.1	Lâmina Única ..... 11
9.2.2	Duas Lâminas ..... 13
10	CONCLUSÃO ..... 14
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 14

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1 – Influência da rigidez direcional nas características de uma asa com enflechamento positivo [Shirk <i>et al.</i> , 1985]. . . . .	2
Figura 4.1 – Representação em blocos do sistema aeroelástico com retroalimentação. . . . .	3
Figura 5.1 – Fluxograma de um algoritmo genético típico. . . . .	5
Figura 7.1 – Elemento sólido tridimensional e sua degeneração para o elemento de Ahmad. . . . .	7
Figura 8.1 – Geometria da placa estudada, direção do escoamento paralelo a placa e referência da orientação das fibras. . . . .	8
Figura 8.2 – Discretização estrutural e aerodinâmica da placa estudada. . . . .	9
Figura 9.1 – Orientação das fibras para máxima velocidade de <i>flutter</i> em uma única lâmina com fibras unidirecionais. $V_f = 122m/s$ e $\theta = 72^\circ$ . . . . .	9
Figura 9.2 – Comportamento da velocidade de <i>flutter</i> para uma única lâmina unidirecional. . . . .	10
Figura 9.3 – Caminho percorrido pelo otimizador linear partindo de pontos aleatórios para um laminado de duas lâminas unidirecionais. . . . .	10
Figura 9.4 – Otimização genética para uma única lâmina de rigidez variável: evolução da população. . . . .	11
Figura 9.5 – Otimização genética para uma única lâmina de rigidez variável: evolução da distribuição da população quanto a função objetivo. . . . .	12
Figura 9.6 – Caminho percorrido pelo otimizador linear a partir de pontos iniciais da população inicial. . . . .	12
Figura 9.7 – Curvas de nível da velocidade de <i>flutter</i> para uma única lamina e representação das fibras para alguns ângulos. . . . .	13
Figura 9.8 – Orientação das fibras para máxima velocidade de <i>flutter</i> em um compósito de rigidez variável de uma única lâmina. $V_f = 124,8m/s$ , $\theta_t = 75,1^\circ$ e $\theta_r = 57,3^\circ$ . . . . .	13
Figura 9.9 – Otimização genética para um laminado com duas lâminas de rigidez variáveis: evolução da distribuição da população quanto a função objetivo. . . . .	13
Figura 9.10 – Tabela com resumo dos resultados obtidos. . . . .	14

## 1 INTRODUÇÃO

Projetos na indústria aeroespacial nos últimos anos vem buscando cada vez maior eficiência em termos de consumo de combustível e em sua capacidade operacional. A tendência de projeto é buscar aeronaves com motores mais eficientes, estruturas mais leves, maior autonomia e capacidade de carga. Para atender esses ensejos, novas tecnologias vem sendo desenvolvidas em diversas áreas.

O desenvolvimento de materiais compósitos avançados tem possibilitado uma aplicação cada vez mais ampla desses materiais em estruturas aeronáuticas, substituindo materiais tradicionais. Compósitos apresentam menor densidade, maior rigidez específica e maior resistência específica quando comparado aos metais, possibilitando um ganho em relação ao peso da estrutura sem comprometimento das propriedades mecânicas. Esse avanço, associado a novas técnicas de fabricação de componentes compósitos, tem impulsionado o desenvolvimento na área de projetos aeronáuticos, visando a otimização frente a aspectos operacionais de voo.

Essa relação de alta resistência mecânica e baixo peso, obtida com materiais compósitos, leva ao projeto de asas altamente flexíveis que estão sujeitas a sofrerem grandes deslocamentos e deformações. A flexibilidade excessiva pode causar efeitos indesejados quando em operação. As forças aerodinâmicas atuando sobre a estrutura, deformam a asa e modificam sua geometria. A mudança na geometria da asa, por sua vez, altera a distribuição das forças aerodinâmicas. Esse mecanismo de interdependência entre a geometria deformada da estrutura, as forças aerodinâmicas e rigidez da estrutura faz parte do campo de estudos da aeroelasticidade. Efeitos aeroelásticos são aqueles que se originam da interação entre efeitos elásticos, aerodinâmicos e inerciais. Do ponto de vista da responsabilidade estrutural dos componentes de uma aeronave, pode-se destacar o fenômeno de *flutter*, que depende diretamente da flexibilidade destes componentes.

*Flutter* é uma instabilidade aeroelástica que ocorre quando um ou mais modos de vibração da estrutura acoplam-se com as forças aerodinâmicas, resultando em um movimento harmônico oscilatório com amplitude crescente. O fenômeno de *flutter* é potencialmente destrutivo e, por isso, deve se assegurar que a velocidade de ocorrência de *flutter* esteja fora do envelope de voo da aeronave.

Novas técnicas de fabricação podem permitir a confecção de componentes com fibras de orientação continuamente variável ao longo de cada camada. Tais compósitos são conhecidos como compósitos de rigidez variável. Essas técnicas permitem um aumento de rigidez extremamente localizado na estrutura, conforme as necessidades de projeto [Gürdal e Olmedo, 1993].

## 2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo encontrar as melhores configurações de orientação de um laminado que diminui o risco da ocorrência de *flutter* em uma superfície aerodinâmica com alta flexibilidade, como aquelas encontradas em veículos aéreos não tripulados (VANTs).

A superfície aerodinâmica, objeto de estudo deste trabalho, é uma placa de compósito plana sujeita a um fluxo de ar paralelo, onde as configurações de interesse são obtidas de um problema de extremização, definido apenas pela maximização da velocidade de flutter.

Procura-se avaliar se há ganho em performance aeroelástica no uso de compósitos de rigidez variável, com diferentes números de camadas, em comparação com compósitos unidirecionais. Nesta primeira tratativa serão estudados casos simples de compósitos laminados com 1 e 2 laminas, construídos com orientação constante e variável linearmente.

## 3 AEROELASTIC TAILORING

A técnica de *aeroelastic tailoring* visa minimizar efeitos aeroelásticos, tais como instabilidades aeroelásticas, carregamentos de manobra, arrasto induzido e reversão do aileron, através da distribuição de rigidez e massa na estrutura.



Shirk *et al.*, 1985, definiram o termo *aeroelastic tailoring* como o "incorporamento de rigidez direcional no projeto estrutural de aeronaves a fim de controlar a deformação aeroelástica, estática ou dinâmica, de forma a afetar as performances aerodinâmica e estrutural de tal aeronave de um modo benéfico".

Munk, 1949, foi um dos primeiros a projetar uma estrutura através da técnica de *aeroelastic tailoring* quando usou a orientação dos grãos de madeira para projetar hélices que mantivessem um passo constante com o aumento das forças aerodinâmicas.

Durante os anos seguintes, houve avanços consistentes na área. Apesar de o uso de asas com enflechamento negativo ter sido sugerido ainda na década de 1930, foi só na década de 70, com o avanço dos estudos em *aeroelastic tailoring* que foi possível viabilizar essa ideia, [Shirk *et al.*, 1985]. Krone, 1975, mostrou que o uso de compósitos possibilitaria evitar o fenômeno de divergência em asas com enflechamento negativo. Esses estudos resultaram no projeto do Grumman X-29.

Com o uso de materiais compósitos laminados, por apresentarem ortotropia nas suas propriedades mecânicas, é fácil obter estruturas com a rigidez direcional desejada, escolhendo as orientações das fibras. Deslocando a direção de rigidez primária de uma asa para frente ou para trás, pode-se obter uma estrutura com diferentes características, como mostrado na Fig. 3.1. Sendo o eixo de referência estrutural o eixo elástico convencional, se a direção de rigidez primária não for coincidente com eixo de referência, haverá acoplamento entre torção e flexão [Weisshaar, 1998].



Figura 3.1 – Influência da rigidez direcional nas características de uma asa com enflechamento positivo [Shirk *et al.*, 1985].

Na década de 1980, pesquisadores estudaram a relação entre as instabilidades aeroelásticas em estruturas de material compósito e os parâmetros de rigidez - como rigidez flexural, rigidez torsional e acoplamento torção-flexão - que eram modificados através da mudança de orientação dos compósitos, [Hollowell e Dugundji, 1984] e [Green, 1987].

No final desta década, começaram a surgir estudos sobre aplicações de compósitos com rigidez variável. Estes compósitos, ao contrário dos compósitos tradicionais, apresentam as fibras com orientações variáveis em cada camada, [Gürdal e Olmedo, 1992].

O trabalho de De Leon *et al.*, 2012 utilizou uma estratégia de otimização na qual maximizava-se a frequência natural relacionada ao modo de *flutter* esperando-se que a velocidade de *flutter* também aumentasse. A otimização foi realizada considerando a orientação das fibras a cada elemento como variáveis de projeto, gerando um problema de otimização com grande número de graus de liberdade. Apesar dos resultados obtidos apresentarem um aumento na velocidade de ocorrência da instabilidade, a configuração final otimizada é de difícil fabricação.

Stanford *et al.*, 2014, usou compósitos de rigidez variável onde a orientação das fibras em cada camada é descrita através de três parâmetros (ângulo da fibra na raiz da asa, na ponta da asa e um ângulo de rotação do sistema de coordenadas). Essa abordagem diminui o número de variáveis de projeto, levando a um espaço de projeto menor, convergência mais rápida e continuidade das fibras.

Uma compilação extensiva dos trabalhos relacionados a *aeroelastic tailoring* pode ser encontrada no trabalho de Jutte e Stanford, 2014.

#### 4 AEROELASTICIDADE

Aeroelasticidade é a área que estuda os fenômenos decorrentes das interações entre as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas. Um sistema aeroelástico pode ser matematicamente descrito através da Eq. 4.1 [ZONA Technology Inc., 2011]:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_a(t) + \mathbf{F}_e(t) \quad (4.1)$$

Onde  $\bar{\mathbf{M}}$  e  $\bar{\mathbf{K}}$  são as matrizes generalizadas de massa e rigidez,  $\mathbf{x}(t)$  os deslocamentos e  $\mathbf{F}(t)$  as forças aerodinâmicas aplicadas à estrutura. Estas forças podem ser decompostas em forças de duas naturezas: as forças aerodinâmicas induzidas pelo deslocamento,  $\mathbf{F}_a(t)$ , e as forças externas,  $\mathbf{F}_e(t)$ , como turbulências atmosféricas, rajadas de vento e forças aerodinâmicas nas superfícies de controle devido à ação do piloto.

Com isso, podemos reescrever  $\mathbf{F}_a(t)$  como  $\mathbf{F}_a(\mathbf{x}(t))$ . Dessa forma, o sistema aeroelástico pode ser representado como um sistema dinâmico de malha fechada retroalimentada, conforme Fig. 4.1.

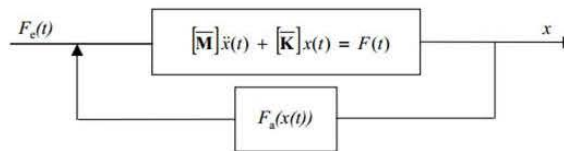


Figura 4.1 – Representação em blocos do sistema aeroelástico com retroalimentação.

Esse sistema auto-excitado por natureza gera um problema de instabilidade conhecido como flutter aeroelástico. Flutter é um fenômeno aeroelástico e é caracterizado pelo acoplamento entre um ou mais modos de vibração e forças aerodinâmicas e tem natureza potencialmente catastrófica. A prática usual para solução do problema de flutter é reescrever o problema no domínio Laplaciano como um conjunto de sistemas lineares. Isso requer que se assumam a linearização da amplitude, ou seja, a resposta aerodinâmica é linear com respeito à amplitude da deformação estrutural, se a amplitude for suficientemente pequena. O tamanho do problema também é reduzido resolvendo no espaço generalizado, deste modo pode-se reescrever o problema da forma apresentada na Eq.4.2 [ZONA Technology Inc., 2011]:

$$\left[ s^2 \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{K}} - q_\infty \mathbf{Q} \left( \frac{sL}{V} \right) \right] \mathbf{q} = 0 \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\mathbf{M}}$  e  $\bar{\mathbf{K}}$  são as matrizes de massa e rigidez generalizadas e  $\mathbf{Q} \left( \frac{sL}{V} \right)$  é a matriz generalizada de forças aerodinâmicas.

Essa equação é conhecida como a equação clássica do flutter. Os limites em que o flutter se inicia são determinados através dos autovalores complexos deste sistema.

Introduzindo um parâmetro não-dimensional ( $p$ ), onde  $k$  é a frequência reduzida,  $k = \omega L/V$  na Eq. 4.2 [ZONA Technology Inc., 2011]:

$$p = \frac{sL}{V} = (\gamma k + ik). \quad (4.3)$$

A Equação (4.2) fica:

$$\left[ \left( \frac{V}{L} \right)^2 \mathbf{M} p^2 + \mathbf{K} - q_\infty \mathbf{Q}(p) \right] \mathbf{q} = 0 \quad (4.4)$$

Por fornecer o valor real de amortecimento do sistema aeroelástico, a Eq. (4.4) é a equação desejada para a análise de flutter.

## 5 OTIMIZAÇÃO

Otimização ou programação matemática é a classe de problemas em que se busca achar a variável ou conjunto de variáveis de projeto que minimiza (ou maximiza) uma dada função objetivo. Este problema pode ainda ser apresentado de forma restringida, onde há uma função restrição que deve ser obedecida [Haftka e Gürdal, 1991]. A formulação para um problema de otimização genérico é da forma apresentada na Eq. 5.1.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito à} && g_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $x$  é a variável de projeto,  $f(x)$  é a função objetivo e  $g_i(x) \leq b_i$  são as restrições a serem observadas.

No escopo deste trabalho, pode-se reescrever este problema como uma maximização da velocidade de ocorrência de *flutter* da estrutura ( $V_f$ ), tendo como variáveis de projeto as orientações das fibras ( $\bar{\theta}$ ). O problema de otimização é, portanto, um problema sem restrições, descrito pela Eq. 5.2.

$$\underset{\bar{\theta}}{\text{maximizar}} \quad V_f(\bar{\theta}). \quad (5.2)$$

### 5.1 MÉTODOS DE GRADIENTE

Métodos de otimização baseados no gradiente procuram soluções para a minimização da função objetivo através da escolha de variáveis de projeto na direção do gradiente negativo do objetivo. Para tanto, esse método requer o uso das derivadas da função objetivo que podem ser de obtenção custosa. A atualização da variável de projeto é feita, genericamente, como descrito por Salomon, 1998, e mostrado na Eq. 5.3.

$$x_{t+1} = x_t - \eta \nabla f(x_t) \quad (5.3)$$

Na programação linear, este problema é resolvido obtendo-se aproximações lineares da função objetivo. As aproximações lineares da função objetivo e restrições são obtidas através da expansão em série de Taylor (Eq. 5.4).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!} (x - x^*)^n \quad (5.4)$$

Na Equação 5.4,  $x^*$  é um ponto conhecido próximo de  $x$ . A programação linear utiliza apenas o primeiro e segundo termos da expansão. Logo, a Eq. 5.5 reescreve o problema com vistas a maximização da velocidade de *flutter*.

$$\underset{x}{\text{max}} \quad V_f(\theta) = V_f(\theta^*) + (\theta - \theta^*) \frac{\partial V_f(\theta^*)}{\partial \theta} \quad (5.5)$$

Os métodos de gradientes, em geral, possuem uma convergência rápida, em poucos passos de otimização. Porém, o otimizador precisa de informações quanto ao gradiente da função a cada ponto. Além disso, métodos de gradiente não garantem a convergência para o ótimo global, sendo altamente dependentes da escolha dos parâmetros iniciais.

No problema de otimização da velocidade de *flutter* de um laminado com muitas variáveis de projeto devido a existência de muitas lâminas e/ou mudança de orientação, pode-se ter dificuldade com a escolha dos parâmetros iniciais, necessitando de estratégias alternativas para a obtenção do mínimo global.

## 5.2 ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Algoritmos genéticos são uma classe de técnicas de otimização estocástica inspiradas na evolução natural das espécies. Cada método de otimização evolucionária segue uma metodologia diferente, porém, todos são métodos de busca heurísticos baseados em população que incorporam variações randômicas e seleção, [Yang, 2010].

Na otimização por algoritmos genéticos, uma população de candidatos à solução é evoluída para soluções melhores. A busca pelo ótimo é um processo iterativo. A população em cada passo de iteração é chamada de geração e, a cada iteração, cada indivíduo da geração tem sua função objetivo avaliada. Os indivíduos mais adaptados passam por mutações e recombinações e então passam para a próxima geração. A parada do algoritmo geralmente é dada ou quando um número pré-determinado de gerações é atingido ou quando a função objetiva atinge um nível satisfatório. O fluxograma de um algoritmo genético está representado na Fig. 5.1.



Figura 5.1 – Fluxograma de um algoritmo genético típico.

Algoritmos genéticos apresentam alto gasto computacional, superior aos métodos de gradiente, por necessitarem avaliar a função objetivo um grande número de vezes. Suas vantagens são: não necessitar de informações quanto ao gradiente das funções, e, por apresentar uma seleção estocástica de variáveis de projeto a avaliar a cada passo, há maiores chances de o algoritmo encontrar o máximo global.

## 6 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Materiais compósitos laminados são aqueles que consistem de diversas lâminas constituídas por dois elementos: a matriz e o reforço fibroso. O material fibroso pode se apresentar disposto aleatoriamente ou seguindo orientações bem definidas. É do interesse deste trabalho tratar apenas dos compósitos laminados que apresentam fibras orientadas em uma direção preferencial.

A hipótese de Kirchhoff diz que uma linha reta normal ao plano médio na condição indeformada permanece reta e normal a esse plano após a deformação. Por consequência, os efeitos de cisalhamento são negligenciados. Essa hipótese é válida para a maioria dos casos, porém, para laminados espessos e laminados com alto grau de anisotropia, deformações cisalhantes podem ser significativas.

Na FSDT (First Order Shear Deformation Theory, teoria de deformações cisalhantes de primeira ordem), essa hipótese é relaxada, e as deformações transversais são consideradas constantes em respeito à espessura. Uma descrição mais detalhada sobre a mecânica dos materiais compósitos laminados pode ser encontrada em Reddy, 1999.

A matriz constitutiva desses materiais, no sistema de referência da lâmina, é dada pela

Eq. 6.1 e seus elementos  $C_{ij}$  são dados conforme as Eqs. 6.2 [Reddy, 1999].

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & C_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & C_{44} &= G_{23}, \\ C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

É necessário rotacionar essa matriz para o sistema de coordenadas do laminado, conforme Eq. 6.3. A matriz de rotação  $\mathbf{T}(\theta)$  é dada pela Eq. 6.4 [Reddy, 1999].

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{T}^T(\theta)\mathbf{C}_k\mathbf{T}(\theta) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

## 7 ANÁLISE ESTRUTURAL

### 7.1 ANÁLISE MODAL

A equação geral de movimento de uma estrutura é dada pela Eq. 7.1 [Rao, 2010].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (7.1)$$

Onde  $\mathbf{M}$  é a matriz global de massa,  $\mathbf{C}$  a matriz global de amortecimento,  $\mathbf{K}$  a matriz global de rigidez,  $\mathbf{x}$  o deslocamento e  $\mathbf{f}(t)$  são as forças externas aplicadas. Desconsiderando o amortecimento da estrutura e considerando a estrutura livre de forças externas, por simplificação, a equação de movimento é reescrita como em Eq. 7.2 Rao [2010].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (7.2)$$

Assumindo que os deslocamentos são descritos por funções harmônicas, reescreve-se os deslocamentos e as acelerações(Eqs. 7.3).

$$\mathbf{x} = \Phi \sin(\omega t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi \sin(\omega t) \quad (7.3)$$

sendo  $\Phi$  a amplitude, e  $\omega$  a frequência de vibração. Pode-se, então chegar a equação do problema de autovalores, Eq. 7.4.

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\Phi_i = 0 \quad (7.4)$$

Para que este problema tenha soluções não-triviais, o determinante da expressão entre parênteses deve ser nulo.

$$\det (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (7.5)$$

Logo, para obtermos a resposta modal caracterizada por  $\omega$  e  $\Phi$ , deve-se obter as matrizes de rigidez e massa da estrutura.

## 7.2 ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é empregado para analisar o comportamento estrutural do objeto de estudo. A discretização de uma estrutura laminada pode ser feita através de elementos de casca.

Neste trabalho, é usado um elemento quadrilátero isoparamétrico de 8 nós, gerado a partir da degeneração de um elemento tridimensional (Fig. 7.1), com funções de forma da família serendipity, como proposto por Ahmad e al., 1970.

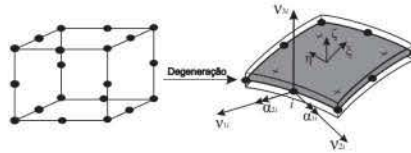


Figura 7.1 – Elemento sólido tridimensional e sua degeneração para o elemento de Ahmad.

Assim como outros elementos deste tipo, a formulação apresentada por Kumar e Palaninathan, 1995, possibilita escrever a relação deformação-deslocamento de forma explícita em termos de coordenadas de espessura. Esse elemento é mais eficiente que elementos degenerados tradicionais quando aplicados a materiais laminados. A formulação da matriz de rigidez é dada pela Eq. 7.6.

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}_3 \mathbf{B}_2 \right) \frac{2}{t} |J| d\xi_1 d\xi_2, \quad (7.6)$$

onde  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{C}_3$  são dadas pelas Eqs.7.7,  $J$  é o Jacobiano,  $t$  a espessura do elemento e  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  são matrizes que formam a matriz de deformação  $\mathbf{B}$ , Eq. 7.8.

$$\mathbf{C}_1 = \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k (z_t - z_b)_k, \quad \mathbf{C}_2 = \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k (z_t^2 - z_b^2)_k, \quad \mathbf{C}_3 = \sum_{k=1}^{nl} \mathbf{C}_k (z_t^3 - z_b^3)_k. \quad (7.7)$$

Nestas equações,  $nl$  é o número de lâminas,  $z_t$  e  $z_b$  são as coordenadas em relação a linha de centro que definem a espessura da lâmina e  $\mathbf{C}_k$  é a matriz constitutiva rotacionada, apresentada na Eq. 6.3.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + z\mathbf{B}_2 \quad (7.8)$$

A matriz de massa é dada pela formulação de matriz de massa concentrada da Eq. 7.9, conforme Hughes, 1987.

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} d\Omega_e, \quad \begin{cases} \mathbf{N}_i \gamma \mathbf{N}_j, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (7.9)$$

## 8 METODOLOGIA

No presente trabalho, busca-se aplicar estratégias de otimização para estruturas aeronáuticas visando mitigar os efeitos de instabilidades aeroelásticas, em especial o *flutter*. O objeto de estudo deste trabalho é uma placa retangular plana de material compósito, com uma e duas lâminas, representando, de forma simplificada, uma superfície de sustentação. As condições de contorno são simplificadas, de modo que, uma das arestas da placa é totalmente engastada, representando a fixação no corpo da aeronave. O carregamento aerodinâmico é dado por um escoamento paralelo a face da placa e perpendicular à envergadura da asa. Figura 8.1 mostra esta configuração.

A geometria e o material desta placa são os mesmos utilizados no trabalho de Lebkuhen *et al.* [2013]. Esta placa possui razão de aspecto,  $R = 3$  com dimensões de  $300 \times 100$  mm e espessura de 1.5 mm. O material compósito utilizado é epóxi com reforço de fibra de carbono. As propriedades deste material são apresentadas na Tab. 8.1.

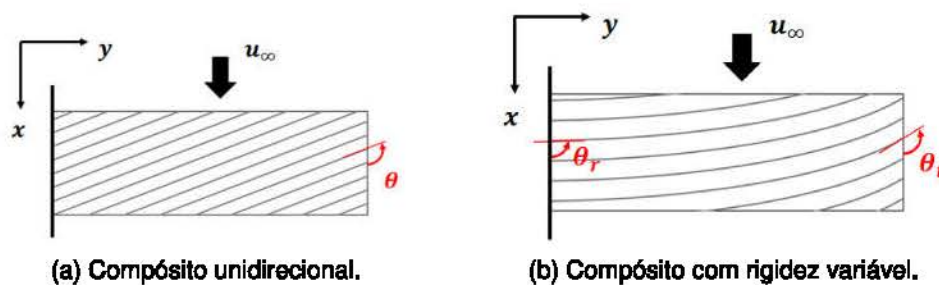


Figura 8.1 – Geometria da placa estudada, direção do escoamento paralelo a placa e referência da orientação das fibras.

Tabela 8.1 – Propriedades mecânicas do Grafite-Epóxi.

$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
92,7	6,7	4,35	0,25	1427

A Figura 8.1a mostra a referência para o ângulo de orientação das fibras para um compósito unidirecional, onde cada lâmina é definida por apenas um valor de  $\theta$ . Neste trabalho, para descrever a orientação das fibras para compósitos com rigidez variável, considerou-se uma variação linear entre a orientação das fibras na raiz,  $\theta_r$ , e na ponta da asa,  $\theta_t$ , necessitando, desta forma, apenas duas variáveis de projeto para descrever a orientação das fibras em cada ponto de uma lâmina. Na Figura 8.1b pode se observar a variação da orientação das fibras em uma lâmina ao longo da semi-envergadura da asa. A Equação 8.1 descreve matematicamente como as orientações ao longo da asa podem ser obtidas.

$$\theta(y) = \frac{\theta_t - \theta_r}{L}y + \theta_r \quad (8.1)$$

Os cálculos de aerodinâmica não-estacionária são realizados pelo software comercial ZAERO, que soluciona a Eq. 4.2 utilizando o método de painéis subsônico, ZONA6.

Os cálculos de elementos finitos, análise modal e otimização, bem como o controle do software ZAERO foram feitos na plataforma de programação MATLAB, usando o pacote de funções CSOpt (*Composite Shell Optimization Framework*), desenvolvido por integrantes e ex-integrantes do Grupo de Mecânica Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul ao longo dos anos.

A discretização da placa é feita em 48 elementos finitos, como mostra a Fig. 8.2a, e em 40 painéis para o cálculo de aerodinâmica não-estacionária, conforme Fig. 8.2b, que é o limite de painéis permitidos para a versão de demonstração do ZAERO. O uso de discretizações

distintas para o modelo estrutural e aerodinâmico, requer o emprego da técnica de *spline* para transportar informações entre os modelos.

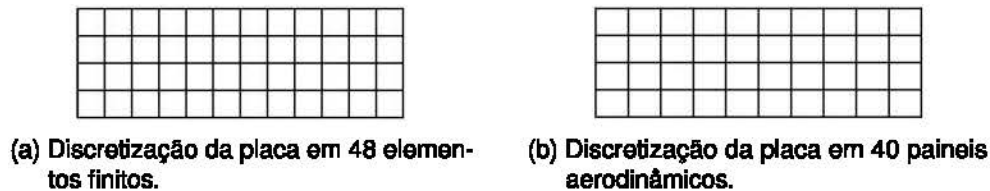


Figura 8.2 – Discretização estrutural e aerodinâmica da placa estudada.

O gradiente das funções em cada ponto são aproximados por diferenças finitas à frente, onde uma pequena perturbação é provocada em cada variável de projeto e então avalia-se o valor da função objetivo neste novo ponto. Através da diferença entre o valor da função objetivo para as variáveis perturbadas e não perturbadas, obtém-se uma aproximação do gradiente. A Equação 8.2 mostra como são obtidos os gradientes da função.

$$\frac{\partial V_f(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{V_f(\theta_i + \Delta\theta) - V_f(\theta_i)}{\Delta\theta} \quad (8.2)$$

Devido a natureza do problema de otimização, para a obtenção das orientações (variáveis de projeto) que maximizam a velocidade de *flutter*, são utilizados métodos baseados em gradientes (programação linear sequencial) e métodos evolutivos (algoritmo genéticos).

## 9 RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos dos processos de otimização. Primeiramente é explorada uma placa plana com compósitos unidirecionais, isto é, fibras com orientação única em cada camada. Em seguida, usando a mesma geometria, estuda-se como o uso de compósitos de rigidez variável podem influenciar nas características aeroelásticas de uma aeronave.

### 9.1 COMPÓSITOS UNIDIRECIONAIS

#### 9.1.1 Lâmina Única

Utilizando-se do programador linear, chega-se à velocidade máxima de *flutter*, para uma única lâmina, que se dá em  $\theta = 72^\circ$  e tem valor de 122 m/s. As orientações das fibras podem ser vistas em Fig. 9.1.

Para compreensão do comportamento da função objetivo foi feita uma varredura ao longo do espaço de projeto que é apresentada na Fig. 9.2. Além da velocidade de *flutter*, são mostrados quais os modos de vibração estão relacionados com a instabilidade. Pode-se observar que as descontinuidades na função objetivo são ocasionados por mudanças no modo de vibração que ocasionam o *flutter*.

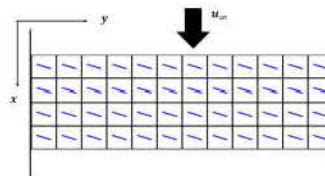


Figura 9.1 – Orientação das fibras para máxima velocidade de *flutter* em uma única lâmina com fibras unidirecionais.  $V_f = 122\text{m/s}$  e  $\theta = 72^\circ$

Devido ao comportamento relativamente suave da função, o programador linear é capaz de convergir para os pontos de máximo locais ( $\theta = -45, 15$  e  $72^\circ$ ), porém a performance



aeroelástica nos máximos não-globais é bastante inferior àquela no máximo global. Isto pode ser facilmente evitado iniciando o programador linear para alguns poucos valores de  $\theta$  diferentes. Após a otimização linear deste pontos, escolhe-se o configuração otimizada com maior valor da função objetivo.

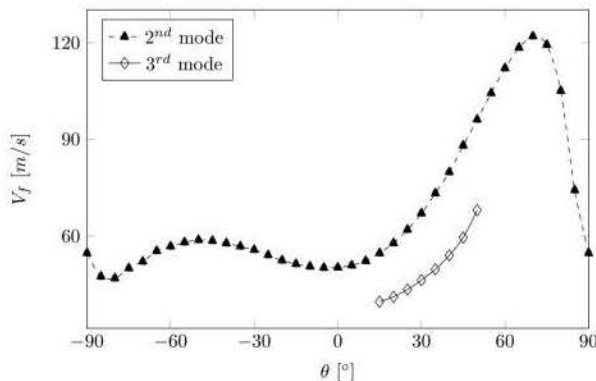


Figura 9.2 – Comportamento da velocidade de *flutter* para uma única lâmina unidirecional.

### 9.1.2 Duas Lâminas

Nesta seção, será otimizado o laminado de duas lâminas com espessuras iguais de 0.75 mm. As orientações das fibras em cada lâmina são independentes uma em relação a outra.

No trabalho anterior de Roldo *et al.*, 2015, iniciou-se o otimizador linear a partir de alguns pontos aleatórios e observou-se o caminho percorrido pelo otimizador até atingir o critério de convergência. Estes resultados podem ser vistos na Fig. 9.3, onde os losangos representam os pontos de partida do otimizador e os quadrados os pontos de parada. As curvas de nível foram obtidas através da varredura do espaço de projeto, em intervalos de  $5^\circ$ .

Podemos ver que, assim como para o compósito de uma única lâmina, o otimizador linear pode não convergir para o máximo global. De fato, com o aumento de número de variáveis de projeto, a função objetivo se apresenta menos suave e com mais descontinuidades. Além disso, o número de máximos locais se torna maior, tornando mais provável que um ponto inicial escolhido ao randomicamente leve a um ótimo local.

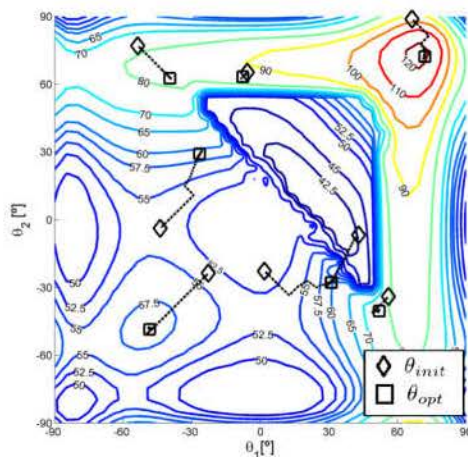


Figura 9.3 – Caminho percorrido pelo otimizador linear partindo de pontos aleatórios para um laminado de duas lâminas unidirecionais.

A configuração com melhor performance encontrada em relação à velocidade de *flutter* é a mesma obtida na seção anterior, com apenas uma lâmina, com  $\theta_1 = \theta_2 = 72^\circ$  e  $V_f = 122$  m/s.

## 9.2 COMPÓSITOS DE ORIENTAÇÃO VARIÁVEL

Nesta seção, busca-se otimizar a performance aeroelástica de compósitos de rigidez variável. Devido a maior quantidade de variáveis de projeto, utilizou-se diferentes estratégias de otimização para este estudo. Primeiro apenas evolutiva e depois por programação linear.

### 9.2.1 Lâmina Única

Para iniciar o algoritmo genético, uma população composta de 9 indivíduos distribuídos igualmente espaçados pelo espaço de projeto, mostrada na Fig. 9.4a, com os valores de  $\theta_r$  e  $\theta_t$  sendo uma combinação entre os valores de 30, 90 e 150°. A Fig. 9.4 mostra a evolução da população ao longo das 50 gerações de otimização.

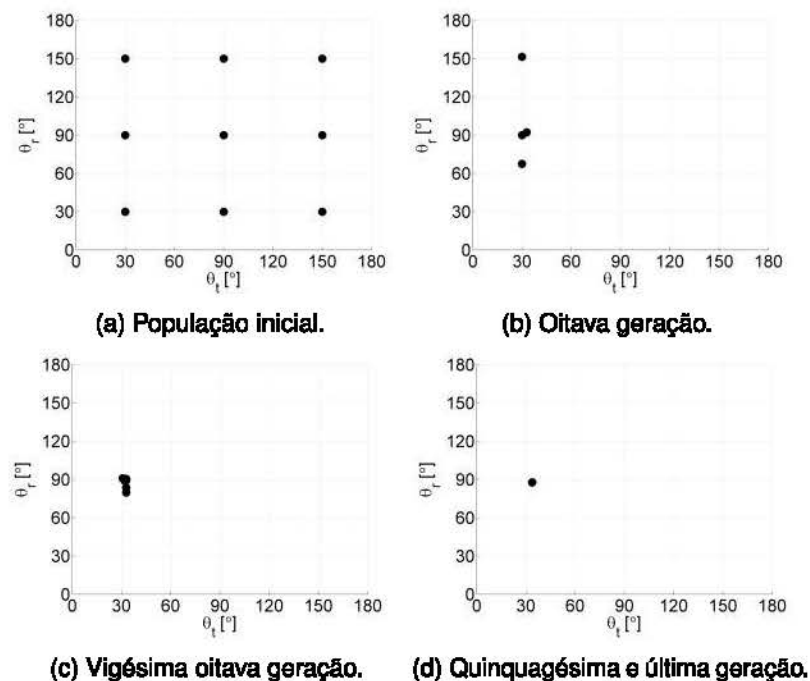


Figura 9.4 – Otimização genética para uma única lâmina de rigidez variável: evolução da população.

A Figura 9.5 mostra a evolução da média e máximo da função objetivo da população ao longo das gerações.

O melhor indivíduo da última geração apresentou  $V_f = 120,5$  m/s, com fibras orientadas à  $\theta_r = 87,7^\circ$  e  $\theta_t = 33,8^\circ$ .

Utilizando os três melhores indivíduos da população inicial ( $\theta_r = 90^\circ, \theta_t = 30^\circ$ ;  $\theta_r = 30^\circ, \theta_t = 90^\circ$  e  $\theta_r = 30^\circ, \theta_t = 150^\circ$ ) foram utilizados para iniciar o otimizador linear. A Fig. 9.6 mostra o caminho percorrido pelo otimizador para estes casos. As configurações ótimas encontradas foram  $V_f(\theta_r = 83,8^\circ, \theta_t = 42,7^\circ) = 123,5$  m/s,  $V_f(\theta_r = 74,2^\circ, \theta_t = 62,0^\circ) = 124,8$  m/s e  $V_f(\theta_r = 75,1^\circ, \theta_t = 57,3^\circ) = 124,8$  m/s.

Para compreender e analisar os resultados obtidos pelas estratégias de otimização, a velocidade de *flutter* foi avaliada no intervalo entre  $0^\circ \leq \theta_r, \theta_t \leq 180^\circ$ , com intervalos de  $7,5^\circ$ . A Fig. 9.7 mostra as curvas de nível da velocidade de *flutter* para um laminado composto de apenas uma lâmina com orientação linearmente variável.

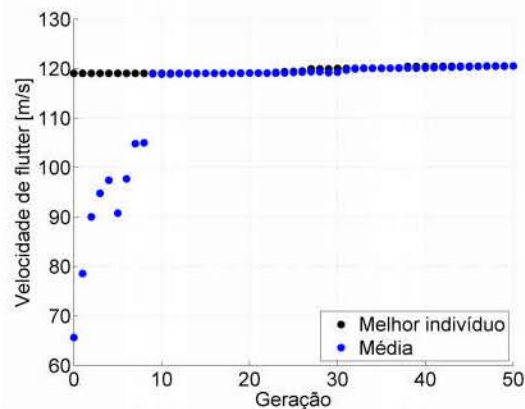


Figura 9.5 – Otimização genética para uma única lâmina de rigidez variável: evolução da distribuição da população quanto a função objetivo.

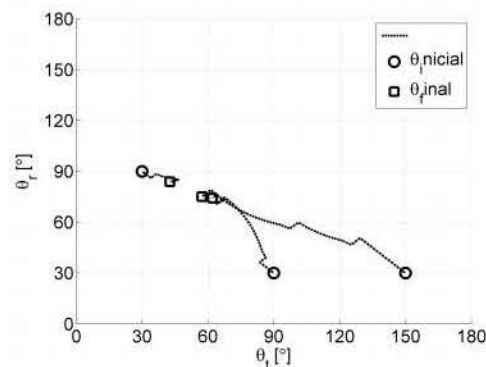


Figura 9.6 – Caminho percorrido pelo otimizador linear a partir de pontos iniciais da população inicial.

Na Fig. 9.7 também estão mostrados, ao redor do gráfico de curva de níveis, algumas lâminas para algumas orientações com valores de  $\theta$  de 0, 90 e 180°, para facilitar o entendimento do gráfico.

Comparando as Figs. 9.4, 9.6 e 9.7, pode-se ver que os otimizadores utilizados foram capazes de obter uma solução na região do ótimo global, porém apenas o programador linear conseguiu chegar ao ponto de máximo. O tempo total de processamento para o algoritmo genético foi de 1 hora e 10 minutos. Em contra partida, o tempo para avaliação da primeira geração, seleção dos melhores indivíduos e otimização linear de cada um foi de 32 minutos.

Comparando o resultado para laminados unidirecionais e de orientação variável de uma única lâmina, pode-se ver que o ganho em velocidade de *flutter* obtido dando-se um novo grau de liberdade ao problema é pequeno, cerca de 2%.

### 9.2.2 Duas Lâminas

A mesma estratégia de otimização utilizado para o compósito de rigidez variável de uma lâmina é empregada nesta seção.

A população inicial é composta por 81 indivíduos, novamente compostos pela combinação fatorial entre 30, 90 e 150°, desta vez para 4 parâmetros ( $\theta_r$  e  $\theta_l$  em cada camada). O otimizador é parado após 50 gerações. A Figura 9.9 mostra o valor médio e máximo da velocidade de *flutter* para cada geração.

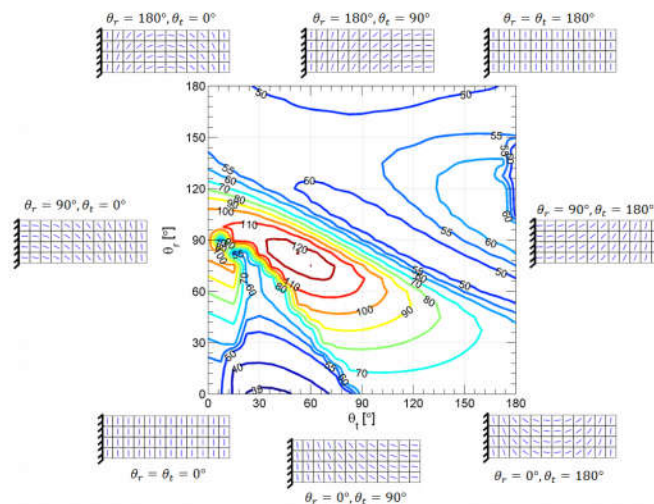


Figura 9.7 – Curvas de nível da velocidade de flutter para uma única lamina e representação das fibras para alguns ângulos.

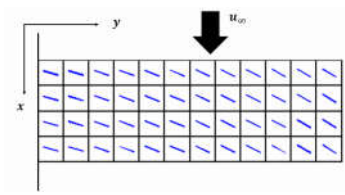


Figura 9.8 – Orientação das fibras para máxima velocidade de flutter em um compósito de rigidez variável de uma única lâmina.  $V_f = 124,8 m/s$ ,  $\theta_t = 75,1^\circ$  e  $\theta_r = 57,3^\circ$ .

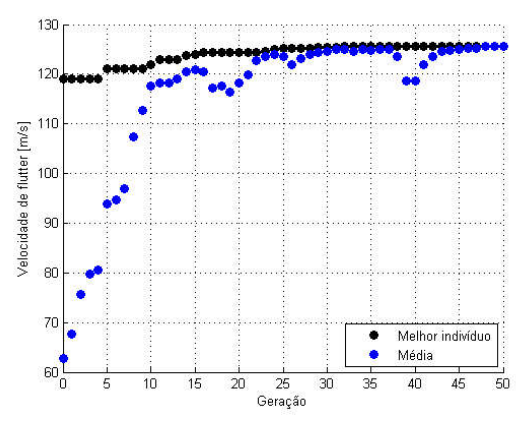


Figura 9.9 – Otimização genética para um laminado com duas lâminas de rigidez variáveis: evolução da distribuição da população quanto a função objetivo.

Entre a população da última geração, o indivíduo que apresentou a avaliação da função objetivo mais elevada obteve velocidade de flutter de 125,6 m/s, com a lâmina superior com orientações  $\theta_{r1} = 78,75^\circ$ ,  $\theta_{t1} = 56,7^\circ$ , e a lâmina inferior com  $\theta_{r2} = 78,75^\circ$ ,  $\theta_{t2} = 56,8^\circ$ . Nota-se que os valores de velocidade obtidos não diferem significativamente dos valores para uma lâmina com orientação variável.

Iniciando-se o otimizador linear, novamente a partir dos melhores indivíduos da população inicial do algoritmo genético, foi possível chegar ao ponto de ótimo de 125,6 m/s, com

orientações  $\theta_t = 77,59^\circ$  e  $\theta_r = 58,48^\circ$  nas duas camadas.

Deve-se notar que apesar de as respostas da velocidade de *flutter* serem muito próximas em todos os casos estudados, as orientações do laminado modificaram significativamente quando foi permitida a sua variação linear.

O tempo de computador usado para processar a otimização para o algoritmo genético foi de 10 horas e 5 minutos. Enquanto o tempo de otimização para o programador linear foi de 2 horas e 57 minutos. Figura 9.10 consolida os resultados obtidos.

	Nº de lâminas	Método de Otimização	Orientações	$V_f$ [m/s]
Unidirecional	1	PL	$\theta = 72^\circ$	122
	2	PL	$\theta_1 = \theta_2 = 72^\circ$	122
Rigidez Variável	1	PL	$\theta_r = 75,1^\circ, \theta_t = 57,3^\circ$	124,8
			$\theta_r = 74,2^\circ, \theta_t = 62^\circ$	124,8
		GA	$\theta_r = 87,7^\circ, \theta_t = 33,8^\circ$	120,5
	2	PL	$\theta_{r1} = 77,59^\circ, \theta_{t1} = 58,48^\circ$ $\theta_{r2} = 77,59^\circ, \theta_{t2} = 58,48^\circ$	125,6
			GA	$\theta_{r1} = 78,75^\circ, \theta_{t2} = 56,7^\circ$ $\theta_{r1} = 78,75^\circ, \theta_{t2} = 56,8^\circ$

Figura 9.10 – Tabela com resumo dos resultados obtidos.

## 10 CONCLUSÃO

Com este trabalho, mostrou-se a relevância de se considerar a mudança de orientação das fibras de um laminado nos efeitos aeroelásticos associados com materiais compósitos no projeto aeronáutico. O uso da técnica de *aeroelastic tailoring* mostrou-se importante para se obter uma estrutura aeronáutica mais eficiente quanto à instabilidade aeroelástica. Apesar de as respostas da velocidade de *flutter* serem muito próximas, as orientações do laminado modificaram significativamente ao longo da asa para estes simples casos estudados.

Ficou evidente que aumentando o número de graus de liberdade do projeto, como adição de uma lâmina e variação linear na orientação das fibras, os ganhos obtidos em termos de mitigação de *flutter* através da maximização da velocidade de ocorrência deste fenômeno não foram expressivos. Possivelmente, os custos associados aos processos de fabricação envolvidos para fabricar compósitos de rigidez variável não justifiquem o pequeno acréscimo em performance nos casos apresentados neste trabalho. Contudo, esta conclusão é válida apenas para os casos apresentados aqui. O uso de diferentes ângulos de ataque da asa, uso de outras funções para caracterizar as orientação das fibras, ou mesmo de outros perfis aerodinâmicos, podem levar a ganhos de performance de maior significância.

O uso do algoritmo genético para este tipo de problema se mostrou bastante custoso em termos de tempo computacional, com tempos muito maiores que para o otimizador linear baseado em gradiente partindo de pontos obtidos por uma varredura grosseira, sem chegar a configurações com performance superiores. Porém, visto a importância da seleção dos valores iniciais das orientações, uma estratégia híbrida (evolutivo e programação linear) pode ser necessária para encontrar o mínimo global quando se aumenta o número de parâmetros devido a inclusão de mais lâminas ou o uso de funções da orientação das fibras com maior número de variáveis.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahmad, S., al., e. "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements". International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970.

- De Leon, D. M., de Souza, C. E., Fonseca, J. S. O., da Silva, R. G. A. "**Aeroelastic tailoring using fiber orientation and topology optimization**". Structural Multidisciplinary Optimization, 2012.
- Gürdal, Z., Olmedo, R. "**Composite Laminates with Spatially Varying Fiber Orientations Variable Stiffness Panel Concept**". 1992.
- Gürdal, Z., Olmedo, R. "**In-Plane Response of Laminates with Spatially Varying Fiber Orientations: variable stiffness concept**". AIAA, 1993.
- Green, J. A. "**Aeroelastic Tailoring of Aft-Swept High-Aspect-Ratio Composite Wings**". Journal of Aircraft, 1987.
- Haftka, R., Gürdal, Z. "**Elements of Structural Optimization**". [S.I.]: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Hollowell, S. J., Dugundji, J. "**Aeroelastic Flutter and Divergence of Stiffness Coupled, Graphite/Epoxy Cantilevered Plates**". Journal of Aircraft, 1984.
- Hughes, T. J. R. "**The Finite Element Method- Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**". [S.I.]: Prentice-Hall, 1987.
- Jutte, C. V., Stanford, B. K. "**Aeroelastic Tailoring of Transport Aircraft Wings: state-of-the-art and potential enabling technologies**". NASA TM, 2014.
- Krone, N. J. "**Divergence Elimination with Advanced Composites**". AIAA Aircraft Systems and Technology Meeting, 1975.
- Kumar, W. P. P., Palaninathan, R. "**Finite Element Analysis of Laminated Shells with Exact Through-Thickness Integration**". Composites & Structures, 1995.
- Lebkuchen, H. L., Marto, A. G., de Souza, C. E. "**Modal Parameters Fitting of Composite Flat Plates for Aeroelastic Analysis**". 22nd International Congress of Mechanical Engineering, 2013.
- Munk, M. 1949. n.2,484,308,1111.
- Rao, S. S. **Mechanical Vibrations**. [S.I.]: Pearson, 2010.
- Reddy, J. N. "**Theory and Analysis of Laminated Composite Plates**". [S.I.]: null, 1999.
- Roldo, G., Fonseca, J. S. O., Souza, C. E. de. "**Aeroelastic Flutter Optimization Through Fiber Orientation**". 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering, 2015.
- Salomon, R. "**Evolutionary Algorithms and Gradient Search: similarities and differences**". IEE Transactions on Evolutionary Computation, 1998.
- Shirk, M. H., Hertz, T. J., Weisshaar, T. A. "**Aeroelastic Tailoring—Theory, Practice, and Promise**". Journal of Aircraft, 1985.
- Stanford, B. K., Jutte, C. V., WU, K. C. "**Aeroelastic benefits of tow steering for composite plates**". Composite Structures, 2014.
- Weisshaar, T. A. "**Aeroelastic Tailoring for Improved UAV Performance**".
- Yang, X. "**Engineering Optimization: an introduction with metaheuristic applications**". [S.I.]: Wiley, 2010.
- ZONA Technology Inc. "**ZAERO Theoretical Manual**". Version 8.5.ed. [S.I.]: "ZAERO Theoretical Manual", 2011.