

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

FORMULAÇÃO LTS_N PARA PROBLEMAS DE
TRANSPORTE SEM SIMETRIA AZIMUTAL E PROBLEMAS
DEPENDENTES DO TEMPO

por

Cynthia Feijó Segatto

Tese, requisito para obtenção do Título
de Doutor em Engenharia

Porto Alegre

1995

FORMULAÇÃO LTS_N PARA PROBLEMAS DE
TRANSPORTE SEM SIMETRIA AZIMUTAL E PROBLEMAS
DEPENDENTES DO TEMPO

por

Cynthia Feijó Segatto

Mestre em Matemática

Tese submetida ao corpo Docente do programa de Pós
Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos
necessários para o Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Roberto D. Milanez Garcia

IEAv - CTA

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

IMA - UFRGS

Prof. Dr. Horácio Vielmo

PROMEC - UFRGS

Prof. Dr. Horácio Vielmo

Coordenador do Promec

Porto Alegre, 19 de outubro de 1995.

*Dedico este trabalho
aos meus pais e ao
Flávio, meu marido, pela
compreensão, amor e paciência.*

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena, pela orientação, amizade e incentivo.

À Dra. Elaine Streck pela amizade e pelo auxílio na parte computacional do trabalho.

Aos colegas Augusto Cardona e Jorge Zabadal, sempre prontos a auxiliar nas horas difíceis.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Nuclear da UFRGS.

Aos colegas do Instituto de Matemática da PUCRS.

RESUMO

Neste trabalho, estendemos, de forma analítica, a formulação LTS_N à problemas de transporte unidimensionais sem simetria azimutal. Para este problema, também apresentamos a solução com dependência contínua na variável angular, a partir da qual é estabelecido um método iterativo de solução da equação de transporte unidimensional. Também discutimos como a formulação LTS_N é aplicada na resolução de problemas de transporte unidimensionais dependentes do tempo, tanto de forma aproximada pela inversão numérica do fluxo transformado na variável tempo, bem como analiticamente, pela aplicação do método LTS_N nas equações nodais. Simulações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura são apresentadas.

ABSTRACT

In this work, we extend, in an analytical way, the LTS_N formulation to one-dimensional transport problems without azimuthal symmetry. For this problem, we also present the solution with continuous dependence on the angular variable, from which an iterative method of the one-dimensional transport equation solution is established. We also discuss how the LTS_N formulation is applied to the resolution of the one-dimensional time dependent transport problem, both in an approximate way, by the numerical inversion of the transformed time flux, and analytically, by the application of the LTS_N method into the nodal equations. Numerical simulations and comparisons with results available in the literature are presented.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $A_n^m(\tau)$ Coeficientes da expansão em polinômios associados de Legendre da função $I^m(\tau, \mu)$
- $\bar{A}_n^m(s)$ Transformada de Laplace de $A_n^m(\tau)$
- $\bar{\underline{A}}^m(s)$ Vetor com componentes $\bar{A}_n^m(s)$
- $\bar{\underline{A}}^{m*}(0)$ Vetor cujas componentes são combinação linear dos $A_n^m(0)$
- $\bar{\underline{A}}^m(0)$ Vetor com componentes $A_n^m(0)$
- $B(x)$ Matriz transformada inversa de $\bar{M}_N^{-1}(s)$ (com simetria azimutal)
- $B^m(\tau)$ Matriz transformada inversa de $\bar{M}_N^{-1}(s)$ (sem simetria azimutal)
- $B_i^m(\tau)$ Sub-matrizes, de ordem $N/2$, de $B^m(\tau)$ com $i=1, 2, 3, 4$
- C^m Matriz de coeficientes
- $\bar{\underline{C}}^m(\tau)$ Vetor definido pela convolução de $B^m(\tau)$ por $\bar{\underline{Q}}^m(\tau)$
- $\bar{\underline{C}}_i^m(a)$ Sub-vetor, de ordem $N/2$, de $\bar{\underline{C}}^m(\tau)$ com $i=1, 2$
- $\bar{\underline{D}}^m(\tau)$ Vetor definido pela multiplicação de $B^m(\tau)$ por $\bar{\underline{\Psi}}^m(0)$
- D^m Notação usada para indicar a multiplicação de $B^m(\tau)$ por C^m
- $f_1(u)$ Fluxo angular incidente em $x=0$, para $\mu > 0$ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm s esfera radiano}} \right)$
- $f_2(u)$ Fluxo angular incidente em $x=x_0'$, para $\mu < 0$ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm s esfera radiano}} \right)$

f_m	Fluxo angular incidente em $x=0$, na direção μ_m $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$f_m(t)$	Fluxo angular incidente em $x=0$, em μ_m no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\bar{f}_m(p)$	Fluxo angular transformado, incidente em $x=x_0$, na direção μ_m
$F(\mu, \varphi)$	Intensidade de radiação incidente em $x=0$, na direção (μ, φ) $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
F_m	Intensidade de radiação incidente em $x=0$ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\underline{F}_t(s)$	Vetor fonte média na variável tempo (método nodal)
$G(\mu, \varphi)$	Intensidade de radiação incidente em $x=x_0$, na direção (μ, φ) $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
G_m	Intensidade de radiação incidente em $x=x_0$ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$g(u)$	Fluxo angular incidente em $x=x_0$, na direção μ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
g_m	Fluxo angular incidente em $x=x_0$, na direção μ_m $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$g_m(t)$	Fluxo angular de partículas incidente em $x=0$, na direção μ_m no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\bar{g}_m(p)$	Fluxo angular incidente em $x=0$, na direção μ_m , transformado na variável tempo
$\underline{G}^m(\tau)$	Vetor fonte
$\underline{G}_x(s)$	Vetor fonte média transformado em x (método nodal)
$\underline{H}^m(\tau)$	Vetor definido pela convolução de $\underline{B}^m(\tau)$ com $\underline{Q}(\tau)$

I	Matriz Identidade
$I(\tau, \mu, \varphi)$	Intensidade de radiação em τ , e na direção (μ, φ) $\left(\frac{\text{fótons}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$I_c^m(\tau, \mu)$	Coefficiente dos cossenos da decomposição de Chandrasekhar da Intensidade de radiação sem simetria azimutal em τ , na direção μ
$I_s^m(\tau, \mu)$	Coefficiente dos senos da decomposição de Chandrasekhar da Intensidade de radiação sem simetria azimutal em τ , na direção μ
$I^m(\tau, \mu)$	Notação usada para $I_c^m(\tau, \mu)$ ou $I_s^m(\tau, \mu)$
$I_n^m(\tau)$	Intensidade de radiação em τ e na direção μ_n $\left(\frac{\text{fótons}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$I_n^m(s)$	Transformada de Laplace de $I_n^m(\tau)$
$I_*^m(\tau)$	Termo não generalizado da decomposição de $I^m(\tau, \mu)$ $\left(\frac{\text{fótons}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\underline{I}^m(s)$	Vetor intensidade de radiação transformado
$\underline{I}^m(0)$	Vetor das intensidades de radiação em $x=0$
$\underline{I}_i^m(0)$	Sub-vetor, de ordem $N/2$, do vetor $\underline{I}^m(0)$, $i=1,2$
L	Grau de anisotropia
$\overline{M}_N(s)$	Matriz $LTS_{N'}$, unidimensional com simetria azimutal
$\overline{\overline{M}}_N(s, p)$	Matriz $LTS_{N'}$, dependente do tempo
$\overline{M}_N^m(s)$	Matriz $LTS_{N'}$, unidimensional, sem simetria azimutal
$\overline{M}_N^i(s)$	Matriz $LTS_{N'}$, método nodal

$\bar{M}_x(s)$	Matriz LTS_N , método nodal
M_0^m	Matriz dos momentos, método LTP_N
M_{jk}^{m+}	Notação para os momentos calculados para $\mu > 0$
M_{jk}^{m-}	Notação para os momentos calculados para $\mu < 0$
N	Ordem do método
$p(\cos \Theta)$	Função de fase
$P_n(\mu)$	Polinômios de Legendre
$P_n^m(\mu)$	Funções Associadas de Legendre
P^k	Matrizes de coeficientes
$Q(x, \mu)$	Vetor fonte em x na direção μ , com simetria azimutal $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$Q^m(\tau, \mu)$	Vetor fonte em τ na direção μ , sem simetria azimutal $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$Q_n^m(\tau)$	Vetor Fonte em τ na direção μ_n , sem simetria azimutal $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\bar{Q}_n^m(s)$	Transformada de Laplace de termo de fonte $Q_n^m(\tau)$
$\bar{Q}^m(s)$	Vetor fonte transformado
$Q(x, \mu, t)$	Fonte em x na direção μ e no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$Q_m(x, t)$	Fonte em x na direção μ_m e no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\bar{Q}_m(x, p)$	Fonte em x na direção μ_m transformado em t

$\bar{Q}_m(x, p)$	Fonte em x na direção μ_m transformado em t
$\bar{Q}_m(s, p)$	Fonte na direção μ_m transformado em t e transformado em x
$Q_{mt}(t)$	Fonte média em t
$Q_{mx}(x)$	Fonte média em x
$\bar{Q}_{mt}(s)$	Fonte média transformado em t
$\bar{Q}_{mx}(s)$	Fonte média transformado em x
$R(\mu, \varphi)$	Termo resultante decomposição de Chandrasekhar da Intensidade de radiação sem simetria azimutal
r_k	Raízes do determinante de $\bar{M}_t(s)$
s_k	Raízes do determinante de $\bar{M}_N(s)$ ou $\bar{M}_x(s)$
t_0	Tempo determinado (dado do problema)
v	Velocidade da partícula (cm/s)
w_m	Pesos da quadratura de Gauss
x_0	Espessura da placa
β_ℓ^m	Coefficientes da expansão em polinômios de Legendre da função de fase sem simetria azimutal
β_ℓ	Coefficientes da expansão em polinômios de Legendre da função de fase
$\bar{\chi}(s, p)$	Vetor definido pela convolução de $B(x, p)$ com $\bar{\Phi}(x, p)$

$\Gamma(s)$	Função Gama
$\phi_m(x)$	Fluxo angular em x na direção μ_m em $t=0$ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
μ	Direção de propagação da partícula, $\mu = \cos\theta$
μ_m	Direções discretas, raízes do polinômio de Legendre de grau N
ω	Albedo de espalhamento
φ	Ângulo azimutal da direção da partícula
φ_r	Ângulo azimutal de referência
$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular em x na direção μ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\psi_m(x)$	Fluxo angular em x na direção μ_m $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\bar{\Psi}(s)$	Vetor fluxo angular transformado
$\bar{\Psi}(0)$	Vetor fluxo angular em $x = 0$
$\psi(x, \mu, t)$	Fluxo angular em x na direção μ , no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\psi_m(x, t)$	Fluxo angular em x , na direção μ_m , e no tempo t $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}}\right)$
$\psi_{mt}(t)$	Fluxo angular médio em t , na direção μ_m
$\psi_{mx}(x)$	Fluxo angular médio em x e na direção μ_m
$\bar{\Psi}_{mt}(s)$	Fluxo angular médio transformado na direção μ_m
$\bar{\Psi}_{mx}(s)$	Fluxo angular médio transformado em x , na direção μ_m

$\bar{\Psi}_{mx}(s)$	Fluxo angular médio transformado em x , na direção μ_m
$\bar{\Psi}_m(x, p)$	Fluxo angular transformado na variável t
$\bar{\bar{\Psi}}_m(s, p)$	Fluxo angular transformado nas variáveis x e t
$\bar{\Psi}_t(s)$	Vetor fluxo angular médio transformado em t
$\bar{\Psi}_x(s)$	Vetor fluxo angular médios transformado em x
$\bar{\Psi}_t(0)$	Vetor fluxo angular médio transformado em t , em $t=0$
$\bar{\Psi}_t(0)$	Vetor fluxo angular médios transformado em x , em $x=0$
$\bar{\bar{\Psi}}_m(s, p)$	Vetor angular transformado em x e t
$\bar{\Psi}_m(0, p)$	Vetor fluxos angular em $x=0$, transformado em t
σ_t	Seção de choque total (cm^{-1})
$\sigma_s(\mu \rightarrow \mu')$	Seção de choque de espalhamento (cm^{-1})
$\sigma_{s\ell}$	Coefficientes da expansão da função de fase em polinômios de Legendre
σ_a	Seção de choque de absorção (cm^{-1})
τ	Espessura ótica (adimensional)
*	Convolução

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. FORMULAÇÃO LTS_N COM DEPENDÊNCIA CONTÍNUA NA VARIÁVEL ANGULAR E MÉTODO ITERATIVO	5
2.1 Formulação LTS_N	5
2.2 Método LTS_N com dependência contínua na variável angular	11
2.3 Método iterativo baseado na formulação LTS_N	16
3. PROBLEMAS DE TRANSPORTE SEM SIMETRIA AZIMUTAL	21
3.1 Introdução	21
3.2 A equação de transferência radiativa	23
3.3 Solução pelo método LTS_N	30
3.3.1 Solução LTS_N com dependência contínua na variável angular	36
3.3.2 Método iterativo	38
3.4 Resultados numéricos	41
3.5 O método LTP_N	45
4. A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DEPENDENTE DO TEMPO	56
4.1 Generalidades	56

4.2 Método de inversão numérica no tempo	59
4.3 Método nodal	67
4.3.1 O caso isotrópico	72
4.4 A equação de difusão	77
4.5 Resultados numéricos	80
5. CONCLUSÕES	84
REFERÊNCIAS	86
APÊNDICES	
APÊNDICE A	
Geometria do espalhamento	A1
Teorema da adição para polinômios de Legendre	A.2
APÊNDICE B	
LTS_N com transformada numérica no tempo	B.1
APÊNDICE C	
O método LTS_N nodal	C.1
APÊNDICE D	
Isotropia linear	D.1

SUMÁRIO DE TABELAS

Tabela 3.4.1 - Lei de Espalhamento de Mie.....	41
Tabela 3.4.2 - Valores de $I_n^m(0)$, considerando $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$	41
Tabela 3.4.3 - Valores de $I_n^m(1)$, considerando $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$	41
Tabela 3.4.4 - Valores de $I_*^m(0,-\mu)$ interpolados, considerando $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$, comparados com o método F_N	42
Tabela 3.4.5 - Valores de $I_*^m(1,\mu)$ interpolados, considerando $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$, comparados com o método F_N	42
Tabela 3.4.6 - Resultados numéricos para a intensidade de radiação, $I_*^m(1,\mu)$, obtida pela primeira iteração considerando a solução LTS_N como valor inicial	43
Tabela 3.4.7 - Resultados numéricos para a intensidade de radiação, $I_*^m(1,\mu)$, obtida pela segunda iteração considerando a solução LTS_N como valor inicial	44

SUMÁRIO DE FIGURAS

Figura 4.4.1 - Domínio Espaço tempo.	67
Figura 4.4.2 - Gráfico do fluxo angular (direção 1)	82
Figura 4.4.3 - Gráfico do fluxo angular (direção 1)	82
Figura 4.4.4 - Gráfico do fluxo angular (direção 2)	83
Figura 4.4.5 - Gráfico do fluxo angular (direção 2)	83
Figura A.1 - Gráfico do fluxo angular (direção 1)	A.1

1. INTRODUÇÃO

A equação de transporte é uma equação íntegro-diferencial que descreve a distribuição de partículas, tais como fótons, nêutrons, elétrons, moléculas e ondas eletromagnéticas, que fluem livremente em um meio [1]. Assim, a teoria de transporte pode ser usada para descrever os mais diversos fenômenos físicos, entre os quais podemos citar, a difusão da luz através de atmosferas planetárias, a transferência radiativa através de matérias estelares, a distribuição de elétrons em semicondutores, a difusão de moléculas em gases, a distribuição de nêutrons no núcleo de um reator nuclear, o espalhamento múltiplo de ondas de radar em uma atmosfera turbulenta, a penetração de raio-x através da matéria e o fluxo de tráfico de veículos numa auto-estrada. É claro que por esta abrangência, sua aplicabilidade é enorme em diversas áreas de engenharia e física, como por exemplo em física médica no cálculo de dose em radioterapia, em engenharia nuclear tanto no cálculo de blindagem como de criticalidade de um reator nuclear e até mesmo em climatologia e sensoriamento remoto.

A complexidade da equação de transporte decorre do fato da mesma ser descrita num espaço de fase constituído de sete variáveis independentes (três de posição, duas de direção, uma de energia e uma de tempo), motivo pelo qual só foi possível encontrar soluções analíticas, solução de Case [2], para problemas unidimensionais. Decorre deste fato, especial interesse no desenvolvimento de métodos computacionais eficientes para a solução da equação de transporte. Estes métodos podem ser classificados em duas categorias, os probabilísticos e os determinísticos. Os probabilísticos são capazes de executar uma simulação real do problema e entre eles destaca-se o método de Monte Carlo [1,3,4]. Já os determinísticos resolvem os problemas de forma aproximada, porém, em geral, de forma mais rápida. Entre estes, citamos os métodos: F_N [5], SGF- S_N [6], LTP- N [7,8] e LTS_N [9,10,11].

A idéia básica do método F_N [5], consiste na aplicação da transformada de Laplace discreta e no uso de propriedades de completeza e ortogonalidade das funções generalizadas de Case, para o estabelecimento de um sistema

linear, que permite o cálculo do fluxo emergente na fronteira.

Por outro lado, a idéia do método SGF- S_N [6], consiste na solução da equação de ordenadas discretas unidimensional sem erro de truncamento. Primeiramente, o domínio do problema é discretizado (equação S_N) em células, e cada célula a equação de balanço de partículas é obtida em cada direção discreta pela integração das equações S_N . Além disto são estabelecidas equações auxiliares, as quais expressam o fluxo angular como combinação linear da fonte localizada na célula e dos fluxos angulares incidentes em suas duas fronteiras pelas células vizinhas. Estas equações auxiliares contém a função de Green para os fluxos médios de cada célula em função dos fluxos das células vizinhas e da fonte no interior da célula. As funções de Green são obtidas por análise espectral tomando por base a solução analítica da equação de ordenadas discretas por separação de variáveis. Assim, de cada nó, resulta um sistema de N^2 equações com N^2 incógnitas que deve ser resolvido para os fluxos médio e incidente na fronteira.

O método LTP_N [7,8], resolve de forma analítica a aproximação P_N da equação de transporte unidimensional. A aproximação P_N é obtida pela expansão do fluxo angular e do termo de fonte da equação de transporte em polinômios de Legendre. Assim, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre é obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias para os coeficientes da expansão do fluxo angular. O método LTP_N aplica a transformada de Laplace na variável espacial deste sistema, de onde resulta um sistema linear algébrico que é resolvido analiticamente. A inversão dos coeficientes transformados é obtida pela técnica de expansão de Heaviside. Assim, substituindo estes coeficientes na expansão considerada, o fluxo angular requerido é obtido [8].

O método LTS_N [9,10,11], resolve de forma analítica a aproximação S_N da equação de transporte unidimensional. A aproximação S_N da equação de transporte é obtida pela aproximação do termo integral por quadratura de Gauss de ordem N e pela aplicação do método da colocação na variável angular da equação unidimensional de transporte, considerando como função teste a Delta de Dirac e usando como pontos de colocação as raízes do polinômio de

Legendre de grau N . Assim, obtém-se um sistema de N equações diferenciais ordinárias para o fluxo angular nas N direções discretas consideradas. O método LTS_N aplica a transformada de Laplace na variável espacial deste sistema, obtendo assim um sistema algébrico de N equações e N incógnitas, que é resolvido analiticamente. A inversão dos fluxos angulares transformados é obtida pela técnica de expansão de Heaviside.

O método LTS_N já foi aplicado a problemas de transporte homogêneos e heterogêneos unidimensionais em geometria plana, com espalhamento anisotrópico [9,10,11,12], para modelos de um grupo de energia, multigrupo e problemas inversos [11,13,14,15]. Recentemente a formulação LTS_N foi estendida à problemas de transporte estacionário em duas e três dimensões e em domínios convexos bidimensionais [16,17,18,19]. Além disto, para uma melhor compreensão da performance da formulação LTS_N na resolução de problemas de ordenadas discretas unidimensionais foi feito um estudo comparativo entre métodos que resolvem a equação S_N de maneira exata [20].

Neste trabalho, o primeiro objetivo consiste na aplicação da formulação LTS_N para solução de problemas sem simetria azimutal. O objetivo futuro do desenvolvimento desta formulação é a solução de problemas de transferência radiativa em nuvens, os quais são caracterizados por alto grau de anisotropia. Por esta característica, o valor de N a ser considerado deve ser grande, isto é igual ao grau de anisotropia, o que acarreta problemas computacionais no método LTS_N , como por exemplo no cálculo das raízes. Por este motivo, no capítulo, desenvolvemos dois métodos baseados na formulação LTS_N . O primeiro deles, calcula o fluxo angular de partículas com dependência contínua na variável angular. Esta solução é obtida calculando o termo integral da equação de transporte usando a formulação LTS_N e pela resolução analítica da equação diferencial ordinária resultante. Desenvolvemos, também, um método iterativo, cuja idéia consiste em usar como primeira iteração a solução LTS_N com dependência contínua em μ . Na segunda iteração, o termo integral da equação de transporte é calculado através da solução obtida na primeira iteração e assim resolvendo a equação diferencial ordinária resultante obtemos a solução da segunda iteração. Como este processo é convergente para a solução exata da equação de transporte [21], a idéia deste método é iterar tantas vezes quanto

necessário para obter a precisão desejada. Na introdução do capítulo 3 descrevemos tanto a física como a equação de transferência radiativa na atmosfera. A seguir, o método LTS_N clássico e os dois novos métodos desenvolvidos no capítulo 2 são aplicados em problemas de transferência radiativa e simulações numéricas são apresentadas.

O segundo objetivo deste trabalho, que é apresentado na seção 4, consiste na extensão da formulação LTS_N para a solução de problemas unidimensionais dependentes do tempo. Para tanto, na seção 4.2 é desenvolvido o método LTS_N com inversão numérica no tempo. Este método, consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável tempo da aproximação S_N da equação de transporte linear. A equação resultante desta transformação é então resolvida pelo método LTS_N na variável espacial encontrando-se, assim, o fluxo angular transformado no tempo de forma analítica. O fluxo angular é então obtido numericamente, pelo uso de esquema de quadratura de Gauss. Já, na seção 4.3 desenvolvemos um método analítico de solução do problema pelo método LTS_N . Para tanto, aplicamos o método nodal na equação S_N dependente do tempo, isto é, integramos a equação S_N primeiramente na variável tempo, no intervalo $[0, t_0]$, e depois na espacial, no intervalo $[0, x_0]$ e, desta forma, obtemos duas equações diferenciais, a primeira para o fluxo médio no tempo e a segunda para o fluxo médio espacial. Estas equações são então resolvidas pelo método LTS_N e os fluxos médios são encontrados. No capítulo 5 são apresentados comentários e são discutidos os resultados encontrados pelo método proposto.

2. FORMULAÇÃO LTS_N COM DEPENDÊNCIA CONTÍNUA NA VARIÁVEL ANGULAR E MÉTODO ITERATIVO

Nesta seção apresentamos métodos para a solução da equação unidimensional de transporte, baseados na formulação LTS_N . Para isto, na seção 2.1 descrevemos de forma sucinta o método LTS_N . Na seção 2.2 apresentamos um método de determinação do fluxo angular com dependência contínua na variável angular. Para isto o termo integral da equação de transporte é calculado usando a solução LTS_N . A equação diferencial resultante é resolvida analiticamente. Finalmente, na seção 2.3 apresentamos um método iterativo para a solução da equação unidimensional de transporte, cuja primeira iteração é a solução com dependência contínua. A segunda iteração calcula o termo integral da equação de transporte através do fluxo angular obtido na primeira iteração e assim por diante, obtendo desta forma, uma seqüência de fluxos angulares que converge para a solução exata da equação unidimensional de transporte [21,22].

2.1 Formulação LTS_N

Nesta seção faremos uma breve descrição do método $LTS_{N'}$ proposto por Vilhena e Barichello [9,10,11]. Para tanto, vamos considerar a equação de transporte linear unidimensional com um grupo de energia, simetria azimutal e geometria plana descrita por,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.1.1)$$

com as condições de contorno dadas por,

$$\psi(0, \mu) = f(\mu) \quad , \quad \mu > 0 \quad \text{e} \quad \psi(x_0, \mu) = g(\mu) \quad , \quad \mu < 0, \quad (2.1.1a)$$

onde $\psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas na direção de μ , σ_t é a seção de choque total e $\sigma_s(\mu \rightarrow \mu')$ é a seção de choque de espalhamento. Vamos considerar o seguinte modelo para a seção de choque de espalhamento diferencial,

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\cos \Theta). \quad (2.1.2)$$

Aplicando, na equação (2.1.2) o teorema de adição para os polinômios de Legendre (ver apêndice A), podemos reescrever a seção de choque de espalhamento diferencial como,

$$\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sum_{m=0}^M \sum_{\ell=m}^L \frac{\sigma_s}{2} \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.1.2a)$$

onde,

$$\beta_\ell^m = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \beta_\ell \quad (2.1.2b)$$

A aproximação S_N do problema de transporte (2.1.1) é obtida pela aplicação do método da colocação, na variável μ , considerando a função delta de Dirac como a função teste e os pontos de colocação como as raízes do polinômio de Legendre de grau N . Além disso, o termo integral da equação (2.1.1) é aproximado por quadratura de Gauss de ordem N , ou seja,

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \Psi(x, \mu') d\mu' = \sum_{n=0}^N w_n \sigma_s(\mu_n \rightarrow \mu) \Psi_n(x), \quad (2.1.3)$$

onde $\Psi_m(x)$ é o fluxo angular de partículas na direção de μ_m e w_m são os pesos da quadratura de Gauss, calculados como em [23],

$$w_m = \int_{-1}^{+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_m - \mu_j)} d\mu, \quad (2.1.3a)$$

e as direções μ_m são escritas em ordem decrescente,

$$-1 < \mu_N < \dots < \frac{\mu_{N+1}}{2} < 0 < \frac{\mu_N}{2} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1. \quad (2.1.3b)$$

Desta forma, a aproximação S_N do problema (2.1.1) é dada por,

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m(x) + \sigma_t \Psi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell \sum_{k=0}^N \Psi_k(x) w_k P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_m) + Q_m(x), \quad (2.1.4)$$

com as condições de contorno,

$$\Psi_m(0) = f_m, \quad \mu_m > 0 \quad \text{e} \quad \Psi_m(x_0) = g_m, \quad \mu_m < 0. \quad (2.1.4a)$$

Vamos, agora, aplicar o método LTS_N na resolução do problema de ordenadas discretas (2.1.4). Desta feita, aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial x , obtendo a equação transformada,

$$s \bar{\Psi}_m(s) + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \bar{\Psi}_m(s) - \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell \sum_{k=0}^N \bar{\Psi}_k(s) w_k P_\ell(\mu_k) P_\ell(\mu_m) = \Psi_m(0) + \bar{Q}_m(s). \quad (2.1.5)$$

Fazendo $m=1,2,\dots,N$ na equação (2.1.5), obtemos um sistema de N equações e N incógnitas, que matricialmente pode ser escrito como,

$$\bar{M}_N(s) \bar{\Psi}(s) = \underline{\Psi}(0) + \bar{Q}(s), \quad (2.1.6)$$

onde a matriz $\bar{M}_N(s)$ é uma matriz quadrada de ordem N , da forma,

$$\bar{M}_N(s) = sI + A, \quad (2.1.6a)$$

onde os elementos da matriz A tem a forma,

$$a(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma_t}{\mu_i} - \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} \left[\sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) \right] & \text{se } i=j, \\ -\frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} \left[\sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) \right] & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Os vetores transformados, $\bar{\Psi}(s)$, $\underline{\Psi}(0)$ e $\bar{Q}(s)$ são expressos como,

$$\bar{\Psi}(s) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_1(s) \quad \bar{\Psi}_2(s) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_N(s) \right], \quad (2.1.7a)$$

$$\underline{\Psi}(0) = \text{col} \left[\Psi_1(0) \quad \Psi_2(0) \quad \dots \quad \Psi_N(0) \right], \quad (2.1.7b)$$

$$\bar{Q}(s) = col \left[\frac{\bar{q}_1(s)}{\mu_1} \quad \frac{\bar{q}_2(s)}{\mu_2} \quad \dots \quad \frac{\bar{q}_N(s)}{\mu_N} \right]. \quad (2.1.7c)$$

Para resolvermos a equação matricial (2.1.6) basta multiplicarmos toda equação pela inversa da matriz $\bar{M}_N(s)$. Uma fórmula analítica para a inversão desta matriz foi obtida para o caso de anisotropia linear ($L=1$) [11] e posteriormente foi estendida para anisotropia de qualquer grau [12,24]. Assim,

$$\bar{\Psi}(s) = \bar{B}(s)\bar{\Psi}(0) + \bar{B}(s)\bar{Q}(s), \quad (2.1.8)$$

onde,

$$\bar{B}(s) = \left[\bar{M}_N(s) \right]^{-1}. \quad (2.1.8a)$$

Como cada elemento da matriz $\bar{B}(s)$ é uma função racional, o vetor fluxo angular pode ser calculado também de forma analítica através da técnica de expansão de Heaviside. Desta forma,

$$\bar{\Psi}(x) = B(x)\bar{\Psi}(0) + B(x) * \bar{Q}(x), \quad (2.1.9)$$

onde o asterisco denota convolução e

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{B}(s)] = \sum_{n=1}^N P^k e^{r_k x} \quad (2.1.10)$$

com r_k as N raízes do determinante da matriz $M(s)$ e P^k N matrizes coeficiente,

provenientes da inversão da transformada de Laplace. A solução particular do problema (2.1.4) é dado pelo vetor convolução da equação (2.1.9) e é calculado como em [25],

$$\underline{H}(x) = B(x) * \underline{Q}(x) = \int_0^x B(x-\eta) \underline{Q}(\eta) d\eta. \quad (2.1.11)$$

Desta forma, o vetor fluxo angular de partículas é expresso pela seguinte fórmula,

$$\underline{\Psi}(x) = B(x) \underline{\Psi}(0) + \underline{H}(x). \quad (2.1.12)$$

Quando trabalhamos em uma placa plana, as condições de contorno são normalmente do tipo: fluxos incidentes conhecidos em $x=0$ para $\mu_m > 0$ e em $x=x_0$ para $\mu_m < 0$. Para calcularmos as componentes desconhecidas do vetor $\underline{\Psi}(0)$, ou seja os valores do fluxo angular em $x=0$ para $\mu_m < 0$, basta aplicar a equação (2.1.10) em $x=x_0$ e utilizar a segunda condição de contorno dada pela equação (2.1.4a). Para indicarmos como é feito o cálculo do vetor $\underline{\Psi}(0)$ vamos rescrever a equação (2.2.8) em forma de matriz blocos e fazer $x=x_0$,

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1(x_0) \\ \underline{\Psi}_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(x_0) & B_{12}(x_0) \\ B_{21}(x_0) & B_{22}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1(0) \\ \underline{\Psi}_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{H}_1(x_0) \\ \underline{H}_2(x_0) \end{bmatrix}, \quad (2.1.13)$$

onde $\underline{\Psi}_j(x_0)$, $\underline{\Psi}_j(0)$ e $\underline{H}_j(x_0)$, com $k=1,2$ são vetores de $N/2$ componentes e $B_{ij}(x)$, com $i=1,2$ e $j=1,2$, são matrizes quadradas de ordem $N/2$. Assim, temos

$$\begin{cases} \underline{\Psi}_1(x_0) = B_{11}(x_0) \underline{\Psi}_1(0) + B_{12}(x_0) \underline{\Psi}_2(0) + \underline{H}_1(x_0) \\ \underline{\Psi}_2(x_0) = B_{21}(x_0) \underline{\Psi}_1(0) + B_{22}(x_0) \underline{\Psi}_2(0) + \underline{H}_2(x_0) \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Como, os vetores $\underline{\Psi}_2(x_0)$, $\underline{\Psi}_1(0)$ e $\underline{H}_2(x_0)$ são conhecidos, através da segunda equação de (2.2.14) temos o seguinte sistema de $N/2$ equações,

$$\underline{\Psi}_2(x_0) = B_{21}(x_0) \cdot \underline{\Psi}_1(0) + B_{22}(x_0) \cdot \underline{\Psi}_2(0) + \underline{H}_2(x_0), \quad (2.1.15)$$

ou

$$\underline{\Psi}_2(0) = B_{22}^{-1}(x_0) \left[\underline{\Psi}_2(x_0) - B_{21}(x_0) \cdot \underline{\Psi}_1(0) - \underline{H}_2(x_0) \right]. \quad (2.1.16)$$

Desta forma o vetor $\underline{\Psi}_2(0)$ dado pela equação (2.1.7b) está completamente determinado e, conseqüentemente, o vetor fluxo angular definido pela equação (2.1.9).

2.2 Método LTS_N com dependência contínua na variável angular

No método LTS_N original, como descrito na seção 2.1, o fluxo angular é calculado apenas nas direções discretas μ_m , com $m = 1, \dots, N$. Para obtermos o valor do fluxo angular em qualquer direção, distinta das N direções discretas, devemos proceder interpolações do tipo polinomial, assim, a precisão dos resultados fica condicionada a escolha do grau do polinômio interpolador. Nesta seção propomos um aperfeiçoamento no método LTS_N de tal forma que a solução obtida para o fluxo angular seja dada em qualquer direção μ , e não apenas nas direções discretas μ_m , $m = 1, \dots, N$, eliminando deste modo a necessidade de interpolação. A idéia básica deste método é baseado no cálculo do termo integral da equação de transporte usando a formulação LTS_N e na resolução da equação diferencial ordinária resultante desta substituição. Devemos notar que a possibilidade deste procedimento deve-se ao caráter

analítico do método LTS_N .

Seja a equação unidimensional de transporte linear,

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \frac{\sigma_t}{\mu} \psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_\ell(\mu) \beta_\ell \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu') P_\ell(\mu') d\mu' + \frac{Q(x, \mu)}{\mu} \quad (2.2.1)$$

com as condições de contorno,

$$\psi(0, \mu) = f_1(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.2.1a)$$

$$\psi(x_0, \mu) = f_2(\mu), \quad \mu < 0. \quad (2.2.1b)$$

Substituindo a solução LTS_N da equação de ordenadas discretas, para o fluxo angular no termo integral da equação (2.2.1) obtemos a equação diferencial,

$$\frac{d}{dx} \psi(x, \mu) + \frac{\sigma_t}{\mu} \psi(x, \mu) = F(x, \mu), \quad (2.2.2)$$

onde a função $F(x, \mu)$ é definida por,

$$F(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_\ell(\mu) \beta_\ell \sum_{n=1}^N \psi_n(x) P_\ell(\mu_n) w_n + \frac{Q(x, \mu)}{\mu}. \quad (2.2.2a)$$

Conforme descrito na seção anterior, o vetor fluxo angular obtido como solução do problema de ordenadas discretas, pelo método LTS_N , pode ser escrito como

$$\underline{\psi}(x) = \underline{G}(x) + \underline{H}(x), \quad (2.2.3)$$

onde o vetor $\underline{H}(x)$ é definido em (2.1.11) e o vetor $\underline{G}(x)$ é definido por,

$$\underline{G}(x) = B(x)\underline{\psi}(0) \quad (2.2.4)$$

e a matriz $B(x)$ é definida pela equação (2.1.10). Desta forma, das equações (2.1.10) e (2.1.11) temos que os elementos da i -ésima linha do vetor $\underline{G}(x)$ e do vetor $\underline{H}(x)$ podem ser escritos como,

$$g_i = \sum_{j=1}^N b_{i,j}(x) \psi_j(0) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{i,j}^k e^{r_k x} \psi_j(0). \quad (2.2.5)$$

$$h_i = \sum_{j=1}^N b_{i,j}(x) * \frac{q_j(x)}{\mu_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{i,j}^k e^{r_k x} * \frac{q_j(x)}{\mu_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{p_{i,j}^k}{\mu_j} \int_0^x e^{r_k(x-\eta)} q_j(\eta) d\eta, \quad (2.2.6)$$

onde $b_{i,j}$ e $p_{i,j}^k$ são respectivamente os elementos da i -ésima linha e da j -ésima coluna das matrizes $B(x)$ e P^k ; r_k são as N raízes associadas ao método LTS_N e $q_j(x) \psi_j(0)$ são respectivamente os elementos da j -ésima linha dos vetores $\underline{Q}(x)$ e $\underline{\psi}(0)$. Assim, pelas equações (2.2.3), (2.2.5) e (2.2.6), temos que o fluxo angular calculado em cada direção discreta μ_m , $m=1, \dots, N$, pode ser explicitamente escrito como,

$$\psi_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{i,j}^k e^{r_k x} \left[\psi_j(0) + \frac{1}{\mu_j} \int_0^x e^{-r_k \eta} q_j(\eta) d\eta \right]. \quad (2.2.7)$$

De posse das fórmulas (2.2.7), a função $F(x, \mu)$ definida pela equação (2.2.2) como pode ser reescrita como,

$$F(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_{\ell}(\mu) \beta_{\ell} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{n,j}^k e^{r_k x} . \quad (2.2.8)$$

$$\cdot \left[\psi_j(0) + \frac{1}{\mu_j} \int_0^x e^{-r_k \eta} q_j(\eta) d\eta \right] P_{\ell}(\mu_n) w_n + \frac{Q(x, \mu)}{\mu} .$$

A solução da equação diferencial (2.2.2) é dada por,

$$\psi(x, \mu) = e^{-x/\mu} \left[\psi(0, \mu) + \int_0^x F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right]. \quad (2.2.9)$$

A função $\psi(0, \mu)$ que aparece na equação (2.2.9) é conhecida para $\mu > 0$, através da condição de contorno (2.2.1a), mas é desconhecida para $\mu < 0$. Para calculá-la, fazemos $x = x_0$ na equação (2.2.9) e utilizamos a condição de contorno (2.2.1b), isto é

$$f_2(\mu) = e^{-x_0/\mu} \left[\psi(0, \mu) + \int_0^{x_0} F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right], \quad \mu < 0, \quad (2.2.10)$$

ou

$$\psi(0, \mu) = f_2(\mu) e^{x_0/\mu} - \int_0^{x_0} F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta, \quad \mu < 0. \quad (2.2.10a)$$

Desta forma o fluxo angular de partículas em qualquer direção μ é dada pela fórmula,

$$\Psi(x, \mu) = \begin{cases} e^{-x/\mu} \left[f_1(\mu) + \int_0^x F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu > 0 \\ e^{-x/\mu} \left[f_2(\mu) - \int_x^0 F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu < 0. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Devemos notar que introduzindo a expressão (2.2.8) em (2.2.2), as integrais que aparecem na equação (2.2.11) podem ser calculadas analiticamente e tem a forma,

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_{\ell}(\mu) \beta_{\ell} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{n,j}^k P_{\ell}(\mu_n) w_n. \quad (2.2.12)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{r_k \zeta} \left(\Psi_j(0) + \frac{1}{\mu_j} \int_0^x e^{-r_k \eta} q_j(\eta) d\eta \right) e^{\zeta/\mu} d\zeta + \int_{\alpha}^{\beta} e^{r_k \zeta} e^{\zeta/\mu} \frac{Q(x, \mu)}{\mu} d\zeta,$$

ou

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_{\ell}(\mu) \beta_{\ell} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{n,j}^k P_{\ell}(\mu_n) w_n. \quad (2.2.13)$$

$$\left[\Psi_j(0) \mu \frac{e^{\beta(1+\mu r_k)/\mu} - e^{\alpha(1+\mu r_k)/\mu}}{\mu r_k + 1} + \frac{1}{\mu_j} \int_{\alpha}^{\beta} e^{r_k \zeta} e^{\zeta/\mu} \int_0^{\zeta} e^{-r_k \eta} q_j(\eta) d\eta d\zeta \right] +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Q(x, \mu)}{\mu} e^{\zeta/\mu} e^{-r_k \eta} d\zeta.$$

As duas integrais que aparecem em (2.2.15) não foram explicitadas, pois dependem do conhecimento do termo de fonte considerado.

2.3 Método iterativo baseado na formulação LTS_N

Foi demonstrado por Abramov e Korneev [21] que o método iterativo de solução da equação de transporte converge para a solução exata, para qualquer valor inicial considerado para o fluxo angular no termo integral. Porém, a velocidade de convergência deste método diminui drasticamente com o acréscimo do grau de anisotropia. É claro que quanto mais próximo da solução for o valor inicial considerado, mais rápida será a convergência do método. Levando em conta que a solução da equação S_N converge para a solução exata da equação de transporte e que a solução LTS_N é uma solução analítica da equação de ordenadas discretas, acreditamos que um bom valor inicial para o método iterativo pode ser dado pela formulação LTS_N .

Em vista do exposto, nesta seção propomos um esquema iterativo de solução da equação de transporte unidimensional de partículas, no qual a primeira iteração estima o termo integral da equação unidimensional de transporte de partículas através da solução LTS_N . Assim, a solução da primeira iteração é a solução com dependência contínua na variável angular discutida na seção 2.2. A segunda iteração é agora obtida calculando o termo integral da equação de transporte com a solução da primeira iteração. Prosseguindo desta mesma maneira, a iteração de ordem k será obtida calculando o termo integral com o fluxo angular obtido na iteração de ordem $k-1$.

A seguir detalharemos as etapas envolvidas neste método iterativo. A primeira iteração é feita aproximando o termo integral da equação de transporte (2.2.1) por quadratura de Gauss-Legendre de grau N e os fluxos angulares são dados através da formulação LTS_N nas N direções discretas $\psi_n(x)$, $n=1, 2, \dots, N$. Assim, conforme já descrito na seção 2.2, considerando condições de contorno (2.2.1a) e (2.2.1b) temos que a solução da primeira iteração é dado pela fórmula (2.2.11). As integrais que nela aparecem podem ser calculadas analiticamente por (2.2.13). Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi^1(x, \mu) + \frac{1}{\mu} \psi^1(x, \mu) = F^1(x, \mu), \quad (2.3.1)$$

onde a função $F^1(x, \mu)$ é dada por,

$$F^1(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L P_{\ell}(\mu) \beta_{\ell} \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N p_{n,j}^k e^{r_k x} \left[\psi_j(0) + \frac{1}{\mu_j} \int_0^x e^{-r_k \eta} q_j(\eta) d\eta \right] P_{\ell}(\mu_n) w_n + \frac{Q(x, \mu)}{\mu} \quad (2.3.2)$$

A equação diferencial ordinária (2.3.1) tem solução,

$$\psi^1(x, \mu) = \begin{cases} e^{-x/\mu} \left[f_1(\mu) + \int_0^x F^1(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu > 0 \\ e^{-x/\mu} \left[f_2(\mu) - \int_x^0 F^1(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu < 0. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Vamos agora efetuar a segunda iteração. Para tanto vamos considerar a equação de transporte e estimar seu termo integral com a solução obtida pela primeira iteração, isto é

$$\frac{\partial}{\partial x} I^2(x, \mu) + \frac{1}{\mu} I^2(x, \mu) = F^2(x, \mu), \quad (2.3.4)$$

onde a função $F^2(x, \mu)$ é dada por,

$$\begin{aligned} F^2(x, \mu) &= \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\mu') \psi^1(x, \mu') d\mu' + \frac{Q(x, \mu)}{\mu} \\ &= \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_0^1 P_{\ell}(\mu') (\psi^1(x, \mu') - (-1)^{\ell} \psi^1(x, -\mu')) d\mu' + \frac{Q(x, \mu)}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Substituindo a solução da primeira iteração (2.3.3) em (2.3.5) temos que,

$$F^2(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_0^1 P_{\ell}(\mu') \cdot \quad (2.3.6)$$

$$\left(e^{-x/\mu'} \left(f_1(\mu') + \int_0^x F^1(\zeta, \mu') e^{\zeta/\mu'} d\zeta \right) + (-1)^{\ell+1} e^{x/\mu'} \left(f_2(-\mu') - \int_x^0 F^1(\zeta, -\mu') e^{-\zeta/\mu'} d\zeta \right) \right) d\mu' + \frac{Q(x, \mu)}{\mu},$$

onde as integrais em ζ de (2.3.6) são calculadas como em (2.2.13) e a integral em μ depende da complexidade da fonte $Q(x, \mu)$ para ter uma forma analítica. Se não for possível seu cálculo analítico, então o esquema de quadratura da Gauss será utilizada para estimar esta integral. Assim a solução da segunda iteração é dada por,

$$\Psi^2(x, \mu) = \begin{cases} e^{-x/\mu} \left[f_1(\mu) + \int_0^x F^2(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu > 0 \\ e^{-x/\mu} \left[f_2(\mu) - \int_x^0 F^2(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu < 0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

onde,

$$\int_{\alpha}^{\beta} F^2(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_0^1 P_{\ell}(\mu') \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\xi/\mu} \cdot \quad (2.3.8)$$

$$\left(e^{-\xi/\mu'} \left(f_1(\mu') + \int_0^{\xi} F^1(\zeta, \mu') e^{\zeta/\mu'} d\zeta \right) + (-1)^{\ell+1} e^{\xi/\mu'} \left(f_2(-\mu') - \int_{\xi}^0 F^1(\zeta, -\mu') e^{-\zeta/\mu'} d\zeta \right) \right) d\xi d\mu' +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\xi/\mu} Q(\xi, \mu) d\xi.$$

Este processo de refinamento de solução é continuado, aproximando o termo integral da equação de transporte através do fluxo angular calculado na iteração $m-1$, resultando,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi^m(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} \psi^m(\tau, \mu) = F^m(\tau, \mu), \quad (2.3.9)$$

onde

$$F^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(\mu') \psi^{m-1}(\tau, \mu') d\mu' + \frac{Q(\tau, \mu)}{\mu}, \quad (2.3.9a)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} F^m(\tau, \mu) &= \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \left[\int_{-1}^0 P_{\ell}(\mu') \psi^1(\tau, \mu') d\mu' + \int_0^1 P_{\ell}(\mu') \psi^1(\tau, \mu') d\mu' \right] + \frac{Q(\tau, \mu)}{\mu} \\ &= \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \left[\int_0^1 P_{\ell}(\mu') \left(\psi^1(\tau, \mu') + (-1)^{\ell+1} \psi^1(\tau, -\mu') \right) d\mu' \right] + \frac{Q(\tau, \mu)}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Assim, após m iterações obtemos a seguinte fórmula de recorrência para o cálculo do fluxo angular,

$$\psi^m(x, \mu) = \begin{cases} e^{-x/\mu} \left[f_1(\mu) + \int_0^x F^m(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu > 0, \\ e^{-x/\mu} \left[f_2(\mu) - \int_x^0 F^m(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta \right] & \text{se } \mu < 0, \end{cases} \quad (2.3.11)$$

onde o termo integral é dado por,

$$\int_{\alpha}^{\beta} F^m(\zeta, \mu) e^{\zeta/\mu} d\zeta = \frac{\sigma_s}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_0^1 P_{\ell}(\mu') \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\xi/\mu} \left(e^{-\xi/\mu'} (f_1(\mu') + \int_0^{\xi} F^{m-1}(\zeta, \mu') e^{\zeta/\mu'} d\zeta) + (-1)^{\ell+1} e^{\xi/\mu'} (f_2(-\mu') - \int_{\xi}^x F^{m-1}(\zeta, -\mu') e^{-\zeta/\mu'} d\zeta) \right) d\xi d\mu' + \frac{1}{\mu} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\xi/\mu} Q(\xi, \mu) d\xi. \quad (2.3.12)$$

O cálculo das integrais da primeira iteração podem sempre ser feitos de forma analítica, enquanto que as integrais nas demais iterações dependem do termo de fonte, não podendo em consequência, ser obtidas genericamente.

3. PROBLEMAS DE TRANSPORTE SEM SIMETRIA AZIMUTAL

Neste capítulo, aplicamos a formulação LTS_N à problemas de transporte sem simetria azimutal. Com este fim, nas seções 3.1 e 3.2 introduzimos alguns aspectos físicos envolvidos em transferência radiativa. Nas seções 3.3, 3.4 e 3.5 os métodos LTS_N , LTS_N com dependência contínua na variável angular e o método iterativo, que foram discutidos no capítulo 2, são usados na resolução de problemas de transferência radiativa. Simulações numéricas são apresentadas.

3.1 Introdução

A motivação para o estudo de problemas de transferência radiativa, decorre do grande interesse em sua aplicação na previsão do clima e de suas mudanças, pois muitas das atividades econômicas estão diretamente ligadas às condições climáticas existentes, como por exemplo a agricultura. A transferência de radiação solar é um dos processos físicos que movimentam as correntes atmosféricas e oceânicas, assim sendo, um detalhamento do processo de transferência radiativa na atmosfera é um ponto importante para a compreensão dos mecanismos de mudança climática em nosso planeta. Desde os sucessivos lançamentos de satélites meteorológicos, as aplicações dos princípios de transferência radiativa tem crescido ainda mais em importância, porque utilizados em conjunto com os dados enviados pelos satélites, torna possível a determinação do perfil de temperatura, da quantidade de vapor de água e de ozônio presentes na atmosfera. Em outras palavras, com as atuais técnicas de sensoriamento remoto conseguimos inferir a composição atmosférica e sua estrutura. Desta feita, ressalta-se a importância do estudo e modelagem do processo de transferência de radiação em atmosferas planetárias [26].

Para uma melhor compreensão da equação de transferência radiativa faremos a seguir uma breve descrição dos processos físicos nela envolvidos.

Espalhamento é o principal processo físico associado à interação da luz com a matéria, podemos dizer que espalhamento é um processo físico no qual uma partícula interage com uma onda eletromagnética espalhando-a e irradiando a energia incidente em todas as direções, até mesmo na direção original de radiação. Na atmosfera as partículas responsáveis pelo espalhamento da luz variam muito em tamanho, elas podem ter tamanho de moléculas, com um diâmetro aproximado de 10^{-8} cm, ou podem chegar até grandes partículas como gotas de chuva ou granizo, com diâmetro aproximado de 1 cm. A intensidade de radiação espalhada depende tanto do raio da partícula considerada, como do comprimento de onda de radiação incidente. Uma partícula pequena tende a espalhar luz igualmente para frente e para trás, este espalhamento, simétrico em todas as direções, é dito espalhamento isotrópico, o que ocorre quando as partículas são muito pequenas. Já quando a partícula aumenta, a intensidade de energia espalhada na direção frontal também cresce, ou seja é um espalhamento não simétrico e é chamado de espalhamento anisotrópico.

Quando as partículas consideradas são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é chamado de espalhamento de Rayleigh e quando as partículas possuem tamanho comparável ou maior que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é referido como espalhamento de Mie. Se considerarmos um volume de partículas e incidirmos sobre este volume um raio de luz, é claro que cada partícula espalha a luz que provavelmente já foi espalhada por outra partícula anteriormente. A este processo chamamos de espalhamento múltiplo, o qual é um processo muito importante na transferência de energia radiante na atmosfera, especialmente quando nela estão presentes aerossóis e nuvens. O espalhamento é muitas vezes acompanhado do processo de absorção de radiação, no entanto, em nuvens, este processo é quase ausente e, desta forma, a nuvem é um meio altamente espalhador. Chamamos seção de choque de espalhamento a probabilidade de uma onda de radiação incidente ser espalhada por uma partícula por unidade de distância percorrida. Seção de

choque de absorção a probabilidade de uma onda de radiação incidente ser absorvida por uma partícula por unidade de distância percorrida e seção de choque total a probabilidade de uma onda de radiação incidente interagir com uma partícula por unidade de distância percorrida. A seção de choque total é a soma da seção de choque de espalhamento com a seção de choque de absorção.

3.2 A equação de transferência radiativa

Na equação de transferência radiativa em atmosferas com simetria planar, a distância é medida na direção normal ao plano de estratificação (variável z) e além disto, é usual exprimi-la em termos da espessura ótica, que é definida como sendo o produto da seção de choque total pela distância ($\tau = z \sigma_t$). Assim, em atmosferas com simetria planar, a intensidade de radiação é função de três variáveis independentes, a espessura ótica $\tau \in [0, \tau_0]$ e das variáveis de direção $\mu = \cos \theta$, onde θ é o ângulo polar medido a partir do eixo positivo de τ , e φ que é o ângulo polar, medido a partir de um ângulo de referência φ_0 .

As nuvens regularmente cobrem cerca de 50% do planeta Terra e são os mais importantes reguladores da radiação armazenada na atmosfera terrestre. A transferência de radiação através destas camadas de nuvens depende da concentração e distribuição de partículas e da espessura da nuvem. Desta forma, informações sobre sua composição e estrutura é de vital importância para o entendimento do balanço de radiação e energia no sistema atmosférico terrestre. Para descrevermos a distribuição angular da energia decorrente dos espalhamentos múltiplos na análise de transferência radiativa, é definido um parâmetro adimensional chamado de função de fase $p(\cos \Theta)$, onde o ângulo Θ é definido como sendo o ângulo formado entre o raio incidente e o raio espalhado, isto é, Θ é o ângulo formado entre as direções de incidência (μ', φ') e de espalhamento (μ, φ). A função de fase é normalizada e definida como:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{p(\cos \Theta)}{4\pi} \sin \Theta \, d\Theta \, d\varphi = 1. \quad (3.2.1)$$

Expandindo a função de fase em polinômios de Legendre,

$$p(\cos \Theta) = \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\cos \Theta), \quad (3.2.2)$$

onde β_ℓ são $L+1$ constantes com $\beta_0 = 1$. Usando geometria esférica e o teorema da adição para os harmônicos esféricos (ver apêndice A), podemos reescrever (3.2.2) como,

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^L \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi). \quad (3.2.3)$$

onde,

$$\beta_\ell^m = \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}, \quad \beta_0 = 1, \quad (3.2.4)$$

são os coeficientes da expansão e

$$P_\ell^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_\ell(\mu), \quad (3.2.4a)$$

são as funções associadas de Legendre.

Nesta seção iremos resolver, pelo método LTS_N a equação de

transferência radiativa em geometria plana, que para cada comprimento de onda é escrita como [26,27],

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} p(\cos \Theta) I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (3.2.5)$$

onde $I(\tau, \mu, \varphi)$ é a intensidade de radiação, que depende da variável óptica $\tau \in [0; \tau_0]$, e das variáveis angulares, que indicam a direção de propagação da radiação, $\mu \in [-1; +1]$ que é o cosseno do ângulo polar medido a partir do eixo positivo τ e $\varphi \in [0; 2\pi]$ que representa o ângulo azimutal medido a partir de um ângulo de referência φ_r . Além disto, ω é o albedo de espalhamento simples ($\omega = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}$).

Vamos considerar as condições de contorno incidentes, dadas por

$$I(0, \mu, \varphi) = F(\mu, \varphi), \quad \text{se } \mu > 0, \quad (3.2.5a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = G(\mu, \varphi), \quad \text{se } \mu < 0. \quad (3.2.5b)$$

Para resolvermos o problema (3.2.5), primeiramente utilizamos a expansão de Chandrashekar [27,28,29] afim de decompô-lo em problemas com simetria azimutal. Desta forma,

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau, \mu) \text{sen } m(\varphi - \varphi_r) \right) + R(\mu, \varphi) e^{-\tau/|\mu|}, \quad (3.2.6)$$

onde,

$$\int_0^{2\pi} R(\mu', \varphi') p(\cos \Theta) d\varphi' = 0, \quad \mu, \mu' \in [-1, 1] \quad e \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (3.2.7)$$

Além disto, pelas condições de contorno (3.2.5a) (3.2.5b) em (3.2.6) a função $R(\mu, \varphi)$ é determinada de forma fechada, como

$$R(\mu, \varphi) = \begin{cases} F(\mu, \varphi) - \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(0, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(0, \mu) \sin m(\varphi - \varphi_r) \right) & , \mu > 0, \\ \left[G(\mu, \varphi) - \sum_{m=0}^L \left(I_c^m(\tau_0, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau_0, \mu) \sin m(\varphi - \varphi_r) \right) \right] e^{\tau/\mu} & , \mu < 0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Substituindo na equação (3.2.5), a função de fase descrita por sua expansão em polinômios de Legendre (3.2.4), expandindo a intensidade de radiação conforme a equação (3.2.6), e fazendo uso de propriedades trigonométricas e de ortogonalidade das funções seno e cosseno, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_c^m(\tau, \mu) + I_c^m(\tau, \mu) \right] \cos m(\varphi - \varphi_r) + \left[\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_s^m(\tau, \mu) + I_s^m(\tau, \mu) \right] \sin m(\varphi - \varphi_r) = \\ & = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') \left[I_c^m(\tau, \mu') \cos m(\varphi - \varphi_r) + I_s^m(\tau, \mu') \sin m(\varphi - \varphi_r) \right] d\mu' \xi_{m,L}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

onde

$$\xi_{m,L} = \begin{cases} 1 & \text{se } m \leq L \\ 0 & \text{se } m > L \end{cases}. \quad (3.2.9a)$$

O resultado expresso na equação (3.2.9) mostra que $I_c^m(\tau, \mu)$ e $I_s^m(\tau, \mu)$

são soluções da equação de transporte com simetria azimutal,

$$\mu \frac{\partial I^m(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \xi_{m,L}, \quad (3.2.10)$$

onde a notação $I^m(\tau, \mu)$ foi utilizada para representar tanto $I_c^m(\tau, \mu)$ quanto $I_s^m(\tau, \mu)$. Além disto, aplicando as condições de contorno (3.2.5a) na solução proposta (3.2.6), multiplicando primeiramente por $\cos m(\varphi - \varphi_r)$, depois por $\sin m(\varphi - \varphi_r)$ e integrando as equações obtidas no intervalo $[0, 2\pi]$, resultam as condições de contorno associadas aos problemas (3.2.10),

$$I_c^m(0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \cos m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0 \quad (3.2.10a)$$

e

$$I_s^m(0, \mu) = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \sin m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0. \quad (3.2.10b)$$

Procedendo de forma análoga para a condição de contorno (3.3.5b) obtemos resultados semelhantes em $\tau = \tau_0$. Decorre daí que $I_c^m(\tau, \mu)$ e $I_s^m(\tau, \mu)$, são soluções dos problemas de contorno,

$$\mu \frac{\partial I^m(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_{\ell}^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \xi_{m,L}, \quad (3.2.11)$$

com as condições de contorno,

$$I^m(0, \mu) = F_m = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu > 0 \quad (3.2.11a)$$

e

$$I^m(\tau_0, \mu) = G_m = \frac{2 - \delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\mu, \varphi) \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} m(\varphi - \varphi_r) d\varphi, \quad \mu < 0. \quad (3.2.11b)$$

Devemos ainda notar que encontrando os $(2L+2)$ fluxos com simetria azimutal, soluções dos problemas (3.2.11), a intensidade de radiação sem simetria azimutal, solução do problema (3.2.5), fica completamente determinada pelas equações (3.2.6) e (3.2.8).

Para utilizarmos a formulação LTS_N e as formulações obtidas nas seções 2.2 e 2.3, vamos resolver o seguinte problema de radiação [28],

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) I(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \quad (3.2.12)$$

com as condições de contorno

$$I(0, \mu, \varphi) = \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \text{se } \mu > 0 \quad (3.2.12a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = 0, \quad \text{se } \mu < 0. \quad (3.1.12b)$$

Escolhendo o ângulo de referência azimutal como sendo o ângulo de incidência da radiação solar, isto é $\varphi_r = \varphi_0$, através das equações (3.2.6) e (3.2.8), a

intensidade de radiação pode ser escrita como,

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^L \left[I^m(\tau, \mu) - I^m(0, \mu) e^{-\tau/\mu} \right] \cos m(\varphi - \varphi_0) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\tau/\mu}, & \mu > 0, \\ \sum_{m=0}^L I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_0) & \mu < 0, \end{cases} \quad (3.2.13)$$

onde a intensidade de radiação com simetria azimutal, $I^m(\tau, \mu)$ da equação (3.2.13) para cada $m = 0, 1, \dots, L$, é solução da equação com simetria azimutal,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I^m(\tau, \mu) + I^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu', \quad (3.2.14)$$

com as condições de contorno,

$$I(0, \mu) = \frac{(2 - \delta_{0,m})}{2} \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0, \quad (3.2.14a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (3.2.14b)$$

Como no problema (3.2.14) estão envolvidas funções generalizadas, sua solução é decomposta [28,29,30] como,

$$I^m(\tau, \mu) = I_*^m(\tau, \mu) + \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \delta(\mu - \mu_0) e^{-\tau/\mu}. \quad (3.2.15)$$

Substituindo (3.2.15) no problema (3.2.14) temos que a parte que não envolve funções generalizadas de (3.2.15), $I_*^m(\tau, \mu)$, satisfaz a equação com fonte,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_*^m(\tau, \mu) + I_*^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^1 P_\ell^m(\mu') I_*^m(\tau, \mu') d\mu' + Q^m(\tau, \mu), \quad (3.2.16)$$

com condições de contorno homogêneas e com termo de fonte definido por,

$$Q^m(\tau, \mu) = \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (3.1.16b)$$

3.3 Solução pelo método LTS_N

Nesta seção aplicamos o método LTS_N , na resolução do problema de transferência radiativa. Assim, vamos considerar o seguinte problema,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi) + I(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m=0}^L (2 - \delta_{0,m}) \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu', \quad (3.3.1)$$

com as condições de contorno,

$$I(0, \mu, \varphi) = \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \text{se } \mu > 0, \quad (3.3.1a)$$

e

$$I(\tau_0, \mu, \varphi) = 0, \quad \text{se } \mu < 0. \quad (3.3.1b)$$

Escolhendo o ângulo de referência azimutal como sendo o ângulo de incidência da radiação solar, isto é $\varphi_r = \varphi_0$, através das equações (3.2.6) e (3.2.8), a intensidade de radiação pode ser escrita como,

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^L \left[I^m(\tau, \mu) - I^m(0, \mu) e^{-\tau/\mu} \right] \cos m(\varphi - \varphi_0) + \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\tau/\mu}, & \mu > 0, \\ \sum_{m=0}^L I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi - \varphi_0) & , \mu < 0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

onde, pelas equações (3.2.10), (3.2.10a) e (3.2.10b), as intensidades de radiação com simetria azimutal, $I^m(\tau, \mu)$ que aparecem na equação (3.3.2) ($m = 0, 1, \dots, L$), são soluções das equações,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I^m(\tau, \mu) + I^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu) \int_{-1}^1 P_{\ell}^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu', \quad (3.3.3)$$

com condições de contorno,

$$I(0, \mu) = \frac{(2 - \delta_{0,m})}{2} \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0 \quad \text{e} \quad I(\tau_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (3.3.3a)$$

Como no problema (3.3.3) estão envolvidas funções generalizadas por (3.2.15) decompos,

$$I^m(\tau, \mu) = I_*^m(\tau, \mu) + \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \delta(\mu - \mu_0) e^{-\tau/\mu}. \quad (3.3.4)$$

Substituindo (3.3.4) no problema (3.3.3) temos que a parte que não envolve funções generalizadas de (3.3.4), $I_*^m(\tau, \mu)$, satisfaz a equação com fonte, descrita por

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_*^m(\tau, \mu) + I_*^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \int_{-1}^1 P_\ell^m(\mu') I_*^m(\tau, \mu') d\mu' + Q^m(\tau, \mu), \quad (3.3.5)$$

com condições de contorno homogêneas e termo de fonte definido por,

$$Q^m(\tau, \mu) = \frac{1}{2} (2 - \delta_{0,m}) \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (3.3.5a)$$

Vamos aplicar agora o método LTS_N na resolução do problema (3.3.1). Para tanto vamos considerar a aproximação S_N do problema (3.3.5),

$$\mu_n \frac{\partial}{\partial \tau} I_{n*}^m(\tau) + I_{n*}^m(\tau) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu_n) \left[\sum_{k=1}^N P_\ell^m(\mu_k) I_{k*}^m(\tau) w_k + \frac{(2 - \delta_{0,m})}{2} P_\ell^m(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} \right], \quad (3.3.6)$$

com as condições de contorno,

$$I_{n*}^m(0) = 0, \quad \mu_n > 0 \quad \text{e} \quad I_{n*}^m(\tau_0) = 0, \quad \mu_n < 0, \quad (3.3.6a)$$

onde, as direções μ_n são as raízes do polinômio de Legendre de N-ésimo grau, w_k são os pesos da quadratura de Gauss e $I_{n*}^m(\tau)$ é a notação usada para representar a função intensidade de radiação na direção discreta μ_n .

Dividindo a equação (3.3.6) por μ_n , aplicando a transformada de Laplace na variável espacial e fazendo uso da fórmula (3.2.4) para exprimir β_ℓ^m ,

obtemos para $m=0,1,\dots,L$ as n equações,

$$\left(s + \frac{1}{\mu_n} - \frac{\omega}{2\mu_n} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\mu_n) P_\ell^m(\mu_n) w_n \right) \bar{I}_n^m(s) -$$

$$- \frac{\omega}{2\mu_n} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\mu_n) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N P_\ell^m(\mu_k) w_k \bar{I}_k^m(s) = I_n^m(0) + \frac{\bar{Q}_n^m(s)}{\mu_n}, \quad (3.3.7)$$

onde β_ℓ é definido como na equação (2.1.2b) e a barra denota a aplicação da transformada de Laplace.

Fazendo $n=1, 2, \dots, N$ na equação (3.3.7), obtemos L sistemas algébricos de equações que podem ser reescritos em forma matricial como,

$$\bar{M}_N^m(s) \bar{I}^m(s) = \bar{I}(0) + \bar{Q}^m(s) \quad (3.3.8)$$

onde cada elemento $a^m(i, j)$, da matriz $\bar{M}_N^m(s)$, é definido por

$$a^m(i, j) = \begin{cases} s + \frac{1}{\mu_i} - \frac{\omega}{2\mu_i} \left[\sum_{\ell=m}^L \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\mu_i) w_i P_\ell^m(\mu_i) \right] & \text{se } i=j, \\ - \frac{\omega}{2\mu_i} \left[\sum_{\ell=m}^L \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\mu_i) w_j P_\ell^m(\mu_j) \right] & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (3.3.9)$$

e os vetores $\bar{I}^m(s)$, $\bar{I}^m(0)$ e $\bar{Q}^m(s)$ são expressos como,

$$\bar{I}^m(s) = \text{col} \left[\bar{I}_{1^*}^m(s) \quad \bar{I}_{2^*}^m(s) \dots \bar{I}_{N^*}^m(s) \right], \quad (3.3.9a)$$

$$\bar{I}^m(0) = col \left[I_{1^*}^m(0) \quad I_{2^*}^m(0) \quad \dots \quad I_{N^*}^m(0) \right], \quad (3.3.9b)$$

$$\bar{Q}^m(s) = col \left[\frac{\bar{Q}_1^m(s)}{\mu_1} \quad \frac{\bar{Q}_2^m(s)}{\mu_2} \quad \dots \quad \frac{\bar{Q}_N^m(s)}{\mu_N} \right]. \quad (3.3.9c)$$

Agora, resolvendo as equações (3.3.8), obtemos para cada $m = 1, 2, \dots, L$ os seguintes fluxos transformados,

$$\bar{I}^m(s) = \left(M_N^m(s) \right)^{-1} \left[\bar{I}^m(0) + \bar{Q}^m(s) \right]. \quad (3.3.10)$$

Devemos ressaltar que a inversão da matriz $\bar{M}_N(s)$ pode ser feita analiticamente para qualquer grau de anisotropia [10] e como cada elemento da matriz inversa é uma função racional, cujo denominador é dado pelo determinante da matriz $\bar{M}_N(s)$, que possui N raízes r_k , $k = 1, 2, \dots, N$, simétricas e não repetidas, a inversão da transformada de Laplace também é feita de forma analítica através da técnica de expansão de Heaviside [8]. Desta forma, o vetor de intensidade de radiação $\bar{I}^m(\tau)$ é obtido em função do vetor $\bar{I}^m(0)$ como,

$$\bar{I}^m(\tau) = B^m(\tau) \bar{I}^m(0) + C^m(\tau), \quad (3.3.11)$$

com

$$B^m(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\bar{M}_N^m(s) \right)^{-1} \right] = \sum_{k=1}^N P^k e^{r_k \tau}, \quad (3.3.11a)$$

onde as matrizes P^k são matrizes de coeficientes provenientes da inversão da

transformada de Laplace e o vetor

$$\underline{\tilde{C}}^m(\tau) = \underline{B}^m(\tau) * \underline{\tilde{Q}}^m(\tau), \quad (3.3.11b)$$

onde o asterisco indica convolução. Fazendo uso das equações (3.3.11a) e (3.3.11c), cada elemento do vetor $\underline{\tilde{C}}^m(\tau)$ descrito pela equação (3.3.11b), pode ser explicitado através do cálculo da convolução,

$$c_i^m(\tau) = \sum_{j=1}^N b_{ij}^m(\tau) * \frac{Q_j^m(\tau)}{\mu_j} = \frac{\omega \mu_0 (2 - \delta_{0,m})}{4} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu_0) \sum_{j=1}^N \frac{P_\ell^m(\mu_j)}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k \frac{(e^{r_k \tau} - e^{\tau/\mu_0})}{s_k \mu_0 + 1}, \quad (3.3.12)$$

com $b_{ij}^m(\tau)$ e p_{ij}^k sendo as componentes da i -ésima linha e j -ésima coluna das matrizes $\underline{B}^m(\tau)$ e \underline{P}^k respectivamente.

Para calcular as condições de contorno em $\tau=0$, desconhecidas para $\mu < 0$, reescrevemos a equação (3.3.11) em blocos como,

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^m(\tau) \\ \underline{I}_2^m(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1^m(\tau) & \underline{B}_2^m(\tau) \\ \underline{B}_3^m(\tau) & \underline{B}_4^m(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^m(0) \\ \underline{I}_2^m(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_1^m(\tau) \\ \underline{C}_2^m(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

onde $\underline{I}_j^m(\tau)$, $\underline{I}_j^m(0)$ e $\underline{C}_j^m(\tau)$, com $k=1,2$ são vetores de $N/2$ componentes e $\underline{B}_k^m(\tau)$, com $k=1, 2, 3, 4$, matrizes quadradas de ordem $N/2$. Substituindo $\tau=\tau_0$ em (3.3.8) e usando as condições de contorno (3.3.1a) temos,

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^m(\tau_0) \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1^m(\tau_0) & \underline{B}_2^m(\tau_0) \\ \underline{B}_3^m(\tau_0) & \underline{B}_4^m(\tau_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I}_2^m(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_1^m(\tau_0) \\ \underline{C}_2^m(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (3.3.14)$$

e assim o vetor $\tilde{I}_{-2}^m(0)$ é definido por,

$$\tilde{I}_{-2}^m(0) = -\left(B_4^m(\tau_0)\right)^{-1} \tilde{C}_2^m(\tau_0), \quad (3.3.15)$$

e desta forma, o vetor de intensidade de radiação, com simetria azimutal, dado pela equação (3.3.11) fica completamente determinado e em cada direção discreta μ_n a intensidade de radiação pode ser escrita como [25],

$$I_{n*}^m(\tau) = \sum_{j=1}^N I_j(0) \sum_{k=1}^N p_{n,j}^k e^{r_k \tau} + \frac{\omega}{2} \mu_0 \frac{(2-\delta_{0,m})}{2} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu_0) \sum_{j=1}^N \frac{P_\ell^m(\mu_j)}{\mu_j} \sum_{k=1}^N \frac{p_{n,j}^k}{r_k \mu_0 + 1} (e^{r_k \tau} - e^{-\tau/\mu_0}). \quad (3.3.16)$$

3.3.1 Solução LTS_N com dependência contínua na variável angular

Para aplicarmos o método LTS_N com dependência contínua na variável angular, vamos considerar o problema de transporte (3.3.5), e vamos estimar seu termo integral através da solução obtida pelo método LTS_N na seção 3.3 pela expressão (3.3.16). Assim, temos a equação

$$\frac{d}{d\tau} I_{n*}^m(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} I_{n*}^m(\tau, \mu) = F^m(\tau, \mu) \quad (3.3.1.1)$$

com as condições de contorno homogêneas e onde a função $F^m(\tau, \mu)$ é definida por,

$$F^m(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=m}^L P_{\ell}^m(\mu) \beta_{\ell}^m \left[\left(\sum_{n=1}^N P_{\ell}^m(\mu_n) I_{n*}^m(\tau) w_n \right) + P_{\ell}^m(\mu_0) e^{-\gamma_{\ell} \mu_0} \right]. \quad (3.3.1.1a)$$

Na equação (3.3.1.1a) $I_{n*}^m(\tau)$ denota a solução do problema de ordenadas discretas associado ao problema de ordenadas discretas (3.3.6) descrito pela fórmula (3.3.16).

A solução da equação diferencial ordinária (3.3.1.1) é dada por,

$$I_{*}^m(\tau, \mu) = e^{-\tau/\mu} \left[I_{*}^m(0, \mu) + \int_0^{\tau} F^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta \right]. \quad (3.3.1.2)$$

Pela condição de contorno em $\tau=0$ temos que a função $I_{*}^m(0, \mu)$ é nula se $\mu > 0$. Para determinarmos a função $I_{*}^m(0, \mu)$ para $\mu < 0$, fazemos $\tau = \tau_0$ em (3.3.1.2) e usamos o fato de $I_{*}^m(\tau_0, \mu) = 0$ para $\mu < 0$, assim

$$0 = I_{*}^m(\tau_0, \mu) = e^{-\tau_0/\mu} \left[I_{*}^m(0, \mu) + \int_0^{\tau_0} F^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta \right], \quad (3.3.1.3)$$

desta forma,

$$I_{*}^m(0, \mu) = - \int_0^{\tau_0} F^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta. \quad (3.3.1.3a)$$

Substituindo a equação (3.3.1.3a) na eq. (3.3.1.2) e usando propriedades de integrais, temos que a solução da equação (3.3.1.1) é dada por,

$$I_{*}^m(\tau, \mu) = \begin{cases} e^{-\tau/\mu} \int_0^{\tau} F^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta & \text{se } \mu > 0. \\ -e^{-\tau/\mu} \int_{\tau}^{\tau_0} F^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta & \text{se } \mu < 0. \end{cases} \quad (3.3.1.4)$$

As integrais que aparecem em (3.3.1.4) podem ser calculadas analiticamente como,

$$\int_a^b F_{n^*}^m(\eta, \mu) e^{\eta/\mu} d\eta = \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=m}^L P_{\ell}^m(\mu) \beta_{\ell}^m (2\ell+1) \left[\sum_{n=1}^N P_{\ell}^m(\mu_n) \omega_n \int_{\alpha}^{\beta} I_{n^*}^m(\eta) e^{\eta/\mu} d\eta + \frac{(2-\delta_{0,m})}{2} P_{\ell}^m(\mu_0) \int_a^b e^{\eta(\nu/\mu-1/\mu_0)} d\eta \right] \quad (3.3.1.4a)$$

e usando a equação (3.3.1.3), podemos escrever a primeira integral do lado direito de (3.3.1.4a) como,

$$\int_{\alpha}^{\beta} I_{n^*}^m(\eta) e^{\eta/\mu} d\eta = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{j=1}^N b_{n,j}(\eta) I_{j^*}^m(0) + C_n(\eta) \right] d\eta = \sum_{j=1}^N I_{j^*}^m(0) \sum_{k=1}^N p_{k,j}^k \int_{\alpha}^{\beta} e^{r_k \eta} e^{\eta/\mu} d\eta + \frac{\mu_0 \omega (2-\delta_{0,m})}{4} \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu_0) \sum_{j=1}^N \frac{P_{\ell}^m(\mu_j)}{\mu_j} \sum_{k=1}^N \frac{p_{ij}^k}{r_k \mu_0 + 1} \int_a^b (e^{r_k \eta} - e^{-\eta/\mu_0}) e^{\eta/\mu} d\eta. \quad (3.3.1.4b)$$

3.3.2 Método Iterativo

Nesta seção usamos o método iterativo para a resolução da equação de transferência radiativa (3.3.1). Na primeira iteração, procedemos da mesma forma que na seção 3.3.1, obtendo o fluxo angular com dependência contínua na variável angular. Assim, o fluxo angular na primeira iteração é dado por,

$$I_{m*}^{m,1}(\tau, \mu) = \begin{cases} e^{-\nu\mu} \int_0^\tau F^{m,1}(\eta, \mu) e^{\nu\mu} d\eta & \text{se } \mu > 0 \\ -e^{-\nu\mu} \int_\tau^{\tau_0} F^{m,1}(\eta, \mu) e^{\nu\mu} d\eta & \text{se } \mu < 0 \end{cases}, \quad (3.3.2.1)$$

onde o termo integral de (3.3.2.1) é dado pela equação (3.3.1.4a).

Para procedermos a segunda iteração calculamos o termo integral da equação (3.3.5) através do fluxo angular obtido na primeira iteração, assim obtemos uma nova equação diferencial ordinária,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_{m*}^{m,2}(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} I_{m*}^{m,2}(\tau, \mu) = F^{m,2}(\tau, \mu), \quad (3.3.2.2)$$

onde o termo de fonte é dado por,

$$\begin{aligned} F_m^2(\tau, \mu) &= \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=m}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \left\{ \int_{-1}^{+1} P_\ell^m(\mu') I_{m*}^{1}(\tau, \mu') d\mu' + P_\ell^m(\mu_0) e^{-\nu\mu_0} \right\} \\ &= \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \left[\int_0^1 P_\ell^m(\mu') \left(I_{m*}^{1+}(\tau, \mu') + (-1)^{\ell-m} I_{m*}^{1-}(\tau, -\mu') \right) d\mu' + P_\ell^m(\mu_0) e^{-\nu\mu_0} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.2.3)$$

Assim, a solução da segunda iteração é escrita como,

$$I_{m*}^2(\tau, \mu) = \begin{cases} e^{-\nu\mu} \int_0^\tau F_m^2(\eta, \mu) e^{\nu\mu} d\eta & , \quad \mu > 0, \\ -e^{-\nu\mu} \int_\tau^{\tau_0} F_m^2(\eta, \mu) e^{\nu\mu} d\eta & , \quad \mu < 0, \end{cases} \quad (3.3.2.4)$$

onde

$$\int_0^\tau F_m^2(\tau, \mu) e^{\gamma\mu} = \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=m}^L P_\ell^m(\mu) \beta_\ell^m \left[P_\ell^m(\mu_o) \int_0^\tau e^{\eta(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_o})} d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^1 P_\ell^m(\mu') \left[\int_0^\tau e^{\gamma\mu} \left(I_{m^*}^{1+}(\eta, \mu') + (-1)^{\ell-m} I_{m^*}^{1-}(\eta, \mu') d\eta \right) \right] \right]. \quad (3.3.2.5)$$

As integrais na variável η que aparecem em (3.3.2.5) podem ser calculadas analiticamente, já a integral na variável μ' deve ser calculada numericamente. Este processo iterativo pode utilizado tantas vezes quanto necessário afim de obter maior precisão de solução. A k -ésima iteração é escrita como [31],

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I_{m^*}^k(\tau, \mu) + \frac{1}{\mu} I_{m^*}^k(\tau, \mu) = F_m^k(\tau, \mu), \quad (3.3.2.6)$$

onde

$$F_m^k(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2\mu} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) \left[\int_0^1 P_\ell^m(\mu') \left(I_{m^*}^{k-1+}(\tau, \mu') + (-1)^{\ell-m} I_{m^*}^{k-1-}(\tau, -\mu') d\mu' \right) + P_\ell^m(\mu_o) e^{-\gamma\mu_o} \right] \quad (3.3.2.7)$$

e

$$I_{m^*}^k(\tau, \mu) = \begin{cases} e^{-\gamma\mu} \int_0^\tau F_m^k(\eta, \mu) e^{\gamma\eta} d\eta & , \quad \mu > 0, \\ -e^{-\gamma\mu} \int_\tau^{\tau_o} F_m^k(\eta, \mu) e^{\gamma\eta} d\eta & , \quad \mu < 0. \end{cases} \quad (3.3.2.8)$$

3.4 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos simulações numéricas dos métodos apresentados na seção 3.3. Para tal, vamos considerar os problemas de transferência radiativa (3.3.5), com $\tau_0 = 1$, $\omega = 0.95$, $\varphi_0 = \varphi_r = 0.5$ e vamos ainda considerar a lei de espalhamento baseada na teoria de Mie para partículas esféricas dada pela tabela (3.4.1).

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
β_r	1.00000	2.00916	1.56339	0.67407	0.22215	0.04725	0.00671	0.00068	0.00005

Os resultados obtidos pelo método LTS_N nas direções discretas μ_m são apresentados nas tabelas (3.4.2) e (3.4.3). Para compararmos os resultados com os obtidos pelo método $F_{N'}$ por Devaux e Siewert [28], utilizamos interpolação polinomial com um polinômio interpolador de grau 10. Os resultados interpolados estão listados e comparados com os resultados obtidos pelo método F_N nas tabelas (3.4.4) e (3.4.5).

μ	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8
-1.0805 d-01	3.3258 d-01	4.1789 d-01	1.6910 d-01	4.6445 d-02	1.1571 d-02	1.9451 d-03	2.2182 d-04	1.8346 d-05	1.1578 d-06
-3.1911 d-01	2.4095 d-01	2.6731 d-01	9.5488 d-02	2.2945 d-02	5.6595 d-03	9.4684 d-04	1.0604 d-04	8.4880 d-06	5.8277 d-07
-5.1525 d-01	1.6299 d-01	1.6080 d-01	5.0947 d-02	1.0190 d-02	2.3996 d-03	3.8226 d-04	4.0014 d-05	2.9025 d-06	2.0744 d-07
-6.8729 d-01	1.1083 d-01	9.4532 d-02	2.5629 d-02	3.9432 d-03	8.3867 d-04	1.1982 d-04	1.1002 d-05	6.6798 d-07	4.6644 d-08
-8.2720 d-01	7.8222 d-02	5.4079 d-02	1.1648 d-02	1.2434 d-03	2.1854 d-04	2.5558 d-05	1.8762 d-06	8.5959 d-08	5.3020 d-09
-9.2843 d-01	5.9047 d-02	2.8646 d-02	4.2124 d-03	2.6797 d-04	3.3021 d-05	2.6808 d-06	1.3371 d-07	3.9335 d-09	1.7875 d-10
-9.8628 d-01	4.9486 d-02	1.1195 d-02	7.4932 d-04	1.9711 d-05	1.1219 d-06	4.1775 d-08	9.4178 d-10	1.2039 d-11	2.6008 d-13

μ	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8
9.8628 d-01	2.0094 d-01	5.2518 d-02	3.5158 d-03	1.7230 d-04	6.2032 d-06	1.5081 d-07	2.5527 d-09	2.9794 d-11	1.9015 d-13
9.2843 d-01	2.1474 d-01	1.2034 d-01	1.7726 d-02	1.9327 d-03	1.5676 d-04	8.6091 d-06	3.2955 d-07	8.7428 d-09	1.2823 d-10
8.2720 d-01	2.3656 d-01	1.8632 d-01	4.0014 d-02	6.4724 d-03	7.9616 d-04	6.6600 d-05	3.8892 d-06	1.5876 d-07	3.6573 d-09
6.8729 d-01	2.6105 d-01	2.4433 d-01	6.4750 d-02	1.3190 d-02	2.1093 d-03	2.3066 d-04	1.7626 d-05	9.5226 d-07	2.9943 d-08
5.1525 d-01	2.7917 d-01	2.8266 d-01	8.3643 d-02	1.9448 d-02	3.7050 d-03	4.8585 d-04	4.4503 d-05	2.9173 d-06	1.1623 d-07
3.1911 d-01	2.7229 d-01	2.7783 d-01	8.4532 d-02	2.0746 d-02	4.4294 d-03	6.5641 d-04	6.7782 d-05	5.0642 d-06	2.4363 d-07
1.0805 d-01	2.0495 d-01	1.9535 d-01	5.5706 d-02	1.3343 d-02	3.0348 d-03	4.8500 d-04	5.3744 d-05	4.3370 d-06	2.4291 d-07

Tabela 3.4.4 - Valores de $I_*^m(0, -\mu)$ interpolados, com $w=0.95$, $\mu_0=0.5$ comparados com o método F_N ($N=10, 15$)

$-\mu$	m = 0		m = 1		m = 2		m = 3		m = 4		m = 5		m = 6		m = 7		m = 8	
	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14
0.1	3.401 d-01	3.358 d-01	4.285 d-01	4.241 d-01	1,735 d-01	1,725 d-01	4.770 d-02	4.758 d-02	1.187 d-03	1.185 d-03	1.993 d-03	1.991 d-03	2.272 d-04	2.271 d-04	1.879 d-05	1.879 d-05	1.181 d-06	1.181 d-06
0.2	2.975 d-01	2.935 -01	3.522 d-01	2.489 d-01	1.340 d-01	1.333 d-01	3.475 d-02	3.473 d-02	8.639 d-03	8.646 -03	1.456 d-03	1.456 d-03	1.656 d-05	1.656 d-05	1.361 d-05	1.359 d-05	8.945 d-07	8.939 d-07
0.3	2.517 d-01	2.493 -01	2.817 d-01	2.796 d-01	1.014 d-01	1.009 d-01	2.464 d-02	2.460 d-02	6.083 d-03	6.081 d-03	1.020 d-03	1.101 d-03	1.146 d-05	1.145 d-05	9.224 d-06	9.223 d-06	6.294 d-07	6.293 d-07
0.4	2.082 d-01	2.067 -01	2.204 d-01	2.189 d-01	7.499 d-02	7.470 d-02	1.684 d-02	1.680 d-02	4.094 d-03	4.090 d-03	6.754 d-04	6.751 d-04	7.409 d-05	7.409 d-05	5.750 d-06	5.752 d-06	4.036 d-07	4.038 d-07
0.5	1.697 d-01	1.683 E-01	1.689 E-01	1.678 E-01	5.394 E-02	5.373 E-02	1.096 E-02	1.093 d-02	2.591 d-03	2.590 d-03	4.152 d-04	4.151 d-04	4.379 d-05	4.437 d-05	3.211 d-06	3.211 d-06	2.292 d-07	2.292 d-07
0.6	1.365 d-01	1.353 E-01	1.263 E-01	1.255 E-01	3.730 E-02	3.716 E-02	6.651 E-03	6.643 d-02	1.504 d-03	1.503 d-03	2.295 d-04	2.295 d-04	2.279 d-05	2.278 d-05	1.536 d-06	1.535 d-06	1.097 d-07	1.095 d-08
0.7	1.083 d-01	1.075 E-01	9.104 E-02	9.042 E-02	2.424 E-02	2.414 E-02	3.628 E-03	3.621 d-02	7.617 d-04	7.612 d-03	1.075 d-04	1.074 d-04	9.727 d-05	9.727 d-05	5.797 d-07	5.798 d-07	4.025 d-08	4.026 d-08
0.8	8.459 d-02	8.398 E-01	6.166 E-02	6.120 E-02	1.405 E-02	1.399 E-02	1.637 E-03	1.633 d-03	3.025 d-04	3.021 d-03	3.731 d-05	3.729 d-05	2.905 d-06	2.905 d-06	1.430 d-07	1.433 d-07	9.164 d-09	9.194 d-09
0.9	6.456 d-02	6.408 E-01	3.602 E-02	3.5591 E-0	6.134 E-03	6.111 E-02	4.719 E-04	4.713 d-03	6.693 d-05	6.711 d-04	6.281 d-06	6.304 d-06	3.646 d-07	3.635 d-07	1.270 d-08	1.228 d-08	6.563 d-10	6.213 d-10
1.0	4.768 d-02	4.729 d-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 3.4.5 - Valores de $I_*^m(1, \mu)$ interpolados, com $w=0.95$, $\mu_0=0.5$ comparados com o método F_N ($N=10, 15$)

μ	m = 0		m = 1		m = 2		m = 3		m = 4		m = 5		m = 6		m = 7		m = 8	
	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14	F_N	LTS14
0.1	2.031 d-01	2.007 E-01	1.924 E-01	1.898 E-01	5.453 E-02	5.397 E-02	1.302 E-02	1.289 d-02	2.964 d-03	2.933 d-03	4.745 d-04	4.694 d-04	5.268 d-05	5.208 d-05	4.259 d-06	4.208 d-06	2.397 d-07	2.370 d-07
0.2	2.442 d-01	2.405 E-01	2.412 E-01	2.445 E-01	7.124 E-02	7.218 E-02	1.736 E-02	1.766 d-02	3.862 d-03	3.943 d-03	6.005 d-04	6.142 d-04	6.491 d-05	6.647 d-05	5.100 d-06	5.231 d-06	2.686 d-07	2.786 d-07
0.3	2.703 d-01	2.692 E-01	2.745 E-01	2.743 E-01	8.321 E-02	8.323 E-02	2.043 E-02	2.045 d-02	4.395 d-03	4.403 d-03	6.570 d-04	6.584 d-04	6.842 d-05	6.858 d-05	5.160 d-06	5.173 d-06	2.521 d-07	2.527 d-07
0.4	2.811 d-01	2.799 E-01	2.879 E-01	2.862 E-01	8.742 E-02	8.720 E-02	2.118 E-02	2.113 d-02	4.348 d-03	4.335 d-03	6.173 d-04	6.152 d-04	6.114 d-05	6.092 d-05	4.364 d-06	4.346 d-06	1.956 d-07	1.949 d-07
0.5	2.808 d-01	2.799 E-01	2.849 E-01	2.841 E-01	8.465 E-02	8.457 E-02	1.982 E-02	1.980 d-02	3.81 d-03	3.816 d-03	5.067 d-04	5.064 d-04	4.697 d-05	4.694 d-05	3.119 d-06	3.116 d-06	1.264 d-07	1.263 d-07
0.6	2.730 d-01	2.722 d-01	2.689 d-01	2.686 d-01	7.615 d-02	7.613 d-02	1.680 d-02	1.680 d-02	2.972 d-03	2.974 d-03	3.607 d-04	3.612 d-04	3.060 d-05	3.065 d-05	1.847 d-06	1.851 d-06	6.628 d-08	6.639 d-08
0.7	2.598 d-01	2.591 d-01	2.405 d-01	2.400 d-01	6.289 d-02	6.281 d-02	1.261 d-02	1.261 d-02	1.982 d-03	1.981 d-03	2.128 d-04	2.212 d-04	1.597 d-05	1.596 d-05	8.465 d-07	8.459 d-07	2.604 d-08	2.602 d-08
0.8	2.425 d-01	2.418 d-01	2.001 d-01	1.994 d-01	4.543 d-02	4.539 d-02	7.803 d-03	7.802 d-03	1.026 d-03	1.024 d-03	9.181 d-05	9.166 d-05	5.738 d-06	5.725 d-06	2.513 d-07	2.504 d-07	6.245 d-09	6.231 d-09
0.9	2.217 d-01	2.211 d-01	1.425 d-01	1.430 d-01	2.432 d-02	2.433 d-02	3.096 d-03	3.091 d-03	2.948 d-04	2.954 d-04	1.903 d-05	1.918 d-05	8.568 d-07	8.686 d-07	2.780 d-08	2.780 d-08	4.660 d-10	4.733 d-10
1.0	1.979 d-01	1.935 d-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Devemos ainda notar que em problemas com simetria azimutal, a solução LTS_{2N+2} mostra-se equivalente a solução F_N [11]. Note que nas tabelas 3.4.4 e 3.4.5, os resultados pelo método F_N [8] foram obtidos com N variando entre 10 e 15 e os resultados pelo método LTS_N foram obtidos para $N=14$ [30].

Tabela 3.4.6 - Resultados numéricos para a intensidade de radiação, $I^m(1, \mu)$, obtida pela primeira iteração considerando a solução LTS_N como valor inicial

	μ	LTS_2	LTS_4	LTS_6	LTS_8	LTS_{10}	LTS_{12}	LTS_{14}	F_N ($N=10,15$)
m=0	0.1	1.920(-1)	1.988(-1)	2.000(-1)	2.002(-1)	2.005(-1)	2.009(-1)	2.012(-1)	2.031(-1)
	0.2	2.259(-1)	2.363(-1)	2.403(-1)	2.415(-1)	2.421(-1)	2.425(-1)	2.429(-1)	2.442(-1)
	0.3	2.510(-1)	2.604(-1)	2.658(-1)	2.676(-1)	2.684(-1)	2.688(-1)	2.691(-1)	2.703(-1)
	0.4	2.650(-1)	2.707(-1)	2.764(-1)	2.784(-1)	2.793(-1)	2.797(-1)	2.800(-1)	2.810(-1)
	0.5	2.697(-1)	2.709(-1)	2.764(-1)	2.783(-1)	2.792(-1)	2.799(-1)	2.799(-1)	2.808(-1)
	0.6	2.667(-1)	2.640(-1)	2.689(-1)	2.708(-1)	2.716(-1)	2.720(-1)	2.722(-1)	2.730(-1)
	0.7	2.573(-1)	2.518(-1)	2.563(-1)	2.578(-1)	2.585(-1)	2.589(-1)	2.591(-1)	2.598(-1)
	0.8	2.418(-1)	2.355(-1)	2.393(-1)	2.407(-1)	2.413(-1)	2.417(-1)	2.419(-1)	2.424(-1)
	0.9	2.206(-1)	2.158(-1)	2.189(-1)	2.202(-1)	2.207(-1)	2.210(-1)	2.212(-1)	2.217(-1)
m=2	0.1	5.358(-2)	5.588(-2)	5.481(-2)	5.445(-2)	5.436(-2)	5.435(-2)	5.437(-2)	5.453(-2)
	0.2	6.928(-2)	7.218(-2)	7.147(-2)	7.121(-2)	7.113(-2)	7.112(-2)	7.113(-2)	7.124(-2)
	0.3	8.104(-2)	8.375(-2)	8.332(-2)	8.317(-2)	8.312(-2)	8.312(-2)	8.313(-2)	8.321(-2)
	0.4	8.573(-2)	8.771(-2)	8.744(-2)	8.736(-2)	8.734(-2)	8.734(-2)	8.735(-2)	8.742(-2)
	0.5	8.377(-2)	8.480(-2)	8.462(-2)	8.458(-2)	8.458(-2)	8.458(-2)	8.459(-2)	8.465(-2)
	0.6	7.609(-2)	7.622(-2)	7.610(-2)	7.608(-2)	7.608(-1)	7.609(-2)	7.610(-2)	7.615(-2)
	0.7	6.322(-2)	6.288(-2)	6.281(-2)	6.280(-2)	6.280(-2)	6.281(-2)	6.282(-2)	6.289(-2)
	0.8	4.628(-2)	4.530(-2)	4.539(-2)	4.539(-2)	4.539(-2)	4.540(-2)	4.540(-2)	4.543(-2)
	0.9	2.503(-2)	2.433(-2)	2.432(-2)	2.421(-2)	2.432(-2)	2.433(-)	2.433(-2)	2.432(-2)
m=4	0.1	2.937(-3)	2.973(-3)	2.966(-3)	2.963(-3)	2.963(-3)	2.963(-3)	2.963(-3)	2.964(-3)
	0.2	3.827(-3)	3.869(-3)	3.864(-3)	3.862(-3)	3.861(-3)	3.861(-3)	3.861(-3)	3.862(-3)
	0.3	4.358(-3)	4.399(-3)	4.396(-3)	4.395(-3)	4.394(-3)	4.395(-3)	4.394(-3)	4.395(-3)
	0.4	4.316(-3)	4.351(-3)	4.349(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)
	0.5	3.793(-3)	3.820(-3)	3.8185(-3)	3.8180(-3)	3.8179(-3)	3.8179(-3)	3.8180(-3)	3.818(-3)
	0.6	2.955(-3)	2.973(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)
	0.7	1.972(-3)	1.983(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)
	0.8	1.021(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)
	0.9	2.938(-4)	2.949(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)
m=6	0.1	5.266(-5)	5.268(-5)	5.268(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)
	0.2	6.488(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)
	0.3	6.840(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)
	0.4	6.112(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)
	0.5	4.695(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)
	0.6	3.059(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)
	0.7	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-)	1.597(-5)	1.597(-5)
	0.8	5.737(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)
	0.9	8.566(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)
m=8	0.1	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)
	0.2	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)
	0.3	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)
	0.4	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)
	0.5	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)
	0.6	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)
	0.7	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)
	0.8	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)
	0.9	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)

O problema anterior também foi resolvido pelo método iterativo [31], considerando como chute inicial a solução LTS_N para $N = 2, 4, \dots, 14$ e $m = 2, 4, 6, 8$. As comparações numéricas dos resultados obtidos na primeira iteração, isto é

pele método com dependência contínua na variável angular, com a solução F_N são apresentados na tabela (3.4.6) e os resultados obtidos para a segunda iteração são apresentados na (3.4.7).

Tabela 3.4.7 - Resultados numéricos para a intensidade de radiação, $I_*^m(1, \mu)$, obtida pela segunda iteração considerando a solução LTS_N como valor inicial

	μ	N=2	N=4	N=6	N=8	N=10	N=12	N=14	F_N
m=2	0.1	5.393(-2)	5.860(-2)	5.454(-2)	5.451(-2)	5.450(-2)	5.450(-2)	5.451(-2)	5.453(-2)
	0.2	7.024(-2)	7.121(-2)	7.122(-2)	7.122(-2)	7.122(-2)	7.122(-2)	7.122(-2)	7.124(-2)
	0.3	8.204(-2)	8.310(-2)	8.317(-2)	8.318(-2)	8.319(-2)	8.318(-2)	8.319(-2)	8.321(-1)
	0.4	8.625(-2)	8.726(-2)	8.736(-2)	8.739(-2)	8.740(-2)	8.740(-2)	8.740(-2)	8.742(-2)
	0.5	8.360(-2)	8.449(-2)	8.459(-2)	8.462(-2)	8.463(-2)	8.463(-2)	8.464(-2)	8.465(-2)
	0.6	7.528(-2)	7.600(-2)	7.609(-2)	7.612(-2)	7.613(-1)	7.614(-2)	7.614(-2)	7.615(-2)
	0.7	6.220(-2)	6.273(-2)	6.280(-2)	6.283(-2)	6.284(-2)	6.284(-2)	6.285(-2)	6.286(-2)
	0.8	4.499(-2)	4.533(-2)	4.539(-2)	4.540(-2)	4.541(-2)	4.542(-2)	4.542(-2)	4.543(-2)
	0.9	2.412(-2)	2.429(-2)	2.432(-2)	2.433(-2)	2.433(-2)	2.434(-)	2.434(-2)	2.434(-2)
m=4	0.1	2.963(-3)	2.964(-3)	2.964(-3)	2.963(-3)	2.963(-3)	2.964(-3)	2.964(-3)	2.964(-3)
	0.2	3.860(-3)	3.862(-3)	3.862(-3)	3.862(-3)	3.861(-3)	3.861(-3)	3.861(-3)	3.862(-3)
	0.3	4.393(-3)	4.394(-3)	4.395(-3)	4.395(-3)	4.394(-3)	4.395(-3)	4.395(-3)	4.395(-3)
	0.4	4.347(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)	4.348(-3)
	0.5	3.818(-3)	3.818(-3)	3.818(-3)	3.818(-3)	3.8179(-3)	3.818(-3)	3.818(-3)	3.818(-3)
	0.6	2.971(-3)	2.971(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)	2.972(-3)
	0.7	1.981(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)	1.982(-3)
	0.8	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)	1.026(-3)
	0.9	2.947(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)	2.948(-4)
m=6	0.1	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)	5.267(-5)
	0.2	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)	6.491(-5)
	0.3	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)	6.842(-5)
	0.4	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)	6.114(-5)
	0.5	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)	4.697(-5)
	0.6	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)	3.060(-5)
	0.7	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-3)	1.597(-5)	1.597(-5)	1.597(-)	1.597(-5)	1.597(-5)
	0.8	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)	5.738(-6)
	0.9	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)	8.568(-7)
m=8	0.1	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)	2.397(-7)
	0.2	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)	2.686(-7)
	0.3	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)	2.521(-7)
	0.4	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)	1.956(-7)
	0.5	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)	1.264(-7)
	0.6	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)	6.628(-8)
	0.7	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)	2.604(-8)
	0.8	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)	6.245(-9)
	0.9	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)	4.660(-10)

3.5 O método LTP_N

Nesta seção vamos mostrar como o método LTP_N [7,8] resolve analiticamente a aproximação P_N da equação de transporte e a problemas de transferência de radiação sem simetria azimutal. Assim sendo, convém lembrar que a aproximação P_N da equação de transporte linear [1,7,8], é obtida expandindo o fluxo angular em polinômios de Legendre, na forma

$$\psi(x, \mu) = \sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} \phi_{\ell}(x) P_{\ell}(\mu) , \quad N \text{ ímpar} , \quad (3.5.1)$$

substituindo a expansão (3.5.1) na equação de transporte (2.1.1) e utilizando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre , obtemos

$$\sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(\mu) [\mu \phi'_{\ell}(x) + \sigma_t \phi_{\ell}(x)] = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^N (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) f_{\ell} \phi_{\ell}(x) + \sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} q_{\ell}(x) P_{\ell}(\mu) , \quad (3.5.2)$$

sujeita às condições de contorno,

$$\psi(0, \mu) = \sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} \phi_{\ell}(0) P_{\ell}(\mu) = f(\mu) \quad , \quad \mu > 0 , \quad (3.5.2a)$$

$$\psi(x_0, \mu) = \sum_{\ell=0}^N \frac{2\ell+1}{2} \phi_{\ell}(x_0) P_{\ell}(\mu) = g(\mu) \quad , \quad \mu < 0 . \quad (3.5.2b)$$

e

$$(2\ell + 1)f_\ell = \beta_\ell \quad (3.5.2c)$$

Agora, multiplicando a equação (3.5.2) por $P_k(\mu)$, com k inteiro variando de 0 até N e integrando cada uma das $N+1$ equações resultantes no intervalo $[-1; 1]$ obtemos um sistema de $N+1$ equações diferenciais ordinárias em $\phi_k(x)$. Sobre este sistema aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial, reduzindo o problema a um sistema algébrico, que matricialmente é dado por

$$\overline{M}_N(s) \underline{\phi}(s) = \underline{\phi}(0) + \overline{Q}(s) \quad (3.5.3)$$

onde $\overline{M}_N(s)$ é uma matriz tridiagonal, com s nas diagonais secundárias.

Resolvemos a equação matricial (3.5.3), invertendo a matriz $\overline{M}_N(s)$, pelo método de Trzaska [8]. A transformada inversa é, então, calculada de forma analítica através da técnica de expansão de Heaviside. Assim, encontramos a função $\phi(x)$ x como função do vetor $\underline{\phi}(0)$,

$$\underline{\phi}(x) = B(x)\underline{\phi}(0) + B(x) * \underline{Q}(x), \quad (3.5.4)$$

onde a matriz $B(x)$ é a transformada inversa de Laplace da inversa da matriz $\overline{M}_N(s)$ e a estrela denota convolução. Quando trabalhamos em uma placa plana, as condições de contorno são normalmente conhecidas em $x=0$ para $\mu > 0$ e em $x=x_0$ para $\mu < 0$, conforme descrito nas equações (3.5.2a) e (3.5.2b). Assim, para calcularmos determinarmos o vetor $\underline{\phi}(0)$ fazemos $x=x_0$ em (3.5.4) e tomamos os momentos nas condições de contorno, ou seja

$$\int_0^1 \mu^k \psi(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu^k \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \phi_\ell(0) P_\ell(\mu) d\mu \quad (3.5.5)$$

e

$$\int_{-1}^0 \mu^k \psi(0, \mu) d\mu = \int_{-1}^0 \mu^k \sum_{\ell=0}^N \left(\frac{2\ell+1}{2} \right) \phi_{\ell}(x_0) P_{\ell}(\mu) d\mu, \quad (3.5.6)$$

formando assim um sistema algébrico, que é resolvido por Gauss.

O método LTP_{N'} já foi aplicado na resolução de problemas em um grupo de energia em uma placa plana [7,8], de problemas de multigrupo [7,32], de problemas inversos [33,34] e no cálculo de parâmetros radiantes [15]. Vamos agora, estender esta formulação para o problema de transferência radiativa (3.2.16). Para isto, vamos considerar a expansão da função $I^m(\tau, \mu)$ em termos dos polinômios associados de Legendre,

$$\psi^m(x, \mu) = \sum_{\alpha=m}^{N+m} A_{\alpha-m}^m(\tau) P_{\alpha}^m(\mu) \quad (3.5.7)$$

Substituindo a expressão (3.5.7) na equação (3.2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=m}^{N+m} (2\alpha+1) \left[\mu P_{\alpha}^m(\mu) A_{\alpha-m+1}^m(\tau) + P_{\alpha}^m(\mu) A_{\alpha-m+1}^m(\tau) \right] = \\ = \frac{\omega}{2} \sum_{k=m}^L \sum_{\alpha=m}^{N+m} (2\alpha+1)(2k+1) \beta_k^m P_k^m(\mu) A_{k-m+1}^m(\tau) \int_{-1}^1 P_k^m(\mu') P_{\alpha}^m(\mu') d\mu' \xi_{m,L} + Q^m(\tau, \mu), \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

onde $\xi_{m,L}$ é definido por (3.2.9a). Ainda, fazendo uso das propriedades de ortogonalidade dos polinômios associados de Legendre em (3.5.8),

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=m}^{N+m} (2\alpha+1) \left[\mu P_{\alpha}^m(\mu) A_{\alpha-m+1}^m(\tau) + P_{\alpha}^m(\mu) A_{\alpha-m+1}^m(\tau) \right] = \\ & = \frac{\omega}{2} \sum_{k=m}^{N+m} (2k+1)^2 f_k^m P_k^m(\mu) A_{k-m+1}^m(\tau) \frac{2(k+m)!}{(2k+1)(k-m)!} \xi_{k,L} + Q^m(\tau, \mu). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Substituindo usando a expressão (3.2.4), lembrando que $\beta_k^m = (2\ell+1)f_{\ell}^m$ e usando as fórmulas de recorrência dos polinômios associados de Legendre na equação (3.5.9), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=m}^{N+m} (2\alpha+1) \left[\frac{1}{2\alpha+1} \left[(\alpha+1-m) P_{\alpha+1}^m(\mu) + (\alpha+m) P_{\alpha-1}^m(\mu) \right] A_{\alpha-m+1}^m(\tau) + P_{\alpha}^m(\mu) A_{\alpha-m+1}^m(\tau) \right] = \\ & = \omega \sum_{k=m}^{N+m} (2k+1) f_k^m P_k^m(\mu) A_{k-m+1}^m(\tau) \xi_{k,L} + Q^m(\tau, \mu). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Multiplicando a equação (3.5.10) por,

$$\frac{(2j+1)(j-m)!}{2(j+m)!} P_j^m(\mu), \quad (3.5.11)$$

para $j = m, m+1, \dots, m+N$, integrando-a no intervalo $[-1, 1]$ e arranjando seus termos de forma adequada, obtemos

$$(j-m) A_{j-m}^m(\tau) + (2j+1) \left[1 - \omega f_j^m \xi_{j,L} \right] A_{j-m+1}^m(\tau) + (j+m+1) A_{j-m+2}^m(\tau) = Q_{j-m+1}^m(\tau), \quad (3.5.12)$$

onde,

$$S_{j-m+1}^m(\tau) = \frac{(2j+1)(j-m)!}{2(j+m)!} \int_{-1}^{+1} P_j^m(\mu) Q^m(\tau, \mu) d\mu. \quad (3.5.12a)$$

Substituindo a equação (2.1.16b), podemos reescrever (3.5.12a) como,

$$S_{j-m+1}^m(\tau) = \frac{(2-\delta_{0,m})\omega}{4} (2j+1) f_j^m P_j^m(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (3.5.12b)$$

Agora, aplicando transformada de Laplace na variável τ , na equação (3.5.12), temos

$$\begin{aligned} s(j-m)\bar{A}_{j-m}^m(s) + (2j+1)(1-\omega f_j \xi_{jL})\bar{A}_{j-m+1}^m(s) + s(j+m+1)\bar{A}_{j-m+2}^m(s) = \\ = (j-m)A_{j-m}^m(0) + (j+1+m)A_{j-m+2}^m(0) + \bar{Q}_{j-m+1}^m(s), \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

onde a barra denota aplicação da transformada de Laplace. Desta forma, para cada valor fixo de m , podemos escrever as equações (3.5.13), na forma de uma equação matricial

$$\begin{bmatrix} (2m+1)\omega_m & (2m+1)s & \dots & 0 \\ s & (2m+3)\omega_{m+1} & \dots & 0 \\ 0 & 2s & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (2m+N)s \\ 0 & 0 & \dots & (2m+2N+1)\omega_{m+N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1^m(s) \\ \bar{A}_2^m(s) \\ \bar{A}_3^m(s) \\ \dots \\ \bar{A}_{N-1}^m(s) \\ \bar{A}_{N+1}^m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2m+1)A_2^m(0) \\ A_1^m(s) + (2m+2)A_3^m(s) \\ 2A_2^m(s) + (2m+3)A_4^m(s) \\ \dots \\ (N-1)A_{N-1}^m(s) + (2m+N)A_{N+1}^m(s) \\ NA_N^m(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Q}_1^m(s) \\ \bar{Q}_2^m(s) \\ \bar{Q}_3^m(s) \\ \dots \\ \bar{Q}_{N+1}^m(s) \end{bmatrix}, \quad (3.5.14)$$

com, $\omega_m = (1 - \omega f_m)$, isto é

$$\overline{\overline{M}}_N^m(s) \overline{\overline{A}}^m(s) = \overline{\overline{A}}^{m*}(0) + \overline{\overline{Q}}^m(s). \quad (3.5.15)$$

Por facilidade de cálculos, reescrevemos o vetor $\overline{\overline{A}}^{m*}(0)$, como,

$$\overline{\overline{A}}^m(0) = C^m \cdot \overline{\overline{A}}^m(0) = \begin{bmatrix} 0 & (2m+1) & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (2m+2) & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (2m+N) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^m(0) \\ A_2^m(0) \\ A_3^m(0) \\ \dots \\ \dots \\ A_N^m(0) \\ A_{N+1}^m(0) \end{bmatrix}. \quad (3.5.16)$$

A partir de agora, procedemos de maneira análoga à Streck [7,8], isto é, invertemos a matriz $\overline{\overline{M}}_N^m(s)$ da equação (3.5.15), através do algoritmo de Trzaska [8] e procedemos a transformada inversa de Laplace através da técnica de expansão de Heaviside, obtendo assim a equação matricial

$$A^m(\tau) = D^m(\tau) \overline{\overline{A}}^m(0) + \overline{\overline{H}}^m(\tau), \quad (3.5.17)$$

onde a matriz $D^m(\tau)$ e o vetor $\overline{\overline{H}}^m(\tau)$ que aparecem em (3.5.17) são definidos por,

$$\overline{\overline{H}}^m(\tau) = B^m(\tau) * \overline{\overline{Q}}^m(\tau), \quad (3.5.17a)$$

$$D^m(\tau) = B^m(\tau) C^m, \quad (3.5.17b)$$

com,

$$B^m(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[\overline{M}_N^m(s) \right]^{-1} \right\} = \sum_{k=1}^{N+1} P^k e^{s_k \tau}, \quad (3.5.17c)$$

com P^k matrizes de coeficientes provenientes da inversão da transformada de Laplace e s_k as raízes do determinante da matriz $\overline{M}_N^m(s)$. Cada elemento do vetor $\underline{H}^m(\tau)$, definido por (3.5.17a) do problema proposto (3.3.5), pode ser calculado por,

$$\begin{aligned} h_i^m(\tau) &= \sum_{j=1}^{N+1} b_i^m(\tau) * Q_j^m(\tau) = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} p_{ij}^k e^{s_k \tau} * \frac{2-\delta_{0,m}}{2} (2(j+m-1)+1) \frac{\omega}{2} \beta_{j+m-1}^m P_{j+m-1}^m(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} = \\ &= \frac{\mu_0 \omega}{2} \frac{2-\delta_{0,m}}{2} \sum_{j=1}^{N+1} (2(j+m)-1) \beta_{j+m-1}^m P_{j+m-1}^m(\mu_0) \sum_{k=1}^{N+1} p_{ij}^k \left(\frac{e^{s_k \tau} - e^{\tau/\mu_0}}{s_k \mu_0 + 1} \right) \end{aligned} \quad (3.5.17d)$$

Devemos ainda observar que os elementos da matriz $D^m(\tau)$, definida por (3.5.17b) podem ser escritos como,

$$d_{i,j}(\tau) = \begin{cases} b_{i,2}(\tau), & \text{se } j=1 \\ (2m+N) b_{i,N}(\tau), & \text{se } j=N+1 \\ (2m+j-1) b_{i,j-1}(\tau) + j b_{i,j+1}(\tau) & , \text{ se } j \neq 1 \text{ e } j \neq N+1 \end{cases}, \quad (3.5.17e)$$

onde, $b_{k,j}(\tau)$ e $d_{k,j}(\tau)$ são os elementos da k -ésima linha e j -ésima coluna das matrizes, $D^m(\tau)$ e $B^m(\tau)$.

Finalmente, os elementos desconhecidos do vetor $\underline{A}^m(0)$ são determinados pela resolução de um sistema algébrico constituído através do cálculo dos momentos na condição de contorno homogêneas do problema,

$$0 = \frac{2-\delta_{0,m}}{2\pi} \int_0^1 \mu^k F^m(\mu) d\mu = \int_0^1 I^m(0,\mu) \mu^k d\mu = \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} A_{\alpha-m+1}^m(0) \int_0^1 P_{\alpha}^m(\mu) \mu^k d\mu \quad (3.5.18)$$

e

$$0 = \frac{2-\delta_{0,m}}{2\pi} \int_{-1}^0 \mu^k G^m(\mu) d\mu = \int_{-1}^0 I^m(a,\mu) \mu^k d\mu = \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} A_{\alpha-m+1}^m(\tau_0) \int_{-1}^0 P_{\alpha}^m(\mu) \mu^k d\mu, \quad (3.5.18a)$$

para $k=1, 2, 3, \dots, (N-1)/2$. As componentes do vetor $\underline{A}^m(\tau_0)$ que aparecem na equação (3.5.18a) são escritos em termos dos elementos do vetor $\underline{A}^m(0)$, fazendo $\tau = \tau_0$ na equação (3.5.17), assim cada elemento $a_k^m(\tau_0)$ do vetor $\underline{A}^m(\tau_0)$ está definido por,

$$a_k^m(\tau_0) = \sum_{j=1}^{N+1} d_{kj}^m(\tau_0) a_j^m(0) + h_k^m(\tau_0), \quad (3.5.18b)$$

onde $d_{kj}^m(\tau_0)$ é o elemento da k -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $D^m(\tau_0)$; $a_k^m(0)$ e $h_k^m(\tau_0)$ são os elementos da k -ésima linha dos respectivos vetores $\underline{A}^m(0)$ e $\underline{H}^m(\tau_0)$. Dessa forma, para conhecermos o vetor $\underline{A}^m(0)$, temos que resolver um sistema linear de equações da forma,

$$\underline{0} = M_0^m \underline{A}^m(0) + \underline{H}^m, \quad (3.5.19)$$

onde a matriz M_0^m é definida por,

$$M_0^m = \begin{bmatrix} \frac{2m+1}{2} M_{m,0}^{m+} & \frac{2m+3}{2} M_{m+1,0}^{m+} & \dots & \frac{2(N+m)+1}{2} M_{m+N,0}^{m+} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2m+1}{2} M_{m, \frac{N-1}{2}}^{m+} & \frac{2m+3}{2} M_{m+1, \frac{N-1}{2}}^{m+} & \dots & \frac{2(N+m)+1}{2} M_{m+N, \frac{N-1}{2}}^{m+} \\ \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,1} M_{\alpha,0}^{m-} & \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,2} M_{\alpha,0}^{m-} & \dots & \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,N+1} M_{\alpha,0}^{m-} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,1} M_{\alpha, \frac{N-1}{2}}^{m-} & \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,2} M_{\alpha, \frac{N-1}{2}}^{m-} & \dots & \sum_{\alpha=m}^{N+m} \frac{2\alpha+1}{2} d_{\alpha-m+1,N+1} M_{\alpha, \frac{N-1}{2}}^{m-} \end{bmatrix}, \quad (3.5.19a)$$

e onde notamos,

$$M_{jk}^{m+} = \int_0^1 P_j^m(\mu) \mu^k d\mu, \quad (3.5.19b)$$

$$M_{jk}^{m-} = \int_{-1}^0 P_j^m(\mu) \mu^k d\mu. \quad (3.5.19c)$$

O vetor \underline{H}^m de (3.5.19) é definido como,

$$H^m = c o l \left[0 \dots 0 \sum_{k=m}^{N+m} \frac{2k+1}{2} h_{k-m+1}^m(\tau_0) M_{k,0}^{m-} \sum_{k=m}^{N+m} \frac{2k+1}{2} h_{k-m+1}^m(\tau_0) M_{k,1}^{m-} \dots \sum_{k=m}^{N+m} \frac{2k+1}{2} h_{k-m+1}^m(\tau_0) M_{k, \frac{N-1}{2}}^{m-} \right]. \quad (3.5.19d)$$

Para podermos implementar este problema, necessitamos ainda estimar o valor das integrais

$$\int_0^1 \mu^k P_\ell^m(\mu) d\mu \quad e \quad \int_{-1}^0 \mu^k P_\ell^m(\mu) d\mu, \quad (3.5.20)$$

que aparecem em (3.5.19a) e (3.5.19d). Essas integrais estão tabeladas [35] para m e k quaisquer. Essas fórmulas são bastante complexas e nós apenas necessitamos calculá-las para valores inteiros de m e k , assim desenvolvemos uma fórmula mais simples para seu cômputo. Isso foi feito lembrando que,

1) Apenas é preciso calcular a primeira integral de (3.5.20), pois a função

$$\mu^k P_{\ell}^m(\mu) \quad (3.5.21)$$

é par ou ímpar, dependendo apenas se valor da soma $\ell + k + m$ assumir valor par ou ímpar.

2) $P_m^m(\mu)$ pode ser escrito através da fórmula [36],

$$P_m^m(\mu) = (2m-1)!! (1-\mu^2)^{m/2} \quad (3.5.21a)$$

3) Através das fórmulas de recorrência dos polinômios associados de Legendre, $P_{m+k}^m(\mu)$ pode ser escrito em função de $P_m^m(\mu)$, com k e m inteiros, como:

$$P_{m+k}^m(\mu) = P_m^m(\mu) \sum_{\ell=1}^{\frac{k+1+p}{2}} \left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{k+1+p-\ell}{2}} \left[\prod_{j=1}^{\frac{k-1-p+\ell}{2}} (2m+2j-1) \right] \frac{\mu^{2\ell-1-p}}{(2\ell-1-p)! \left(\frac{k+1+p}{2} - \ell\right)!}, \quad (3.5.22)$$

onde,

$$p = \frac{1 + (-1)^k}{2} \quad (3.5.22a)$$

4) Ainda usando tabela de integrais [37], temos que,

$$\int_0^1 \mu^m (1-\mu^2)^p d\mu = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(p+\frac{m+3}{2}\right)}, \quad \begin{cases} p > -1 \\ m > -1 \end{cases} \quad (3.5.23)$$

5) Finalmente, de (3.5.22) e (3.5.23) resulta que,

$$\int_0^1 x^i P_{m+k}^m(\mu) d\mu = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2} \sum_{\ell=1}^{\frac{k}{2}+1} \left(\frac{-1}{2}\right)^h \left[\frac{(2m+2\ell+k-p)!!}{(2m+2\ell+k-p)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{i+2\ell-1-p}{2}\right)}{h! \Gamma\left(\frac{m+2\ell+i+2-p}{2}\right) (2\ell-2-p)!}, \quad (3.5.24)$$

onde

$$h = \frac{k+1+p}{2} - \ell. \quad (3.5.25a)$$

As fórmulas desenvolvidas em (3.5.23) e (3.5.24) valem para m , i , k inteiros positivos, e p definido como em (3.5.22a). Devemos ainda observar que as notações "d!" e "d!!" utilizadas representam o fatorial da d e o produtório dos inteiros ímpares até d .

Finalmente é importante salientar a generalidade deste método, pois além de resolver as aproximações S_N e P_N , como apresentado neste trabalho, também tem sido bem sucedido na solução das aproximações W_N [38], Ch_N [39] e A_N [40] da equação de transporte.

4. A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DEPENDENTE DO TEMPO

Os problemas de transporte com dependência no tempo, em reatores nucleares, possuem importância fundamental na investigação da estabilidade e controle de um reator, tanto em condições normais de operação, como quando ocorre um acréscimo acidental da reatividade, falha no sistema de refrigeração ou outras situações anormais de operação. Além disto, muitos experimentos com dependência no tempo têm sido usados para determinar quantidades de interesse, como reatividade de um sistema de reações em cadeia e também suas propriedades de difusão e termalização [3].

Neste capítulo, mostramos como a formulação LTS_N é aplicada na resolução de problemas de transporte unidimensional dependente do tempo, tanto de forma aproximada pela inversão numérica do fluxo transformado na variável tempo, bem como analiticamente, aplicando o método LTS_N nas equações nodais.

4.1 Generalidades

Nessa seção iremos considerar o problema descrito pela equação unidimensional de transporte com dependência no tempo, geometria plana e a um grupo de energia [1], descrito por,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu, t) + \sigma_t \psi(x, \mu, t) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \psi(x, \mu', t) d\mu' + Q(x, \mu, t), \quad (4.1.1)$$

com as condições de contorno,

$$\psi(0, \mu, t) = f(\mu, t), \quad \mu > 0 \quad \text{e} \quad \psi(x_0, \mu, t) = g(\mu, t), \quad \mu < 0 \quad (4.1.1a)$$

e com condição inicial,

$$\psi(x, \mu, 0) = \phi(x, \mu). \quad (4.1.1b)$$

onde $\psi(x, \mu, t)$ é o fluxo de partículas na posição x , com direção μ , num tempo t ; σ_t e σ_s são respectivamente as seções de choque total e de espalhamento; μ é o cosseno da direção de propagação da partícula medido a partir do eixo positivo de x ; Θ é o ângulo de espalhamento de partículas entre as direções μ e μ' ; $p(\cos \Theta)$ é a função de fase.

Agora, usando expansão em polinômios de Legendre, reescrevemos a função de fase como [1],

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{\ell=m}^L \frac{2\ell+1}{2} f_{\ell} P_{\ell}(\cos \Theta), \quad f_0 = 1 \quad (4.1.2)$$

e pelo teorema de adição para os polinômios de Legendre [apêndice 1],

$$p(\cos \Theta) = \sum_{\ell=0}^L \frac{2\ell+1}{2} f_{\ell} P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi_0) \quad (4.1.3)$$

Vamos considerar a aproximação S_N da equação de transporte (4.1.1). Para tanto, aplicamos o método da colocação na equação (4.1.1), isto é, aproximamos o termo integral por quadratura de Gauss e consideramos a função peso como a função delta de Dirac, $\delta(\mu - \mu_m)$, onde os pontos μ_m de colocação são escolhidos como as N raízes do polinômio de Legendre de grau

N , consideradas em ordem decrescente,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N-1}{2}} < 0 < \mu_{\frac{N+1}{2}} < \dots < \mu_1 < 1, \quad (4.1.4)$$

e integramos no intervalo $[-1, 1]$. Assim, obtemos a aproximação S_N de (4.1.1),

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) + \sigma_t \Psi_m(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \Psi_n(x, t) + Q_m(x, t), \quad (4.1.5)$$

com $n = 1, 2, \dots, N$. Das equações (4.1.1a) e (4.1.1b) temos que as condições de contorno do problema são,

$$\Psi_m(0, t) = f_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \Psi_m(x_0, t) = g_m(t), \quad m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N \quad (4.1.5a)$$

e a condição inicial,

$$\Psi_m(x, 0) = \phi_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.5b)$$

Nas equações (4.1.5), a notação $\Psi_m(x, t)$ é usada para representar o fluxo de partículas em x , no tempo t e na direção μ_m e

$$\sigma^{mn} = \sum_{\ell=0}^L (2\ell+1) f_\ell P_\ell(\mu_m) P_\ell(\mu_n). \quad (4.1.5c)$$

Neste capítulo, o problema de transporte dependente do tempo é abordado de duas formas distintas. Primeiramente, como é feito na literatura

clássica, aplicaremos a transformada de Laplace na variável tempo ($t \rightarrow p$) do fluxo angular, dado pela equação (4.1.5). Se, nesta equação transformada, utilizamos a notação

$$\sigma_t^p = \sigma_t + \frac{p}{v}, \quad (4.1.6)$$

a equação resultante possuirá a mesma forma de uma equação unidimensional independente do tempo. Assim sendo, aplicando a formulação LTS_N nesta equação, obtemos o fluxo angular transformado na variável tempo. A inversão da variável tempo transformada, p , é então feita numericamente utilizando o esquema de quadratura de Gauss [41]. A segunda forma de resolução para a equação (4.1.5), considerada neste capítulo, consiste na aplicação do método nodal. Isto é, primeiramente integramos a equação (4.1.5) em relação à variável tempo no intervalo de tempo $[0, \tau_0]$, obtendo assim uma equação para o fluxo médio no tempo e depois integramos a equação (4.1.5) em relação à variável espacial, no intervalo $[0, x_0]$, obtendo, agora, uma equação para o fluxo médio espacial. Este sistema de equações acoplado é então resolvido através da formulação LTS_N de forma analítica, isto é, os fluxos angulares médios no tempo e no espaço são encontrados. No que segue, discutiremos estes dois procedimentos.

4.2 Método de inversão numérica no tempo

Vamos considerar o problema de ordenadas discretas dependente do tempo, descrito pelas equações (3.1.5). Primeiramente aplicamos a transformada de Laplace na variável tempo, ($t \rightarrow p$), resultando

$$\frac{1}{v} \left(p \bar{\Psi}_m(x, p) - \Psi_m(x, 0) \right) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}_m(x, p) + \sigma_i \bar{\Psi}_m(x, p) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} \bar{\Psi}_n(x, p) \omega_n + \bar{Q}_m(x, p). \quad (4.2.1)$$

Agora, dividindo a equação (4.2.1) por μ_m e usando a notação,

$$\sigma_i^p = \sigma_i + \frac{p}{v}, \quad (4.2.2)$$

obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}_m(x, p) + \frac{\sigma_i^p}{\mu_m} \bar{\Psi}_m(x, p) = \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} \bar{\Psi}_n(x, p) \omega_n + \frac{\bar{\Phi}_m(x, p)}{\mu_m}, \quad (4.2.3)$$

sujeito às condições de contorno,

$$\bar{\Psi}_m(0, p) = \bar{f}_m(p), \quad \mu_m > 0 \quad \text{e} \quad \bar{\Psi}_m(x_0, p) = \bar{g}_m(p), \quad \mu_m < 0. \quad (4.2.3a)$$

A barra usada na equação (4.2.3) denota a aplicação da transformada de Laplace na variável tempo, assim

$$\bar{\Psi}_m(x, p) = \mathcal{L} \left[\Psi_m(x, t), t \right], \quad (4.2.3b)$$

e

$$\bar{\Phi}_m(x, p) = \frac{1}{v} \Psi_m(x, 0) + \mathcal{L} \left(Q_m(x, t), t \right). \quad (4.2.3c)$$

Vamos agora aplicar o método LTS_N [8,9,10] para resolução da equação (4.2.3), com as condições de contorno dadas por (4.2.2a). Assim, a transformada de Laplace é aplicada na variável espacial ($x \rightarrow s$), resultando, para $m = 1, 2, \dots, N$, o seguinte sistema de equações algébricas,

$$\left(s + \frac{\sigma_t^p}{\mu_m} + \frac{\sigma_s \sigma^{mm} \omega_m}{2 \mu_m} \right) \bar{\bar{\Psi}}_m(s, p) - \frac{\sigma_s}{2 \mu_m} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \sigma^{mn} \bar{\bar{\Psi}}_n(s, p) \omega_n = \frac{\bar{\bar{\Phi}}_m(s, p)}{\mu_m} + \bar{\Psi}_m(0, p) \quad (4.2.4)$$

onde usamos a barra dupla para denotar a dupla aplicação da transformada de Laplace, uma vez na variável tempo t ($t \rightarrow p$) e a segunda na variável espacial x ($x \rightarrow s$), ou seja

$$\bar{\bar{\Psi}}_m(s, p) = \mathcal{L}[\bar{\Psi}_m(x, p), x], \quad (4.2.4a)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_m(s, p) = \mathcal{L}[\bar{\Phi}_m(x, p), x]. \quad (4.2.4b)$$

O sistema de equações (4.2.4) é reescrito na forma matricial,

$$\bar{\bar{M}}_N(s, p) \bar{\bar{\Psi}}(s, p) = \bar{\Psi}(0, p) + \bar{\bar{\Phi}}(s, p), \quad (4.2.5)$$

onde a matriz $\bar{\bar{M}}_N$ é definida como,

$$\bar{M}_N(s, p) = \begin{bmatrix} s + \frac{\sigma_t^p}{\mu_1} - \frac{\sigma_s \sigma^{11} \omega_1}{2 \mu_1} & -\frac{\sigma_s \sigma^{12} \omega_2}{2 \mu_1} & \dots & -\frac{\sigma_s \sigma^{1N} \omega_N}{2 \mu_1} \\ -\frac{\sigma_s \sigma^{21} \omega_1}{2 \mu_2} & s + \frac{\sigma_t^p}{\mu_2} - \frac{\sigma_s \sigma^{22} \omega_2}{2 \mu_2} & \dots & -\frac{\sigma_s \sigma^{2N} \omega_N}{2 \mu_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{\sigma_s \sigma^{N1} \omega_1}{2 \mu_N} & -\frac{\sigma_s \sigma^{N2} \omega_2}{2 \mu_N} & \dots & s + \frac{\sigma_t^p}{\mu_N} - \frac{\sigma_s \sigma^{NN} \omega_N}{2 \mu_N} \end{bmatrix}, \quad (4.2.5a)$$

e os vetores $\bar{\Psi}(s, p)$, $\bar{\Psi}(0, p)$ e $\bar{\Phi}(s, p)$ são escritos como,

$$\bar{\Psi}(s, p) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_1(s, p) \quad \bar{\Psi}_2(s, p) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_N(s, p) \right], \quad (4.2.5b)$$

$$\bar{\Psi}(0, p) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_1(0, p) \quad \bar{\Psi}_2(0, p) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_N(0, p) \right], \quad (4.2.5c)$$

$$\bar{\Phi}(s, p) = \text{col} \left[\frac{\bar{\Phi}_1(s, p)}{\mu_1} \quad \frac{\bar{\Phi}_2(s, p)}{\mu_2} \quad \dots \quad \frac{\bar{\Phi}_N(s, p)}{\mu_N} \right]. \quad (4.2.5c)$$

A matriz $\bar{M}_N(s, p)$ é invertida analiticamente. A solução de (4.2.5) é então expressa como,

$$\bar{\Psi}(s, p) = \bar{M}_N^{-1}(s, p) \bar{\Psi}(0, p) + \bar{M}_N^{-1}(s, p) \bar{\Phi}(s, p). \quad (4.2.6)$$

Para efetuarmos a inversão de $\bar{\Psi}(s, p)$ em (4.2.6) em x , usamos a técnica de expansão de Heaviside e o teorema da convolução. Desta forma, obtemos o fluxo angular transformado no tempo expresso pela fórmula,

$$\bar{\Psi}(x, p) = \bar{B}(x, p) \bar{\Psi}(0, p) + \bar{B}(x, p) * \bar{\Phi}(x, p), \quad (4.2.7)$$

onde, * denota convolução e

$$B(x, p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ M_N^{-1}(s, p) \right\} = \sum_{k=1}^N P^k(p) e^{s_k(p)x}, \quad (4.2.8)$$

com $s_k(p)$ as N raízes do determinante da matriz $\bar{M}_N(s, p)$ e $P^k(p)$ matrizes coeficientes provenientes da expansão de Heaviside. Desta forma, cada elemento da matriz $B(x, p)$ pode ser escrito como,

$$b_{ij}(x, p) = \sum_{k=1}^N p_{ij}^k(p) e^{s_k(p)x}, \quad (4.2.9)$$

onde $p_{ij}^k(p)$ é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $P^k(p)$. Vamos denotar o primeiro vetor do lado direito de (4.2.7) por

$$\bar{D}(x, p) = \bar{B}(x, p) \bar{\Psi}(0, p) \quad (4.2.10)$$

e o vetor convolução de (4.2.7) por

$$\bar{C}(x, p) = \bar{B}(x, p) * \bar{\Phi}(x, p). \quad (4.2.10a)$$

Pelas fórmulas (4.2.9) e (4.2.3c), temos que cada elemento do vetor (4.2.10), pode ser escrito como,

$$\bar{d}_i(x, p) = \sum_{j=1}^N \bar{b}_{ij}(x, p) \bar{\Psi}_j(0, p) = \sum_{j=1}^N \bar{\Psi}_j(0, p) \sum_{k=1}^N p_{ij}^k(p) e^{s_k(p)x}. \quad (4.2.11)$$

Da mesma forma, fazendo uso da equação (4.2.9) e da condição de contorno (4.2.3c), cada elemento do vetor convolução (4.2.10a) é descrito pela fórmula,

$$\begin{aligned} \bar{C}_i(x, p) &= \sum_{j=1}^N \bar{b}_{ij}(x, p) * \left[\frac{\frac{1}{v} \phi_j(x) + \bar{q}_j(x, p)}{\mu_j} \right] = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^N \frac{\bar{b}_{ij}(x, p) * \phi_j(x)}{\mu_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\bar{b}_{ij}(x, p) * \bar{q}_j(x, p)}{\mu_j} = \\ &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k(p) \left[e^{s_k(p)x} * \phi_j(x) \right] + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k(p) \left[e^{s_k(p)x} * \bar{q}_j(x, p) \right] \end{aligned} \quad (4.2.11a)$$

Devemos ainda notar que pelas condições de contorno (4.2.3a), apenas $N/2$ componentes do vetor $\bar{\Psi}(0, p)$ da equação (4.2.11) são conhecidas. Para encontrarmos as $N/2$ componentes desconhecidas, reescrevemos a equação (4.2.11) em blocos de dimensão $N/2$ e fazemos $x = x_0$, resultando

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(x_0, p) \\ \bar{\Psi}_2(x_0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}(x_0, p) & \bar{B}_{12}(x_0, p) \\ \bar{B}_{21}(x_0, p) & \bar{B}_{22}(x_0, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(0, p) \\ \bar{\Psi}_2(0, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_1(x_0, p) \\ \bar{C}_2(x_0, p) \end{bmatrix}. \quad (4.2.12)$$

ou,

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_1(x_0, p) = \bar{B}_{11}(x_0, p) \bar{\Psi}_1(0, p) + \bar{B}_{12}(x_0, p) \bar{\Psi}_2(0, p) + \bar{C}_1(x_0, p) \\ \bar{\Psi}_2(x_0, p) = \bar{B}_{21}(x_0, p) \bar{\Psi}_1(0, p) + \bar{B}_{22}(x_0, p) \bar{\Psi}_2(0, p) + \bar{C}_2(x_0, p) \end{cases} \quad (4.2.12a)$$

Reescrevendo a segunda equação de (4.2.12a) temos,

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+1}(x_0, p) \\ \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+1}(x_0, p) \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_N(x_0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\frac{N}{2}+1,1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}(x_0, p) \\ b_{\frac{N}{2}+2,1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}}(x_0, p) \\ \vdots \dots \vdots \\ b_{N,1}(x_0, p) \dots b_{N, \frac{N}{2}}(x_0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(0, p) \\ \bar{\Psi}_2(0, p) \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_N(0, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+1, N}(x_0, p) \\ b_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+2, N}(x_0, p) \\ \vdots \dots \vdots \\ b_{N, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{N, N}(x_0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+1}(0, p) \\ \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+2}(0, p) \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_N(0, p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{\frac{N}{2}+1}(x_0, p) \\ c_{\frac{N}{2}+2}(x_0, p) \\ \vdots \\ c_N(x_0, p) \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Fazendo uso das condições de contorno (4.2.3a), em (4.2.13), obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} b_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+1, N}(x_0, p) \\ b_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+2, N}(x_0, p) \\ \vdots \dots \vdots \\ b_{N, \frac{N}{2}+1}(x_0, p) \dots b_{N, N}(x_0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+1}(0, p) \\ \bar{\Psi}_{\frac{N}{2}+2}(0, p) \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_N(0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{\frac{N}{2}+1}(p) \\ \bar{g}_{\frac{N}{2}+1}(p) \\ \vdots \\ \bar{g}_N(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{\frac{N}{2}+1,1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}(x_0, p) \\ b_{\frac{N}{2}+2,1}(x_0, p) \dots b_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}}(x_0, p) \\ \vdots \dots \vdots \\ b_{N,1}(x_0, p) \dots b_{N, \frac{N}{2}}(x_0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_1(p) \\ \bar{f}_2(p) \\ \vdots \\ \bar{f}_N(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{\frac{N}{2}+1}(x_0, p) \\ c_{\frac{N}{2}+2}(x_0, p) \\ \vdots \\ c_N(x_0, p) \end{bmatrix}, \quad (4.2.13a)$$

de ordem $N/2$ que é resolvido por eliminação de Gauss. Desta forma o vetor $\bar{\Psi}_2(0, p)$ fica completamente determinado, e conseqüentemente o fluxo transformado na variável tempo é encontrado de forma analítica pela fórmula (4.3.7), ou

$$\bar{\Psi}(x, p) = \bar{D}(x, p) + \bar{C}(x, p) \quad (4.2.14)$$

onde os elementos dos vetores $\bar{D}(x, p)$ e $\bar{C}(x, p)$ estão explicitados pelas fórmulas (4.2.11) e (4.2.11a).

Para encontrarmos o fluxo angular devemos, ainda, proceder a transformada inversa de Laplace na variável tempo ($p \rightarrow t$) na equação (4.2.14). Esta transformada é feita numericamente, por quadratura [42]. Assim, para cada

tempo $t = \tau$, o fluxo angular é calculado como,

$$\Psi(x, \tau) = \sum_{k=1}^K \xi_k \frac{\rho_k}{\tau} \bar{\Psi}\left(x, \frac{\rho_k}{\tau}\right), \quad (4.2.15)$$

onde os ρ_k são as raízes do polinômio,

$$(-1)^K \sum_{r=0}^K \frac{(-1)^{K-r} K(K+r-1)!}{r!(K-r)!} \rho^{K-r} = 0 \quad (4.2.16)$$

e os pesos ξ_k são as soluções de,

$$\sum_{i=1}^K \xi_i \rho_i^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq K-1. \quad (4.2.17)$$

Na seção 4.5 esta formulação será aplicada na resolução do problema isotrópico de uma placa de espessura $x_0 = 10$, com uma fonte unitária em toda sua extensão, com condições de contorno reflexivas em $x=0$ e vácuo em $x=x_0$ e que no instante $t=0$ a fonte é retirada (ver apêndice B).

Cabe finalmente observar que a única aproximação introduzida por este método é a inversão numérica na variável tempo do fluxo angular transformado. Na próxima seção apresentaremos um método analítico de solução do problema dependente do tempo aplicando o método LTS_N nas equações nodais.

4.3 Método nodal

Nessa seção apresentamos uma solução analítica pelo método LTS_N [1,2,3] para a aproximação S_N da equação de transporte linear, mono-energética, com espalhamento anisotrópico, dependente do tempo e em geometria plana, descrita pela equação (4.1.5). Para tanto, aplicamos o método nodal sobre esta equação, isto é, a integramos sobre o domínio espaço-tempo, com a variável tempo variando no intervalo $[0, t_0]$ e a variável espacial, no intervalo $[0, x_0]$, conforme a figura (4.3.1). Desta forma, obtemos duas equações diferenciais de ordenadas discretas de primeira ordem, uma dependente da variável x e a outra dependente da variável t . O método LTS_N é então aplicado nestas duas equações.

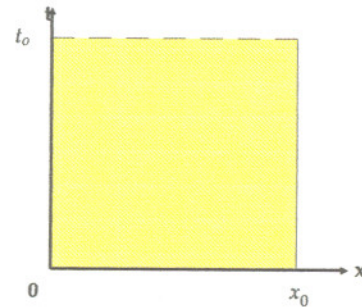


Figura 4.4.1 - Domínio Espaço-Tempo

Integrando a equação (4.1.5) em relação à variável tempo no intervalo $[0, t_0]$, obtemos a seguinte equação para o fluxo angular temporal médio,

$$\frac{1}{v t_0} [\Psi_m(x, t_0) - \Psi_m(x, 0)] + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{mx}(x) + \sigma_t \Psi_{mx}(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \Psi_{nx}(x) + Q_{mx}(x), \quad (4.3.1)$$

onde σ^{mn} está definido como em (4.1.5a),

$$\Psi_{mx}(x) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \Psi_m(x, t) dt \quad \text{e} \quad Q_{mx}(x) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} Q_m(x, t) dt \quad (4.3.1a)$$

Agora, integrando a equação (4.1.5) em relação à variável x no intervalo $[0, x_0]$, obtemos a seguinte equação para o fluxo angular espacial médio,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{mi}(t) + \frac{\mu_m}{x_0} \left[\Psi_m(x_0, t) - \Psi_m(0, t) \right] + \sigma_t \Psi_{mi}(t) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \Psi_{ni}(t) + Q_{mi}(t) \quad (4.3.2)$$

onde σ^{mn} está definido como em (4.1.5a),

$$\Psi_{mi}(t) = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Psi_m(x, t) dx \quad \text{e} \quad Q_{mi}(t) = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} Q_m(x, t) dx. \quad (4.3.2a)$$

Para resolvermos as equações de ordenadas discretas dos fluxos angulares médios, (4.3.1) e (4.3.2), vamos utilizar o método LTS_N . Para tanto, aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial na equação (4.2.1) e no tempo na equação (4.3.2), obtendo as seguintes equações algébricas,

$$\frac{1}{v t_0 \mu_m} \left[\bar{\Psi}_m(s, t_0) - \Psi_m(s, 0) \right] + \left[s \bar{\Psi}_{mx}(s) - \Psi_{mx}(0) \right] + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \bar{\Psi}_{mx}(s) = \frac{\sigma_s}{2 \mu_m} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\Psi}_{nx}(s) + \frac{\bar{Q}_{mx}(s)}{\mu_m} \quad (4.3.3)$$

e

$$\left[s \bar{\Psi}_{mi}(s) - \Psi_{mi}(0) \right] + \frac{v \mu_m}{x_0} \left[\bar{\Psi}_m(x_0, s) - \bar{\Psi}_m(0, s) \right] + v \sigma_t \bar{\Psi}_{mi}(s) = \frac{v \sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\Psi}_{ni}(s) + v \bar{Q}_{mi}(s), \quad (4.3.4)$$

para $m = 1, 2, \dots, N$ e onde a barra indica a aplicação da transformada de Laplace. As equações (4.3.3) e (4.3.4) são reescritas na forma matricial como,

$$\bar{M}_x(s) \bar{\Psi}_x(s) = \bar{\Psi}_x(0) + \bar{G}(s), \quad (4.3.5)$$

e

$$\bar{M}_t(s) \bar{\Psi}_t(s) = \bar{\Psi}_t(0) + \bar{F}_t(s). \quad (4.3.6)$$

As matrizes que aparecem nas equações (4.3.5) e (4.3.6) são escritas como,

$$\bar{M}_x(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{\sigma_t}{2\mu_1} - \frac{\sigma_s \sigma^{11} w_1}{2\mu_1} & -\frac{\sigma_s \sigma^{12} w_2}{2\mu_1} & \dots & -\frac{\sigma_s \sigma^{1N} w_N}{2\mu_1} \\ -\frac{\sigma_s \sigma^{21} w_1}{2\mu_2} & s + \frac{\sigma_t}{\mu_2} - \frac{\sigma_s \sigma^{22} w_2}{2\mu_2} & \dots & -\frac{\sigma_s \sigma^{2N} w_N}{2\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\sigma_s \sigma^{N1} w_1}{2\mu_N} & -\frac{\sigma_s \sigma^{N2} w_2}{2\mu_N} & \dots & s + \frac{\sigma_t}{\mu_N} - \frac{\sigma_s \sigma^{NN} w_N}{2\mu_N} \end{bmatrix}, \quad (4.3.7)$$

$$\bar{M}_t(s) = \begin{bmatrix} s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s \sigma^{11} w_1}{2} & -\frac{v\sigma_s \sigma^{12} w_2}{2} & \dots & -\frac{v\sigma_s \sigma^{1N} w_N}{2} \\ -\frac{v\sigma_s \sigma^{21} w_1}{2} & s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s \sigma^{22} w_2}{2} & \dots & -\frac{v\sigma_s \sigma^{2N} w_N}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{v\sigma_s \sigma^{N1} w_1}{2} & -\frac{v\sigma_s \sigma^{N2} w_2}{2} & \dots & s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s \sigma^{NN} w_N}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.3.7a)$$

e os vetores são definidos por,

$$\bar{\Psi}_{\sim x}(s) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_{1x}(s) \quad \bar{\Psi}_{2x}(s) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_{Nx}(s) \right], \quad \bar{\Psi}_{\sim t}(s) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_{1t}(s) \quad \bar{\Psi}_{2t}(s) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_{Nt}(s) \right], \quad (4.3.7b)$$

$$\bar{\Psi}_{\sim x}(0) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_{1x}(0) \quad \bar{\Psi}_{2x}(0) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_{Nx}(0) \right], \quad \bar{\Psi}_{\sim t}(0) = \text{col} \left[\bar{\Psi}_{1t}(0) \quad \bar{\Psi}_{2t}(0) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_{Nt}(0) \right], \quad (4.3.7c)$$

$$\bar{G}_{\sim x}(s) = \text{col} \left[\frac{[\bar{\Psi}_1(s, t_0) - \bar{\Psi}_1(s, 0)]}{v t_0 \mu_1} + \frac{\bar{Q}_{1x}(s)}{\mu_1} \quad \dots \quad \frac{[\bar{\Psi}_N(s, t_0) - \bar{\Psi}_N(s, 0)]}{v t_0 \mu_N} + \frac{\bar{Q}_{Nx}(s)}{\mu_N} \right]. \quad (4.3.7d)$$

$$\bar{F}_{\sim t}(s) = \text{col} \left[\frac{\mu_1 v}{x_0} [\bar{\Psi}_1(0, s) - \bar{\Psi}_1(x_0, s)] + v \bar{Q}_{1t}(s) \quad \dots \quad \frac{\mu_N v}{x_0} [\bar{\Psi}_N(0, s) - \bar{\Psi}_N(x_0, s)] + v \bar{Q}_{Nt}(s) \right], \quad (4.3.7e)$$

Resolvendo as equações (4.3.5) e (4.3.6) e aplicando a transformada inversa, obtemos fórmulas para o cálculo dos fluxos angulares médios $\Psi_{mx}(x)$ e $\Psi_{mt}(t)$ em termos de seus respectivos valores na fronteira ($x=0$, $x=x_0$ e $t=0$) e de $t=\tau_0$, qual seja,

$$\Psi_{\sim x}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{M}_x^{-1}(s) \right] \Psi_{\sim x}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{M}_x^{-1}(s) \right] * \bar{G}_{\sim x}(x), \quad (4.3.8)$$

e

$$\Psi_{\sim t}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{M}_t^{-1}(s) \right] \Psi_{\sim t}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{M}_t^{-1}(s) \right] * \bar{F}_{\sim t}(t) \quad (4.3.9)$$

com,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\overline{M}_x^{-1}(s)\right] = \sum_{k=1}^N P_x^k e^{s_k x}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\overline{M}_t^{-1}(s)\right] = \sum_{k=1}^N P_t^k e^{r_k t}, \quad (4.3.10)$$

onde as matrizes coeficientes P_x^k , P_t^k , s_k e r_k são as raízes do determinante das matrizes $\overline{M}_x(s)$ e $\overline{M}_t(s)$, respectivamente, e provém da inversão dos fluxos angulares transformados através da fórmula de Heaviside.

Os fluxos médios e os fluxos transversos na fronteira e em $t = \tau_0$ podem, pelo método LTS_N, ser expandidos como,

$$\psi_{mx}(x) = \sum_{i=1}^L b_{mi} e^{s_i x}, \quad \psi_{mt}(t) = \sum_{i=1}^L a_{mi} e^{r_i t}, \quad (4.3.11)$$

e

$$\psi_m(x, \tau_0) = \sum_{i=1}^L d_{mi} e^{s_i x}, \quad \psi_m(x_0, t) = \sum_{i=1}^L c_{mi} e^{r_i t}, \quad \psi_m(0, t) = \sum_{i=1}^L f_{mi} e^{r_i t}, \quad (4.3.12)$$

com, $L \leq N$.

Substituindo as expansões (4.3.11) e (4.3.11) nas equações (4.3.8) e (4.3.9) e fazendo $x = x_0$ e $t = t_0$ nas equações resultantes, obtemos um sistema linear de $2N$ equações e $2NL$ incógnitas para determinar o valor das constantes a_{mi} , b_{mi} , c_{mi} , d_{mi} , f_{mi} . Para tornarmos esse sistema compatível, estabelecemos $2(N-1)L$ equações auxiliares, que são geradas através da propriedade de diferenciabilidade das soluções (4.3.5) e (4.3.6). Desta forma as constantes que aparecem nas expansões (4.3.11) e (4.3.12) ficam determinadas e assim, os fluxos angulares e transversos médios, na fronteira e em $t = \tau_0$ são obtidos e conseqüentemente, os fluxos angulares dados pelas fórmulas (4.3.8) e (4.3.9).

Para melhor compreensão do método no apêndice C ele é desenvolvido

em detalhes, considerando $N = 2$.

4.3.1 O caso isotrópico

Nesta seção iremos considerar o caso particular de espalhamento isotrópico, isto é

$$\sigma^{mn} = 1, \quad (4.3.1.1)$$

na equação (4.3.1). Vamos, então, considerar a aproximação S_N da equação de transporte linear isotrópica,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_m(x, t) + \sigma_t \psi_m(x, t) = \frac{\sigma}{2} \sum_{n=1}^N \psi_n(x, t) w_m + Q_m(x, t), \quad (4.3.1.2)$$

com as condições de contorno,

$$\psi_m(0, t) = f_m(t), \quad \psi_m(x_0, t) = g_m(t), \quad \mu_m > 0, \quad (4.3.1.2a)$$

e a condição inicial,

$$\psi_m(x, 0) = \phi_m(x). \quad (4.3.1.2b)$$

Conforme desenvolvido na seção anterior, ao aplicamos o método LTS_N nodal sobre a equação (4.3.2), recaímos na solução das equações matriciais

acopladas dadas pelas fórmulas (4.3.8) e (4.3.9), onde as matrizes $\overline{M}_x(s)$ e $\overline{M}_t(s)$ são e aparecem nas equações (4.3.1.2) e (4.3.1.3) são, agora, escritas como

$$\overline{M}_x(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{\sigma_t}{\mu_1} - \frac{\sigma_s w_1}{2\mu_1} & -\frac{\sigma_s w_2}{2\mu_1} & \dots & -\frac{\sigma_s w_N}{2\mu_1} \\ -\frac{\sigma_s w_1}{2\mu_2} & s + \frac{\sigma_t}{\mu_2} - \frac{\sigma_s w_2}{2\mu_2} & \dots & -\frac{\sigma_s w_N}{2\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\sigma_s w_1}{2\mu_N} & -\frac{\sigma_s w_2}{2\mu_N} & \dots & s + \frac{\sigma_t}{\mu_N} - \frac{\sigma_s w_N}{2\mu_N} \end{bmatrix} \quad (4.3.1.3)$$

e

$$\overline{M}_t(s) = \begin{bmatrix} s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s w_1}{2} & -\frac{v\sigma_s w_2}{2} & \dots & -\frac{v\sigma_s w_N}{2} \\ -\frac{v\sigma_s w_1}{2} & s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s w_2}{2} & \dots & -\frac{v\sigma_s w_N}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{v\sigma_s w_1}{2} & -\frac{v\sigma_s w_2}{2} & \dots & s + v\sigma_t - \frac{v\sigma_s w_N}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.3.1.4)$$

A matriz $\overline{M}_x(s)$ é a mesma matriz que aparece no caso unidimensional sem dependência no tempo [5] e assim podemos calcular sua inversa de Laplace como,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\overline{M}_x^{-1}(s) \right] = \sum_{k=1}^N P^k e^{s_k t}, \quad (4.3.1.5)$$

onde os s_k são as N raízes distintas e simétricas do determinante da matriz $\overline{M}_x(s)$ e as P^k são matrizes de coeficientes provenientes da inversão da

transformada de Laplace, através da expansão de Heaviside.

Precisamos, ainda, inverter a matriz $\overline{M}_t(s)$. Para tanto, vamos seguir o mesmo processo usado por Barichello [5]. Primeiramente vamos calcular o determinante, usando o fato de que a matriz pode ser decomposta, segundo suas colunas, como a soma de duas matrizes, ou seja

$$\overline{M}_t(s) = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 + \underline{C}_1 & \underline{E}_2 + \underline{C}_2 & \dots & \underline{E}_N + \underline{C}_N \end{bmatrix} \quad (4.3.1.6)$$

onde \underline{E}_j e \underline{C}_j , com $j=1, 2, \dots, N$, são sub-colunas definidas por,

$$\underline{E}_j = \text{col} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & s + v \sigma_j & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1.7)$$

e

$$\underline{C}_j = \text{col} \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_s w_j}{2} & -\frac{\sigma w_j}{2} & \dots & -\frac{\sigma_s w_j}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.1.8)$$

Assim, o determinante da matriz $\overline{M}_t(s)$, é calculado através da soma dos determinantes das matrizes menores, que fica bastante reduzido pois muitos deles nulos. Depois de alguns cálculos encontramos que,

$$\begin{aligned}
 \det(\overline{M}_t(s)) &= (s + v \sigma_t)^N - \sum_{k=1}^N \frac{v \sigma_s \omega_k}{2} (s + v \sigma_t)^{N-1} = \\
 &= (s + v \sigma_t)^{N-1} \left[s + v \sigma_t - \frac{v \sigma_s}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k \right] = \\
 &= (s + v \sigma_t)^{N-1} [s + v \sigma_t - v \sigma_s] = \\
 &= (s + v \sigma_t)^{N-1} [s + v \sigma_a] .
 \end{aligned} \tag{4.3.1.9}$$

Na equação (4.3.1.9) usamos que na Quadratura de Gauss [23],

$$\sum_{k=1}^N \omega_k = 2 . \tag{4.3.1.9a}$$

Assim, acabamos de mostrar que o determinante da matriz $\overline{M}_t(s)$ possui $N-1$ raízes iguais à $-v \sigma_t$ e uma raiz distinta, valendo $-v \sigma_a$.

Vamos, denominar de M , a matriz dos cofatores da matriz $\overline{M}_t(s)$. Os elementos da diagonal principal de da matriz dos cofatores são obtidos diretamente da equação (4.3.1.9), são escritos como,

$$\begin{aligned}
 M_{ii} &= (s + v \sigma_t)^{N-2} \left[s + v \sigma_t - \frac{v \sigma_s}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \omega_k \right] = \\
 &= (s + v \sigma_t)^{N-2} \left[s + v \sigma_t - \frac{v \sigma_s}{2} (2 - \omega_i) \right].
 \end{aligned} \tag{4.3.1.10}$$

Os elementos fora da diagonal principal são obtidos depois de algumas trocas de colunas a fim de sempre manter o parâmetro s na diagonal principal, como

$$M_{ij} = \frac{v \sigma_s w_j}{2} (s + \sigma_t)^{N-2}. \quad (4.3.1.11)$$

Utilizando as equações (4.3.1.10) e (4.3.1.11), podemos escrever a inversa da matriz $\overline{M}_t(s)$ como,

$$\begin{aligned} \overline{M}_t^{-1}(s) &= \frac{1}{\det \overline{M}_t(s)} [M^T] = \\ &= \frac{1}{(s+v\sigma_i)^{N-1}(s+v\sigma_a)} \begin{bmatrix} (s+v\sigma_i)^{N-2} (s+v\sigma_i - v\sigma_s \frac{2-w_1}{2}) \dots & (s+v\sigma_i)^{N-2} \frac{v\sigma_s w_N}{2} \\ (s+v\sigma_i)^{N-2} \frac{v\sigma_s w_1}{2} \dots & (s+v\sigma_i)^{N-2} \frac{v\sigma_s w_N}{2} \\ \dots & \dots \\ (s+v\sigma_i)^{N-2} \frac{v\sigma_s w_1}{2} \dots & (s+v\sigma_i)^{N-2} (s+v\sigma_i - v\sigma_s \frac{2-w_N}{2}) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+v\sigma_i)(s+v\sigma_a)} \begin{bmatrix} (s+v\sigma_i - v\sigma_s \frac{2-w_1}{2}) \dots & v\sigma_s \frac{2-w_N}{2} \\ \frac{v\sigma_s w_1}{2} \dots & \frac{v\sigma_s w_N}{2} \\ \dots & \dots \\ \frac{v\sigma_s w_1}{2} \dots & (s+v\sigma_i - v\sigma_s \frac{2-w_N}{2}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.1.12)$$

Desta forma podemos, de forma analítica, inverter a transformada da matriz $\overline{M}^{-1}(s)$, pelo uso da fórmula de expansão de Heaviside,

$$B_t(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{M}_t^{-1}(s)] = e^{-v\sigma_i t} [I - U] + e^{-v\sigma_a t} U \quad (4.3.1.13)$$

onde I denota a matriz identidade e

$$U = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{2} & \frac{w_2}{2} & \cdots & \frac{w_N}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_1}{2} & \frac{w_2}{2} & \cdots & \frac{w_N}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.1.14)$$

Assim, no caso isotrópico, as equações (4.3.8) e (4.3.9), podem ser reescritas, como

$$\underline{\Psi}_x(x) = \sum_{k=1}^N P^k e^{-r_k x} \underline{\Psi}_x(0) + \sum_{k=1}^N P^k e^{-r_k x} * \underline{G}, \quad (4.3.1.14)$$

$$\underline{\Psi}_t(t) = \sum_{k=1}^2 U^k e^{-s_k t} \underline{\Psi}_t(0) + \sum_{k=1}^2 U^k e^{-s_k t} * \underline{F}. \quad (4.3.1.15)$$

Acabamos de mostrar que no caso isotrópico o sistema dependente do tempo (4.3.1.15) fica sempre reduzido a dois termos em seu somatório, não importando qual o valor de N. Mais ainda as duas raízes são sempre conhecidas de forma analítica. Quando temos anisotropia linear, mostramos que o sistema dependente do tempo (4.3.2.15) fica sempre reduzido a três termos em seu somatório, não importando o valor de N considerado. Mais ainda as três raízes são sempre conhecidas de forma analítica (Apêndice D).

4.4 A equação de difusão

Com o objetivo de demonstrar que este método pode ser aplicado na solução da equação da difusão, mostraremos, a seguir, que a equação de

difusão pode ser obtida da aproximação S_2 da equação de transporte linear isotrópica, dependente do tempo. Para isto, vamos considerar o sistema de equações S_2

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x, t) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, t) + \sigma_t \psi_1(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} [\psi_1(x, t) w_1 + \psi_2(x, t) w_2] + Q_1(x, t), \quad (4.4.1)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(x, t) + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, t) + \sigma_t \psi_2(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} [\psi_1(x, t) w_1 + \psi_2(x, t) w_2] + Q_2(x, t). \quad (4.4.2)$$

Somando e diminuindo as equações (4.4.1) e (4.4.2), lembrando que $\mu_2 = -\mu_1$ e que $w_2 = w_1 = 1$, temos

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 + \psi_2) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 - \psi_2) + \sigma_t (\psi_1 + \psi_2) = \sigma_s [\psi_1 + \psi_2] + Q_1 + Q_2, \quad (4.4.3)$$

e

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_2) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \psi_2) + \sigma_t (\psi_1 - \psi_2) = Q_1 - Q_2, \quad (4.4.4)$$

onde foi usada a notação, $\psi_k = \psi_k(x, t)$ e $Q_k = Q_k(x, t)$ para $k=1, 2$.

Considerando que $Q_1 = Q_2 = \frac{Q(x, t)}{2}$ e definindo o fluxo $c(x, t)$ e corrente $J(x, t)$, respectivamente como:

$$c(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) \quad (4.4.5)$$

e

$$J(x, t) = \mu_1 (\psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)). \quad (4.4.6)$$

Agora, substituindo as relações (4.4.5) e (4.4.6) na equação (4.4.3) e na equação (4.4.4) multiplicada por μ_1 , obtemos as equações

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} c(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} J(x, t) + (\sigma_t - \sigma_s) c(x, t) = Q(x, t) \quad (4.4.7)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) + \sigma_t J(x, t) = 0. \quad (4.4.8)$$

A equação (4.3.2.8) pode ser reescrita como,

$$J(x, t) + \frac{1}{v \sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) = - \frac{\mu_1}{\sigma_t} \frac{\partial}{\partial x} c(x, t), \quad (4.4.9)$$

onde, se desprezando o termo $(v \sigma_t)^{-1} \partial J / \partial t$ na equação resulta:

$$J(x, t) = - \frac{\mu_1^2}{\sigma_t} \frac{\partial}{\partial x} c(x, t). \quad (4.4.10)$$

Definindo o coeficiente de difusão como,

$$D = \frac{\mu_1^2}{\sigma_t}, \quad (4.4.11)$$

podemos, então escrever a equação (4.4.10), conhecida como lei de Fick [1],

como,

$$J(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} c(x, t). \quad (4.4.12)$$

Combinando a lei de Fick com a equação (4.4.7) obtemos a equação da continuidade. Este resultado indica que a solução S_2 da equação de transporte linear, dada pelo método LTS_2 , pode ser utilizada para resolução do problema de difusão unidimensional.

4.5 Resultados numéricos

Para testarmos o método LTS_N com inversão numérica, vamos considerar uma placa de espessura $x_0 = 10$, com uma fonte unitária em toda sua extensão, seção de choque total $\sigma_t = 1$, seção de choque de espalhamento $\sigma_s = 0.9$ e condições de contorno reflexivas em $x = 0$ e vácuo em $x = x_0$. No instante $t = 0$ a fonte unitária é retirada, iniciando assim um processo dependente do tempo, cuja aproximação S_N é dada por,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, t) + \sigma_t \Psi_m(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=0}^N \Psi_n(x, t) w_n, \quad (4.5.1)$$

com as condições de contorno,

$$\Psi_i(0, t) = \Psi_{N-i+1}(0, t) \quad \text{e} \quad \Psi_i(x_0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.5.1a)$$

e condição inicial,

$$\psi_j(x, 0) = \phi_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5.1b)$$

A função $\phi_m(x)$ que aparece na condição inicial (4.5.1b) é solução do problema estacionário,

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \phi_m(x) + \sigma_t \phi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \phi_n(x) \omega_n + 1 \quad (4.5.2)$$

com as condições de contorno,

$$\phi_i(0) = \phi_{N-i+1}(0) \quad \text{e} \quad \phi_{N-i+1}(x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.5.2a)$$

Os resultados numéricos para $N=2$, foram obtidos, considerando a seção de choque total $\sigma_t = 1$; a seção de choque de espalhamento, $\sigma_s = 0.9$; e uma placa de espessura $x_0 = 10$. Estes resultados são apresentados nos gráficos (4.5.2) e (4.5.3) para a direção discreta μ_1 e (4.5.4) e (4.5.5) para a direção discreta μ_2 .

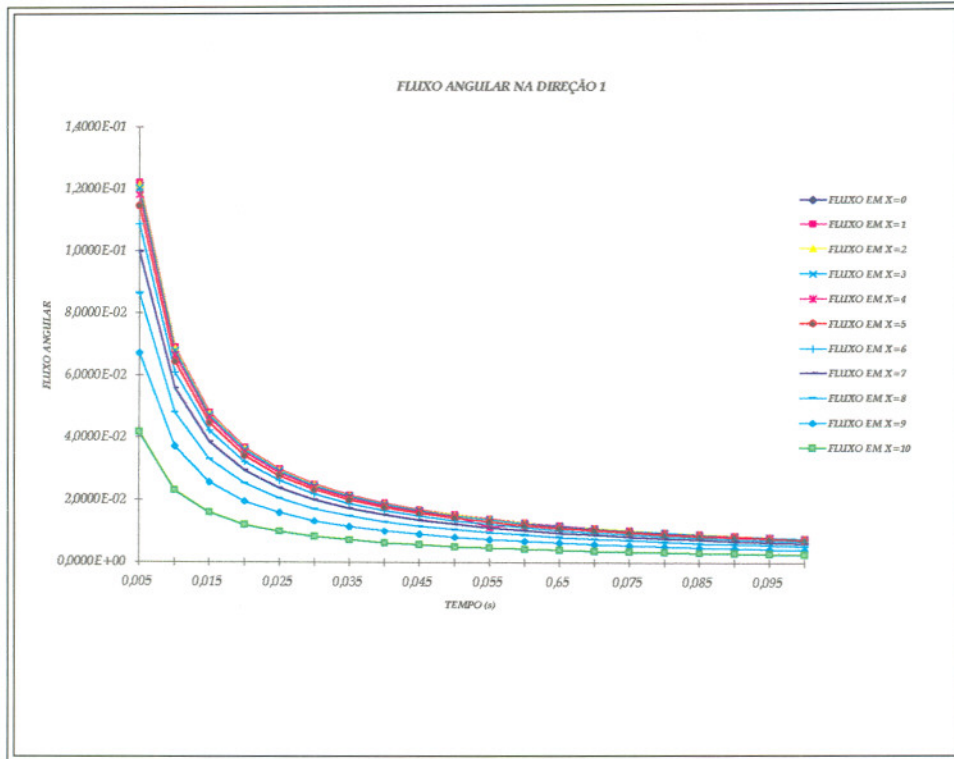


Figura 4.4.2 - Gráfico do fluxo angular (direção 1) x tempo

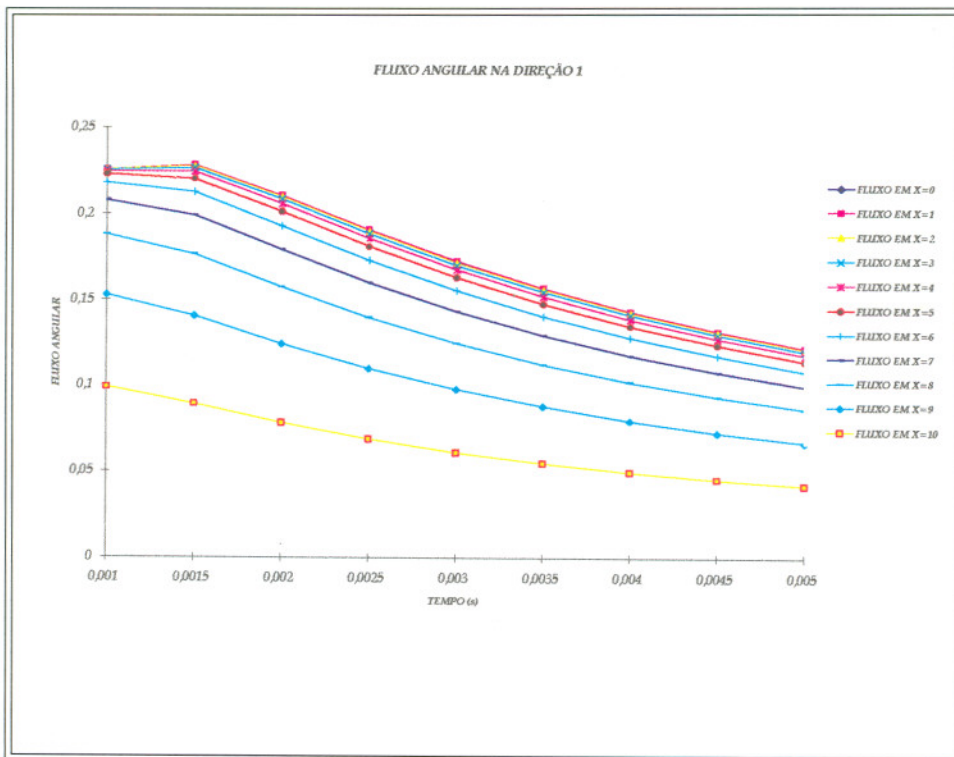


Figura 4.4.3 - Gráfico do fluxo angular (direção 1) x tempo

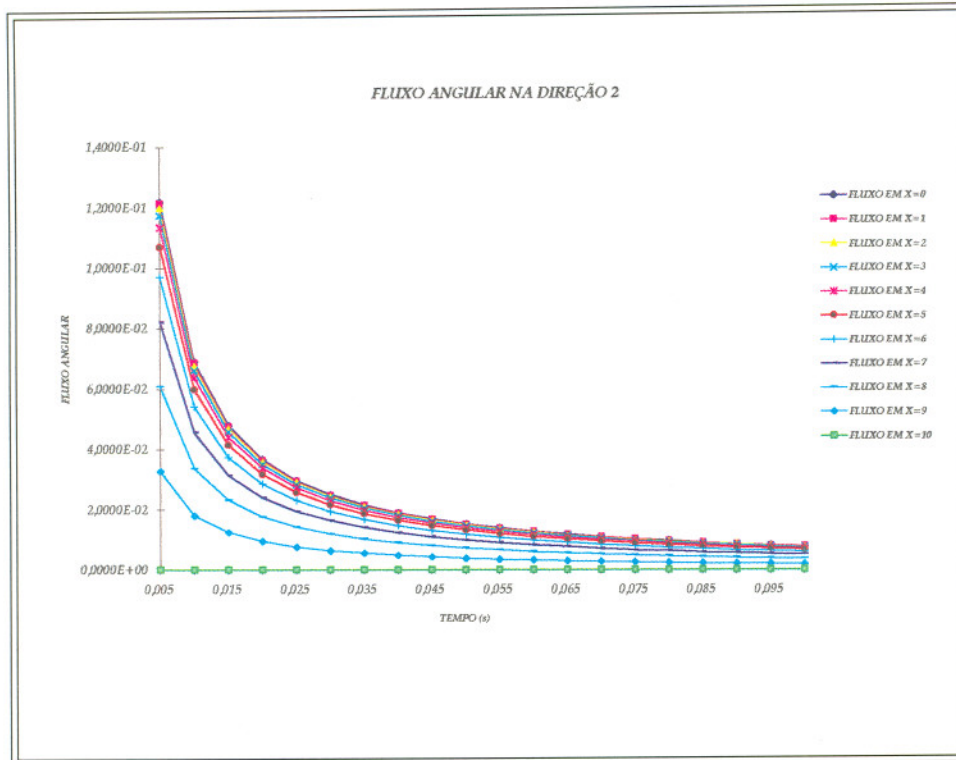


Figura 4.4.4 - Gráfico do fluxo angular (direção 2) x tempo

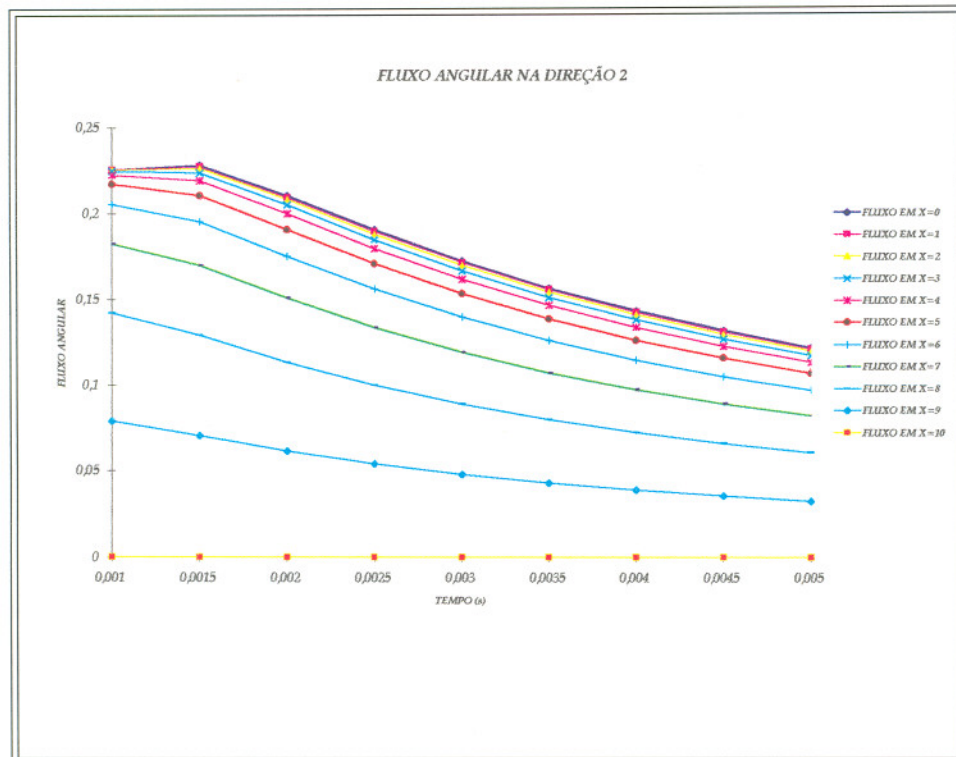


Figura 4.4.5 - Gráfico do fluxo angular (direção 2) x tempo

5. CONCLUSÕES

Analisando os resultados obtidos nas tabelas 3.4.2 até 3.4.5, observamos que o método LTS_N , com dependência contínua na variável angular, melhora sensivelmente os resultados obtidos por interpolação pelo método LTS_N . Levando em conta que os resultados numéricos encontrados pelo método F_N para este problema possuem uma precisão de quatro dígitos significativos e olhando a tabela 3.4.6 vemos que a primeira iteração gera resultados com quatro dígitos para o caso isotrópico ($m=8$), para qualquer valor inicial. Por outro lado, os piores resultados foram encontrados para $m=0$, mas mesmo assim um algarismo significativo foi encontrado tomando como valor inicial a solução LTS_2 . Resultados com dois algarismos significativos foram encontrados quando a solução LTS_{10} foi considerada para chute inicial. Agora, olhando a tabela 3.4.7 da segunda iteração vemos um bom acréscimo na convergência para a segunda iteração, pois ao menos dois algarismos significativos são obtidos para qualquer chute inicial. Todos os cálculos aqui apresentados foram feitos num microcomputador PC-386. Acreditamos que mostramos a viabilidade do método proposto e acreditamos que uma boa precisão pode ser obtida com poucas iterações usando maior ordem da formulação LTS_N como valor inicial.

Um aspecto interessante mostrado neste trabalho é o fato que a idéia deste método, ou seja, a aplicação da transformada de Laplace no sistema de equações associado à aproximação da equação de transporte considerada e a subsequente inversão analítica do fluxo, aplica-se também à aproximação P_N para problemas sem simetria azimutal.

Para os problemas unidimensionais dependentes do tempo foram apresentados dois métodos, o primeiro deles consistindo no método LTS_N com inversão numérica e o segundo consistindo na aplicação do método LTS_N às equações nodais. O resultado observado pelo método nodal, foi o fato do fluxo angular médio espacial, no caso isotrópico, ser escrito como a soma de dois termos exponenciais, independente da ordem da quadratura (N). No caso linearmente anisotrópico, o fluxo médio é descrito como a soma de três termos, também para qualquer ordem de quadratura. Considerando estes fatos,

acreditamos que este resultado possa ser estendido a anisotropias de grau arbitrário L , ou seja o fluxo médio espacial deve ser expresso como soma de $L+2$ termos, para qualquer ordem de quadratura. Como foi possível a resolução das equações nodais de forma analítica, no sentido de que nenhuma aproximação foi feita ao longo de sua derivação, as simulações numéricas de problemas dependentes do tempo, neste trabalho, são restritas ao método LTS_N com inversão numérica, cujos resultados apresentados nas figuras (4.1) e (4.2) são fisicamente coerentes.

Finalmente, face ao exposto, concluímos que nosso objetivo, neste trabalho, foi atingido porque mostramos a viabilidade do método para resolver, em forma analítica, problemas S_N unidimensionais sem simetria azimutal e unidimensional dependente do tempo, salientando ainda que sua aplicação à problemas dependentes do tempo multidimensional é imediata, uma vez que problemas multidimensionais estacionários já foram resolvidos pelo método LTS_N .

Como trabalho futuro pretendemos implementar computacionalmente o método iterativo para problemas de alto grau de anisotropia e o método nodal dependente do tempo.

REFERÊNCIAS

- [1] DUDERSTADT, J., J. E MARTIN, W., R.; *Transport Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [2] CASE, K., M. E ZWEIFEL, P., F.; *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.
- [3] BELL, G. E GLASSTONE, S.; *Nuclear Reactor Theory*, Litton Educational Publishing, Inc., 1970.
- [4] LAMARSH, J. R.; *Introduction to Nuclear Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1983.
- [5] GARCIA, R., D., M.; *A Review of the facile (FN) Method in Particle Transport Theory. Transport Theory and Statistical Physics*, v.14, n.4, 391-435, 1985.
- [6] BARROS, R. E LARSEN, E. W.; *A Numerical Method for One-Group Slab Geometry Discrete Ordinates Problems With no Spatial Truncation Error, Nuclear Science and Engineering*, v. 104, p. 199-208, 1990.
- [7] VILHENA, M., T. E STRECK, E., E.; *An Aproximated Analytical Solution for One Group Slab-Geometry Neutron Transport Equation. Kerntechnik*, v.57, n.3, p. 196-198, 1992.
- [8] STRECK, E. E.; *Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional*. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
- [9] VILHENA, M. T. E BARICHELO, L. B.; *A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation. Kerntechnik*, v.56, n.5, p. 334-336, 1991.
- [10] BARICHELO, L. B. E VILHENA, M., T.; *A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation. Kerntechnik*, v.58, n.3, p. 182-184, 1993.
- [11] BARICHELO, L. B.; *Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional*. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.

- [12] OLIVEIRA, J., V., P, E BARICHELLO, L., B.; *Formulação Analítica para solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional de Transporte de Neutrons om Espalhamento Anisotropico, Anais do IX ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Caxambú, MG, p 72-77, 1993.
- [13] VILHENA, M. T. E BARICHELLO, L. B.; *An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinate Problem, J. Transport Theory and Statistical Physics*. Em impressão.
- [14] BARICHELLO, L., B. E VILHENA, M., T.; *Um problema Inverso em Transporte de Neutrons e Radiação, Anais do IX ENFIR- Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Caxambú, MG, p. 22-24, 1993.
- [15] SOUZA, S. I. S.; *Determinação de Parâmetros Radiantes pelos Métodos LTS_N e LTP_N para geometria planar*. Dissertação de Mestardo pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
- [16] ZABADAL, J., VILHENA, M., T. E BARICHELLO, L. B.; *Solução da Equação de Ordenada Discreta em Duas Dimensões pelo Método LTS_N . Anais do IX ENFIR, Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Caxambú, MG, p. 90-92, 1993.
- [17] ZABADAL, J., VILHENA, M. T., E BARICHELLO, L. B.; *Solution of the Three-Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method. Annals of Nuclear Energy*, v. 22, n. 2, p. 131-134, 1995.
- [18] ZABADAL, J., VILHENA, M. T., E BARICHELLO, L. B.; *An Analitical Solution For The Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain. Progress in Nuclear Energy*. Em impressão.
- [19] ZABADAL, J., *Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discreta Multidimensional*. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.
- [20] SEGATTO, C. F., BARICHELLO, L. B. E VILHENA, M. T.; *Estudo Comparativo de Métodos de Solução da Aproximação S_N da Equação de Transporte Linear. Anais do XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Vitória E.S., 1994.

- [21] ABRAMOV, B. D. E KORNEEV, V. A.; Translated from *Atomnaya Énergiya*, v. 47, n. 5, p. 314-317, 1979.
- [22] PAZOS, R. P.; *Equação de Transporte de Neutrons: Enfoque de Semi-Grupo*. Dissertação de Mestrado pelo programa de Pós-Graduação de Matemática Aplicada da UFRGS (1995).
- [23] BURDEN, R. L. E FAIRES, D. J.; *Numerical Analysis*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1985.
- [24] OLIVEIRA, J. V. P.; *Formulação LTS_N Para o Problema de Ordenada Discreta Com Anisotropia*. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993.
- [25] VILHENA, M. T., SEGATTO, C. F. E BARICHELLO, L. B.; *A Particular Solution For The SN Radiative Transfer Problems*. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 53, n. 4, p. 467-469, 1995.
- [26] LIOU, K. N.; *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Academic Press, Inc. New York, 1980.
- [27] CHANDRASEKHAR, S.; *Radioative Transfer*, Dover Publications, inc. New York, 1960.
- [28] DEVAUX, C. E SIEWERT, C., E.; *The F_N Method for Radiative Transfer Problems Without Azimutal Symetry*. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, v. 31., p. 592-604, 1980.
- [29] BENASSI, M., GARCIA, R. D. M., KARP, A. H. E SIEWERT, C. E.; *A High-Order Spherical Harmonics Solution To The Standard Problem In Radiative Transfer*. *The Astrophysical Journal*, v. 280, p. 853-864, 1984.
- [30] SEGATTO, C., F. E VILHENA, M., T.; *Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimuthal Symmetry*. *Annals of Nuclear Energy*, v. 21, n. 11, p. 701-710, 1994.
- [31] VILHENA, M., T. E SEGATTO, C., F.; *A New Iterative Method to Solve the Radiative Transfer Equation*. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. Em impressão.
- [32] STRECK, E., E. E VILHENA, M., T.; *Solução do problema Inverso de Multigrupo*

- para uma placa Plana Heterogênea pelo Método LTP_N . *Anais do IX ENFIR, Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, p. 78-80 Caxambú, MG, 1993.
- [33] STRECK, E., E. E VILHENA, M. T.; *Solução Analítica do Problema Inverso pelo Método LTP_N . Anais do IV Congresso Geral de Energia Nuclear*. p. 405-408, 1992.
- [34] FERNANDEZ, J., F., STRECK, E., E. E VILHENA, M., T.; *Solução do Problema Inverso em Teoria de Transporte pelo Método LTP_N . Anais do IX ENFIR, Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, p 93-94, Caxambú, MG, 1993.
- [35] GRADSHTEYN, I., S. E RYZHIK, I., W.; *Table Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1965.
- [36] KORN, G, E KORN, T.; *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGrawHillBook Company, 1968.
- [37] DWINGHT, H., B.; *Table of Integrals and other Mathematical Data*. McMillan Company, 1971.
- [38] CARDONA, A. V. E VILHENA, M. T.; *A Solution of The Linear Transport Equation Using Walsh Function and Lapalce Transform. Annals of Nuclear Energy*, v. 21, n. 8, p. 495-505, 1994.
- [39] CARDONA, A. V. E VILHENA, M. T.; *A Solution of The Linear Transport Equation Using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform. Kerntechnik*, Vol. 59, No. 6, pp. 278-281 (1994).
- [40] CARDONA, A. V. E VILHENA, M. T.; *Analytical Solution For The A_N Approximation. Progress in Nuclear Energy*. Em impressão.
- [41] HEYDARIAN, M., MULLINEUX, N. E REED, J. R.; *Solution of Parabolic Partial Differential Equations. Appl. Math. Modelling*, v. 5, p. 448-449, 1981.
- [42] STROUD, A. H. E SECREST, D.; *Gaussian Quadrature*. Prendice Hall Inc., New Jersey, 1986.

APÊNDICE A

Geometria do Espalhamento

Vamos mostrar a identidade,

$$\cos\Theta = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') \quad (\text{A.1})$$

Através da figura A.1 podemos deduzir as relações,

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{CO} \tan\theta' , & \overline{OD} &= \overline{CO} \sec\theta' , \\ \overline{CE} &= \overline{CO} \tan\theta , & \overline{OE} &= \overline{CO} \sec\theta , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

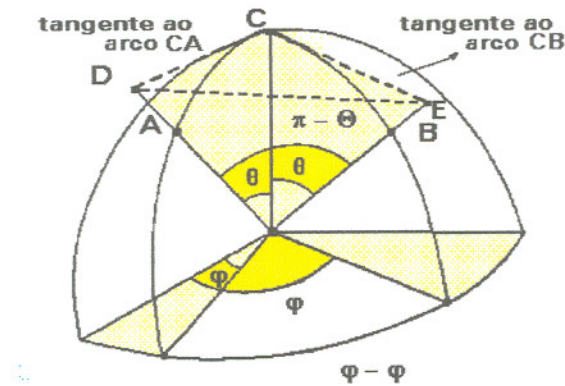


Figura A.1 - Relação entre o ângulo de espalhamento, o ângulo zenital e o ângulo azimutal em coordenadas esféricas.

onde \overline{CD} e \overline{CE} são as retas tangentes aos arcos CA e CB . Através do triângulo CDE encontramos,

$$\overline{DE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \overline{CE} \overline{CD} \cos DCE, \quad (\text{A.3})$$

através do triângulo ODE encontramos,

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \overline{OD} \overline{OE} \cos \angle DOE. \quad (A.4)$$

Substituindo as relações (A.2) nas equações (A.3) e (A.4), obtemos que,

$$\overline{DE}^2 = \overline{CO}^2 \left[\tan^2 \theta' + \tan^2 \theta - 2 \tan \theta' \tan \theta \cos(\varphi - \varphi') \right], \quad (A.5)$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{CO}^2 \left[\sec^2 \theta' + \sec^2 \theta - 2 \sec \theta' \sec \theta \cos \Theta \right]. \quad (A.6)$$

Das relações (A.5) e (A.6), lembrando que $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$, temos

$$2 - 2 \sec \theta' \sec \theta \cos \Theta = -2 \tan \theta' \tan \theta \cos(\varphi - \varphi'). \quad (A.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos(\varphi - \varphi') \\ &= \mu \mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi') \end{aligned} \quad (A.8)$$

Teorema da adição para os polinômios de Legendre

Vamos considerar uma função arbitrária $g(\mu, \varphi)$ definida na superfície de uma esfera, com derivada de primeira e segunda ordem contínuas. A função $g(\mu, \varphi)$ pode ser expandida como uma série absolutamente convergente de harmônicos esféricos como,

$$g(\mu, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[a_{\ell 0} + \sum_{m=1}^{\ell} (a_{\ell m} \cos m\varphi + b_{\ell m} \sin m\varphi) P_{\ell}^m(\mu) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Pela ortogonalidade dos polinômios associados de Legendre, temos que os coeficientes de (A.1) podem ser determinados como,

$$a_{\ell 0} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\mu, \varphi) P_{\ell}(\mu) d\mu d\varphi, \quad (\text{A.10})$$

$$a_{\ell m} = \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\mu, \varphi) P_{\ell}^m(\mu) \cos m\varphi d\mu d\varphi, \quad (\text{A.11})$$

$$b_{\ell m} = \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\mu, \varphi) P_{\ell}^m(\mu) \sin m\varphi d\mu d\varphi. \quad (\text{A.12})$$

Lembrando que,

$$P_{\ell}(1) = 1 \quad \text{e} \quad P_{\ell}^m(1) = 0 \quad \text{se} \quad m > 0, \quad (\text{A.13})$$

por (A.9) e (A.10) podemos escrever que,

$$g(1, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell 0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\mu, \varphi) P_{\ell}(\mu) d\mu d\varphi \quad (\text{A.14})$$

Vamos, agora, definir a superfície harmônica,

$$Y_\ell(\mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{\ell} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_\ell^m(\mu) \quad (\text{A.15})$$

A função $Y_\ell(\mu, \varphi)$ é o ℓ -ésimo termo da função $g(\mu, \varphi)$ e pelas equações (A.15) e (A.14) temos que,

$$Y_\ell(1, \varphi) = \frac{2\ell+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} Y_\ell(\mu, \varphi) P_\ell(\mu) d\mu d\varphi \quad (\text{A.16})$$

Por (A.8) temos que

$$\cos\Theta = \mu\mu' + (1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi-\varphi') \quad (\text{A.17})$$

logo podemos escrever,

$$P_\ell(\cos\Theta) = \sum_{m=0}^{\ell} (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi) P_\ell^m(\mu) = \frac{c_0}{2} P_\ell(\mu) + \sum_{m=1}^{\ell} (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi) P_\ell^m(\mu). \quad (\text{A.18})$$

Para encontrarmos os coeficientes da expansão (A.18), usamos as propriedades de ortogonalidade, dos senos e cossenos e dos polinômios de Legendre, assim

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_\ell(\cos\Theta) P_\ell^m(\mu) \cos m\varphi d\mu d\varphi = \frac{2\pi(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} c_m \quad (\text{A.19})$$

Agora, fazendo $P_\ell^m(\mu) \cos m\varphi = Y_\ell(\mu, \varphi)$ e usando a identidade (A.16), a equação (A.19) pode ser reescrita como,

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_\ell(\cos\Theta) P_\ell^m(\mu) \cos m\varphi \, d\mu \, d\varphi = \frac{4\pi}{(2\ell+1)} \left[P_\ell^m(\mu) \cos m\varphi \right]_{\cos\Theta=1} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{4\pi}{(2\ell+1)} \left[P_\ell^m(\mu') \cos m\varphi' \right] ,$$

pois se $\cos\Theta = 1$ temos que $\Theta = 0$ e assim pela figura (A.1) temos que $\mu = \mu'$ e $\varphi = \varphi'$.

Desta forma da equação (A.18) segue que

$$c_m = \frac{2(\ell+m)!}{(\ell-m)!} P_\ell^m(\mu') \cos m\varphi'. \quad (\text{A.21})$$

De forma similar podemos mostrar que,

$$d_m = \frac{2(\ell+m)!}{(\ell-m)!} P_\ell^m(\mu') \sin m\varphi'. \quad (\text{A.22})$$

Assim, das equações (A.21), (A.22) e (A.18) obtemos

$$P_\ell(\cos\Theta) = P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu') \cos m(\varphi-\varphi'). \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE B

LTS_N com transformada numérica no tempo

Para testar o método, vamos resolver um problema isotrópico, de uma placa de espessura $x_0=10$, com uma fonte unitária em toda sua extensão e considerar condições de contorno reflexivas em $x=0$ e vácuo em $x=x_0$ e que no instante $t=0$ a fonte é retirada. Este problema é descrito por,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, t) + \sigma_t \Psi_m(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=0}^N \Psi_n(x, t) w_n, \quad (\text{B.1})$$

com as condições de contorno,

$$\Psi_i(0, t) = \Psi_{N-i+1}(0, t) \quad \text{e} \quad \Psi_i(x_0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{B.1a})$$

e condição inicial,

$$\Psi_j(x, 0) = \phi_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.1b})$$

Onde $\phi_m(x)$ que aparece em (B.1b) é solução do problema estacionário,

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \phi_m(x) + \sigma_t \phi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^2 \phi_n(x) w_n + 1 \quad (\text{B.2})$$

com as condições de contorno,

$$\phi_i(0) = \phi_{N-i+1}(0) \quad \text{e} \quad \phi_{N-i+1}(x_0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{B.2a})$$

Primeiramente, vamos utilizar o método LTS_N na solução do problema estacionário (B.2). Assim, aplicamos a transformada de Laplace em (B.2), e através de alguns algebrismos chegamos à equação matricial,

$$M(s) \underline{\bar{\Phi}}(s) = \underline{\bar{\Phi}}(0) + F(s), \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\bar{M}_N(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{\sigma_i}{\mu_1} - \frac{\sigma_s w_1}{2\mu_1} & -\frac{\sigma_s w_2}{2\mu_1} & \dots & -\frac{\sigma_s w_N}{2\mu_1} \\ -\frac{\sigma_s w_1}{2\mu_2} & s + \frac{\sigma_i}{\mu_2} - \frac{\sigma_s w_2}{2\mu_2} & \dots & -\frac{\sigma_s w_N}{2\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{\sigma_s w_1}{2\mu_N} & -\frac{\sigma_s w_2}{2\mu_N} & \dots & s + \frac{\sigma_i}{\mu_N} - \frac{\sigma_s w_N}{2\mu_N} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3a})$$

e os vetores, $\underline{\bar{\Psi}}(s)$, $\underline{\bar{\Psi}}(0)$ e $\underline{\bar{F}}(s)$ são escritos como,

$$\underline{\bar{\Phi}}(0) = \text{col} \left[\bar{\Phi}_1(0) \quad \bar{\Phi}_2(0) \quad \dots \quad \bar{\Phi}_{\frac{N}{2}}(0) \quad \bar{\Phi}_{\frac{N}{2}}(0) \quad \dots \quad \bar{\Phi}_1(0) \right], \quad (\text{B.3a})$$

$$\underline{\bar{\Phi}}(s) = \text{col} \left[\bar{\Phi}_1(s) \quad \bar{\Phi}_2(s) \quad \dots \quad \bar{\Phi}_{\frac{N}{2}}(s) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right], \quad (\text{B.3b})$$

$$\underline{\bar{F}}(s) = \text{col} \left[\frac{1}{s\mu_1} \quad \frac{1}{s\mu_2} \quad \dots \quad \frac{1}{s\mu_N} \right]. \quad (\text{B.3c})$$

Resolvendo a equação (B.3) e aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$\phi(x) = D(x)\phi(0) + D(x)*F(x), \quad (B.4)$$

onde o asterisco significa convolução e a matriz $D(x)$ é dada por,

$$D(x) = \sum_{k=1}^N P^k e^{r_k x} \quad (B.4a)$$

com r_k as raízes do determinante da matriz $M(s)$. Fazendo $x = x_0$ em (B.4),

$$\begin{bmatrix} d_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+1, N}(x_0) \\ d_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+2, N}(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ d_{\frac{N}{2}+N, \frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+N, N}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\frac{N}{2}}(0) \\ \phi_{\frac{N}{2}+1}(0) \\ \vdots \\ \phi_1(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\frac{N}{2}+1, 1}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}(x_0) \\ d_{\frac{N}{2}+2, 1}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+2, \frac{N}{2}}(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ d_{\frac{N}{2}+N, 1}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2}+N, \frac{N}{2}}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \vdots \\ \phi_{\frac{N}{2}}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\mu_1 \\ 1/\mu_2 \\ \vdots \\ 1/\mu_N \end{bmatrix}. \quad (B.5)$$

onde podemos escrever a i -ésima linha do lado direito da equação (B.5), como

$$\sum_{j=1}^{N/2} d_{\frac{N}{2}+i, \frac{N}{2}+j+1}(x_0)\phi_{\frac{N}{2}+j+1} + \sum_{j=1}^{N/2} d_{\frac{N}{2}+i, j}(x_0)\phi_j = \sum_{j=1}^{N/2} d_{\frac{N}{2}+i, N+1-j}(x_0)\phi_j + \sum_{j=1}^{N/2} d_{\frac{N}{2}+i, j}(x_0)\phi_j = \sum_{j=1}^{N/2} [d_{\frac{N}{2}+i, N+1-j}(x_0) + d_{\frac{N}{2}+i, j}(x_0)]\phi_j \quad (B.5a)$$

Assim, podemos reescrever a equação (B.5), como,

$$\begin{bmatrix} d_{\frac{N}{2},1}(x_0) + d_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}(x_0) + d_{\frac{N}{2},N}(x_0) \\ d_{\frac{N}{2},2,1}(x_0) + d_{\frac{N}{2},2,\frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{\frac{N}{2},2,\frac{N}{2}}(x_0) + d_{\frac{N}{2},2,N}(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ d_{N,1}(x_0) + d_{N,\frac{N}{2}}(x_0) & \dots & d_{N,\frac{N}{2}}(x_0) + d_{N,N}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \vdots \\ \phi_{\frac{N}{2}}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\mu_1 \\ 1/\mu_2 \\ \vdots \\ 1/\mu_N \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema (B.6), de ordem $N/2$, por Gauss, determinamos o vetor condição inicial (B.3a) e, desta forma, pela equação (B.4), o fluxo angular na direção μ_i é definido por,

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \sum_{j=1}^N d_{ij}(x) \phi_j(0) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} d_{ij} * 1 = \sum_{j=1}^N \phi_j(0) \sum_{k=1}^N p_{ij}^k e^{r_k x} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k e^{r_k x} * 1 = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\phi_j(0) \sum_{k=1}^N p_{ij}^k e^{r_k x} + \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k \frac{e^{r_k x} - 1}{r_k} \right], \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

O problema transiente, possui solução dada pela fórmula (4.2.14), assim, das equações (4.2.11a) e (4.2.3c) temos para cada direção μ_i ,

$$\bar{\psi}(x,p) = \bar{d}_i(x,p) + \bar{c}_i(x,p) = \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j(0,p) \sum_{k=1}^N p_{ij}^k e^{s_k(p)x} + \frac{1}{p\nu} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k \left[e^{s_k(p)x} * \phi_j(x) \right] \quad (\text{B.8})$$

onde o termo de convolução é explicitado por,

$$e^{s_k(p)x} * \phi_i(x) = \sum_{j=1}^N \left[\phi_j(0) \sum_{k=1}^N p_{ij}^k \left[e^{r_k x} * e^{s_k(p)x} \right] + \frac{1}{\mu_j} \sum_{k=1}^N p_{ij}^k \frac{[e^{r_k x} * e^{s_k(p)x}] - [1 * e^{s_k(p)x}]}{r_k} \right] \quad (\text{B.9})$$

Desta forma a solução do problema (B.1) em cada direção discreta μ_i é dado por (B.8).

APÊNDICE C

O Método LTS_2 nodal

Neste apêndice, vamos exemplificar o método LTS_N nodal, fazendo $N=2$ na resolução do problema de uma barra de espessura x_0 , com uma fonte unitária localizada em toda a barra, com reflexão em $x=0$ e vácuo em $x=x_0$ e no instante $t=0$ a fonte é retirada.

Aplicando o método nodal na aproximação S_2 da equação de transporte dependente do tempo, obtemos dois sistemas de equações primeiro na variável t e o segundo na variável espacial. Aplicando o método LTS_2 em cada sistema obtemos as equações matriciais:

$$\tilde{\Psi}_t(t) = B_t(t) \tilde{\Psi}_t(0) + B_t(t) * \begin{bmatrix} \frac{v\mu_1}{x_0} (\psi_1(0,t) - \psi_1(x_0,t)) \\ \frac{v\mu_2}{x_0} (\psi_2(0,t) - \psi_2(x_0,t)) \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

e

$$\tilde{\Psi}_x(x) = B_x(x) \tilde{\Psi}_x(0) + B_x(x) * \begin{bmatrix} \frac{1}{vt_0\mu_1} (\psi_1(x,0) - \psi_1(x,t_0)) \\ \frac{1}{vt_0\mu_2} (\psi_2(x,0) - \psi_2(x,t_0)) \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

onde

$$s_1 = -v\sigma_a', \quad s_2 = -v\sigma_t', \quad r_1 = -r_2 = \sqrt{3\sigma_t\sigma_a} \quad (C.3)$$

$$B_x(x) = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} \quad \text{e} \quad B_t(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} e^{s_1 t} + \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} e^{s_2 t} \quad (\text{C.3a})$$

As matrizes P_1 e P_2 são escritas como,

$$P_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_2 r_1 + 2\sigma_t - \sigma_s}{4\mu_2 r_1} & \frac{\sigma_s}{4\mu_1 r_1} \\ \frac{\sigma_s}{4\mu_2 r_1} & \frac{2\mu_1 r_1 + 2\sigma_t - \sigma_s}{4\mu_1 r_1} \end{bmatrix} \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_2 r_2 + 2\sigma_t - \sigma_s}{4\mu_2 r_2} & \frac{\sigma_s}{4\mu_1 r_2} \\ \frac{\sigma_s}{4\mu_2 r_2} & \frac{2\mu_1 r_2 + 2\sigma_t - \sigma_s}{4\mu_1 r_2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3b})$$

Pelo método LTS_2 e considerando as condições de contorno, temos

$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} \quad (\text{C.4})$$

$$\psi_1(x_0,t) = b_1 e^{s_1 t} + b_2 e^{s_2 t} \quad \text{e} \quad \psi_2(x_0,t) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Considerando a condição inicial em t , temos, que

$$\psi_1(x,0) = \phi_1(x) \quad \text{e} \quad \psi_2(x,0) = \phi_2(x) \quad (\text{C.6})$$

onde o vetor $\phi(x)$ é solução do problema estacionário e suas componentes podem ser escritas como,

$$\phi_\ell(x) = \phi_\ell(0) \sum_{k=1}^2 (p_{a1}^k + p_{a2}^k) e^{r_k x} + \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=1}^2 (p_{a1}^k - p_{a2}^k) \frac{e^{r_k x} - 1}{r_k} \quad (\text{C.6a})$$

Além disto, em $t=t_0$ podemos expandir os fluxos como,

$$\Psi_1(x, t_0) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad \text{e} \quad \Psi_2(x, t_0) = d_1 e^{r_1 x} + d_2 e^{r_2 x} \quad (\text{C.7})$$

Os fluxos médios espaciais, pelo método LTS_N podem ser expandidos como,

$$\Psi_{1t}(t) = \ell_1 e^{s_1 t} + \ell_2 e^{s_2 t} \quad \text{e} \quad \Psi_{2t}(t) = \ell_1 e^{s_1 t} + \ell_2 e^{s_2 t} \quad (\text{C.8})$$

Além disto, existem as seguintes relações para os fluxos médios:

$$\Psi_{1x}(0) = \Psi_{2x}(0) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \Psi_1(0, t) dt = a_1 \frac{e^{s_1 t_0} - 1}{t_0 s_1} + a_2 \frac{e^{s_2 t_0} - 1}{t_0 s_2} = a_1 E_{s_1} + a_2 E_{s_2}, \quad (\text{C.9})$$

$$\Psi_{1x}(x_0) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \Psi_1(x_0, t) dt = b_1 E_{s_1} + b_2 E_{s_2} \quad \text{e} \quad \Psi_{2x}(x_0) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \Psi_2(x_0, t) dt = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xt}(0) &= \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \phi_1(x) dx = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \phi_c(0) \sum_{k=1}^2 (p_{a_1}^k + p_{a_2}^k) e^{r_k x} + \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=1}^2 (p_{a_1}^k - p_{a_2}^k) \frac{e^{r_k x} - 1}{r_k} dx = \\ &= \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \sum_{k=1}^2 \left[\phi_c(0) (p_{a_1}^k + p_{a_2}^k) + \frac{1}{\mu_1 r_k} (p_{a_1}^k - p_{a_2}^k) \right] e^{r_k x} - \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=1}^2 (p_{a_1}^k - p_{a_2}^k) dx = \\ &= \sum_{k=1}^2 \left[\phi_c(0) (p_{a_1}^k + p_{a_2}^k) + \frac{1}{\mu_1 r_k} (p_{a_1}^k - p_{a_2}^k) \right] \frac{e^{r_k x_0} - 1}{r_k x_0} - \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=1}^2 (p_{a_1}^k - p_{a_2}^k) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

e

$$\Psi_{1t}(t_0) = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Psi_1(x, t_0) dx = c_1 E_{r_1} + c_2 E_{r_2} \quad \text{e} \quad \Psi_{2t}(t_0) = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Psi_2(x, t_0) dx = d_1 E_{r_1} + d_2 E_{r_2} \quad (\text{C.12})$$

Assim as equações LTS₂ no tempo que estão escritas na forma matricial

em (C.1) são dadas por,

$$\ell_1 e^{s_1 t} + \ell_2 e^{s_2 t} = \Psi^+(0) e^{s_1 t} + \Psi^-(0) e^{s_2 t} + \frac{v\mu_1}{x_0} \left[a_1 e^{s_1 t} * e^{s_2 t} + a_2 e^{s_2 t} * e^{s_1 t} - b_1 \frac{(e^{s_1 t} * e^{s_1 t} + e^{s_1 t} * e^{s_2 t})}{2} - b_2 \frac{(e^{s_1 t} * e^{s_2 t} + e^{s_2 t} * e^{s_2 t})}{2} \right] \quad (C.13)$$

e

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} = \Psi^+(0) e^{s_1 t} - \Psi^-(0) e^{s_2 t} + \frac{v\mu_1}{x_0} \left[-a_1 e^{s_1 t} * e^{s_2 t} + a_2 e^{s_2 t} * e^{s_1 t} + b_1 \frac{(e^{s_1 t} * e^{s_1 t} - e^{s_1 t} * e^{s_2 t})}{2} + b_2 \frac{(e^{s_1 t} * e^{s_2 t} - e^{s_2 t} * e^{s_2 t})}{2} \right] \quad (C.13a)$$

onde foi usada a notação,

$$\Psi^+(0) = \frac{\Psi_{1t}(0) + \Psi_{2t}(0)}{2} \quad \text{e} \quad \Psi^-(0) = \frac{\Psi_{1t}(0) - \Psi_{2t}(0)}{2} \quad (C.13b)$$

lembrando que,

$$e^{s_1 t} = e^{-v\sigma_a t}, \quad e^{s_2 t} = e^{-v\sigma_t t} = e^{-v\sigma_a t} \cdot e^{-v\sigma_s t} \quad \text{e} \quad s_1 - s_2 = -v\sigma_a + v\sigma_y = v\sigma_s,$$

e dividindo as equações (C.13) e (C.13a) por $e^{-v\sigma_a t}$, obtemos

$$\ell_1 + \ell_2 e^{-v\sigma_s t} = \Psi^+(0) + \Psi^-(0) e^{-v\sigma_s t} + \frac{v\mu_1}{x_0} \left[a_1 \frac{1 - e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} + a_2 t e^{-v\sigma_s t} - \frac{b_1}{2} \left(t + \frac{1 - e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} \right) - \frac{b_2}{2} \left(\frac{1 - e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} + t e^{\sigma_s t} \right) \right] \quad (C.14)$$

$$k_1 + k_2 e^{-v\sigma_s t} = \Psi^+(0) - \Psi^-(0) e^{-v\sigma_s t} + \frac{v\mu_1}{x_0} \left[-a_1 \frac{1-e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} - a_2 t e^{-v\sigma_s t} - \frac{b_1}{2} \left(t - \frac{1-e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} \right) - \frac{b_2}{2} \left(\frac{1-e^{-v\sigma_s t}}{v\sigma_s} - t e^{\sigma_s t} \right) \right] \quad (C.14a)$$

As equações (C.14) e (C.14a) podem ser reescritas como,

$$\left(k_1 - \Psi^+(0) + \frac{v\mu_1(-2a_1 + b_1 + b_2)}{2v\sigma_s x_0} \right) + \left(k_2 - \Psi^-(0) + \frac{v\mu_1(2a_1 - b_1 - b_2)}{2v\sigma_s x_0} \right) e^{-v\sigma_s t} + \frac{v\mu_1}{x_0} \left(\frac{-2a_2 + b_2}{2} \right) t e^{-v\sigma_s t} + \frac{b_1}{2} t = 0 \quad (C.15)$$

$$\left(k_1 - \Psi^+(0) + \frac{v\mu_1(2a_1 - b_1 + b_2)}{2v\sigma_s} \right) + \left(k_2 + \Psi^-(0) + \frac{v\mu_1(2a_1 + b_1 + b_2)}{2v\sigma_s x_0} \right) e^{-v\sigma_s t} + \frac{v\mu_1(2a_2 - b_2)}{2x_0} t e^{\sigma_s t} + \frac{v\mu_1 b_1}{2x_0} = 0 \quad (C.15a)$$

Para as equações (C.15) e (C.15a) serem compatíveis devemos ter que $b_1 = 0$ e $b_2 = 2a_2$. Assim, lembrando que

$$k_1 + k_2 e^{-v\sigma_s t_0} = \Psi_{1t}(t_0) e^{v\sigma_a t_0} = e^{v\sigma_a t_0} \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Psi_1(x, t_0) dx = e^{v\sigma_a t_0} \left(c_1 \frac{e^{r_1 x_0} - 1}{x_0 r_1} + c_2 \frac{e^{r_2 x_0} - 1}{x_0 r_2} \right), \quad (C.16)$$

$$k_1 + k_2 e^{-v\sigma_s t_0} = \Psi_{2t}(t_0) e^{v\sigma_a t_0} = e^{v\sigma_a t_0} \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \Psi_2(x, t_0) dx = e^{v\sigma_a t_0} \left(d_1 \frac{e^{r_1 x_0} - 1}{x_0 r_1} + d_2 \frac{e^{r_2 x_0} - 1}{x_0 r_2} \right), \quad (C.16a)$$

substituindo estes valores nas equações (C.14) e (C.14a) e multiplicando-as por $e^{-v\sigma_a t}$, temos

$$\left(c_1 \frac{e^{r_1 x_0} - 1}{x_0 r_1} + c_2 \frac{e^{r_2 x_0} - 1}{x_0 r_2} \right) - a_1 \frac{\mu_1 (e^{s_1 t_0} - e^{s_2 t_0})}{\sigma_s x_0} + a_2 \frac{\mu_1 (e^{s_1 t_0} - e^{s_2 t_0})}{\sigma_s x_0} = \Psi^+(0) e^{s_1 t_0} + \Psi^-(0) e^{s_2 t_0} \quad (C.17)$$

$$\left(d_1 \frac{e^{r_1 x_0} - 1}{x_0 r_1} + d_2 \frac{e^{r_2 x_0} - 1}{x_0 r_2} \right) + a_1 \frac{\mu_1 (e^{s_1 t_0} - e^{s_2 t_0})}{\sigma_s x_0} + a_2 \frac{\mu_1 (e^{s_1 t_0} - e^{s_2 t_0})}{\sigma_s x_0} = \Psi^+(0) e^{s_1 t_0} - \Psi^-(0) e^{s_2 t_0} \quad (C.17a)$$

As equações na variável espacial podem ser escritas como, fluxos médios em $x=x_0$ e em $t=t_0$.

$$\begin{cases} \Psi_{1x}(x) = \Psi_{1x}(0)b_{11}(x) + \Psi_{2x}(0)b_{12}(x) + \frac{1}{vt_0\mu_1} [b_{11}(x) * \phi_1(x) - b_{12}(x) * \phi_2(x) - b_{11}(x) * \Psi_1(x, t_0) + b_{12}(x) * \Psi_2(x, t_0)] \\ \Psi_{2x}(x) = \Psi_{1x}(0)b_{21}(x) + \Psi_{2x}(0)b_{22}(x) + \frac{1}{vt_0\mu_1} [b_{21}(x) * \phi_1(x) - b_{22}(x) * \phi_2(x) - b_{21}(x) * \Psi_1(x, t_0) + b_{22}(x) * \Psi_2(x, t_0)] \end{cases} \quad (C.18)$$

Substituindo as expansões (C.6), (C.6a) e (C.7) nas equações (C.18),

$$\begin{cases} \Psi_{1x}(x) - a_1 E_{s_1}(b_{11}(x) + b_{12}(x)) - a_2 E_{s_2}(b_{11}(x) + b_{12}(x)) + \frac{1}{vt_0\mu_1} [c_1 b_{11}(x) * e^{r_1 x} + c_2 b_{11}(x) * e^{r_2 x} - d_1 b_{12}(x) * e^{r_1 x} - d_2 b_{12}(x) * e^{r_2 x}] = \\ = \frac{1}{vt_0\mu_1} [b_{11}(x) * \phi_1(x) - b_{12}(x) * \phi_2(x)] \\ \Psi_{2x}(x) - a_1 E_{s_1}(b_{21}(x) + b_{22}(x)) - a_2 E_{s_2}(b_{21}(x) + b_{22}(x)) + \frac{1}{vt_0\mu_1} [c_1 b_{21}(x) * e^{r_1 x} + c_2 b_{21}(x) * e^{r_2 x} - d_1 b_{22}(x) * e^{r_1 x} - d_2 b_{22}(x) * e^{r_2 x}] = \\ = \frac{1}{vt_0\mu_1} [b_{21}(x) * \phi_1(x) - b_{22}(x) * \phi_2(x)] \end{cases} \quad (C.20)$$

Desta forma por (C.19) e (C.20) temos 4 equações e 6 incógnitas. Desta forma, para tornarmos o sistema compatível vamos derivar as equações (C.20). Para isto, vamos expandir os fluxos médios como,

$$\Psi_{1x}(x) = \ell_1 e^{r_1 x} + \ell_2 e^{r_2 x} \quad \text{e} \quad \Psi_{2x}(x) = \ell_1 e^{r_1 x} + \ell_2 e^{r_2 x}. \quad (C.21)$$

Para não criarmos mais incógnitas, vamos escrever as constantes ℓ_1 e ℓ_2 em função das constantes já existentes. Assim usando as relações conhecidas dos fluxos médios em $x=0$ e $x=x_0$ dadas pelas equações (C.9) e (C.10) em (C.21), obtemos os sistemas,

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = a_1 E_{s1} + a_2 E_{s2} \\ \ell_1 e^{r_1 x_0} + \ell_2 e^{r_2 x_0} = b_1 E_{s1} + b_2 E_{s2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \ell_1 + \ell_2 = a_1 E_{s1} + a_2 E_{s2} \\ \ell_1 e^{r_1 x_0} + \ell_2 e^{r_2 x_0} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

Resolvendo estes sistemas e lembrando que $b_1 = 0$ e $b_2 = 2a_2$ temos que,

$$\ell_1 = \frac{-a_1 E_{s1} e^{r_2 x_0} + a_2 E_{s2} (2 - e^{r_2 x_0})}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \quad \text{e} \quad \ell_2 = \frac{a_1 E_{s1} e^{r_1 x_0} - a_2 E_{s2} (2 - e^{r_1 x_0})}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}}, \quad (\text{C.23})$$

$$\ell_1 = -\frac{(a_1 E_{s1} + a_2 E_{s2}) e^{r_2 x_0}}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \quad \text{e} \quad \ell_2 = +\frac{(a_1 E_{s1} + a_2 E_{s2}) e^{r_1 x_0}}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}}. \quad (\text{C.24})$$

Logo, por (C.21) as derivadas dos fluxos médios em $x = x_0$ podem ser escritos respectivamente como;

$$\frac{d}{dx} \Psi_{1x}(x_0) = a_1 \left(\frac{-2 r_1 E_{s1}}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \right) + a_2 \left(\frac{2 r_2 E_{s2} (1 - e^{r_1 x_0} + e^{r_2 x_0})}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \right), \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{d}{dx} \Psi_{2x}(x_0) = a_1 \left(\frac{-2 r_1 E_{s1}}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \right) + a_2 \left(\frac{2 r_2 E_{s2}}{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}} \right), \quad (\text{C.26})$$

Nas deduções anteriores as seguintes notações foram utilizadas,

$$E_{s1} = \left(\frac{e^{s1t_0} - 1}{t_0 s_1} \right), \quad E_{s2} = \left(\frac{e^{s2t_0} - 1}{t_0 s_2} \right), \quad E_{r1} = \left(\frac{e^{x_0 r_1} - 1}{x_0 r_1} \right), \quad E_{r2} = \left(\frac{e^{x_0 r_2} - 1}{x_0 r_2} \right). \quad (\text{C.27})$$

Assim, obtemos um sistema de 6 equações e 6 incógnitas. As convoluções que aparecem nestes sistemas são calculadas como,

$$b_{ij}(x) * \Psi_1(x, t_0) = c_1 \left(p_{ij}^1 e^{r_1 x} * e^{r_1 x} + p_{ij}^2 e^{r_1 x} * e^{r_2 x} \right) + c_2 \left(p_{ij}^1 e^{r_1 x} * e^{r_2 x} + p_{ij}^2 e^{r_2 x} * e^{r_2 x} \right) \quad (C.28)$$

$$b_{ij}(x) * \Psi_2(x, t_0) = d_1 \left(p_{ij}^1 e^{r_1 x} * e^{r_1 x} + p_{ij}^2 e^{r_1 x} * e^{r_2 x} \right) + d_2 \left(p_{ij}^1 e^{r_1 x} * e^{r_2 x} + p_{ij}^2 e^{r_2 x} * e^{r_2 x} \right) \quad (C.29)$$

$$e^{ax} * e^{bx} = \begin{cases} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{a - b} & , & \frac{d}{dx} (e^{ax} * e^{bx}) = \frac{a e^{ax} - b e^{bx}}{a - b} & , & \text{se } a \neq b \\ x e^{ax} & , & \frac{d}{dx} (e^{ax} * e^{bx}) = e^{ax} + a x e^{ax} & , & \text{se } a = b \end{cases} \quad (C.30)$$

$$e^{r_m x} * \phi_i(x) = \sum_{k=1}^2 \left[\phi_i(0) (p_{i1}^k + p_{i2}^k) + \frac{(p_{i1}^k - p_{i2}^k)}{\mu_1 r_k} \right] e^{r_m x} * e^{r_k x} + \sum_{k=1}^2 \frac{(p_{i1}^k - p_{i2}^k)}{\mu_1 r_k} e^{r_m x} * 1 \quad (C.31)$$

Agora, fazendo $x=x_0$ nas equações (C.18) e suas derivadas e $t=t_0$, nas equações (C.17) e (C.17a), obtemos a equação matricial,

$$\underline{M} \underline{C} = \underline{V} \quad (C.32)$$

onde

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \Psi^+(0) e^{s_1^+ t} + \Psi^-(0) e^{s_2^+ t} \\ \Psi^+(0) e^{s_1^+ t} - \Psi^-(0) e^{s_2^+ t} \\ \frac{1}{vt_0 \mu_1} \left[b_{11}(x) * \phi_1(x) - b_{12}(x) * \phi_2(x) \right] \\ \frac{1}{vt_0 \mu_1} \frac{d}{dx} \left[b_{11}(x) * \phi_1(x) - b_{12}(x) * \phi_2(x) \right] \\ \frac{1}{vt_0 \mu_1} \left[b_{21}(x) * \phi_1(x) - b_{22}(x) * \phi_2(x) \right] \\ \frac{1}{vt_0 \mu_1} \frac{d}{dx} \left[b_{21}(x) * \phi_1(x) - b_{22}(x) * \phi_2(x) \right] \end{bmatrix} , \quad (C.33a)$$

onde notamos,

$$e_i = e^{s_i t_0} \quad \text{para } i=1,2, \quad (C.33a)$$

$$b_{ij}(x) * \phi_\ell(x) = p_{ij}^1 e^{r_i x} * \phi_\ell(x) + p_{ij}^2 e^{r_2 x} * \phi_\ell(x). \quad (C.33b)$$

e a matriz M é dada por,

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_1 e^s}{\sigma_s x_0} & +\frac{\mu_1 e^s}{\sigma_s x_0} & E_{r_1} & E_{r_2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu_1 e^s}{\sigma_s x_0} & \frac{\mu_1 e^s}{\sigma_s x_0} & 0 & 0 & E_{r_1} & E_{r_2} \\ -E_{s_1} b^1(x_0) & E_{s_2} (2-b^1(x_0)) & v_2(p_{11}^1 \mathcal{D} + p_{11}^2 \mathcal{D}) & v_2(p_{11}^1 \mathcal{D} + p_{11}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{12}^1 \mathcal{D} - p_{12}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{12}^1 \mathcal{D} - p_{12}^2 \mathcal{D}) \\ E_{s_1} \left(\frac{-2r_1}{e^r} - (b^1(x_0))' \right) & E_{s_2} \left(\frac{2r_1(1-e^r)}{e^r} - (b^1(x_0))' \right) & v_2(p_{11}^1 \mathcal{D} + p_{11}^2 \mathcal{D}) & v_2(p_{11}^1 \mathcal{D} + p_{11}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{12}^1 \mathcal{D} - p_{12}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{12}^1 \mathcal{D} - p_{12}^2 \mathcal{D}) \\ -E_{s_1} b^2(x_0) & -E_{s_2} b^2(x_0) & v_2(p_{21}^1 \mathcal{D} + p_{21}^2 \mathcal{D}) & v_2(p_{21}^1 \mathcal{D} + p_{21}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{22}^1 \mathcal{D} - p_{22}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{22}^1 \mathcal{D} - p_{22}^2 \mathcal{D}) \\ -E_{s_1} \left(\frac{2r_1}{e^r} + (b^2(x_0))' \right) & E_{s_2} \left(\frac{2r_2}{e^r} - (b^2(x_0))' \right) & v_2(p_{21}^1 \mathcal{D} + p_{21}^2 \mathcal{D}) & v_2(p_{21}^1 \mathcal{D} + p_{21}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{22}^1 \mathcal{D} - p_{22}^2 \mathcal{D}) & v_2(-p_{22}^1 \mathcal{D} - p_{22}^2 \mathcal{D}) \end{bmatrix} \quad (C.34)$$

onde foram usadas as seguintes notações:

$$e^{r^-} = e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}, \quad e^{r^+} = e^{r_1 x_0} + e^{r_2 x_0}, \quad e^{s^-} = e^{s_1 t_0} - e^{s_2 t_0}, \quad (C.34a)$$

$$b^k(x_0) = b_{k1}(x_0) + b_{k2}(x_0) \quad \text{e} \quad (b^k(x_0))' = \left. \frac{d}{dx} (b_{k1}(x) + b_{k2}(x)) \right|_{x=x_0} \quad (C.34b)$$

$$\mathcal{D}_i = e^{r_i x} * e^{r_i x} \Big|_{x=x_0} = x_0 e^{r_i x_0}, \quad \mathcal{D}_{i1} = \left[e^{r_i x} * e^{r_i x} \right] \Big|_{x=x_0} = x_0 r_i e^{r_i x_0} + e^{r_i x_0}, \quad (C.34c)$$

$$\mathcal{D}_3 = e^{r_1 x} * e^{r_2 x} \Big|_{x=x_0} = \frac{e^{r_1 x_0} - e^{r_2 x_0}}{r_1 - r_2}, \quad \mathcal{D}_{31} = \frac{d}{dx} \left[e^{r_1 x} * e^{r_2 x} \right] \Big|_{x=x_0} = \frac{r_1 e^{r_1 x_0} - r_2 e^{r_2 x_0}}{r_1 - r_2} = \frac{e^{r_1 x_0} + e^{r_2 x_0}}{2}, \quad i=1,2 \quad (C.34d)$$

APÊNDICE D

Isotropia linear

Neste apêndice vamos considerar o problema de ordenadas discretas dependente do tempo com anisotropia linear, isto é

$$\sigma^{mn} = \sum_{\ell=0}^1 (2\ell+1) \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu_n) P_{\ell}(\mu_m) = \beta_0 + 3\beta_1 \mu_m \mu_n, \quad (D.1)$$

isto é, o problema S_N é descrito por,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, t) + \sigma_t \Psi_m(x, t) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \Psi_n(x, t) w_m (\beta_0 + 3\beta_1 \mu_m \mu_n) + Q_m(x, t), \quad (D.2)$$

com as condições de contorno,

$$\Psi_m(0, t) = f_m(t), \quad \Psi_m(x_0, t) = g_m(t), \quad \mu_m > 0, \quad (D.2a)$$

e a condição inicial,

$$\Psi_m(x, 0) = \phi_m(x). \quad (D.2b)$$

Ao aplicamos o método LTS_N nodal sobre a equação (D.2), recaímos na solução das equações matriciais acopladas para os fluxos médios, dadas por

$$\Psi_{\tilde{x}}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\overline{M}_x^{-1}(s) \right] \Psi_{\tilde{x}}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\overline{M}_x^{-1}(s) \right] * G_{\tilde{x}}(x), \quad (D.3)$$

e

$$\Psi_{\tilde{t}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\overline{M}_t^{-1}(s) \right] \Psi_{\tilde{t}}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left[\overline{M}_t^{-1}(s) \right] * F_{\tilde{t}}(t), \quad (D.4)$$

onde as matrizes $\overline{M}_x(s)$ e $\overline{M}_t(s)$ são, agora, escritas como

$$\overline{M}_x(s) = \begin{bmatrix} s + \frac{\sigma_t}{\mu_1} - \frac{\sigma_s \beta_0 w_1}{2 \mu_1} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_1 \mu_1}{2} & -\frac{\sigma w_2}{2 \mu_1} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_2 \mu_2}{2} & \dots & -\frac{\sigma w_N}{2 \mu_1} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_N \mu_N}{2} \\ -\frac{\sigma w_1}{2 \mu_2} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_1 \mu_1}{2} & s + \frac{\sigma_t}{\mu_2} - \frac{\sigma_s w_2}{2 \mu_2} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_2 \mu_2}{2} & \dots & -\frac{\sigma w_N}{2 \mu_2} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_N \mu_N}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\sigma w_1}{2 \mu_N} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_1 \mu_1}{2} & -\frac{\sigma w_2}{2 \mu_N} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_2 \mu_2}{2} & \dots & s + \frac{\sigma_t}{\mu_N} - \frac{\sigma_s w_N}{2 \mu_N} - \frac{3 \sigma_0 \beta_1 w_N \mu_N}{2} \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

e

$$\overline{M}_t(s) = \begin{bmatrix} s + v \sigma_t - \sigma_0 w_1 - \sigma_1 w_1 \mu_1^2 & -\sigma_0 w_2 - \sigma_1 w_2 \mu_2 \mu_1 & \dots & -\sigma_0 w_N - \sigma_1 w_N \mu_N \mu_1 \\ -\sigma_0 w_1 - \sigma_1 w_1 \mu_1 \mu_2 & s + v \sigma_t - \sigma_0 w_2 - \sigma_1 w_2 \mu_2^2 & \dots & -\sigma_0 w_N - \sigma_1 w_N \mu_N \mu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sigma_0 w_1 - \sigma_1 w_1 \mu_1 \mu_N & -\sigma_0 w_2 - \sigma_1 w_2 \mu_2 \mu_N & \dots & s + v \sigma_t - \sigma_0 w_N - \sigma_1 w_N \mu_N^2 \end{bmatrix}, \quad (D.6)$$

onde

$$\sigma_1 = \frac{3 v \sigma_s \beta_1}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_0 = \frac{v \sigma_s \beta_0}{2}. \quad (D.7)$$

A matriz $\overline{M}_x(s)$ tem a mesma forma da matriz unidimensional sem dependência no tempo, desta forma sua inversa pode ser calculada como Barichello [11] e a transformada inversa é dada pela técnica de expansão de Heaviside como,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\overline{M}_x^{-1}(s)\right] = \sum_{k=1}^N P^k e^{s_k t}, \quad (D.8)$$

onde os s_k são as N raízes distintas e simétricas do determinante de $\overline{M}_x(s)$ e as P^k são matrizes de coeficientes provenientes da inversão.

Vamos agora inverter a matriz $\overline{M}_t(s)$. Assim, seguindo o mesmo raciocínio do caso isotrópico, primeiramente calculamos seu determinante usando o fato desta matriz poder ser decomposta, como a soma de três matrizes segundo suas colunas,

$$\overline{M}_t(s) = \left[\begin{array}{ccc} \underline{E}_1 + \underline{C}_1 + \underline{D}_1 & \underline{E}_2 + \underline{C}_2 + \underline{E}_2 & \dots & \underline{E}_N + \underline{C}_N + \underline{E}_N \end{array} \right] \quad (D.9)$$

onde \underline{E}_j , \underline{C}_j e \underline{E}_j com $j = 1, 2, \dots, N$, são sub-colunas definidas por,

$$\underline{E}_j = \text{col} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & s + v \sigma_t & \dots & 0 \end{array} \right], \quad (D.10)$$

$$\underline{C}_j = \text{col} \left[\begin{array}{cccc} -\sigma_0 w_j & -\sigma_0 w_j & \dots & -\sigma_0 w_j \end{array} \right] \quad (D.11)$$

e

$$\underline{E}_j = \text{col} \left[\begin{array}{cccc} -\sigma_1 w_j \mu_j \mu_1 & \dots & -\sigma_1 w_j \mu_j \mu_i & \dots & -\sigma_1 w_j \mu_j \mu_N \end{array} \right]. \quad (D.12)$$

O determinante da matriz $\overline{M}_t(s)$, é calculado através da soma dos determinantes das matrizes menores, a qual é bem reduzida, pois muitas parcelas são nulas. Depois de alguns cálculos encontramos que,

$$\det(\overline{M}_t(s)) = (s + v\sigma_t)^{N-2} \left[s^2 - s \sum_{k=1}^N w_k (\sigma_0 + \sigma_1 \mu_k^2) + \sigma_0 \sigma_1 \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N w_k w_\ell (\mu_k - \mu_\ell) \right]. \quad (D.13)$$

Lembrando que,

$$\mu_{N+1-i} = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, N/2, \quad (D.14)$$

podemos reescrever (D.13) como,

$$\det(\overline{M}_t(s)) = (s + v\sigma_t)^{N-2} \left[(s + v\sigma_t)^2 - 2(s + v\sigma_t) \sum_{k=1}^{N/2} w_k (\sigma_0 + \sigma_1 \mu_k^2) + 4\sigma_0 \sigma_1 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k^2 \sum_{\ell=1}^N w_\ell \right]. \quad (D.15)$$

Ainda como [23,42],

$$\sum_{k=1}^{N/2} w_k = 1 \quad (D.15a)$$

e através de alguns algebrismos, podemos reescrever a equação (D.15) como,

$$\det(\overline{M}_t(s)) = (s + v\sigma_t)^{N-2} \left[-s - v\sigma_t + 2\sigma_0 \right] \left[-s - v\sigma_t + 2\sigma_1 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k^2 \right]. \quad (D.16)$$

Acabamos de mostrar que o determinante da matriz $\overline{M}_t(s)$ possui $N-2$

raízes iguais e duas raízes distintas, calculadas como em (D.16).

Vamos, denominar de M , a matriz dos cofatores da matriz $\overline{M}_t(s)$. Os elementos da diagonal principal da matriz dos cofatores são obtidos diretamente da equação (D.14),

$$M_{ii} = (s + v \sigma_i)^{N-3} \left[s + v \sigma_i - 2 \sigma_0 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \right] \left[s + v \sigma_i - 2 \sigma_1 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k^2 \right] \quad (D.16)$$

e os elementos fora da diagonal principal são obtidos, como

$$M_{ij} = (s + \sigma_i)^{N-3} \left[(s + \sigma_i) \left(\sigma_0 w_i + \sigma_1 w_i \mu_i \mu_j \right) + \sigma_0 \sigma_1 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^N w_i w_k \left(\mu_i \mu_k + \mu_j \mu_k - \mu_i \mu_j - \mu_k^2 \right) \right]. \quad (D.18)$$

Utilizando as equações (D.16), (D.17) e (D.18), podemos escrever a inversa da matriz $\overline{M}_t(s)$ como,

$$\begin{aligned} \overline{M}_t^{-1}(s) &= \frac{M^T}{\det \overline{M}_t(s)} = \frac{1}{(s - s_1)^{N-2}(s - s_2)(s - s_3)} \begin{bmatrix} (s + \sigma_1)^{N-3} m_{11} & \dots & (s + \sigma_1)^{N-3} m_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s + \sigma_1)^{N-3} m_{1N} & \dots & (s + \sigma_1)^{N-3} m_{N2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1N} & \dots & m_{N2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (D.19)$$

onde

$$m_{ij} = \frac{M_{ji}}{(s + \sigma_i)^{N-3}} \quad (D.19a)$$

e

$$\begin{cases} s_1 = -v \sigma_t \\ s_2 = -v \sigma_t - 2 \sigma_0 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \\ s_3 = -bv \sigma_t - 2 \sigma_1 \sum_{k=1}^{N/2} w_k \mu_k^2 \end{cases} \quad (D.19b)$$

Desta forma podemos, de forma analítica, inverter a transformada da matriz $\bar{M}^{-1}(s)$, pelo uso da fórmula de expansão de Heaviside. Assim, no caso de anisotropia linear, os fluxos angulares médios são escritos como,

$$\underline{\Psi}_x(x) = \sum_{k=1}^N P^k e^{-r_k x} \underline{\Psi}_x(0) + \sum_{k=1}^N P^k e^{-r_k x} * \underline{G}, \quad (D.20)$$

$$\underline{\Psi}_t(t) = \sum_{k=1}^3 U^k e^{-s_k t} \underline{\Psi}_t(0) + \sum_{k=1}^3 U^k e^{-s_k t} * \underline{F}, \quad (D.21)$$

onde as matrizes coeficientes U^k são provenientes da inversão da transformada no tempo e s_k são descritas por (D.19b). Acabamos, assim, de mostrar que no caso de anisotropia linear o sistema dependente do tempo fica sempre reduzido a soma de três termos exponenciais, não importando o valor de N considerado. Mais ainda as três raízes são sempre conhecidas de forma analítica.