

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Fernanda Rodrigues Leivas

Propriedades de Transporte em Teoria de Jogos

Porto Alegre

2016

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Fernanda Rodrigues Leivas

Propriedades de Transporte em Teoria de Jogos

Trabalho de Conclusão de Curso como um dos pré-requisitos para a obtenção de grau de Bacharel em Física, apresentado ao curso de bacharelado em física-astrofísica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Instituto de Física

Curso de Física: Astrofísica

Orientador: Mendeli H. Vainstein

Porto Alegre

2016

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Fernanda Rodrigues Leivas

Propriedades de Transporte em Teoria de Jogos/ **Universidade Federal do Rio Grande do Sul**

Fernanda Rodrigues Leivas. – Porto Alegre, 2016-
37 f.

Orientador: Mendeli H. Vainstein

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
UFRGS

Instituto de Física

Curso de Física: Astrofísica, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

1. Dilema do Prisioneiro. 2. Difusão 3. Ruído. I. H. Vainstein, Mendeli H.,
orient. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. III. Instituto de Física. IV.
Graduação

Resumo

A interação entre indivíduos depende diretamente da cooperação, que é importante para a evolução de espécies e, atualmente, igualmente importante em diversas situações como na economia ou até na psicologia, sendo fundamental para o bem-estar social. Um dos problemas abordados em teoria de jogos chamado de Dilema do Prisioneiro (PD) descreve uma situação em que indivíduos podem decidir cooperar ou não; o dilema surge porque dois indivíduos completamente racionais acabam optando por não cooperar. Neste trabalho, estudam-se simulações computacionais de populações com indivíduos simples sem memória (C-cooperadores, D-não cooperadores). As interações são associadas a ganhos (*payoffs*) e após todos os indivíduos interagirem nas suas vizinhanças, seus ganhos são comparados com os dos vizinhos para definir mudanças (ou não) de estratégias com dinâmicas variadas. Fazendo uma analogia com a vida real, onde os seres podem migrar, pode-se permitir que os indivíduos da simulação também se movam; tal mobilidade pode ser implementada de maneira aleatória (todos os indivíduos podem se mover com uma dada probabilidade) ou direcionada (indivíduos migram somente para regiões onde o bem-estar é maior). Estudos recentes sugerem que a introdução de um pequeno ruído na mobilidade, equivalente a uma decisão irracional, pode favorecer a cooperação. O objetivo do trabalho é estudar a mobilidade e seus efeitos sobre a cooperação incluindo ou não ruído na forma de uma pequena probabilidade de o indivíduo se mover aleatoriamente mesmo com a difusão direcionada. Foram analisadas a dinâmica em que a probabilidade de mudanças de estratégia assume a forma da função de Fermi para permitir escolhas irracionais e a do Replicador para populações finitas, com maior foco na segunda; a difusão direcionada utilizada foi a utilitária (*Benthamian*), em que busca-se maximizar o bem-estar da vizinhança. Como resultado, obtemos que a difusão direcionada pura favorece mais a cooperação se comparada com a aleatória pura e que a introdução de um pequeno ruído na difusão direcionada como perturbação favorece a cooperação ainda mais.

Palavras-chaves: Dilema do prisioneiro. Difusão. Ruído.

Abstract

The interaction between individuals depends directly on cooperation, which is important for the evolution of species and, presently, equally important in many situations in economy and even in psychology, being fundamental for social well-being. One of the models addressed in game theory, namely the Prisoner's Dilemma (PD), describes a situation in which individuals can choose to cooperate or not; the dilemma arises because two completely rational individuals may end choosing to not cooperate. In this work, we study computer simulations of populations comprised of simple memoryless individuals (C-cooperators, D-defectors). The interactions are associated to payoffs and after all individuals interact in their neighborhoods, their payoffs are compared with their neighbors' to determine changes (or not) in strategies with various dynamics. In analogy to everyday life, in which beings can migrate, it is possible to also allow the individuals in the simulation to move; such mobility can be implemented in a random (all individuals can move with a fixed probability) or in a directed fashion (individuals only migrate to regions where the welfare is greater). Recent studies suggest that the introduction of a small amount of noise in the mobility, equivalent to an irrational decision, may favor cooperation. The main goal of this work is to study mobility and its effects on cooperation both with and without the inclusion of noise as a small probability to move randomly even with the directed mobility. We analyzed the dynamics in which the probability of strategy changes assume the form of the Fermi function to allow irrational choices and the finite population replicator dynamics, with greater focus on the latter; the directed diffusion used was utilitarian (Benthamian), which aims to maximize the neighborhood's welfare. As a result, we obtained that the purely directed diffusion favors more cooperation than the purely random diffusion and that the introduction of a small amount of noise as a perturbation in the directed diffusion promotes further cooperation.

Key-words: Prisoners Dilema. Diffusion. Noise.

Sumário

Introdução	9
1 Modelo	11
1.1 Simulação	11
2 Implementação	13
2.1 Dinâmica de Fermi	13
2.2 Dinâmica do Replicador	14
2.3 Difusão	15
3 Resultados	19
3.1 Análise da convergência	19
3.2 Análise da densidade assintótica de cooperadores	21
3.3 Difusão Aleatória	22
3.4 Diferentes valores de σ	24
3.5 Difusão Direcionada	25
3.5.1 Diferença Relativa	26
3.6 Difusão Direcionada com perturbação aleatória	28
3.6.1 Diferença Relativa	29
3.7 Mapa	31
Conclusão	35
Referências	37

Introdução

O estudo da cooperação está presente em diversos campos da ciência como na economia, nos famosos cartéis ou até na bolsa de valores, na relação com a biologia no comportamento de populações, na evolução das espécies [1] principalmente da espécie humana onde a cooperação teve um papel essencial; a dinâmica entre cooperadores e não cooperadores, como um afeta o outro [2], ajuda a entender como essa evolução aconteceu. A teoria de jogos é um estudo de modelos matemáticos que abordam o comportamento de indivíduos que interagem obedecendo a regras específicas. Um exemplo é o famoso Dilema do Prisioneiro (PD) desenvolvido por Merrill Flood e Melvin Dresher em 1950. O jogo descreve uma situação em que indivíduos podem optar por dois tipos de estratégia: cooperar ou não cooperar. Quando um cooperador (indivíduo que decide cooperar) joga com um não cooperador (que decide não cooperar), o primeiro perde e o segundo ganha, no entanto quando dois cooperadores jogam eles ganham, porém menos (esse esquema de ganhos e perdas “*payoffs*” será mostrado posteriormente), por esse motivo o indivíduo é sempre tentado a não cooperar. O dilema do prisioneiro recebe esse nome pois ele é apresentado da seguinte forma: Imagine que dois criminosos (A e B) foram levados para prisão para serem interrogados, eles estão separados e não sabem o que o outro vai dizer, os policiais os influenciam dizendo que se entregarem o parceiro, serão absolvidos e o parceiro ganhará uma pena de 3 anos. Caso nenhum entregue o outro, os dois ganharão uma pena de 1 ano de prisão e no caso em que os dois entreguem um ao outro ambos ganharão 2 anos de prisão. O estudo do dilema é feito a partir de simulações computacionais, e objetiva entender como funciona a interação dentro de uma população de cooperadores e não cooperadores, e como ela se comporta diante da introdução de mecanismos que fazem um paralelo com situações reais. Como exemplo pode-se citar a escolha da dinâmica, que é a regra que determina quando um indivíduo troca ou não de estratégia, podendo ser adaptada de acordo com o estudo que está sendo feito, o número de indivíduos na rede, a topologia da rede e como os seres dessa rede interagem, se o indivíduo carrega ou não memória dos jogos anteriores e ainda pode-se adicionar espaços vazios [4] onde os indivíduos são livres para difundir assim como na vida real onde os seres se movem. Um outro mecanismo que pode ser implementado, que é objeto deste estudo, é adicionar uma forma de ruído na rede, ou seja uma pequena probabilidade de o indivíduo tomar uma decisão irracional (contrária a de ganho) como difundir para um espaço com o ganho menor ou trocar de estratégia quando seu ganho é maior. O ruído de certa forma é uma maneira de implementar erros na PD. Quando objetiva-se analisar os diferentes tipos de sistemas, se estuda qual dinâmica favorece a cooperação e como ela se comporta frente a diferentes mecanismos e a mudança de seus parâmetros.

Neste trabalho usa-se uma rede quadrada de indivíduos cujas estratégias (cooperar ou não) são escolhidas aleatoriamente. Eles interagem com os seus vizinhos mais próximos, comparam os ganhos e decidem se mudam ou não de estratégia e isso se repete até que a densidade de cooperadores e não cooperadores fique constante no tempo, essas densidades finais é que são usadas para análise. Para o bem-estar de todos o ideal seria que todos cooperassem. É interessante mencionar que quando numa rede há coexistência de cooperadores e não cooperadores os cooperadores tentem a se agrupar de forma a impedir invasão dos não cooperadores, denomina-se esse grupo de *cluster*, são eles que normalmente fazem com que a população de cooperadores não seja extinta. Quando é permitido que os indivíduos se movam para espaços vazios na rede a cooperação melhora para alguns casos [7][5][6]. Existem dois tipos de difusão, a aleatória onde os indivíduos se movem aleatoriamente com uma determinada probabilidade fixada, e a difusão direcionada [9], nela o indivíduo se move para lugares com maiores ganhos. Estudos mostram que ao adicionar um pequeno ruído na difusão direcionada (combinado com um outro ruído relacionado com a mudança de estratégia dos indivíduos) a cooperação parece ser favorecida [8], outras formas de ruído também parecem favorecer a cooperação [10]. O estudo deste trabalho é inspirado em [14], que mostra como a cooperação é favorecida e mantida em diferentes tipos difusões direcionadas, cujas funções que medem o bem-estar de uma região (representadas pela função de bem estar social “SWF”) são baseadas em estudos de ciências sociais. Utilizando as difusões direcionadas de [14] visa-se, para diversas dinâmicas, descobrir se o ruído na forma de difusão aleatória favorece os cooperadores, para quais casos e como funciona tal mecanismo.

1 Modelo

1.1 Simulação

O modelo consiste em uma rede quadrada [3] de cooperadores e não cooperadores, que interagem com os quatro vizinhos mais próximos numa vizinhança de *von Neumann* e podem interagir consigo mesmo dependendo da dinâmica (auto-interação), cada tipo de interação possui um ganho (*payoff*) associado. Usa-se uma rede quadrada de tamanho $L \times L$, com número de indivíduos total possível $N = L^2$ e condições de contorno periódicas. Inicialmente cada indivíduo pode escolher sua estratégia com probabilidades iguais. Para os casos sem difusão e com difusão aleatória percorre-se a rede assincronamente, ou seja, é escolhido um indivíduo aleatório a , ele joga com seus vizinhos (acumulando assim ganhos das 4 interações, esquema na Figura 2) e posteriormente um de seus vizinhos b é escolhido aleatoriamente, ele também joga com seus vizinhos (Figura 3), e então o indivíduo a decide se vai adotar ou não a estratégia de b de acordo com uma probabilidade determinada pela dinâmica utilizada que é uma função dos ganhos dos indivíduos em um passo de Monte Carlo, faz-se isso N vezes, então probabilisticamente a maior parte dos indivíduos será escolhida. Para o caso com difusão direcionada a rede é percorrida sincronamente, o primeiro indivíduo da rede joga com os quatro vizinhos, depois o segundo e assim sucessivamente passando por todos os indivíduos da rede (passo de Monte Carlo), em seguida percorre-se a rede novamente para que cada indivíduo sorteie um vizinho aleatório para comparar seu ganho e decidir se mantém ou muda de estratégia de acordo com a dinâmica utilizada.

Se a rede tiver espaços vazios (buracos) os indivíduos podem ainda difundir. Esses passos se repetem, até que a rede chegue no equilíbrio (números de cooperadores e não cooperadores constante) e são esses valores assintóticos que são usados nas medidas. O dilema está associado a uma rede de ganhos (*payoff*) que é composta por R (*reward*), que é o ganho, a recompensa pela cooperação mútua, P (*punishment*) o castigo pela não cooperação mútua, T (*temptation*) a tentação para não cooperar, ou seja, é o ganho se o indivíduo não cooperar e seu vizinho cooperar e S (*sucker*) o ganho quando o indivíduo coopera e o seu vizinho não. Os valores dos *payoffs* devem obedecer $T > R > P > S$ e $2R > T + S$ para caracterizar o dilema do prisioneiro.

Para facilitar a análise usamos sempre $S = P = 0$, $R = 1$ e variamos apenas $T = b$ ($b > 1$).

		A	
		coopera	nao coopera
B	coopera	R(A,B)	T(A), S(B)
	nao coopera	S(A), T(B)	P(A, B)

Figura 1 – Matriz de ganhos (*payoff*) para dois jogadores A e B.

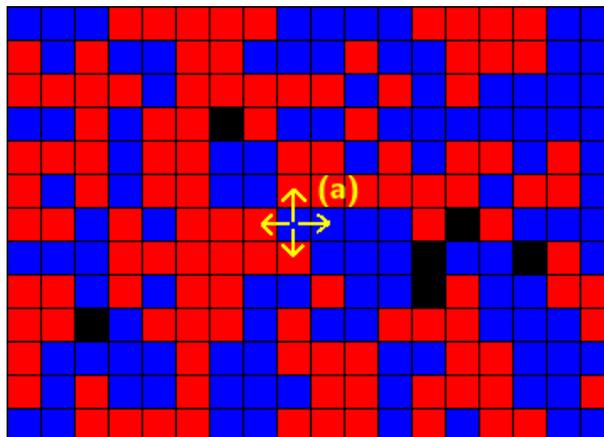


Figura 2 – Representação de uma rede quadrada ($L \times L$) onde os quadrados azuis são cooperadores, os vermelhos não cooperadores e os pretos são buracos. Um indivíduo é escolhido aleatoriamente e joga com seus 4 vizinhos mais próximos.

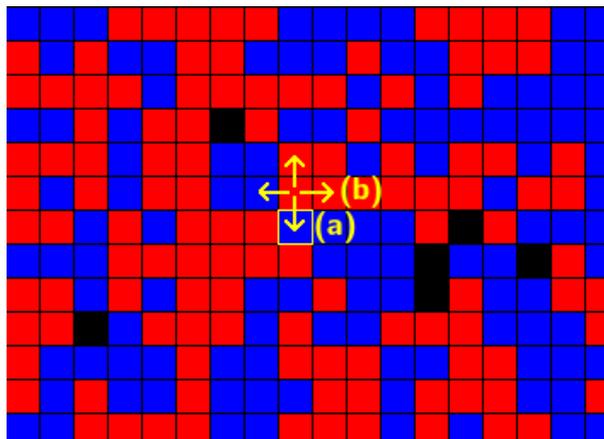


Figura 3 – Representação de uma rede quadrada ($L \times L$) onde os quadrados azuis são cooperadores, os vermelhos não cooperadores e os pretos são buracos. Um dos 4 vizinhos de *a* é escolhido aleatoriamente e ele também joga com seus quatro vizinhos.

2 Implementação

2.1 Dinâmica de Fermi

A probabilidade de mudança de estratégia nesta dinâmica é baseada na função de Fermi. A rede possui tamanho $L \times L$ ($L = 100$) e os indivíduos não interagem consigo mesmo (sem auto-interação). Um indivíduo x decide se vai adotar ou não a estratégia de um vizinho y de acordo com a seguinte probabilidade W :

$$W(P_x \rightarrow P_y) = \frac{1}{1 + e^{-(P_y - P_x)/K}}, \quad (2.1)$$

onde P_x é o *payoff* de x , P_y o *payoff* de y e K denota a intensidade de um ruído que está relacionado com decisões irracionais, isto é, o indivíduo pode mudar de estratégia mesmo que o seu *payoff* seja maior que o do vizinho. O valor de K é sempre positivo, se $P_x > P_y$ o valor dentro da exponencial será positivo, portanto quanto maior o valor de K menor será o valor de W e maior será a probabilidade de o indivíduo mudar de estratégia, ou seja, tomar uma decisão irracional [12]. A figura 4 mostra como W (que é função de $\Delta P = P_y - P_x$) se comporta para diferentes valores de K .

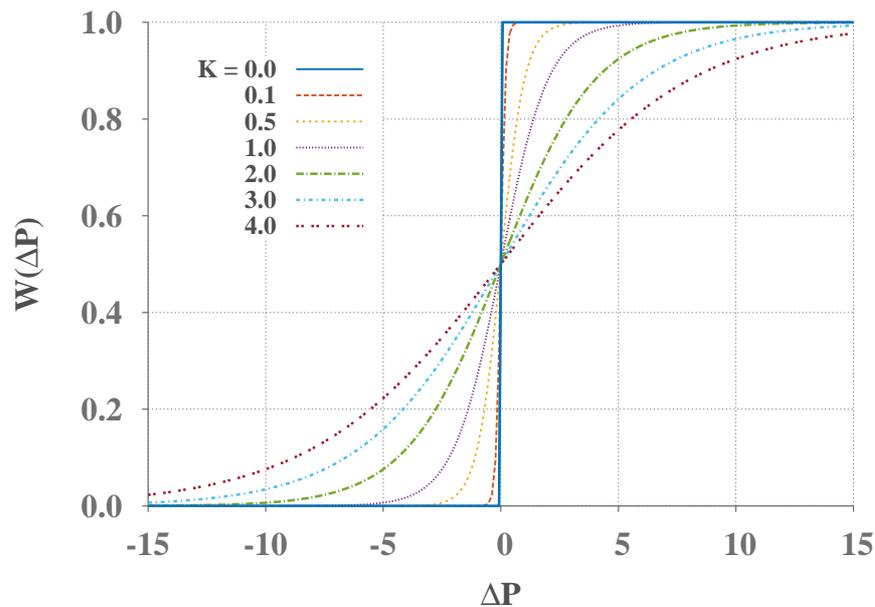


Figura 4 – Gráfico da função da probabilidade de troca (função de Fermi) pela diferença de payoff.

2.2 Dinâmica do Replicador

A partir da Figura 1, onde foi mostrada a matriz de *payoffs*, é possível escrever o *payoff* médio para a população de cooperadores f_c e de não cooperadores f_d , supondo uma população grande e bem misturada em que cada indivíduo pode interagir com qualquer outro:

$$\begin{aligned} f_c &= \rho_c R + \rho_d S \\ f_d &= \rho_c T + \rho_d P, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo $\rho_{(c,d)}$ a densidade de cooperadores e não cooperadores, respectivamente. Usando a mesma lógica chega-se na expressão para o *payoff* médio f da população total que é a média ponderada de f_c e f_d :

$$f = \rho_c f_c + \rho_d f_d. \quad (2.3)$$

Com base em (2.2) e (2.3), é possível chegar na expressão para a taxa de crescimento de cada população $\frac{\dot{\rho}_{(c,d)}}{\rho_{(c,d)}}$ que é postulado como sendo proporcional à diferença entre $f_{(c,d)}$ e f :

$$\frac{\dot{\rho}_{(c,d)}}{\rho_{(c,d)}} = \alpha(f_{(c,d)} - f). \quad (2.4)$$

Isolando $\dot{\rho}_{(c,d)}$ obtém-se a equação da dinâmica do replicador:

$$\dot{\rho}_{(c,d)} = \alpha \rho_{(c,d)}(f_{(c,d)} - f). \quad (2.5)$$

A equação (2.5) pode ser generalizada para mais de duas estratégias ou populações, é uma equação não linear e é um bom modelo para prever a estabilidade em sistemas evolutivos estudando os pontos de estabilidade de Nash (*The Folk Theorem*) [11]. O equilíbrio de Nash é um estado em que nenhum indivíduo ganharia em uma mudança unilateral de estratégia, se as estratégias dos outros permanecem inalterados. Como consequência as densidades das populações se mantêm constantes no tempo. No ponto de equilíbrio onde $\dot{\rho}_c = \dot{\rho}_d = 0$, como $\rho_{(c,d)} \neq 0$ então $f_c = f_d = f$, sendo assim a média dos *payoffs* é igual e os indivíduos não mudam mais de estratégia, por isso atingem o equilíbrio de Nash.

Outra maneira de se obter a equação do replicador é partindo de uma população muito grande em que a probabilidade de um indivíduo de estratégia $i = \{c, d\}$ encontrar um outro com a mesma estratégia será a fração ρ_i^t num determinado tempo t . Se P_i^t é o *payoff* deste indivíduo no tempo t e W_{ij}^t é a probabilidade dele mudar para outra estratégia $j = \{c, d\} \neq i$, pode-se assumir que W_{ij}^t depende da diferença dos *payoffs* da seguinte forma [16]:

$$W_{ij}^t = \begin{cases} \beta(P_j^t - P_i^t) & \text{para } P_j^t > P_i^t \\ 0 & \text{para } P_j^t \leq P_i^t. \end{cases}$$

Ou seja, existe uma probabilidade do indivíduo não mudar de estratégia mesmo se $P_j > P_i$, porém se $P_j \leq P_i$ então ele nunca mudará de estratégia. Sabendo que cada indivíduo, em

um intervalo dt , pode mudar de estratégia com probabilidade W_{ij}^t e supondo que tal probabilidade está relacionada com uma taxa de troca $\alpha > 0$, chega-se na expressão para a densidade da população ρ_i^{t+dt} no instante $t + dt$. ou seja, a densidade de i no tempo t menos a fração em dt que mudou para j mais a que mudou para i .

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t - \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=i+1}^n \rho_j^t \beta (P_j^t - P_i^t) + \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=1}^i \rho_j^t \beta (P_i^t - P_j^t) \quad (2.6)$$

O primeiro somatório engloba todas as interações em que $P_i^t < P_j^t$ e o segundo em que $P_i^t > P_j^t$. Trocando de lugar P_j e P_i no primeiro somatório chega-se na seguinte expressão:

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t + \alpha dt \rho_i^t \sum_{j=1}^n \rho_j^t \beta (P_i^t - P_j^t). \quad (2.7)$$

Como $\sum_{j=1}^n f_j P_j = \bar{P}$ é o *payoff* médio da rede e $\sum_{j=1}^n \rho_j = 1$ então a expressão fica:

$$\rho_i^{t+dt} = \rho_i^t + \alpha dt \rho_i^t \beta (P_i^t - \bar{P}). \quad (2.8)$$

Subtraindo ρ_i^t dos dois lados, dividindo por dt e tomando o limite $dt \rightarrow 0$, chega-se na seguinte expressão:

$$\dot{\rho}_i = \alpha \beta \rho_i (P_i - \bar{P}), \quad (2.9)$$

que é equivalente à equação do replicador (2.5), por esse motivo a dinâmica é chamada de dinâmica do replicador.

Para a simulação, o que se usa efetivamente é a probabilidade de troca W_{ij} , onde define-se $\beta = 1/nT$ onde n é o numero de vizinhos na rede, no caso $n = 4$.

Para dinâmica do replicador usa-se uma rede $L \times L$ ($L = 50$), os indivíduos agora passam a interagir consigo mesmos (auto-interação) e a probabilidade de troca W_{ij} é inspirada na equação do replicador (2.5):

$$W_{ij} = \begin{cases} \frac{P_j - P_i}{4T} & \text{para } P_j > P_i \\ 0 & \text{para } P_j \leq P_i. \end{cases}$$

Essa dinâmica é útil pois não depende de nenhuma constante adicional, mas apenas da diferença de *payoff* e de T , enquanto a dinâmica anterior depende também de K . O objetivo deste estudo é entender como funciona a difusão e sua relação com o ruído (pequena probabilidade de o indivíduo difundir de forma irracional) e para fazê-lo usaremos a dinâmica do replicador devido à sua simplicidade.

2.3 Difusão

A rede é construída de maneira que hajam espaços vazios, não interagentes, onde os indivíduos podem difundir, ou seja, o indivíduo pode trocar de lugar com o buraco. Esta difusão pode ser aleatória ou direcionada. À difusão aleatória está associada a probabilidade do indivíduo difundir aleatoriamente, ela funciona na seguinte maneira: Após

todos os indivíduos terem interagido com seu vizinhos e comparado seus ganhos, cada indivíduo escolherá um dos vizinhos aleatoriamente e testará se é um buraco, se for ele irá difundir com uma determinada probabilidade σ . Na difusão direcionada analisada neste trabalho usa-se a ideia de um gradiente de ganho (*payoff*), ou seja, cada indivíduo ou buraco terá associado a si um bem-estar (*Welfare*) que é a função W (função de bem-estar social-SWF) que leva em conta a soma dos ganhos de seus vizinhos w_i num intervalo de tempo.

$$w_i = \sum_{t-h < k \leq t} P_{i,k}, \quad (2.10)$$

onde $P_{i,k}$ é o *payoff* do indivíduo i no tempo k , t é o tempo atual e h é o intervalo de tempo que define que os ganhos anteriores a ele não farão parte do somatório, no caso usam-se os dez últimos ganhos. Este intervalo pode representar uma memória ou um período entre acúmulo de recursos e reprodução.

A função bem-estar W mede o quanto a região em que o indivíduo se encontra é propícia. Neste caso o indivíduo irá difundir se o bem-estar do buraco for maior que o dele. Da mesma forma que acontece na difusão aleatória após todos os indivíduos terem interagido com seus vizinhos, cada indivíduo irá testar se seu vizinho escolhido aleatoriamente é um buraco, se for, ele vai se mover para onde o gradiente de ganho é maior. Na [14] foram considerados 3 tipos de bem-estar:

- Utilitarista ou *Benthamian*: O utilitarismo é uma doutrina na filosofia política ou ética social, que diz como o indivíduo deve agir com o objetivo de maximizar o bem-estar social [15], entendido como a soma do bem-estar de todos os seres. Aplicando esse conceito ao PD para um sítio i (numa vizinhança M_i) o bem-estar dos buracos/indivíduos será o resultado da soma dos ganhos w_j de seus vizinhos j ao longo do tempo (w_j “segue” o buraco/indivíduo, mesmo para os outros tipos de bem-estar):

$$W_i^U = \sum_{j \in M_i} w_j \quad (2.11)$$

- Bernoulli-Nash: O bem-estar Bernoulli-Nash é similar ao utilitarismo só que ao invés de considerar a soma dos ganhos dos vizinhos do indivíduo para medir o bem-estar da região, ele utiliza seu produto, o que resulta numa grande influência dos valores baixos de ganho:

$$W_i^{BN} = \prod_{j \in M_i} w_j \quad (2.12)$$

- *Rawlsian*: Baseado no princípio de mínima dignidade, esse bem-estar difere um pouco dos outros visto que leva em conta o ganho apenas de um indivíduo, o mais pobre, por isso pode ser considerado um caso extremo do Bernoulli-Nash [14]. Esta

seria uma maneira diferente de se pensar dentro de uma população, onde o bem-estar seria medido apenas pelos indivíduos mais pobres:

$$W_i^R = \min(w_j), \quad j \in M_i \quad (2.13)$$

Ainda pode-se combinar os dois tipos de difusão mencionados, nesse caso a difusão aleatória seria um pequeno ruído, uma perturbação, na difusão direcionada. O indivíduo se moveria para lugares onde o ganho é maior, porém ele ainda poderia difundir de forma irracional (aleatoriamente). No programa a simulação funciona de maneira semelhante à difusão direcionada, porém, mesmo se o indivíduo tiver o W maior que o buraco, ele ainda terá uma pequena probabilidade γ de difundir aleatoriamente.

3 Resultados

3.1 Análise da convergência

O primeiro passo a ser feito quando se deseja estudar densidades assintóticas é descobrir a partir de qual passo de Monte-Carlo as densidades convergem, ou seja, se mantêm constantes ao longo do tempo, pois apenas os valores assintóticos serão levados em conta. Neste trabalho serão mencionados diferentes sistemas e as Figuras 5, 6 mostram suas convergências, representadas pelo gráfico da densidade de cooperadores na população $\rho_c = \frac{n_c}{n_c+n_d}$ (n_c é o número de cooperadores e n_d o número de não cooperadores) pelo logaritmo do tempo. Primeiramente será estudado a dinâmica de Fermi e a dinâmica do

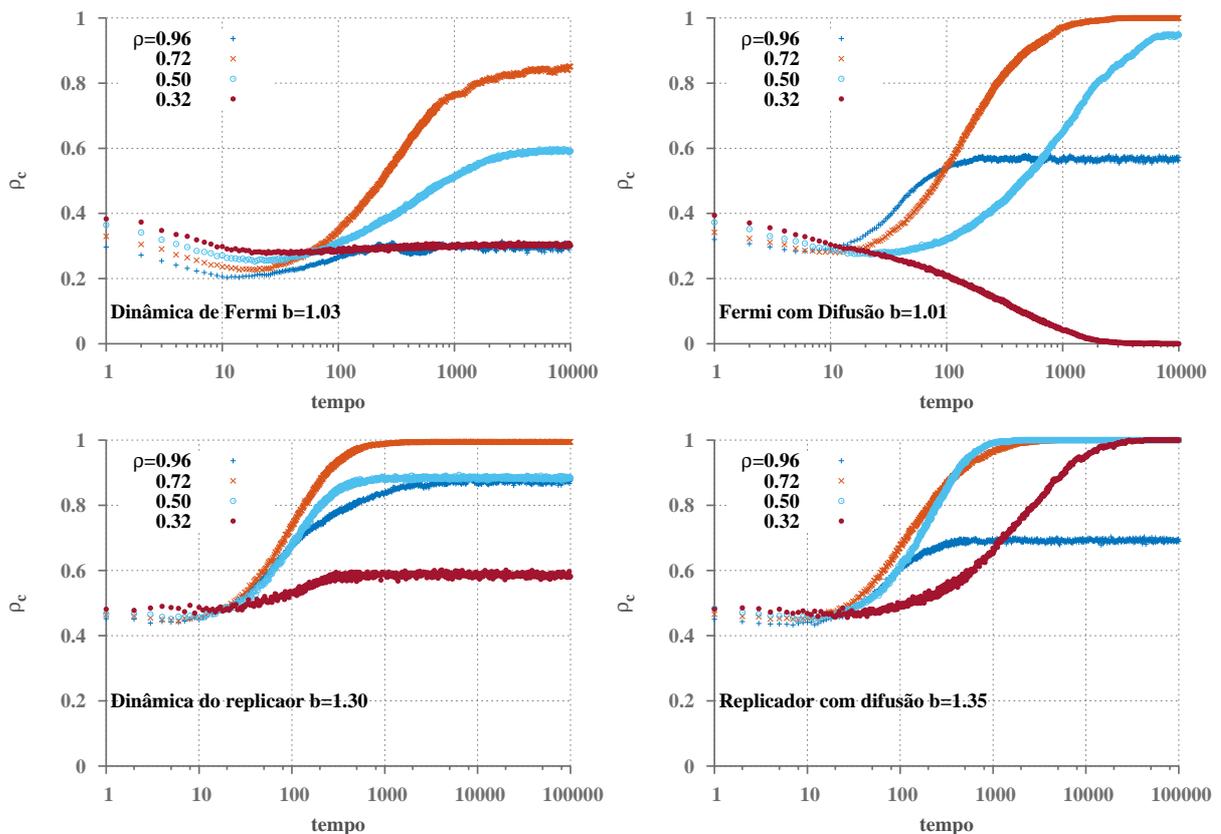


Figura 5 – Gráfico da densidade de cooperadores ρ_c pelo logaritmo do tempo para a Dinâmica de Fermi (acima) e para a dinâmica do replicador (abaixo) com ($\sigma = 0.01$) e sem difusão para diferentes valores de b e ρ_c , média sobre 50 amostras.

Replicador com e sem difusão aleatória. A Figura 5 mostra exemplos da evolução temporal da densidade de cooperadores na população ρ_c para alguns valores de densidade total da rede ρ e de tentação b (os valores escolhidos de ρ e b são apenas para mostrar diferentes casos de convergência, o comportamento para outros valores é similar). De acordo com eles concluímos que para esses casos o sistema converge rápido, necessitando apenas de 10^4 passos temporais para a dinâmica de Fermi e 10^5 para a do Replicador. Para os casos com difusão direcionada com e sem perturbação, será utilizada apenas a dinâmica do replicador. Para essa dinâmica foi observado problemas de convergência: Mesmo com 10^6 passos temporais nem todos os valores de ρ convergiram. A solução é rodar para tempos maiores e otimizar o programa, porém isso demandaria muito tempo, ainda pretende-se fazê-lo posteriormente.

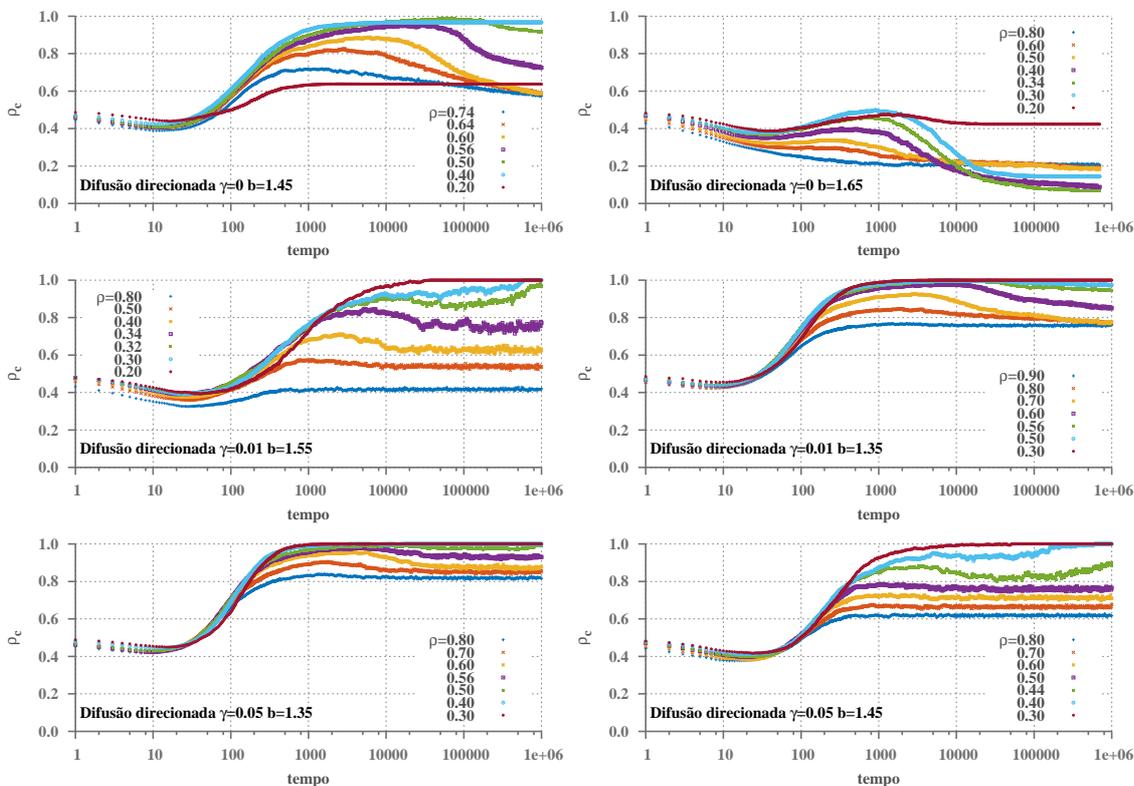


Figura 6 – Gráfico da fração de cooperadores na população ρ_c pelo logaritmo do tempo para a dinâmica do replicador com difusão direcionada pura (cima) combinado com difusão aleatória para $\gamma = 0.01$ (meio) e $\gamma = 0.05$ (baixo) para diferentes valores de b e ρ , média sobre 50 amostras.

De acordo com a Figura 6, para $\gamma = 0$ (γ representa a probabilidade de difusão aleatória) é onde aparecem os piores problemas de convergência, melhorando porém com o aumento de b . Para $\gamma = 0.01$ a convergência já é bem mais rápida, melhorando também para valores maiores de b e para $\gamma = 0.05$ quase não se têm problemas de convergência exceto para alguns pontos específicos.

3.2 Análise da densidade assintótica de cooperadores

Para entender o comportamento da dinâmica é essencial compreender como se comporta a densidade de cooperadores em função de b , ou seja, para quais valores de b apenas uma população domina ou para quais valores as populações coexistem. Para tal se fazem gráficos da densidade assintótica de cooperadores ρ_c em função de b .

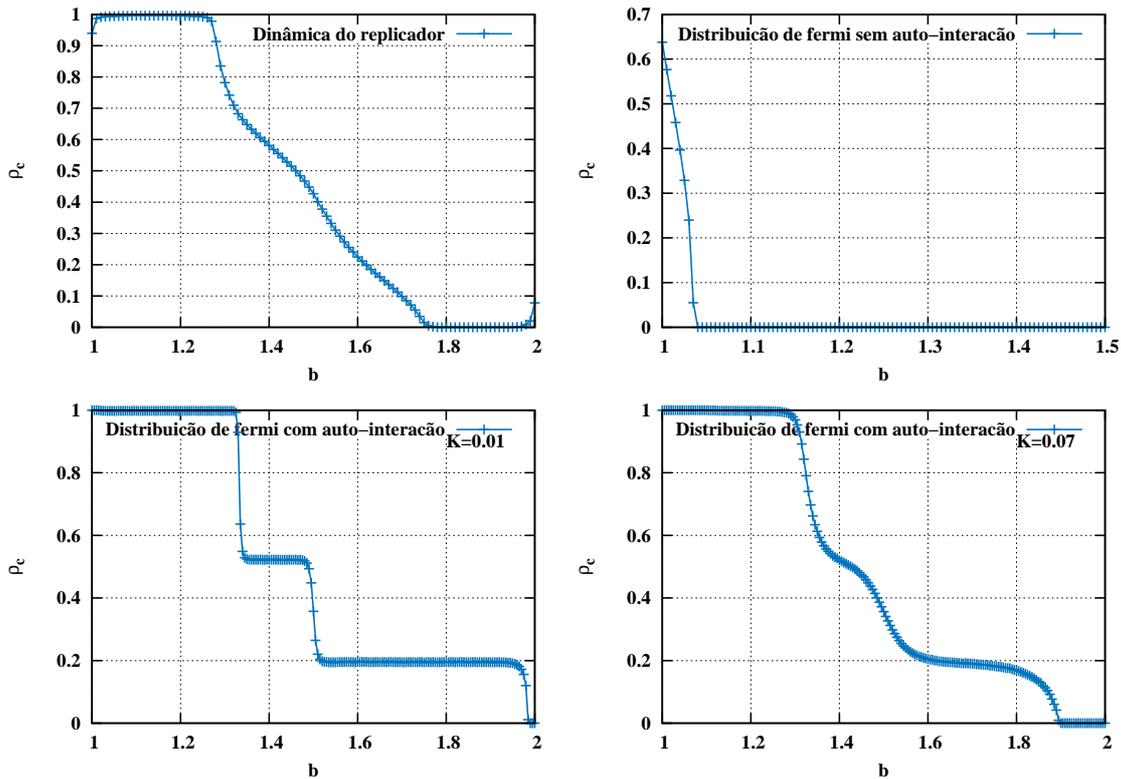


Figura 7 – Gráfico da densidade assintótica de cooperadores na rede sem buracos em função de b para dinâmica do replicador com auto-interação (gráfico de cima da esquerda), para a dinâmica de Fermi para $K = 0.01$ (gráfico de baixo da esquerda), para $K = 0.01$ (gráfico de cima da direita) e para $K = 0.07$ (gráfico de baixo da direita).

A Figura 7 mostra os resultados dos gráficos de ρ_c por b para a dinâmica do replicador com auto-interação e a dinâmica de Fermi para diferentes valores de K (mostrando a influência do ruído K da dinâmica de Fermi no sistema) com e sem auto-interação. Percebe-se que a auto-interação favorece a cooperação, os não cooperadores começam a dominar para valores maiores de b , o que é esperado pois com auto-interação quando o cooperador joga consigo mesmo ele ganha a recompensa $R = 1$, enquanto um não cooperador ganha o valor da punição $P = 0$ (ver Figura 1). Existe um determinado valor crítico b_{c1} em que se $b < b_{c1}$ a rede será totalmente dominada por cooperadores e outro valor crítico b_{c2} em que se $b > b_{c2}$ a rede será totalmente dominada por não cooperadores. Iremos focar nos valores $b_{c1} < b < b_{c2}$ que são os valores em que cooperadores e não cooperadores coexistem. Como mencionado anteriormente será focada a dinâmica do Replicador, para

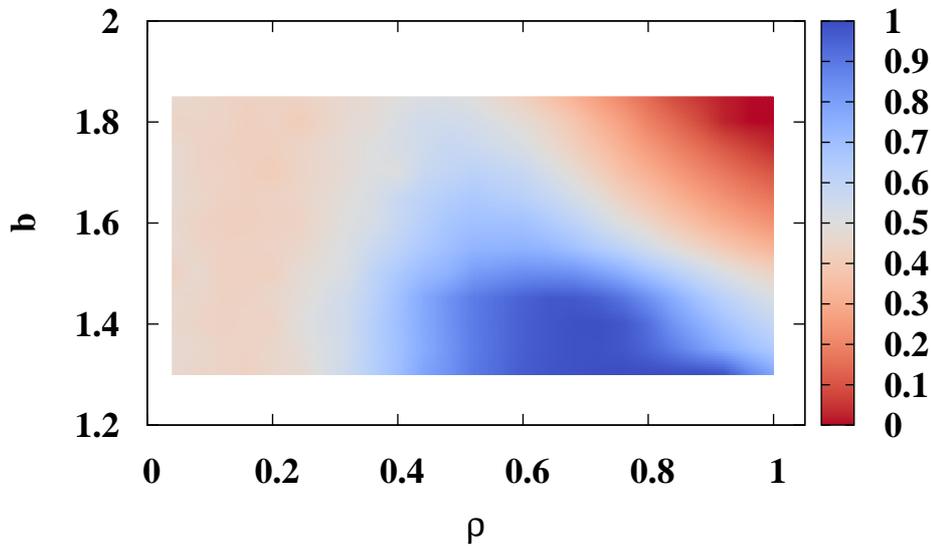


Figura 8 – Mapeamento da dinâmica do replicador com auto-interação, onde as cores são a densidade assintótica de cooperadores na população com o eixo x sendo a densidade da rede (rede possui buracos) e o y diferentes valores de b .

ela usam-se valores entre $1.3 < b < 1.8$ que são os valores em as populações coexistem. É importante também saber o comportamento da densidade de cooperadores em função de b quando se varia a densidade da rede. Mostra-se na Figura 8 um diagrama (novamente para a dinâmica do replicador) onde o eixo x é a densidade da rede ρ (número de indivíduos sobre o tamanho da rede), y a tentação b e as cores representam a densidade de cooperadores para os respectivos pontos. Como esperado, a densidade de cooperadores é maior para menores valores de b . É interessante notar que há uma região intermediária ($0.2 < \rho < 0.9$) em que a cooperação domina, para altos valores de b e altos valores de ρ a densidade de não cooperadores é maior.

3.3 Difusão Aleatória

Um parâmetro que caracteriza bem o sistema é a fração de cooperadores na população total ρ_c . Como quer-se estudar o ruído na forma de difusão aleatória, a rede possui espaços vazios, quanto mais espaços vazios na rede maior será a mobilidade dos indivíduos (para o caso com difusão), visto que mais indivíduos poderão difundir. Para analisar esse sistema varia-se o número de espaços vazios na rede e estuda-se a relação entre ρ_c e a densidade total da rede $\rho = \frac{n_c + n_d}{n_c + n_d + n_b}$ (n_b é o número de buracos na rede) para diferentes valores de b para a probabilidade de difusão $\sigma = 0.01$.

A primeira linha da Figura 9 mostra essa relação para a dinâmica do Replicador e de Fer-

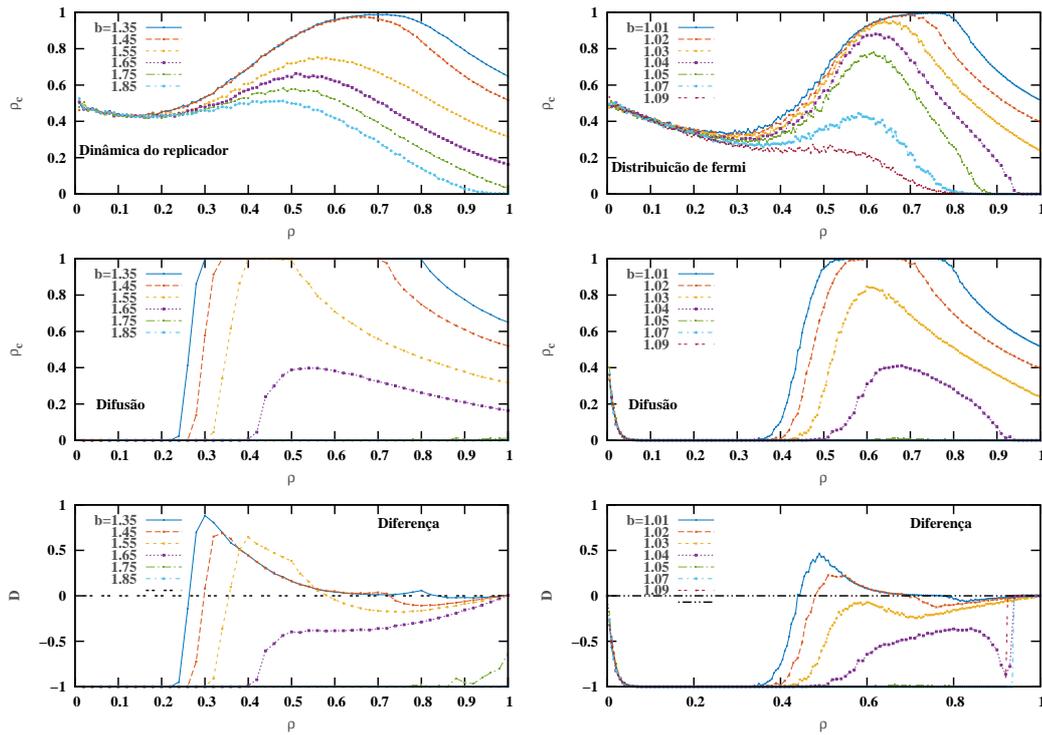


Figura 9 – Gráficos da densidade assintótica de cooperadores pela densidade da população (média sobre 50 amostras) com diferentes valores de b para a dinâmica de Fermi (coluna da esquerda) e do replicador (coluna da direita), para os casos sem (primeira linha), com (segunda linha) $\sigma = 0.01$ difusão aleatória e a diferença relativa D entre eles (terceira linha).

mi sem difusão aleatória (dinâmica original), enquanto a segunda linha mostra a relação com difusão aleatória (probabilidade de difundir $\sigma = 0.01$). Como se quer saber qual o impacto da difusão aleatória no sistema, se faz uma comparação dela com a dinâmica original, portanto a terceira coluna mostra a diferença relativa D entre elas, que dá uma ideia de ganho. Supondo duas dinâmicas a e b :

$$D = \frac{\rho_{\infty}^a - \rho_{\infty}^b}{\rho_{\infty}^b} \quad (3.1)$$

No caso (a) é o sistema com e (b) sem difusão aleatória. Para a dinâmica do replicador a difusão parece favorecer a cooperação apenas para alguns valores de ρ e b e desfavorece completamente para $\rho < 0.2$, onde a dinâmica com difusão vai a zero e a sem não. Para valores $b > 1.65$ a difusão sempre desfavorece a cooperação, a tendência é que quanto maior o valor de b menos a difusão favorece a cooperação. O fato de a difusão desfavorecer a cooperação para baixas densidades da rede pode ser resultado da desfragmentação dos *clusters* de cooperadores (que estariam isolados) quando um não cooperador difunde até eles. Para a dinâmica de Fermi, o comportamento para baixas densidades da rede se repete, assim como o gradual desfavorecimento da cooperação com o aumento de b , porém a difusão aleatória parece desfavorecer a cooperação muito rápido, o que pode

estar relacionado ao fato de que para essa dinâmica a população de não cooperadores começa a dominar para baixos valores de b . É importante também mencionar que para baixos valores de ρ , nos casos com difusão, a incerteza nos resultados é grande pois como há poucos indivíduos na rede, eles demoram um tempo muito grande para se encontrar e o sistema demora para convergir.

3.4 Diferentes valores de σ

Anteriormente foi feita uma análise apenas para a difusão aleatória com $\sigma = 0.01$, uma outra análise poderia ser feita para diferentes valores de σ , que é representada na Figura 10, onde observa-se que, em geral, quanto menor o valor de σ mais a difusão aleatória favorece a cooperação e que existe ainda um determinado valor de σ a partir do qual a difusão aleatória sempre desfavorece a cooperação. Para os valores grandes, esse é

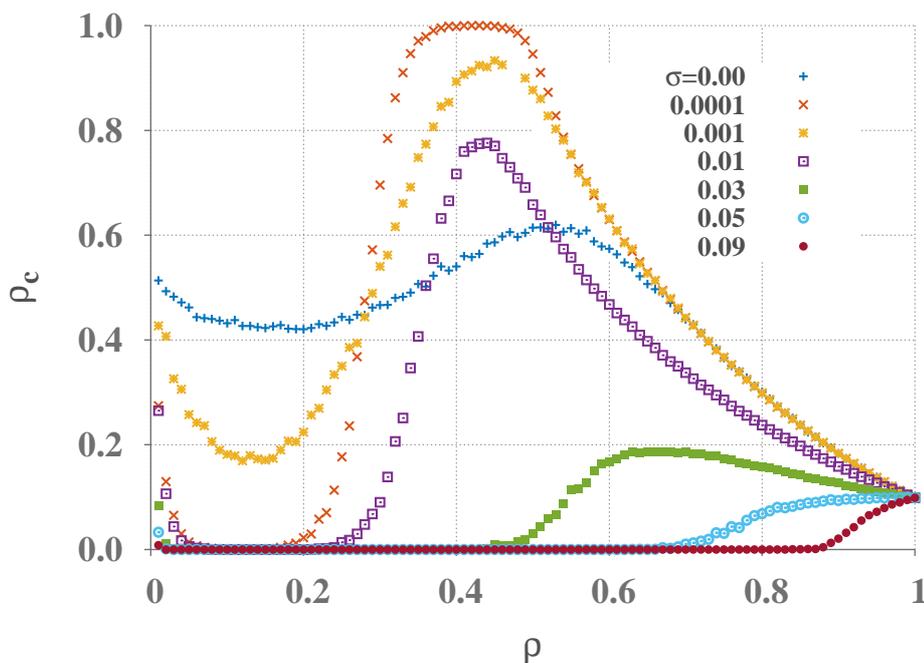


Figura 10 – Gráfico da densidade de cooperadores assintótica em função da densidade da população para a dinâmica do replicador com diferentes probabilidades de difusão para $b = 1.7$. Para $0.001 \leq \sigma \leq 0.9$ foram usado 10^5 passos temporais, porém aparentemente para baixos valores da rede para $\sigma = 0.001$ os sistema ainda não convergiu. Para $\sigma = 0.0001$ foi usado 10^6 passos e o sistema convergiu

um resultado esperado pois a probabilidade de o indivíduo se mover na rede é muito alta fazendo com que os aglomerados de cooperadores (*clusters*) se desfaçam e encontrem não cooperadores no caminho que o façam mudar de estratégia. A partir de agora será usada apenas a dinâmica do replicador para não precisar lidar com o ruído adicional de K da

dinâmica de Fermi. Até agora foi constatado que a difusão aleatória favorece a cooperação somente para alguns valores específicos de b e que quanto menor a probabilidade de difusão mais ela favorece a cooperação, a próxima seção irá tratar de uma perturbação na difusão direcionada.

3.5 Difusão Direcionada

Dentre as várias implementações, a difusão direcionada foi introduzida em 1.4, neste trabalho usamos apenas a utilitária, nos próximos trabalhos objetiva-se analisar as outras. Novamente, para estudar a difusão no sistema, dessa vez a direcionada, faz-se um gráfico que mostra a relação ente ρ_c e ρ mostrado na Figura 11:

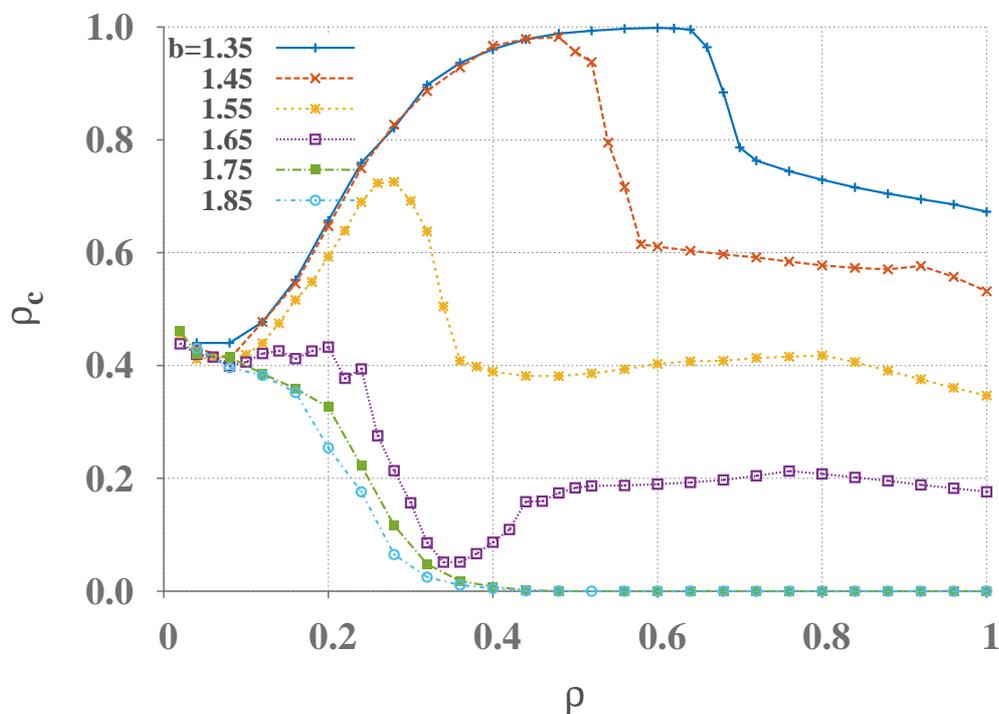


Figura 11 – Gráfico da densidade assintótica de cooperadores em função da densidade da população (50 amostras) para a dinâmica do replicador usando difusão direcionada (utilitária com $\gamma = 0.0$) para diferentes valores de b .

A figura 11 mostra que existe uma queda na densidade de cooperadores em uma determinada região da densidade da rede. Supõe-se que tal queda pode ser suavizada pela média que foi feita entre as 50 amostras. Objetivando descobrir o comportamento dessa queda para apenas uma amostra foi feito um gráfico (mostrado na Figura 12) com 5 amostras para $b = 1.45$ que aparentemente é o valor onde a queda é mais acentuada. Como resultado, obtemos que realmente existe uma queda brusca para valores que ficam aproximadamente entre $0.5 < \rho < 0.6$, esse é um resultado muito interessante e sua causa

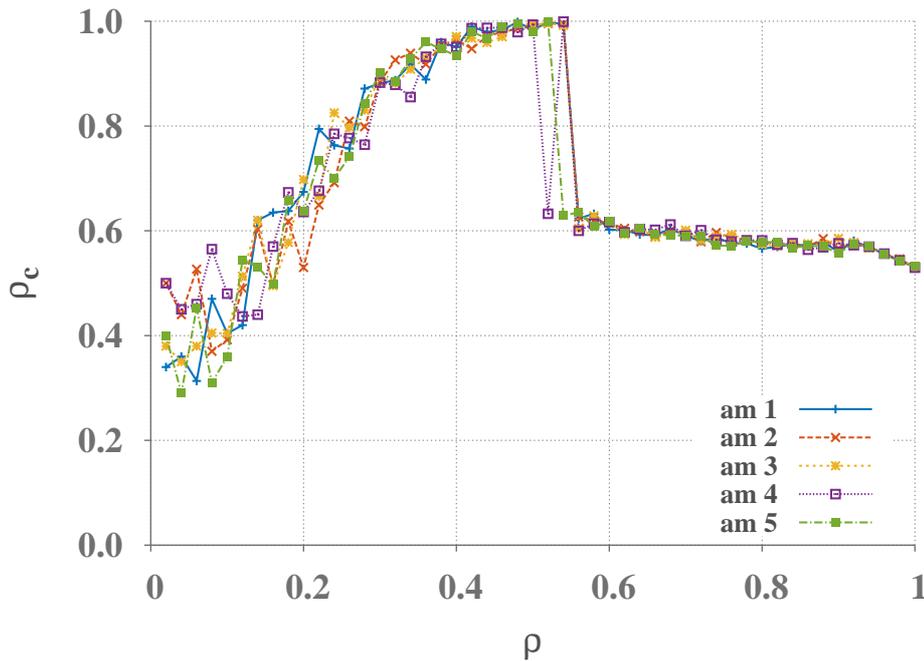


Figura 12 – Gráfico de 5 amostras da densidade assintótica de cooperadores em função da densidade da população para a dinâmica do replicador usando difusão direcionada utilitária com $\gamma = 0.0$ e $b = 1.45$.

será estudada nos próximos trabalhos.

Um fator importante que deve ser considerado é a convergência, pois a simulação com a difusão direcionada demora muito para convergir. Mesmo usando 10^6 passos temporais, o sistema ainda não convergiu completamente, por isso para algumas regiões de ρ os valores de ρ_c ainda não são os valores assintóticos. A Figura 6 mostra a convergência inclusive para $b = 1.45$, o sistema ainda não convergiu para valores antes da queda mencionada $0.5 < \rho < 0.6$, porém aparentemente o salto existe pois há uma diferença bem grande entre $\rho = 0.4$, que já convergiu há muito tempo e $\rho = 0.6$ onde o sistema não convergiu ainda. É importante ressaltar também que aparentemente os valores de ρ em que o sistema não converge são valores próximos da percolação aleatória da rede quadrada [12][13], não apenas para $\gamma = 0$ mas também para $\gamma = 0.01$ e $\gamma = 0.05$.

3.5.1 Diferença Relativa

Na seção 2.3 foi mostrada a diferença relativa entre as dinâmicas do Replicador e de Fermi para os casos com e sem difusão aleatória, agora foi apresentada a difusão direcionada e para saber seus efeitos sobre o sistema, se ela favorece ou não a cooperação comparada com os outros casos, faz-se um gráfico equivalente ao da terceira linha da Figura 9, comparando a difusão direcionada com a aleatória (Figura 13) e com o sistema original sem difusão (Figura 14).

A Figura 13 mostra o gráfico da diferença relativa entre a difusão aleatória e a difusão direcionada para a dinâmica do Replicador. Ela apresenta um comportamento interessante pois a forma para as linhas do gráfico (para os diferentes valores de b) são semelhantes, sendo negativo (direcionada favorece mais a cooperação) para valores baixos de ρ , crescendo rapidamente (aleatória começa a favorecer mais a cooperação) com o aumento de ρ e exibindo um máximo em determinado momento e voltando a diminuir posteriormente até chegar a zero. O valor $b = 1.55$ é o que possui o máximo mais elevado, onde a difusão aleatória favorece mais de 1.5 vezes a cooperação se comparada com a direcionada. A forma semelhante das linhas deve-se ao fato de que o gráfico da difusão direcionada (Figura 11) e da aleatória (Figura 9) possuem uma forma parecida, diferenciando em alguns pontos: para valores baixos de ρ_c onde a aleatória vai para zero e a direcionada não, quando a aleatória deixa de ser zero e cresce rapidamente e no momento em que a difusão direcionada se mantém mais ou menos constante e a aleatória decresce. Esses pontos somados desenharam a forma das linhas da Figura 13 e seu pico.

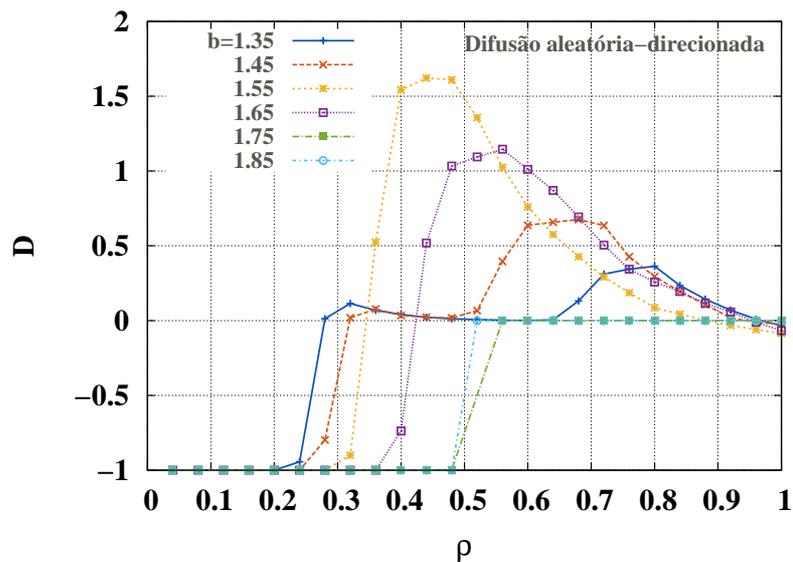


Figura 13 – Gráfico da diferença relativa entre as densidades de cooperadores resultantes da difusão aleatória e da direcionada ($\gamma = 0.0$) para a dinâmica do Replicador.

A Figura 14 mostra o gráfico da diferença relativa entre a dinâmica do Replicador com difusão direcionada e a dinâmica original sem difusão. Assim como na Figura 13, essa também apresenta um pico comum a $b = 1.35$, $b = 1.45$ e $b = 1.55$ chega muito próximo a esse pico, um indício que tal ponto é o da melhora máxima. Existe uma enorme diferença entre $b = 1.55$ e $b = 1.65$, o pico que antes era positivo passa a ser negativo e a partir daí a difusão direcionada começa a desfavorecer a cooperação. Determinando regiões, observa-se que a difusão direcionada favorece a cooperação entre $0.1 < \rho < 0.6$ porém apenas para $b = 1.35$, $b = 1.45$ e $b = 1.55$, para os outros valores de b a dinâmica sem

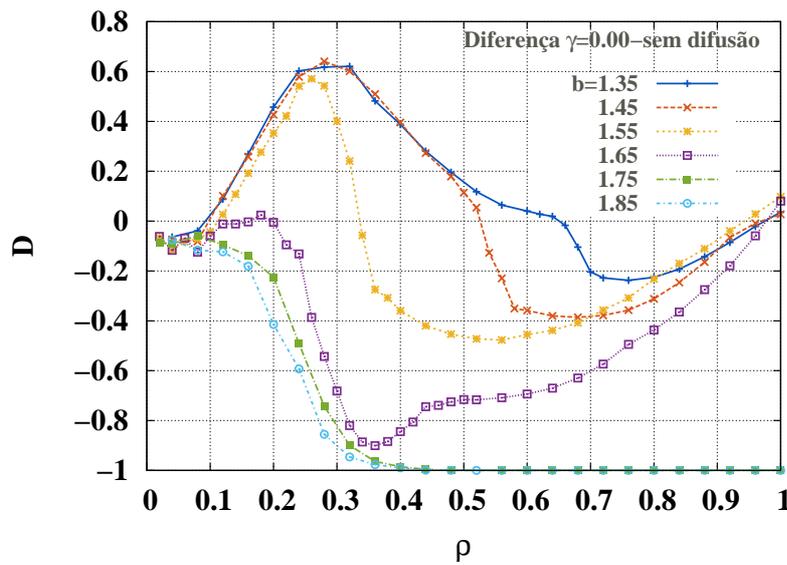


Figura 14 – Gráfico da diferença relativa entre as densidades de cooperadores resultantes da difusão direcionada ($\gamma = 0.0$) e da dinâmica original (sem difusão).

difusão favorece mais a cooperação. Portanto, assim como a difusão aleatória, a difusão direcionada favorece a cooperação apenas em uma determinada região.

3.6 Difusão Direcionada com perturbação aleatória

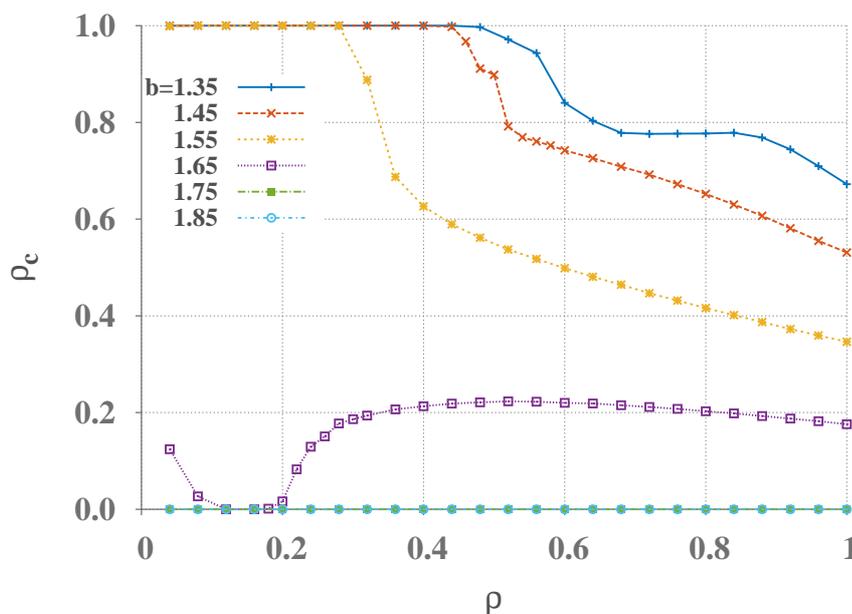


Figura 15 – Gráfico da densidade de cooperadores assintótica em função da densidade utilitária mais aleatória $\sigma = 0.01$ para diferentes valores de b com auto-interação, média sobre 50 amostras.

A Figura 11 mostra a difusão direcionada sem ruído. Agora adiciona-se um pequeno ruído na forma de difusão aleatória, assim o indivíduo poderá difundir para regiões de bem-estar menor que o dele com probabilidade γ , foram testados valores $\gamma = 0.01$ e $\gamma = 0.05$. A fim de entender o comportamento dessa dinâmica faz-se novamente um

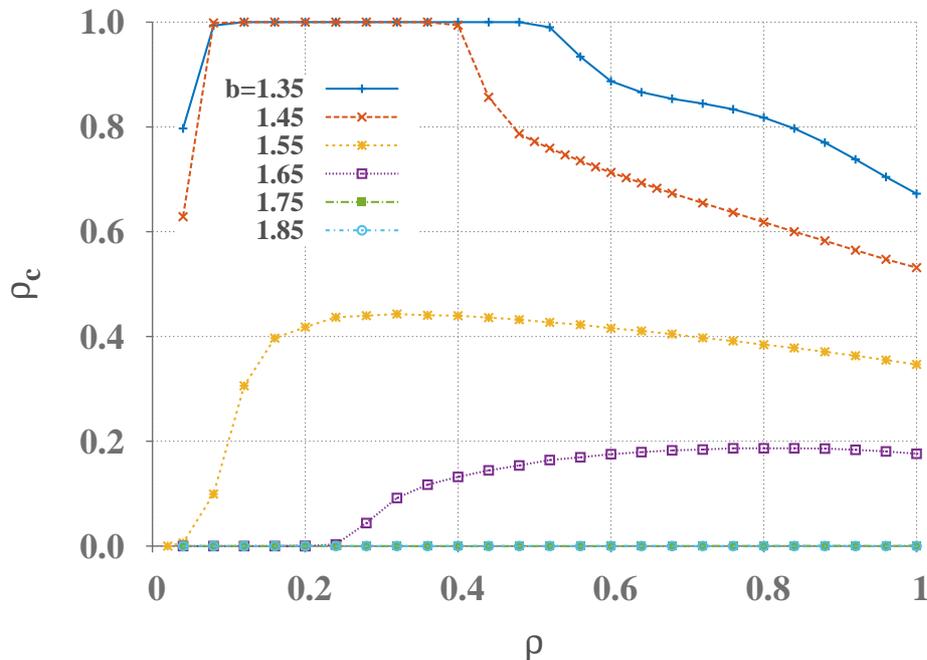


Figura 16 – Gráfico de ρ_c em função da densidade da população para a dinâmica do replicador, média sobre 50 amostras, usando difusão direcionada utilitária mais aleatória $\gamma = 0.05$ para diferentes valores de b com auto-interação.

gráfico de $\rho_c \times \rho$ para diferentes valores de b representado na Figura 15 ($\gamma = 0.01$) e na Figura 16 ($\gamma = 0.05$).

3.6.1 Diferença Relativa

Anteriormente analisaram-se as diferentes difusões fazendo a diferença relativa entre os casos estudados, agora que foi introduzida a difusão direcionada combinada com a aleatória repete-se o mesmo procedimento, compara-se a diferença relativa entre a difusão direcionada pura ($\gamma = 0.0$) e a direcionada perturbada ($\gamma = 0.01$), para entender o efeito da adição da difusão aleatória na direcionada. Primeiramente analisa-se a diferença relativa entre os casos de difusão direcionada com e sem difusão aleatória mostrado na Figura 17. Para $b = 1.65$ o gráfico apresenta um pico, a adição da difusão aleatória favorece mais a cooperação cerca de 3 vezes, esse ponto acaba mascarando um pouco o comportamento para $\rho_p > 0.5$, porém, se nos focarmos em $-0.8 < D < 0.8$ que são os valores máximos da Figura 14, a adição da difusão aleatória na direcionada favorece em geral a cooperação com exceção de alguma regiões.

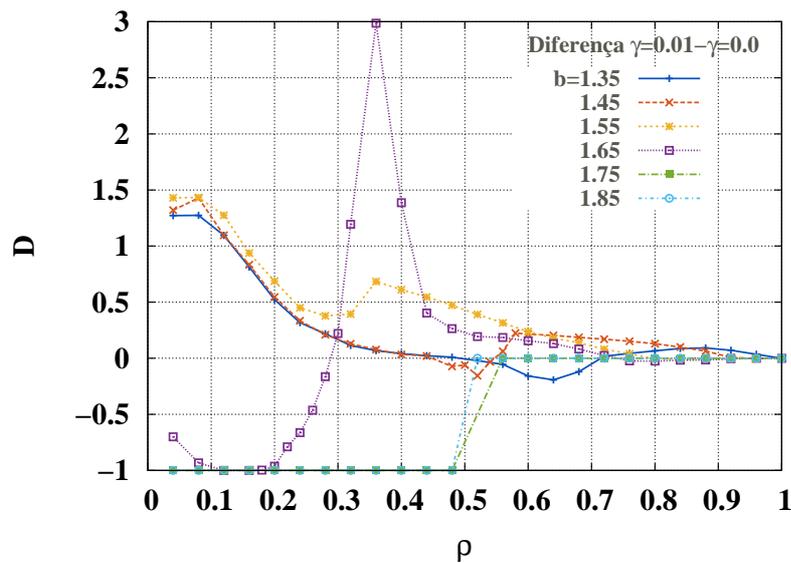


Figura 17 – Gráfico da diferença relativa entre a difusão direcionada com perturbação ($\gamma = 0.01$) menos a direcionada ($\gamma = 0.0$) para a dinâmica do Replicador.

Outra comparação a ser feita é sobre os diferentes valores da probabilidade de difusão aleatória γ , mostra-se a diferença relativa entre $\gamma = 0.01$ e $\gamma = 0.05$ na Figura 18.

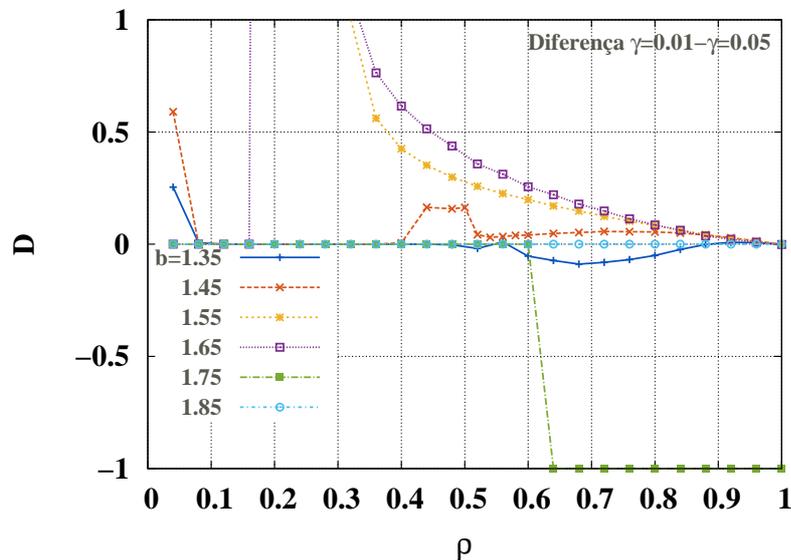


Figura 18 – Gráfico da diferença relativa entre a difusão direcionada com $\gamma = 0.01$ menos a $\gamma = 0.05$ para a dinâmica do Replicador.

Para o gráfico da Figura 18 ficaram de fora dois pontos (pois foi fixado $-1 \leq D \leq 1$), o $D = 163$ para $b = 1.55$ e o $D = 40$ para $b = 1.65$, pois eles atrapalhariam a observação dos outros pontos. O pico de $b = 1.55$ retrata a região em que a população de cooperadores domina para $\gamma = 0.01$ e que é muito baixa para $\gamma = 0.05$; o de $b = 1.65$

é consequência desse ponto estar localizado em valores de ρ_c muito pequenos, e como dividimos pelo segundo termo o valor da razão é alto. Ignorando esse fato e analisando o gráfico, concluímos que $\gamma = 0.01$ favorece mais a cooperação para $b = 1.45, 1.55$ e 1.65 . Apenas para uma pequena parte em $b = 1.35$, o $\gamma = 0.05$ favorece mais a cooperação. Para os outros valores de b , ρ_c é zero em ambos os sistemas. Conclui-se então que o aumento de γ desfavorece a cooperação, concordando com o que foi mostrado na seção 2.4 para σ .

3.7 Mapa

Para visualizar melhor as diferenças mencionadas anteriormente fazem-se gráficos de b pela densidade ρ da rede com pontos de diferentes cores dependendo das diferenças, eles nos dão uma ideia de tridimensionalidade e ajudam a entender para quais regiões de b e ρ cada tipo de difusão favorece mais a cooperação. Na Figura 19 usa-se apenas a diferença, não a diferença relativa, entre as densidades assintóticas de cooperadores dos sistemas, ou seja $D\rho_b$, objetivando visualizar uma outra perspectiva desvinculada ao ganho.

O gráfico *A* da Figura 19 mostra a diferença entre a difusão aleatória e a dinâmica original (sem difusão). Com ele visualiza-se que a difusão aleatória favorece a cooperação numa determinada região de ρ somente para valores de tentação próximos a $b < 1.6$, para a rede quase cheia $\rho \approx 1$ o quadro muda um pouco, a dinâmica original parece favorecer um pouco mais a cooperação (região vermelha).

O gráfico *B* mostra a diferença entre a difusão direcionada para $\gamma = 0$ e a dinâmica original. Conclui-se com ele que a difusão direcionada favorece a cooperação para uma maior área no gráfico se comparada com a aleatória (gráfico *A*), porém desfavorecendo pra altas densidades onde aparece uma região vermelha que não aparece em *A*. Para baixas densidades a difusão direcionada acaba favorecendo mais a cooperação dado que na dinâmica original quase todos os indivíduos estão isolados. Na aleatória esse efeito não aparece pois provavelmente ela irá desmanchar os aglomerados de cooperadores (*clusters*), como na direcionada as regiões de cooperadores têm um ganho maior que regiões de não cooperadores, ela acaba favorecendo a manutenção dos aglomerados.

Até agora comparou-se a difusão aleatória (*A*) e a direcionada (*B*) com a dinâmica original. No entanto o interessante é descobrir qual dessas difusões favorece mais a cooperação, para isso visualiza-se o gráfico *E*, que mostra a diferença entre a difusão aleatória para ($\gamma = 0.0$) e a direcionada. Deduz-se que a aleatória favorece a cooperação se compara com a direcionada para valores de maior densidade da rede, enquanto a direcionada favorece para densidades mais baixas da rede a abrange uma maior área, dessa forma a direcionada parece favorecer um pouco mais a cooperação do que a aleatória.

No gráfico *C* a comparação é entre a difusão direcionada com ruído ($\gamma = 0.01$) e a dinâmica original. Com base nele conclui-se que a introdução do ruído na difusão direcionada

favorece mais a cooperação do que nas difusões até aqui comparadas pois a área azul deste gráfico é maior do que a da direcionada (B) e da aleatória (A) com a dinâmica original. Para descobrir se realmente o ruído favorece a cooperação faz-se o gráfico F , que mostra explicitamente a diferença entre a difusão direcionada com $\gamma = 0.01$ e $\gamma = 0$. Como resultado obtêm-se que a constatação anterior é verdadeira, pois a área azul (que representa a direcionada com $\gamma = 0.01$) é maior que a vermelha (que representa a direcionada com $\gamma = 0$).

O gráfico D mostra a diferença entre a difusão direcionada com ruído $\gamma = 0.05$ e a dinâmica original, conclui-se que para esse valor de γ a introdução do ruído continua favorecendo a cooperação, porém favorece menos que a direcionada com $\gamma = 0.01$, o que reafirma o que foi concluído em 2.4 (quanto menor o valor de γ mais a cooperação é favorecida).

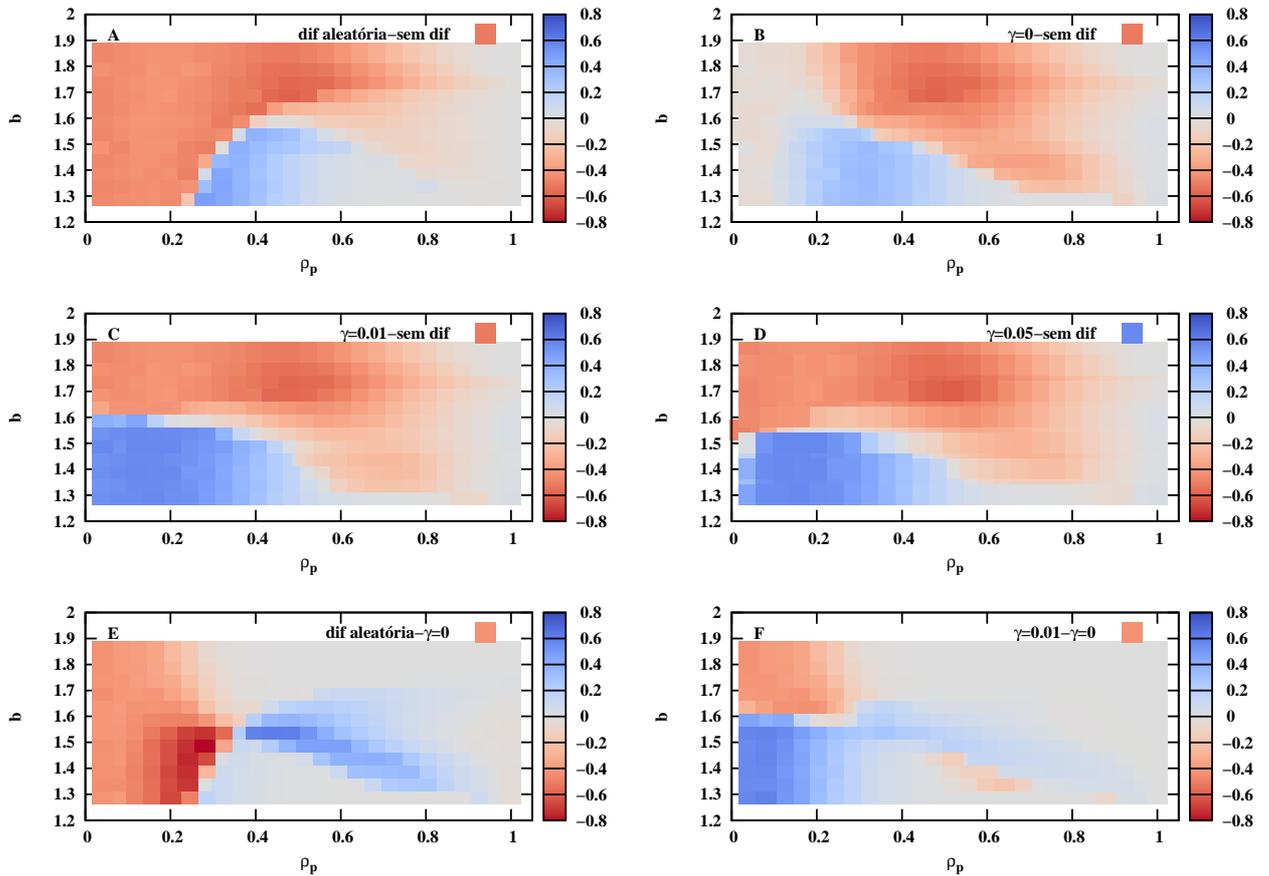


Figura 19 – Gráficos de b pela densidade da rede com pontos de diferentes cores dependendo das diferenças de ρ_c para a dinâmica do Replicador em diferentes casos. **Coluna da esquerda:** O gráfico A mostra a diferença entre a difusão aleatória e a dinâmica original (sem difusão), o C a diferença entre a difusão direcionada combinada com a aleatória e a dinâmica original e o E a diferença entre a difusão aleatória pura e a direcionada. **Coluna da direita:** O gráfico B mostra a diferença direcionada e a dinâmica original, o D a diferença entre a difusão direcionada combinada com a aleatória e a dinâmica original e o F gráfico a diferença entre a dinâmica direcionada combinada com a aleatória para $\gamma = 0.01$ e $\gamma = 0.05$.

Conclusão

Existem dois tipos de difusão: A aleatória e a direcionada, na primeira o indivíduo pode difundir livremente na rede (com buracos) com uma dada probabilidade σ , na segunda ele difundirá apenas para regiões em que o ganho é maior, ou seja, de certa forma é um tipo de difusão inteligente (inspirado em [14]). A implementação da difusão aleatória (representada por γ) na difusão direcionada é uma forma de introduzir ruído na rede, ele pode ser interpretado como uma decisão irracional pois o indivíduo pode difundir de um lugar onde ele está ganhando para outro que ele vai perder. Foram analisadas as dinâmicas de Fermi e do replicador com e sem difusão aleatória pura, e para a segunda foi feito um estudo com a difusão direcionada com e sem ruído objetivando descobrir para quais casos a cooperação é favorecida. Para a difusão aleatória com probabilidade de difusão $\sigma = 0.01$ a cooperação é favorecida apenas para uma determinada região, porém quanto menor o valor de σ mais ele favorece a cooperação. A difusão direcionada usada foi a utilitária, que considera o bem-estar como sendo a soma dos ganhos, ela favorece um pouco mais a cooperação do que a aleatória. Quando se adiciona um ruído na difusão direcionada (primeiramente $\gamma = 0.01$), a cooperação é mais favorecida se comparada com a difusão aleatória pura e com a direcionada pura, desse modo o ruído favorece a cooperação. Se aumentarmos o ruído para $\gamma = 0.05$ ele continua favorecendo a cooperação, porém menos. Para os próximos trabalhos pretende-se fazer uma análise para os outros tipos de difusão aleatória e também entender a causa dos resultados obtidos.

Referências

- [1] Axelrod, R.; Hamilton, W. “*The evolution of cooperation*” Science **221** 4489 (1981).
- [2] Fehr, E.; Ernst, F. “*The Nature of human altruism*”. Nature **425**, 785 (2003).
- [3] Szabó, G.; and Töke, C. “*Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice*”, Phys. Rev. E **58**, 69 (1998).
- [4] Vainstein, MH.; Arenzon, JJ. “*Disordered environments in spatial games*”, Phys. Rev. E **64**, 051905 (2001).
- [5] Vainstein, MH.; Silva, ATC.; Arenzon, JJ. “*Does mobility decrease cooperation?*”, J. Theor. Biol **244**, 722 (2007).
- [6] Sicardi, EA.; Fort, H.; Vainstein, MH.; Arenzon, JJ. “*Random mobility and spatial structure often enhance cooperation?*”, J. Theor. Biol **256**, 240 (2009).
- [7] Meloni, S.; Buscarino, A.; Fortuna, L.; et al. “*Effects of mobility in a population of prisoner’s dilemma players*”, Phys. Rev. E, **79**, 067101 (2009).
- [8] Helbing, D.; Yu, W. “*The outbreak of cooperation among success-driven individuals under noisy conditions*”, PNAS **106** 3680 (2009).
- [9] Jiang, L.; Wang, W.; Lai, Y. “*Role of adaptive migration in promoting cooperation in spatial games*” Phys. Rev. E, **81**, 036108 (2010).
- [10] Zhang, G.; Sun, Q.; Wang, L. “*Noise-induced enhancement of network reciprocity in social dilemmas*”, CHAOS SOLITON FRACT **51** 31 (2013).
- [11] Cressmana, R.; Tao, Y. “*The replicator equation and other game dynamics*”, PNAS, **111** 10810 (2014).
- [12] Wang, Z.; Szolnokin, A.; Perc, M. “*If players are sparse social dilemmas are too: Importance of percolation for evolution of cooperation*” Sci. Rep **2** 369 (2012).
- [13] Vainstein, MH.; Arenzon, JJ. “*Spatial social dilemmas: Dilution, mobility and grouping effects with imitation dynamics*”, Physica A **394**, 145 (2014).
- [14] Li, Y; Ye, H.; Zhang, H. “*Evolution of cooperation driven by social-welfare-based migration*”, Physica A **445** 48 (2016)
- [15] John Stuart Mill, George Sher “*Utilitarianism*” Hackett Pub., (2001)
- [16] Herbert Gintis “*Game Theory Evolving*” Princeton University Press, (2000)