

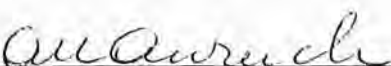
**ANÁLISE DE BARRAGENS DE GRAVIDADE DE CONCRETO  
CONSIDERANDO A FASE CONSTRUTIVA E A INTERAÇÃO  
DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO-FUNDAÇÃO**

JOSÉ MILTON DE ARAÚJO

Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre  
Novembro de 1995

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Armando Miguel Awruch

Orientador



Prof. Jorge Daniel Riera

Coordenador do CPGEC

#### BANCA EXAMINADORA

- Prof. Armando Miguel Awruch (Orientador)

D. Sc. - COPPE/UFRJ

- Prof. Guillermo Juan Creus

D. Sc. - COPPE/UFRJ

- Prof. João Cyro André

D. Sc. - USP

- Prof. Victor Souza Lima

D. Sc. - USP

Dedico  
à minha esposa Patrícia  
e aos meus filhos Thiago e Lucas

## AGRADECIMENTO

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho e, em especial, ao prof. Armando Miguel Awruch, os meus sinceros agradecimentos.



## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS .....	viii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiii
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
1 - INTRODUÇÃO .....	1
2 - COMPORTAMENTO TÉRMICO DO CONCRETO MASSA.....	4
2.1 - Introdução .....	4
2.2 - Tensões térmicas e fissuração.....	5
2.3 - Análise bidimensional da transferência de calor.....	7
2.4 - Forma integral da equação de transferência de calor .....	10
2.5 - Condições de contorno .....	12
2.6 - Consideração do processo construtivo .....	14
2.7 - Algoritmo para integração das equações diferenciais .....	15
3 - MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO.....	18
3.1 - O comportamento mecânico do concreto .....	18
3.2 - Modelos constitutivos para análise bidimensional .....	20
3.3 - Comportamento do concreto em tração.....	22
3.4 - Modelos de fratura para o concreto.....	27
3.5 - Análise de uma barra sob tração pura .....	30
4 - FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA A ANÁLISE DE BARRAGENS DE CONCRETO .....	36
4.1 - Considerações gerais.....	36
4.2 - Escolha da ordem da integração numérica .....	37
4.3 - Definição do campo de tensões .....	40
4.4 - Critério de fissuração .....	42
4.5 - Objetividade do critério de fissuração.....	44
4.6 - Critério de ruptura por esmagamento .....	49
4.7 - Algoritmo para o cálculo das tensões .....	51

5 - COMPORTAMENTO REOLÓGICO DO CONCRETO .....	56
5.1 - Introdução .....	56
5.2 - Modelos lineares para a fluência do concreto .....	57
5.3 - Métodos numéricos para a consideração da fluência do concreto .....	58
5.4 - Modelo reológico para o concreto .....	62
5.5 - Equação constitutiva incremental .....	67
5.6 - O emprego do método dos elementos finitos .....	72
6 - INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO-FUNDAÇÃO .....	76
6.1 - Introdução .....	76
6.2 - Equações do movimento do fluido .....	77
6.3 - Condições de contorno para o fluido .....	80
6.4 - Aplicação do método dos elementos finitos .....	84
6.5 - Equações do movimento da barragem e da fundação .....	86
6.6 - Integração das equações do movimento .....	89
7 - ANÁLISE ESTRUTURAL PROBABILÍSTICA .....	94
7.1 - Introdução .....	94
7.2 - Os métodos para análise probabilística .....	95
7.3 - Geração artificial do sismo .....	96
7.4 - Características do processo estocástico .....	101
7.5 - Geração aleatória das propriedades dos materiais .....	110
7.6 - O método de Monte Carlo .....	113
7.7 - Verificação da segurança da estrutura .....	116
8 - CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS .....	120
8.1 - Identificação da barragem .....	120
8.2 - Camadas de concretagem .....	120
8.3 - Propriedades térmicas .....	122
8.4 - Condições de contorno do problema térmico .....	123
8.5 - Propriedades mecânicas dos concretos .....	124
8.6 - Efeito da taxa de deformação nas propriedades do concreto .....	128
8.7 - Caracterização do maciço rochoso .....	131
8.8 - Segurança contra o escorregamento .....	133
8.9 - Malhas de elementos finitos .....	134
9 - RESULTADOS .....	137

9.1 - Estabilidade do método de integração das equações de condução de calor.....	137
9.2 - Distribuição de temperatura na barragem .....	138
9.3 - Segurança contra a fissuração térmica .....	142
9.4 - Determinação dos incrementos de tempo para a análise sísmica .....	145
9.5 - Influência da duração do sismo .....	149
9.6 - Influência do conteúdo de frequências .....	152
9.7 - Influência da amplitude do sismo .....	154
9.8 - Influência da flexibilidade da fundação .....	155
9.9 - Influência da coesão e da subpressão na segurança quanto ao escorregamento ...	158
9.10 - Influência da interação com o fluido .....	159
9.11 - Efeito das tensões térmicas na resposta dinâmica.....	161
9.12 - O emprego do método de Monte Carlo .....	162
10 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	169
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	173

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.4.1 - Coeficientes $A_{\mu}$ .....	65
Tabela 8.2.1 - Temperaturas de lançamento .....	121
Tabela 8.3.1 - Propriedades térmicas.....	122
Tabela 8.5.1 - Resistências à compressão .....	125
Tabela 9.7.1 - Influência da amplitude.....	154
Tabela 9.8.1 - Frequências naturais e coeficientes de amortecimento.....	155
Tabela 9.9.1 - Coeficientes de segurança contra o escorregamento.....	158
Tabela 9.11.1 - Influência das tensões térmicas .....	162

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2.1 - Resfriamento em parede de concreto espessura=30cm) .....	6
Figura 2.2.2 - Resfriamento em parede de concreto (espessura=15m).....	6
Figura 2.2.3 - Resfriamento em parede de concreto (espessura=100m).....	7
Figura 2.3.1 - Fluxo de calor bidimensional.....	8
Figura 2.6.1 - Lançamento da primeira camada de concreto .....	14
Figura 3.1.1 - Diagrama tensão-deformação em compressão simples.....	18
Figura 3.1.2 - Envoltória de ruptura bidimensional.....	19
Figura 3.3.1 - Diagrama tensão-deformação com ruptura brusca .....	22
Figura 3.3.2 - Relação tensão-deslocamento em tração .....	23
Figura 3.3.3 - Representação dos trechos ascendente e descendente da resposta em tração.....	24
Figura 3.3.4 - Determinação da abertura da fissura.....	25
Figura 3.3.5 - Relação tensão-abertura da fissura .....	25
Figura 3.3.6 - Comportamento sob carregamento cíclico.....	26
Figura 3.4.1 - Modelo de Bazant e Oh .....	28
Figura 3.5.1 - Carregamento e tensões na barra.....	30
Figura 3.5.2 - Discretização da barra em n elementos.....	31
Figura 3.5.3 - Determinação do comprimento característico .....	33
Figura 3.5.4 - Influência do gradiente de tensões.....	34
Figura 3.5.5 - Influência do parâmetro K .....	35
Figura 3.5.6 - Influência da ordem da integração numérica.....	35
Figura 4.2.1 - Camada de concreto sob fluxo de calor vertical.....	38
Figura 4.2.2 - Tensões $\sigma_x$ para diferentes ordens de integração.....	39
Figura 4.5.1 - Geometria e carregamento da viga.....	44
Figura 4.5.2 - Malhas de elementos finitos da viga .....	45
Figura 4.5.3 - Resultados para as diferentes malhas da viga.....	46
Figura 4.5.4 - Resultados para a função $I'_1(y)$ .....	48
Figura 4.5.5 - Resultados para a função $I'_2(y)$ .....	48



Figura 4.5.6 - Resultados para a função $I_3'(y)$ .....	49
Figura 4.7.1 - Comportamento pós-fissuração .....	54
Figura 5.4.1 - Cadeia de Kelvin .....	63
Figura 6.3.1 - Sistema barragem-reservatório-fundação .....	81
Figura 6.5.1 - Sistema barragem-fundação .....	86
Figura 7.3.1 - Sismo de baixa frequência .....	100
Figura 7.3.2 - Sismo de alta frequência .....	100
Figura 7.4.1 - Variação de $r$ com o conteúdo de frequências .....	105
Figura 7.4.2 - Variância do processo $X(t)$ .....	106
Figura 7.4.3 - Função de autocorrelação do processo $X(t)$ .....	107
Figura 7.4.4 - Probabilidade acumulada do processo $X(t)$ .....	110
Figura 8.1.1 - Seção típica do muro de transição direito .....	121
Figura 8.2.1 - Zoneamento do concreto .....	122
Figura 8.3.1 - Coeficiente de rendimento térmico .....	124
Figura 8.5.1 - Variação da resistência à compressão com a idade .....	126
Figura 8.5.2 - Curvas de fluência para o concreto F152 .....	127
Figura 8.5.3 - Variação da retração autógena .....	128
Figura 8.7.1 - Maciço rochoso sob o MTD .....	132
Figura 8.8.1 - Consideração da subpressão .....	134
Figura 8.9.1 - Malha do maciço rochoso .....	135
Figura 8.9.2 - Malha do reservatório .....	135
Figura 8.9.3 - Malha do MTD .....	136
Figura 9.1.1 - Influência do parâmetro $\theta$ .....	137
Figura 9.2.1 - Influência da espessura das camadas .....	138
Figura 9.2.2 - Influência da pré-refrigeração do concreto .....	139
Figura 9.2.3 - Influência dos intervalos de lançamento .....	140
Figura 9.2.4 - Influência da cura .....	140
Figura 9.2.5 - Temperaturas médias na fase construtiva .....	141
Figura 9.2.6 - Temperaturas médias 1 ano após a construção .....	142
Figura 9.3.1 - Coeficientes de segurança contra a fissuração térmica (2 camadas) .....	143
Figura 9.3.2 - Coeficientes de segurança da camada 1 .....	144
Figura 9.3.3 - Coeficientes de segurança contra a fissuração térmica (obra concluída) .....	145
Figura 9.4.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem .....	147

Figura 9.4.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento.....	148
Figura 9.4.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento .....	148
Figura 9.4.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados .....	149
Figura 9.5.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função da duração do sismo .....	150
Figura 9.5.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função da duração do sismo .....	150
Figura 9.5.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função da duração do sismo .....	151
Figura 9.5.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função da duração do sismo .....	151
Figura 9.6.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função do conteúdo de frequências do sismo .....	152
Figura 9.6.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função do conteúdo de frequências do sismo .....	153
Figura 9.6.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função do conteúdo de frequências do sismo .....	153
Figura 9.6.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função do conteúdo de frequências do sismo .....	154
Figura 9.8.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso.....	156
Figura 9.8.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso .....	156
Figura 9.8.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso .....	157
Figura 9.8.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso .....	157
Figura 9.10.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem .....	159
Figura 9.10.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento.....	160
Figura 9.10.3 - Variação da pressão na base da barragem .....	161
Figura 9.12.1 - Coeficientes de segurança obtidos em cada simulação .....	163
Figura 9.12.2 - Valor esperado dos coeficientes de segurança em função do tamanho da amostra .....	164

Figura 9.12.3 - Desvio padrão dos coeficientes de segurança em função do tamanho da amostra .....	164
Figura 9.12.4 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra o escorregamento .....	165
Figura 9.12.5 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra o esmagamento .....	166
Figura 9.12.6 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra a fissuração .....	166
Figura 9.13.7 - Confiabilidade quanto a fissuração sísmica .....	168



## LISTA DE SÍMBOLOS

$c$	calor específico
$C'$	velocidade do som no fluido
$E$	módulo de elasticidade
$E_c$	módulo de deformação longitudinal do concreto em compressão
$E_f$	módulo de elasticidade longitudinal da falha do maciço
$E_t$	módulo de deformação longitudinal do concreto em tração
$E_r$	módulo de elasticidade longitudinal da rocha
$E_\mu$	módulo de elasticidade dos elementos da cadeia de Kelvin
$f_c$	resistência à compressão simples
$f_t$	resistência à tração simples
$G$	módulo de elasticidade transversal
$G_f$	energia de fratura específica
$h$	coeficiente de transferência superficial de calor
$J(t, t')$	função de fluência
$k$	condutividade térmica
$R(t, t')$	função de relaxação
$V(t')$	função de envelhecimento
$\alpha$	coeficiente de dilatação térmica
$\beta$	difusividade térmica
$\eta_\mu$	viscosidade dos elementos da cadeia de Kelvin
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	densidade
$\tau_\mu$	tempos de retardamento da fluência

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é a análise de barragens de gravidade de concreto desde a fase da sua construção até sua completa entrada em serviço. Inicialmente é feita a análise da fase construtiva, onde o problema fundamental é devido às tensões térmicas decorrentes do calor de hidratação. O método dos elementos finitos é empregado para a solução dos problemas de transferência de calor e de tensões. A influência da construção em camadas é introduzida através da redefinição da malha de elementos finitos, logo após o lançamento de cada camada de concreto.

Uma atenção especial é dada ao problema de fissuração em estruturas de concreto simples. Alguns modelos usuais são apresentados, discutindo-se a eficiência dos mesmos. Os modelos de fissuração distribuída têm sido preferidos, em virtude dos vários inconvenientes apresentados pelas formulações discretas. Esses modelos, entretanto, fornecem resultados dependentes da malha de elementos finitos e alguma consideração adicional deve ser feita para corrigir essas distorções. Normalmente, tenta-se corrigir esse problema através da adoção de uma resistência à tração minorada que é definida em função da energia de fratura do material. Neste trabalho, é demonstrado que esse procedimento não é satisfatório e é proposta uma nova formulação para a análise de grandes estruturas de concreto.

A análise das tensões na etapa de construção da barragem é feita com o emprego de um modelo constitutivo viscoelástico com envelhecimento para o concreto. Em virtude do envelhecimento, a matriz de rigidez da estrutura é variável no tempo, devendo ser redefinida e triangularizada em cada instante. Isto leva a um grande esforço computacional, sobretudo, quando a barragem é construída em muitas camadas. Para evitar esse inconveniente, adota-se um procedimento iterativo que permite que a matriz de rigidez seja redefinida em poucas iterações de referência.

Numa segunda etapa da análise, a barragem é submetida à pressão hidrostática e a uma excitação sísmica. A análise dinâmica é realizada considerando-se o movimento do sistema acoplado barragem-reservatório-fundação. O sismo é considerado um processo estocástico não estacionário e a segurança da estrutura é determinada em relação aos principais modos de falha.

## ABSTRACT

Analysis of concrete gravity dams during their construction stages and when they are subjected to seismic loads is the objective of this work.

Initially, thermal stresses due to hydration heating are computed using the finite element method to solve the heat transfer and the mechanical problems, respectively. After each concrete layer is added during the construction stage, the finite element mesh is redefined.

Special attention is given to concrete cracking. Some usual models are presented and their efficiency are discussed. As several difficulties arise when a discrete formulation is used, a distributed model is preferred. Results obtained with distributed cracking formulations are usually dependent of the finite element mesh employed in the system; thus, additional assumptions may be used in order to avoid such distortions. Commonly, an equivalent tensile strength defined as a function of the material fracture energy is used, but this procedure is not satisfactory and a new formulation for large concrete structures is proposed in this work.

Stress analysis during construction stages is carried out using a viscoelastic constitutive model including aging effects. As in this case the stiffness matrix is time dependent, an iterative procedure defining the coefficient matrix of the algebraic systems of equations only in few time steps is used in order to avoid a significative computational effort.

In a second stage, the concrete gravity dam is subjected to hydrostatic pressure and to a non stationary stochastic earthquake excitation. The dynamic analysis is accomplished considering the coupled system dam-reservoir-foundation and structural safety is determined with respect to the main failure modes.

## 1. INTRODUÇÃO

A construção de barragens no mundo data dos primórdios da civilização. Desde cedo, o homem aprendeu a utilizar os recursos hídricos disponíveis, represando os leitos dos rios com o fim de abastecimento d'água, irrigação e proteção contra inundações.

Com o desenvolvimento das zonas urbanas e a diversificação das atividades econômicas, a construção de barragens passou a ser motivada, também, pela necessidade de geração de energia elétrica.

No mundo antigo, as barragens eram compostas por duas paredes de alvenaria de pedra, uma a montante e outra a jusante. O espaço entre as paredes era preenchido com argila compactada contendo, por vezes, blocos de pedra. Com o advento do cimento Portland, produzido em 1845 por Isaac Johnson, o concreto passou a ser usado tanto para o enchimento do núcleo das barragens de alvenaria ou para a construção de suas paredes, quanto no interior das barragens de terra<sup>[88]</sup>.

A partir da Segunda Guerra Mundial, várias barragens de concreto foram construídas no Brasil. Foi a partir dessa época que obras importantes foram executadas, como as das usinas de Paulo Afonso (1954), a de Ernestina (1957) - a primeira barragem do mundo em concreto protendido - e a de Funil (1969) - com barragem em abóbada de concreto com dupla curvatura<sup>[32]</sup>.

A construção das grandes barragens, com um grande volume de concreto, levou ao desenvolvimento de tecnologias especialmente aplicadas ao concreto massa.

Devido ao grande calor gerado pela hidratação do cimento, com a conseqüente possibilidade de fissuração do concreto, uma atenção especial deve ser dada a esse fenômeno.

Com vistas a reduzir a geração de calor, um pequeno consumo de cimento passou a ser empregado, substituindo parte do mesmo por pozolana. Em 1973, entrou em operação a Usina Hidrelétrica de Ilha Solteira, na qual o consumo de cimento chegou ao mínimo de 63 kg/m<sup>3</sup>. Mesmo assim, o concreto obtido apresentou uma resistência característica à compressão de 10 MPa aos 28 dias de idade<sup>[32]</sup>.

Para minimizar os efeitos da temperatura decorrente da hidratação, passou-se a utilizar a técnica do resfriamento dos agregados. Em geral, essa medida é acompanhada da adição de água gelada e de gelo em escamas na massa de concreto. Essa prática de pré-



refrigeração passou a fazer parte da tecnologia do concreto massa, sendo utilizada na maioria das grandes barragens construídas nas últimas décadas.

Em virtude das conseqüências catastróficas que a ruína de uma grande barragem pode trazer, uma atenção especial deve ser dada à segurança da estrutura. Vários fatores podem levar à ruína de uma barragem, dentre eles, sua fissuração excessiva, deslizamentos e deslocamentos de fâlas do maciço rochoso, alta subpressão e excitação sísmica<sup>1311</sup>.

Dessa forma, a verificação da segurança deve ser feita considerando a interação da barragem com o maciço rochoso e com a água do reservatório. Para isso, torna-se necessária a elaboração de modelos constitutivos consistentes para o concreto e o maciço, bem como a correta consideração da massa de água do reservatório na vibração da barragem.

Os altos custos de execução, em virtude das grandes dimensões da obra, justificam qualquer tentativa de otimização do projeto estrutural. A título de exemplo, a economia de 1% no consumo de concreto da barragem de Itaipu seria suficiente para a construção de cerca de 500.000m<sup>2</sup> da estrutura de edifícios residenciais<sup>1321</sup>.

A crescente necessidade de geração de energia elétrica, fator indispensável ao desenvolvimento da humanidade, justifica todo e qualquer esforço no sentido de aperfeiçoar as técnicas construtivas e os métodos de cálculo de barragens. O caráter renovável da fonte geradora de energia hidrelétrica, por si só, motiva qualquer iniciativa de desenvolvimento dessa área.

O objetivo deste trabalho é a análise de barragens de gravidade de concreto, considerando sua interação com o maciço rochoso e com a água do reservatório. Os principais fatores que influenciam no comportamento e na segurança dessas estruturas são considerados. Toda a análise é feita com o emprego do método dos elementos finitos.

Uma questão que, eventualmente, pode ser discutida é a validade do modelo bidimensional que é tradicionalmente empregado para estruturas deste tipo. Esta questão foi enfrentada no início do desenvolvimento deste trabalho e, para isso, foi desenvolvido um programa que permite realizar uma análise dinâmica tridimensional da barragem considerando, também, a interação com o maciço rochoso. Diversas simulações foram realizadas, variando-se as propriedades do concreto e do maciço e comparando os resultados com os obtidos com a análise bidimensional. Nenhum efeito tridimensional importante foi detectado, o que permitiu concluir que o modelo bidimensional é perfeitamente satisfatório para a análise de barragens de gravidade de concreto. Em vista disto, neste trabalho a estrutura da barragem, o maciço

rochoso e o reservatório, são discretizados empregando-se elementos finitos bidimensionais isoparamétricos quadráticos de oito nós.

Inicialmente é feita uma análise da geração e dissipação de calor na barragem, considerando as fases construtivas (construção em camadas). Simultaneamente é realizada a análise das tensões na barragem, considerando-se o seu peso próprio, a retração, a fluência e os gradientes de temperatura. Um modelo viscoelástico com envelhecimento, com propriedades dependentes da temperatura, é adotado para o concreto.

Nessa fase, o problema fundamental é o da fissuração do concreto. Diversos modelos têm sido propostos para a análise de fissuração em estruturas de concreto. Em geral, eles podem ser classificados como modelos de fissuração discreta e modelos de fissuração distribuída. Em virtude dos inconvenientes apresentados pelos primeiros, as pesquisas atuais têm se voltado para o desenvolvimento de modelos de fissuração distribuída.

Os modelos de fissuração distribuída, entretanto, fornecem resultados que são muito influenciados pela escolha da malha de elementos finitos. Tem sido postulado que, para tornar os resultados insensíveis à malha, o modelo deve ser capaz de reproduzir a energia necessária para o completo desenvolvimento da fratura. Para estruturas de grandes dimensões, como as barragens, isto implica em se adotar uma resistência à tração equivalente, conforme proposto por Bazant e Oh<sup>[18]</sup>. Neste trabalho, será demonstrado que essa formulação também é dependente da malha de elementos finitos. Uma nova formulação, que fornece resultados insensíveis à escolha da malha, é proposta para a análise de fissuração em barragens de concreto.

Numa segunda etapa, a barragem e o maciço rochoso são submetidos às pressões hidrostáticas. As tensões obtidas na fase construtiva são incluídas na análise como um estado de tensões iniciais auto-equilibradas. Em seguida, o sistema formado pela barragem, maciço rochoso e a água do reservatório, é submetido a uma excitação sísmica. A segurança da estrutura é verificada em relação aos critérios de fissuração, esmagamento do concreto e escorregamento na interface com a fundação.

Nessa fase, emprega-se o método de Monte Carlo para a consideração das variações aleatórias das propriedades do concreto e da entrada sísmica. Através de simulações avalia-se a confiabilidade da estrutura.

## 2. COMPORTAMENTO TÉRMICO DO CONCRETO MASSA

### 2.1 - Introdução

Concreto massa é qualquer grande volume de concreto moldado *in situ* com dimensões suficientemente elevadas para exigir que sejam tomadas medidas para controlar a geração de calor e a variação de volume dele decorrente, a fim de minimizar sua fissuração<sup>[32]</sup>.

A aplicação mais volumosa do concreto massa tem sido em barragens, mesmo nas de terra ou de enrocamento onde há, quase sempre, elementos construídos em concreto. O concreto massa também é utilizado em obras viárias e outras grandes estruturas.

Uma vez que a hidratação do cimento é uma reação exotérmica, devido principalmente ao aluminato e ao silicato tricálcicos, uma das primeiras providências no sentido de reduzir a geração de calor na massa de concreto é a utilização de misturas com baixo teor de cimento. Concretos contendo apenas 100 kg/m<sup>3</sup> de cimento, ou até menos, têm sido usados correntemente na construção de barragens<sup>[2]</sup>.

Para reduzir a temperatura máxima do concreto durante o período de hidratação, tem sido empregada a técnica de pré-resfriamento dos agregados. Além disso, geralmente, parte da água de amassamento é substituída por gelo em escamas. Com esses procedimentos tem sido possível realizar o lançamento do concreto a temperaturas de até 10 °C.

Além das medidas citadas, normalmente, é empregada a técnica da construção em camadas de pequena altura, concretadas em intervalos de tempo mais espaçados, o que facilita a dissipação do calor da massa de concreto. O emprego de juntas de contração, também faz parte dos procedimentos correntemente adotados na construção de grandes estruturas como as barragens de concreto<sup>[5]</sup>.

Conforme se observa, o principal problema técnico relativo ao concreto massa é a possibilidade de altas tensões de tração, decorrentes do calor gerado pela hidratação do cimento, levar a uma fissuração nociva da estrutura. Dessa forma, a análise de tensões em barragens de concreto deve ser acompanhada por uma análise de transferência de calor.

## 2.2- Tensões térmicas e fissuração

A principal característica do concreto massa que o difere do concreto estrutural convencional é o seu comportamento térmico. Estruturas de concreto massa são tipicamente de grandes dimensões e retêm por muito tempo o calor armazenado em seu interior.

Considere-se, por exemplo, o fluxo unidimensional de calor em uma parede que, estando a uma temperatura  $T_0$  no instante  $t = 0$ , tem suas faces resfriadas subitamente a  $0^\circ\text{C}$ . A equação da transferência de calor por condução na parede é dada por<sup>[100]</sup>

$$\beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.2.1)$$

onde  $\beta = k / (c\rho)$  é a difusividade térmica, sendo  $k$ ,  $c$  e  $\rho$  a condutividade, o calor específico e a massa específica do material, respectivamente.

Na equação (2.2.1),  $T$  é a temperatura e  $x$  é a direção do fluxo.

A temperatura  $T$  no centro da parede em um instante  $t > 0$  é dada por<sup>[152]</sup>

$$\frac{T}{T_0} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{-n^2 \pi^2 \beta t / W^2} \quad (2.2.2)$$

onde  $W$  é a espessura da parede.

Nas figuras 2.2.1 a 2.2.3, são apresentadas as relações  $T / T_0$  para três valores da espessura, considerando  $\beta = 0,1 \text{ m}^2/\text{dia}$ , que é um valor médio para o concreto.

Conforme se observa pela figura 2.2.1, uma parede de 30cm de espessura, que é um valor típico de construções convencionais, praticamente atinge o equilíbrio térmico em poucas horas após o início do resfriamento. Em 7,5 horas ocorre uma redução de aproximadamente 95% da temperatura inicial.

Para uma peça de 15m de espessura, que pode representar uma barragem em arco, a redução de 95% levaria em torno de 2 anos e para 100m, que corresponde a uma barragem de gravidade, seriam necessários mais de 90 anos.



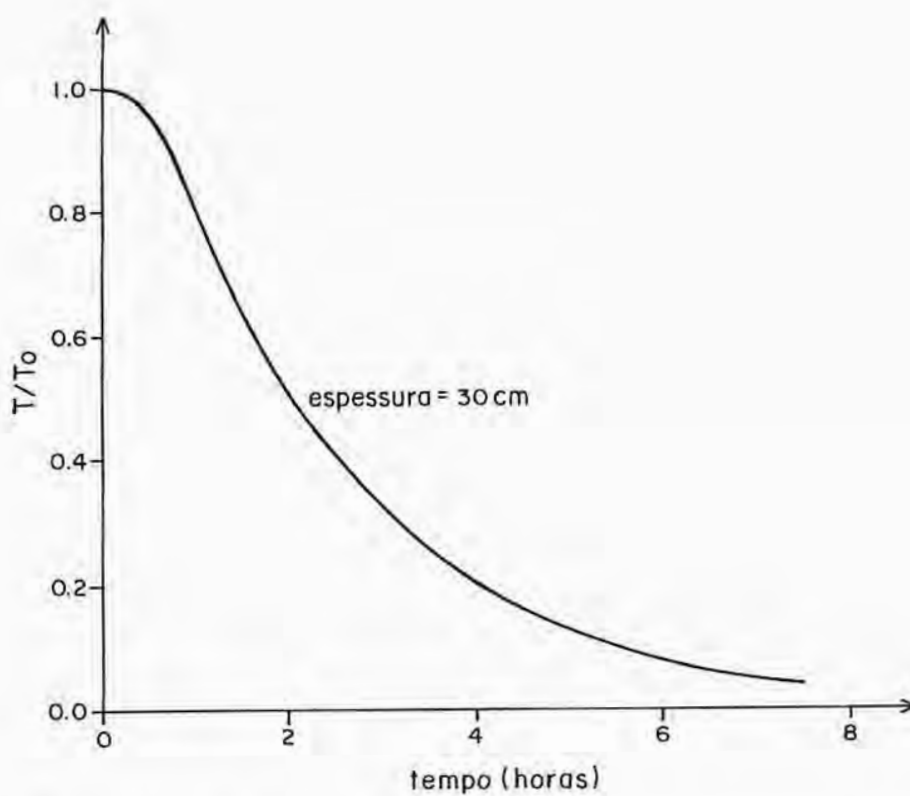


Figura 2.2.1- Resfriamento em parede de concreto (espessura=30 cm)

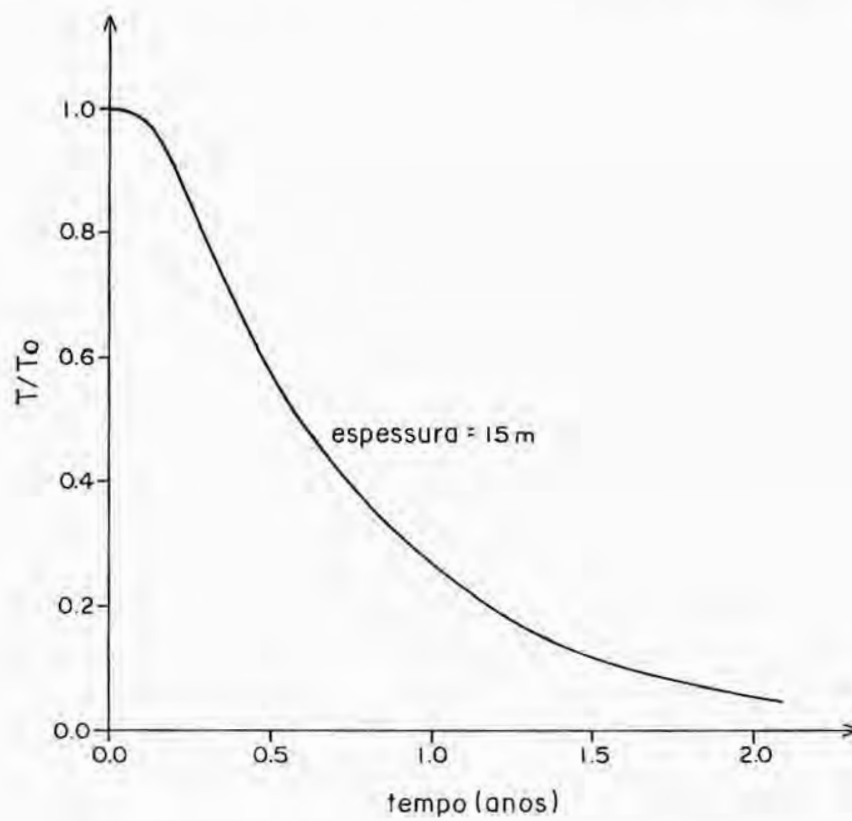


Figura 2.2.2- Resfriamento em parede de concreto (espessura=15 m)

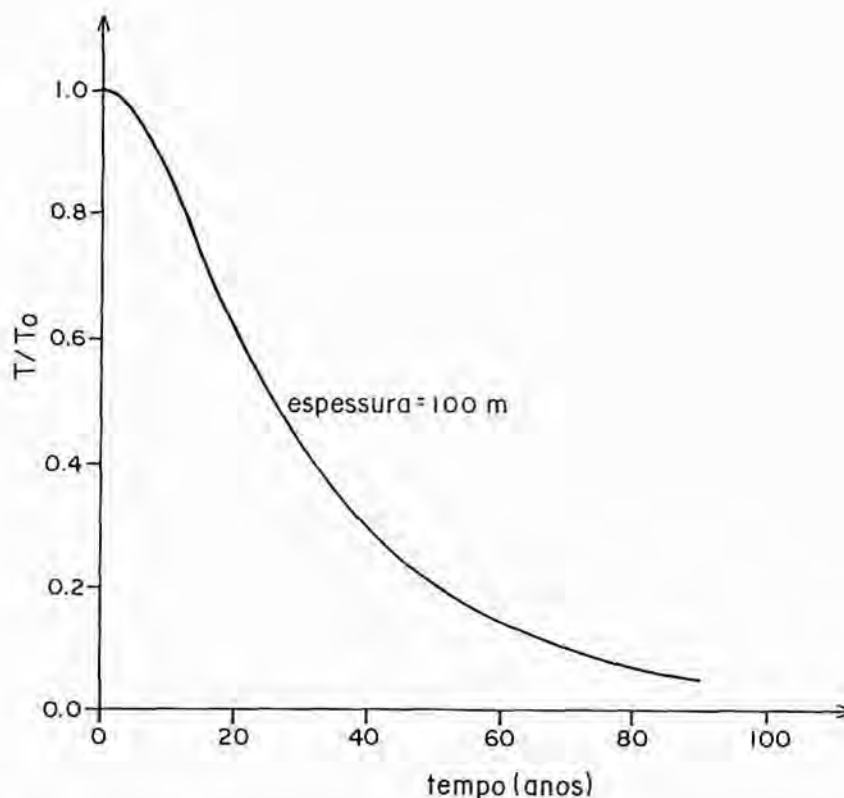


Figura 2.2.3- Resfriamento em parede de concreto (espessura=100 m)

Assim, na maioria das estruturas convencionais, o calor gerado pela hidratação do cimento é dissipado instantaneamente. Dessa forma, existirá um pequeno diferencial de temperatura entre a superfície e o interior e as peças estarão relativamente livres de tensões térmicas.

Entretanto, conforme se observa nas figuras 2.2.2 e 2.2.3, a redução de temperatura no concreto massa é muito lenta, com altos gradientes térmicos entre a superfície e o interior. Dessa maneira, o interior da estrutura introduz uma restrição às deformações das suas superfícies, o que pode levar à fissuração das mesmas.

### **2.3- Análise bidimensional da transferência de calor**

A análise da geração e dissipação de calor em barragens de concreto deve levar em conta as fases construtivas da estrutura. Uma vez que a dissipação do calor em uma barragem se dá, principalmente, por convecção, o esquema de lançamento do concreto é um fator determinante. Assim, é necessário conhecer a temperatura inicial do concreto, o período de

duração da cura, o tempo de retirada das formas e o intervalo compreendido entre a concretagem das diversas camadas.

Como este trabalho tem por objetivo o estudo de barragens de gravidade, uma análise bidimensional dos problemas de transferência de calor e de tensões é suficiente.

Seja o elemento infinitesimal da figura 2.3.1, submetido a um processo de transferência de calor com sua vizinhança. Os fluxos de calor por unidade de área nas direções  $x$  e  $y$  são  $q_x$  e  $q_y$ , respectivamente.

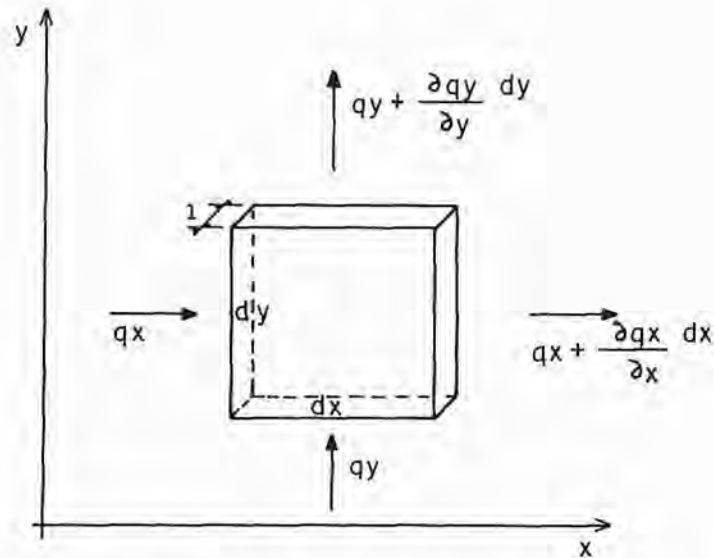


Figura 2.3.1- Fluxo de calor bidimensional

Se  $\dot{q}_g = \partial q_g / \partial t$  é a taxa de geração de calor no interior do elemento, a conservação da energia térmica leva à seguinte equação<sup>[100]</sup>

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - \dot{q}_g + \dot{U} = 0 \quad (2.3.1)$$

onde  $\dot{U} = \partial U / \partial t$  é a variação da energia interna.

A energia interna por unidade de volume,  $U$ , é dada por

$$U = c\rho T \quad (2.3.2)$$

onde  $c$  e  $\rho$  são o calor específico e a massa específica do material e  $T$  é a temperatura.

A taxa  $\dot{q}_g$  é obtida a partir do conhecimento da curva de elevação adiabática da temperatura do material.

A lei de Fourier para a transferência de calor por condução relaciona os fluxos de calor com os gradientes de temperatura na forma

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3.3)$$

$$q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3.4)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são as condutividades térmicas do material.

Introduzindo (2.3.2) a (2.3.4) em (2.3.1), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q}_g - \frac{\partial}{\partial t} (c\rho T) = 0 \quad (2.3.5)$$

que é a equação da transferência de calor por condução para materiais ortotrópicos.

Se o material é suficientemente homogêneo para se admitir que suas condutividades não variam espacialmente, resulta

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{q}_g - \frac{\partial (c\rho T)}{\partial t} = 0 \quad (2.3.6)$$

Além disso, para os níveis de temperatura a que as barragens estão submetidas, pode-se considerar que o calor específico  $c$  e a massa específica  $\rho$  são constantes.

Introduzindo essa hipótese na equação (2.3.6), chega-se a

$$\left( k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{q}_g = 0 \quad (2.3.7)$$

que é a equação diferencial do problema de transferência de calor empregada neste trabalho.

Na seção seguinte, essa equação será colocada em uma forma integral ponderada, apropriada à solução pelo método dos elementos finitos.

#### 2.4- Forma integral da equação de transferência de calor

A solução do problema de transferência de calor apresentado anteriormente será obtida com o emprego do método dos elementos finitos. Para esse fim, o domínio espacial, formado pela barragem e pela rocha de fundação, é discretizado usando elementos finitos isoparamétricos quadráticos de oito nós<sup>[111]</sup>.

Tomando as temperaturas nos nós dos elementos como as incógnitas básicas do problema, a temperatura  $T$  no interior de um elemento genérico é obtida por

$$T = \mathbf{N}\mathbf{T} \quad (2.4.1)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz com as funções de interpolação e  $\mathbf{T}$  é o vetor de temperaturas nodais do elemento.

Aplicando o método de Galerkin, a equação (2.3.7) é escrita na forma integral ponderada

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left( k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega_e} c\rho \mathbf{N}^T \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \dot{q}_g d\Omega = 0 \quad (2.4.2)$$

onde as integrais são efetuadas no domínio  $\Omega_e$  do elemento e o superíndice  $T$  indica transposição de matriz.

A integração do primeiro termo por partes leva a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left( k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega &= \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \\ &- \int_{\Omega_e} \left( k_x \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

sendo  $n_x$  e  $n_y$  as componentes do vetor normal unitário externo ao contorno  $\Gamma_e$  do elemento.

O fluxo de calor  $q_n$ , na direção normal ao contorno  $\Gamma_e$ , é dado por

$$q_n = q_x n_x + q_y n_y \quad (2.4.4)$$

e introduzindo a lei de Fourier, resulta

$$q_n = -\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right) \quad (2.4.5)$$

Considerando a equação (2.4.5), verifica-se que a expressão (2.4.3) toma a forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \left( k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) d\Omega = & - \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T q_n d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega_e} \left( k_x \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Introduzindo (2.4.6) em (2.4.2) e considerando a interpolação representada pela equação (2.4.1), resulta

$$\mathbf{A}_e \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{B}_e \mathbf{T} = \mathbf{C}_e \quad (2.4.7)$$

onde

$$\mathbf{A}_e = \int_{\Omega_e} c\rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{B}_e = \int_{\Omega_e} \left( k_x \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.4.9)$$

$$\mathbf{C}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \dot{q}_g d\Omega - \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T q_n d\Gamma \quad (2.4.10)$$

A expressão (2.4.7) representa um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem em nível de elemento. As equações para todo o domínio em análise podem ser acopladas chegando-se a

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{B}\mathbf{T} = \mathbf{C} \quad (2.4.11)$$

onde

$$\mathbf{A} = \sum \mathbf{A}_e ; \quad \mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_e ; \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{C}_e \quad (2.4.12)$$

e a soma sobre todos os elementos obedece ao procedimento padrão do método dos elementos finitos.

Pelas equações (2.4.8) a (2.4.10), identificam-se **A** e **B** como sendo as matrizes de capacidade calorífica e de condutividade e **C** é o vetor de cargas térmicas. As condições de contorno do problema são discutidas na seção seguinte.

## 2.5- Condições de contorno

As condições de contorno do problema de transferência de calor podem ser dos seguintes tipos:

### a) Temperatura e fluxo de calor prescritos

Neste caso, o valor  $\bar{T}$  da temperatura em um determinado nó é conhecido. A introdução desta condição de contorno é feita da mesma maneira como em análise estrutural pelo método dos deslocamentos, onde um deslocamento é prescrito<sup>[27]</sup>.

Se o fluxo de calor  $q_n$  no contorno  $\Gamma_e$  é prescrito, basta introduzir seu valor diretamente na equação (2.4.10).



b) Radiação

O fluxo líquido de calor radiante por unidade de área que a barragem troca com o ar é dado pela lei de Stefan-Boltzmann<sup>1001</sup> na forma

$$q_n = \varepsilon \sigma (T^4 - T_F^4) \quad (2.5.1)$$

onde  $\varepsilon$  é a emissividade, variando de 0 a 1,  $T$  e  $T_F$  são as temperaturas do concreto e do ar, respectivamente, e  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$  é a constante de Stefan-Boltzmann.

Observa-se que a introdução desta condição em (2.4.10) levaria a um sistema de equações diferenciais não-lineares. Uma vez que a diferença entre as temperaturas da barragem e do ar não são muito grandes e em vista do pequeno valor de  $\sigma$ , a radiação pode ser desprezada.

c) Condição de contorno de convecção

A convecção é a transferência de calor de uma superfície para um fluido em movimento. O fluxo de calor por unidade de área transferido para o fluido (ar) é dado pela lei do resfriamento de Newton na forma

$$q_n = h(T - T_F) \quad (2.5.2)$$

onde  $h$  é o coeficiente médio de transferência por convecção.

Introduzindo (2.5.2) em (2.4.10) e considerando as interpolações para  $T$ , resulta

$$\mathbf{C}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \dot{q}_g d\Omega - \left( \int_{\Gamma_e} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{T} + \int_{\Gamma_e} h \mathbf{N}^T T_F d\Gamma \quad (2.5.3)$$

Observa-se que um termo deve ser adicionado à matriz  $\mathbf{B}_e$  e o sistema (2.4.7) fica representado pelas seguintes matrizes

$$\mathbf{A}_e = c\rho \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.5.4)$$



$$\mathbf{B}_e = \int_{\Omega_e} \left( k_x \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + k_y \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_e} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (2.5.5)$$

$$\mathbf{C}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \dot{q}_g d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T (hT_F - \bar{q}) d\Gamma \quad (2.5.6)$$

onde  $\bar{q}$  é o fluxo de calor prescrito no contorno  $\Gamma_e$ .

## 2.6- Consideração do processo construtivo

A análise da transferência de calor (e também de tensões) em barragens de concreto deve levar em conta as etapas do processo de construção. Para isso, devem ser consideradas as datas de lançamento das diversas camadas, os tempos de desforma e cura e o período compreendido entre a concretagem das camadas subseqüentes.

Na figura 2.6.1, é representada a rocha de fundação e a primeira camada de concreto, lançada no instante  $t_1$ .

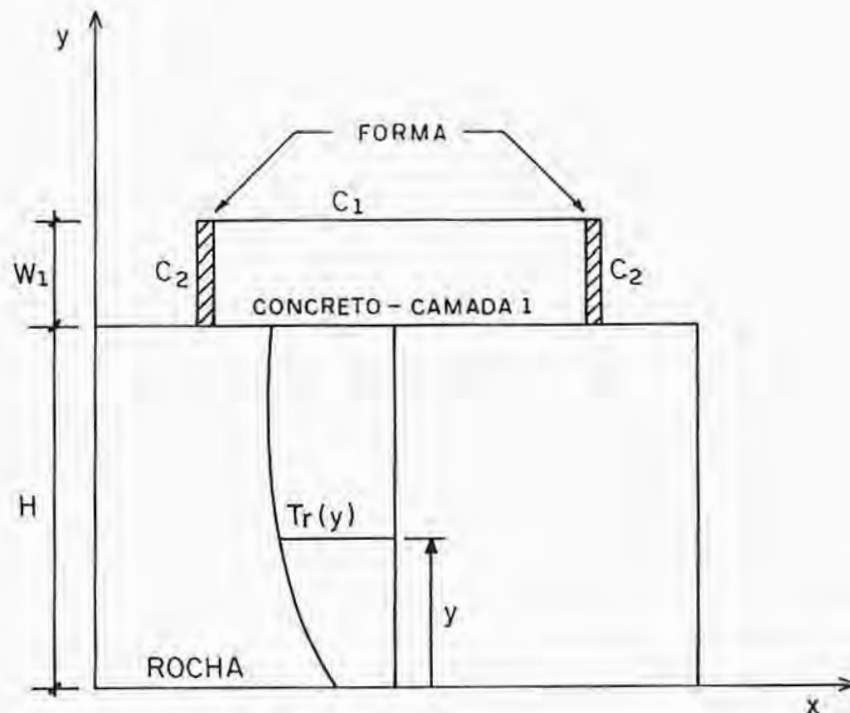


Figura 2.6.1- Lançamento da primeira camada de concreto

A distribuição de temperaturas iniciais da rocha,  $T_r(y)$ , é indicada esquematicamente na figura 2.6.1. Para a obtenção dessas temperaturas, pode-se proceder da seguinte forma: inicialmente admite-se uma distribuição uniforme de temperaturas; a seguir, resolve-se o problema da transferência de calor para a rocha submetida a uma dada variação da temperatura ambiente; após alguns ciclos anuais, a distribuição de temperaturas obtida será a condição inicial para a rocha<sup>[62,102]</sup>.

Nos exemplos apresentados neste trabalho, considera-se que a temperatura inicial da rocha é igual à temperatura média anual. Isto é feito porque as variações da temperatura ambiente observadas no local da obra que será analisada foram muito pequenas.

A condição inicial para o concreto é sua temperatura de lançamento, exceto na interface onde a temperatura é  $T_r(H)$  para manter a continuidade do campo de temperaturas.

Para levar em conta o efeito isolante das formas, o coeficiente de transferência concreto-ar no contorno  $C_2$  pode ser reduzido. O fator de redução, dependente do material empregado como forma, é aplicado até o instante da desforma.

Analogamente, no contorno  $C_1$  é considerada a transferência concreto-água enquanto durar a cura. A seguir, considera-se a transferência concreto-ar.

A análise de transferência de calor é realizada até o instante  $t_{II}$  no qual é lançada a segunda camada de concreto. Neste momento é redefinida a malha de elementos finitos, para a inclusão dos elementos pertencentes à nova camada, e o processo é repetido até o final da construção. A partir daí, a análise é realizada até a estabilização das temperaturas.

## **2.7- Algoritmo para integração das equações diferenciais**

O sistema de equações diferenciais (2.4.11) é integrado no tempo com o algoritmo apresentado por Zienkiewicz<sup>[111]</sup>. Esse algoritmo tem sido utilizado para resolver diversos problemas envolvendo equações diferenciais, como problemas de viscoplasticidade (Zienkiewicz<sup>[111]</sup>, Krishnaswany et al.<sup>[66]</sup>, dentre tantos). O mesmo algoritmo é empregado por Pereira<sup>[83]</sup> para a solução do problema de transferência de calor.

Em um intervalo de tempo  $[t_i, t_{i+1}]$ , admite-se que a variação das temperaturas nodais é linear, ou seja,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_i + \theta \Delta \mathbf{T} \quad (2.7.1)$$

onde  $\mathbf{T}_i$  representa as temperaturas no instante  $t_i$ ,  $\Delta \mathbf{T}$  é o incremento de temperaturas no intervalo de tempo e  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Analogamente, o tempo  $t$  no intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  é representado por

$$t = t_i + \theta \Delta t \quad (2.7.2)$$

onde  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  é o tamanho do intervalo.

De acordo com (2.7.1) e (2.7.2), a derivada de  $\mathbf{T}$  em relação ao tempo  $t$  é

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{T} \quad (2.7.3)$$

Introduzindo (2.7.1) e (2.7.3) no sistema (2.4.11), resulta

$$\mathbf{A}^* \Delta \mathbf{T} = \mathbf{C}^* \quad (2.7.4)$$

onde

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A} + \theta \mathbf{B} \quad (2.7.5)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{T}_i \quad (2.7.6)$$

sendo  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$ .

A solução do sistema algébrico linear (2.7.4) permite a obtenção dos incrementos de temperatura  $\Delta \mathbf{T}$  com os quais são avaliadas as temperaturas no instante  $t_{i+1}$  por

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i + \Delta \mathbf{T} \quad (2.7.7)$$

Observa-se que se os incrementos de tempo  $\Delta t$  forem constantes, a matriz  $\mathbf{A}^*$  será redefinida apenas no momento do lançamento de uma camada de concreto ou quando

houver alguma variação do coeficiente de transferência por convecção em algum contorno, em virtude da desforma ou do término da cura.

A escolha do valor do parâmetro  $\theta$  dá origem a diferentes métodos de integração. Se  $\theta = 0$  o algoritmo coincide com o método das diferenças finitas regressivas e a estabilidade numérica dependerá do tamanho do intervalo de tempo. Conforme indicado por Zienkiewicz<sup>[111]</sup>, se  $\theta \geq 1/2$  o algoritmo será implícito e incondicionalmente estável. A verificação da estabilidade numérica do algoritmo é apresentada no capítulo 9.

### 3. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

#### 3.1- O comportamento mecânico do concreto

O concreto apresenta um comportamento tipicamente não-linear, quando submetido a tensões elevadas. O diagrama tensão-deformação, obtido em um ensaio de compressão simples, é da forma indicada na figura 3.1.1.

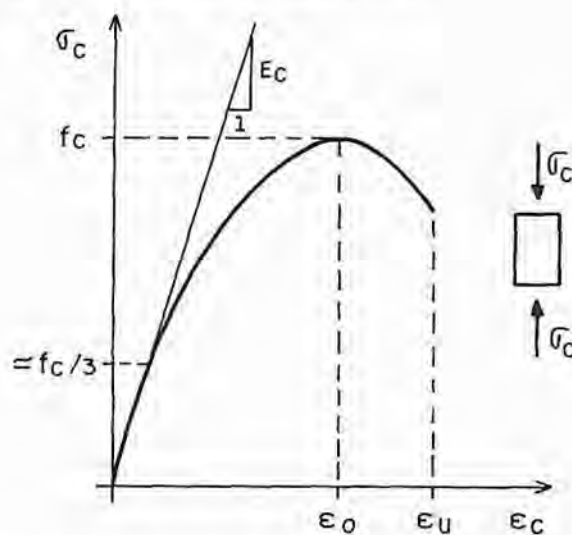


Figura 3.1.1- Diagrama tensão-deformação em compressão simples

Conforme se observa, o diagrama é aproximadamente linear até uma tensão da ordem de  $f_c/3$ , sendo  $f_c$  a resistência à compressão. Entretanto, a partir desse valor a não-linearidade torna-se acentuada.

Diversos fatores têm influência na resistência à compressão, como a relação água-cimento, o tipo e o consumo de cimento e as propriedades mecânicas dos agregados. A forma de aplicação da carga e a duração do ensaio também determinam o valor da resistência.

Experimentalmente, verifica-se que o módulo de deformação longitudinal  $E_c$  e as deformações  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_U$  dependem da resistência à compressão. Várias correlações entre essas grandezas têm sido obtidas em trabalhos de pesquisa e encontram-se padronizadas nas principais normas de projeto.

Um grande número de equações têm sido propostas para representar o diagrama tensão-deformação do concreto. Uma expressão muito geral é proposta por Sargin<sup>1871</sup> (citado

por Ottosen<sup>[82]</sup>) e tem como casos particulares as curvas de Saenz<sup>[86]</sup>, Desayi e Krishnan<sup>[44]</sup> e a equação apresentada no CEB<sup>[40]</sup>.

Alguns dados experimentais sobre o comportamento do concreto em um estado biaxial de tensões são disponíveis (Kupfer e Gerstle<sup>[67]</sup>, por exemplo). Em função desses dados é possível resumir o comportamento observado como se segue<sup>[35]</sup>:

a) Em compressão biaxial, ocorre um aumento da resistência do concreto. O aumento máximo de 25% é alcançado quando a razão entre as duas tensões principais for igual a 0,5 e para tensões iguais esse aumento é da ordem de 16%.

b) Em tração-compressão, a resistência à tração diminui de forma aproximadamente linear com a tensão de compressão.

c) Sob tração biaxial, a resistência é a mesma que em tração simples.

Esses resultados são sintetizados na envoltória de ruptura indicada na figura 3.1.2.

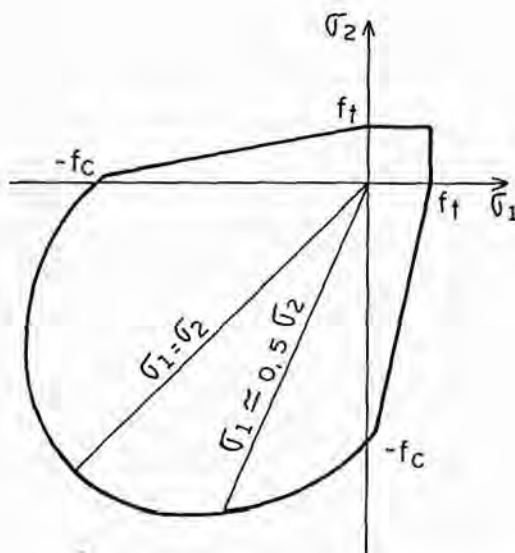


Figura 3.1.2- Envoltória de ruptura bidimensional

Para compressão biaxial, a envoltória de ruptura é definida por

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_c} + \frac{\sigma_2}{f_c}\right)^2 - \frac{\sigma_2}{f_c} - 3,65 \frac{\sigma_1}{f_c} = 0 \quad (3.1.1)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais e  $\sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 0$ .



Para tração-compressão (  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 < 0$  ), Kupfer e Gerstle sugerem uma linha reta dada por

$$\sigma_1 = \left( 1 + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_c} \right) f_t \quad (3.1.2)$$

onde  $f_t$  é a resistência à tração simples.

Em relação à ductilidade do concreto em um estado biaxial de tensões, verifica-se que a mesma depende da natureza das tensões. Observa-se, também, que próximo da ruptura ocorre um aumento de volume com o crescimento das tensões de compressão. Esse aumento de volume é devido à microfissuração progressiva do material.

O comportamento do concreto em um estado triaxial de tensões é bastante complexo. Gerstle et al.<sup>[48,49]</sup> realizaram uma série de ensaios para determinar a superfície de ruptura triaxial. Os resultados obtidos foram empregados por Kotsovos e Newman<sup>[65]</sup> na aferição de um modelo matemático para a representação do comportamento do material.

Os resultados experimentais indicam que a superfície de ruptura para o concreto é fortemente influenciada pela tensão hidrostática. Além disso, os meridianos dessa superfície são curvos e as seções desviadoras são dependentes do ângulo de similaridade.

Diversos critérios de ruptura têm sido propostos por Ahmad e Shah<sup>[1]</sup>, Bresler e Pister<sup>[28]</sup>, Ottosen<sup>[81]</sup>, Wu<sup>[106]</sup>, dentre outros. Os parâmetros dos modelos são determinados a partir de ensaios bem definidos (compressão simples, tração simples, compressão biaxial com  $\sigma_1 = \sigma_2$ , etc.).

Por outro lado, a modelagem das equações constitutivas em um estado multiaxial de tensões é bastante intuitiva. Em geral, os modelos são baseados na teoria da elasticidade não-linear ou na teoria da plasticidade. Entretanto, para problemas bidimensionais, geralmente, adotam-se modelos baseados em alguma formulação uniaxial equivalente. Na seção seguinte são descritos alguns modelos comumente usados em análise bidimensional.

### **3.2- Modelos constitutivos para análise bidimensional**

Diversos modelos constitutivos têm sido propostos para representar o comportamento biaxial do concreto. Para análise estática, em geral, é admitido um comportamento elástico não-linear e as equações constitutivas são baseadas em uma curva tensão-deformação uniaxial. Para análise dinâmica são postuladas certas regras de carga e

descarga, também referidas ao diagrama uniaxial. Os modelos podem ser isotrópicos ou ortotrópicos.

As curvas tensão-deformação uniaxiais, empregadas como base para a generalização biaxial, são da forma proposta por Sargin<sup>[87]</sup> com as particularizações que levam às equações de Saenz<sup>[86]</sup> e do CEB<sup>[40]</sup>.

Tomando por base a curva unidimensional de Saenz<sup>[86]</sup>, Liu et al.<sup>[70]</sup> propuseram um modelo para o concreto submetido a um estado de compressão biaxial. O modelo considera a ortotropia induzida pelo processo de deformação e é referido ao sistema de eixos coincidentes com as direções das tensões principais atualizadas.

Baseando-se em resultados experimentais, Tasuji et al.<sup>[98,99]</sup> (citados por Gupta e Maestri<sup>[54]</sup>) propuseram que este modelo fosse aplicado à todas as combinações de tensões e não somente para compressão biaxial como foi proposto por Liu.

Ottosen<sup>[82]</sup> propôs um modelo constitutivo elástico não-linear onde o módulo de deformação e o coeficiente de Poisson são tomados com seus valores secantes atualizados. O modelo possibilita a análise tridimensional e leva em conta a dilatação que precede a ruptura do material.

Darwin e Pecknold<sup>[43]</sup> propuseram um modelo ortotrópico para o concreto em um estado biaxial de tensões. Os eixos de ortotropia são considerados coincidentes com os eixos das tensões principais atualizadas. As equações constitutivas são dadas em forma incremental com os módulos tangentes obtidos a partir da curva de Saenz<sup>[86]</sup>.

Darwin e Pecknold<sup>[42]</sup> sugerem, também, regras de carga e descarga que permitem a utilização do modelo para análise dinâmica.

Algumas modificações do modelo de Darwin e Pecknold<sup>[43]</sup> foram propostas por Araújo e Campos Filho<sup>[10,11]</sup>. Nestas formulações, as equações constitutivas são dadas em relação ao sistema de eixos coincidentes com as direções das deformações principais. Definindo-se as deformações uniaxiais equivalentes, as equações constitutivas ficam desacopladas e as tensões podem ser obtidas com o emprego de uma curva tensão-deformação unidimensional.

Todos os modelos citados, bem como uma infinidade de alternativas, podem, em princípio, ser aplicados para a análise de barragens de gravidade de concreto. Entretanto, em estruturas deste tipo a principal fonte de não-linearidade é decorrente da fissuração do concreto e não das elevadas tensões de compressão. Estas últimas, por imposição de projeto, geralmente se situam abaixo de  $f_c / 3$  e, portanto, na faixa linear do diagrama tensão-



deformação. No projeto da barragem de Itaipu, por exemplo, o limite  $f_c / 3$  foi empregado para todas as classes de concreto massa utilizados<sup>[29]</sup>.

Para aproveitar o aumento da resistência com a idade, normalmente, as resistências de projeto são especificadas em idades que variam de 90 dias a 01 ano. Em virtude do diâmetro máximo do agregado graúdo (de até 15 cm), os corpos de prova de concreto massa devem ter dimensões maiores que os correntemente usados para o concreto convencional. Esses corpos de prova (cilindros de até 45x90 cm), contendo a amostra representativa do concreto massa, são testados na idade especificada no projeto.

Entretanto, durante a execução da obra são testados corpos de prova com as dimensões usuais (15x30 cm), sendo eliminados, por peneiramento, os agregados com diâmetros superiores a 38mm. A resistência dos grandes corpos de prova pode, então, ser prevista através de correlações empíricas. Essas correlações, entretanto, são muito dispersas e, por isso, as tensões de compressão máximas admitidas são bem limitadas<sup>[2]</sup>.

Em vista desses fatos, neste trabalho o concreto será considerado elástico linear em compressão. A fissuração será a única fonte de não-linearidade. O coeficiente de Poisson será tomado com o valor constante 0,2 já que, para os níveis de tensões a que as barragens de gravidade estão submetidas, a dilatação não é observada.

### 3.3- Comportamento do concreto em tração

Uma vez que a resistência à tração do concreto é pequena em relação à sua resistência à compressão, durante muito tempo a mesma foi desprezada nos procedimentos de projeto. Como alternativa a essa prática, é usual admitir-se um comportamento frágil em tração, conforme indicado na figura 3.3.1.

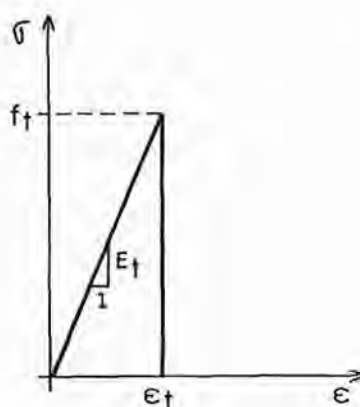


Figura 3.3.1- Diagrama tensão-deformação com ruptura brusca

Na figura 3.3.1,  $f_t$  é a resistência à tração,  $\varepsilon_t$  é a deformação correspondente ao início da fissuração e  $E_t$  é o módulo de deformação longitudinal.

Os ensaios de tração realizados em prismas de concreto indicam que o módulo de deformação longitudinal em tração,  $E_t$ , é aproximadamente igual ao módulo em compressão,  $E_c$ , (Gopalaratnan e Shah<sup>[51]</sup>).

A adoção do comportamento da figura 3.3.1, entretanto, não é satisfatória para diversas aplicações como, por exemplo, a análise de fissuração em estruturas de concreto simples<sup>[85]</sup>.

Para se efetuar uma análise rigorosa da estrutura, torna-se necessária a consideração da curva carga-deslocamento completa para o concreto em tração. Essa curva é obtida em ensaios de tração simples ou de flexão de vigas, onde os deslocamentos são controlados.

Diversos ensaios realizados por Cedolin et al.<sup>[30]</sup>, Gopalaratnan e Shah<sup>[51]</sup>, Zhen-hai e Xiu-qin<sup>[110]</sup>, dentre outros, indicam que a relação carga-deslocamento em tração é da forma apresentada na figura 3.3.2.

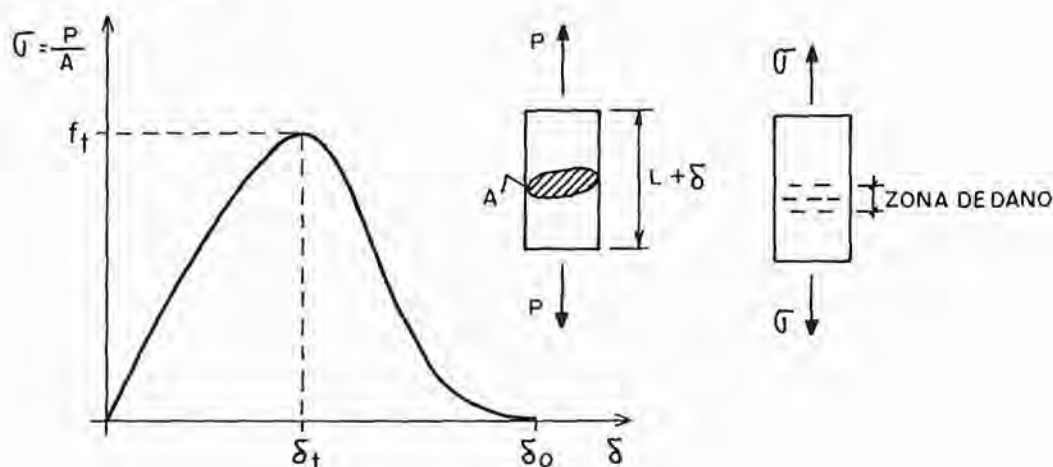


Figura 3.3.2- Relação tensão-deslocamento em tração

Na figura 3.3.2,  $P$  é a carga aplicada,  $A$  é a área da seção transversal do corpo de prova,  $\delta$  é o deslocamento e  $L$  é o comprimento sobre o qual os deslocamentos são medidos.

Quando a carga atinge o valor crítico,  $P_{cr} = f_t A$ , inicia-se o processo de fissuração. As microfissuras se formam em uma zona mais fraca do material, a denominada zona do processo de fratura ou zona de dano. Com o aumento dos deslocamentos, mais

microfissuras vão se formando e a carga diminui até que, quando  $\delta = \delta_o$ , ocorre uma microfissura com a separação completa do corpo de prova<sup>[85]</sup>.

O alívio da tensão média (amolecimento) na figura 3.3.2 ocorre na zona de dano. A parte restante do corpo de prova permanece elástica e se retrai devido à redução da tensão. Assim, depois que inicia o desenvolvimento da zona de dano as deformações não são uniformes ao longo do elemento<sup>[57]</sup>.

Neste estágio, o comportamento do material não pode ser descrito por uma curva tensão-deformação. Isto se deve à constatação experimental de que a relação tensão-deformação, após o surgimento da zona de fratura, é dependente do comprimento  $L$  sobre o qual se faz a medição. Dessa forma, o diagrama  $\sigma - \varepsilon$  após o pico de tensão não representa uma propriedade do material, como ocorre no trecho ascendente<sup>[51,110]</sup>.

Assim, a resposta do material deve ser representada por duas curvas, como indicado na figura 3.3.3.

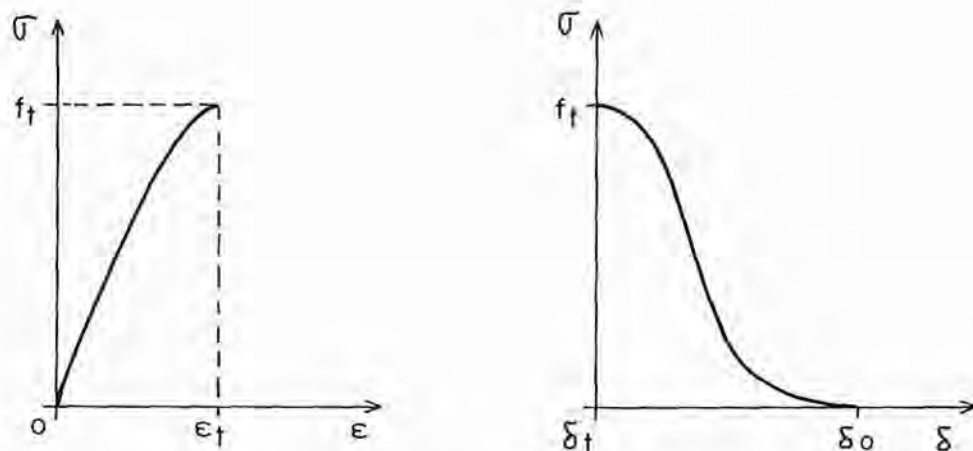


Figura 3.3.3- Representação dos trechos ascendente e descendente da resposta em tração

Conforme se indica na figura, para o trecho ascendente pode-se empregar uma relação tensão-deformação nos termos da mecânica do contínuo. Após o surgimento da zona de dano ocorre a quebra da continuidade e o que se tem é uma relação tensão-deslocamento.

Os resultados experimentais obtidos por Gopalaratnan e Shah<sup>[51]</sup> indicam que a não-linearidade do trecho ascendente do diagrama  $\sigma - \varepsilon$  é pequena. Dessa forma, usualmente, essa parte é considerada linear.

Em vez da relação tensão-deslocamento pode-se empregar uma relação tensão-abertura da fissura para a representação do trecho descendente. A obtenção da abertura  $w$  da

fissura é indicada na figura 3.3.4 para os casos em que o trecho ascendente é considerado linear e não-linear.

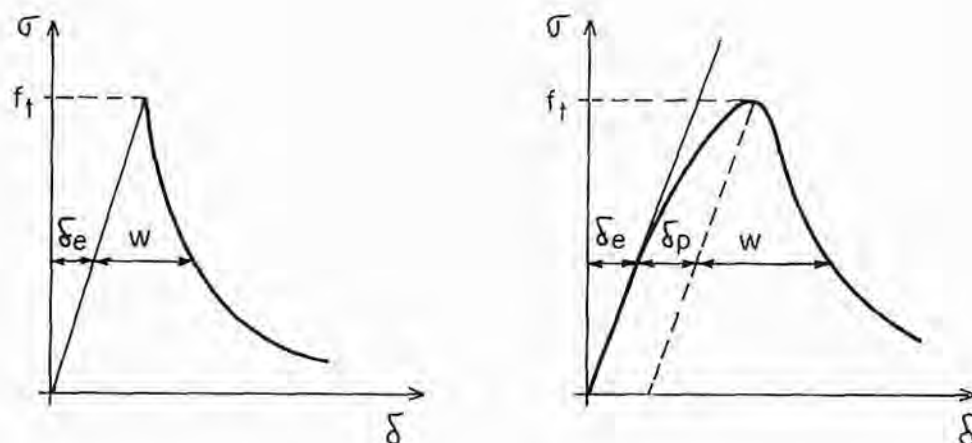


Figura 3.3.4- Determinação da abertura da fissura

No primeiro caso, a abertura da fissura é obtida pela diferença entre o deslocamento medido e a parcela elástica  $\delta_e$ . No segundo, deve-se ainda retirar o deslocamento  $\delta_p$  provocado pela não-linearidade.

Obtidas as aberturas da fissura para os vários níveis de tensão, o comportamento pós-fissuração do material é representado como na figura 3.3.5.

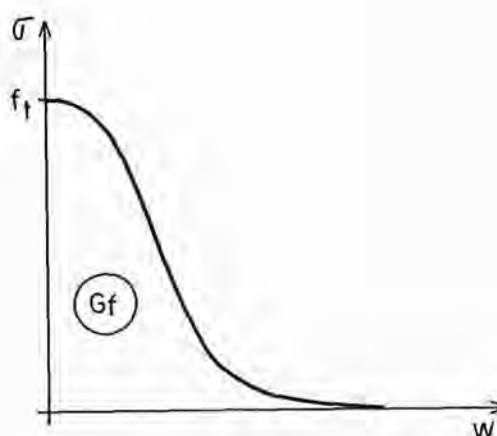


Figura 3.3.5- Relação tensão-abertura da fissura

A área  $G_f$  sob a curva  $\sigma - w$  representa a energia de fratura específica. Essa é a energia necessária para que seja criada uma fissura completa de área unitária.

Diversos métodos de ensaio podem ser empregados para a determinação da energia de fratura. O método depende do modo de fratura que se deseja analisar.

Para o denominado modo I ou modo de abertura, pode-se adotar o ensaio de tração simples. Entretanto, um ensaio mais fácil de ser realizado é o de flexão de uma viga biapoiada. A viga deve possuir um entalhe na borda inferior da seção central sobre a qual é aplicada uma carga concentrada. O entalhe força a propagação de uma fissura e a energia de fratura pode ser calculada conforme as recomendações RILEM<sup>[84]</sup>.

No modo II ou modo de corte puro, uma viga semelhante à anterior é submetida a duas cargas aplicadas em faces opostas. Para o modo III pode-se empregar cilindros com entalhe circunferencial submetidos à torção, conforme apresentando por Bazant e Prat<sup>[22]</sup>.

Comparando a energia de fratura  $G_f^{II}$  obtida no modo II com a energia  $G_f^{III}$  obtida no modo III, Bazant e Prat verificaram que  $G_f^{II} \cong 9G_f^{III}$ , de onde concluíram que essas propriedades não são constantes mas dependem da força normal ao longo da zona de dano.

Hillerborg<sup>[56]</sup> apresenta um estudo comparativo dos valores da energia de fratura obtidos em uma série de ensaios realizados em vários laboratórios. Em função dos resultados, verifica-se que a energia de fratura depende de uma série de fatores, como a composição do concreto, as condições de cura, idade, etc.. Nenhuma correlação foi encontrada, apesar do grande número de ensaios. Porém, é verificado que a energia de fratura aumenta com o tamanho do agregado graúdo.

Os ensaios de tração sob carregamento cíclico<sup>[51]</sup> revelam o comportamento da figura 3.3.6.

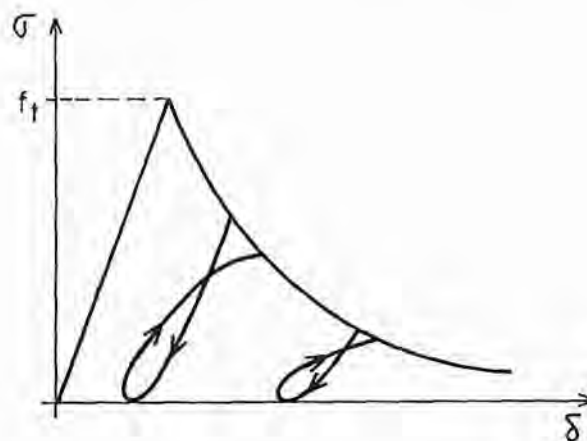


Figura 3.3 6- Comportamento sob carregamento cíclico



Conforme indicado na figura 3.3.6, verifica-se que a envoltória obtida no ensaio estático é preservada.

Diversas formulações têm sido desenvolvidas para a consideração do comportamento apresentado; algumas delas são descritas na seção seguinte.

### **3.4- Modelos de fratura para o concreto**

Os modelos empregados para a análise de fissuração em concreto são genericamente denominados de modelos de fratura não-linear. Duas formulações distintas têm sido empregadas: a formulação de fissura discreta e a de fissura distribuída.

Nas primeiras, relações tensões-deformações são adotadas até o surgimento da primeira microfissura e relações tensões-deslocamentos, ou tensões-abertura das fissuras, são utilizadas em seguida.

Nos modelos de fissuração distribuída, o material fissurado é associado a um meio contínuo equivalente. Dessa forma, pode-se empregar relações tensões-deformações médias durante toda a análise. Em geral, é admitido que a fissura se inicia quando a tensão principal máxima atinge a resistência à tração do concreto.

O modelo de fissura discreta foi empregado por Hillerborg et al.<sup>[58]</sup> para analisar uma viga em flexão pura. Adotando uma relação linear entre a tensão e a abertura da fissura e empregando o método dos elementos finitos, foi possível obter a resposta da estrutura até a fratura completa. Aplicações do modelo de fissuração discreta para a análise de barragens de concreto têm sido feitas por Skrikerud e Bachmann<sup>[97]</sup>.

Os modelos de fissura discreta, entretanto, apresentam uma série de inconvenientes. Em primeiro lugar, o caminho de propagação da fissura deve ser estabelecido *a priori*. Em situações gerais, esse caminho não é conhecido e diversas localizações possíveis devem ser testadas, o que leva a um grande custo computacional.

Aliado a este fato, os modelos de fissura discreta exigem algoritmos especiais para a redefinição da malha de elementos finitos sem que a banda da matriz de rigidez seja perdida<sup>[61]</sup>. Além disso, é muito difícil considerar a situação em que as direções das tensões principais na zona de fratura giram durante o processo de propagação. Este caso ocorre, por exemplo, quando primeiro uma tensão normal de tração vertical produz uma fissuração parcial e a falha é subsequentemente causada por uma corte horizontal<sup>[18]</sup>.



Em vista disso, as pesquisas recentes têm buscado o desenvolvimento de modelos de fissuração distribuída. Entretanto, a simples utilização de um diagrama tensão-deformação incluindo o amolecimento leva a resultados que não são objetivos em relação à malha de elementos finitos. Na verdade, os resultados são fortemente afetados pela escolha dos tamanhos dos elementos<sup>[15]</sup>.

Tem sido postulado que, para tornar os resultados insensíveis à escolha da malha, é necessário que o modelo contínuo equivalente reproduza a energia necessária para o desenvolvimento completo da fratura. Isto é conseguido pela introdução de uma medida do comprimento da zona de fratura, o denominado comprimento característico. Diversos modelos dessa natureza têm sido propostos por Bazant e Oh<sup>[18]</sup>, Nilsson e Oldenburg<sup>[79]</sup>, Yamaguchi e Chen<sup>[107]</sup>, dentre outros.

Esses modelos, entretanto, exigem que o tamanho do elemento finito seja pequeno para que o amolecimento seja possível. Para grandes estruturas como as barragens, essa limitação quanto ao tamanho do elemento é proibitiva.

Bazant e Oh<sup>[18]</sup>, por exemplo, adotam o modelo indicado na figura 3.4.1.

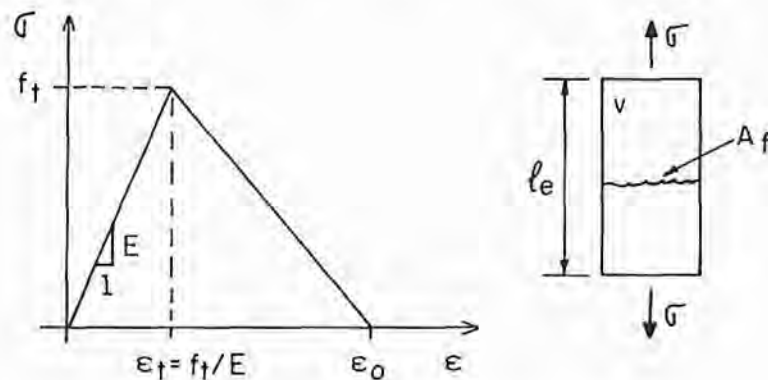


Figura 3.4.1- Modelo de Bazant e Oh

Na figura 3.4.1, indicam-se o corpo de volume  $V$  com uma fissura de área  $A_f$  e o diagrama tensão-deformação do modelo contínuo equivalente. A energia de deformação no modelo contínuo é dada por

$$V \int_0^{\varepsilon_0} \sigma d\varepsilon = \frac{V f_t \varepsilon_0}{2} \quad (3.4.1)$$

Igualando a energia de deformação com a energia de fratura total,  $A_f G_f$ , resulta

$$\varepsilon_o = \frac{2G_f A_f}{f_t V} \quad (3.4.2)$$

e definindo  $l_e = V / A_f$  como sendo o comprimento característico, chega-se a

$$\varepsilon_o = \frac{2G_f}{f_t l_e} \quad (3.4.3)$$

A condição necessária para a existência do trecho descendente do diagrama tensão-deformação é que  $\varepsilon_o > \varepsilon_t$ . Impondo essa restrição em (3.4.3), resulta

$$l_e < \frac{2EG_f}{f_t^2} \quad (3.4.4)$$

que é o comprimento crítico.

A equação (3.4.4) representa uma restrição quanto ao tamanho dos elementos finitos a serem empregados. Para grandes estruturas essa limitação é impraticável. Nestes casos, Bazant e Oh sugerem a adoção de um diagrama tensão-deformação com fratura brusca ( $\varepsilon_o = \varepsilon_t$ ) e com uma resistência reduzida.

Igualando  $\varepsilon_o$  a  $\varepsilon_t = f_t / E$ , chega-se a

$$f_{te} = \left( \frac{2EG_f}{l_e} \right)^{1/2} \quad (3.4.5)$$

que é a expressão da resistência à tração equivalente.

A expressão (3.4.5) tem sido empregada em vários estudos de fissuração em barragens de concreto na expectativa de que, trabalhando com essa resistência equivalente, os resultados sejam independentes da malha de elementos finitos<sup>[45,104]</sup>. Na seção seguinte será

mostrado que, na verdade, a expressão (3.4.5) também leva a resultados dependentes da escolha da malha de elementos finitos.

### 3.5- Análise de uma barra sob tração pura

Para demonstrar a falta de objetividade do critério de resistência convencional bem como do critério proposto por Bazant e Oh (equação (3.4.5)), é analisada a barra da figura 3.5.1.

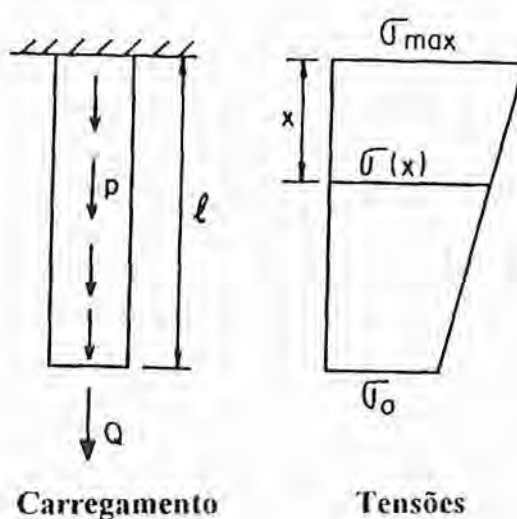


Figura 3.5.1- Carregamento e tensões na barra

A barra tem um comprimento  $l$  e é submetida a uma força concentrada  $Q$  na extremidade e a uma carga  $p$  uniformemente distribuída ao longo do seu eixo.

A tensão normal  $\sigma(x)$  em uma seção genérica é dada por

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right) f_t \quad (3.5.1)$$

onde  $\sigma_0 = Q/A$  e  $\alpha = pl/Af_t$ , sendo  $A$  a área da seção transversal da barra e  $f_t$  a resistência à tração do material.

O parâmetro  $\alpha$  pode ser variado para introduzir diferentes gradientes de tensões na barra.

A máxima tensão é dada por

$$\sigma_{max} = \sigma_o + \alpha f_t \quad (3.5.2)$$

e a ruptura da barra ocorrerá quando  $\sigma_{max} = f_t$ , de onde se conclui que

$$\sigma_{oH} = (1 - \alpha) f_t \quad (3.5.3)$$

é o valor exato da máxima tensão que se pode aplicar na extremidade da barra para um dado valor do parâmetro  $\alpha$ .

Empregando o método dos elementos finitos, a barra é discretizada em  $n$  elementos de comprimento  $h$ , conforme indicado na figura 3.5.2.

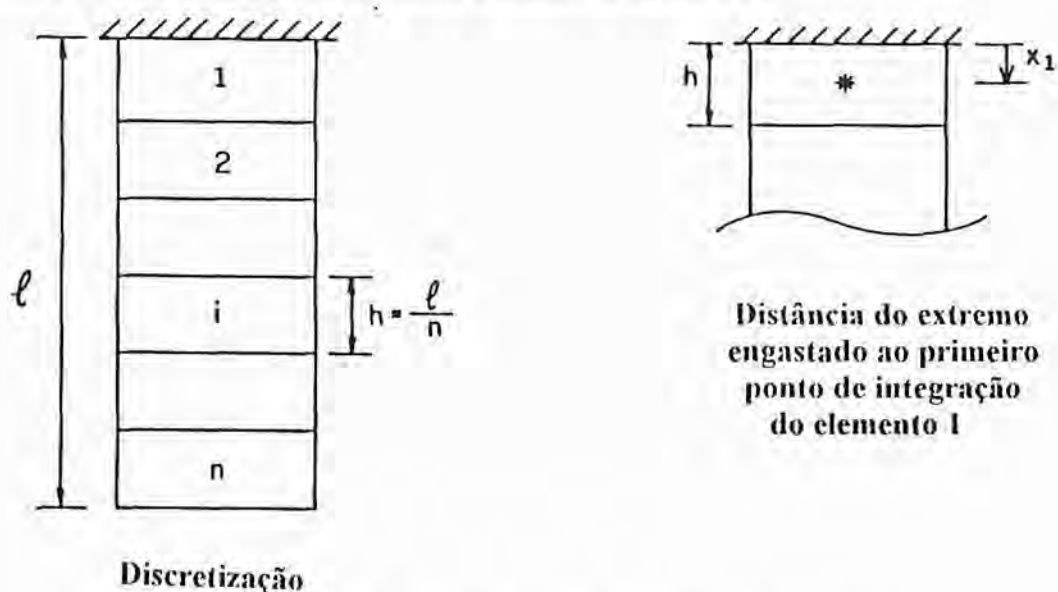


Figura 3.5.2 - Discretização da barra em  $n$  elementos

A carga de ruptura  $Q$  (ou a tensão  $\sigma_o$ ) pode ser obtida empregando-se um procedimento incremental. Em cada etapa de carga são calculadas as tensões nos pontos de integração e quando a tensão atinge a resistência à tração do material tem-se determinada a carga de ruptura (ou a tensão de ruptura  $\sigma_o$ ).

Em virtude do gradiente de tensões, a fissuração será detectada primeiro no elemento 1 e no ponto de integração mais próximo do engaste (figura 3.5.2). A coordenada  $x_1$  desse ponto é dada por

$$x_1 = Rh \quad (3.5.4)$$

onde  $R$  depende do número de pontos de integração adotado.

Empregando a regra de Gauss-Legendre, tem-se que

$$R = \frac{1}{2}, \text{ com 1 ponto de integração;} \quad (3.5.5)$$

$$R = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \text{ com 2 pontos de integração.}$$

Introduzindo (3.5.4) em (3.5.1) e lembrando que  $h = l/n$ , pode-se obter a tensão  $\sigma_1$  no ponto de integração como

$$\sigma_1 = \sigma_o + \alpha \left( 1 - \frac{R}{n} \right) f_t \quad (3.5.6)$$

A fissuração, com a conseqüente ruptura da barra, ocorre quando  $\sigma_1$  atinge um valor último de referência. No critério de resistência convencional essa tensão última é a própria resistência à tração do material e no critério de Bazant e Oh é a resistência à tração equivalente dada na equação (3.4.5).

Igualando  $\sigma_1$  a  $f_t$ , pode-se obter a tensão de ruína  $\sigma_o$  e considerando a equação (3.5.3) chega-se a

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_{ou}} = 1 + \frac{\alpha R}{n(1-\alpha)} \quad (3.5.7)$$

que é a relação entre a tensão de ruptura obtida com o critério de resistência convencional e a tensão de ruptura exata.

Da equação (3.5.7) verifica-se que o critério de resistência convencional fornece a solução exata se o gradiente de tensões é nulo ( $\alpha = 0$ ), independentemente do número  $n$  de

elementos. Se o gradiente não é nulo, esse critério fornece um valor superior para a tensão de ruptura que converge para a solução exata com o refinamento da malha.

Para empregar o critério de Bazant e Oh (equação (3.4.5)) é necessário definir o comprimento característico  $l_e$ . Isto é feito na figura 3.5.3, conforme se considere 1 ou 2 pontos de integração por elemento.

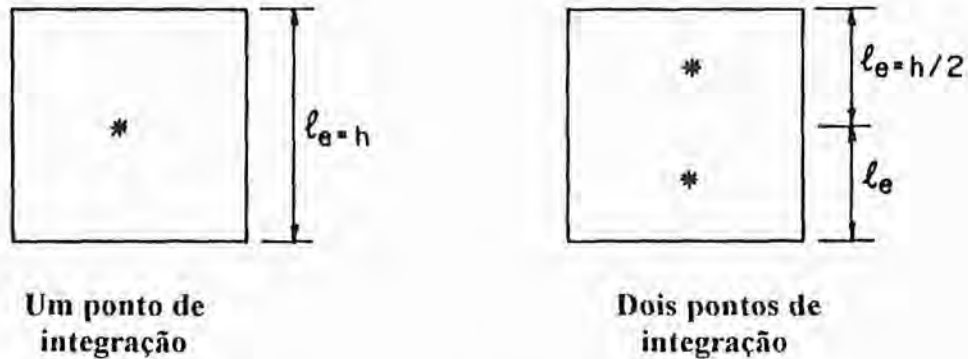


Figura 3.5.3 - Determinação do comprimento característico

Com as definições dadas na figura 3.5.3, a equação (3.4.5) pode ser escrita na forma

$$f_{te} = \left( \frac{2EG_f S}{h} \right)^{1/2} \quad (3.5.8)$$

onde  $S$  é o número de pontos de integração adotado.

Definindo  $K = \frac{2EG_f}{lf_t^2}$  e lembrando que  $l = nh$ , resulta

$$f_{te} = (KnS)^{1/2} f_t \leq f_t \quad (3.5.9)$$

que é a expressão da resistência à tração equivalente.

Igualando a tensão  $\sigma_1$  no ponto de integração, equação (3.5.6), à  $f_{te}$  obtém-se a tensão de ruína  $\sigma_o$  e considerando a equação (3.5.3) chega-se a



$$\frac{\sigma_o}{\sigma_{ou}} = \frac{(KnS)^{1/2} - \alpha(1 - R/n)}{1 - \alpha} \quad (3.5.10)$$

que é a relação entre a tensão de ruptura obtida com a resistência à tração equivalente dada na equação (3.4.5) e a tensão de ruptura exata.

Observa-se, então, que esse critério também é dependente da malha, mesmo no caso em que o gradiente de tensões é nulo.

Das equações (3.5.7) e (3.5.10), conclui-se que tanto o critério de resistência convencional quanto o critério de Bazant e Oh dependem da malha, do número de pontos de integração e do gradiente de tensões.

Na figura 3.5.4, são apresentadas as relações (3.5.7) e (3.5.10) para o caso em que  $K = 0,05$  e  $S = 1$  (1 ponto de integração). O número máximo de elementos para a utilização do critério de Bazant e Oh é obtido da equação (3.5.9) e, para este exemplo, é igual a 20. Com um maior refinamento da malha deve-se considerar o amolecimento e a equação (3.4.5) não é aplicável.

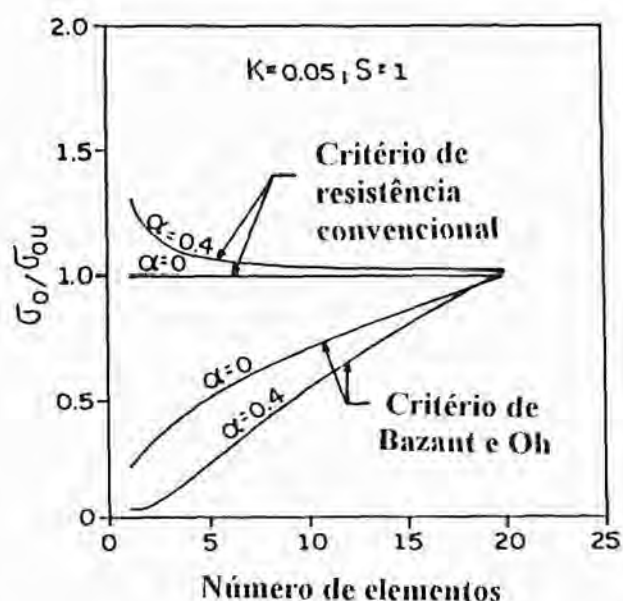


Figura 3.5.4 - Influência do gradiente de tensões

Na figura 3.5.5, apresentam-se os resultados obtidos com  $\alpha = 0$  e  $S = 1$ . Neste caso, o critério de resistência convencional é independente da malha enquanto que o critério de

Bazant e Oh é influenciado pelo parâmetro  $K$ . Na figura 3.5.6, indicam-se os resultados obtidos considerando-se 1 e 2 pontos de integração.

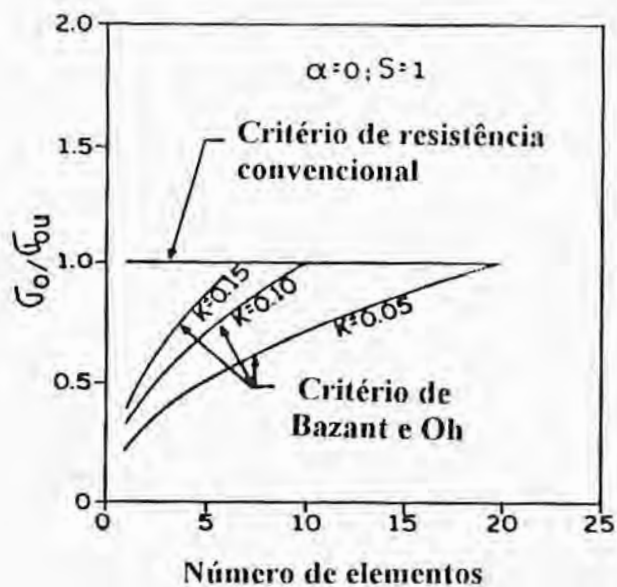


Figura 3.5.5 - Influência do parâmetro  $K$

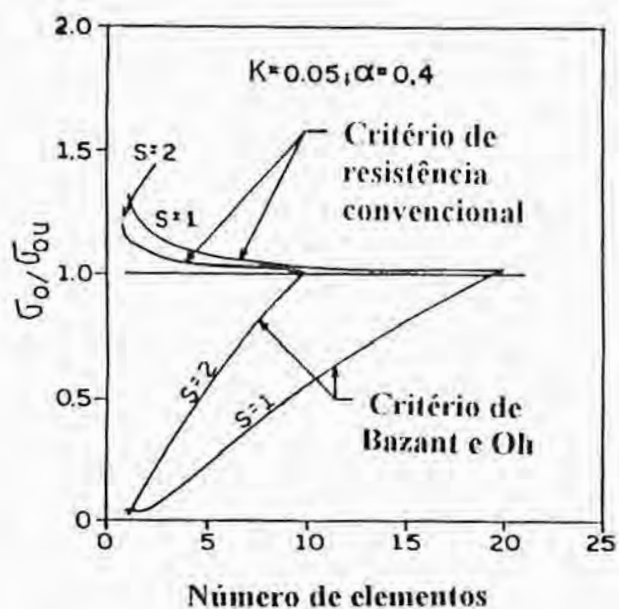


Figura 3.5.6 - Influência da ordem da integração numérica

No capítulo seguinte é proposto um modelo constitutivo bidimensional para o concreto, aplicável à análise de estruturas de grandes dimensões como as barragens de gravidade, que fornece resultados independentes da malha de elementos finitos.

## 4. FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA A ANÁLISE DE BARRAGENS DE CONCRETO

### 4.1- Considerações gerais

No capítulo anterior, foram discutidos alguns modelos constitutivos empregados para a análise de estruturas de concreto. Conforme foi salientado, em barragens de gravidade a principal fonte de não-linearidade é decorrente da fissuração do concreto, já que as tensões de compressão são pequenas em relação à sua resistência.

Duas formulações distintas têm sido empregadas para tratar o problema de fissuração em estruturas de concreto: a formulação de fissura discreta e a de fissura distribuída. Em virtude dos inconvenientes apresentados pela primeira formulação, os modelos de fissuração distribuída têm sido preferidos por um grande número de pesquisadores.

Esses modelos, entretanto, fornecem resultados que são dependentes da escolha da malha de elementos finitos e alguma consideração adicional deve ser feita para corrigir essas distorções. Tem sido postulado que, para tornar os resultados insensíveis à escolha da malha, o modelo deve reproduzir a energia necessária para o desenvolvimento completo da fratura.

Se essa consideração é aplicada a uma malha com elementos muito pequenos, resulta um diagrama tensão-deformação incluindo o trecho descendente. Por outro lado, se os elementos são de grandes dimensões, como em barragens, a igualdade da energia de deformação com a energia de fratura leva à utilização de um diagrama tensão-deformação com fratura brusca. Neste caso, adota-se uma resistência à tração equivalente, conforme indicado na equação (3.4.5).

No capítulo anterior, foi demonstrado que, assim como o critério de resistência convencional, essa formulação também é dependente da malha de elementos finitos, do gradiente de tensões e da ordem da integração numérica empregada. Isso ocorre porque esses critérios são baseados apenas no estado de tensões nos pontos de integração e, em geral, essas tensões não correspondem ao estado crítico. Para encontrar o estado crítico é necessário analisar todo o campo de tensões com a sua variação espacial.

Neste capítulo, é proposto um modelo constitutivo para a análise de barragens de gravidade de concreto que fornece resultados objetivos em relação à malha de elementos

finitos. A objetividade é conseguida definindo-se uma resistência equivalente em função do estado atual de tensões em todo o domínio do elemento. Para isso, é necessário conhecer o campo de tensões em nível de elemento, o que é feito a seguir.

O modelo é apresentado para o caso bidimensional, mas sua generalização para o caso tridimensional é evidente. Uma situação de estado plano de tensões é adotada para o concreto já que, em geral, as barragens de gravidade são construídas em blocos separados por juntas de contração.

#### **4.2- Escolha da ordem da integração numérica**

O campo de tensões no domínio de um elemento finito deve ser definido em função das tensões conhecidas nos pontos de integração. Conforme foi demonstrado por Barlow<sup>[13]</sup>, os pontos ótimos para a avaliação das tensões, na ausência de tensões térmicas, correspondem aos pontos de Gauss-Legendre com integração reduzida. Então, empregando o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós, esses pontos correspondem a 2x2 pontos de Gauss.

Conhecidas as tensões nos pontos de integração, pode-se definir o campo de tensões por meio de alguma projeção. Hinton e Campbell<sup>[59]</sup> mostraram que uma interpolação bilinear a partir das tensões em 2x2 pontos de Gauss corresponde à solução ideal do método dos mínimos quadrados.

Esse tipo de projeção das tensões foi empregado por Araújo e Awruch<sup>[7]</sup> na elaboração de um modelo objetivo para a análise de fissuração em barragens de concreto na ausência de tensões térmicas.

Entretanto, quando as tensões térmicas são incluídas na análise a integração reduzida deixa de ser ideal do ponto de vista da economia da discretização da estrutura. De fato, se a integração reduzida é empregada torna-se necessário um melhor refinamento da malha na direção da espessura das camadas da barragem, para que a projeção possa acompanhar os fortes gradientes de tensões.

Conforme foi apresentado no capítulo 2, a variação de temperatura  $\Delta T$  em um ponto do elemento é dada por

$$\Delta T = \mathbf{N}(\xi, \eta) \Delta \mathbf{T} \quad (4.2.1)$$

onde  $\Delta \mathbf{T}$  é o vetor com os incrementos de temperaturas nodais e  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  é a matriz com as funções de interpolação do elemento.

Então, empregando-se o elemento isoparamétrico de oito nós, observa-se que  $\Delta T$  tem uma variação quadrática em termos das coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$ . No caso elástico linear, as tensões térmicas são proporcionais a  $\Delta T$  e verifica-se que as mesmas também são uma função quadrática de  $\xi$  e  $\eta$ . Assim, qualquer projeção linear das tensões (com integração reduzida 2x2) exigiria um melhor refinamento da malha do que com uma projeção quadrática (com integração completa 3x3).

A título de exemplo, considere-se a camada de concreto da figura 4.2.1, lançada sobre a rocha e submetida a um resfriamento hipotético dado por

$$\Delta T = T_o F(y) \left[ e^{-t/a} - 1 \right] \quad (4.2.2)$$

onde

$$F(y) = 2 \left( 1 - \frac{y}{c} \right) - \text{sen} \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{y}{c} \right) \quad (4.2.3)$$

sendo  $T_o = 40^\circ\text{C}$ ,  $a = 112,58$  e  $t$  é o tempo em dias.

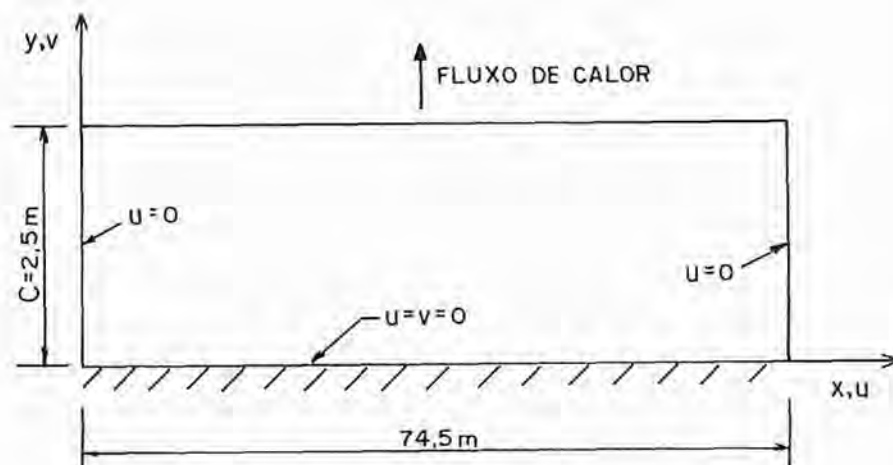


Figura 4.2.1 - Camada de concreto sob fluxo de calor vertical



As condições de contorno, em termos das componentes dos deslocamentos  $u$  e  $v$ , são mostradas na figura 4.2.1.

Desprezando o peso próprio e as cargas externas e considerando o coeficiente de Poisson igual a zero, a única componente de tensão não nula é a tensão normal na direção  $x$ . Essa tensão é dada por

$$\sigma_x = -E\alpha\Delta T \quad (4.2.4)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica.

Na figura 4.2.2, são apresentadas as projeções feitas para  $\sigma_x$  (em MPa) considerando-se integrações numéricas 2x2 e 3x3 e apenas um elemento na direção da espessura da camada. Nesta figura, foram adotados os valores:  $E = 30000$  MPa,  $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  e  $t = 10$  dias.

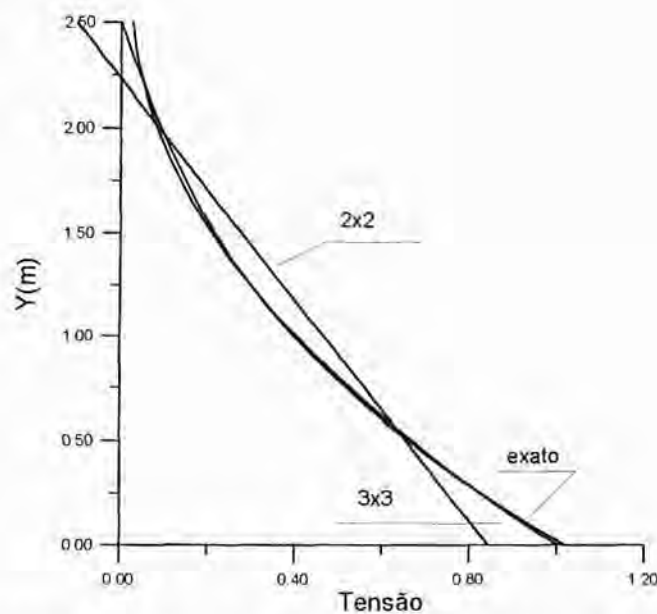


Figura 4.2.2 - Tensões  $\sigma_x$  para diferentes ordens de integração

Conforme se observa da figura 4.2.2, a tensão máxima projetada na base da camada, com integração reduzida 2x2, corresponde a 84% da tensão máxima real. Com integração 3x3, esse percentual passa para 99%.

Logo, empregando integração reduzida torna-se necessária uma melhor discretização na direção da espessura da camada. Isto leva a um aumento significativo do



número de graus de liberdade do problema, particularmente, se a construção é feita em muitas camadas.

Por isto, neste trabalho adota-se a seguinte estratégia: na fase construtiva, quando o problema térmico é o preponderante, emprega-se integração numérica com 3x3 pontos de Gauss e projeção quadrática das tensões; na fase de utilização, quando a barragem é submetida às pressões hidrostáticas e ao carregamento sísmico, emprega-se integração com 2x2 pontos de Gauss e projeção linear das tensões.

#### 4.3- Definição do campo de tensões

As componentes reais das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  em um ponto genérico de um elemento finito são aproximadas por

$$\bar{\sigma}_x = \mathbf{N}(\xi, \eta)\alpha_x, \quad \bar{\sigma}_y = \mathbf{N}(\xi, \eta)\alpha_y, \quad \bar{\tau}_{xy} = \mathbf{N}(\xi, \eta)\alpha_{xy} \quad (4.3.1)$$

onde  $\xi, \eta$  representam as coordenadas locais do ponto e  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_{xy}$  são vetores contendo os parâmetros das interpolações.

A matriz  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  será da forma

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = [\xi, \eta, \xi\eta, 1] \quad (4.3.2)$$

no caso da projeção linear, ou

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = [\xi^2, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \xi, \eta, \xi\eta, 1] \quad (4.3.3)$$

no caso da projeção quadrática das tensões.

Os coeficientes de  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_{xy}$  são obtidos empregando-se o método dos mínimos quadrados. Criando-se o funcional

$$\pi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ (\bar{\sigma}_x - \sigma_x)^2 + (\bar{\sigma}_y - \sigma_y)^2 + (\bar{\tau}_{xy} - \tau_{xy})^2 \right] d\xi d\eta \quad (4.3.4)$$

introduzindo (4.3.1) e minimizando  $\pi$  em relação a  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_{xy}$ , resulta o sistema de equações algébricas lineares

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

onde

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi d\eta \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{P}_z = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \sigma_z d\xi d\eta \quad (4.3.7)$$

com  $z = x, y$  ou  $xy$ , dependendo da componente de tensão.

Uma vez que as equações (4.3.5) estão desacopladas, os coeficientes podem ser obtidos resolvendo-se três sistemas de equações  $n \times n$ , onde  $n = 4$  ou  $n = 8$  se a projeção requerida é linear ou quadrática, respectivamente. A matriz  $\mathbf{M}$  e os vetores  $\mathbf{P}_x$ ,  $\mathbf{P}_y$  e  $\mathbf{P}_{xy}$  são obtidos empregando-se integração com 2x2 ou 3x3 pontos de Gauss caso se trate de projeção linear ou quadrática. Para o caso linear, Hinton e Campbell<sup>[59]</sup> fornecem a solução explícita do problema.

Encontrados os vetores de coeficientes  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_{xy}$ , o campo de tensões no domínio do elemento fica definido por

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x^T \\ \alpha_y^T \\ \alpha_{xy}^T \end{bmatrix} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \quad (4.3.8)$$

Então, conhecidas as tensões nos pontos de integração, pode-se resolver o sistema (4.3.5) e empregar a equação (4.3.8) para a obtenção das tensões em qualquer ponto do elemento. Essas tensões serão utilizadas para a elaboração de um critério de falha independente da malha de elementos finitos.

Conforme foi salientado na seção anterior, durante a fase construtiva a análise será feita empregando-se 3x3 pontos de Gauss. As tensões obtidas ao final dessa fase serão tomadas como tensões iniciais para a análise subsequente. Entretanto, nessa segunda etapa será utilizada integração reduzida com 2x2 pontos de Gauss, em virtude do grande esforço computacional requerido para a análise sísmica com simulações e pela ausência de gradientes térmicos. As tensões iniciais nos 2x2 pontos de integração podem ser obtidas diretamente da equação (4.3.8), bastando para isso substituir as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  desses pontos.

#### 4.4- Critério de fissuração

O critério de fissuração adotado para o concreto é o de Kupfer e Gerstle, conforme apresentado no capítulo 3, em função das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Em tração biaxial,  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ , a resistência à tração biaxial  $\sigma_{lu}$  é igual à resistência à tração simples  $f_t$ . Em tração-compressão,  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 < 0$ , a resistência à tração biaxial é dada por

$$\sigma_{lu} = f_t \left( 1 + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_c} \right) \quad (4.4.1)$$

onde  $f_c$  é a resistência à compressão simples.

Logo, de acordo com esse critério, a fissuração no elemento iniciará no ponto onde a relação  $\sigma_1 / \sigma_{lu}$  é máxima. Definindo o coeficiente de risco de fissuração  $\Psi$  como

$$\Psi = \frac{\sigma_I}{\sigma_{lu}} \quad (4.4.2)$$

verifica-se que se o máximo valor de  $\Psi$  for menor do que 1 o elemento não está fissurado e se  $\Psi > 1$  a fissuração ocorre.

O coeficiente de risco de fissuração será empregado para a determinação de uma resistência à tração equivalente que leva a resultados insensíveis à malha de elementos finitos.

Uma formulação semelhante a esta foi adotada por Araújo e Awruch<sup>[7]</sup>, mas usando a energia de deformação específica para a obtenção da resistência à tração equivalente. Neste caso, pode ser demonstrado que a máxima energia de deformação específica ocorre nos nós dos elementos finitos. Entretanto, essa formulação não é adotada neste trabalho, em virtude da dificuldade de se avaliar a energia de deformação para o material com envelhecimento.

A determinação exata do ponto onde  $\Psi$  é máximo é complexa, já que são envolvidas as duas tensões principais. Dessa forma,  $\Psi$  é uma função não-linear das coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  e algum algoritmo iterativo deve ser usado para determinar o ponto de máximo.

Para evitar esse inconveniente e simplificar o modelo, admite-se que o máximo valor de  $\Psi$  ocorre nos pontos de integração ou nos nós do elemento. Então, determina-se o maior valor do coeficiente de risco,  $\Psi_{pi}$ , que ocorre nos pontos de integração. Analogamente, pode-se determinar o maior valor,  $\Psi_{no}$ , que ocorre nos nós do elemento, já que as tensões nos nós podem ser calculadas com o emprego da equação (4.3.8).

Se resultar  $\Psi_{pi} > \Psi_{no}$  significa que a primeira fissura surgirá no próprio ponto de integração onde  $\Psi = \Psi_{pi}$ . Neste caso, o critério de resistência convencional levará à solução correta e pode-se adotar  $f_{te} = f_t$ , onde  $f_{te}$  é a resistência à tração uniaxial equivalente.

Se resultar  $\Psi_{no} > \Psi_{pi}$ , a primeira fissura surgirá no nó onde  $\Psi = \Psi_{no}$ . Neste caso, o critério convencional não fornecerá a solução correta e os resultados serão dependentes da malha de elementos finitos. Para tornar os resultados insensíveis à malha adota-se a resistência uniaxial equivalente

$$f_{te} = f_t \frac{\Psi_{pi}}{\Psi_{no}} < f_t \quad (4.4.3)$$

Uma vez determinada a resistência à tração uniaxial equivalente do elemento, pode-se empregar o critério de Kupfer e Gerstle, com  $f_{te}$  no lugar de  $f_t$ , para o cálculo da resistência à tração biaxial equivalente  $\sigma_{Iue}$  em cada ponto de integração. Dai para frente, prossegue-se como no critério convencional, isto é, admite-se que o ponto de integração fissura quando  $\sigma_I > \sigma_{Iue}$ .

A comprovação da objetividade do critério proposto é demonstrada na seção seguinte.

#### 4.5- Objetividade do critério de fissuração

Para demonstrar a objetividade do critério de fissuração proposto, são apresentados os dois exemplos seguintes.

No primeiro exemplo é feita a análise da viga da figura 4.5.1. A viga é biapoiada e submetida a uma carga concentrada no meio do vão. As propriedades do material são as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal = 30000 MPa; coeficiente de Poisson = 0,2; resistência à tração simples = 3 MPa e resistência à compressão simples = 30 MPa. A carga de ruptura exata é  $P_{exato} = 6,25$  kN.

As malhas empregadas na análise estão indicadas na figura 4.5.2, onde são incluídas duas malhas irregulares.

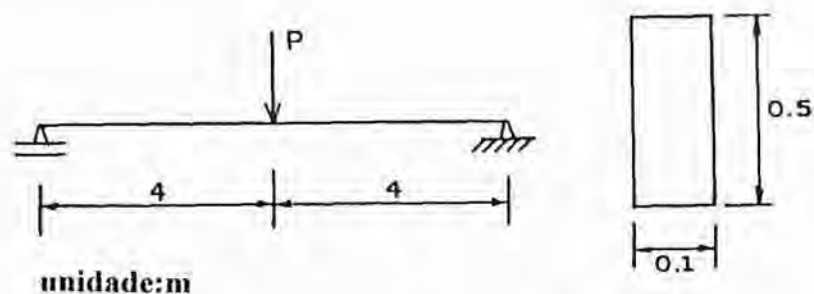


Figura 4.5.1 - Geometria e carregamento da viga

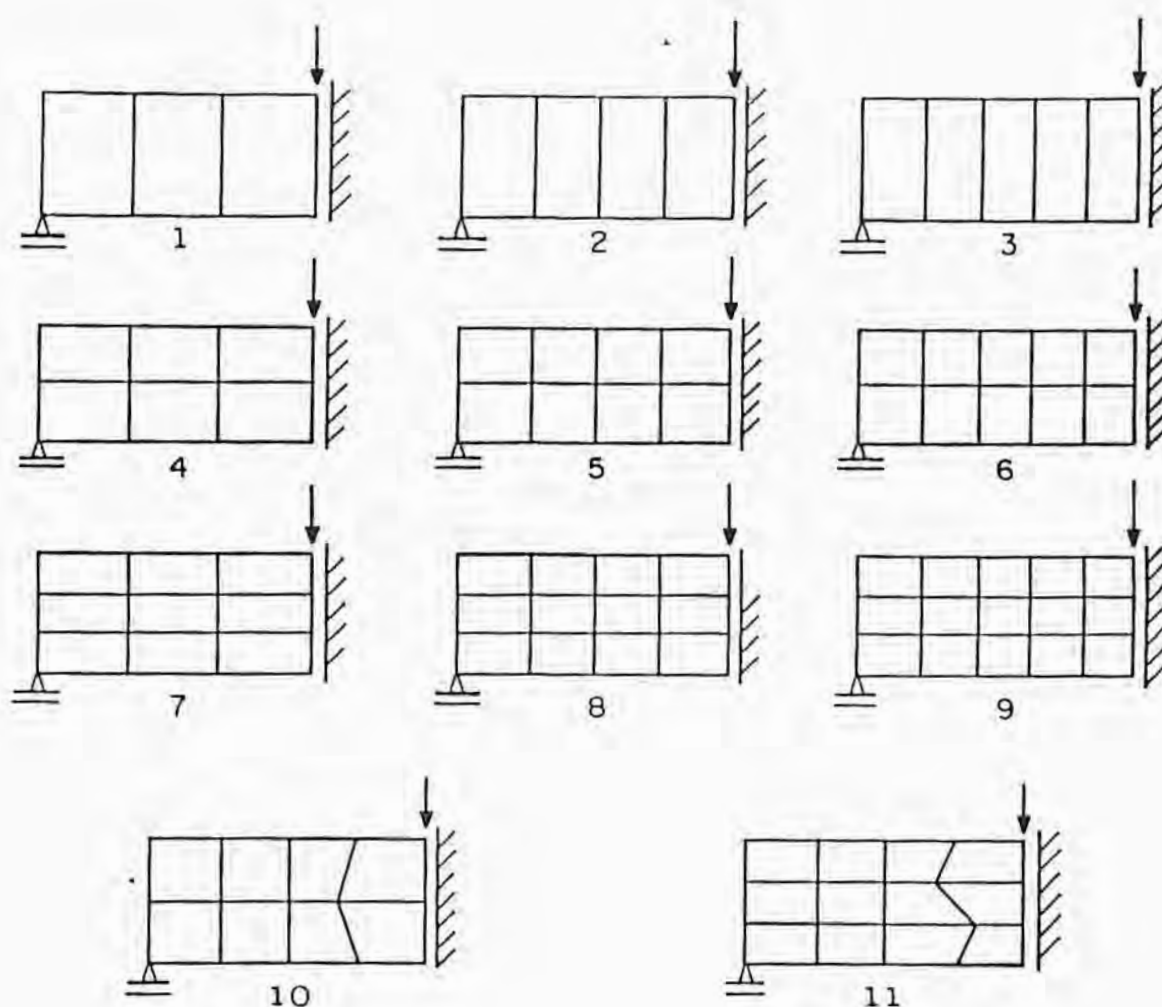


Figura 4.5.2 - Malhas de elementos finitos da viga

Como neste problema as tensões térmicas não são consideradas, as projeções das tensões são efetuadas empregando-se integração reduzida com 2x2 pontos de Gauss.

Na figura 4.5.3, indicam-se as relações entre a carga de ruptura obtida com o modelo proposto,  $P_u$ , e a carga de ruptura exata para as diferentes malhas consideradas. Os resultados correspondentes ao critério de resistência convencional também são mostrados.

Observando esta figura, verifica-se que o critério de resistência convencional é bastante dependente da malha adotada. Entretanto, o critério proposto é insensível à discretização da viga. As pequenas flutuações da resposta se devem apenas a erros numéricos.



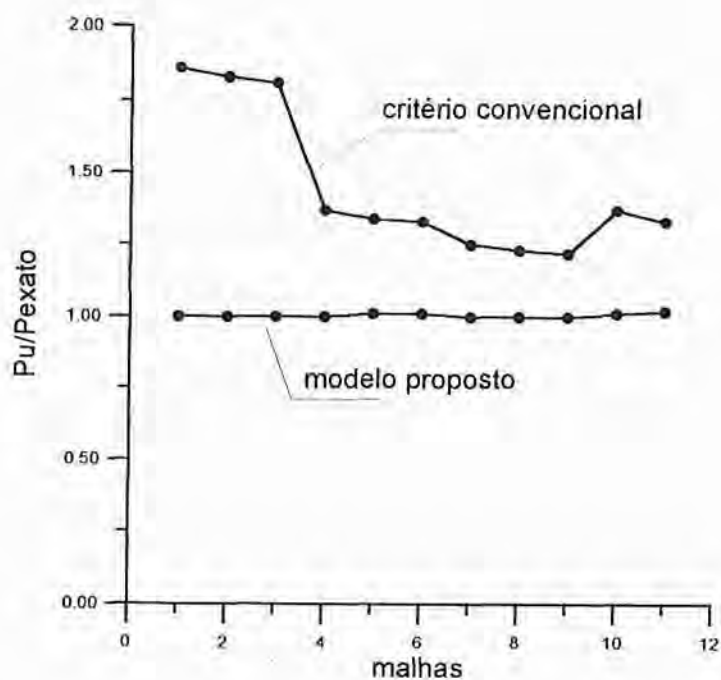


Figura 4.5.3 - Resultados para as diferentes malhas da viga

O segundo exemplo analisado é a camada de concreto mostrada na figura 4.2.1, submetida a um fluxo vertical de calor.

Para simular diferentes gradientes de tensões, admite-se que a camada é submetida a um fluxo de calor hipotético de forma que a variação de temperatura  $\Delta T$ , acumulada desde o lançamento da camada até o instante  $t$ , é obtida a partir da equação (4.2.2).

As funções  $F(y)$  empregadas na equação (4.2.2) são dadas por

$$F_1(y) = \text{sen} \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{y}{c} \right) \quad (4.5.1)$$

$$F_2(y) = 1 - \frac{y}{c} \quad (4.5.2)$$

$$F_3(y) = 2 \left( 1 - \frac{y}{c} \right) - \text{sen} \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{y}{c} \right) \quad (4.5.3)$$

sendo  $c = 2,5$  m a espessura da camada.

A tensão normal na direção  $x$  é dada na equação (4.2.4) e em virtude das expressões adotadas para as funções  $F(y)$ , conclui-se que a tensão máxima ocorre em  $y = 0$ . Introduzindo a expressão de  $\Delta T$  verifica-se que a tensão máxima é dada por

$$\sigma_{xmax} = -E\alpha T_0 \left[ e^{-t/a} - 1 \right] \quad (4.5.4)$$

A fissuração ocorrerá quando  $\sigma_{xmax} = f_t$ , sendo  $f_t$  a resistência à tração simples do concreto. Igualando a expressão (4.5.4) a  $f_t$ , pode-se obter o tempo de resfriamento  $t_r$  necessário para o surgimento da primeira fissura na camada. Esse tempo é dado por

$$t_r = -a \ln \left( 1 - \frac{f_t}{E\alpha T_0} \right) \quad (4.5.5)$$

No programa de elementos finitos, o tempo é incrementado desde  $t = 0$  e as tensões são calculadas considerando-se as variações de temperatura dadas em (4.2.2). O processo é interrompido quando fica constatado o surgimento da primeira fissura em algum ponto de integração, de acordo com o critério de fissuração apresentado anteriormente. O tempo de resfriamento,  $t_f$ , obtido dessa forma é comparado com o tempo exato,  $t_r$ , dado na equação (4.5.5).

Nas figuras 4.5.4 a 4.5.6, são apresentados os resultados obtidos com o critério proposto e com o critério de resistência convencional. Para efeito de comparação, apresentam-se os resultados com integração reduzida (2x2 pontos de Gauss) e com integração completa (3x3 pontos de Gauss). A discretização da camada é feita considerando-se 1, 2 e 3 elementos na vertical.

As propriedades do material são as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal = 30000 MPa; coeficiente de Poisson = 0; resistência à tração = 3 MPa; resistência à compressão = 30 MPa e coeficiente de dilatação térmica =  $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

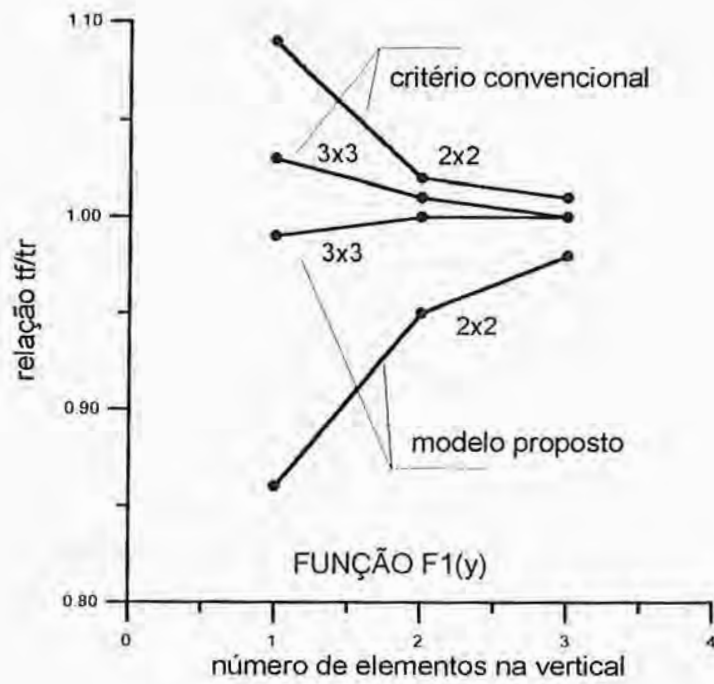


Figura 4.5.4 - Resultados para a função  $F_1(y)$

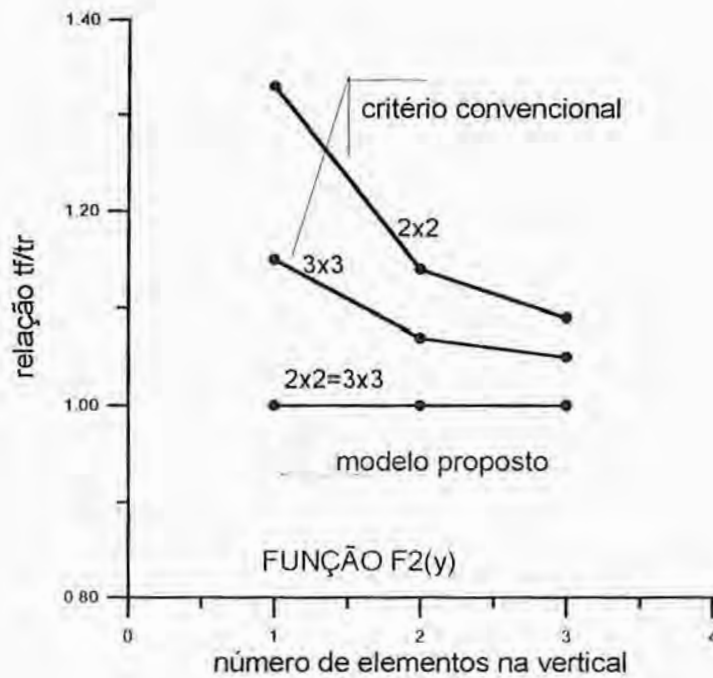


Figura 4.5.5 - Resultados para a função  $F_2(y)$

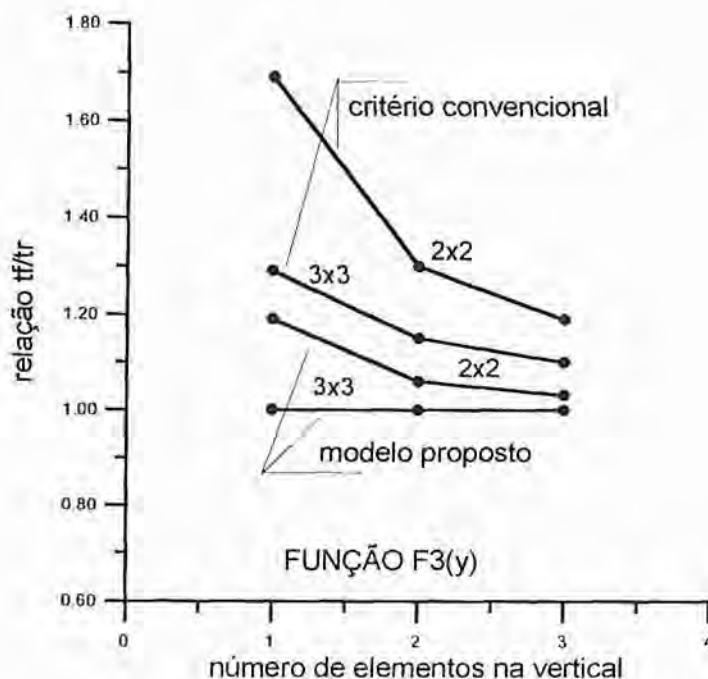


Figura 4.5.6 - Resultados para a função  $F_3(y)$

Analisando esses resultados conclui-se mais uma vez que o critério de resistência convencional é dependente da malha para as três funções  $F(y)$  consideradas. Neste exemplo, o modelo proposto com integração reduzida 2x2 só é independente da malha para a função  $F_2(y)$ , conforme se observa na figura 4.5.5. Isto ocorre porque esta função é linear e a projeção com 2x2 pode reproduzir a solução exata. Entretanto, com integração completa o modelo proposto se mostrou insensível à escolha da malha, independentemente da função  $F(y)$  escolhida. Por isso, adota-se a integração completa quando as tensões térmicas estão presentes.

#### 4.6- Critério de ruptura por esmagamento

Um procedimento análogo ao apresentado anteriormente é empregado para a determinação da resistência à compressão equivalente. De acordo com o critério de Kupfer e Gerstle, em tração-compressão,  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 < 0$ , a tensão de compressão de ruptura  $\sigma_{2u}$  é dada por

$$\sigma_{2u} = -f_c \quad (4.6.1)$$

Em compressão biaxial,  $\sigma_2 < \sigma_1 < 0$ , a tensão de ruptura é obtida da expressão<sup>[11]</sup>

$$\sigma_{2u} = f_c \left[ \frac{2\alpha - 1 - \sqrt{1 + 10,6\alpha}}{2} \right] \quad (4.6.2)$$

onde  $\alpha = -\sigma_1 / f_c$ .

Logo, definindo o coeficiente de risco de esmagamento

$$\Phi = \frac{\sigma_2}{\sigma_{2u}} \quad (4.6.3)$$

verifica-se que a ruptura por esmagamento se inicia onde  $\Phi$  é máximo.

Definindo  $\Phi_{pi}$  e  $\Phi_{no}$  como os maiores valores de  $\Phi$  que ocorrem nos pontos de integração e nos nós do elemento, respectivamente, se resultar  $\Phi_{pi} > \Phi_{no}$  significa que o esmagamento iniciará no próprio ponto de integração onde  $\Phi = \Phi_{pi}$ . Neste caso, a resistência à compressão uniaxial equivalente,  $f_{ce}$ , será igual à resistência à compressão simples  $f_c$ .

Se, por outro lado, resultar  $\Phi_{no} > \Phi_{pi}$ , o esmagamento iniciará no nó onde  $\Phi = \Phi_{no}$  e, para tornar os resultados objetivos, adota-se a resistência à compressão uniaxial equivalente

$$f_{ce} = f_c \frac{\Phi_{pi}}{\Phi_{no}} < f_c \quad (4.6.4)$$

Conhecida a resistência à compressão uniaxial equivalente do elemento, emprega-se o critério de Kupfer e Gerstle, com  $f_{ce}$  no lugar de  $f_c$ , para o cálculo da tensão de

ruptura equivalente  $\sigma_{2ue}$  em cada ponto de integração. Prosseguindo como no critério convencional, admite-se que o ponto de integração esmaga se  $\sigma_2 < \sigma_{2ue}$ .

#### 4.7- Algoritmo para o cálculo das tensões

Nesta seção, apresenta-se o algoritmo empregado para o cálculo das tensões no concreto. O concreto é considerado elástico linear e isotrópico até o surgimento da primeira fissura. Daí para frente, o material é considerado ortotrópico com os eixos de ortotropia fixos e coincidentes com as direções das fissuras. O critério de fissuração é baseado na resistência biaxial equivalente, conforme foi apresentado na seção 4.4.

Empregando-se o método dos elementos finitos na formulação em deslocamentos, os incrementos de deformações totais  $\Delta \mathcal{E}$  referidos ao sistema de eixos cartesianos x-y, para um incremento de tempo ou de carga, são dados por

$$\Delta \mathcal{E} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U} \quad (4.7.1)$$

onde  $\Delta \mathbf{U}$  são os incrementos de deslocamentos nodais do elemento e  $\mathbf{B}$  é a matriz de relações deformações-deslocamentos.

Os incrementos de tensões  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  são dados por

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_t (\Delta \mathcal{E} - \Delta \mathcal{E}_I) \quad (4.7.2)$$

onde  $\mathbf{D}_t$  é a matriz constitutiva ortotrópica tangente e  $\Delta \mathcal{E}_I$  é um vetor com os incrementos de deformações iniciais, a ser definido no capítulo 5.

A equação (4.7.2) pode ser escrita na forma

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_t \Delta \mathcal{E}_m \quad (4.7.3)$$

onde  $\Delta \mathcal{E}_m = \Delta \mathcal{E} - \Delta \mathcal{E}_I$  são os incrementos de deformações mecânicas.

Alternativamente, a equação (4.7.3) pode ser escrita como



$$\Delta\sigma = \mathbf{D}_L \Delta\mathcal{E}_m - \Delta\sigma_f \quad (4.7.4)$$

onde  $\mathbf{D}_L$  é a matriz constitutiva isotrópica linear e  $\Delta\sigma_f$  representa os desvios da linearidade decorrentes da fissuração.

Assim,  $\Delta\sigma_f$  é obtido por

$$\Delta\sigma_f = \Delta\sigma_L - \Delta\sigma \quad (4.7.5)$$

onde  $\Delta\sigma_L = \mathbf{D}_L \Delta\mathcal{E}_m$  são os incrementos lineares de tensões.

Essas equações são empregadas para o cálculo das tensões considerando-se os seguintes casos:

#### A) Ponto de integração não fissurado

Se o ponto de integração não estiver previamente fissurado, calculam-se os incrementos linearizados das tensões

$$\Delta\sigma_L = \mathbf{D}_L \Delta\mathcal{E}_m \quad (4.7.6)$$

As tensões atualizadas com o incremento linear serão

$$\sigma_L = \sigma_i + \Delta\sigma_L \quad (4.7.7)$$

onde  $\sigma_i$  é o vetor de tensões no instante anterior.

Com  $\sigma_L$  determinam-se as tensões principais  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  e aplica-se o critério de fissuração. Se  $\sigma_1 \leq \sigma_{lue}$ , onde  $\sigma_{lue}$  é a resistência à tração biaxial equivalente, não surge nenhuma fissura e o incremento real de tensões  $\Delta\sigma$  é igual a  $\Delta\sigma_L$ .

Se  $\sigma_1 > \sigma_{lue}$  surge uma fissura perpendicular à direção de  $\sigma_1$ . Neste caso, a tensão principal verdadeira é  $\sigma_{lv} = 0$ . Analogamente, se  $\sigma_2 > \sigma_{lue}$  surge uma segunda

fissura perpendicular à direção de  $\sigma_2$  e deve-se tomar a tensão verdadeira  $\sigma_{2v} = 0$ . Em caso contrário,  $\sigma_{2v} = \sigma_2$ . A rotação do vetor  $\sigma_v = \{\sigma_{1v}, \sigma_{2v}, 0\}^T$  para o sistema cartesiano global x-y fornece as tensões  $\sigma$  com as quais calculam-se os incrementos reais de tensões  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_i$ .

Os incrementos de deformações  $\Delta\mathcal{E}_f$  decorrentes da fissuração são dados por

$$\Delta\mathcal{E}_f = \mathbf{D}_L^{-1} \Delta\sigma_f = \mathbf{D}_L^{-1} (\Delta\sigma_L - \Delta\sigma) \quad (4.7.8)$$

com os quais calcula-se  $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{fi} + \Delta\mathcal{E}_f$ , sendo  $\mathcal{E}_{fi}$  o vetor de deformações decorrentes da fissuração acumulados até o instante anterior.

#### B) Ponto de integração fissurado

O comportamento pós-fissuração do concreto é indicado na figura 4.7.1.

Neste caso, a matriz constitutiva é dada no sistema de eixos locais 1-2 que passam pelas fissuras. Esses eixos são fixados no momento em que surge a primeira fissura.

O incremento linearizado das tensões  $\Delta\sigma_L$  no sistema global x-y é dado por

$$\Delta\sigma_L = \mathbf{D}_L \Delta\mathcal{E}_m \quad (4.7.9)$$

onde aqui  $\mathbf{D}_L = \mathbf{R}^T \mathbf{D}^* \mathbf{R}$ , sendo  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação das direções cartesianas globais x-y para as direções locais 1-2.

A matriz constitutiva para o concreto fissurado no sistema local é dada por

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.7.10)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos longitudinais tangentes nas direções 1 e 2 e  $G_{12}$  é o módulo de elasticidade transversal.

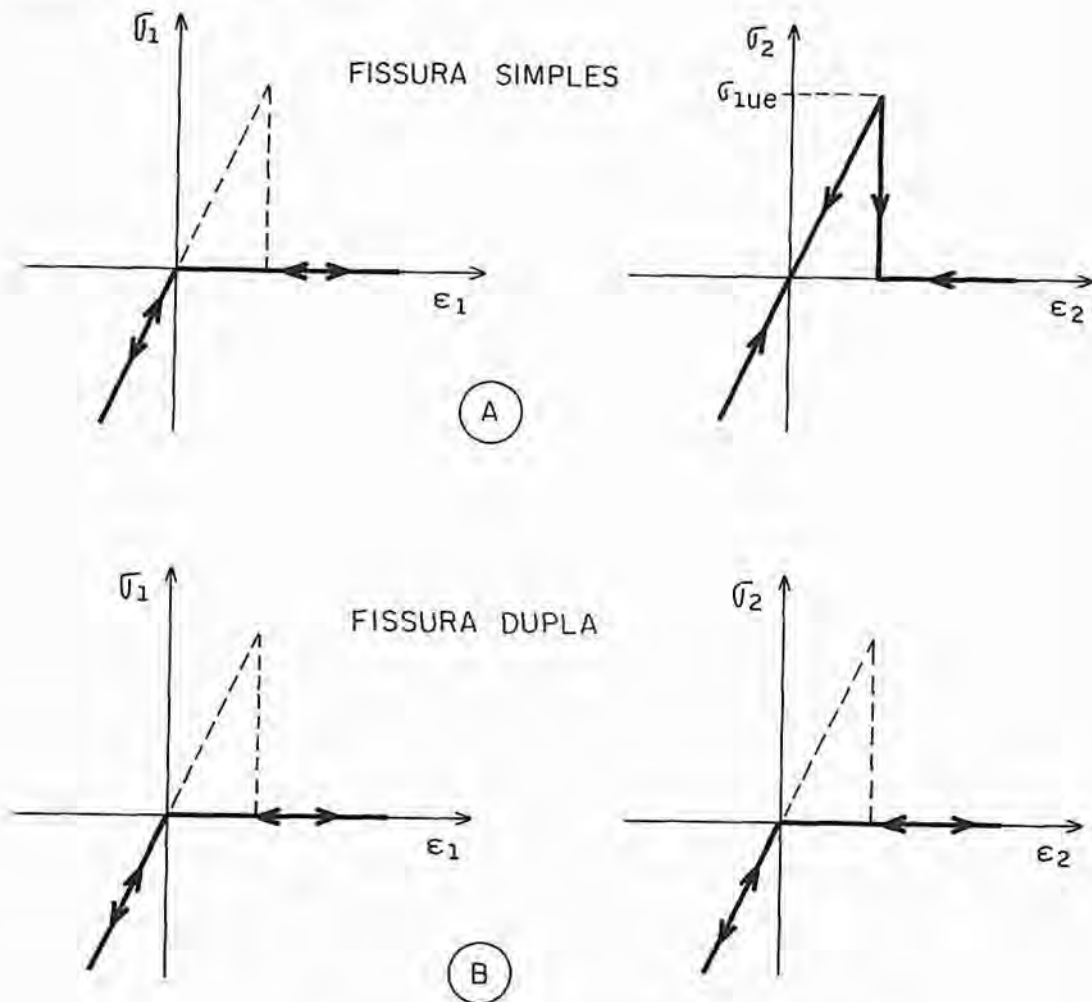


Figura 4.7.1- Comportamento pós-fissuração

O módulo  $G_{12}$  deve ser tomado como uma fração do módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado. Isto pode ser feito introduzindo-se um fator de redução de rigidez que pode ser constante ou dependente da deformação normal à fissura<sup>[41]</sup>. Alternativamente,  $G_{12}$  pode ser dado em função dos módulos de deformação longitudinal,  $E_1$  e  $E_2$ , conforme adotado por Darwin e Pecknold<sup>[43]</sup> e por Vecchio<sup>[105]</sup>.

Neste trabalho, adota-se a formulação de Darwin e Pecknold<sup>[43]</sup>, tomando  $G_{12}$  na forma

$$G_{12} = \frac{E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1E_2}}{4(1-\nu^2)} \quad (4.7.11)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Os módulos tangentes  $E_1$  e  $E_2$  são determinados em função das deformações de abertura das fissuras  $\varepsilon_{f1}^*$  e  $\varepsilon_{f2}^*$ . O vetor  $\mathcal{E}_f^*$  no sistema local 1-2 é dado por  $\mathcal{E}_f^* = \mathbf{R}\mathcal{E}_f$ , sendo  $\mathcal{E}_f$  as deformações atualizadas no sistema global x-y.

Se a fissura  $i$  (com  $i=1$  ou  $2$ ) estiver fechada,  $\varepsilon_{fi}^* \leq 0$ , o módulo tangente  $E_i$  será igual ao módulo de elasticidade do concreto não fissurado. Se a fissura estiver aberta,  $\varepsilon_{fi}^* > 0$  e  $E_i = 0$ .

Com o vetor  $\Delta\sigma_L$  dado pela equação (4.7.9), calculam-se as tensões  $\sigma_L = \sigma_i + \Delta\sigma_L$  e pode-se obter as tensões locais atualizadas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$  por uma simples rotação do vetor  $\sigma_L$ . Estas tensões poderão necessitar de correções dependendo do caso.

No caso de fissura simples, se  $\sigma_1 > 0$  deve-se adotar a tensão verdadeira  $\sigma_{1v} = 0$  e se  $\sigma_2 > \sigma_{1ue}$  deve-se fazer  $\sigma_{2v} = 0$ . Se essa segunda hipótese se verificar significa que surgiu uma segunda fissura.

No caso de fissura dupla, se  $\sigma_1 > 0$  deve-se tomar  $\sigma_{1v} = 0$  e se  $\sigma_2 > 0$  adota-se  $\sigma_{2v} = 0$ .

A rotação do vetor  $\sigma_v = \{\sigma_{1v}, \sigma_{2v}, \tau_{12}\}^T$  para o sistema de eixos globais x-y fornece  $\sigma$  e calcula-se o incremento real de tensões  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_i$ . Em seguida, calcula-se  $\Delta\mathcal{E}_f$  por

$$\Delta\mathcal{E}_f = \mathbf{D}_L^{-1}\Delta\sigma_f = \mathbf{D}_L^{-1}(\Delta\sigma_L - \Delta\sigma) \quad (4.7.12)$$

e pode-se atualizar as deformações  $\mathcal{E}_f$  decorrentes da fissuração.

## 5. COMPORTAMENTO REOLÓGICO DO CONCRETO

### 5.1- Introdução

O comportamento reológico do concreto, isto é, sua deformabilidade dependente do tempo, tem uma considerável importância na análise estrutural. As deformações diferidas do concreto (fluência e retração) podem alterar significativamente as tensões na estrutura, inclusive introduzindo um estado de fissuração indesejável.

A consideração desses efeitos requer o desenvolvimento de modelos constitutivos consistentes que representem o comportamento do material e de métodos numéricos para a análise estrutural.

O comportamento do concreto ao longo do tempo é fortemente influenciado pelas reações químicas decorrentes da hidratação do cimento. Esse fenômeno, denominado envelhecimento, ocorre de maneira contínua durante praticamente toda a vida útil da estrutura. Dessa maneira, as deformações do material dependem, além da duração do carregamento, da idade do concreto quando da aplicação das cargas.

Uma vez que a hidratação do cimento é uma reação exotérmica, a análise das tensões deve ser associada ao problema da condução de calor. O aumento da temperatura, por um lado, acelera o processo de envelhecimento e, por outro, acelera o fenômeno da fluência. Os ensaios realizados por Nasser e Lohtia<sup>[77]</sup> indicaram que a fluência aumenta com a temperatura até cerca de 71 °C. A partir desse valor a fluência diminui com a elevação da temperatura.

O comportamento do material depende, ainda, da troca de água com o meio ambiente. Essa troca é influenciada pela umidade relativa do ar e pelas dimensões do elemento estrutural.

Em virtude da baixa troca de água entre o concreto massa e o ambiente, devido às suas grandes dimensões, em barragens a retração por secagem ao ar é pequena. Nessas estruturas, a retração é autógena, ou seja, a secagem interna é causada pelo calor de hidratação do cimento. Segundo Bombich et al.<sup>[26]</sup> (citados por Truman et al.<sup>[102]</sup>) a retração autógena corresponde até a 95% da retração total em concreto massa.



Em vista desses fatores, a determinação precisa do modelo constitutivo torna-se muito complexa. Em geral, os modelos são obtidos a partir de ensaios realizados em condições especiais como, por exemplo, em condições ambientais constantes e fatores de correção são introduzidos para levar em conta a umidade relativa do ar e a temperatura.

Por outro lado, os algoritmos para a análise numérica devem ser otimizados em relação à taxa de ocupação da memória do computador e à velocidade de processamento. Em vista disto, as formulações geralmente empregadas são do tipo diferencial, o que pode ser obtido com o emprego de modelos reológicos.

## **5.2- Modelos lineares para a fluência do concreto**

Os modelos lineares geralmente empregados para representar a fluência do concreto são os apresentados pelo CEB<sup>[39,40]</sup>, pelo ACI<sup>[3]</sup> e a formulação proposta por Bazant e Panula<sup>[19]</sup>. Em todos esses modelos é admitida a hipótese da linearidade entre tensões e deformações.

A linearidade das deformações de fluência com a tensão, assim como das deformações iniciais, geralmente, é aceita até um nível de tensões da ordem de um terço da resistência média à compressão do concreto. Além desse limite, a microfissuração progressiva, que se inicia na interface agregado graúdo-argamassa, atingindo posteriormente o próprio agregado, introduz fortes não-linearidades. A fluência adicional devido à microfissuração é predominantemente irreversível<sup>[39]</sup>.

Normalmente, a fluência é classificada em básica e por secagem. A fluência básica é a que se desenvolve sem transferência de água entre o concreto e o ambiente. Isto ocorre em peças isoladas e muito aproximadamente em estruturas de concreto massa. Em condições de secagem as deformações de fluência são incrementadas.

Por razões de simplicidade é usual tratar os dois tipos de fluência com a mesma formulação, introduzindo-se fatores de correção para a umidade ambiente.

Os modelos propostos pelo ACI, CEB-90 e por Bazant e Panula são baseados em uma formulação do tipo produto. O efeito da idade do carregamento  $t'$  na fluência em um tempo  $t > t'$  é introduzido através de uma função de envelhecimento (dependente de  $t'$ ) que multiplica a função de dependência da duração do carregamento  $t - t'$ . No modelo do CEB-78, ao contrário, a formulação é do tipo soma, em que a deformação no tempo  $t$  é dividida em várias componentes.



A função de fluência  $J(t, t')$ , isto é, a deformação no instante  $t$  provocada por uma tensão unitária constante aplicada em  $t'$ , deve obedecer a uma série de restrições matemáticas. Estas restrições, envolvendo as derivadas de  $J(t, t')$  em relação a  $t$  e a  $t'$ , relacionam-se ao caráter crescente de  $J(t, t')$  e decrescente de sua taxa.

Uma vez que o objetivo deste trabalho é a análise de barragens de concreto (estruturas de concreto massa), apenas a fluência básica e a retração autógena são de interesse. Em virtude das grandes dimensões da estrutura, a troca de água com o ambiente é muito lenta e o seu efeito pode ser desprezado.

Nos estudos realizados com os concretos das principais barragens brasileiras, tem sido empregada uma função de fluência do tipo produto, análoga à proposta do ACI. A função de fluência é dada por

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{1}{V(t')} \ln(1 + t - t') \quad (5.2.1)$$

onde  $E(t')$  é o módulo de deformação longitudinal na idade  $t'$  e  $V(t')$  é uma função de envelhecimento.

Neste trabalho, adota-se a função de fluência dada em (5.2.1). As expressões para o módulo  $E(t')$  e para a função de envelhecimento  $V(t')$  são determinadas em função dos resultados experimentais e encontram-se indicadas no capítulo 8.

### **5.3- Métodos numéricos para a consideração da fluência do concreto**

Considerando a linearidade entre tensão e deformação, a deformação em um instante  $t$  para uma história de tensões aplicadas de  $t'$  a  $t$  pode ser obtida com o emprego do princípio da superposição.

Assim, a deformação total  $\varepsilon(t)$  no instante  $t$  é dada pela integral de Stieltjes

$$\varepsilon(t) = \int_{t'}^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) + \varepsilon_o(t) \quad (5.3.1)$$

onde  $\varepsilon_o(t)$  é a soma das deformações de retração, dilatação térmica e das deformações decorrentes da fissuração.

Se a história de tensões  $\sigma(t)$  é caracterizada pelo valor  $\sigma(t')$  em  $\tau = t'$ , a equação (5.3.1) é escrita na forma<sup>[39]</sup>

$$\varepsilon(t) = \sigma(t')J(t, t') + \int_{t'+}^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) + \varepsilon_o(t) \quad (5.3.2)$$

Quando  $\sigma(t)$  é contínua, pode-se empregar a integral de Rieman, dada por

$$\varepsilon(t) = \sigma(t')J(t, t') + \int_{t'+}^t J(t, \tau) \left[ \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \right] d\tau + \varepsilon_o(t) \quad (5.3.3)$$

O princípio da superposição, representado pelas equações (5.3.1) a (5.3.3), foi proposto para materiais sem envelhecimento por Boltzman e para materiais com envelhecimento por Volterra. Sua aplicação ao concreto foi introduzida por McHenry e Maslov<sup>[39]</sup>.

Conhecida a história de tensões, as equações anteriores podem ser integradas no tempo para a obtenção da história de deformações.

Se a história de deformações for conhecida, as tensões podem ser obtidas por

$$\sigma(t) = [\varepsilon(t') - \varepsilon_o(t')]R(t, t') + \int_{t'+}^t R(t, \tau) [d\varepsilon(\tau) - d\varepsilon_o(\tau)] \quad (5.3.4)$$

onde  $R(t, \tau)$  é a função de relaxação, ou seja, é a tensão no instante  $t$  causada por uma deformação unitária introduzida em  $\tau$  e mantida constante.

Em virtude das dificuldades para se obter experimentalmente a função de relaxação, a mesma pode ser determinada numericamente a partir do conhecimento da função de fluência. Para isto, basta considerar a história de deformações

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_o(t) = 0 \quad \text{se } t < t'$$

(5.3.5)

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_o(t) = 1 \quad \text{se } t \geq t'$$

e empregar a equação (5.3.2).

Uma vez que, neste caso, a tensão é representada pela função de relaxação,  $\sigma(\tau) = R(\tau, t')$  e a equação (5.3.2) toma a forma

$$1 = R(t', t')J(t, t') + \int_{t'+}^t J(t, \tau) dR(\tau, t') \quad (5.3.6)$$

A integração de (5.3.6) ao longo do tempo permite a obtenção da função de relaxação. É possível, também, obter a função de fluência a partir do conhecimento da função de relaxação, mas essa não é uma situação de real interesse.

A aplicação do princípio da superposição para a obtenção das tensões leva a um inconveniente computacional. Se a equação (5.3.2) for integrada numericamente, observa-se que o incremento das tensões em um determinado instante dependerá de todos os incrementos ocorridos nos instantes anteriores. Dessa forma, é necessário armazenar toda a história de tensões na memória do computador, o que torna o algoritmo impraticável para a solução de grandes problemas.

Para contornar o inconveniente da formulação integral, outras soluções são empregadas, particularmente, quando se utiliza o método dos elementos finitos.

Como uma primeira e grosseira aproximação, pode-se ignorar a variação da tensão no intervalo  $[t', t]$ , de forma que a equação (5.3.2) resume-se a

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_o}{J(t, t')} = E_{ce} [\varepsilon(t) - \varepsilon_o] \quad (5.3.7)$$

onde  $E_{ce} = 1 / J(t, t')$  é o módulo efetivo.

Evidentemente, se as variações da tensão forem significativas o erro cometido pelo emprego da equação (5.3.7) será grande. Para melhorar os resultados, pode-se empregar o método da tensão média ou o método do módulo efetivo ajustado<sup>[39]</sup>.

Outras soluções consistem em adotar uma expressão simplificada para a função de fluência e empregar uma formulação diferencial. Como exemplo, tem-se o método de Dischinger em que a função de fluência é tomada na forma

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + A(t) - A(t') \quad (5.3.8)$$

onde  $A(t)$  é uma função apenas da idade e não da duração do carregamento (teoria do envelhecimento).

Nessa formulação, admite-se que toda a deformação de fluência é viscosa e, portanto, irreversível, o que não concorda com os resultados experimentais.

Para melhorar a representação de  $J(t, t')$ , pode-se incluir a parcela viscoelástica (recuperável) da deformação considerando-a com o seu valor final. Neste caso, o termo  $1/E(t')$  representa a deformação elástica inicial e a parcela viscoelástica.

Para a função de fluência simplificada da equação (5.3.8), a relação tensão-deformação toma a forma diferencial<sup>[39]</sup>

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{dA}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varepsilon_o}{dt} \quad (5.3.9)$$

Pode ser mostrado que a equação (5.3.9) corresponde a um modelo de Maxwell com viscosidade dependente da idade<sup>[17]</sup>. Essa equação diferencial pode ser integrada numericamente para a obtenção das tensões. O grande atrativo do método é que apenas o valor atual da tensão necessita ser armazenado. Entretanto, a função de fluência dada por (5.3.8) não representa satisfatoriamente o comportamento do concreto.

Outros modelos reológicos com parâmetros dependentes da idade podem ser usados para aproximar a função de fluência do concreto<sup>[17,63]</sup>. Para melhorar a representação, pode-se empregar cadeias ou associações de molas e amortecedores com parâmetros

dependentes da idade. Em geral, empregam-se as cadeias de Maxwell e de Kelvin para representar as funções de relaxação e de fluência, respectivamente<sup>[23,24,53,76]</sup>.

Dessa forma, resultam um conjunto de equações diferenciais que podem ser integradas para a obtenção da relação tensão-deformação. Apenas as tensões atuais nos elementos da cadeia de Maxwell, ou as deformações atuais dos elementos da cadeia de Kelvin, necessitam ser armazenadas. Com isso, consegue-se representar com rigor o comportamento do concreto sem ocupar demasiadamente a memória do computador.

Neste trabalho, as relações tensão-deformação são obtidas pela formulação diferencial. A formulação adotada é proposta por Bazant e Prasanna<sup>[20,21]</sup> e é baseada na teoria da solidificação. Nessa teoria, o envelhecimento do concreto é considerado através da evolução de volume do material solidificado. Com isso, pode-se empregar a cadeia de Kelvin com parâmetros constantes, o que torna a formulação bastante atrativa.

Nas seções seguintes, é apresentada a formulação para o caso uniaxial bem como sua extensão ao caso bidimensional.

#### **5.4- Modelo reológico para o concreto**

Conforme já foi salientado, a eficiência da análise estrutural incluindo a fluência do concreto depende da utilização de uma equação constitutiva em forma de taxas. A obtenção dessa forma diferencial é possível com o emprego de modelos reológicos compostos por molas e amortecedores. No caso mais geral, o comportamento do material pode ser descrito pelas cadeias de Maxwell ou de Kelvin. Em virtude do envelhecimento, geralmente, os coeficientes das molas e dos amortecedores são considerados dependentes da idade.

A cadeia de Maxwell tem a desvantagem de ser obtida a partir da função de relaxação que, normalmente, não é determinada experimentalmente. Então, um algoritmo de integração passo a passo deve ser empregado para se obter a função de relaxação a partir da função de fluência. Além disso, os coeficientes das molas e dos amortecedores podem resultar negativos e torna-se necessário introduzir alguma forma de penalização para garantir que esses coeficientes sejam positivos<sup>[24]</sup>.

Por outro lado, a cadeia de Kelvin com parâmetros dependentes da idade leva a equações diferenciais de segunda ordem, enquanto que para a cadeia de Maxwell as equações são de primeira ordem. Além disso, os coeficientes das molas também podem resultar negativos para pequenas durações da carga e tempos de retardamento elevados<sup>[23]</sup>.



Para contornar esses problemas, Bazant e Prasannan<sup>[20,21]</sup> propuseram um modelo de fluência para o concreto baseado na micromecânica do processo de envelhecimento. Nesse modelo, o envelhecimento é introduzido pela variação do volume  $V(t)$  do material solidificado. Dessa forma, é possível associar o modelo reológico com o comportamento de um pequeno elemento do material, em vez do concreto como um todo. Assim, as constantes de mola e as viscosidades serão independentes do tempo, como na viscoelasticidade linear clássica. Nessas condições, a cadeia de Kelvin torna-se mais atrativa do que a cadeia de Maxwell.

De acordo com o modelo de Bazant e Prasannan, a taxa de deformação viscoelástica  $\dot{\epsilon}_{ve}(t)$  é dada por

$$\dot{\epsilon}_{ve}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t-t')}{V(t)} \quad (5.4.1)$$

onde  $\dot{\gamma}(t-t')$  é a taxa de deformação viscoelástica de um material sem envelhecimento e  $V(t)$  representa o volume efetivo do material solidificado no instante  $t$ .

Dessa forma, o modelo reológico é empregado para a determinação de  $\gamma(t-t')$  e a função  $V(t)$  é obtida a partir dos resultados experimentais.

Na figura 5.4.1, representa-se a cadeia de Kelvin com  $N$  elementos. O módulo de elasticidade e a viscosidade do elemento genérico  $\mu$  são  $E_\mu$  e  $\eta_\mu$ , respectivamente.

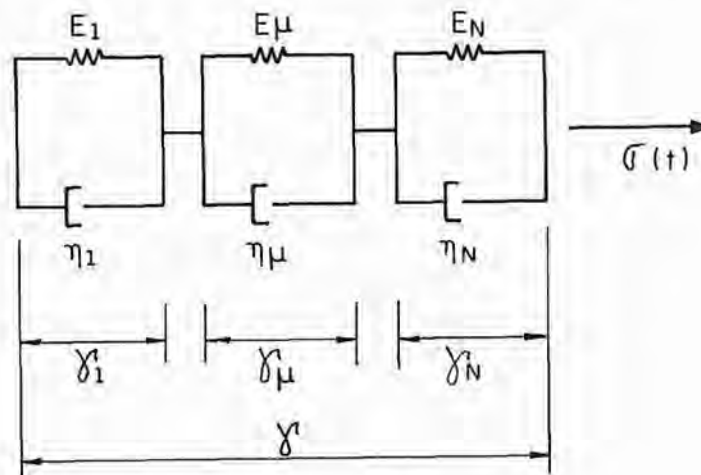


Figura 5.4.1 - Cadeia de Kelvin



Se  $\gamma_\mu$  é a deformação do elemento genérico, as equações diferenciais da cadeia de Kelvin sem envelhecimento são

$$E_\mu \dot{\gamma}_\mu + \eta_\mu \dot{\gamma}_\mu = \sigma(t), \quad \mu = 1, \dots, N \quad (5.4.2)$$

e

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^N \gamma_\mu \quad (5.4.3)$$

é a deformação total.

Integrando (5.4.2) para uma tensão  $\sigma = 1$  aplicada na idade  $t'$  e usando (5.4.3), resulta

$$\gamma(t) = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{E_\mu} \left( 1 - e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_\mu}\right)} \right) \quad (5.4.4)$$

onde  $\tau_\mu = \eta_\mu / E_\mu$  são os tempos de retardamento da fluência.

A série definida na equação (5.4.4), denominada série de Dirichlet, pode representar várias curvas de fluência com adequada escolha dos parâmetros  $E_\mu$  e  $\tau_\mu$  e do número de termos  $N$ .

Para a função de fluência dada na equação (5.2.1), resulta

$$\ln(1 + \xi) \cong \sum_{\mu=1}^N A_\mu \left( 1 - e^{-\frac{\xi}{\tau_\mu}} \right) \quad (5.4.5)$$

com  $\xi = t - t'$  e  $A_\mu = 1 / E_\mu$ .

Os coeficientes  $A_\mu$  podem ser obtidos pelo método dos mínimos quadrados, desde que os tempos de retardamento  $\tau_\mu$  sejam previamente escolhidos. De acordo com Bazant e Wu<sup>[24]</sup>, esses tempos devem ser escolhidos como

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \tau_1, \quad \mu = 1, \dots, N \quad (5.4.6)$$

Na tabela 5.4.1, estão indicados os valores dos coeficientes  $A_\mu$  obtidos considerando-se  $\tau_1 = 1$  dia e  $N = 5$ .

Tabela 5.4.1 - Coeficientes  $A_\mu$

$\mu$	1	2	3	4	5
$A_\mu$	0,8044	2,0977	2,2978	2,2116	2,8422

O efeito da temperatura pode ser introduzido tomando os tempos de retardamento modificados  $\tilde{\tau}_\mu$  dados por

$$\tilde{\tau}_\mu = \frac{\tau_\mu}{f(T)} \quad (5.4.7)$$

onde  $f(T)$  depende da temperatura  $T$  em °K.

Segundo Bazant e Chern<sup>[16]</sup>, a função  $f(T)$  é dada por

$$f(T) = e^{\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \frac{U_a}{R}} \quad (5.4.8)$$

onde  $T_0 = 298$  °K (=25°C) é a temperatura de referência,  $U_a$  é a energia de ativação da fluência e  $R$  é uma constante.

Além disso, a idade real  $t$  deve ser substituída pelo período de hidratação equivalente,  $t_e$ , dado por

$$t_e = \int \beta_T dt \cong \sum \beta_T \Delta t \quad (5.4.9)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo real.

A função  $\beta_T$ , que considera a aceleração do envelhecimento com a temperatura, é dada por<sup>[16]</sup>

$$\beta_T = e^{\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \frac{U_h}{R}} \quad (5.4.10)$$

sendo  $U_h$  a energia de ativação da hidratação.

As relações  $U_a / R$  e  $U_h / R$  podem ser dadas em função da temperatura. Entretanto, valores médios fornecem resultados satisfatórios. Longo<sup>[76]</sup> adota os valores

$$\frac{U_a}{R} = 5000 \text{ }^\circ\text{K} \quad ; \quad \frac{U_h}{R} = 2700 \text{ }^\circ\text{K} \quad (5.4.11)$$

que são empregados neste trabalho.

As funções  $f(T)$  e  $\beta_T$  são avaliadas considerando-se a temperatura atual no centro de cada elemento finito (definido como o ponto de coordenadas locais  $\xi = \eta = 0$ ). Assim, todas as propriedades do concreto, como a função de envelhecimento  $V(t)$ , o módulo de deformação longitudinal  $E(t)$  e as resistências à tração e à compressão,  $f_t(t)$  e  $f_c(t)$ , serão obtidas em função do período de hidratação equivalente  $t_e$  de cada elemento.

### 5.5- Equação constitutiva incremental

A equação diferencial (5.4.2) da cadeia de Kelvin é integrada no tempo usando o algoritmo apresentado por Bazant e Prasannan. Neste algoritmo, admite-se que a tensão  $\sigma(t)$  varia linearmente no intervalo de tempo  $[t_i, t_{i+1}]$ , ou seja,

$$\sigma(t) = \sigma_i + \frac{(t - t_i)}{\Delta t} \Delta \sigma \quad (5.5.1)$$

onde  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  é o tamanho do intervalo de tempo e  $\Delta \sigma$  é a variação da tensão.

Introduzindo (5.5.1) na equação diferencial, integrando e aplicando a condição inicial  $\gamma_{\mu} = \gamma_{\mu_i}$  em  $t = t_i$ , pode-se encontrar a expressão para  $\gamma_{\mu}(t)$ . No instante  $t = t_{i+1}$ , obtém-se

$$\gamma_{\mu_{i+1}} = \gamma_{\mu_i} e^{-\Delta y_{\mu}} + \frac{\sigma_i}{E_{\mu}} \left(1 - e^{-\Delta y_{\mu}}\right) + \left(\frac{1 - \lambda_{\mu}}{E_{\mu}}\right) \Delta \sigma \quad (5.5.2)$$

onde

$$\Delta y_{\mu} = \frac{\Delta t}{\tau_{\mu}} \quad ; \quad \lambda_{\mu} = \frac{1 - e^{-\Delta y_{\mu}}}{\Delta y_{\mu}} \quad (5.5.3)$$

O incremento de deformação viscoelástica sem envelhecimento no intervalo de tempo é dado por

$$\Delta \gamma = \sum_{\mu=1}^N (\gamma_{\mu_{i+1}} - \gamma_{\mu_i}) \quad (5.5.4)$$

Introduzindo (5.5.2) em (5.5.4), resulta

$$\Delta\gamma = \Delta\sigma \sum_{\mu=1}^N \frac{1-\lambda_{\mu}}{E_{\mu}} + \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu_i} \left(1 - e^{-\Delta y_{\mu}}\right) \quad (5.5.5)$$

onde

$$\varepsilon_{\mu_i} = \frac{\sigma_i}{E_{\mu}} - \gamma_{\mu_i} \quad (5.5.6)$$

Uma expressão análoga a (5.5.6) pode ser escrita para o instante  $t_{i+1}$  na forma

$$\varepsilon_{\mu_{i+1}} = \frac{\sigma_{i+1}}{E_{\mu}} - \gamma_{\mu_{i+1}} \quad (5.5.7)$$

Considerando que  $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma$  e substituindo a expressão de  $\gamma_{\mu_{i+1}}$ , a equação (5.5.7) é escrita como

$$\varepsilon_{\mu_{i+1}} = \frac{\lambda_{\mu} \Delta\sigma}{E_{\mu}} + \varepsilon_{\mu_i} e^{-\Delta y_{\mu}} \quad (5.5.8)$$

que permite atualizar as variáveis  $\varepsilon_{\mu}$  em função do incremento de tensão  $\Delta\sigma$ .

Para o material com envelhecimento, a taxa de deformação total  $\dot{\varepsilon}$  é dada por

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_a \quad (5.5.9)$$

onde

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} \quad (5.5.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ve} = \frac{\dot{\gamma}(t-t')}{V(t)} \quad (5.5.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_o = \dot{\varepsilon}_s(t) + \dot{\varepsilon}_T(t) + \dot{\varepsilon}_f(t) \quad (5.5.12)$$

Nessas expressões,  $\dot{\varepsilon}_e$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ve}$ ,  $\dot{\varepsilon}_s$ ,  $\dot{\varepsilon}_T$  e  $\dot{\varepsilon}_f$  representam as taxas de deformações elástica, viscoelástica, de retração, térmica e decorrente da fissuração, respectivamente.

O incremento de deformação total  $\Delta\varepsilon$  no intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  é obtido integrando-se a equação (5.5.9), isto é,

$$\Delta\varepsilon = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\gamma}(t-t')}{V(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varepsilon}_o(t) dt \quad (5.5.13)$$

Admitindo que o módulo de elasticidade  $E$  e a função de envelhecimento  $V$  são constantes no intervalo de tempo, resulta

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E_{i+1/2}} + \frac{\Delta\gamma}{V_{i+1/2}} + \Delta\varepsilon_o \quad (5.5.14)$$

onde  $E_{i+1/2} = E(t_{i+1/2})$ ,  $V_{i+1/2} = V(t_{i+1/2})$ , sendo  $t_{i+1/2}$  o meio do intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Introduzindo em (5.5.14) a expressão de  $\Delta\gamma$  dada em (5.5.5), chega-se à equação incremental

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E^*} + \Delta\varepsilon^* \quad (5.5.15)$$

onde

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_{i+1/2}} + \sum_{\mu=1}^N \frac{1 - \lambda_{\mu}}{V_{i+1/2} E_{\mu}} \quad (5.5.16)$$



$$\Delta \mathcal{E}^* = \sum_{\mu=1}^N \mathcal{E}_{\mu_i}^* \left(1 - e^{-\Delta y_{\mu}}\right) + \Delta \mathcal{E}_o \quad (5.5.17)$$

As variáveis  $\mathcal{E}_{\mu}^*$  são atualizadas introduzindo o envelhecimento na equação (5.5.8), ou seja,

$$\mathcal{E}_{\mu_{i+1}}^* = \frac{\lambda_{\mu} \Delta \sigma}{V_{i+1/2} E_{\mu}} + \mathcal{E}_{\mu_i}^* e^{-\Delta y_{\mu}} \quad (5.5.18)$$

As equações anteriores podem ser generalizadas admitindo-se a isotropia. Então, a equação (5.5.15) é escrita na forma

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* \Delta \boldsymbol{\mathcal{E}} - \mathbf{D}^* \Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \quad (5.5.19)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  e  $\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}$  representam os vetores de incrementos de tensões e de deformações e  $\mathbf{D}^*$  é a matriz constitutiva isotrópica linear para estado plano de tensões avaliada com o coeficiente de Poisson  $\nu$  e com o módulo de elasticidade efetivo  $E^*$  dado em (5.5.16).

Observa-se que esta equação é idêntica à equação (4.7.4) se  $\mathbf{D}_L = \mathbf{D}^*$ ,  $\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}_m = \Delta \boldsymbol{\mathcal{E}} - \Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^*$  e  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{0}$ . Assim, os desvios da isotropia decorrentes da fissuração são incluídos no vetor de deformações iniciais  $\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^*$ . Com o emprego do método dos elementos finitos, esses desvios serão introduzidos como cargas nodais equivalentes.

O vetor de deformações  $\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^*$  é dado por

$$\Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}^* = \sum_{\mu=1}^N \mathcal{E}_{\mu_i}^* \left(1 - e^{-\Delta y_{\mu}}\right) + \Delta \boldsymbol{\mathcal{E}}_o \quad (5.5.20)$$

e as deformações  $\mathcal{E}_{\mu}^*$  são atualizadas com o emprego da equação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_{i+1}}^* = \mathbf{D}_{\mu}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + e^{-\Delta y_{\mu}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_i}^* \quad (5.5.21)$$

sendo  $\mathbf{D}_{\mu}^{-1}$  a inversa da matriz constitutiva isotrópica linear avaliada com um módulo de elasticidade igual a  $V_{i+1/2} E_{\mu} / \lambda_{\mu}$ .

Observa-se, então, que apenas as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}^*$  dos elementos da cadeia de Kelvin necessitam ser armazenadas.

O vetor  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_o$  é dado por

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_o = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_T + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (5.5.22)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s$ ,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_T$  e  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_f$  representam os incrementos de deformações decorrentes da retração, da variação de temperatura e da fissuração, respectivamente.

Para um estado plano de tensões, o vetor  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s$  é dado por

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_s \\ \Delta \varepsilon_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5.23)$$

onde  $\Delta \varepsilon_s = \varepsilon_s(t_{i+1}) - \varepsilon_s(t_i)$  é o incremento da retração no intervalo de tempo.

O vetor  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_T$ , no caso de estado plano de tensões, é dado por

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_T = \alpha \begin{Bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5.24)$$

sendo  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica do concreto e  $\Delta T$  é a variação de temperatura no intervalo de tempo.

O vetor  $\Delta \mathcal{E}_f$ , representando os desvios da linearidade em consequência da fissuração, é obtido conforme foi descrito no capítulo 4.

Neste trabalho, a equação (5.5.19) também é empregada para a rocha de fundação, mas desconsiderando-se os efeitos da fluência, da retração e da fissuração. Entretanto, em virtude das grandes dimensões do maciço rochoso, uma condição de estado plano de deformações é adotada.

Então, empregando-se a equação (5.5.19),  $\mathbf{D}^*$  representa a matriz constitutiva isotrópica para estado plano de deformações avaliada com o coeficiente de Poisson  $\nu_r$  e com o módulo de elasticidade longitudinal  $E_r$  da rocha. O vetor  $\Delta \mathcal{E}^*$  é dado por

$$\Delta \mathcal{E}^* = \Delta \mathcal{E}_T \quad (5.5.25)$$

onde

$$\Delta \mathcal{E}_T = (1 + \nu_r) \alpha_r \begin{Bmatrix} \Delta T \\ \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5.26)$$

sendo  $\alpha_r$  o coeficiente de dilatação térmica da rocha.

### **5.6- O emprego do método dos elementos finitos**

Empregando o método dos elementos finitos, as equações incrementais de equilíbrio para um elemento genérico são escritas na forma

$$\Delta \mathbf{P}(t) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (5.6.1)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais,  $\Delta \mathbf{P}$  e  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  são os incrementos de cargas nodais e de tensões, respectivamente, e a integração é efetuada no domínio  $\Omega_e$  do elemento.

Introduzindo a equação (5.5.19) e lembrando que  $\Delta \mathcal{E} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}$ , sendo  $\Delta \mathbf{U}$  o vetor com os incrementos de deslocamentos nodais, resulta

$$\Delta \mathbf{F}(t) = \Delta \mathbf{P}(t) + \Delta \mathbf{P}^*(t) = \mathbf{K}^*(t) \Delta \mathbf{U} \quad (5.6.2)$$

onde

$$\Delta \mathbf{P}^*(t) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^*(t) \Delta \mathcal{E}^* d\Omega \quad (5.6.3)$$

é um vetor de cargas equivalentes às deformações impostas  $\Delta \mathcal{E}^*$  e

$$\mathbf{K}^*(t) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^*(t) \mathbf{B} d\Omega \quad (5.6.4)$$

é a matriz de rigidez do elemento.

O acoplamento das equações para todo o sistema formado pela barragem e pela fundação leva a equações similares a (5.6.2), onde as matrizes e os vetores são globais.

Em virtude do envelhecimento do concreto, a matriz de rigidez é variável com o tempo  $t$ , já que  $\mathbf{D}^*$  é obtida com o módulo efetivo dado por (5.5.16). Assim, a solução das equações de equilíbrio requer a montagem e a decomposição da matriz de rigidez em cada instante  $t$ , o que pode levar a um grande esforço computacional.

Para contornar esse inconveniente, usualmente, adotam-se incrementos de tempo diferentes nas análises de transferência de calor e de tensões. Pereira<sup>[83]</sup>, por exemplo, adota  $\Delta t = 0,5$  dia para o cálculo das temperaturas e  $\Delta t = 2$  dias para o cálculo das tensões. Entretanto, este procedimento leva a resultados pouco precisos, particularmente, nas primeiras horas após o lançamento de uma camada.

Neste trabalho, adota-se o mesmo incremento de tempo para o cálculo das temperaturas e das tensões. Entretanto, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^*$  só é montada e decomposta em alguns instantes de referência  $t_r$ , e iterações são empregadas para a solução do sistema.

Numa primeira iteração, a equação (5.6.2) é escrita na forma

$$\Delta \mathbf{F}(t) = \mathbf{K}^*(t_r) \Delta \mathbf{U}_1 \quad (5.6.5)$$

o que permite determinar a primeira aproximação  $\Delta \mathbf{U}_1$  para o incremento de deslocamentos nodais.

O vetor de desequilíbrio  $\Psi$ , resultante da aplicação de (5.6.5), é

$$\Psi = \Delta \mathbf{F}(t) - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^*(t) \Delta \mathcal{E} d\Omega \quad (5.6.6)$$

onde  $\Delta \mathcal{E} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_1$ .

A solução  $\Delta \mathbf{U}$  é encontrada quando  $\Psi = \mathbf{0}$ .

Diversos métodos iterativos podem ser empregados para esse fim. Um estudo detalhado de várias alternativas com a verificação de sua eficiência computacional é apresentado por Araújo e Bignon<sup>[9]</sup>. Foi demonstrado que o método BFGS é um dos mais eficientes para a solução do problema e, por isso, esse método é empregado neste trabalho.

Encontrado  $\Delta \mathbf{U}$ , as tensões e o vetor  $\Delta \mathcal{E}_f$  de fissuração são calculados conforme foi apresentado no capítulo 4.

Os instantes de referência  $t_r$  para a montagem da matriz de rigidez são escolhidos numa escala logarítmica para melhor acompanhar o envelhecimento do concreto. Assim, se  $t_o$  é o instante de lançamento de uma camada de concreto e  $t_n$  representa o instante de lançamento da camada seguinte, os tempos de referência são obtidos da equação

$$\ln \left( \frac{t_r^{i+1} - t_o}{t_r^i - t_o} \right) = \frac{1}{M} \ln \left( \frac{t_n - t_o}{t_r^1 - t_o} \right) \quad (5.6.7)$$

sendo  $M$  um número necessário para garantir a precisão e a estabilidade numérica.

O primeiro tempo de referência,  $t_r^1$ , é tomado igual a

$$t_r^1 = t_o + \Delta t \quad (5.6.8)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo real empregado na análise.

Nos exemplos apresentados no capítulo 9, as camadas são lançadas de 10 em 10 dias e o incremento de tempo  $\Delta t$  é igual a 0,5 dia. Neste caso, a equação (5.6.7) é dada por

$$\ln\left(\frac{t_r^{i+1} - t_o}{t_r^i - t_o}\right) = \frac{1}{M} \ln 20 \quad (5.6.9)$$

Uma análise da precisão e estabilidade numérica indicou que  $M$  deve ser maior ou igual a 3. Adotando  $M = 3$ , a matriz de rigidez é redefinida em apenas três instantes de referência e as tensões são calculadas considerando-se 20 incrementos de tempo entre o lançamento de duas camadas sucessivas. Com esse procedimento, conseguiu-se uma redução significativa do tempo de processamento, já que poucas iterações são necessárias para a convergência do método BFGS.



## 6. INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO-FUNDAÇÃO

### 6.1- Introdução

Um importante carregamento que deve ser considerado no projeto de barragens de concreto é o decorrente de uma excitação sísmica. Mesmo em regiões de baixa intensidade sísmica, como é o caso do Brasil, esse carregamento sempre é considerado no projeto das grandes barragens. No projeto da barragem de Tucuruí, por exemplo, a excitação sísmica foi considerada tomando-se uma aceleração da superfície com componentes iguais a  $0,05g$  e  $0,03g$  nas direções horizontal e vertical, respectivamente, sendo  $g$  a aceleração da gravidade<sup>[33]</sup>.

Nos procedimentos de projeto tradicionais, a excitação sísmica é introduzida através de forças estáticas equivalentes. Essas forças são obtidas considerando-se a massa da barragem acrescida da massa de água de uma parte do reservatório. Entretanto, essa formulação pseudo-estática não reproduz com rigor o comportamento dinâmico do conjunto barragem-reservatório-fundação.

A interpretação dos resultados pseudo-estáticos pode levar à conclusões errôneas a respeito da segurança da estrutura. Léger e Katsouli<sup>[68]</sup>, por exemplo, apresentam vários exemplos nos quais os resultados pseudo-estáticos sugerem a instabilidade da estrutura, enquanto que pela análise dinâmica a segurança é garantida.

Para tratar de maneira satisfatória esse problema de interação, é necessário analisar o movimento do fluido (água) ocasionado pela vibração da barragem. Em geral, o fluido é considerado sem viscosidade e admite-se, ainda, que o movimento é irrotacional e se dá a baixas velocidades, o que implica em se desprezar os termos convectivos das equações do movimento.

Diversos modelos de interação fluido-estrutura têm sido desenvolvidos para este fim. Os modelos diferem quanto à formulação adotada para o fluido.

Em algumas formulações, os deslocamentos do fluido são usados como as incógnitas básicas. Esse método é empregado, por exemplo, por Hamdi et al.<sup>[55]</sup> e por Olson e Bathe<sup>[80]</sup>. A principal vantagem da formulação em deslocamentos é que os elementos de fluido podem ser acoplados aos elementos da estrutura da forma usual e as equações do movimento

são simétricas. A principal desvantagem, comparada com as formulações escalares, é o maior número de incógnitas nodais.

Além disso, a formulação em deslocamentos leva a elementos excessivamente rígidos e integração reduzida deve ser empregada para melhorar os resultados. Entretanto, a integração reduzida ocasiona vorticidade no movimento e a condição de irrotacionalidade deve ser introduzida em forma de penalidade (Fenves e Loli<sup>[46]</sup>).

Formulações mistas em pressão e deslocamento também têm sido usadas<sup>[46,75]</sup>. Novamente, a condição de irrotacionalidade deve ser forçada.

O modelo do fluido pode, também, ser baseado em alguma formulação escalar. Isso pode ser feito em termos de uma função potencial dos deslocamentos ou das velocidades. Como alternativa, a pressão hidrodinâmica pode ser empregada como a incógnita básica (Sharan<sup>[90]</sup>, Sharan e Gladwell<sup>[91]</sup>, Zienkiewicz e Bettess<sup>[112]</sup>).

As formulações escalares são vantajosas pelo menor número de incógnitas nodais para o fluido. Além disso, a condição de irrotacionalidade é automaticamente garantida. Entretanto, as equações do sistema fluido-estrutura são assimétricas, o que exige métodos especiais para a integração no tempo.

Neste trabalho, é empregada a formulação em pressão conforme apresentado por Zienkiewicz e Bettess<sup>[112]</sup>. Entretanto, as equações são escritas em forma incremental para compatibilizá-las com as equações da estrutura e da fundação.

## 6.2- Equações do movimento do fluido

Considerando o fluido sem viscosidade e o escoamento com baixas velocidades, o que implica em desprezar os termos convectivos, as equações do movimento para o caso bidimensional (equações de Euler) são dadas por<sup>[89]</sup>

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g_x = 0 \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g_y = 0 \quad (6.2.2)$$

onde  $V_x$  e  $V_y$  = componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $\rho$  = densidade do fluido;  $p$  = pressão hidrodinâmica;  $g_x$  e  $g_y$  = componentes da aceleração da gravidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $t$  = tempo.

Considerando o fluido quase incompressível, a equação de estado é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6.2.3)$$

onde  $C$  é a velocidade do som no fluido.

Neste caso, a equação da continuidade toma a forma

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.2.4)$$

Diferenciando (6.2.3) em relação ao tempo  $t$ , resulta

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \ddot{\rho} = \frac{\ddot{p}}{C^2} \quad (6.2.5)$$

Diferenciando (6.2.1) em relação a  $x$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial t} + \frac{\rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^2} = 0 \quad (6.2.6)$$

e desprezando o termo  $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ , resulta

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (6.2.7)$$

Diferenciando (6.2.2) em relação a  $y$  e desprezando o termo de segunda ordem, resulta

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (6.2.8)$$

Diferenciando (6.2.4) em relação a  $t$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial t \partial y} + \frac{\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2}{\rho^2} = 0 \quad (6.2.9)$$

e desprezando o termo de segunda ordem, resulta

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial t \partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.2.10)$$

Admitindo continuidade suficiente para permitir a troca das ordens de diferenciação, das equações (6.2.7) e (6.2.8) obtém-se

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (6.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial t \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (6.2.12)$$

Substituindo (6.2.11) e (6.2.12) em (6.2.10), chega-se a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.2.13)$$

Introduzindo a equação de estado (6.2.5) em (6.2.13), resulta

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\ddot{p}}{C^2} = 0 \quad (6.2.14)$$

que é a equação diferencial para o fluido.

Esta equação deve ser verificada para cada instante  $t$ . Se no instante  $t_m$  a pressão hidrodinâmica é  $p_m$ , a equação diferencial toma a forma

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_m}{\partial y^2} - \frac{\ddot{p}_m}{C^2} = 0 \quad (6.2.15)$$

No instante  $t_{m+1} = t_m + \Delta t$  a pressão é  $p_m + \Delta p$  e a equação será

$$\frac{\partial^2 (p_m + \Delta p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (p_m + \Delta p)}{\partial y^2} - \frac{(\ddot{p}_m + \Delta \ddot{p})}{C^2} = 0 \quad (6.2.16)$$

Introduzindo (6.2.15) em (6.2.16), resulta

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} - \frac{\Delta \ddot{p}}{C^2} = 0 \quad (6.2.17)$$

que deve ser resolvida para a obtenção da variação da pressão no intervalo de tempo  $[t_m, t_{m+1}]$ .

As condições de contorno do problema são apresentadas na seção seguinte.

### **6.3- Condições de contorno para o fluido**

O sistema barragem-reservatório-fundação é indicado na figura 6.3.1. As condições de contorno para o fluido são as seguintes:

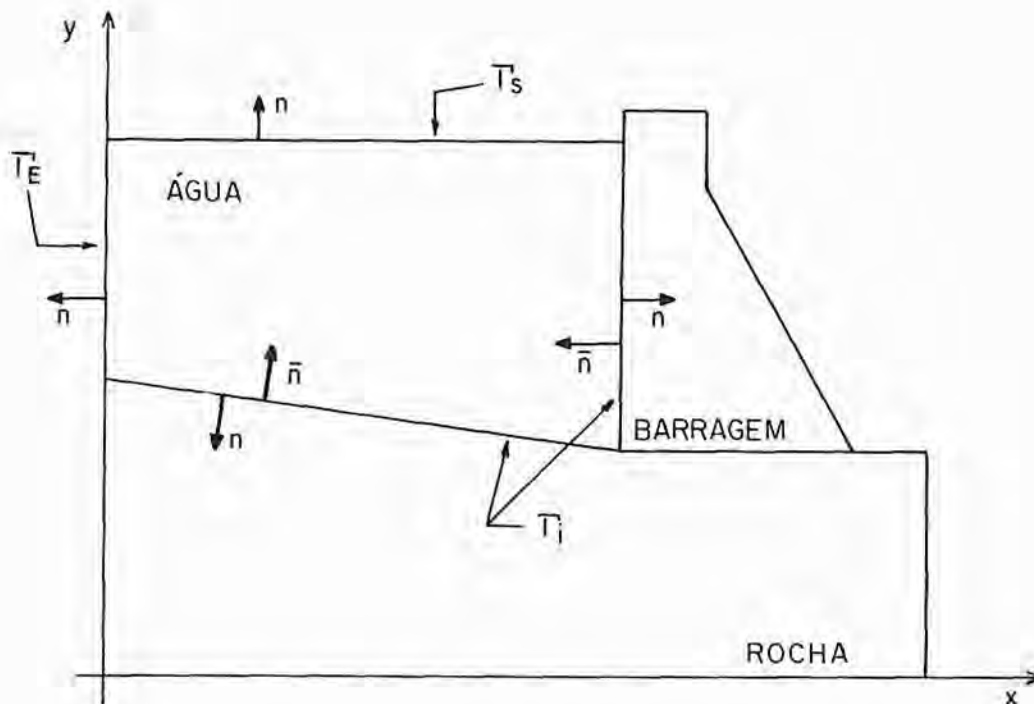


Figura 6.3.1 - Sistema barragem-reservatório-fundação

a) Em  $\Gamma_S$  (superfície livre):

Neste contorno, admite-se a formação de uma onda de gravidade de forma que no instante  $t_m$  deve-se ter<sup>1891</sup>

$$\frac{\partial p_m}{\partial n} + \frac{1}{\mathbf{n}^T \mathbf{g}} \ddot{p}_m = 0 \quad (6.3.1)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário externo em  $\Gamma_S$  e  $\mathbf{g} = \{g_x, g_y\}^T$  é o vetor com as componentes da aceleração da gravidade.

No instante  $t_{m+1}$  deve-se ter

$$\frac{\partial(p_m + \Delta p)}{\partial n} + \frac{1}{\mathbf{n}^T \mathbf{g}} (\ddot{p}_m + \Delta \ddot{p}) = 0 \quad (6.3.2)$$



Introduzindo (6.3.1) em (6.3.2), resulta a condição de contorno

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial n} = -\frac{1}{\mathbf{n}^T \mathbf{g}} \Delta \ddot{p} \quad (6.3.3)$$

b) Em  $\Gamma_E$  (contorno truncado)

No instante  $t_m$ , considera-se a condição de radiação de Sommerfeld dada por<sup>[112]</sup>

$$\frac{\partial p_m}{\partial n} = -\frac{1}{c} \dot{p}_m \quad (6.3.4)$$

No instante  $t_{m+1}$ , tem-se

$$\frac{\partial (p_m + \Delta p)}{\partial n} = -\frac{1}{c} (\dot{p}_m + \Delta \dot{p}) \quad (6.3.5)$$

de onde se conclui que

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \Delta \dot{p} \quad (6.3.6)$$

c) Em  $\Gamma_I$  (interface)

Se  $\ddot{\mathbf{W}}_m$  é o vetor com as acelerações da estrutura e da fundação na interface  $\Gamma_I$ , então

$$\frac{\partial p_m}{\partial n} = -\rho_m \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{W}}_m \quad (6.3.7)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade do fluido no instante  $t_m$ .

No instante  $t_{m+1}$ , tem-se

$$\frac{\partial(\rho_m + \Delta\rho)}{\partial n} = -(\rho_m + \Delta\rho)\mathbf{n}^T(\ddot{\mathbf{W}}_m + \Delta\ddot{\mathbf{W}}) \quad (6.3.8)$$

onde  $\Delta\rho$  e  $\Delta\ddot{\mathbf{W}}$  representam as variações da densidade do fluido e das acelerações na interface.

Introduzindo (6.3.7) em (6.3.8), resulta

$$\frac{\partial\Delta p}{\partial n} = -\rho_m\mathbf{n}^T\Delta\ddot{\mathbf{W}} - \Delta\rho\mathbf{n}^T(\ddot{\mathbf{W}}_m + \Delta\ddot{\mathbf{W}}) \quad (6.3.9)$$

Da equação de estado tem-se que

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{p}}{c^2} \quad (6.3.10)$$

ou

$$\Delta\rho = \frac{\Delta p}{c^2} \quad (6.3.11)$$

Introduzindo (6.3.11) em (6.3.9), chega-se a

$$\frac{\partial\Delta p}{\partial n} = -\rho_m\mathbf{n}^T\Delta\ddot{\mathbf{W}} - \frac{\Delta p}{c^2}\mathbf{n}^T(\ddot{\mathbf{W}}_m + \Delta\ddot{\mathbf{W}}) \quad (6.3.12)$$

que é a condição de contorno na interface.

Na seção seguinte, a equação diferencial (6.2.17), juntamente com as condições de contorno, é colocada em uma forma integral ponderada para o emprego do método dos elementos finitos.

#### 6.4- Aplicação do método dos elementos finitos

Empregando o método dos elementos finitos, o incremento de pressão  $\Delta p$  em um ponto genérico do elemento é dado por

$$\Delta p = \mathbf{N}\Delta\mathbf{P} \quad (6.4.1)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz com as funções de interpolação dos elementos de fluido e  $\Delta\mathbf{P}$  é o vetor com os incrementos de pressão nos nós do elemento.

Aplicando o método de Galerkin, a equação (6.2.17) é escrita na forma integral

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left( \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} \right) d\Omega - \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (6.4.2)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio do fluido.

Integrando o primeiro termo por partes, esta equação é escrita na forma

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \Delta p}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta \ddot{p} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial \Delta p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (6.4.3)$$

Introduzindo as condições de contorno e considerando as interpolações representadas pela equação (6.4.1), chega-se ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\mathbf{E}\Delta\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{A}\Delta\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{F}_f \quad (6.4.4)$$

onde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \frac{1}{\mathbf{n}^T \mathbf{g}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (6.4.5)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{C} \int_{\Gamma_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (6.4.6)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (6.4.7)$$

$$\Delta \mathbf{F}_f = - \int_{\Gamma_I} \left( \frac{1}{C^2} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\ddot{\mathbf{W}}_m + \Delta \ddot{\mathbf{W}}) \Delta p + \rho_m \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \Delta \ddot{\mathbf{W}} \right) d\Gamma \quad (6.4.8)$$

No instante  $t_m$ , as acelerações da estrutura e da fundação na interface são dadas por

$$\ddot{\mathbf{W}}_m = \ddot{\mathbf{W}}_m^r + \ddot{\mathbf{W}}_m^g \quad (6.4.9)$$

onde  $\ddot{\mathbf{W}}_m^g$  é o vetor com as componentes de aceleração do sismo e  $\ddot{\mathbf{W}}_m^r$  é o vetor de acelerações relativas.

Analogamente, o incremento de acelerações no intervalo de tempo é dado por

$$\Delta \ddot{\mathbf{W}} = \Delta \ddot{\mathbf{W}}^r + \Delta \ddot{\mathbf{W}}^g \quad (6.4.10)$$

Se os deslocamentos relativos da estrutura e da fundação,  $\mathbf{u}^r$ , são interpolados na forma

$$\mathbf{u}^r = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{U}^r \quad (6.4.11)$$

onde  $\bar{\mathbf{N}}$  é a matriz com as funções de interpolação dos elementos da estrutura e da fundação e  $\mathbf{U}^r$  é o vetor com os deslocamentos nodais relativos, então

$$\Delta \ddot{\mathbf{W}}^r = \bar{\mathbf{N}} \Delta \ddot{\mathbf{U}}^r \quad (6.4.12)$$

com  $\bar{\mathbf{N}}$  avaliada na interface  $\Gamma_f$ .

Dessa forma, pode-se obter o vetor  $\Delta \mathbf{F}_f$  dado em (6.4.8) a partir das acelerações na interface. Observa-se, assim, que este vetor introduz o acoplamento entre o fluido e a parte sólida formada pela barragem e pela fundação.

Neste trabalho, adota-se para o fluido o mesmo elemento isoparamétrico quadrático de oito nós empregado para a barragem e a fundação. Dessa forma, as matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\bar{\mathbf{N}}$  contêm as mesmas funções de interpolação.

Na seção seguinte são apresentadas as equações do movimento da barragem e da fundação.

### 6.5- Equações do movimento da barragem e da fundação

Na figura 6.5.1, indica-se o sistema barragem-fundação submetido às forças  $\mathbf{F}_f$  que representam as ações introduzidas no sistema em virtude de um abalo sísmico. Nessa figura,  $b$  representa a barragem, excluindo-se a interface com a fundação,  $s$  representa a interface e  $f$  indica a fundação, excluindo-se a interface com a barragem.

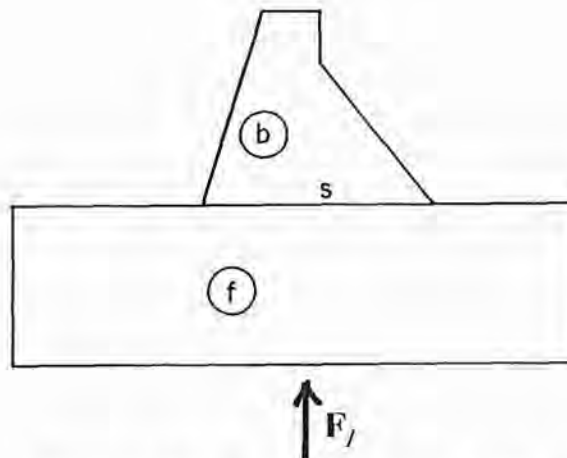


Figura 6.5.1- Sistema barragem-fundação

As equações do movimento da fundação, antes da construção da barragem, podem ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ss} & \tilde{\mathbf{M}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{M}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_f^g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_{ss} & \tilde{\mathbf{C}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{C}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_f^g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ss} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s^g \\ \mathbf{U}_s^g \\ \mathbf{U}_f^g \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_f \quad (6.5.1)$$

onde  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}$  representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação, respectivamente, e o superíndice  $^g$  indica que as acelerações, velocidades e deslocamentos não são influenciados pela interação com a barragem.

Incluindo a barragem, as equações do movimento passam a ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{bb} & \mathbf{m}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{bs}^T & (\mathbf{m}_{ss} + \tilde{\mathbf{M}}_{ss}) & \tilde{\mathbf{M}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{M}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s^g + \dot{\mathbf{U}}_b^r \\ \dot{\mathbf{U}}_s^g + \dot{\mathbf{U}}_s^r \\ \dot{\mathbf{U}}_f^g + \dot{\mathbf{U}}_f^r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{bb} & \mathbf{c}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{bs}^T & (\mathbf{c}_{ss} + \tilde{\mathbf{C}}_{ss}) & \tilde{\mathbf{C}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{C}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s^g + \dot{\mathbf{U}}_b^r \\ \dot{\mathbf{U}}_s^g + \dot{\mathbf{U}}_s^r \\ \dot{\mathbf{U}}_f^g + \dot{\mathbf{U}}_f^r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{bs}^T & (\mathbf{k}_{ss} + \tilde{\mathbf{K}}_{ss}) & \tilde{\mathbf{K}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s^g + \mathbf{U}_b^r \\ \mathbf{U}_s^g + \mathbf{U}_s^r \\ \mathbf{U}_f^g + \mathbf{U}_f^r \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_f \quad (6.5.2)$$

já que as forças  $\mathbf{F}_f$  não são alteradas.

Na equação (6.5.2),  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{k}$  representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da barragem e o superíndice  $^r$  indica que as acelerações, velocidades e deslocamentos são relativos aos que seriam observados na ausência da barragem.

Observa-se, então, que a barragem sofre um movimento de corpo rígido acrescido de um movimento relativo. Segundo Fragoso et al.<sup>[47]</sup> essa hipótese é verdadeira se a estrutura for relativamente rígida e com fundação superficial. Esta é a situação das barragens de gravidade de concreto.

Igualando as expressões (6.5.1) e (6.5.2) e ordenando, resulta

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^r + \mathbf{K}\mathbf{U}^r = \mathbf{F} \quad (6.5.3)$$



onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema completo e  $\ddot{\mathbf{U}}^r$ ,  $\dot{\mathbf{U}}^r$  e  $\mathbf{U}^r$  são os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos relativos.

O vetor  $\mathbf{F}$  é dado por

$$\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{bb} & \mathbf{m}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{bs}^T & \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_s^g \\ \ddot{\mathbf{U}}_s^g \\ \ddot{\mathbf{U}}_f^g \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{bb} & \mathbf{c}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{bs}^T & \mathbf{c}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_s^g \\ \dot{\mathbf{U}}_f^g \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{bs}^T & \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s^g \\ \mathbf{U}_s^g \\ \mathbf{U}_f^g \end{Bmatrix} \quad (6.5.4)$$

Neste trabalho, admite-se que o amortecimento é proporcional à rigidez, isto é,

$$\mathbf{C} = \xi \mathbf{K} \quad (6.5.5)$$

O coeficiente  $\xi$  é obtido especificando-se uma razão de amortecimento no modo de vibração fundamental do sistema. Um termo proporcional à massa é omitido na formulação do amortecimento, para evitar alguma estabilidade numérica artificial durante o processo de integração no tempo<sup>[45,50]</sup>.

Então, verifica-se que as forças elásticas e de amortecimento na equação (6.5.4) são nulas e o vetor de forças equivalentes  $\mathbf{F}$  reduz-se a

$$\mathbf{F} = -\mathbf{mR}\ddot{\mathbf{W}}^g \quad (6.5.6)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz de translação como corpo rígido correspondente aos graus de liberdade da barragem e  $\ddot{\mathbf{W}}^g = \{\ddot{u}^g, \ddot{v}^g\}^T$  representa as componentes de aceleração do sismo na superfície do terreno.

Observa-se que apenas a massa da barragem aparece no vetor de cargas equivalentes  $\mathbf{F}$ , o que coincide com a formulação apresentada por Fragoso et al.<sup>[47]</sup>.

A equação (6.5.3) pode ser escrita em forma incremental incluindo a variação  $\Delta p$  da pressão hidrodinâmica na interface  $\Gamma_f$  com o fluido, resultando

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}^r + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}^r + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^r = \Delta\bar{\mathbf{F}} \quad (6.5.7)$$

onde  $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^r$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{U}}^r$  e  $\Delta\mathbf{U}^r$  são os incrementos de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais relativos no intervalo de tempo e

$$\Delta\bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{m}\mathbf{R}\Delta\ddot{\mathbf{W}}^g - \int_{\Gamma_I} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{n}} \Delta p d\Gamma \quad (6.5.8)$$

sendo  $\Delta\ddot{\mathbf{W}}^g$  o incremento de acelerações impostas na superfície do terreno e  $\bar{\mathbf{n}}$  é o vetor normal unitário externo à estrutura e à fundação (figura 6.3.1).

O sistema acoplado barragem-reservatório-fundação fica representado pelas equações (6.4.4) e (6.5.7). Essas equações são integradas no tempo conforme é apresentado na seção seguinte.

## 6.6 - Integração das equações do movimento

As equações do movimento da barragem e da fundação, representadas na equação (6.5.7), são válidas na hipótese de um comportamento elástico linear do conjunto. Entretanto, em virtude da fissuração da barragem, surge uma não-linearidade que deve ser considerada.

No caso não-linear, a equação (6.5.7) permanece válida desde que  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{C}$  representem as matrizes de rigidez e de amortecimento tangentes. Essa formulação, entretanto, requer a constante atualização das matrizes durante o processo de integração no tempo, o que leva a um grande esforço computacional. Além disso, a matriz de rigidez do material fissurado pode ser singular, surgindo uma dificuldade numérica.

Uma alternativa muito utilizada consiste em trabalhar com as matrizes do material não fissurado e incluir a não-linearidade no vetor de cargas. Dessa forma, as equações do movimento no intervalo de tempo  $[t_m, t_{m+1}]$  ficam representadas por

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_m^r + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}_m^r + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_m^r = \Delta\bar{\mathbf{F}} \quad (6.6.1)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de amortecimento e de rigidez do material não fissurado e  $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_m^r$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{U}}_m^r$  e  $\Delta\mathbf{U}_m^r$  são os incrementos de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais relativos no intervalo de tempo.

O vetor  $\Delta\bar{\mathbf{F}}$  é dado por

$$\Delta\bar{\mathbf{F}} = \Delta\mathbf{F} + \boldsymbol{\psi}_m \quad (6.6.2)$$

onde  $\Delta\mathbf{F}$  é obtido de (6.5.8) e  $\boldsymbol{\psi}_m$  é o vetor de desequilíbrio no instante  $t_m$ .

O vetor  $\boldsymbol{\psi}_m$  é calculado como

$$\boldsymbol{\psi}_m = \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_{m-1}^r - \Delta\mathbf{A}_{NL} \quad (6.6.3)$$

sendo  $\Delta\mathbf{U}_{m-1}^r$  o incremento de deslocamentos nodais relativos obtidos no instante anterior e  $\Delta\mathbf{A}_{NL}$  é o vetor de incrementos de ações nodais não-lineares dado por

$$\Delta\mathbf{A}_{NL} = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (6.6.4)$$

Na equação (6.6.4),  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais e  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor com os incrementos de tensões obtidos em função de  $\Delta\mathbf{U}_{m-1}^r$ , conforme foi apresentado no capítulo 4. A soma indicada em (6.6.4) significa que a montagem é feita sobre todos os  $N$  elementos da estrutura e da fundação.

Então, empregando-se a equação (6.6.1), trabalha-se com matrizes constantes e a não-linearidade vai sendo incluída no vetor de cargas. Observa-se, também, que nesta formulação o amortecimento está sendo considerado constante, não sendo afetado pela fissuração do material. A inclusão desse efeito no cálculo do amortecimento levaria a uma complicação desnecessária, em virtude das incertezas sobre o verdadeiro valor do amortecimento do sistema.

As equações (6.4.4) e (6.6.1), que fazem o acoplamento entre o fluido e o sistema barragem-fundação, são integradas no tempo empregando-se o método de Newmark. Para isto, é necessário conhecer as condições iniciais do problema.

Para o fluido, tem-se que a pressão inicial é igual à pressão hidrostática e as derivadas  $\dot{\mathbf{P}}$  e  $\ddot{\mathbf{P}}$  são nulas. Para a estrutura e a fundação, os deslocamentos iniciais são os obtidos da análise estática e as velocidades e acelerações são nulas. Nessa análise estática inicial, a estrutura e a fundação são solicitadas pela pressão hidrostática, sendo consideradas as tensões iniciais da fase construtiva.

Adotando o método de Newmark com coeficientes de estabilização iguais a 0,5 e 0,25 tem-se<sup>[14]</sup>

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}_m^r = \alpha_1 \Delta \mathbf{U}_m^r - 2 \dot{\mathbf{U}}_m^r \quad (6.6.5)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{U}}_m^r = \alpha_0 \Delta \mathbf{U}_m^r - 2 \alpha_1 \dot{\mathbf{U}}_m^r - 2 \ddot{\mathbf{U}}_m^r \quad (6.6.6)$$

onde  $\dot{\mathbf{U}}_m^r$  e  $\ddot{\mathbf{U}}_m^r$  são os vetores de velocidades e acelerações nodais relativas no instante  $t_m$ .

Os coeficientes  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  são dados por

$$\alpha_0 = \frac{4}{\Delta t^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{\Delta t} \quad (6.6.7)$$

sendo  $\Delta t = t_{m+1} - t_m$  o tamanho do intervalo de tempo.

Introduzindo (6.6.5) e (6.6.6) em (6.6.1), resulta

$$\Delta \mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{U}_m^r \quad (6.6.8)$$

onde

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K} + \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C} \quad (6.6.9)$$

$$\Delta \mathbf{F}_e = \Delta \bar{\mathbf{F}} + 2\mathbf{M}(\alpha_1 \dot{\mathbf{U}}_m^r + \ddot{\mathbf{U}}_m^r) + 2\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_m^r \quad (6.6.10)$$

A solução do sistema algébrico linear (6.6.8) fornece os incrementos de deslocamentos nodais relativos no intervalo de tempo.

Introduzindo a expressão da matriz de amortecimento dada em (6.5.5), chega-se a

$$\mathbf{K}_e = (1 + \xi\alpha_1)\mathbf{K} + \alpha_o\mathbf{M} \quad (6.6.11)$$

$$\Delta \mathbf{F}_e = \Delta \bar{\mathbf{F}} + 2\mathbf{M}(\alpha_1 \dot{\mathbf{U}}_m^r + \ddot{\mathbf{U}}_m^r) + 2\xi\mathbf{K}\dot{\mathbf{U}}_m^r \quad (6.6.12)$$

Neste trabalho, a matriz de massa do sistema barragem-fundação é diagonalizada de acordo com o procedimento proposto por Hinton et al.<sup>1601</sup>. Essa matriz diagonal é obtida a partir da matriz de massa consistente de forma a preservar a massa total. A matriz de massa consistente é obtida empregando-se integração com 3x3 pontos de Gauss. A matriz de rigidez é obtida com integração reduzida.

Adotando, também, o método de Newmark para integrar as equações do fluido (6.4.4), chega-se a

$$\Delta \mathbf{F}_{ef} = \mathbf{H}_e \Delta \mathbf{P} \quad (6.6.13)$$

onde

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha_o\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A} \quad (6.6.14)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{ef} = \Delta \mathbf{F}_f + 2\mathbf{E}(\alpha_1 \dot{\mathbf{P}}_m + \ddot{\mathbf{P}}_m) + 2\mathbf{A}\dot{\mathbf{P}}_m \quad (6.6.15)$$

Conforme se observa, os vetores  $\Delta \mathbf{F}_e$  e  $\Delta \mathbf{F}_{ef}$  são mutuamente dependentes. As equações (6.6.8) e (6.6.13) são resolvidas da seguinte maneira:

No instante  $t_1 = 0$ , tem-se  $\Delta \mathbf{P} = \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1^r = \mathbf{0}$  e é introduzido um incremento de acelerações do sismo,  $\Delta \ddot{\mathbf{W}}_1^g$ , ao conjunto barragem-fundação. Pode-se, então, montar o vetor de forças equivalentes  $\Delta \mathbf{F}_e$  e resolver a equação (6.6.8) para a obtenção do incremento de deslocamentos relativos  $\Delta \mathbf{U}_1^r$ .

Da equação (6.6.6), obtém-se  $\Delta \ddot{\mathbf{U}}_1^r$  e pode-se separar os incrementos de acelerações relativas  $\Delta \ddot{\mathbf{W}}_1^r$  na interface com o fluido. Com isso, pode-se montar o vetor de forças equivalentes  $\Delta \mathbf{F}_{ef}$  e resolver a equação (6.6.13) para a obtenção dos incrementos de pressão  $\Delta \mathbf{P}_1$  nos nós do fluido.

Com  $\Delta \mathbf{P}_1$ , parte-se para o próximo instante e repete-se o processo, de forma que o vetor  $\Delta \mathbf{F}_e$  é obtido com  $\Delta \mathbf{P}$  do instante anterior. Ao final de cada incremento de tempo é necessário atualizar as tensões, conforme descrito no capítulo 4, e redefinir o vetor de desequilíbrio  $\Psi$  que será usado no incremento seguinte.

No capítulo seguinte, é apresentada a metodologia para a geração artificial das acelerações impostas  $\ddot{\mathbf{W}}^g$  na superfície do terreno.



## 7. ANÁLISE ESTRUTURAL PROBABILÍSTICA

### 7.1- Introdução

A análise estrutural através do método dos elementos finitos, usualmente, é feita admitindo-se que as cargas atuantes na estrutura, bem como as propriedades dos materiais componentes da mesma, são conhecidas deterministicamente.

Entretanto, geralmente esta situação não ocorre nas estruturas reais. Normalmente, o que se tem é um nível de incerteza, mais ou menos significativo, quanto a intensidade e a variação do carregamento no tempo e no domínio da estrutura. Além disso, surgem incertezas quanto às propriedades dos materiais, geometria e condições de contorno. Essas incertezas podem ser representadas por flutuações em torno de um valor médio e, em geral, tais flutuações são aleatórias.

Quando a variação aleatória de uma grandeza ocorre no tempo, o processo relacionado com a mesma é denominado processo estocástico. Se, por outro lado, uma variável tem uma distribuição aleatória no domínio espacial, o seu campo é denominado estocástico<sup>[109]</sup>.

Dessa forma, em uma análise rigorosa deve-se procurar obter valores esperados e variâncias da resposta estrutural para parâmetros de entrada aleatórios, dos quais se conhecem ou podem ser estimados os valores esperados e as variâncias.

Nos últimos anos, um grande esforço tem sido feito para incorporar esses conceitos probabilísticos no método dos elementos finitos. A grande dificuldade enfrentada é relativa ao elevado tempo de processamento computacional e a disponibilidade de memória requeridos para esse fim. Além disso, a dificuldade de modelar processos e campos estocásticos exige a introdução de simplificações que, por vezes, podem levar à irrealidade.

Entretanto, com o desenvolvimento de computadores cada vez mais velozes e com maior capacidade de memória, o método dos elementos finitos probabilístico surge como uma ferramenta poderosa, não só para a análise estrutural, mas para a resolução de outros problemas com características estocásticas.

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas características estocásticas na análise dinâmica apresentada anteriormente. Entretanto, a análise estática da fase construtiva da barragem permanece sendo determinística.

Uma vez que o carregamento dinâmico representado pelo sismo é essencialmente um carregamento aleatório, sua consideração deve ser feita em termos de conceitos probabilísticos. Admitindo-se que as propriedades dos materiais componentes da barragem também são aleatórias, pode-se determinar os valores esperados e as variâncias dos coeficientes de segurança e, então, avaliar a confiabilidade da estrutura.

## **7.2- Os métodos para análise probabilística**

Diversos métodos para análise estrutural probabilística têm sido pesquisados e divulgados na literatura. Em geral, empregam-se a simulação de Monte Carlo direta, simulação de Monte Carlo com expansão de Neumann e técnicas de expansão em série de Taylor das variáveis aleatórias. Essas últimas, apesar de serem apresentadas em diferentes formas levam exatamente ao mesmo resultado final<sup>[25]</sup>.

A simulação de Monte Carlo direta constitui a forma mais simples e evidente para a realização de uma análise probabilística e, por isso, é largamente empregada. Nesse método, as propriedades dos materiais, cargas, ou outra variável aleatória, são introduzidas por simulação digital. Uma rotina gera números aleatórios que passam a representar as variáveis do problema. Assim, utiliza-se o mesmo algoritmo para a análise determinística sem nenhuma alteração significativa. Além disso, o método de Monte Carlo é estatisticamente consistente e é empregado para testar a validade de outras técnicas (Chang e Chang<sup>[34]</sup>, Liu e To<sup>[69]</sup>).

Esse método tem sido usado para resolver vários problemas estruturais onde as cargas e/ou as propriedades dos materiais são aleatórias (Araújo e Awruch<sup>[8]</sup>, Shinozuka<sup>[92,93]</sup>, Shinozuka et al.<sup>[94,96]</sup>, Yamazaki et al.<sup>[108]</sup>, dentre outros).

Apesar de sua versatilidade, o método de Monte Carlo pode exigir um grande esforço computacional, já que para cada amostra simulada é necessário realizar toda a análise determinística. Esse esforço é reduzido quando só as cargas são consideradas aleatórias. Neste caso, a matriz de rigidez da estrutura é determinística e pode ser montada e decomposta logo no início do processo. As simulações são empregadas para gerar amostras do vetor de cargas e as respostas são obtidas fazendo apenas substituições com a matriz já decomposta. Entretanto,

quando as propriedades dos materiais são aleatórias é necessário algum artifício para reduzir o tempo de processamento.

Uma alternativa que visa reduzir o trabalho computacional exigido pelo método de Monte Carlo é a denominada simulação com expansão de Neumann<sup>[108]</sup>. Neste caso, a matriz de rigidez da estrutura é dividida em uma parte determinística e outra aleatória. A matriz determinística é obtida com as propriedades médias dos materiais e é decomposta uma única vez no início do processo. As simulações são realizadas para a geração da matriz aleatória, sendo feitas apenas substituições com a matriz média já decomposta. Entretanto, se o coeficiente de variação das propriedades é grande, esse método exige que sejam empregadas expansões de alta ordem e isso pode inviabilizar sua utilização (Araújo e Awruch<sup>[8]</sup>, Shinozuka e Deodatis<sup>[95]</sup>).

Outra solução é obtida através de expansões em série de Taylor das variáveis aleatórias do problema. Neste caso, as cargas, as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, os deslocamentos, velocidades e acelerações são expandidos em série de Taylor. Introduzindo as expansões nas equações do movimento, pode-se obter os valores esperados e as variâncias da resposta sem o emprego de simulações. O método tem sido usado em diferentes formas por Araújo e Awruch<sup>[8]</sup>, Baecher e Ingra<sup>[12]</sup>, Chang e Chang<sup>[34]</sup>, Liu et al.<sup>[71-74]</sup>, Vanmarcke e Grigoriu<sup>[103]</sup>, dentre outros).

Esse método, apesar de ser eficiente do ponto de vista computacional, pode ser impreciso quando o coeficiente de variação das variáveis aleatórias é grande. Isso ocorre em virtude do truncamento necessário da série de Taylor. Além disso, a dificuldade de determinação dos termos da série aumenta com a complexidade do modelo constitutivo e do carregamento.

Neste trabalho, será empregado o método de Monte Carlo para a análise sísmica da barragem. O sismo propriamente dito, bem como as propriedades dos materiais da barragem serão considerados aleatórios. A geração das amostras necessárias para as simulações é apresentada nas seções seguintes.

### **7.3- Geração artificial do sismo**

Um sismo é essencialmente um processo estocástico não estacionário, isto é, suas características estatísticas são dependentes do tempo. Diversos métodos para a geração digital desse processo têm sido divulgados na literatura<sup>[64,78,101,109]</sup>. Em geral, um processo não

estacionário é obtido multiplicando-se um processo estacionário por uma função determinística do tempo (função envelope ou moduladora). Neste trabalho, o processo não estacionário é obtido como se segue.

Seja  $X(t)$  um processo estocástico não estacionário representando as acelerações da superfície do terreno induzidas por um abalo sísmico, onde  $t$  indica o tempo. O processo é definido para  $0 \leq t \leq T_d$ , onde  $T_d$  é a duração do evento. Diversas variáveis aleatórias estão presentes no processo  $X(t)$ , como o conteúdo de frequências, a duração, a amplitude máxima, os ângulos de fase, o número de picos de vibração e a própria forma da curva envelope. A correta consideração de todas essas variáveis aleatórias fica prejudicada pela complexidade do processo. Por isso, apenas a amplitude máxima e os ângulos de fase serão considerados aleatórios.

Para o processo  $X(t)$  adota-se a expressão

$$X(t) = \frac{A(t)}{\beta} \psi Y(t) \quad (7.3.1)$$

onde  $Y(t)$  é um processo estocástico estacionário,  $A(t)$  é uma função determinística do tempo,  $\psi$  é uma variável aleatória Gaussiana representando a amplitude máxima de  $X(t)$  e  $\beta$  é um fator de normalização introduzido para que o máximo valor absoluto de  $X(t)$  seja igual a  $\psi$ .

O processo estacionário  $Y(t)$  é dado por<sup>[109]</sup>

$$Y(t) = \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (7.3.2)$$

onde  $\omega_n$  são as frequências no intervalo  $[0, \omega_u]$  e  $\phi_n$  são os ângulos de fase.

Uma vez escolhido o número  $N$  de componentes de  $Y(t)$ , as frequências  $\omega_n$  são obtidas por



$$\omega_n = \left( \frac{n-1}{N-1} \right) \omega_n \quad (7.3.3)$$

e cobrem todo o conteúdo de frequências.

Os ângulos de fase são variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Logo, a distribuição de probabilidades de  $\phi_n$  é dada por<sup>[109]</sup>

$$p(\phi_n) = \frac{1}{2\pi}, \text{ se } 0 \leq \phi_n \leq 2\pi \quad (7.3.4)$$

$$p(\phi_n) = 0, \text{ se } \phi_n < 0 \text{ e } \phi_n > 2\pi$$

Então, se  $h_n$  é um número aleatório gerado por simulação digital no intervalo  $[0, 1]$ , o ângulo de fase  $\phi_n$  será dado por  $\phi_n = 2\pi h_n$ . Dessa forma pode-se simular uma infinidade de valores dos ângulos de fase. O número  $h_n$  é gerado com o emprego de uma rotina padrão.

Um valor  $\psi_i$  da variável aleatória Gaussiana  $\psi$ , com média  $\psi_m$  e coeficiente de variação  $V_\psi$ , pode ser gerado por simulação digital da seguinte forma. Se  $b_i$  e  $b_{i+1}$  são dois números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $[0, 1]$ , então

$$Z_i = (-2 \ln b_i)^{1/2} \cos 2\pi b_{i+1} \quad (7.3.5)$$

é um número aleatório Gaussiano com média zero e variância unitária<sup>[38]</sup>.

Assim, um valor de  $\psi_i$  é dado por

$$\psi_i = \psi_m (1 + V_\psi Z_i) \quad (7.3.6)$$

Para evitar valores extremos de  $\psi$  com pequena probabilidade de ocorrência, os valores gerados são limitados ao intervalo

$$\psi_m(1 - 2,325V_\psi) \leq \psi_i \leq \psi_m(1 + 2,325V_\psi) \quad (7.3.7)$$

que corresponde a uma probabilidade de ocorrência de 98%.

Se  $\psi_i$  gerado se situar fora desse intervalo a simulação é abandonada e um novo valor é determinado.

A função envelope  $A(t)$  empregada é dada por

$$A(t) = e^{-\alpha|t-T_p|} - e^{-\alpha T_p} \quad (7.3.8)$$

onde  $T_p = T_d / 2$  é uma estimativa do instante de ocorrência do pico.

A constante  $\alpha$  define o espalhamento do processo ao longo do eixo do tempo.

Na figura 7.3.1, indica-se uma amostra do processo  $X(t)$  com baixo conteúdo de frequências. Os parâmetros adotados neste caso são os seguintes:

- amplitude média :  $\psi_m = 0,1g$ , onde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  é a aceleração da gravidade;
- coeficiente de variação de  $\psi$  :  $V_\psi = 0,20$ ;
- duração:  $T_d = 20 \text{ s}$ ;
- conteúdo de frequências:  $[0,5\pi]$ ;
- número de ângulos de fase:  $N = 200$ ;
- constante  $\alpha$  :  $\alpha = \frac{-\ln 0,01}{T_d - T_p}$ .

Na figura 7.3.2, indica-se uma amostra de  $X(t)$  com conteúdo de frequências  $[0,40\pi]$ . Os demais parâmetros são os mesmos da figura 7.3.1.



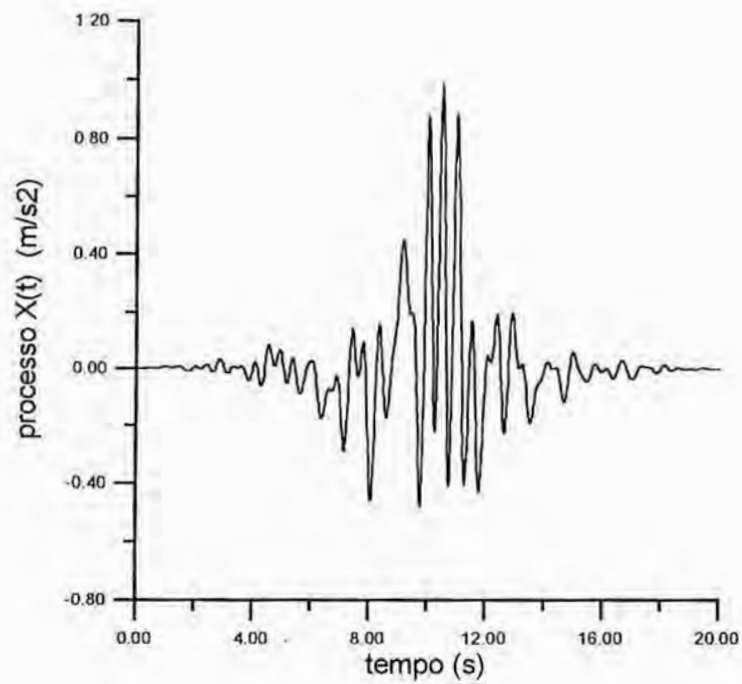


Figura 7.3.1 - Sismo de baixa frequência

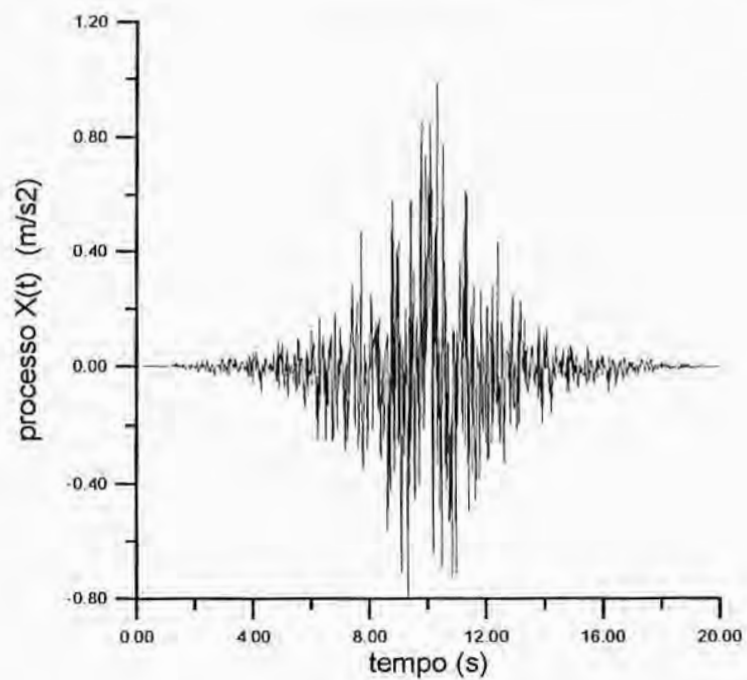


Figura 7.3.2 - Sismo de alta frequência

As características estatísticas do processo  $X(t)$ , definido através da equação (7.3.1), são apresentadas na seção seguinte.

#### 7.4- Características do processo estocástico

O valor esperado  $E[X(t)]$  do processo  $X(t)$  é dado por

$$E[X(t)] = \frac{A(t)}{\beta} \psi_m E[Y(t)] \quad (7.4.1)$$

já que  $\psi$  e  $Y(t)$  são independentes.

O valor esperado de  $Y(t)$  é definido por

$$E[Y(t)] = \int_0^{2\pi} Y(t) p(\phi_n) d\phi_n \quad (7.4.2)$$

Introduzindo as equações (7.3.2) e (7.3.4) e integrando, verifica-se que  $E[Y(t)] = 0$ . Logo,

$$E[X(t)] = 0 \quad (7.4.3)$$

ou seja, o processo  $X(t)$  tem média zero.

A variância  $\sigma^2(t)$  do processo  $X(t)$  é

$$\sigma^2(t) = E[X^2(t)] - \{E[X(t)]\}^2 \quad (7.4.4)$$

e como  $E[X(t)] = 0$ , resulta

$$\sigma^2(t) = E[X^2(t)] \quad (7.4.5)$$

Introduzindo (7.3.1) em (7.4.5) e lembrando que  $\psi$  e  $Y(t)$  são independentes, resulta

$$\sigma^2(t) = \frac{A^2(t)}{\beta^2} E[\psi^2] E[Y^2(t)] \quad (7.4.6)$$

De forma análoga à equação (7.4.4) pode-se escrever

$$\sigma_\psi^2 = E[\psi^2] - \psi_m^2 \quad (7.4.7)$$

onde  $\sigma_\psi^2$  é a variância de  $\psi$ .

Definindo o coeficiente de variação de  $\psi$  como

$$V_\psi = \frac{\sigma_\psi}{\psi_m} \quad (7.4.8)$$

e introduzindo em (7.4.7), resulta

$$E[\psi^2] = \psi_m^2 (1 + V_\psi^2) \quad (7.4.9)$$

O valor esperado de  $Y^2(t)$  é dado por

$$E[Y^2(t)] = \int_0^{2\pi} Y^2(t) p(\phi_n) d\phi_n \quad (7.4.10)$$

Considerando as equações (7.3.2) e (7.3.4) e lembrando que os ângulos de fase  $\phi_n$  são independentes entre si, chega-se a

$$E[Y^2(t)] = \frac{N}{2} \quad (7.4.11)$$

Introduzindo (7.4.9) e (7.4.11) na equação (7.4.6), obtém-se a variância de  $X(t)$  na forma

$$\sigma^2(t) = \frac{N}{2\beta^2} \left(1 + V_{\psi}^2\right) \psi_m^2 A^2(t) \quad (7.4.12)$$

Definindo

$$r = \frac{N}{2\beta^2} \quad (7.4.13)$$

resulta

$$\sigma^2(t) = r \left(1 + V_{\psi}^2\right) \psi_m^2 A^2(t) \quad (7.4.14)$$

A função de autocorrelação  $R(t, \tau)$  do processo  $X(t)$  é definida por

$$R(t, \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (7.4.15)$$

onde  $\tau$  é o intervalo separando dois instantes  $t_1 = t$  e  $t_2 = t + \tau$ .

Introduzindo a expressão de  $X(t)$ , obtém-se

$$R(t, \tau) = \frac{1}{\beta^2} A(t)A(t + \tau)E[\psi^2]E[Y(t)Y(t + \tau)] \quad (7.4.16)$$

onde  $E[\psi^2]$  é dado na equação (7.4.9).

A autocorrelação de  $Y(t)$  é

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \int_0^{2\pi} Y(t)Y(t + \tau)p(\phi_n)d\phi_n \quad (7.4.17)$$

que após as integrações leva a

$$E[Y(t)Y(t + \tau)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \cos \omega_n \tau \quad (7.4.18)$$

já que os ângulos de fase  $\phi_n$  são independentes.

Introduzindo (7.4.9) e (7.4.18) na equação (7.4.16), obtém-se

$$R(t, \tau) = \left( \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=1}^N \cos \omega_n \tau \right) \left[ \left( 1 + V_{\psi}^2 \right) \psi_m^2 A(t)A(t + \tau) \right] \quad (7.4.19)$$

Com a definição do coeficiente  $r$  dada em (7.4.13), resulta

$$R(t, \tau) = \left( \frac{r}{N} \sum_{n=1}^N \cos \omega_n \tau \right) \left[ \left( 1 + V_{\psi}^2 \right) \psi_m^2 A(t)A(t + \tau) \right] \quad (7.4.20)$$

que é a função de autocorrelação do processo  $X(t)$ .

Das equações (7.4.14) e (7.4.20) verifica-se que  $X(t)$  não é estacionário, já que sua variância e sua função de autocorrelação são dependentes do tempo  $t$ .

Para a determinação do coeficiente  $r$ , pode-se gerar um conjunto de amostras do processo  $X(t)$  e determinar sua variância  $\sigma_s^2$  por

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NS} X_i^2(t)}{NS} \quad (7.4.21)$$

onde  $NS$  representa o número de simulações empregadas para a geração das amostras  $X_i(t)$  do processo.

Comparando as equações (7.4.14) e (7.4.21), verifica-se que o coeficiente  $r$  pode ser obtido pelo método dos mínimos quadrados. Dessa forma, a equação (7.4.14) representa a suavização da variância de  $X(t)$  obtida em  $NS$  simulações.

A obtenção do coeficiente  $r$  por este método indica que o mesmo depende do conteúdo de frequências de  $X(t)$ . Na figura 7.4.1, indica-se a variação de  $r$  com a máxima frequência  $\omega_u$ .

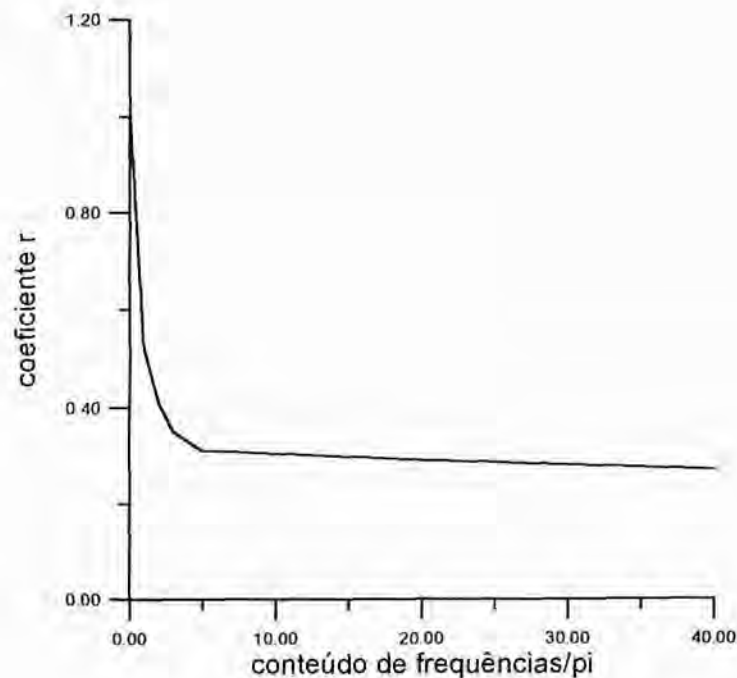


Figura 7.4.1 - Variação de  $r$  com o conteúdo de frequências

Para a obtenção dos resultados indicados na figura 7.4.1 foram empregadas  $NS = 500$  simulações. Os demais dados são os mesmos utilizados para a elaboração da figura 7.3.1.

Observa-se que  $r$  diminui com o aumento do conteúdo de frequências de  $X(t)$ . Entretanto, no intervalo  $5\pi \leq \omega_u \leq 40\pi$ , que engloba uma série de registros de sismos observados em várias partes do mundo, um valor constante  $r = 0,30$  pode ser adotado para a estimativa da variância através da equação (7.4.14).



Da equação (7.4.14) conclui-se, também, que a variância de  $X(t)$  é tanto maior quanto maior for sua amplitude. O máximo valor da variância ocorre no momento do pico, quando  $A^2(t)$  é máxima. Na figura 7.4.2, indica-se a variância obtida com o emprego da equação (7.4.14).

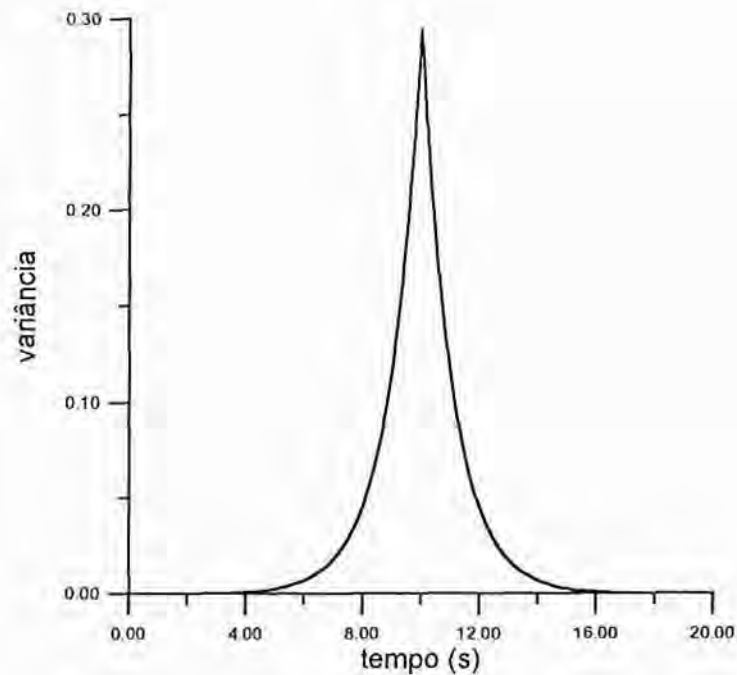


Figura 7.4.2 - Variância do processo  $X(t)$

Na figura 7.4.3, indica-se a função de autocorrelação dada pela equação (7.4.20) com  $r = 0,30$ . Essa função é representada no momento do pico, isto é, quando  $t = T_p$ .

A função de autocorrelação,  $R(\tau)$ , de um processo estocástico estacionário,  $Y(t)$ , é relacionada com sua densidade espectral de potência,  $S(\omega)$ , por<sup>[109]</sup>

$$R(\tau) = E[Y(t)Y(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.4.22)$$

Se o processo tem média zero, verifica-se que

$$\sigma_y^2 = E[Y^2(t)] = R(0) \quad (7.4.23)$$

onde  $\sigma_y^2$  é a variância do processo.

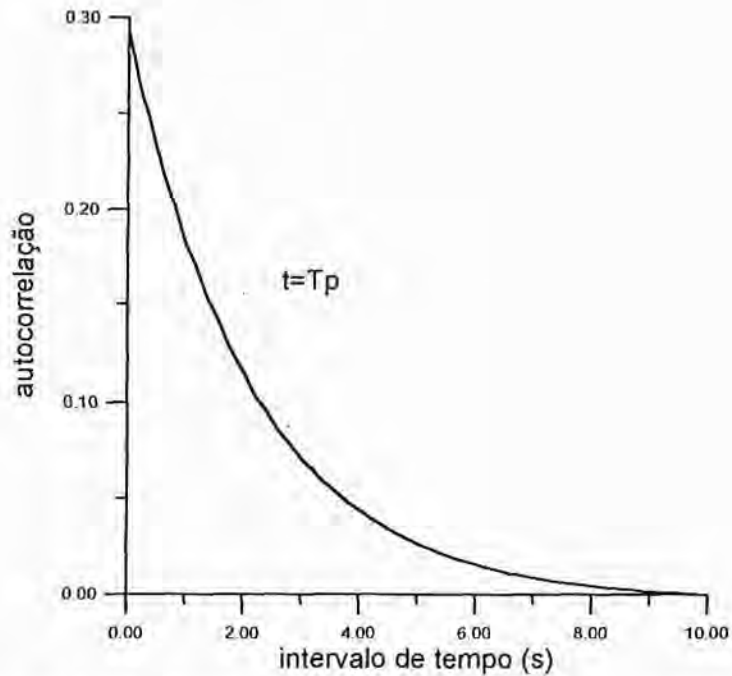


Figura 7.4.3 - Função de autocorrelação do processo  $X(t)$

Considerando as equações (7.4.22) e (7.4.23) tem-se que

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (7.4.24)$$

Logo,  $S(\omega)$  representa a distribuição da variância de  $Y(t)$  no domínio das frequências.

Uma vez que não existe significado físico para frequências negativas, convencionase que  $S(-\omega) = S(\omega)$ . Se as frequências são definidas no intervalo  $[0, \omega_u]$ , a equação (7.4.24) é escrita na forma

$$\sigma_y^2 = 2 \int_0^{\omega_u} S(\omega) d\omega \quad (7.4.25)$$

Esta equação pode ser integrada numericamente, resultando

$$\sigma_y^2 \cong 2 \sum_{n=1}^N S(\omega_n) \Delta\omega \quad (7.4.26)$$

onde  $\Delta\omega = \omega_u / N$ .

Se o processo  $Y(t)$  for normalizado, isto é,

$$Y(t) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (7.4.27)$$

sua variância é dada por

$$\sigma_y^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\beta^2} \quad (7.4.28)$$

conforme se verifica pela integração da equação (7.4.10).

Comparando as equações (7.4.26) e (7.4.28), obtém-se

$$S(\omega_n) = \frac{1}{4\beta^2 \Delta\omega} = \frac{N}{4\beta^2 \omega_u} \quad (7.4.29)$$

Introduzindo o coeficiente  $r = \frac{N}{2\beta^2}$ , resulta

$$S(\omega_n) = \frac{r}{2\omega_u} \quad (7.4.30)$$

que representa a densidade espectral de potência do processo estocástico estacionário dado na equação (7.4.27).

Conforme foi demonstrado, se  $5\pi \leq \omega_u \leq 40\pi$  o coeficiente  $r$  é aproximadamente constante. Conclui-se, então, que  $S(\omega)$  é constante, ou seja, a variância do processo  $Y(t)$  está distribuída uniformemente em todo o conteúdo de frequências.

Para o processo não estacionário  $X(t)$  dado na equação (7.3.1), a densidade espectral dependente do tempo,  $S(t, \omega)$ , é definida de forma que<sup>[109]</sup>

$$\sigma_x^2 = 2 \int_0^{\omega_u} S(t, \omega) d\omega \quad (7.4.31)$$

onde  $\sigma_x^2$  é a variância do processo dada na equação (7.4.14).

Integrando esta equação numericamente, comparando com a variância dada em (7.4.14) e introduzindo a definição do coeficiente  $r$ , chega-se a

$$S(t, \omega_n) = (1 + V_\psi^2) \psi_m^2 A^2(t) S(\omega_n) \quad (7.4.32)$$

onde  $S(\omega_n)$  é a densidade espectral do processo estacionário dada em (7.4.30).

Conclui-se, assim, que a densidade espectral do processo estocástico não estacionário é diretamente relacionada com a densidade do processo estacionário de origem e, neste caso, ela está distribuída uniformemente em todo o conteúdo de frequências.

Quando o número  $N$  de termos da série é suficientemente grande, o processo  $X(t)$  se aproxima de um processo Gaussiano não estacionário em consequência do teorema do limite central<sup>[38]</sup>. Isto pode ser mostrado determinando-se a distribuição de probabilidade do processo  $X(t)$ , o que é feito numericamente gerando-se um grande número de amostras do processo com o emprego da equação (7.3.1). Os valores de  $X(t_r)$ , obtidos em algum instante  $t_r$  de referência, são arranjados em ordem crescente. Então, a probabilidade acumulada do  $n$ -ésimo valor de  $X(t_r)$  é estimada como<sup>[6]</sup>

$$P_n = P[X(t_r) < X_n(t_r)] \cong \frac{n}{N_t + 1} \quad (7.4.33)$$

onde  $N_t$  é o número total de valores de  $X(t_r)$  disponíveis.

A distribuição obtida com  $N_t = 1000$  e  $t_r = T_p$  é indicada pela linha tracejada da figura 7.4.4. Os demais dados são os mesmos empregados para a obtenção da amostra da figura 7.3.1. A linha cheia corresponde à distribuição de probabilidade acumulada de um processo Gaussiano com média zero e com variância dada pela equação (7.4.14).

Observando a figura 7.4.4, conclui-se que o processo  $X(t)$  é um processo Gaussiano não estacionário.

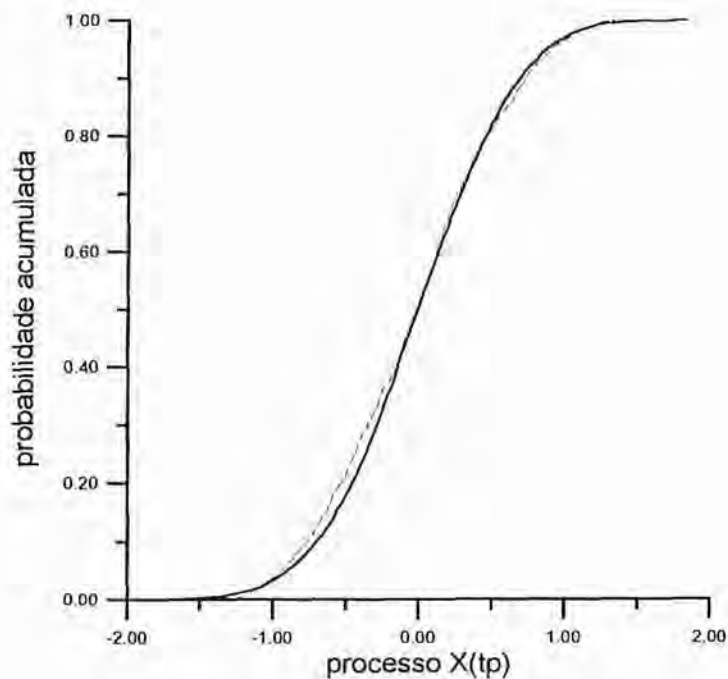


Figura 7.4.4 - Probabilidade acumulada do processo  $X(t)$

### **7.5- Geração aleatória das propriedades dos materiais**

Para completar a análise estocástica, as propriedades dos concretos da barragem são consideradas aleatórias. Uma propriedade genérica  $\alpha$  pode ser escrita na forma

$$\alpha = \alpha_m (1 + a(\mathbf{x})) \quad (7.5.1)$$

onde  $\alpha_m$  é o valor médio da propriedade e  $a(\mathbf{x})$  representa as flutuações em torno da média, sendo  $\mathbf{x}$  o vetor posição no domínio da estrutura.

A parte flutuante  $a(\mathbf{x})$  tem média zero e uma função de autocorrelação pré-definida. Se a variação espacial da propriedade é isotrópica, a função de autocorrelação depende apenas da distância  $S$  entre dois pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{s}$  no domínio espacial, isto é,

$$R(S) = E[a(\mathbf{x})a(\mathbf{x} + \mathbf{s})] \quad (7.5.2)$$

onde  $R(S)$  é a função de autocorrelação.

Uma função de autocorrelação bastante empregada é dada por

$$R(S) = V^2 e^{-\left(\frac{S}{d}\right)^2} \quad (7.5.3)$$

onde  $d$  é um fator de escala e  $V$  é o coeficiente de variação da propriedade  $\alpha$ .

Observa-se que, quando  $d = 0$ ,  $R(S) = 0$ , ou seja, as variáveis aleatórias não são correlacionadas. Por outro lado, quando  $d$  tende a infinito,  $R(S)$  tende a  $V^2$  e a correlação é total.

Empregando-se o método dos elementos finitos, as propriedades dos materiais podem ser atribuídas ao centro de cada elemento e consideradas constantes no mesmo. Então, se existem  $n$  elementos na malha significa que existem  $n$  valores da propriedade  $\alpha$  associados a esses elementos. Dessa maneira, é necessário determinar  $n$  valores da variável aleatória  $a(\mathbf{x}_i)$ , onde  $\mathbf{x}_i$  representa o centro do elemento  $i$ .

As características de correlação podem ser especificadas em termos da matriz de covariância, cuja componente genérica é dada por

$$Cov[a_i, a_j] = R(S_{ij}) \quad (7.5.4)$$

onde  $S_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$  é a distância entre os centros dos elementos  $i$  e  $j$ .



Um vetor  $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}^T$  de variáveis aleatórias com média zero e autocorrelacionadas pode ser gerado como

$$\mathbf{a} = \mathbf{LZ} \quad (7.5.5)$$

onde  $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}^T$  é um vetor de  $n$  variáveis aleatórias Gaussianas não correlacionadas com média zero e desvio padrão unitário e  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky da matriz de covariância.

Como as variáveis  $\mathbf{Z}$  não são correlacionadas, verifica-se que

$$E[\mathbf{ZZ}^T] = \mathbf{I} \quad (7.5.6)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Então,

$$E[\mathbf{aa}^T] = E[(\mathbf{LZ})(\mathbf{LZ})^T] = \mathbf{L}E[\mathbf{ZZ}^T]\mathbf{L}^T \quad (7.5.7)$$

e introduzindo a equação (7.5.6) chega-se a

$$E[\mathbf{aa}^T] = \mathbf{LL}^T \quad (7.5.8)$$

Como  $\mathbf{LL}^T$  é igual à matriz de covariância, conclui-se que as variáveis geradas a partir da equação (7.5.5) são correlacionadas de acordo com a função de autocorrelação especificada.

O vetor  $\mathbf{Z}$  pode ser obtido empregando-se a equação (7.3.5) e pode-se calcular o valor da propriedade  $\alpha$  para cada elemento através da equação (7.5.1).

Para evitar valores extremos da propriedade com pequena probabilidade de ocorrência, os valores gerados  $\alpha_i$ , com  $i = 1, n$ , são limitados ao intervalo

$$\alpha_m(1 - 2,325V) \leq \alpha_i \leq \alpha_m(1 + 2,325V) \quad (7.5.9)$$

que corresponde a uma probabilidade de ocorrência de 98%.

Se resultar algum valor fora desse intervalo, a simulação é abandonada e novos valores são gerados.

As propriedades aleatórias adotadas neste trabalho são a resistência à compressão, a resistência à tração, o módulo de deformação longitudinal dos concretos da barragem e a coesão na ligação barragem-fundação. A resistência à compressão é a variável aleatória básica, cuja distribuição no domínio da estrutura é obtida com o procedimento descrito até aqui.

Conhecidos os valores da resistência à compressão para cada elemento, pode-se obter as outras propriedades através de relações empíricas. As relações adotadas são as apresentadas no capítulo seguinte.

As características de correlação, quando consideradas, são aplicadas aos elementos situados na mesma camada de concretagem e pertencentes à mesma classe de concreto. Elementos de camadas diferentes ou executados com concretos distintos serão sempre considerados não correlacionados.

## 7.6- O método de Monte Carlo

As equações do movimento do sistema barragem-fundação, dadas na equação (6.6.1), são escritas na forma

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \Delta\bar{\mathbf{F}} \quad (7.6.1)$$

onde aqui subintende-se que os incrementos de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais são relativos e ocorrem no intervalo de tempo  $[t_m, t_{m+1}]$ .

O vetor  $\Delta\bar{\mathbf{F}}$ , dado em (6.6.2), é escrito como

$$\Delta\bar{\mathbf{F}} = \Delta\mathbf{F} + \boldsymbol{\psi} \quad (7.6.2)$$

onde  $\Delta\mathbf{F}$  é o vetor de cargas equivalentes ao sismo e às variações da pressão na interface com o fluido, dado na equação (6.5.8), e  $\boldsymbol{\psi}$  é o vetor de desequilíbrio dado em (6.6.3).

Essas equações são reescritas na forma

$$\Delta \mathbf{F} = -\mathbf{mR}\Delta \ddot{\mathbf{W}}^g - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{n}} \Delta p d\Gamma \quad (7.6.3)$$

$$\Psi = \mathbf{K}\Delta \mathbf{U} - \Delta \mathbf{A}_{NL} \quad (7.6.4)$$

sendo

$$\Delta \mathbf{A}_{NL} = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (7.6.5)$$

O vetor  $\Delta \ddot{\mathbf{W}}^g$ , representando os incrementos de acelerações impostas no intervalo de tempo, é dado por

$$\Delta \ddot{\mathbf{W}}^g = \begin{Bmatrix} \Delta X \\ c\Delta X \end{Bmatrix} \quad (7.6.6)$$

onde  $\Delta X = X(t_{m+1}) - X(t_m)$ , sendo  $X$  o processo estocástico não estacionário definido na seção 7.3.

A constante  $c$  é uma medida da relação entre a componente vertical e horizontal da aceleração.

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é obtida com o módulo de elasticidade longitudinal simulado para cada elemento e a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  é dada por

$$\mathbf{C} = \xi \mathbf{K} \quad (7.6.7)$$

conforme foi apresentado no capítulo anterior.

Os incrementos de tensões  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  são obtidos com o módulo de elasticidade e as resistências simuladas para cada elemento, empregando-se o algoritmo do capítulo 4.

Observa-se, assim, que para cada simulação é necessário redefinir as matrizes de rigidez e de amortecimento e o vetor de cargas. Essa redefinição de matrizes em cada simulação exige um grande esforço computacional e pode inviabilizar o emprego do método. Para contornar esse problema, adota-se a solução descrita a seguir.

Definindo  $\mathbf{K}_m$  como sendo a matriz de rigidez avaliada com as propriedades médias e admitindo que a matriz de amortecimento é determinística, isto é,

$$\mathbf{C} = \xi \mathbf{K}_m \quad (7.6.8)$$

a equação (7.6.1) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{U} = \Delta\bar{\mathbf{F}} \quad (7.6.9)$$

onde  $\Delta\bar{\mathbf{F}}$  é dado em (7.6.2), mas agora o vetor de desequilíbrio é dado por

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{U} - \Delta\mathbf{A}_{NL} \quad (7.6.10)$$

O vetor  $\Delta\mathbf{A}_{NL}$  é obtido da equação (7.6.5), mas os incrementos de tensões  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  são calculados considerando-se as propriedades aleatórias da simulação.

Dessa maneira, o vetor de desequilíbrio inclui os desvios da linearidade provocados pela fissuração bem como os desvios das propriedades médias. Assim, a matriz de rigidez é definida uma única vez no início da análise e apenas o vetor de cargas é alterado em cada simulação. Com isso consegue-se uma redução substancial no tempo de processamento, mantendo-se uma precisão satisfatória.

Empregando-se o método de Newmark, utiliza-se a equação (6.6.8) apenas substituindo  $\mathbf{K}$  por  $\mathbf{K}_m$ .

Se  $NS$  representa o número de simulações empregadas, o valor esperado dos deslocamentos nodais é dado por

$$E[\mathbf{U}] \cong \tilde{\mathbf{U}} = \frac{\sum_{i=1}^{NS} \mathbf{U}_i}{NS} \quad (7.6.11)$$

A matriz de covariância dos deslocamentos é obtida por

$$Cov[\mathbf{U}\mathbf{U}^T] \cong \frac{\sum_{i=1}^{NS} (\mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \tilde{\mathbf{U}})^T}{NS} \quad (7.6.12)$$

e o vetor variância é a diagonal dessa matriz.

De maneira análoga, podem ser calculados os valores esperados e as covariâncias de todas as variáveis da resposta estrutural.

### 7.7- Verificação da segurança da estrutura

Neste trabalho, a segurança da estrutura é verificada com base em três critérios: fissuração, esmagamento do concreto e escorregamento da barragem na interface com a fundação. Os coeficientes de segurança contra a fissuração e o esmagamento em algum elemento da barragem são definidos como o inverso dos coeficientes de risco apresentados no capítulo 4. O coeficiente de segurança contra o escorregamento será definido no capítulo seguinte.

Era comum se fazer uma verificação da segurança contra o tombamento da barragem. Entretanto, tem sido aceito que tal critério é irrelevante, pois antes que uma barragem de gravidade venha a tombar os outros modos de falha ocorrem. Na verdade, a estabilidade em relação ao tombamento deve ser baseada no critério de esmagamento dos elementos na base da barragem. As magnitudes das tensões de compressão devem permanecer abaixo da resistência à compressão do concreto e do material da fundação para se assegurar a estabilidade quanto ao tombamento<sup>[68]</sup>.

Conforme foi apresentado no capítulo 4, para cada elemento da barragem tem-se determinado um valor da resistência à tração uniaxial equivalente,  $f_{te}$ , e um valor da

resistência à compressão uniaxial equivalente,  $f_{ce}$ . Essas resistências são obtidas em função do estado atual de tensões no elemento.

Conhecidas as resistências uniaxiais equivalentes, pode-se empregar o critério de Kupfer e Gerstle e calcular a resistência à tração biaxial equivalente,  $\sigma_{1ue}$ , e a tensão de ruptura biaxial equivalente,  $\sigma_{2ue}$ , em cada ponto de integração do elemento.

Então, se  $\sigma_1$  é a tensão principal de tração no ponto de integração, o coeficiente de segurança contra a fissuração neste ponto é dado por

$$S_t = \frac{\sigma_{1ue}}{\sigma_1} \quad (7.7.1)$$

Surgirá alguma fissura no elemento quando o menor valor de  $S_t$ , analisados todos os pontos de integração, for inferior a 1.

Analogamente, se  $\sigma_2$  é a tensão principal de compressão no ponto de integração, o coeficiente de segurança contra o esmagamento neste ponto é dado por

$$S_c = \frac{\sigma_{2ue}}{\sigma_2} \quad (7.7.2)$$

e o esmagamento será detectado quando o menor valor de  $S_c$ , analisados todos os pontos de integração, for inferior a 1.

Dessa maneira, os coeficientes de segurança considerados serão os mínimos valores de  $S_t$  e de  $S_c$  no domínio de cada elemento. Esses coeficientes são variáveis no tempo, já que as tensões também variam. Assim, a fissuração ou o esmagamento ocorrerá se em algum instante esses coeficientes forem menores do que 1. Por isso, daqui para frente, o termo coeficiente de segurança será empregado para indicar o menor valor de  $S_t$  ou de  $S_c$  que for detectado em cada elemento durante todo o período da análise.

Então, se  $\theta$  representa um coeficiente de segurança genérico, o estado limite é definido como a ocorrência de  $\theta$  menor do que 1. Esse estado limite não significa, necessariamente, a falha da estrutura no sentido de sua ruína como um todo. Porém, se a



estrutura foi projetada para não sofrer nenhum tipo de fissura, esmagamento ou escorregamento, o estado limite representa uma situação de falha, mesmo que local.

Empregando-se o método de Monte Carlo, pode-se determinar um valor de  $\theta$  para cada amostra da entrada sísmica e das propriedades dos materiais. Se  $NS$  representa o número de simulações adotado, o valor esperado de  $\theta$  é aproximado por

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{NS} \theta_i}{NS} \quad (7.7.3)$$

onde  $\theta_i$  é o valor do coeficiente de segurança obtido na simulação  $i$ .

A variância de  $\theta$  é aproximada por

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NS} (\theta_i - \tilde{\theta})^2}{NS} \quad (7.7.4)$$

A probabilidade de falha,  $P_F$ , é a probabilidade de que  $\theta$  seja menor do que 1. Se a densidade de probabilidade de  $\theta$  é  $p(\theta)$ , a probabilidade de falha é dada por

$$P_F = \int_0^1 p(\theta) d\theta \quad (7.7.5)$$

já que por definição  $\theta$  é sempre positivo.

Dessa maneira, se a distribuição de probabilidade de  $\theta$  for conhecida a equação (7.7.5) pode ser integrada para fornecer a probabilidade de falha. A confiabilidade  $C$ , isto é, a probabilidade de não ser atingido o estado limite, é obtida de

$$C = 1 - P_F \quad (7.7.6)$$

A densidade de probabilidade de  $\theta$  pode ser estimada a partir dos valores  $\theta_i$  obtidos nas simulações, empregando-se uma relação idêntica à apresentada na equação (7.4.33). Dessa forma, pode-se avaliar a confiabilidade em relação aos modos de falha considerados.

## **8. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS**

### **8.1- Identificação da barragem**

Neste trabalho é feita a análise de um elemento estrutural constituinte da barragem da Usina Hidrelétrica Tucuruí. Essa barragem está situada no rio Tocantins, no Estado do Pará, logo a montante da cidade de Tucuruí. Sua construção teve início em novembro de 1975 e a conclusão das obras se deu em novembro de 1984.

A usina foi concebida para a geração de energia elétrica tendo sido previsto, também, um sistema de eclusas para permitir a navegação fluvial na região.

A estrutura do paramento é composta por uma barragem de terra, vertedouro e tomada d'água, muros de transição, edifício de comando e casa de força. O elemento estrutural analisado neste trabalho é o muro de transição direito.

O muro de transição direito (MTD) é uma estrutura de gravidade em concreto massa composta por dois blocos de aproximadamente 30m de comprimento separados por junta de contração. O objetivo do MTD é fazer a transição entre a barragem de terra e o bloco do vertedouro.

Na figura 8.1.1, indica-se uma seção típica do MTD, bem como o nível d'água em condições normais de operação.

Nas seções seguintes, são apresentados os esquemas de lançamento e as propriedades dos concretos obtidas experimentalmente durante a execução da obra. Os dados relativos aos materiais foram extraídos da ref.[33]. Apresentam-se, também, as curvas de ajuste empregadas neste trabalho e as considerações que foram feitas para a análise numérica.

### **8.2- Camadas de concretagem**

O MTD foi executado em 35 camadas com um intervalo médio de concretagem entre as camadas igual a 10 dias. A primeira camada de concreto, lançada sobre a rocha, tem uma espessura igual a 2,55m. A segunda e a terceira camadas têm espessuras de 2,00m e 1,45m, respectivamente, e as demais camadas têm espessuras de 2,50m.

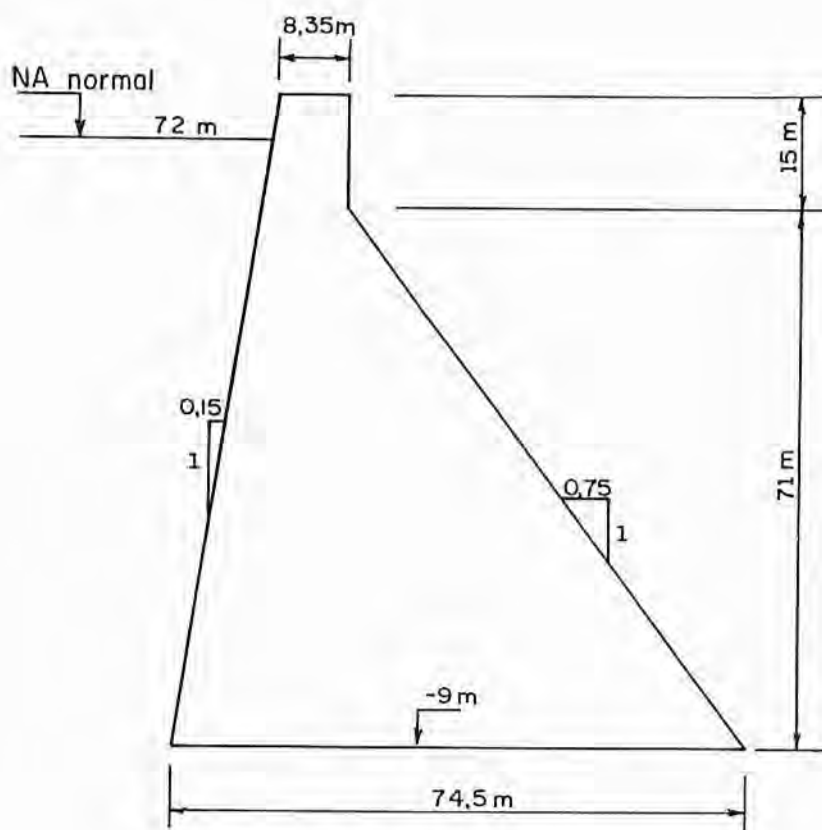


Figura 8.1.1 - Seção típica do muro de transição direito

As temperaturas de lançamento dos concretos são indicadas na tabela 8.2.1.

Tabela 8.2.1 - Temperaturas de lançamento

Camadas	Temperatura de lançamento
1 a 9	14 °C
10 a 16	16 °C
17 a 35	18 °C

Na construção do MTD foram empregadas três classes de concreto, conforme é indicado na figura 8.2.1.

O concreto F152 compõe o núcleo da barragem e tem agregados de diâmetro máximo igual a 152mm. Nas laterais do MTD foram empregados concretos mais resistentes com agregados de diâmetro máximo igual a 76mm.

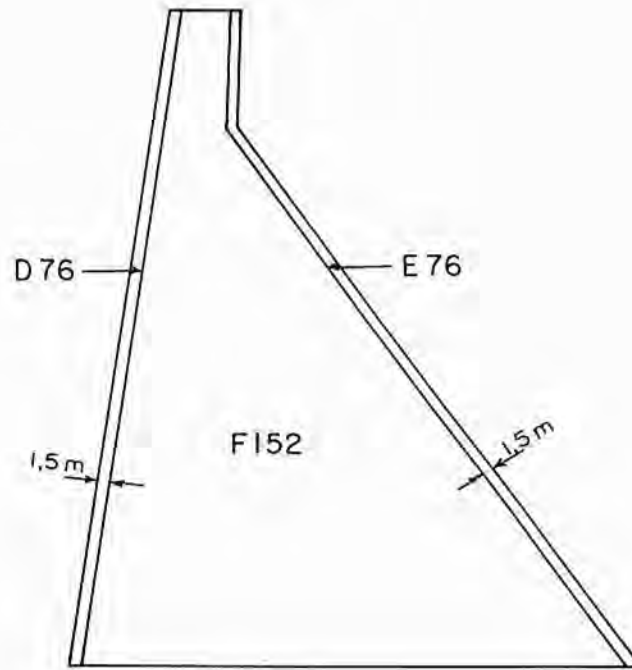


Figura 8.2.1 - Zoneamento do concreto

### 8.3- Propriedades térmicas

As propriedades térmicas dos três concretos empregados são indicadas na tabela 8.3.1. Nessa tabela encontram-se, também, as propriedades da rocha de fundação. Apenas a massa específica da rocha foi determinada experimentalmente. As demais propriedades foram tomadas com os mesmos valores obtidos para o concreto F152.

Tabela 8.3.1 - Propriedades térmicas

Concreto	Calor específico ( $c$ ) kcal/kg °C	Massa específica ( $\rho$ ) kg/m <sup>3</sup>	Condutividade térmica ( $k = k_x = k_y$ ) kcal/m dia °C	Difusividade térmica ( $\beta = \frac{k}{c\rho}$ ) m <sup>2</sup> /dia
D76	0,218	2400	63,30	0,121
E76	0,218	2400	63,30	0,121
F152	0,220	2500	82,50	0,150
Rocha	0,220	2800	92,40	0,150

O coeficiente de dilatação térmica dos concretos e da rocha são considerados iguais a  $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Foram realizados ensaios de elevação adiabática da temperatura para os diversos concretos empregados na obra. Em função desses ensaios, foi possível definir o coeficiente de rendimento térmico  $R$  como sendo a elevação adiabática da temperatura por kg de aglomerante por  $\text{m}^3$  de concreto.

Para efeito de implementação computacional, esses resultados são ajustados através das equações

$$\begin{aligned} R &= 0,0433t, \text{ se } t \leq 3; \\ R &= 0,13 + 0,0167 \ln(t - 2), \text{ se } 3 < t \leq 28; \\ R &= 0,1844, \text{ se } t > 28, \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

sendo  $t$  a idade do concreto em dias.

Conhecido o coeficiente de rendimento térmico, a taxa de geração de calor  $\dot{q}_g$  é obtida por

$$\dot{q}_g = c\rho S \frac{\partial R}{\partial t} \quad (8.3.2)$$

onde  $S$  é o consumo de aglomerante por  $\text{m}^3$  de concreto e  $c$  e  $\rho$  são o calor específico e a massa específica, respectivamente.

Os consumos de aglomerante (cimento+pozolana) são de  $166 \text{ kg/m}^3$  para o concreto D76,  $159 \text{ kg/m}^3$  para o concreto E76 e de  $112 \text{ kg/m}^3$  para o concreto F152.

Na figura 8.3.1, encontram-se representados os pontos experimentais juntamente com a curva de ajuste definida em (8.3.1).

#### **8.4- Condições de contorno do problema térmico**

Na análise numérica são adotados os seguintes valores para o coeficiente de transferência superficial de calor:

$$h = 7200 \text{ kcal/m}^2 \text{ dia } ^\circ\text{C}, \text{ para a transferência entre o concreto e a água de cura;}$$

$$h = 278,4 \text{ kcal/m}^2 \text{ dia } ^\circ\text{C}, \text{ para a transferência entre o concreto e o ar.}$$



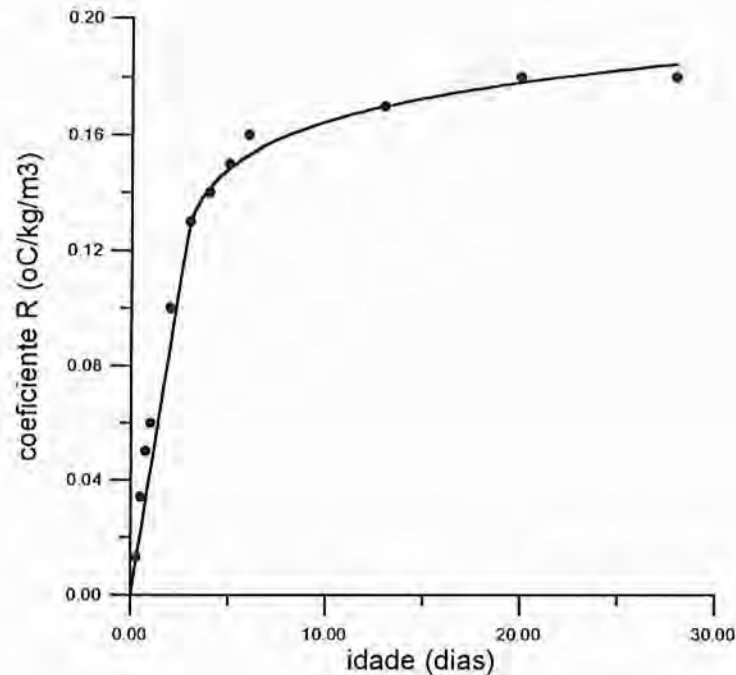


Figura 8.3.1 - Coeficiente de rendimento térmico

As formas laterais não são consideradas isolantes, ou seja, admite-se o mesmo valor do coeficiente de transferência concreto-ar.

O intervalo de lançamento entre as camadas é considerado igual a 10 dias, o que representa o intervalo médio de concretagem. A cura persistiu durante todo esse período e para a última camada a duração da cura foi de 14 dias.

A temperatura média do ar é considerada igual a 27 °C, o que representa a média observada na estação climatológica de Tucuruí no período de 1971 a 1981. A temperatura média da água de cura, bem como a temperatura inicial da rocha, é considerada igual a 27 °C.

A análise térmica, assim como a análise de tensões na fase construtiva, é feita considerando-se um incremento de tempo  $\Delta t = 0,5$  dia.

### **8.5- Propriedades mecânicas dos concretos**

Na tabela 8.5.1, encontram-se indicadas as resistências médias à compressão,  $f_{c90}$ , para os três concretos empregados no MTD. Essas resistências referem-se à idade de controle de 90 dias.

Tabela 8.5.1 - Resistências à compressão

Concreto	$f_{c90}$ (MPa)
D76	20,90
E76	19,60
F152	16,70

De acordo com o CEB/90, a variação da resistência à compressão com a idade é dada por

$$\frac{f_c(t)}{f_{c28}} = e^{0,25 \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right]} \quad (8.5.1)$$

onde  $f_c(t)$  é a resistência do concreto na idade  $t$  dias e  $f_{c28} = 0,895 f_{c90}$  é a resistência na idade 28 dias.

Na figura 8.5.1, encontra-se indicada a variação da resistência à compressão dada pela expressão (8.5.1) juntamente com os pontos experimentais.

A resistência à tração simples é obtida em função da resistência à compressão na forma

$$f_t = 1,40 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (8.5.2)$$

também em conformidade com o CEB/90.

O coeficiente de Poisson é considerado igual a 0,2 para as 3 classes de concreto.

Para o concreto F152 foram realizados ensaios para a determinação das curvas de fluência<sup>[4]</sup>. A função de fluência ajustada aos resultados experimentais é tomada na forma

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{1}{V(t')} \ln(1 + t - t') \quad (8.5.3)$$

onde  $t$  e  $t'$  são dados em dias.

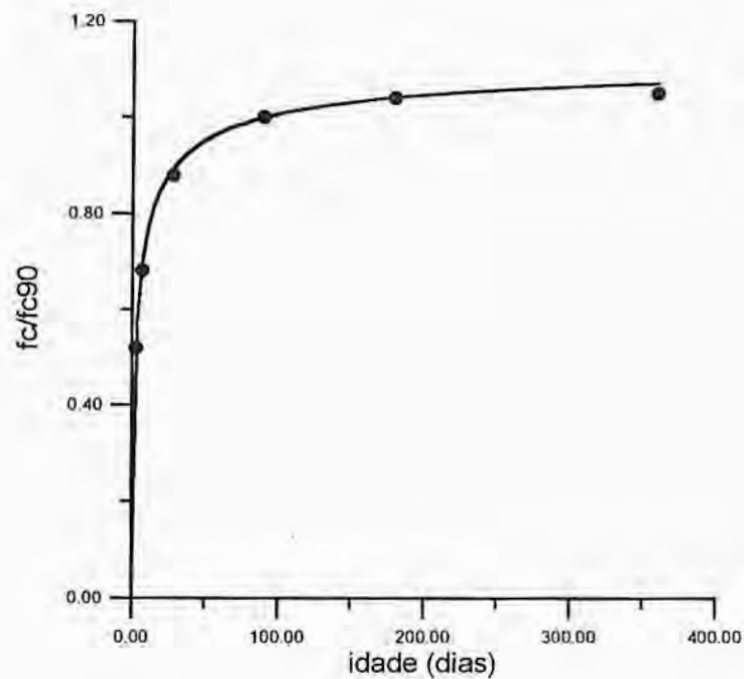


Figura 8.5.1 - Variação da resistência à compressão com a idade

O módulo de elasticidade  $E(t')$  e a função de envelhecimento  $V(t')$  obtidos para o concreto F152 são dados por

$$\frac{1}{E(t')} = \left[ 2,9756 + 25,5780 \left( \frac{1}{t'} \right)^{1,95} \right] 10^{-5} \quad (8.5.4)$$

$$\frac{1}{V(t')} = \left[ 0,0405 + 0,9756 \left( \frac{1}{t'} \right)^{0,11} \right] 10^{-5} \quad (8.5.5)$$

com  $E$  e  $V$  em MPa.

Na figura 8.5.2, são apresentadas as curvas de fluência do concreto F152 para diferentes idades de carregamento.

Para os concretos D76 e E76 são adotadas as relações

$$E(t') = \alpha E(t')_{F152} \quad ; \quad V(t') = \alpha V(t')_{F152} \quad (8.5.6)$$

onde  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \sqrt{\frac{f_{c90}}{f_{c90,F152}}} \quad (8.5.7)$$

Nessas equações, o índice  $F152$  indica as propriedades do concreto F152. A constante  $\alpha$  é igual a 1,12 para o concreto D76 e 1,08 para o E76.

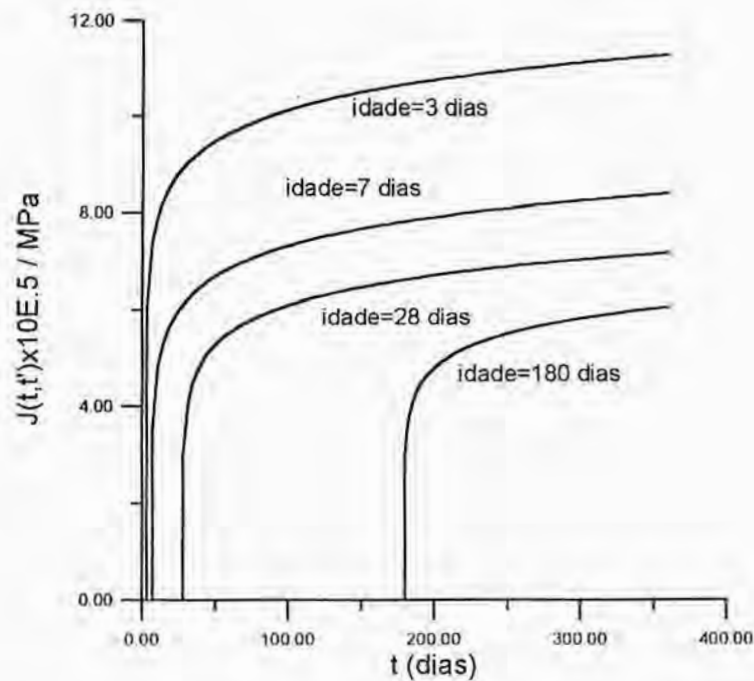


Figura 8.5.2 - Curvas de fluência para o concreto F152

A deformação de retração autógena para os três concretos é ajustada na forma

$$\varepsilon_s = -0,1216t, \text{ se } t \leq 188 \quad (8.5.8)$$

$$\varepsilon_s = -22,86, \text{ se } t > 188$$

onde  $t$  é a idade em dias e  $\varepsilon_s$  deve ser multiplicada por  $10^{-6}$

Na figura 8.5.3, indica-se a variação da retração autógena com a idade obtida da equação (8.5.8) juntamente com os pontos experimentais.

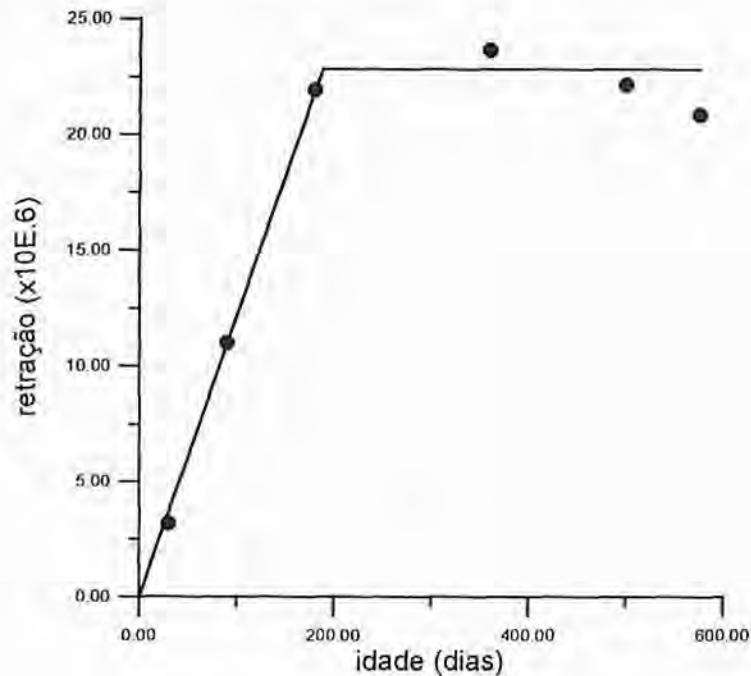


Figura 8.5.3 - Variação da retração autógena

### **8.6- Efeito da taxa de deformação nas propriedades do concreto**

As propriedades dos concretos apresentadas anteriormente são empregadas na análise da fase construtiva com o modelo do capítulo 5. Ao final dessa fase, as tensões em 2x2 pontos de Gauss são avaliadas usando a projeção detalhada no capítulo 4. Essas são as tensões iniciais para a segunda etapa da análise.

Nessa segunda etapa, a barragem é submetida à pressão hidrostática e a uma excitação sísmica. Os incrementos de tensões decorrentes da pressão hidrostática são obtidos com o algoritmo apresentado no capítulo 4 (sem deformações iniciais), adotando-se o módulo de elasticidade de acordo com o CEB/90, dado por

$$E_c = 21500 \left( \frac{f_c}{10} \right)^{1/3}, \text{ MPa} \quad (8.6.1)$$

onde  $f_c$  é a resistência à compressão na idade de controle dada na tabela 8.5.1.

As resistências à tração são obtidas com o emprego da equação (8.5.2).

Na análise dinâmica, as propriedades são modificadas para levar em conta a velocidade da deformação. Isto é feito de acordo com o CEB/90, conforme é descrito a seguir.

O módulo de elasticidade dinâmico,  $E_{ci}$ , é obtido da relação

$$\frac{E_{ci}}{E_c} = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{co}} \right)^{0,026} \quad (8.6.2)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_{co} = -30 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_c$  é a taxa de deformação de compressão e  $E_c$  é o módulo estático dado em (8.6.1).

A resistência à compressão dinâmica,  $f_{ci}$ , é obtida das relações

$$\frac{f_{ci}}{f_c} = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{co}} \right)^{1,026\alpha_s}, \text{ se } |\dot{\varepsilon}_c| \leq 30 \text{ s}^{-1}; \quad (8.6.3)$$

$$\frac{f_{ci}}{f_c} = \gamma_s \left( \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_{co}} \right)^{1/3}, \text{ se } |\dot{\varepsilon}_c| > 30 \text{ s}^{-1}$$

onde

$$\log \gamma_s = 6,156\alpha_s - 2 \quad (8.6.4)$$

com

$$\alpha_s = \frac{1}{5 + 9 \frac{f_c}{10}}, \text{ sendo } f_c \text{ em MPa} \quad (8.6.5)$$

Nas expressões anteriores  $f_c$  é a resistência sob carregamento estático obtida da tabela (8.5.1).

A resistência à tração dinâmica é dada por



$$\frac{f_{ii}}{f_t} = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_t}{\dot{\varepsilon}_{t0}} \right)^{1,016\delta_s}, \text{ se } \dot{\varepsilon}_t \leq 30 \text{ s}^{-1} \quad (8.6.6)$$

$$\frac{f_{ii}}{f_t} = \beta_s \left( \frac{\dot{\varepsilon}_t}{\dot{\varepsilon}_{t0}} \right)^{1/3}, \text{ se } \dot{\varepsilon}_t > 30 \text{ s}^{-1}$$

onde  $\dot{\varepsilon}_{t0} = 3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_t$  é a taxa de deformação de tração e  $f_t$  é a resistência sob carregamento estático obtida da equação (8.5.2).

As constantes  $\delta_s$  e  $\beta_s$  são dadas por

$$\delta_s = \frac{1}{10 + 6 \frac{f_c}{10}}, \text{ com } f_c \text{ em MPa} \quad (8.6.7)$$

$$\log \beta_s = 7,112\delta_s - 2,33 \quad (8.6.8)$$

As taxas de deformações  $\dot{\varepsilon}_c$  e  $\dot{\varepsilon}_t$  são obtidas da seguinte maneira. Se  $\Delta U$  representa o incremento de deslocamentos nodais ocorrido no intervalo de tempo  $\Delta t$ , pode-se calcular o vetor com as taxas de deformações,  $\dot{\mathcal{E}}$ , como

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{B}(\xi, \eta) \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (8.6.9)$$

onde  $\mathbf{B}(\xi, \eta)$  é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais.

Essas taxas são avaliadas no centro de cada elemento da barragem, isto é, no ponto de coordenadas  $\xi = \eta = 0$ . Com  $\dot{\mathcal{E}}$  pode-se obter as taxas de deformações principais  $\dot{\varepsilon}_1$  e  $\dot{\varepsilon}_2$ , onde  $\dot{\varepsilon}_1 \geq \dot{\varepsilon}_2$ . Se  $\dot{\varepsilon}_1 > 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_t = \dot{\varepsilon}_1$  e pode-se atualizar a resistência à tração do elemento com o emprego da equação (8.6.6). Se  $\dot{\varepsilon}_2 < 0$ ,  $\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_2$  e obtém-se o módulo dinâmico e a resistência à compressão através das equações (8.6.2) e (8.6.3).

Se, por outro lado,  $\dot{\varepsilon}_1 \leq 0$  adota-se  $f_{II} = f_I$  e se  $\dot{\varepsilon}_2 \geq 0$  toma-se  $E_{ci} = E_c$  e  $f_{ci} = f_c$ .

Tendo definido as propriedades sob carregamento dinâmico, emprega-se o algoritmo apresentado no capítulo 4 para o cálculo dos incrementos de tensões.

### 8.7- Caracterização do maciço rochoso

O maciço rochoso sob a barragem de Tucuruí é formado por um metassedimento e na região do MTD ele é cortado por uma falha denominada F3. A caixa dessa falha, constituída de material argiloso incoerente e pequenos fragmentos de rocha, apresenta uma espessura de cerca de 5,00m.

Na figura 8.7.1, indica-se a parte do maciço que é considerada na análise numérica.

Nas fundações do MTD foram realizados ensaios de campo e de laboratório para a determinação das propriedades mecânicas do metassedimento e da falha F3. Os resultados obtidos são os seguintes:

#### a) Metassedimento maciço

- módulo de elasticidade longitudinal:  $E_p = 20000$  MPa

- coeficiente de Poisson:  $\nu_p = 0,25$

#### b) Material da falha F3

- módulo de elasticidade longitudinal:  $E_f = 3600$  MPa

- coeficiente de Poisson:  $\nu_f \cong 0$ .

Para a região superficial do maciço, abalada pelo desmonte com explosivos, adota-se um módulo de elasticidade reduzido igual a 10000 MPa.

Na análise numérica, considera-se que os elementos do maciço cortados pela falha possuem uma matriz constitutiva equivalente,  $\mathbf{D}_e$ , dada por

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_r(1 - d) + d\mathbf{D}_f \quad (8.7.1)$$

onde  $D_r$  e  $D_f$  são as matrizes constitutivas da rocha sã e do material da caixa de falha, respectivamente.

O parâmetro de dano  $d$  é dado por

$$d = \frac{A_f}{A_t} \quad (8.7.2)$$

onde  $A_f$  é a área danificada pela falha e  $A_t$  é a área total do elemento.

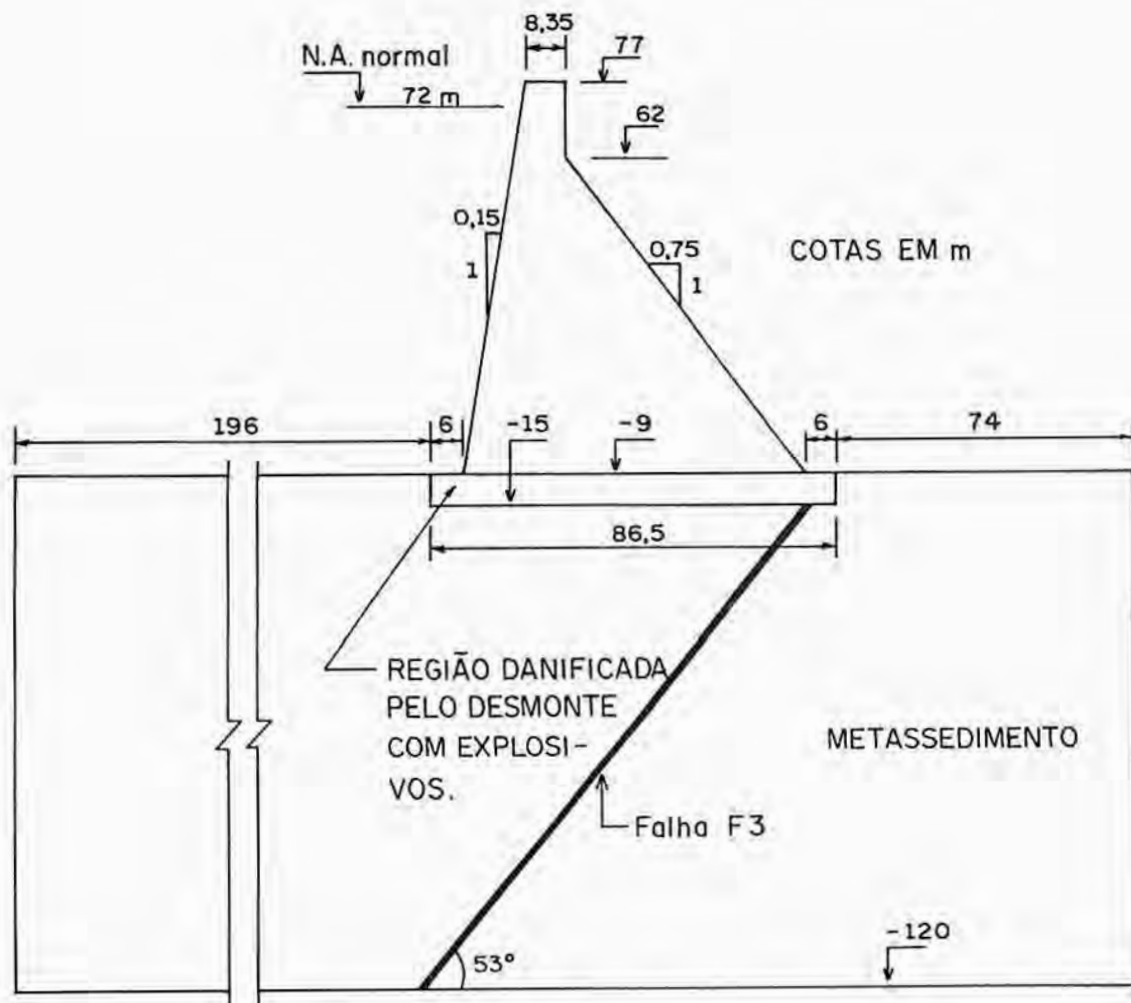


Figura 8.7.1 - Maciço rochoso sob o MTD

### 8.8- Segurança contra o escorregamento

A segurança contra o escorregamento na ligação barragem-fundação é feita de acordo com o critério de Mohr-Coulomb. Por esse critério, a tensão de cisalhamento de ruptura da ligação,  $|\tau_r|$ , é dada por

$$|\tau_r| = c - \mu(\sigma_n + p) \quad (8.8.1)$$

onde  $c$  é a coesão,  $\mu$  é o coeficiente de atrito,  $\sigma_n$  é a tensão normal na interface e  $p$  é a subpressão.

A coesão é uma função da resistência do concreto e o coeficiente de atrito é governado pela aspereza da superfície da junta<sup>[37]</sup>.

Usualmente, adotam-se os seguintes valores para o coeficiente de atrito em função da aspereza da junta<sup>[37]</sup>:

$$\mu = 1,4 \text{ para junta áspera;}$$

$$\mu = 1,0 \text{ para junta média;}$$

$$\mu = 0,7 \text{ para junta lisa.}$$

A coesão pode ser relacionada com a resistência à compressão do concreto,  $f_c$ , na forma<sup>[36,37]</sup>

$$c = 0,25 f_c^{2/3}, \text{ com } f_c \text{ em MPa} \quad (8.8.2)$$

A subpressão na base da barragem é indicada na figura 8.8.1 para as condições de drenos operantes e drenos inoperantes.

O coeficiente de segurança contra o escorregamento em um determinado instante,  $S_e$ , é dado por

$$S_e = \frac{\int |\tau_r| d\zeta}{\int |\tau| d\zeta} \quad (8.8.3)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento solicitante na ligação e as integrais são efetuadas ao longo da superfície de contato.

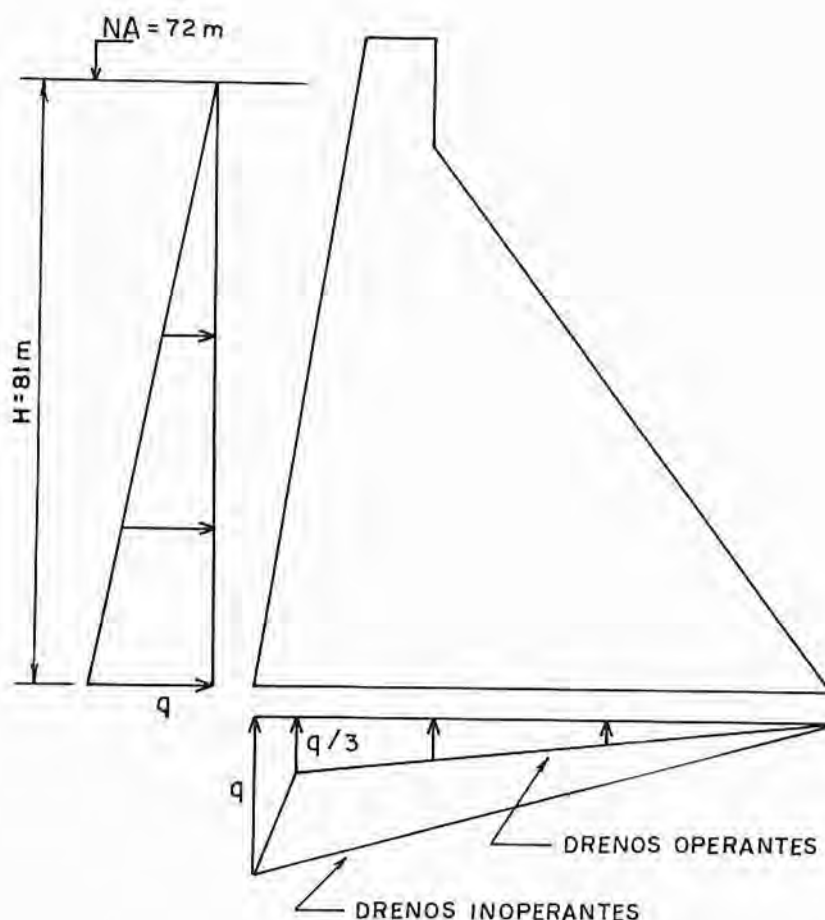


Figura 8.8.1 - Consideração da subpressão

As tensões normal,  $\sigma_n$ , e de cisalhamento,  $\tau$ , na base da barragem são obtidas por projeção das tensões conhecidas nos pontos de integração dos elementos de concreto em contato com a rocha, conforme foi apresentado no capítulo 4. As integrações são efetuadas empregando-se 2 pontos de Gauss por elemento ao longo da interface. Se, em algum instante, resultar  $|\tau| > |\tau_r|$  em um ponto de integração, considera-se a ocorrência de ruptura local da ligação. Daí para frente, despreza-se a coesão neste ponto de integração.

### 8.9- Malhas de elementos finitos

Nas figuras 8.9.1 a 8.9.3, são indicadas as malhas de elementos finitos adotadas para o maciço rochoso, para a água do reservatório e para o MTD.

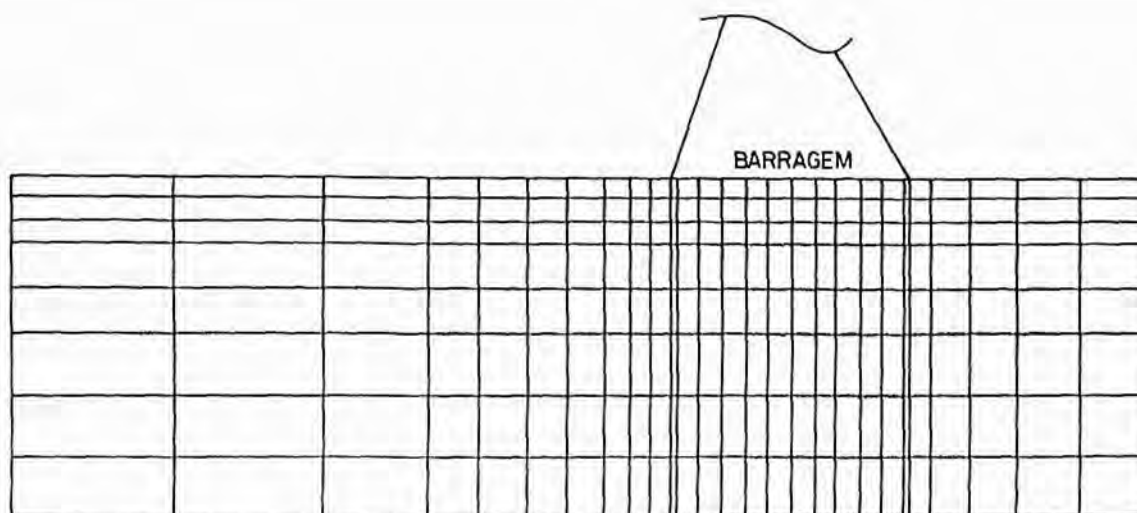


Figura 8.9.1 - Malha do maciço rochoso

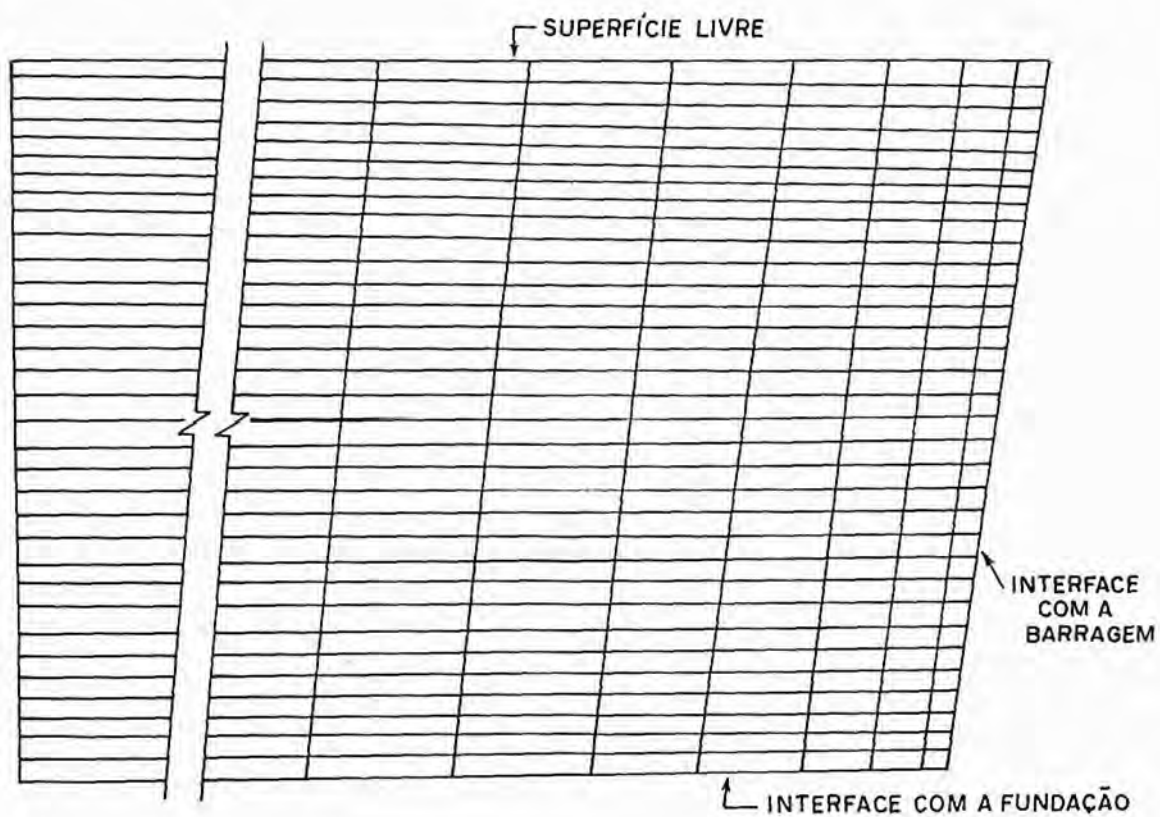


Figura 8.9.2 - Malha do reservatório



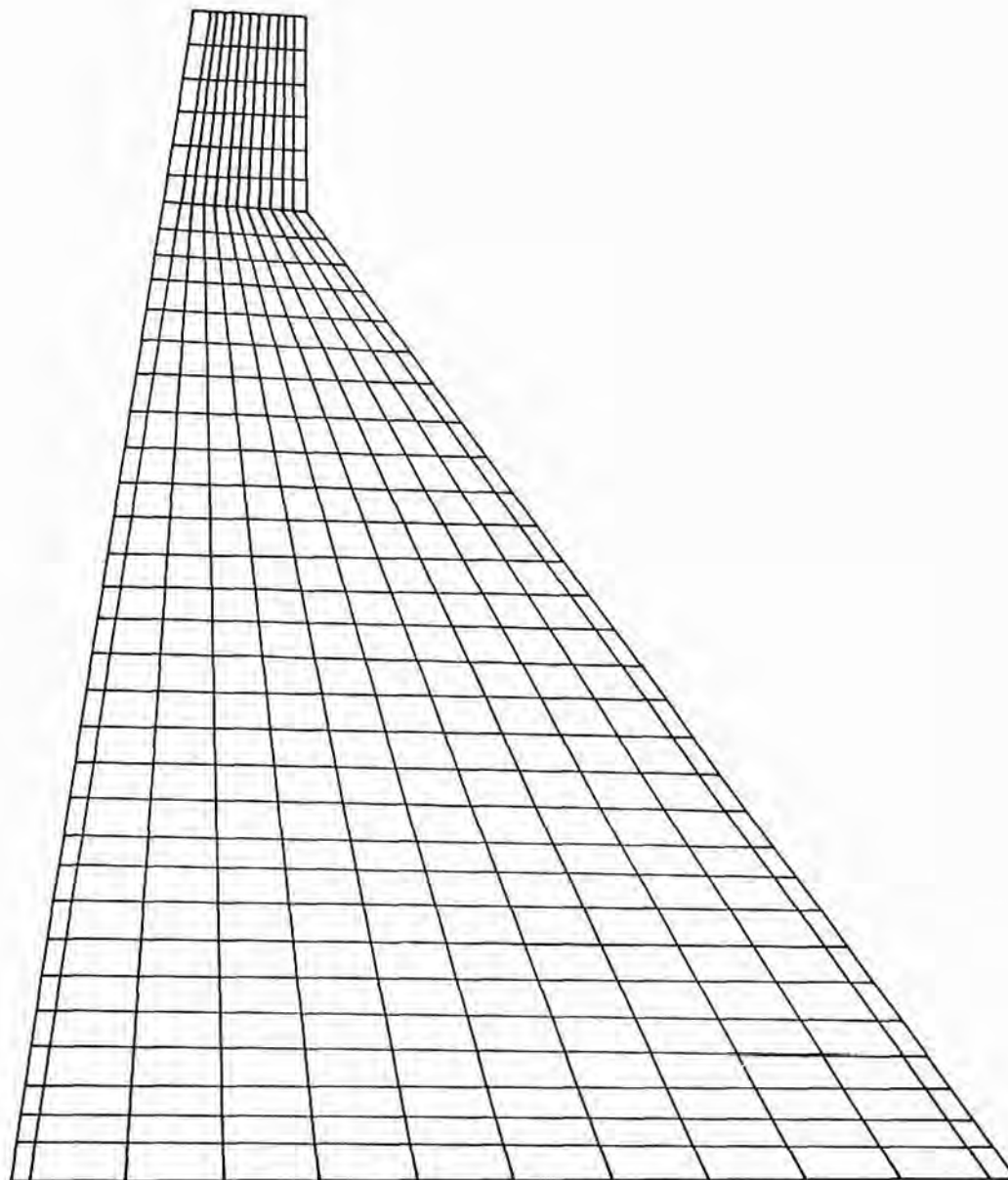


Figura 8.9.3 - Malha do MTD

A estrutura do MTD é discretizada em 420 elementos e o maciço em 216 elementos isoparamétricos quadráticos de oito nós. O número total de nós é de 2049 com 2049 graus de liberdade em temperaturas e 4098 graus de liberdade em deslocamentos. O reservatório é discretizado em 330 elementos isoparamétricos quadráticos de oito nós com 1077 graus de liberdade em pressão.

## 9. RESULTADOS

### 9.1- Estabilidade do método de integração das equações de condução de calor

Neste exemplo, verifica-se a estabilidade numérica do método de integração das equações diferenciais do problema de condução de calor apresentado no capítulo 2.

Na figura 9.1.1, indica-se a variação da temperatura no centro da camada 1 do MTD para três valores do parâmetro  $\theta$ . Apenas o lançamento das duas primeiras camadas é considerado. As espessuras das camadas, temperaturas e intervalos de lançamento, bem como as condições de contorno térmicas, são as mesmas apresentadas no capítulo 8.

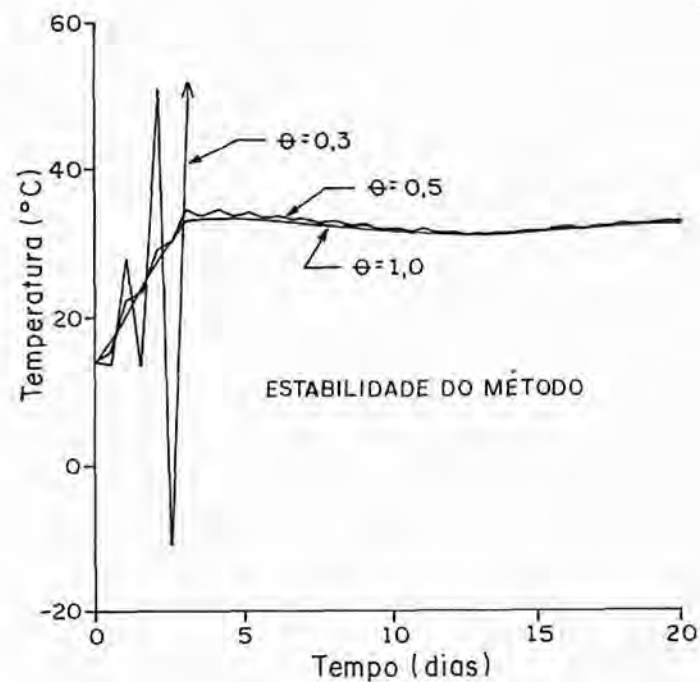


Figura 9.1.1 - Influência do parâmetro  $\theta$

Observando a figura, verifica-se que para  $\theta = 0,3$  o método é instável e para  $\theta \geq 0,5$  é estável. A resposta obtida com  $\theta = 0,5$ , apesar de ser estável, apresenta oscilações nos primeiros dias o que não ocorre quando  $\theta$  é igual a 1. Por isso, em todos os exemplos seguintes será adotado  $\theta = 1$ .

## 9.2- Distribuição de temperatura na barragem

Nesta seção, são feitas simulações para determinar a influência de alguns parâmetros na distribuição de temperaturas do MTD. Apenas o lançamento das duas primeiras camadas é considerado. Os dados do problema são os apresentados no capítulo 8.

Na figura 9.2.1, indicam-se as variações da temperatura no centro da camada 1 para diferentes espessuras de lançamento. A curva representada em linha cheia corresponde à resposta obtida com as espessuras adotadas para o MTD. A linha tracejada representa a variação da temperatura que é obtida aumentando-se as espessuras das camadas em 1m.

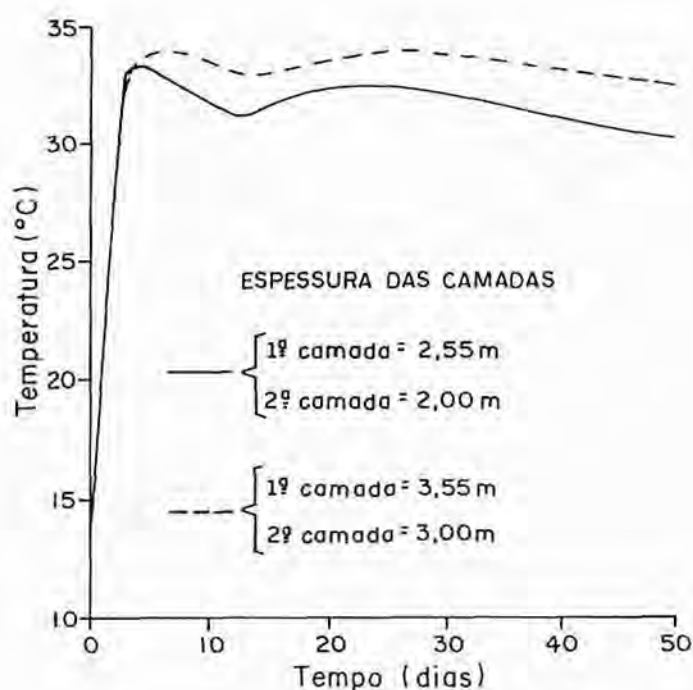


Figura 9.2.1 - Influência da espessura das camadas

Este exemplo mostra que quanto maiores forem as espessuras das camadas maior será a elevação da temperatura do concreto. Conseqüentemente, a adoção de camadas de pequena espessura é uma providência necessária para a redução da temperatura em concreto massa.

Na figura 9.2.2, são indicadas as variações da temperatura no centro da camada 1 considerando-se duas temperaturas de lançamento. A linha cheia representa a solução obtida com a pré-refrigeração do concreto (temperatura de lançamento igual a 14 °C) e a linha tracejada corresponde a uma temperatura de lançamento igual à temperatura ambiente. A

redução do pico de temperatura obtido com o resfriamento prévio do concreto foi de cerca de 8 °C, o que mostra a importância da pré-refrigeração.

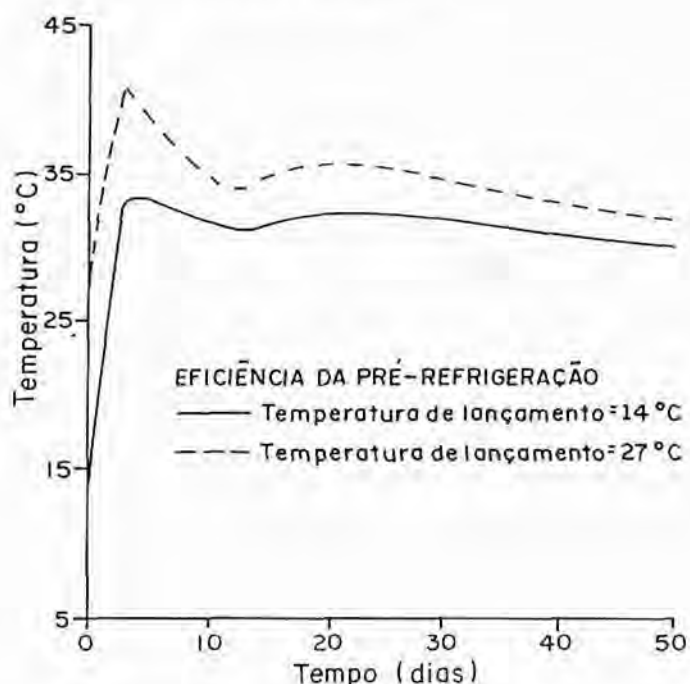


Figura 9.2.2 - Influência da pré-refrigeração do concreto

Na figura 9.2.3, são representadas as respostas obtidas considerando-se dois intervalos de lançamento das camadas. Por essa figura, observa-se que um maior espaçamento entre o lançamento das camadas também é uma medida eficiente para a redução da temperatura na barragem.

Na figura 9.2.4, indica-se o efeito da cura na elevação da temperatura no centro da camada 1. A curva em linha cheia representa a resposta considerando-se a transferência de calor entre o concreto e o ar nas laterais e entre o concreto e a água no topo das camadas. Para a linha tracejada considera-se apenas a transferência concreto-ar em todo o contorno.

Em função desses resultados, conclui-se que para minimizar a elevação da temperatura decorrente da hidratação do cimento deve-se adotar um conjunto de providências. A solução final a ser dada, que sempre depende do fator custo, pode ser encontrada fazendo-se várias simulações como as apresentadas.

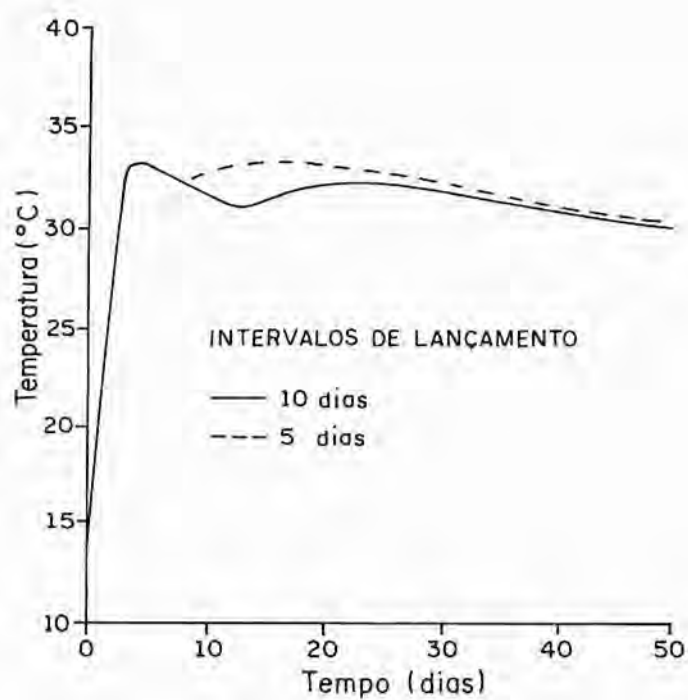


Figura 9.2.3 - Influência dos intervalos de lançamento

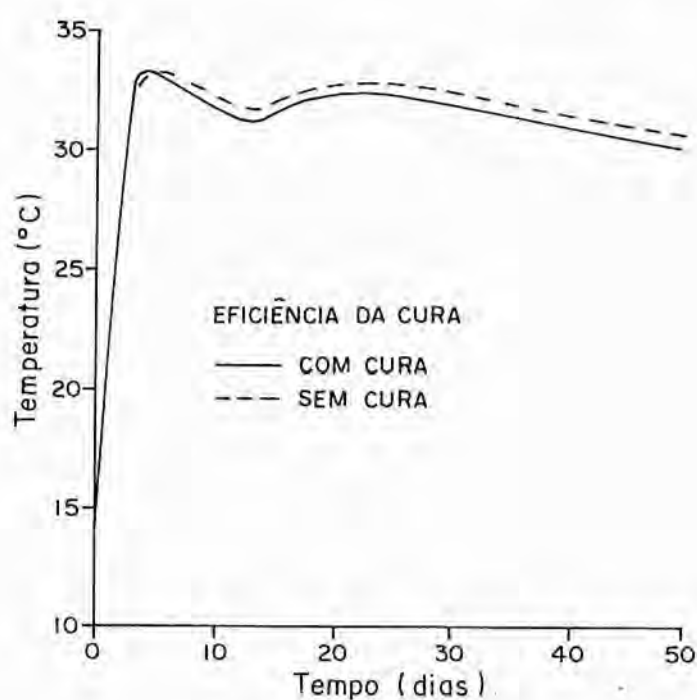


Figura 9.2.4 - Influência da cura

Nas figuras 9.2.5 e 9.2.6, são mostradas as distribuições médias da temperatura no MTD considerando-se os dados fornecidos no capítulo 8. A figura 9.2.5 representa a

distribuição da temperatura durante a fase construtiva (10 dias após o lançamento da camada 29). A figura 9.2.6 corresponde a 1 ano após a concretagem da última camada.

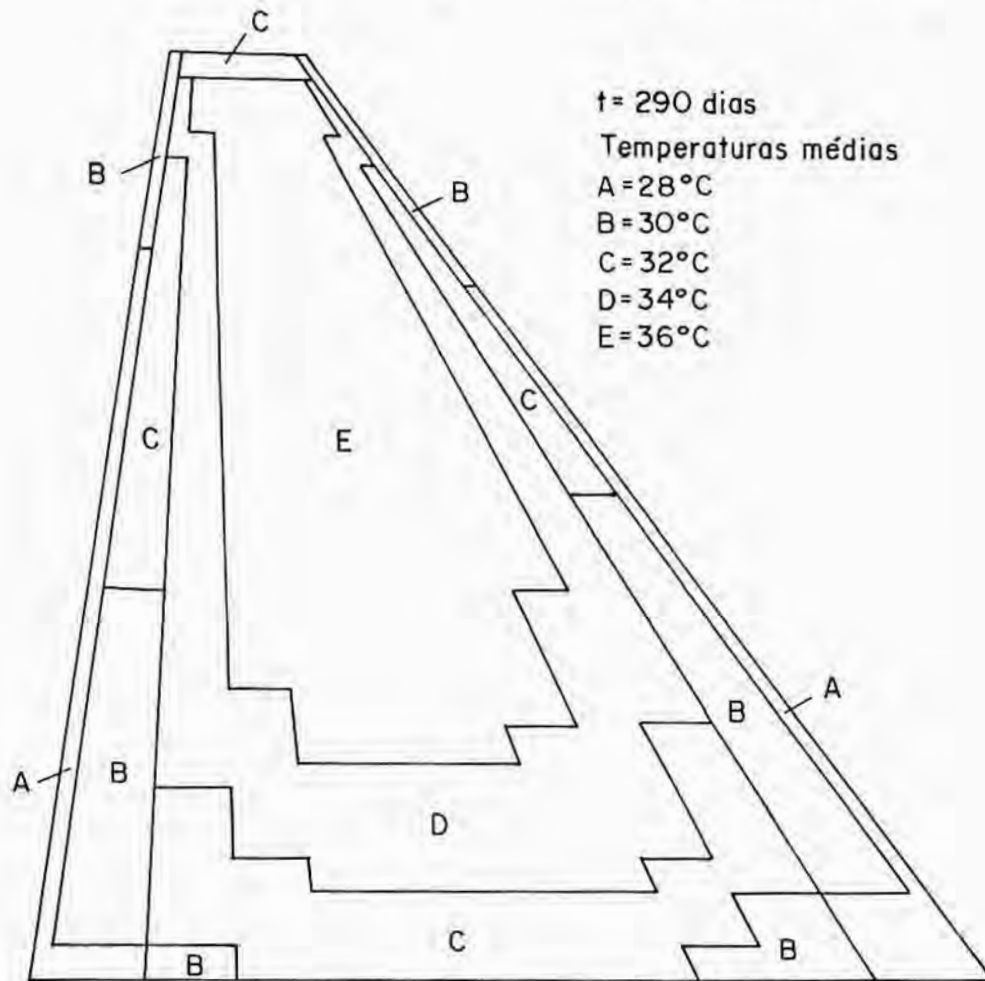


Figura 9.2.5 - Temperaturas médias na fase construtiva

As leituras dos termômetros instalados no MTD indicaram que a elevação da temperatura em relação à de lançamento variou entre  $16^{\circ}\text{C}$  e  $22^{\circ}\text{C}$ , dependendo da localização<sup>[33]</sup>. Isto significa que as temperaturas máximas observadas se situaram entre  $30^{\circ}\text{C}$  e  $40^{\circ}\text{C}$ , o que concorda com os resultados indicados nas figuras 9.2.5 e 9.2.6.

Comparando essas figuras verifica-se, também, que o resfriamento médio do centro da barragem foi de  $2^{\circ}\text{C}$  no período de 410 dias, ou seja, de  $1,75^{\circ}\text{C}/\text{ano}$  durante o primeiro ano após a construção. Esse resultado também é confirmado pelas leituras feitas na obra<sup>[33]</sup>.



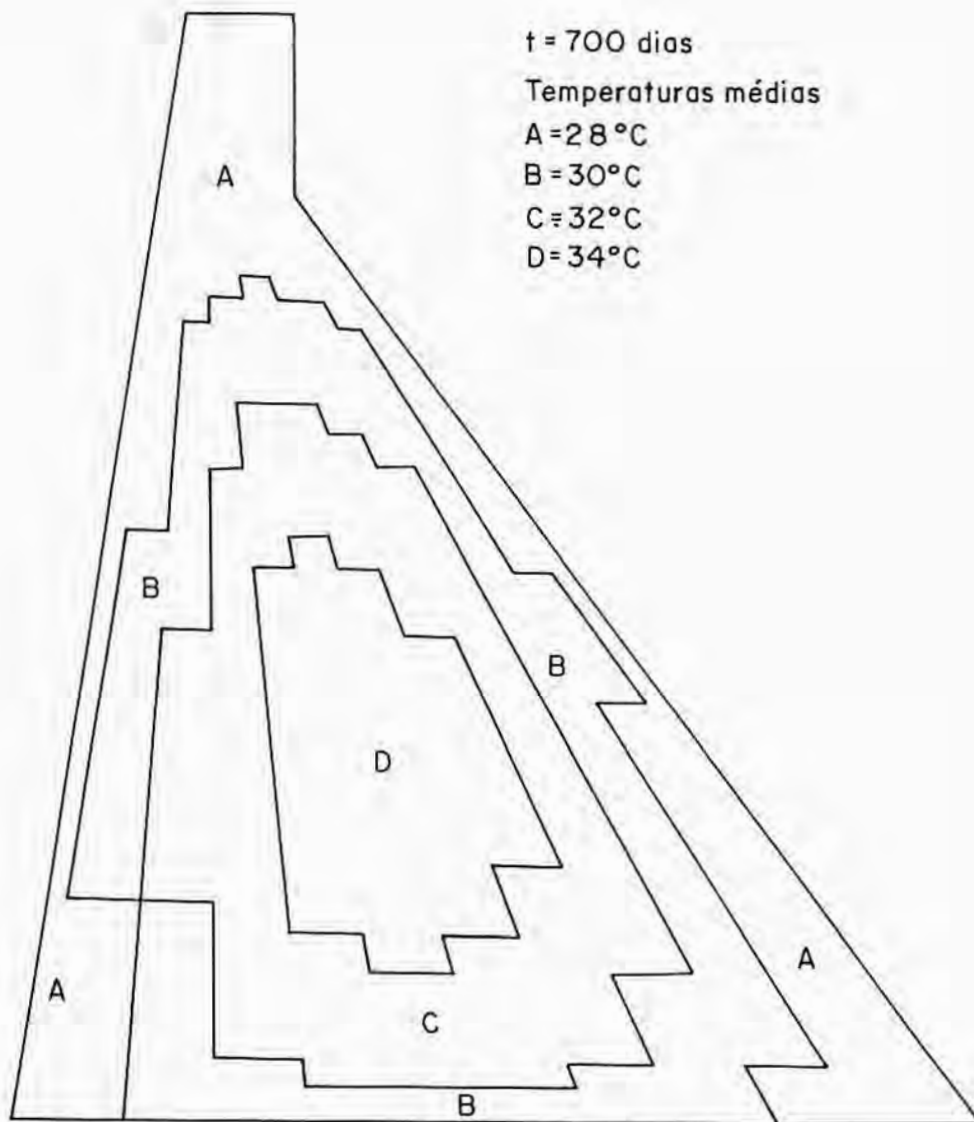


Figura 9.2.6 - Temperaturas médias 1 ano após a construção

### 9.3- Segurança contra a fissuração térmica

Nesta seção, são apresentados os coeficientes de segurança contra a fissuração térmica do MTD. Os coeficientes são os mínimos detectados em cada elemento durante o período analisado, conforme foi exposto no capítulo 7.

Na figura 9.3.1, são apresentados os coeficientes de segurança obtidos considerando-se apenas o lançamento das duas primeiras camadas. A análise foi realizada até 1 ano após o lançamento da segunda camada, quando os instantes de ocorrência dos valores mínimos já foram ultrapassados. Nessa figura, os coeficientes são representados no centro de

cada elemento de forma que o eixo das abcissas representa a distância de um ponto até a face montante da barragem.

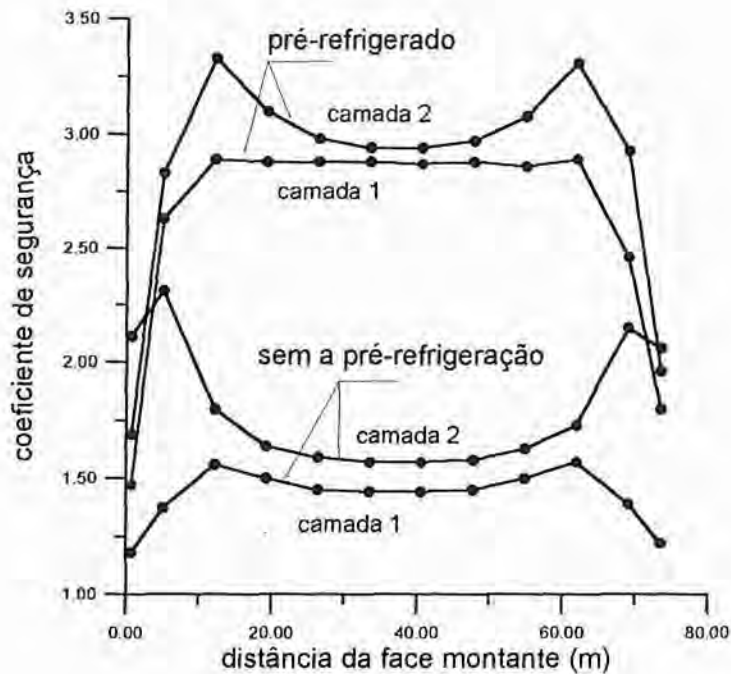


Figura 9.3.1 - Coeficientes de segurança contra a fissuração térmica (2 camadas)

Observando a figura, verifica-se que os coeficientes de segurança obtidos com a pré-refrigeração do concreto (temperaturas de lançamento iguais a 14 °C) são sensivelmente maiores do que os obtidos sem a pré-refrigeração (temperaturas de lançamento iguais a 27 °C). Na região central das camadas os coeficientes são aproximadamente constantes, mas nas laterais eles são muito variáveis em virtude dos fortes gradientes de tensões.

Verifica-se ainda, que os coeficientes de segurança da camada 2 são maiores do que os da primeira camada. Isto ocorre devido à maior restrição que a rocha impõe às deformações da primeira camada.

Na figura 9.3.2, são indicados os coeficientes de segurança da camada 1 considerando-se 1 mês e 1 ano após o lançamento da segunda camada.

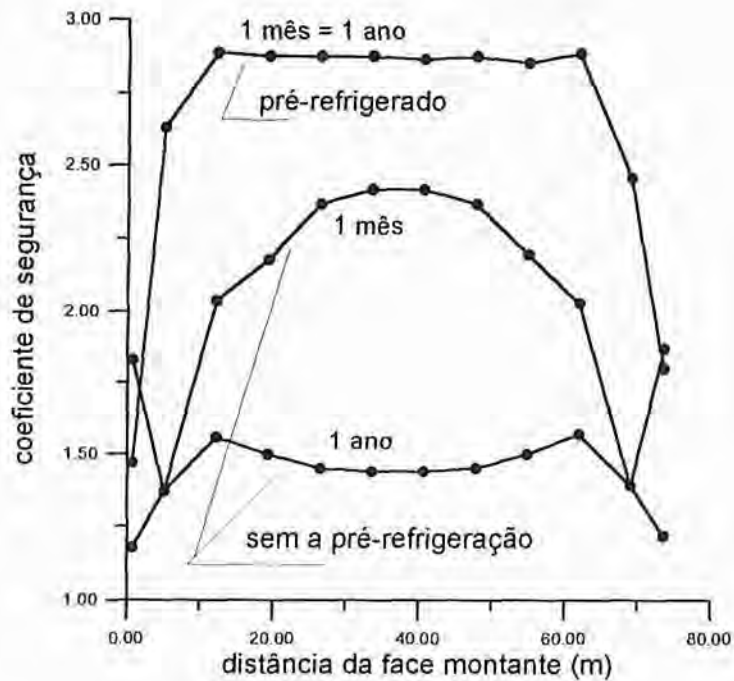


Figura 9.3.2 - Coeficientes de segurança da camada 1

Analisando esta figura, conclui-se que no caso do concreto pré-refrigerado, os valores mínimos do coeficiente de segurança são detectados com o concreto ainda jovem. Entretanto, para o concreto sem a pré-refrigeração os valores mínimos são obtidos muito depois do lançamento. Assim, se a fissuração vier a ocorrer ela acontecerá em pouco tempo após o lançamento, para o concreto pré-refrigerado, mas pode demorar a ser detectada se a pré-refrigeração não for feita. Esta é mais uma das vantagens da pré-refrigeração, já que eventuais reparos que se fizerem necessários podem ser executados ainda na fase de construção da estrutura, o que certamente é menos problemático do que após sua entrada em serviço.

Na figura 9.3.3, encontra-se indicada a distribuição dos coeficientes de segurança contra a fissuração que se obtém até 1 ano após a completa construção do MTD. Conforme se observa, esses coeficientes são relativamente altos, podendo-se esperar que essa estrutura esteja livre de fissuração térmica. Isto é confirmado pelas observações feitas durante a construção da obra, já que nenhuma fissura de origem térmica foi detectada<sup>[33]</sup>.

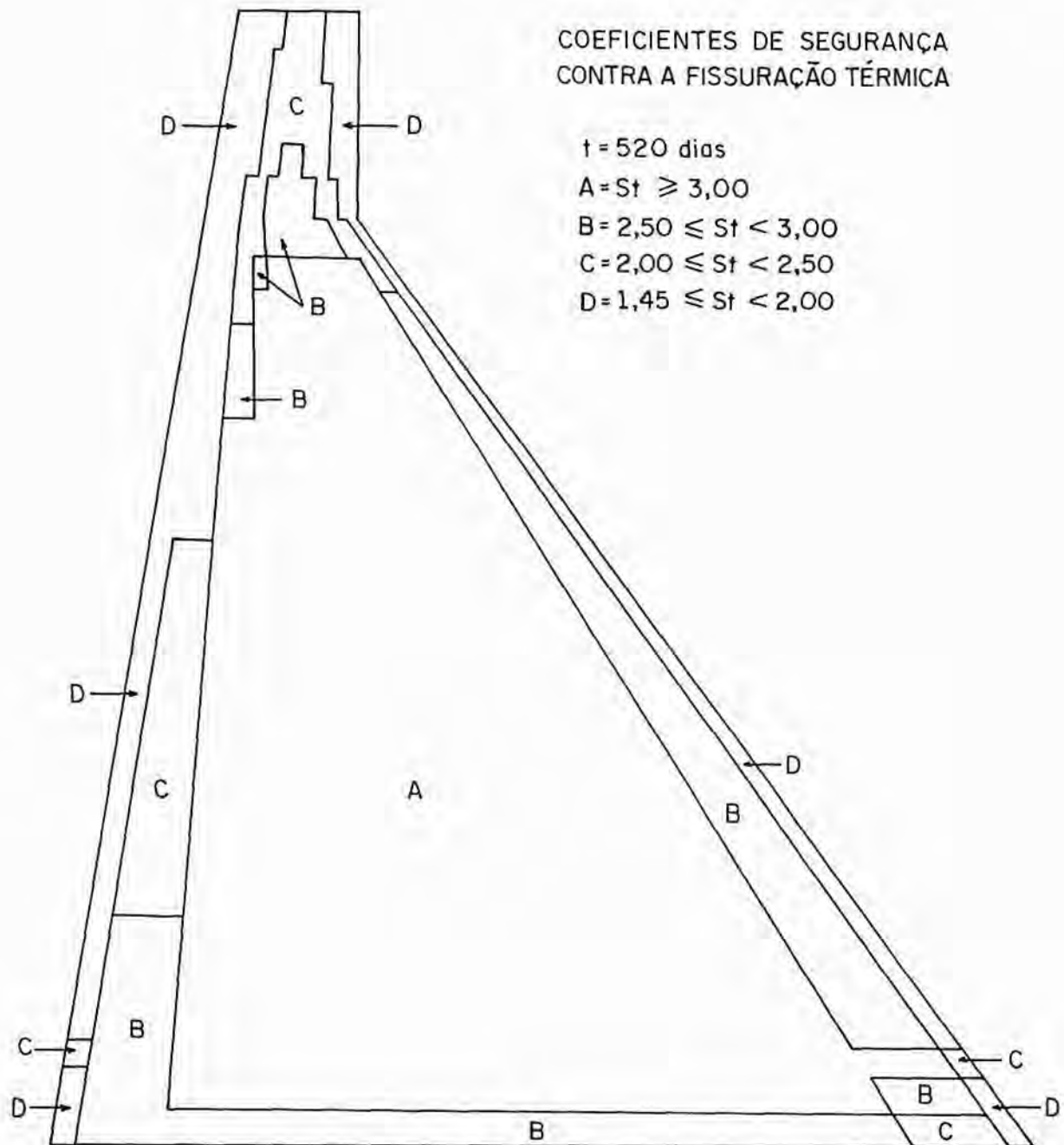


Figura 9.3.3 - Coeficientes de segurança contra a fissuração térmica (obra concluída)

#### 9.4 - Determinação dos incrementos de tempo para a análise sísmica

O objetivo desta seção é determinar qual é o maior incremento de tempo que se pode adotar para a integração das equações do movimento do sistema fluido-barragem-fundação. Apesar de o método de Newmark ser incondicionalmente estável, a precisão dos resultados dependerá do tamanho do intervalo de tempo considerado.

Conforme foi exposto no capítulo 6, as equações do sistema barragem-fundação são resolvidas através de um procedimento incremental no qual o desequilíbrio do instante anterior é incluído no vetor de cargas. Dessa forma, evitam-se as iterações para a garantia do equilíbrio. Entretanto, a precisão desse procedimento está condicionada à adoção de pequenos incrementos de cargas, já que a fissuração da barragem causa um desvio da linearidade, embora pouco acentuado.

Por outro lado, o vetor de cargas equivalentes é diretamente relacionado com a entrada sísmica. Assim, os incrementos de tempo devem ser escolhidos de forma a que nenhuma componente de frequência do sismo seja perdida, isto é, deve-se procurar representar até a componente de maior frequência. Isto pode ser feito tomando-se incrementos de tempo  $\Delta t$  dados por

$$\Delta t = \frac{2\pi}{N\omega_u} \quad (9.4.1)$$

onde  $\omega_u$  é a maior frequência e  $N$  é o menor número inteiro capaz de garantir uma precisão satisfatória dos resultados.

O número  $N$  é determinado considerando-se quatro critérios que representam o dano causado pelo sismo à estrutura: o máximo deslocamento horizontal, em valor absoluto, no topo da barragem (MTD); o mínimo valor do coeficiente de segurança contra o escorregamento na interface barragem-fundação; o mínimo valor do coeficiente de segurança contra o esmagamento do concreto e o número de pontos de integração fissurados. Estes dois últimos ocorrem na base da barragem à jusante e à montante, respectivamente.

Esta análise é realizada desprezando-se as tensões térmicas e de retração. O carregamento é devido ao peso próprio da barragem, à pressão hidrostática de montante e a um sismo cuja componente horizontal da aceleração tem uma amplitude determinística igual a  $0,1g$ , sendo  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade. A componente vertical é igual à metade da componente horizontal. As frequências são definidas no intervalo  $[0,5\pi]$  e a duração do sismo é de 5s. Os demais dados são os mesmos empregados para a obtenção da amostra representada na figura 7.3.1.

A segurança contra o escorregamento é obtida considerando-se a hipótese de drenos operantes e um coeficiente de atrito  $\mu = 1,0$ . A velocidade do som no fluido é tomada igual a 1434 m/s.

A frequência natural não amortecida do sistema barragem-fundação é igual a 18,30 rad/s. Especificando uma razão de amortecimento igual a 5% obtém-se o coeficiente que define a matriz de amortecimento (equação (6.5.5)) como  $\xi = 0,00546$ . Os demais dados são os apresentados no capítulo 8.

Nas figuras 9.4.1 a 9.4.4, encontram-se indicadas as respostas obtidas em função do número  $N$ .

Observando essas figuras, verifica-se que as respostas são convergentes com a redução do tamanho do intervalo de tempo. Para  $N = 20$  as variações dos resultados já são suficientemente pequenas para se admitir a convergência. Dessa forma, em todos os exemplos apresentados a seguir, os incrementos de tempo serão obtidos com o emprego da equação (9.4.1) tomando-se  $N = 20$ .

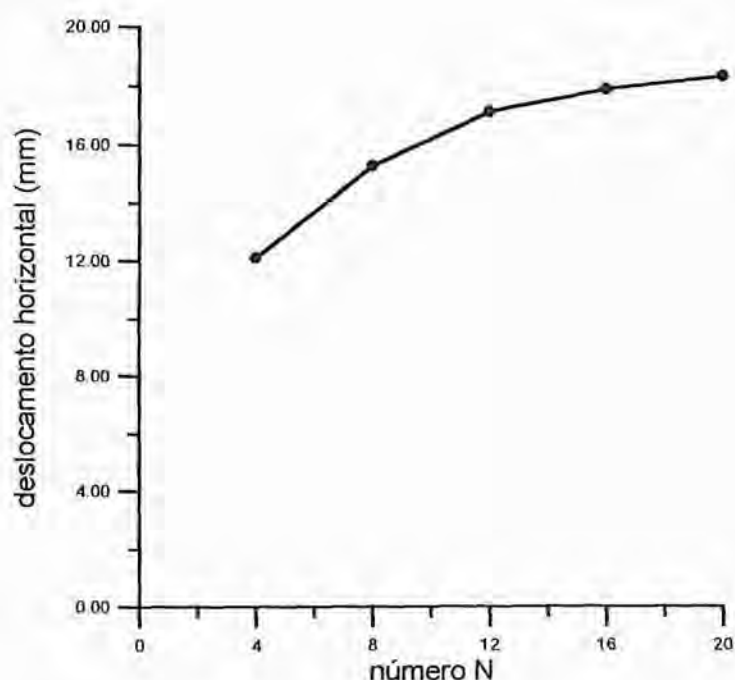


Figura 9.4.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem



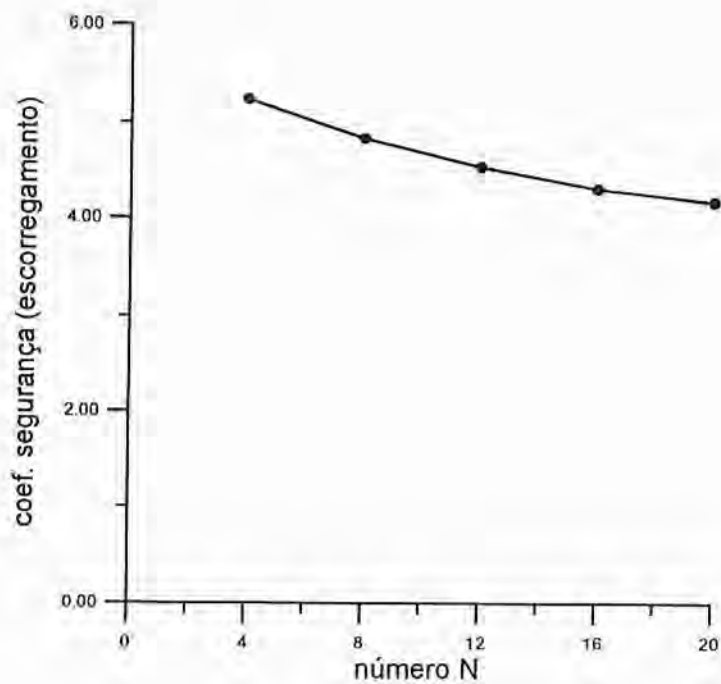


Figura 9.4.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento

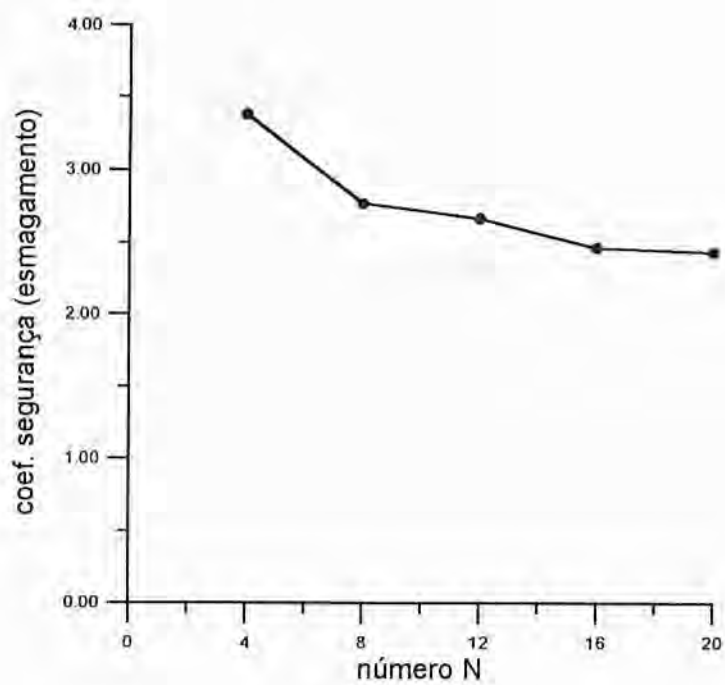


Figura 9.4.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento

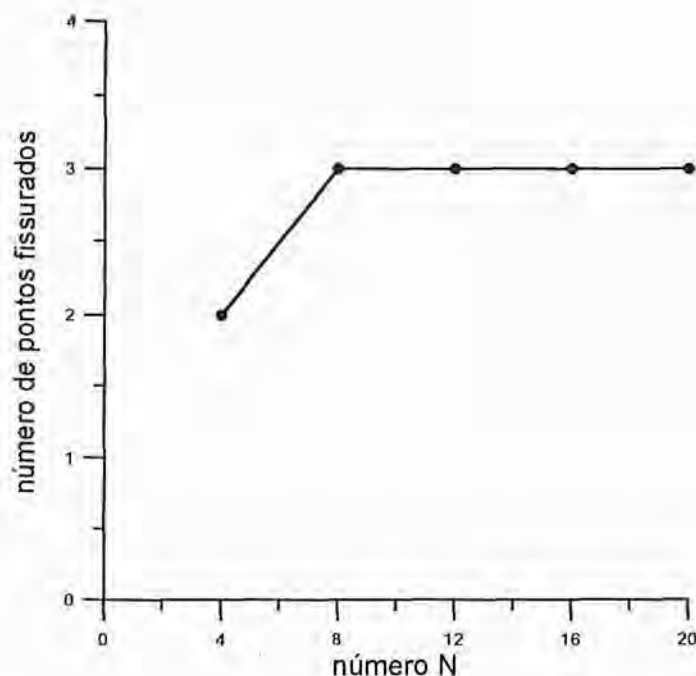


Figura 9.4.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados

### 9.5- Influência da duração do sismo

Assim como outros parâmetros, a duração do sismo tem influência sobre o dano causado à barragem. Para verificar esse efeito, considera-se o sistema barragem-reservatório-fundação submetido ao mesmo carregamento da seção anterior, variando-se apenas a duração do sismo. Os mesmos critérios são empregados para caracterizar o dano estrutural e encontram-se representados nas figuras 9.5.1 a 9.5.4.

Conforme se observa nessas figuras, o deslocamento horizontal no topo da barragem sofre uma variação de 20% dentro da faixa de duração considerada para o sismo. Os coeficientes de segurança contra o escorregamento e contra o esmagamento variam de 11% e 24%, respectivamente. O maior efeito da duração, no entanto, é refletido na fissuração da base da barragem, como se observa na figura 9.5.4. Entretanto, os coeficientes de segurança contra o esmagamento e contra o escorregamento são suficientemente altos para garantir a estabilidade da barragem.

O elevado coeficiente de segurança contra o esmagamento no pé da barragem indica que as tensões de compressão são pequenas em relação à resistência do concreto. Essas tensões também são pequenas em relação à resistência de uma larga variedade de rochas, o que permite assegurar a estabilidade quanto ao tombamento.

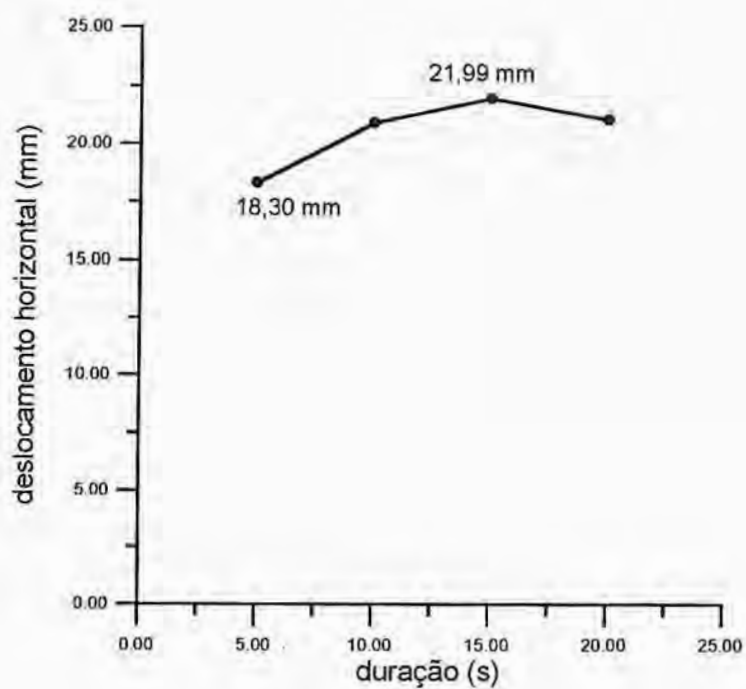


Figura 9.5.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função da duração do sismo

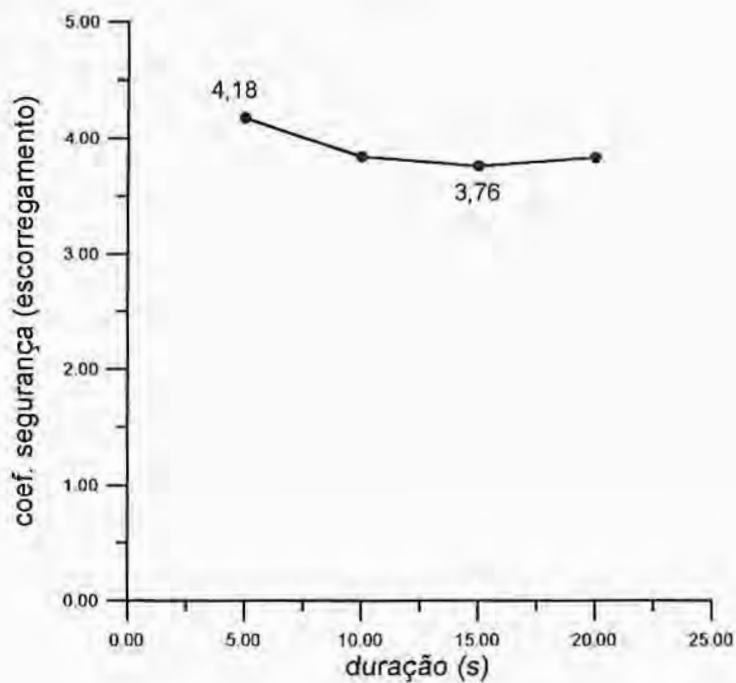


Figura 9.5.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função da duração do sismo

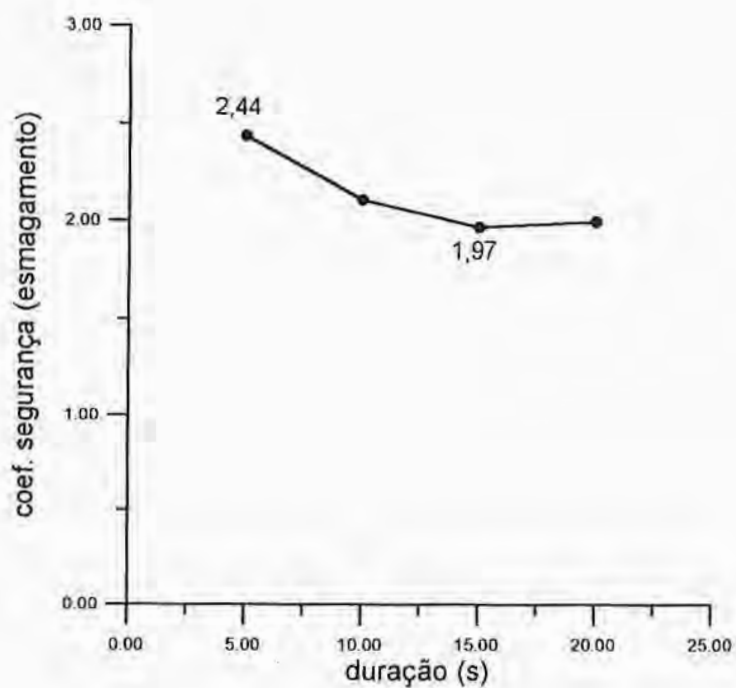


Figura 9.5.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função da duração do sismo

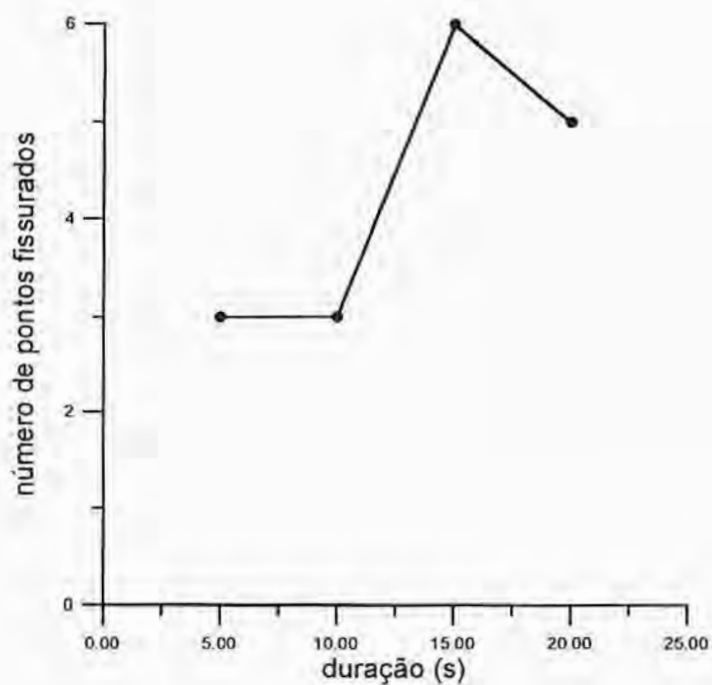


Figura 9.5.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função da duração do sismo

### 9.6- Influência do conteúdo de frequências do sismo

Outra característica do sismo que tem grande influência na resposta estrutural é o seu conteúdo de frequências. Para verificar a sua importância, repete-se a análise anterior considerando-se um sismo com 5s de duração e conteúdo de frequências variável. Os resultados são indicados nas figuras 9.6.1 a 9.6.4 para frequências variando de  $[0,4\pi]$  até  $[0,20\pi]$ .

Observando as figuras, verifica-se que o conteúdo de frequências do sismo tem uma importância fundamental na resposta da estrutura. Nestes exemplos, a situação crítica para a segurança da barragem corresponde a um sismo com frequência máxima  $\omega_H = 5\pi$ , o que é aproximadamente igual à frequência natural do sistema barragem-fundação.

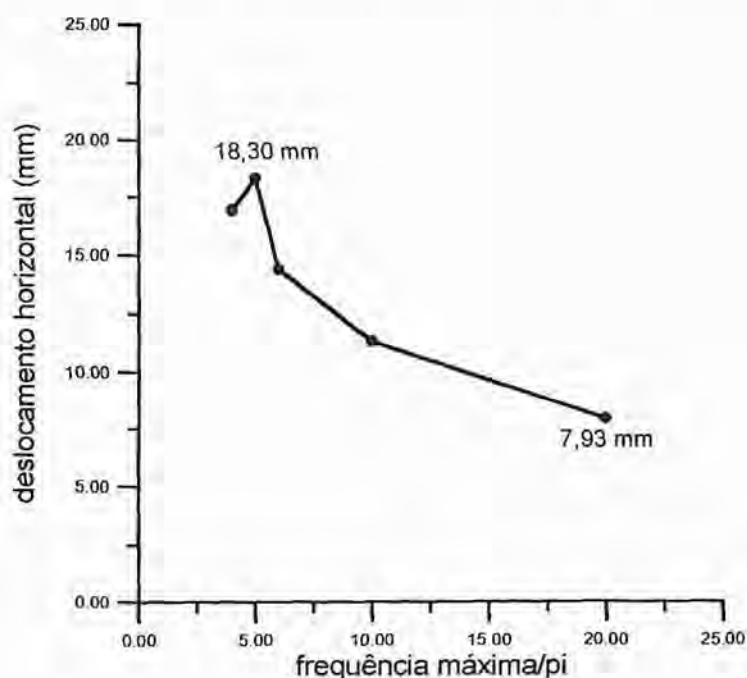


Figura 9.6.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função do conteúdo de frequências do sismo

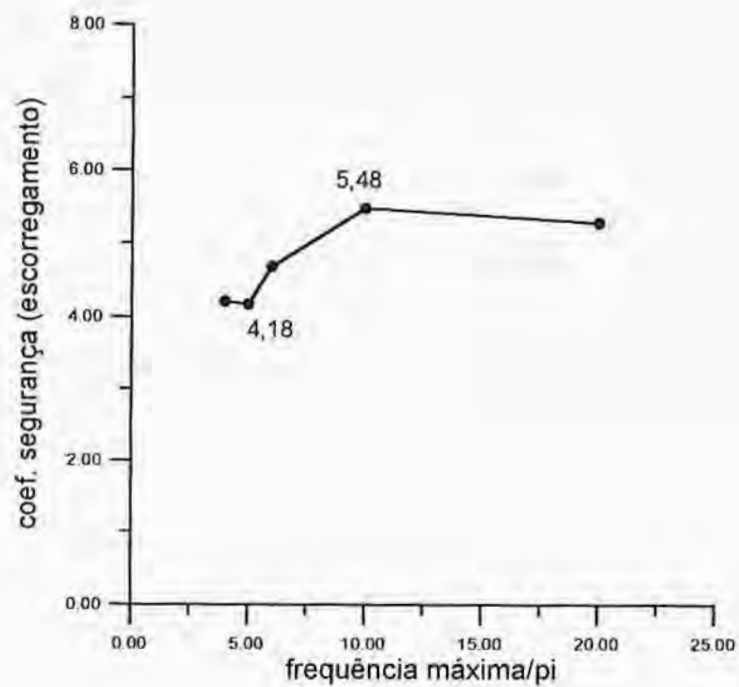


Figura 9.6.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função do conteúdo de frequências do sismo

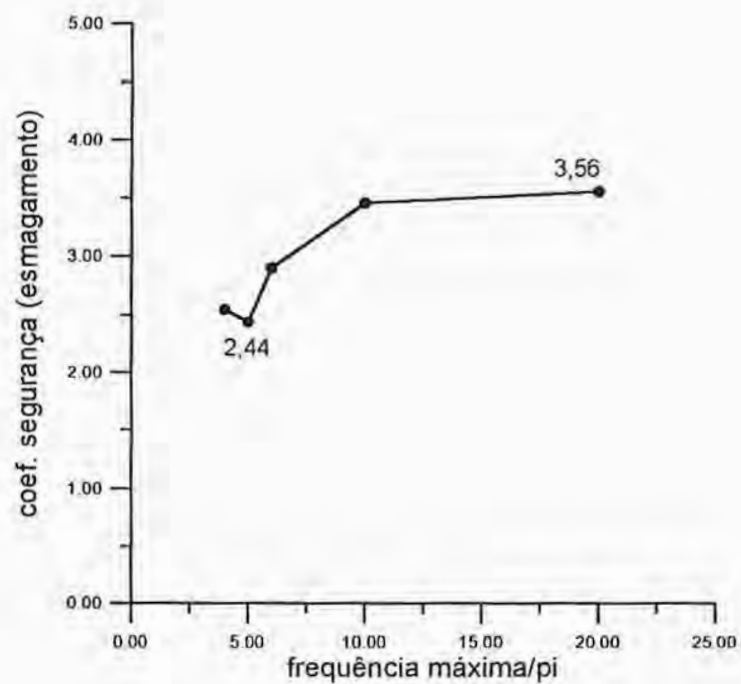


Figura 9.6.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função do conteúdo de frequências do sismo



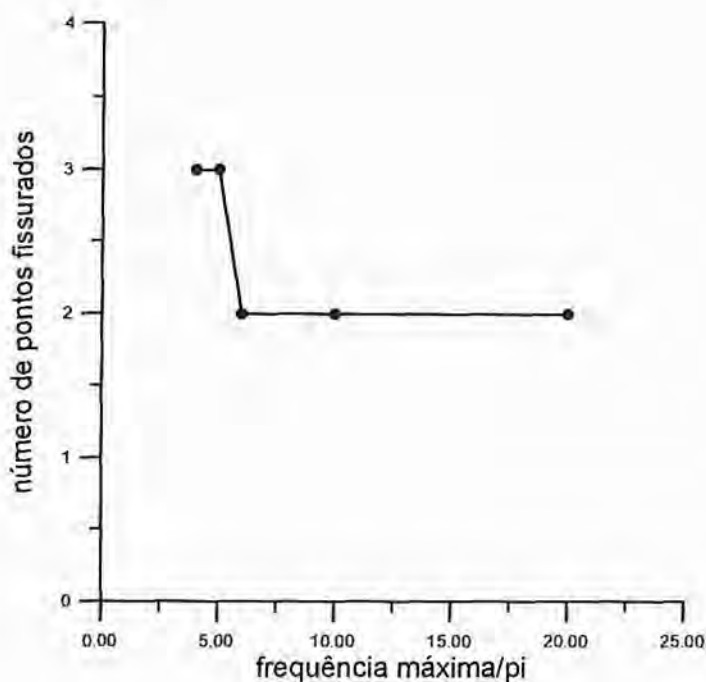


Figura 9.6.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função do conteúdo de frequências do sismo

### 9.7- Influência da amplitude do sismo

Na tabela 9.7.1, encontram-se indicados os resultados obtidos para dois valores da amplitude máxima do sismo. Nestes casos, a duração considerada é de 5s e  $\omega_u = 5\pi$ .

Tabela 9.7.1 - Influência da amplitude

amplitude	deslocamento horizontal	coef. segurança (escorregamento)	coef. segurança (esmagamento)	número de pontos fissurados
0,1g	18,30 mm	4,18	2,44	03
0,2g	30,30 mm	3,20	1,73	10

Observando a tabela, verifica-se que os coeficientes de segurança são relativamente altos mesmo para um sismo com amplitude igual a 0,2g. Apesar de neste caso, ocorrer fissuração em 10 pontos de integração na base da barragem, a mesma fica limitada aos 2 primeiros elementos das camadas 1 e 2 na face de montante, não se propagando para o centro da barragem.

Os resultados apresentados até aqui indicam claramente que a duração, o conteúdo de frequências e a amplitude são características do sismo que afetam significativamente a resposta estrutural. Dentre esses, o conteúdo de frequências e a amplitude são os mais importantes para a verificação da segurança.

### 9.8- Influência da flexibilidade da fundação

A rigidez da fundação tem uma influência significativa na resposta da barragem. Isto ocorre tanto no caso estático quanto para o carregamento dinâmico.

Na tabela 9.8.1, são apresentadas as frequências naturais não amortecidas do sistema barragem-fundação para diferentes valores do módulo de elasticidade do maciço rochoso. Na mesma tabela, indicam-se os valores do coeficiente  $\xi$  para o cálculo da matriz de amortecimento.

Tabela 9.8.1- Frequências naturais e coeficientes de amortecimento

Módulo de elasticidade do maciço (MPa) $E_r$	Frequências naturais de vibração (rad/s) $\omega_1$	Coeficiente $\xi$ $\xi = 2 \zeta / \omega_1$ ( $\zeta = 0,05$ )
10.000	13,30	0,00752
20.000	18,30	0,00546
30.000	21,30	0,00469
40.000	24,30	0,00412
100.000	31,50	0,00317

Conforme se observa da tabela, as frequências naturais crescem com o aumento da rigidez do maciço rochoso, o que irá influenciar nas características de vibração do sistema.

Nas figuras 9.8.1 a 9.8.4, indicam-se os valores do deslocamento horizontal no topo da barragem, dos coeficientes de segurança contra o escorregamento e contra o esmagamento na base e do número de pontos de integração fissurados, em função do módulo

de elasticidade do maciço. O sismo considerado tem uma duração de 5s, amplitude máxima igual a  $0,1g$  e conteúdo de frequências  $[0,5\pi]$ .

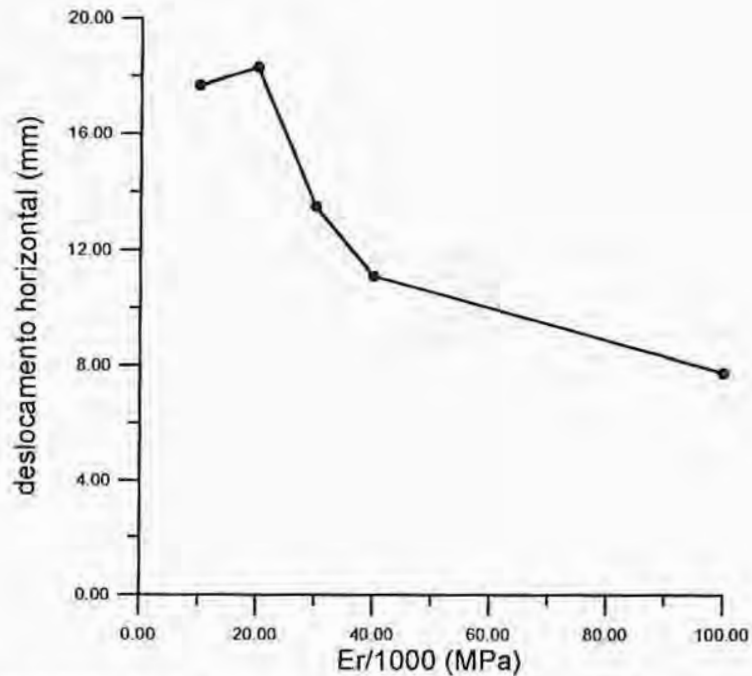


Figura 9.8.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso

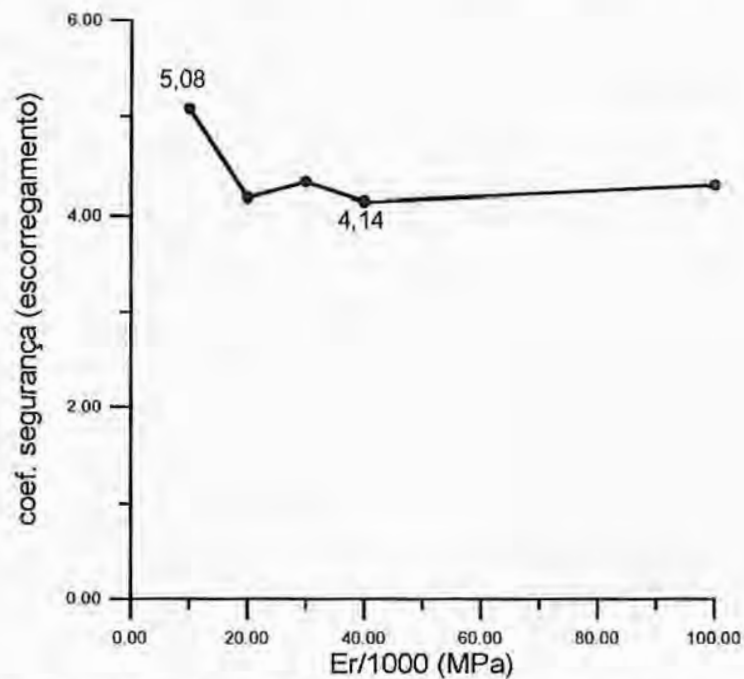


Figura 9.8.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso

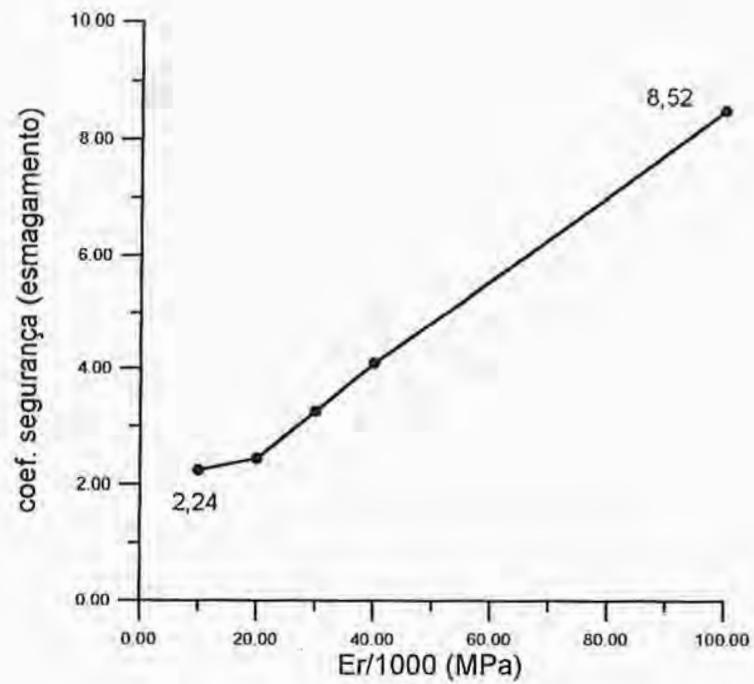


Figura 9.8.3 - Variação do coeficiente de segurança contra o esmagamento em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso

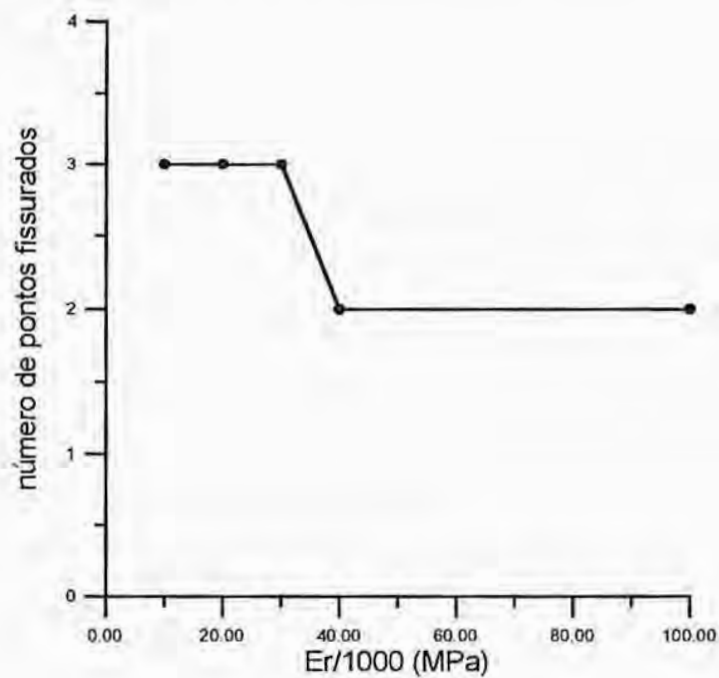


Figura 9.8.4 - Variação do número de pontos de integração fissurados em função do módulo de elasticidade do maciço rochoso

Estas figuras mostram a grande influência que a rigidez do maciço rochoso tem na resposta da estrutura, particularmente, nos deslocamentos e nos coeficientes de segurança contra o esmagamento. Conclui-se, assim, que a consideração das deformações da fundação é imprescindível para uma boa representação da resposta da barragem. A usual hipótese de fundação rígida não reproduz o comportamento do conjunto e pode levar a interpretações erradas quanto à segurança, conforme é evidente da figura 9.8.3.

### **9.9 - Influência da coesão e da subpressão na segurança quanto ao escorregamento**

Para mostrar a influência da coesão na interface barragem-fundação e da forma do diagrama de subpressões (ver figura 8.8.1), preparou-se a tabela 9.9.1 onde são indicados os valores mínimos do coeficiente de segurança contra o escorregamento para três situações: junta com coesão e drenos operantes, junta com coesão e drenos inoperantes e junta sem coesão e drenos inoperantes. As características do sismo empregado são as mesmas da seção anterior. Na mesma tabela, indicam-se os valores dos coeficientes de segurança obtidos considerando-se apenas as cargas estáticas (peso próprio, pressão hidrostática e subpressão).

Tabela 9.9.1 - Coeficientes de segurança contra o escorregamento

Coeficiente de segurança	Com coesão e drenos operantes	Com coesão e drenos inoperantes	Sem coesão e drenos inoperantes
dinâmico	4,18	3,79	1,20
estático	6,06	5,51	1,62

Observando a tabela, verifica-se que a obstrução dos drenos reduz os coeficientes de segurança contra o escorregamento, mas essa redução é relativamente pequena. Entretanto, a coesão da junta é essencial para a segurança da barragem. Verifica-se, ainda, que a estabilidade é conseguida mesmo na situação extrema de junta totalmente sem coesão e drenos inoperantes.

### 9.10- Influência da interação com o fluido

O acoplamento das equações do sistema fluido-barragem-fundação pode ser eliminado considerando-se que a interface com o fluido é rígida. Dessa forma, o vetor  $\Delta \mathbf{F}_f$  para o fluido é obtido empregando-se a equação (6.4.8) mas tomando-se  $\ddot{\mathbf{W}}_m$  e  $\Delta \ddot{\mathbf{W}}$  iguais a  $\ddot{\mathbf{W}}_m^g$  e  $\Delta \ddot{\mathbf{W}}^g$ , respectivamente. Com isso, elimina-se a influência da deformabilidade da interface nas pressões hidrodinâmicas.

Analogamente, a barragem e a fundação podem ser analisadas eliminando-se as variações da pressão hidrodinâmica na interface. Para isto, basta fazer  $\Delta p = 0$  na equação (6.5.8). Desta forma, esse sistema ficará submetido apenas ao peso próprio, às pressões hidrostáticas e ao sismo.

As figuras seguintes foram preparadas para verificar a influência do acoplamento fluido-barragem-fundação. Em todas elas, a linha cheia corresponde à solução obtida considerando-se a interação e a linha tracejada representa a solução sem a interação com o fluido. As características do sismo são as mesmas da seção anterior.

Na figura 9.10.1, são representadas as variações no tempo do deslocamento horizontal no topo da barragem.

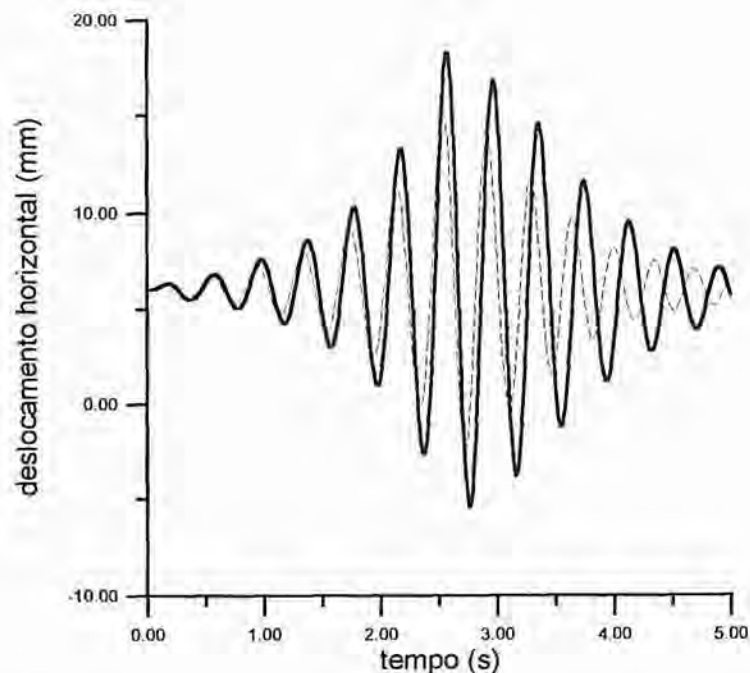


Figura 9.10.1 - Variação do deslocamento horizontal no topo da barragem



Observando a figura, verifica-se que a interação com o fluido aumenta as amplitudes e os períodos de vibração da barragem, já que a massa do sistema completo é maior. O deslocamento máximo é igual a 18,30 mm quando a interação é considerada e igual a 15,26 mm em caso contrário. O deslocamento para as cargas estáticas é igual a 6,06mm, o que concorda com as medições feitas na obra<sup>[33]</sup>.

Na figura 9.10.2, indica-se a variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento nas duas situações em análise. O valor mínimo deste coeficiente é 4,18 quando se considera a interação e 4,56 em caso contrário.

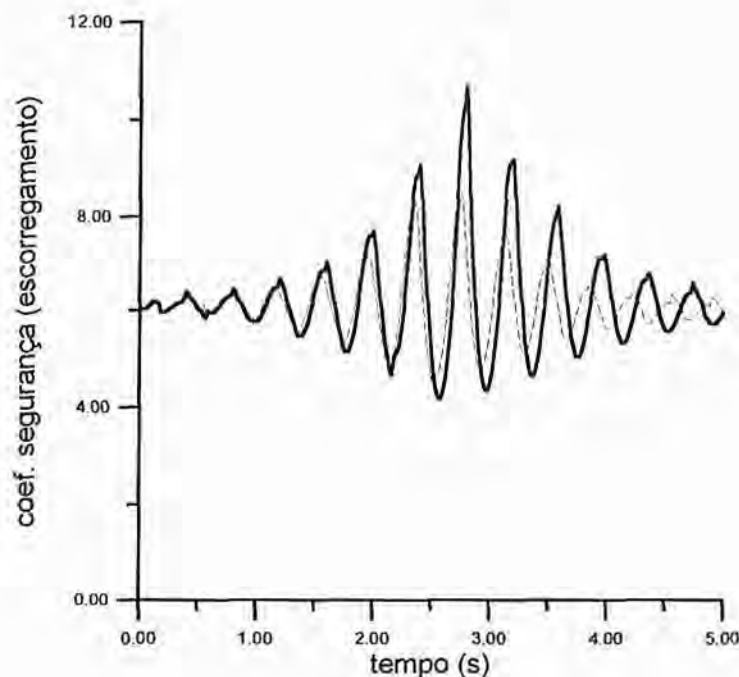


Figura 9.10.2 - Variação do coeficiente de segurança contra o escorregamento

Na figura 9.10.3, indica-se a variação da pressão hidrodinâmica na base da barragem, onde a linha tracejada corresponde à hipótese de interface rígida. Esta figura mostra a influência da deformabilidade da interface nas pressões do fluido.

O coeficiente mínimo de segurança contra o esmagamento é igual a 2,44, considerando-se a interação dinâmica com o fluido, e 2,73 em caso contrário. A fissuração da barragem não foi alterada pelo desacoplamento com o fluido.

Os resultados mostram uma redução de aproximadamente 10% nos coeficientes de segurança em virtude da interação dinâmica com o fluido. Entretanto, esse percentual pode ser bem mais elevado em outras situações, por exemplo, para sismos de maior amplitude.

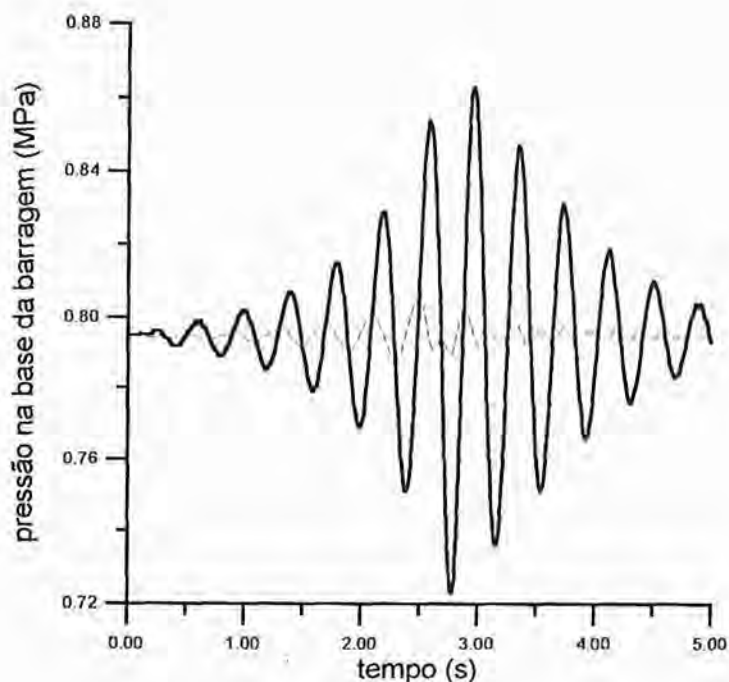


Figura 9.10.3 - Variação da pressão na base da barragem

### 9.11- Efeito das tensões térmicas na resposta dinâmica

Nos exemplos apresentados até aqui, as tensões iniciais decorrentes da retração e das variações de temperatura durante a etapa de construção não foram consideradas. Estas tensões podem ser obtidas nos 2x2 pontos de integração a partir dos seus valores conhecidos em 3x3 pontos de Gauss, conforme foi apresentado no capítulo 4.

Para verificar a influência das tensões térmicas e de retração na resposta dinâmica da barragem, foi elaborada a tabela 9.11.1. Nesta tabela, indicam-se os valores do deslocamento horizontal máximo no topo da barragem, dos coeficientes de segurança contra o escorregamento e contra o esmagamento e do número de pontos de integração fissurados. O sismo adotado tem as mesmas características anteriores.

Conforme se observa na tabela, essas tensões iniciais têm uma influência insignificante na resposta dinâmica da barragem. Assim, conclui-se que as tensões térmicas e de retração somente são importantes na fase construtiva, quando o concreto ainda é muito jovem e possui uma resistência pequena. Durante a fase de utilização da estrutura, as tensões impostas pelas cargas externas, bem como as resistências dos materiais, são suficientemente elevadas para permitir a desconsideração dessas tensões iniciais.

Dessa forma, as análises para as duas fases tornam-se independentes. Isto permite a alteração da malha de elementos finitos da barragem para a análise dinâmica, já que não há a necessidade de se manter a mesma discretização vertical com um elemento por camada. Uma malha mais grosseira do que a apresentada na figura 8.9.3 poderia ser empregada nesta etapa. Este procedimento, entretanto, não é adotado neste trabalho.

Tabela 9.11.1 - Influência das tensões térmicas e de retração

Condição	deslocamento horizontal	coef. segurança (escorregamento)	coef. segurança (esmagamento)	número de pontos fissurados
sem tensões térmicas e de retração	18,30 mm	4,18	2,44	03
com tensões térmicas e de retração	18,36 mm	4,16	2,61	03

### 9.12- O emprego do método de Monte Carlo

Nesta seção, são apresentados alguns resultados obtidos com o emprego do método de Monte Carlo para simular as entradas sísmicas aleatórias, bem como as variações das propriedades dos materiais, da maneira descrita no capítulo 7.

Em todos os exemplos, admite-se que o sismo tem uma duração de 5s, frequências no intervalo  $[0,5\pi]$  e componente vertical da aceleração igual à metade da componente horizontal. Os demais dados são idênticos aos adotados até aqui. A amplitude média do sismo é  $\psi_m = 0,1g$  e seu coeficiente de variação é  $V_\psi = 0,20$ , sendo  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade.

As resistências à compressão médias dos concretos da barragem são as indicadas na tabela 8.5.1, admitindo-se um coeficiente de variação igual a 0,20 para as mesmas. Admite-se, ainda, que essas propriedades não são correlacionadas espacialmente. Para cada amostra gerada obtém-se as resistências à tração, os módulos de elasticidade e a coesão, através das correlações apresentadas no capítulo 8. A segurança contra o escorregamento é obtida com a

hipótese de drenos operantes e com um coeficiente de atrito igual a 1,0. As tensões térmicas e de retração não são incluídas, em vista das conclusões apresentadas anteriormente.

Na figura 9.12.1, são indicados os coeficientes de segurança contra o escorregamento, esmagamento e fissuração obtidos para cada amostra simulada. Estes últimos referem-se aos elementos na base da barragem, à jusante e à montante, respectivamente.

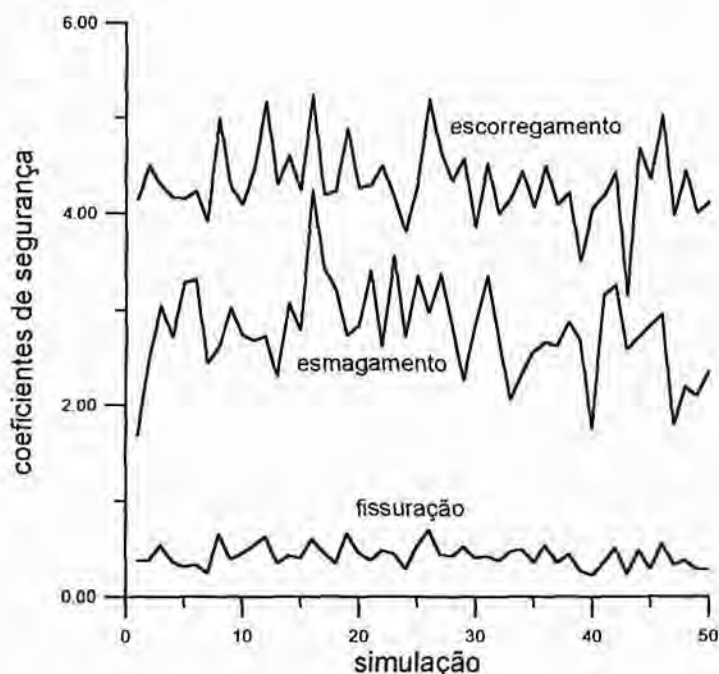


Figura 9.12.1 - Coeficientes de segurança obtidos em cada simulação

Nas figuras 9.12.2 e 9.12.3, indicam-se as variações dos valores esperados e dos desvios padrões desses coeficientes de segurança em função do tamanho da amostra.

Conforme se observa nessas figuras, as flutuações do valor esperado e do desvio padrão tendem a diminuir com o crescimento da amostra. Quando a amostra é formada pelos resultados obtidos com 50 simulações, praticamente ocorre a estabilização, indicando a convergência do processo.

Os coeficientes de variação obtidos são iguais a 0,09 para o escorregamento, 0,17 para o esmagamento e 0,26 para a fissuração. Essas variações são menores para o coeficiente de segurança contra o escorregamento porque o mesmo é um coeficiente global, obtido em função do estado de tensões em toda a base da barragem. Dessa forma, se um elemento de concreto na base apresentar uma resistência à compressão muito pequena, refletindo na coesão, o seu efeito é local. Esse efeito é amenizado pelos elementos vizinhos que possuem

uma resistência maior. Entretanto, para a fissuração e o esmagamento os coeficientes de segurança são locais, dependendo principalmente da resistência de cada elemento e, por isso, apresentam um maior coeficiente de variação.

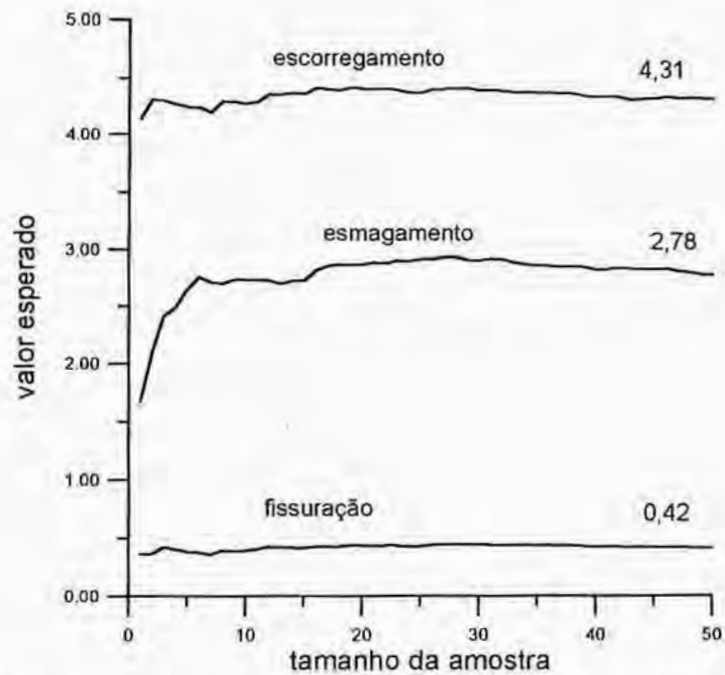


Figura 9.12.2 - Valor esperado dos coeficientes de segurança em função do tamanho da amostra

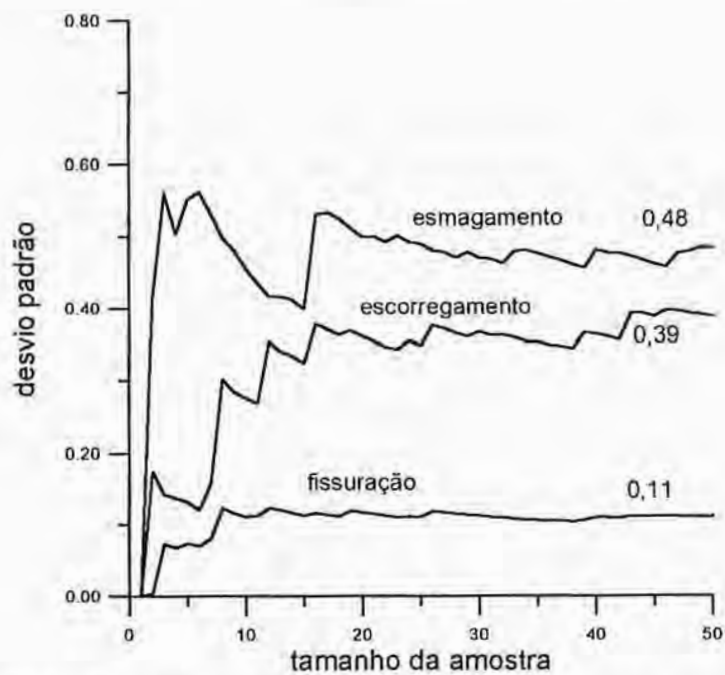


Figura 9.12.3 - Desvio padrão dos coeficientes de segurança em função do tamanho da amostra



Os resultados finais indicados na figura 9.12.2 podem ser comparados com a solução determinística da tabela 9.11.1. As relações entre os valores esperados e os valores determinísticos são iguais a 1,03 e 1,14, para os coeficientes de segurança contra o escorregamento e contra o esmagamento, respectivamente. Isto mostra que a solução determinística se aproxima mais da solução probabilística no caso do escorregamento do que para o esmagamento do concreto. O valor esperado do coeficiente de segurança contra a fissuração é igual a 0,42, indicando uma grande probabilidade de fissuração na base da barragem. Essa fissuração é detectada na análise determinística, conforme se observa da tabela 9.11.1.

Com os valores obtidos nas 50 simulações, pode-se estimar as distribuições de probabilidade dos coeficientes de segurança. Para isso, calculam-se as probabilidades acumuladas de cada valor obtido para um determinado coeficiente e compara-se com uma distribuição conhecida. Arranjando os coeficientes de segurança em ordem crescente, a probabilidade acumulada do coeficiente de ordem  $n$  é estimada em  $\frac{n}{N+1}$ , onde  $N = 50$  é o número de valores amostrais disponíveis<sup>[6]</sup>.

Nas figuras 9.12.4 a 9.12.6, são plotados os pontos obtidos juntamente com a curva de probabilidade acumulada normal.

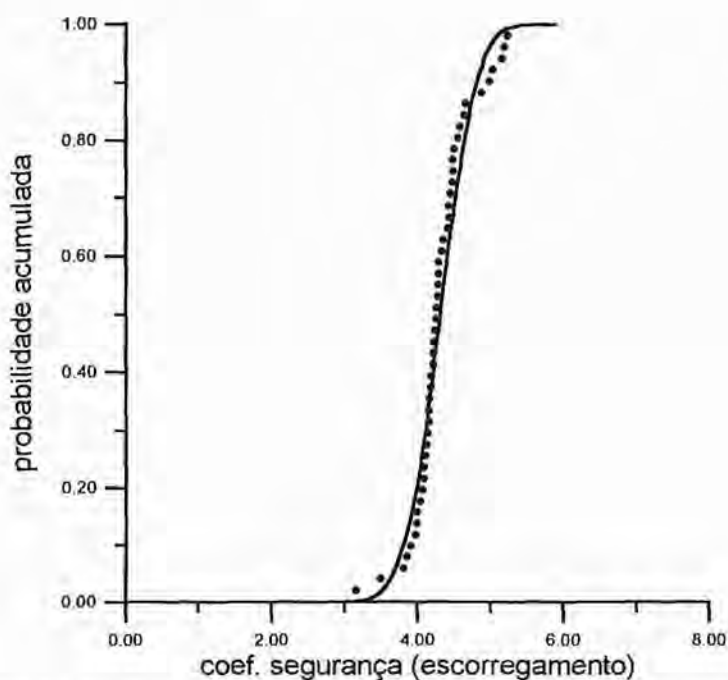


Figura 9.12.4 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra o escorregamento



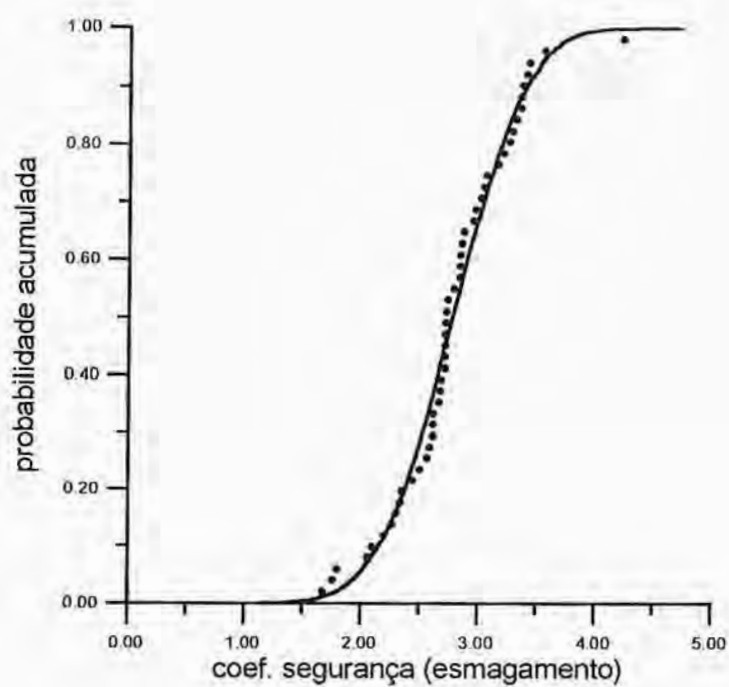


Figura 9.12.5 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra o esmagamento

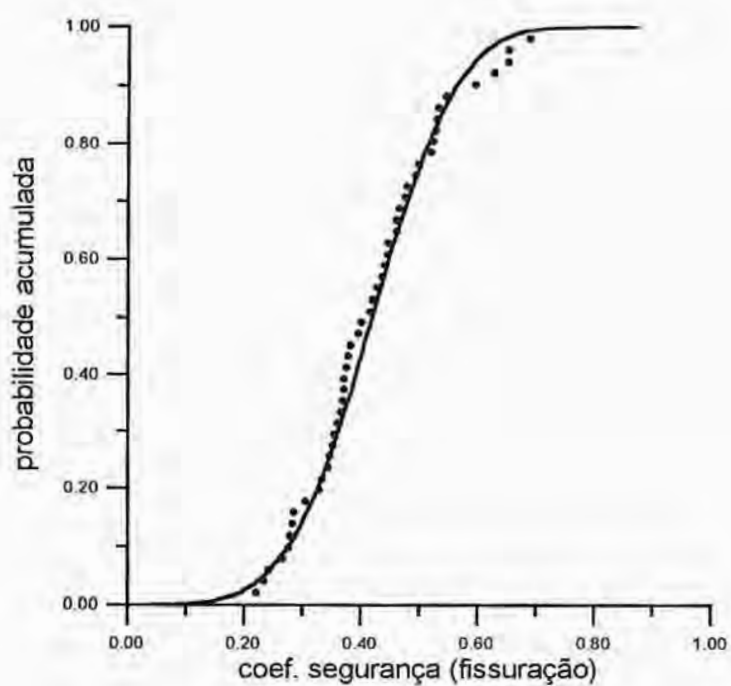


Figura 9.12.6 - Probabilidade acumulada do coeficiente de segurança contra a fissuração

Observando as figuras, verifica-se a boa concordância entre as probabilidades acumuladas obtidas com as simulações e as correspondentes à curva normal. Os coeficientes de correlação são da ordem de 0,99, o que permite admitir que os coeficientes de segurança são variáveis aleatórias Gaussianas.

Considerando a distribuição normal para os coeficientes de segurança, obtém-se as probabilidades de falha resolvendo-se a integral dada na equação (7.7.5) e, assim, pode-se avaliar a confiabilidade da estrutura em relação aos modos de falha.

Para o escorregamento e o esmagamento na base da barragem, a probabilidade de falha é inferior a  $0,15 \times 10^{-3}$ , resultando uma confiabilidade superior a 0,9999. Para a fissuração na base no elemento de montante a confiabilidade é igual a 0,0001, o que indica uma alta probabilidade de fissuração deste elemento para um sismo com as características estudadas. Entretanto, a estrutura é segura, já que a confiabilidade em relação ao escorregamento e ao esmagamento é bastante elevada.

Na figura 9.12.7, indicam-se as confiabilidades quanto a fissuração em todos os elementos da barragem. Observa-se que, exceto para os dois elementos de montante na base da barragem, a confiabilidade é alta em toda a extensão da estrutura. A confiabilidade quanto ao esmagamento do concreto é maior ou igual a 0,9999 para todos os elementos da barragem, o que permite concluir que a estrutura apresenta uma segurança satisfatória.

Os resultados apresentados até aqui, referem-se ao caso em que as propriedades aleatórias dos elementos da barragem não são correlacionadas. As características de correlação entre essas propriedades podem ser introduzidas especificando-se uma função de autocorrelação, conforme foi apresentado no capítulo 7. Para a função dada na equação (7.5.3), o grau de correlação vai depender do fator de escala  $d$ . Quando  $d = 0$ , as variáveis não são correlacionadas e quando  $d$  tende a infinito a correlação é total. Neste último caso, as propriedades dos elementos situados na mesma camada de concretagem e pertencentes à mesma classe de concreto serão iguais. Qualquer solução do problema estará situada entre esses dois casos limites.

A análise apresentada até aqui foi repetida, considerando-se correlação total das propriedades dos materiais. Entretanto, os resultados sofreram alterações muito pequenas e, por isso, não são apresentados. Dessa forma, pode-se concluir que, para o problema analisado, a correlação entre as propriedades de elementos diferentes não é um fator importante para a segurança da estrutura.

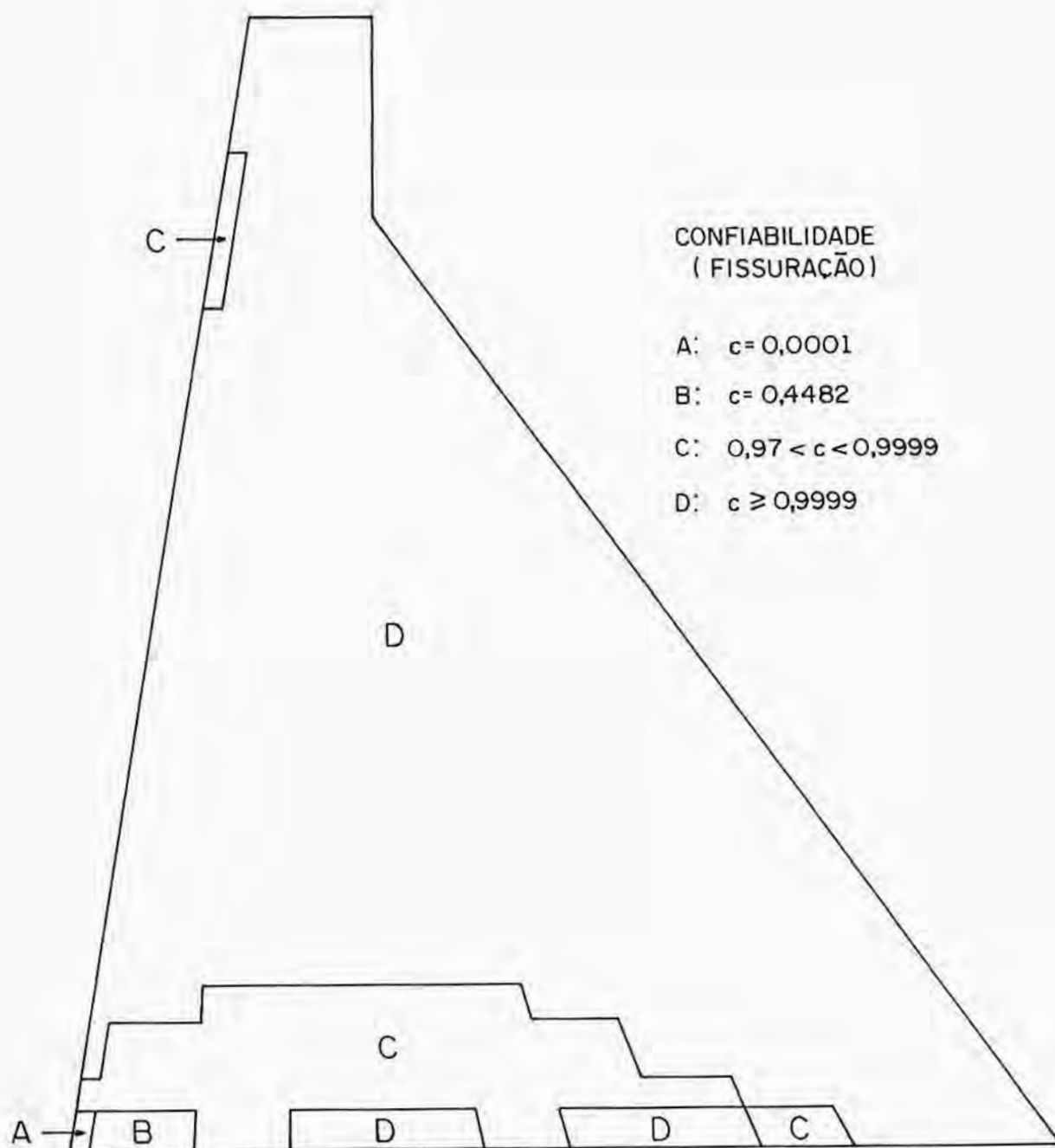


Figura 9.12.7 - Confiabilidade quanto a fissuração sísmica

## 10. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida uma metodologia para a análise de barragens de gravidade de concreto, desde o lançamento da primeira camada de concreto até a sua entrada em serviço. As conclusões tiradas deste estudo foram apresentadas ao longo do texto, mas as principais são resumidas a seguir.

Na fase de construção da barragem, o problema fundamental é o da fissuração do concreto em consequência dos efeitos térmicos. Diversas medidas devem ser tomadas para minimizar os efeitos da temperatura no concreto massa, como a adoção de camadas de pequena espessura, concretagem em intervalos mais espaçados, o emprego de concretos com pequeno consumo de cimento e a pré-refrigeração. Todas essas medidas visam reduzir a elevação da temperatura no corpo da barragem e os seus efeitos se superpõem.

Dentre as medidas citadas, a pré-refrigeração tem um papel de extrema importância para reduzir o pico de temperatura na barragem. Os coeficientes de segurança contra a fissuração térmica do concreto pré-refrigerado são sensivelmente superiores aos do concreto lançado sem a pré-refrigeração. Além disso, no caso do concreto pré-refrigerado os valores mínimos desses coeficientes de segurança são alcançados logo depois da concretagem. Assim, se a fissuração térmica vier a ocorrer ela acontecerá em pouco tempo após o lançamento do concreto, ou seja, ainda na fase de execução da obra. Esta é mais uma das vantagens da pré-refrigeração, já que eventuais reparos que se fizerem necessários podem ser executados na fase de construção.

O principal problema da análise sísmica de barragens de gravidade de concreto consiste na escolha dos parâmetros caracterizadores do sismo, como a duração, o conteúdo de frequências e a amplitude. Esses parâmetros têm grande influência na resposta da estrutura, sendo que o conteúdo de frequências e a amplitude são os mais relevantes.

A análise sísmica de uma barragem de gravidade de concreto deve ser feita considerando-se a interação dinâmica do sistema barragem-reservatório-fundação. A usual hipótese de fundação rígida não reproduz o comportamento do conjunto e pode levar a interpretações erradas quanto à segurança da estrutura, conforme foi demonstrado. Por outro lado, a interação com o fluido altera as características de vibração da barragem e não pode ser desconsiderada.

As tensões térmicas e de retração somente são importantes na fase construtiva, quando o concreto ainda é muito jovem e possui uma resistência pequena. Na fase de utilização, o efeito dessas tensões é pequeno e pode ser desprezado. Dessa maneira, a análise dessa fase torna-se independente da etapa da construção.

Com relação à segurança contra o escorregamento, verificou-se que a mesma é muito dependente da coesão na interface barragem-fundação. Uma vez que a coesão está diretamente relacionada com a resistência do concreto, é recomendável o emprego de uma pequena camada de concreto mais resistente que servirá de lastro para o concreto massa. Considerando que este local é crítico do ponto de vista térmico, essa camada serviria, também, para aumentar os coeficientes de segurança contra a fissuração térmica. De fato, esta providência foi adotada na construção do MTD de Tucuruí.

A formulação desenvolvida foi empregada para analisar a estabilidade do Muro de Transição Direito da barragem de Tucuruí. Todas as informações disponíveis sobre as propriedades dos concretos e do maciço rochoso foram consideradas, para tornar a análise a mais rigorosa possível. Os resultados obtidos mostraram perfeita concordância com as medições e observações feitas na obra. As diversas simulações realizadas indicaram a estabilidade dessa estrutura. A análise probabilística demonstrou que a confiabilidade em relação aos modos de falha é bastante alta, o que comprova a segurança da estrutura.

Do ponto de vista numérico, mostrou-se a necessidade de elaboração de critérios de falha independentes da malha de elementos finitos. O critério de resistência convencional é muito dependente da discretização e não serve para analisar fissuração em estruturas de concreto simples, a menos que uma malha muito refinada seja adotada. Por isso, o critério da resistência à tração equivalente baseado na energia de fratura, conforme proposto por Bazant e Oh<sup>[18]</sup>, tem sido empregado em alguns estudos de fissuração de barragens de concreto. Foi demonstrado que esse critério também é influenciado pela escolha da malha de elementos finitos e foi proposto um modelo alternativo.

O modelo de falha proposto é baseado no campo de tensões no domínio de cada elemento e mostrou-se independente da malha nos exemplos analisados. A precisão do modelo está vinculada à correta definição do campo de tensões, o que depende do tipo de problema analisado. Quando as tensões térmicas estão presentes, a melhor solução é encontrada com integração numérica completa. Na ausência dessas tensões pode-se empregar integração reduzida sem prejudicar a precisão dos resultados.



A consideração do envelhecimento do concreto exige uma constante atualização da matriz de rigidez da estrutura, o que torna a análise bastante onerosa. Por isso, é usual o emprego de intervalos de tempo diferentes para as análises de transferência de calor e de tensões. Entretanto, esse procedimento pode ser muito impreciso, particularmente, nas primeiras horas após o lançamento de cada camada de concreto. Para evitar esse inconveniente, foi adotada uma solução iterativa na qual a matriz de rigidez é redefinida em poucas idades de referência. Essa solução permite que as temperaturas e as tensões sejam calculadas com o mesmo incremento de tempo sem um grande esforço computacional.

Uma vez que em barragens de gravidade a não-linearidade física é pequena, já que ela é causada pela fissuração de uns poucos pontos de integração, não há a necessidade do emprego de métodos iterativos para a solução das equações da estrutura. Um método incremental como o empregado neste trabalho é satisfatório para a solução do problema.

A consideração das características aleatórias das cargas e das propriedades dos materiais da estrutura exige o emprego de métodos numéricos apropriados. Os métodos semi-analíticos, baseados em expansões em série de Taylor das variáveis aleatórias, são atrativos porque exigem um menor tempo de processamento. Entretanto, esses métodos são restritos a problemas simples, já que eles requerem a obtenção analítica de alguns termos da série. Se o modelo constitutivo envolve muitas variáveis aleatórias, torna-se impraticável a utilização desses métodos.

O método de Monte Carlo, apesar de exigir um maior esforço computacional, pode ser empregado para resolver qualquer problema com características probabilísticas, desde que se disponha de um algoritmo para a solução determinística. O grande inconveniente desse método é a necessidade de se redefinir a matriz de rigidez da estrutura em cada simulação. Para contornar esse inconveniente, neste trabalho foi adotado um procedimento alternativo. Neste procedimento, trabalha-se sempre com a matriz de rigidez obtida com as propriedades médias dos materiais. As flutuações das propriedades em torno do valor médio são introduzidas como cargas nodais equivalentes, o que melhora sensivelmente a performance do método.

Alguns tópicos podem ser analisados em estudos futuros, tais como a infiltração de água no corpo da barragem e as tensões dela decorrentes. A sedimentação de material em suspensão na base da barragem é outro tema que merece ser estudado. A análise da percolação de água pelo maciço rochoso permitiria a determinação mais precisa das subpressões na base da barragem. Finalmente, a implementação de um elemento de junta poderia servir para



verificar a hipótese de ligação rígida barragem-fundação que foi implicitamente adotada neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AHMAD, S. H. & SHAH, S. P. - Complete triaxial stress-strain curves for concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, v.108, n.ST4, p.728-742, Apr., 1982.
2. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE - Committee 207, Mass concrete for dams and other massive structures. ACI Journal, n.67-17, p.273-309, Apr., 1970.
3. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE - Committee 209/II, Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. ACI-SP27, Designing for Effects of Creep, Shrinkage and Temperature, p.51-93, Detroit, 1971.
4. ANDRADE, W. P. et al. - Determinação da fluência do concreto. IBRACON, Caderno T11, Colóquio Sobre Concreto Massa, Reunião de 1983, São Paulo, 1983.
5. ANDRIOLO, F. R. & SKWARCZYNSKI, T. M. - Concreto Pré-Refrigerado no Brasil: Uma evolução com mais de 20 anos. Centro da Memória da Eletricidade no Brasil, Rio de Janeiro, 1988.
6. ANG, A.H.S. & TANG, W.H. - Probability Concepts in Engineering Planning and Design, v.1, John Wiley & Sons, New York, 1975.
7. ARAÚJO, J. M. & AWRUCH, A. M. - Um critério objetivo para a análise de fissuração em grandes estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos. XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Anais, v.4, p.107-118, Tucumán, Argentina, set., 1995.
8. ARAÚJO, J. M. & AWRUCH, A. M. - On stochastic finite elements for structural analysis. Computers and Structures, v.52, n.3, p.461-469, 1994.
9. ARAÚJO, J. M. & BIGNON, P. G. - Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas. Relatório de Pesquisa RP-110/93, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1993.
10. ARAÚJO, J. M. & CAMPOS FILHO, A. - Aplicação do método dos elementos finitos à análise bidimensional de vigas de concreto armado, usando o conceito de deformação uniaxial equivalente. XIII Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, Anais, v.1, p.56-65, Porto Alegre, nov., 1992.
11. ARAÚJO, J. M. & CAMPOS FILHO, A. - Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n.34, p.9-12, Lisboa, Julho, 1992.
12. BAECHER, G. B. & INGRA, S. - Stochastic FEM in settlement predictions. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, v.107, n.GT4, p.449-463, 1981.
13. BARLOW, J. - Optimal stress locations in finite element models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.10, p.243-251, 1976.

14. BATHE, K. J. & WILSON, E. L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1976.
15. BAZANT, Z. P. - Mechanics of distributed cracking. Applied Mechanics Review, v.39, n.5, p.675-705, 1986.
16. BAZANT, Z. P. & CHERN, J. C. - Stress-induced thermal and shrinkage strains in concrete. Journal of Engineering Mechanics, v.113, n.10, p.1493-1511, Oct., 1987.
17. BAZANT, Z. P. & NAJJAR, L. J. - Comparison of approximate linear methods for concrete creep. Journal of the Structural Division, ASCE, v.99, n.ST9, p.1851-1874, Sept., 1973.
18. BAZANT, Z. P. & OH, B. H. - Crack band theory for fracture of concrete. Matériaux et Constructions, v.16, n.93, p.155-177, 1983.
19. BAZANT, Z. P. & PANULA, L. - Practical prediction of time-dependent deformations of concrete. Matériaux et Constructions, v.11, n.65, partes I e II, p.307-328, Sept.-Oct., 1978.
20. BAZANT, Z. P. & PRASANNAN, S. - Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. Journal of Engineering Mechanics, v.115, n.8, p.1691-1703, Aug., 1989.
21. BAZANT, Z. P. & PRASANNAN, S. - Solidification theory for concrete creep. II: Verification and application. Journal of Engineering Mechanics, v.115, n.8, p.1704-1725, Aug., 1989.
22. BAZANT, Z. P. & PRAT, P. C. - Measurement of mode III fracture energy of concrete. Nuclear Engineering and Design, v.106, p.1-8, 1988.
23. BAZANT, Z. P. & WU, S. T. - Dirichlet series creep function for aging concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.99, n.EM2, p.367-387, Apr., 1973.
24. BAZANT, Z. P. & WU, S. T. - Rate creep law of aging concrete based on Maxwell chain. Matériaux et Constructions, v.7, n.37, p.45-60, 1974.
25. BENAROYA, H. & REHAK, M. - Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. Applied Mechanics Review, v.41, n.5, p.201-213, 1988.
26. BOMBICH, T. et al. - Thermal stress analysis of Mississippi river lock and dam 26(R). Waterways Experiment Station of the U. S. Army Corps of Engineers, Vicksburg, Mississippi, 1987.
27. BREBBIA, C. A. & FERRANTE, A. J. - The Finite Element Technique. Ed. da UFRGS, Porto Alegre, 1975.
28. BRESLER, B. & PISTER, K. S. - Strength of concrete under combined stresses. Journal of the American Concrete Institute, v.55, n.9, p.321-345, 1958.
29. CARIC, D. M. et al. - The Itaipu hollow gravity dam. Water Power and Dam Construction, p.30-44, May, 1982.
30. CEDOLIN, L.; DEI POLI, S.; IORI, I. - Tensile behavior of concrete. Journal of Engineering Mechanics, v.113, n.3, p.431-449, 1987.

31. CENTRAIS ELÉTRICAS BRASILEIRAS - Avaliação da Segurança de Barragens Existentes. Rio de Janeiro, 1987.
32. CENTRAIS ELÉTRICAS BRASILEIRAS; COMITÊ BRASILEIRO DE GRANDES BARRAGENS; INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO - Concreto Massa no Brasil, v. 1, Registro Histórico. Rio de Janeiro, 1989.
33. CENTRAIS ELÉTRICAS DO NORTE DO BRASIL S/A - Usina Hidrelétrica Tucuruí, Memória do Empreendimento. 8 v, Brasília, 1988.
34. CHANG, T. P. & CHANG, H. C. - Stochastic Dynamic finite element analysis of a nonuniform beam. International Journal for Solids Structures, v. 31, n.5, p.587-597, 1994.
35. CHEN, W. F. & TING, E. C. - Constitutive models for concrete structures. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.106, n.EM1, p.1-19, Feb., 1980.
36. CLÍMACO, J. C. T. S. - Controle da aderência do concreto projetado ao original em reparos estruturais. 36a. Reunião do IBRACON, Anais, v.1, p.101-107, Porto Alegre, set., 1994.
37. CLÍMACO, J. C. T. S. - Uma análise crítica dos métodos de avaliação de aderência e do uso de agentes adesivos no reparo de estruturas de concreto. XXV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Anais, v.5, p.337-348, Porto Alegre, nov., 1991.
38. CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J. - Dynamics of Structures. International Student Edition, McGraw-Hill, 1975.
39. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete. Zwitserland, 1984.
40. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB/FIP Model Code 1990. Zwitserland, 1993.
41. DAMJANIC, F. - A finite element technique for analysis of reinforced and prestressed concrete structures. In: Finite Element Methods for Nonlinear Problems, p.623-637, Edited by P. G. Bergan, K. J. Bathe and W. Wunderlich, Springer-Verlag, 1986.
42. DARWIN, D. & PECKNOLD, D. A. - Analysis of RC shear panels under cyclic loading. Journal of the Structural Division, ASCE, v.102, n.ST2, p.355-369, Feb., 1976.
43. DARWIN, D. & PECKNOLD, D. A. - Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.EM2, p.229-241, Apr., 1977.
44. DESAYI, K. & KRISHNAN, S. - Equation for the stress-strain curve of concrete. Journal of the American Concrete Institute, v.61, n.3, p.345-350, Mar., 1964.
45. EL-AIDI, B. & HALL, J. F. - Non-linear earthquake response of concrete gravity dams, Part1: Modelling. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.837-851, 1989.
46. FENVES, G. & LOLI, L. M. V. - Nonlinear dynamic analysis of fluid-structure systems. Journal of Engineering Mechanics, v.114, n.2, p.219-240, Feb., 1988.



47. FRAGOSO, M. R.; OLIVEIRA, C. S.; PAIS, A. L. - Análise sísmica de estruturas com interação solo-estrutura. Parte I: Formulação teórica. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n.33, p.29-34, Lisboa, jan., 1992.
48. GERSTLE, K. H. et al. - Behavior of concrete under multiaxial stress states. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.106, n.EM6, p.1383-1403, Dec., 1980.
49. GERSTLE, K. H. et al. - Strength of concrete under multiaxial stress states. Douglas McHenry International Symposium on Concrete and Concrete Structures, American Concrete Institute, SP-55, p.103-131, Detroit, 1978.
50. GHRIB, F. & TINAWI, R. - An application of damage mechanics for seismic analysis of concrete gravity dams. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.24, p.157-173, 1995.
51. GOPALARATNAM, V. S. & SHAH, S. P. - Softening response of plain concrete in direct tension. ACI Journal, p.310-323, May-June, 1985.
52. GREENBERG, M. D. - Foundations of Applied Mathematics. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1978.
53. GUEDES, Q. M. & GAMBALE, E. A. - Modelos viscoelásticos com envelhecimento para o betão em massa de barragens. Informação Científica, Barragens, INCB5, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1990.
54. GUPTA, A. K. & MAESTRINI, S. R. - Unified approach to modeling post-cracking membrane behavior of reinforced concrete. Journal of Structural Engineering, v.115, n.4, p.977-993, Apr., 1989.
55. HAMDI, M. A.; OUSSET, Y.; VERCHERY, G. - A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.13, p.139-150, 1978.
56. HILLERBORG, A. - Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_f$  of concrete. Matériaux et Constructions, v.18, n.107, p.407-413, 1985.
57. HILLERBORG, A. - The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete. Matériaux et Constructions, v.18, n.106, p.291-296, 1985.
58. HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E. - Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research, v.6, n.6, p.773-781, 1976.
59. HINTON, E. & CAMPBELL, J. S. - Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.8, p.461-480, 1974.
60. HINTON, E.; ROCK, A.; ZIENKIEWICZ, O.C. - A note on mass lumping in related process in the finite element method. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.4, p.245-249, 1976.

- 61.INGRAFFEA, A.R.; BITTENCOURT, T. N.; SOUSA, J. L. A. O. - Automatic fracture propagation for 2D finite element models. XI Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Anais, p.957-962, Rio de Janeiro, out., 1990.
- 62.ISHIKAWA, M. - Thermal stress analysis of a concrete dam. Computers and Structures, v.40, n.2, p.347-352, 1991.
- 63.JORDAAN, I. J.; ENGLAND, G. L.; KHALIFA, M. M. A. - Creep of concrete: a consistente engineering approach. Journal of the Structural Division, ASCE, v.103, n.ST3, p.475-491, Mar., 1977.
- 64.KIMURA, M. & IZUMI, M. - A method of artificial generation of earthquake ground motion. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.867-874, 1989.
- 65.KOTSOVOS, M. D. & NEWMAN, J. B. - Mathematical description of deformational behavior of concrete under generalized stress beyond ultimate strength. ACI Journal, p.340-346, Sept.-Oct., 1980.
- 66.KRISHNASWAMY, P. et al. - Finite element modelling of crack tip behaviour in viscoelastic materials. Part I: Linear behaviour. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.30, p.371-387, 1990.
- 67.KUPFER, H. B. & GERSTLE, K. H. - Behavior of concrete under biaxial stresses. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.99, n.EM4, p.852-866, Aug., 1973.
- 68.LÉGER, P. & KATSOUKI, M. - Seismic stability of concrete gravity dams. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.889-902, 1989.
- 69.LIU, M. L. & TO, C. W. S. - Adaptive time schemes for responses of non-linear multi-degree-of-freedom systems under random excitations. Computers and Structures, v.52, n.3, p.563-571, 1994.
- 70.LIU, T. C. Y.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. - Biaxial stress-strain relations for concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, v.98, n.5, p.1025-1034, 1972.
- 71.LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A. - Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.56, p.61-81, 1986.
- 72.LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A. - Random field finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.23, p.1831-1845, 1986.
- 73.LIU, W. K.; BESTERFIELD, G. H.; BELYTSCHKO, T. - Transient probabilistic systems. Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.67, p.27-54, 1988.
- 74.LIU, W. K.; BESTERFIELD, G. H.; BELYTSCHKO, T. - Variational approach to probabilistic finite elements. Journal of Engineering Mechanics, v.114, n.12, p.2115-2133, 1988.
- 75.LOLI, L. M. V. & FENVES, G. L. - Effects of concrete cracking on the earthquake response of gravity dams. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.575-592, 1989.



76. LONGO, H. I. - Efeitos do comportamento reológico e das fases construtivas na análise estrutural de barragens de concreto. Tese doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
77. NASSER, K. W. & LOHTIA, R. P. - Creep of mass concrete at high temperatures. ACI Journal, p.276-281, Apr., 1971.
78. NEWLAND, D. E. - An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis. Longman, New York, 1981.
79. NILSSON, L. G. & OLDENBURG, M. - On the numerical simulation of tensile fracture. In: Finite Element Methods for Nonlinear Problems, p.103-117, Edited by P. G. Bergan, K. J. Bathe and W. Wunderlich, Springer-Verlag, 1986.
80. OLSON, L. G. & BATHE, K. J. - A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid-structure systems. Nuclear Engineering and Design, v.76, n.2, p.137-151, 1983.
81. OTTOSEN, N. S. - A failure criterion for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.EM4, p.527-535, Aug., 1977.
82. OTTOSEN, N. S. - Constitutive model for short-time loading of concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.105, n.EM1, p.127-141, Feb., 1979.
83. PEREIRA, G. L. C. - Efeitos térmicos em estruturas maciças de concreto. Diss. Mestrado, COPPE/UFRJ, 1986.
84. RILEM - Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. Matériaux et Constructions, v.18, n.106, p.285-290, 1985.
85. RILEM Technical Committee 90 FMA - Fracture Mechanics of Concrete Structures: From theory to applications. Chapman and Hall, 1989.
86. SAENZ, L. P. - Discussão de "Equation for the stress-strain curve of concrete", de K. Desayi and S. Krishnan, Journal of the American Concrete Institute, v.61, p.1229-1235, Sept., 1964.
87. SARGIN, M. - Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. Study No.4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontário, Canadá, 1971.
88. SERAFIM, J. L. - Uma nota sobre a história dos materiais utilizados em barragens. Conferência sobre Materiais em Barragens, Monte Carlo, 1984. Reproduzido em Concreto Massa no Brasil, v.1, editado por Centrais Elétricas Brasileiras, Comitê Brasileiro de Grandes Barragens e Instituto Brasileiro do Concreto, Rio de Janeiro, 1989.
89. SHAMES, I. H. - Mecânica dos Fluidos. Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1977.
90. SHARAN, S. K. - Time-domain analysis of infinite fluid vibration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.24, p.945-958, 1987.
91. SHARAN, S. K. & GLADWELL, G. M. L. - A general method for the dynamic response analysis of fluid-structure systems. Computers and Structures, v.21, n.5, p.937-943, 1985.

92. SHINOZUKA, M. - Monte Carlo solution of structural dynamics. Computers and Structures, v.2, p.855-874, 1972.
93. SHINOZUKA, M. - Probabilistic modeling of concrete structures. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.98, n.EM6, p.1433-1451, 1972.
94. SHINOZUKA, M. & ASTILL, C. J. - Random eigenvalue problems in structural analysis. AIAA Journal, v.10, n.4, p.456-462, 1972.
95. SHINOZUKA, M. & DEODATIS, G. - Response variability of stochastic finite element systems. Journal of Engineering Mechanics, v.114, n.3, p.499-519, 1988.
96. SHINOZUKA, M. & WEN, Y.K. - Monte Carlo solution of nonlinear vibrations. AIAA Journal, v.10, n.1, p.37-40, 1972.
97. SKRIKERUD, P. E. & BACHMANN, H. - Discrete crack modelling for dynamically loaded, unreinforced concrete structures. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.14, p.297-315, 1986.
98. TASUJI, M. E.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. - Biaxial stress-strain relationships for concrete. Magazine of Concrete Research, 31(109), p.217-224, 1979.
99. TASUJI, M. E.; SLATE, F. O.; NILSON, A. H. - Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. Journal of the American Concrete Institute, v.75, n.7, p.306-312, 1978.
100. THOMAS, L. C. - Fundamentos da Transferência de Calor. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1980.
101. TO, C. W. S. & LIU, M. L. - Random responses of discretized beams and plates by the stochastic central difference method with time co-ordinate transformation. Computers and Structures, v.53, n.3, p.727-738, 1994.
102. TRUMAN, K. Z.; PETRUSKA, D. J.; NORMAN, C. D. - Creep, shrinkage and thermal effects on mass concrete structure. Journal of Engineering Mechanics, v.117, n.6, p.1274-1287, June, 1991.
103. VANMARCKE, E. & GRIGORIU, M. - Stochastic finite element analysis of simple beams. Journal of Engineering Mechanics, v.109, n.5, p.1203-1214, 1983.
104. VARGAS-LOLI, L. M. & FENVES, G. L. - Effects of concrete cracking on the earthquake response of gravity dams. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.18, p.575-592, 1989.
105. VECCHIO, F. - Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes. ACI Journal, v.86, p.26-35, 1989.
106. WU, Han-Chin. - Dual failure criterion for plain concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.100, n.EM6, p.1167-1181, Dec., 1974.
107. YAMAGUCHI, E. & CHEN, W. F. - Cracking model for finite element analysis of concrete materials. Journal of Engineering Mechanics, v.116, n.6, p.1242-1260, June, 1990.

108. YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M.; DASGUPTA, G. - Neumann expansion for stochastic finite element analysis. Journal of Engineering Mechanics, v.114, n.8, p.1335-1355, 1988.
109. YANG, Tsung-Yuan - Random vibration of Structures. JohnWiley & Sons, 1986.
110. ZHEN-HAI, G. & XIU-QIN, Z. - Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension. ACI Materials Journal, p.278-285, July-Aug., 1987.
111. ZIENKIEWICZ, O. C. - The Finite Element Method. McGraw Hill, 3a. ed., 1977.
112. ZIENKIEWICZ, O. C. & BETTESS, P. - Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.13, p.1-16, 1987.