

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS**

**ERIK STEPHANOU ELSENBRUCH FILOMENA**

**ELEMENTOS DA ECONOMIA DOS RECURSOS EXAURÍVEIS**

**Porto Alegre  
2015**

**ERIK STEPHANOU ELSENBRUCH FILOMENA**

**ELEMENTOS DA ECONOMIA DOS RECURSOS EXAURÍVEIS**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araujo

**Porto Alegre**

**2015**

**ERIK STEPHANOU ELSENBRUCH FILOMENA**

**ELEMENTOS DA ECONOMIA DOS RECURSOS EXAURÍVEIS**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_ de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araujo – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Sergio Marley Modesto Monteiro  
UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler  
UFRGS

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meus pais pelo suporte durante os 22 anos até este trabalho e ao professor Jorge Paulo de Araujo que me orientou e motivou a escrevê-lo.

“It seems that my whole life been pointed to this moment. When this job is done, I presume I will be pointed to the next step in the ladder of destiny. If I do my full duty the rest will take care of itself”

*(George S. Patton JR. – War As I Knew It)*

## RESUMO

Este trabalho apresenta, baseado nas referências consultadas, a Economia dos Recursos Exauríveis e algumas implicações de sua existência para seus donos e para o resto da sociedade. A importância deste trabalho é que se a existência de certos recursos acabasse, e a nossa economia depende deles, nós nos encontraríamos em uma situação que poderia muito bem ser o fim de nosso padrão de vida e do progresso econômico e social. Alguns dos problemas gerais que advêm dos recursos exauríveis serão expostos e será mostrado que o caminho ótimo de utilização dos recursos tem condições para um máximo diferente de outros recursos, e algumas são um tanto diferente da teoria econômica convencional.

**Palavras-chave:** Economia dos Recursos Exauríveis. Economia dos Recursos Naturais. Crescimento Sustentável.

## **ABSTRACT**

This work presents based on the consulted references the Economics of Exhaustible Resources some of the implications of their existence to their owners and the rest of society. The importance of such work is that if the existence of certain resources would end, and our economy depends on them, we would find ourselves in a situation that could very well mean the end of our standard of living and the end of economic and social progress. Some of the general problems that arise from exhaustible resources will be exposed and It will be shown that an optimal path of utilization of the exhaustible resources has therefore different maximum conditions than those of other resources, and some are quite different from conventional economics.

**Keywords:** Economics of Exhaustible Resources. Economics of Natural Resources. Sustainable Growth.

## SUMÁRIO

<i>1 INTRODUÇÃO</i> .....	9
<i>2 O PROBLEMA DOS RECURSOS EXAURÍVEIS</i> .....	12
2.1 DESCONTANDO O FUTURO .....	12
2.2 RECURSOS EXAURÍVEIS E SUAS POSSIBILIDADES DE CONSERVAÇÃO .....	17
2.2.2 AS CONDIÇÕES DE EXPLORAÇÃO DOS RECURSOS EXAURÍVEIS .....	20
2.3 O EFEITO DA TAXA DE DESCONTO NA EXAUSTÃO DE RECURSOS .....	21
2.4 O EFEITO DO APARECIMENTO DE RECURSOS SUBSTITUTOS.....	22
2.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 2 .....	23
<i>3 OS MODELOS ECONÔMICOS DE RECURSOS EXAURÍVEIS</i> .....	24
3.1 LEWIS GRAY.....	24
3.1.1 FORMALIZAÇÃO DO MODELO DE GRAY .....	28
3.2 O MODELO DE HAROLD HOTELLING .....	32
3.2.1 COMPETIÇÃO PERFEITA .....	33
3.2.2 MONOPÓLIO.....	34
3.3. UM COMENTÁRIO DO QUE FOI VISTO ATÉ AQUI .....	37
3.4. MODELOS COM CRESCIMENTO ECONÔMICO .....	38
3.4.1 O MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW .....	39
3.4.2 O MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW COM RECURSOS EXAURÍVEIS.....	43
3.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 3 .....	49
<i>4 POLÍTICAS COM RECURSOS EXAURÍVEIS</i> .....	51
4.1 FUNDOS SOBERANO .....	53
4.2 IMPOSTOS .....	55
4.3 APLICANDO A REGRA DE HARTWICK.....	57
4.4 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4.....	60
<i>5 CONCLUSÃO</i> .....	61
<i>REFERÊNCIAS</i> .....	65



## 1 INTRODUÇÃO

Os que moram nas cidades se deparam com recursos exauríveis em quase toda direção na qual eles olham. Os prédios são feitos de cimento e aço, extraídos de uma mina. O chão das calçadas é quase sempre coberto por pedras (geralmente basalto ou arenito), que são tiradas de uma pedreira. As ruas em si, pelo menos na cidade de Porto Alegre são pavimentadas com granito e algumas são cobertas por asfalto, um subproduto do petróleo, extraídos de uma pedreira ou poço, respectivamente. Os postes de luz suportam uma fiação feita de cobre que transmite energia produzida, entre outras coisas, por carvão, gás natural e urânio. Os carros que andam pelas ruas se movimentam com motores de combustão interna que é realizada em geral queimando-se combustíveis fósseis (no Brasil etanol é também utilizado e não é um combustível fóssil e existem carros elétricos, embora estes ainda possam depender de combustíveis fósseis para gerar eletricidade). Até mesmo o sol, um reator de hidrogênio, que garante a vida no planeta Terra é feito de recursos exauríveis, e um dia vai esgotar todo seu combustível e acabar. A lista poderia seguir por várias páginas.

Nosso padrão de vida depende destes recursos: uma coisa que nos diferencia dos nossos longínquos antepassados habitantes de cavernas é a habilidade de dominar o meio ambiente e usá-lo em nosso favor. A energia é um exemplo bem claro de como nossa habilidade de transformar o meio que nos cerca nos proporciona um padrão de vida melhor com o passar do tempo. A revolução industrial que começou no século XVIII tem como um símbolo a máquina a vapor. Antes da revolução a energia mecânica, gerada por nossos músculos e músculos de animais, era usadas para transformar matérias primas em produtos para nosso consumo. Com a criação da máquina a vapor, a energia do carvão é extraída e convertida em movimento para criar os produtos que desejamos. A quantidade de energia produzida desta forma, e também das máquinas subsequentes (movidas a petróleo e outros combustíveis) é tão maior que possibilitaram um boom da espécie humana nestes últimos séculos. Dessa forma nosso padrão de vida depende de quanta energia conseguimos produzir.

William Stanley Jevons (1862) escreve o livro *The Coal Question*, onde ele trata da exaustão do carvão na Inglaterra. O que dava a vantagem econômica aos ingleses em

relação ao resto do mundo era a quantidade de energia que eles produziam com o carvão. Quando este se esgotasse a vantagem britânica se esgotaria também. Atualmente passamos pelo mesmo dilema para tentar manter nosso padrão de vida. Se esgotarmos nossas fontes de energia não conseguiremos produzir mais nada. Estendendo isso aos outros recursos exauríveis, quando eles se esgotarem não poderemos mais construir prédios, asfaltar ruas, estender a linha elétrica etc. Em resumo: não conseguiremos produzir mais nada que dependa dos recursos exauríveis, o que pode significar o fim de nosso padrão de vida atual.

Esta é uma visão pessimista de nossa situação. Embora ela possa acontecer e iremos voltar às cavernas, nós temos meios de substituir as coisas que foram citadas. Energia pode vir de outros lugares, como o sol, plantas, vento e até da atração gravitacional<sup>1</sup>. Podemos pavimentar ruas com outras formas renováveis de pavimentação como borracha e transmitir eletricidade com carbono, que sendo o componente básico da química orgânica, é renovável.

Do ponto de vista econômico isso levanta pelo menos estas duas perguntas: como esgotar as fontes da melhor maneira e como podemos ir substituindo no caminho uma fonte pela outra. Para mostrar como os economistas consultados resolvem isto começamos no capítulo dois estabelecendo o problema dos recursos exauríveis. Primeiro introduz-se o tempo na economia, pois a exaustão não se dá em um único período e depois se estabelece um pouco melhor as características gerais dos recursos que estamos falando (i.e. o que é um recurso exaurível, pois para não ter que fazer uma lista similar a inicial, de todos os recursos exauríveis, podemos delimitar algumas características que implicam um recurso que as possui ser exaurível). Após isso se comenta em alguns problemas criados pelo fato destes recursos serem esgotáveis.

No capítulo três são exibidos os modelos econômicos dos recursos exauríveis. Estes modelos podem ser divididos em modelos microeconômicos, onde o objetivo dos agentes é maximizar seu lucro e/ou utilidade e a taxa de juros é uma variável chave e modelos macroeconômicos, onde o crescimento e o investimento afetam a economia dos recursos exauríveis e a taxa de juros não está implícita, embora ela afete o crescimento e o investimento. A partir dos modelos é possível avaliar políticas que envolvem os recursos, seja do proprietário privado ou do governo e da população como um todo.

---

<sup>1</sup> Usinas hidroelétricas usam a gravidade para empurrar a água represada em lago e fazê-la passar por uma turbina gerando eletricidade.

No capítulo quatro são tiradas algumas conclusões a partir dos modelos, referentes à substituição de recursos e do efeito de variações na taxa de juros sobre a velocidade de extração. Também são apresentadas algumas políticas de recursos exauríveis que podem ser relacionadas às conclusões tiradas dos modelos.

## 2 O PROBLEMA DOS RECURSOS EXAURÍVEIS

Nesta Seção apresentamos o problema dos recursos exauríveis.

### 2.1 DESCONTANDO O FUTURO

Antes de entrar na economia dos recursos exauríveis convém apresentar como um agente econômico se comporta quando precisa considerar o tempo futuro e não apenas o presente em sua tomada de decisões. Os modelos da economia dos recursos exauríveis, de Lewis Gray e Harold Hotelling apresentados nos capítulos seguintes, são aplicações de modelos de desconto temporal para o caso de recursos esgotáveis (BRADLEY, 2007).

A formulação da teoria da escolha intertemporal pode ser atribuída a Irwin Fischer e seu livro *The Theory of Interest, as Determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest It de 1930* (FISCHER, 1930), onde “[...] a teoria dos juros é apresenta dessa forma: A base fundamental onde a taxa de juros é formada é sobre a preferência de renda aproveitável presente à renda aproveitável futura.” (HEWETT, 1930, p. 696, tradução nossa). Em seu livro Fischer utiliza a renda real de um indivíduo como proxy para sua utilidade, esta ultima sendo não observável. A partir do dinheiro que ele recebe ele extrai uma utilidade através de suas escolhas, e cada fluxo temporal de renda diferente vai produzir uma utilidade diferente. Além disso, se um indivíduo guarda parte de sua renda ele introduz a noção de capital já que, falando em valor de capital: “[...] é simplesmente renda futura descontada[...] [e] a ponte que liga renda e capital é a taxa de juros.”(FISCHER 1930, p. 14, tradução nossa). Renda guardada e capital são a mesma coisa nesse caso. Para obter a taxa de juros supõe-se que cada indivíduo terá sua taxa de impaciência, ou sua taxa interna de desconto, pela qual ele valoriza o mais presente em relação ao futuro. Segundo Hewett ela é explicada pelos seguintes fatores:

A magnitude da impaciência de qualquer indivíduo depende (1) do tipo do seu fluxo de renda, como seu tamanho, forma e probabilidade e (2) de características pessoais, como miopia [temporal], força de vontade, hábitos de economizar e as incertezas da vida. O nível de impaciência de

qualquer indivíduo pode ser expresso como uma taxa de impaciência [taxa interna de desconto]. (HEWETT, 1930, p. 696, tradução nossa).

Enquanto os indivíduos forem livres para negociar seu dinheiro, uns poupando e outros tomando emprestado, o mercado irá equalizar as taxas de impaciência de todos os indivíduos. Como supõe-se que a impaciência diminui quanto mais renda um indivíduo tomar emprestado de outrem, dado os retornos decrescentes da utilidade gerada por um pouco de dinheiro a mais, cada indivíduo vai tomar emprestado ou emprestar enquanto os outros estiverem dispostos a fazer a operação oposta, cada um segundo a sua taxa de impaciência até que ninguém mais esteja disposto a mudar seu balanço de dinheiro pelo preço (taxa de juros) que ou outros estão dispostos a negociar. Ao fazer isso cada indivíduo altera seu fluxo de renda temporal, isto é, se ele empresta, operação análoga a guardar dinheiro, ele aceita menos renda agora para uma renda relativamente maior no futuro e se ele toma emprestado o inverso. A taxa global resultante que zera o mercado é a taxa de juros (FISCHER, 1930).

A alteração do fluxo de renda até que o prazer gerado por ele seja preferível aos outros fluxos possíveis é a hipótese central da economia intertemporal. Cada indivíduo pequeno o suficiente para não alterar o equilíbrio de mercado vai entrar comprando ou vendendo dinheiro até que sua impaciência seja igual à taxa de juros, que é o valor do dinheiro. Além dessa forma rudimentar de alteração de fluxos de renda Fischer ainda introduz outra forma: a alocação de recursos produtivos em diferentes formatos de fluxos de renda, que ele, Fischer, chama de “oportunidade para investir” (HEWETT, 1930 p. 697, tradução nossa) casualmente ele adota mineração e plantação de árvores de exemplo. Esta última forma de alteração de fluxo de renda que interessa à economia dos recursos exauríveis. Como será demonstrado em capítulos seguintes um dos objetivos da economia dos recursos exauríveis é tentar achar a melhor forma de extração dos recursos, isto é o fluxo de renda gerado por eles que maximiza uma função objetivo. Os princípios que regem a tomada de empréstimos seguem para a decisão de investimento (i.e. será investido até que a renda gerada por um pouco a mais de capital produtivo seja igual a seu custo). No caso de um investimento, cada fluxo tem uma taxa interna de retorno (TIR), a taxa que iguala o fluxo futuro de rendimentos ao investimento inicial (seu preço de mercado). Um indivíduo toma a decisão de investir (pagar o preço do investimento) quando a TIR é igual ou maior que a sua taxa interna de desconto.

Dois problemas econômicos surgem para este último caso de tomada de decisão de investimento em recursos exauríveis, como Hotelling (1991) os divide:

- a) o problema do produtor que quer maximizar seu lucro intertemporal;
- b) O problema do consumidor, no caso a sociedade como um todo, que quer maximizar a utilidade extraída dos recursos exauríveis.

Ambos requerem que os indivíduos descontem o futuro e a solução seja a mesma (quantidade produzida e preço que maximizam as duas funções simultaneamente) ou que alguém saia perdendo. A forma de avaliar qual o melhor caminho a seguir é dada pelo valor descontado do fluxo de renda, ou valor presente (VP), que depende da taxa de juros de mercado. Existem duas formas de descontar este fluxo: em tempo discreto e em tempo contínuo, sendo que Gray (1914) e Lozada (1993) utilizam tempo discreto e Hotelling (1991) tempo contínuo. A forma matemática segundo Varian (2006) para o primeiro caso (na referência ele se refere a um título com cupom, que em essência é a mesma coisa que retirar aos poucos um recurso de algum lugar) é dada por:

$$VP = \sum_{t=0}^T \frac{R_t}{(1+r)^t} \quad (1)$$

Onde  $t$  é o tempo, variando de 0 a  $T$ ,  $R_t$  é a renda<sup>2</sup> no período  $t$ ,  $r$  é a taxa de juros ou a taxa interna de desconto do indivíduo. Se for utilizada a taxa de juros a função retorna o valor de mercado do fluxo, se for a taxa interna de desconto a função retorna o valor subjetivo que o indivíduo atribui ao fluxo. Considera-se em geral  $r$  constante. Quando se falar no modelo de Gray será mostrada a implicação do desconto do futuro e da equação (1) para a economia dos recursos exauríveis.

Para o caso contínuo, embora Hotelling já utilizasse desconto para renda e utilidade em 1931, ano original de publicação de *The Economics of Exhaustible Resources*, quem desenvolve a teoria da utilidade descontada é Paul Samuelson em 1937 (SAMUELSON, 1937). Ele parte da seguinte forma para a utilidade descontada:

$$V = \int_0^T U_t g(t, r) dt \quad (2)$$

---

<sup>2</sup> Pode ser também a função a utilidade dependendo do problema a ser resolvido.

Onde ele utiliza  $g$  como uma exponencial “ $e^{-rt}$ ”. Para o caso do desconto de um fluxo de caixa no caso contínuo, substitui-se  $U$  pelo fluxo de renda em cada instante  $t$ . Um dos principais usos destas duas formula é saber o valor de um fluxo de rendimentos em qualquer instante, calculando se o valor entre duas datas, inclusive datas futuras (isto o valor presente futuro entre duas datas quais queres) bastando substituir zero ou  $T$  por alguma outra data na integral.

O valor presente também é o limite que alguém está disposto a pagar pelo fluxo. Por exemplo, quando alguém compra uma mina ele espera receber um fluxo de lucros igual ou maior em valor presente que o preço que ele paga. O mesmo vale para o arrendatário que paga pelo uso da mina. Ele espera não pagar não mais que seu valor presente. Este resultado é o mesmo da teoria da renda de Ricardo, que segundo Brue (BRUE, 2005), implica que as pessoas utilizam terra, ou outro recurso, até que a renda gerada por ele pague apenas seu custo (preço da mina), onde há a maximização do lucro. O comprador vai comprar a mina enquanto ele puder pagar menos ou tanto quanto seu valor presente. O produtor vai extrair maximizando o seu lucro temporal enquanto o valor presente deste for crescente. Na verdade, como se mostrará adiante, o ponto de maximização do lucro pode ser anterior à renda marginal extraída do recurso igualar o custo marginal (GRAY, 1913, 1914). Este último é um resultado usual de microeconomia, e a quebra deste pré-requisito de maximização é um resultado fundamental da economia dos recursos exauríveis. Na economia dos recursos exauríveis é necessária uma condição diferente da maximização de lucro instantânea para um resultado de otimização.

A taxa de juros entra nesse caso como um custo<sup>3</sup> em não extrair e sua magnitude vai atrasar ou apreçar a extração, se ela for grande ou pequena, respectivamente. Ao contrário da teoria de Ricardo que a terra será usada enquanto for lucrativo expandir, no caso dos recursos naturais, enquanto o a taxa de juros for pequena o suficiente para não pagar a renda decrescente de extrair em níveis maiores o proprietário vai preferir manter o recurso intacto até o próximo período, isso obviamente é devido ao número finito de períodos nos quais é possível a extração. Dito de outra forma, o proprietário vai

---

<sup>3</sup> Gray adota a taxa de juros explicitamente como um custo, enquanto que Fischer adota ela como elemento de desconto dos fluxos futuros para valoração do capital. Nesse caso elas aparentam ter sentidos diferentes. Os trabalhos de ambos são muito parecidos e foram feitos de forma diferentes, sendo que Gray publica em 1913 e Fischer em 1907, do qual o livro de 1930 é uma revisão.

deixar extrair recursos se o valor presente da extração futura for maior que o preço ganho por ela no presente, e isso se daria em um ponto anterior à margem (GRAY 1913).

O mesmo vale para a sociedade como um todo. Ela estará disposta a explorar as suas minas enquanto uma unidade a mais de recurso extraído for mais útil que deixa-lo no solo. E ela vai querer extrair enquanto o valor presente total da utilidade descontada for maior que a desutilidade causada por extrair recursos e esgotar seu estoque. Considerar a sociedade como um todo dessa forma, porém é questionável. Como o próprio Samuelson reconhece de seu modelo de utilidade descontada “[...] qualquer conexão com a utilidade discutida aqui [utilidade descontada] e qualquer conceito de bem estar é desencorajada” (SAMUELSON, 1937, p. 161. tradução nossa). Esta discussão simplesmente numérica deixa de lado qualquer princípio ético que a sociedade possa ter.

Quando se trata de recursos que acabam eventualmente desta forma a sociedade implicitamente escolhe uma data futura a partir da qual ou não haverá mais recursos e ou estaremos condenados ou alguma solução externa, como avanço tecnológico e o aparecimento de recursos substitutos, aparecerá. Mas nada garante que essa data escolhida vá ser fixa, e que não decidamos que temos que muda-la no meio do caminho. Como Strotz demonstra *Myopia and inconsistency in Dynamic Utility Maximization* (STROTZ, 1956) um indivíduo pode ser inconsistente ao descontar o futuro, ou seja, mudar de ideia sobre qual o melhor fluxo de renda. Por exemplo, gastos extravagantes e pessoas (ou uma sociedade) mais pobres, que devido a fatores como educação e produtividade “[...] alguém esperaria encontrar comportamentos desse tipo.” (STROTZ, 1956, p. 178, tradução nossa). Nelas para o caso dos recursos exauríveis, quanto menos avançada uma civilização, desde que já tenha um certo nível de progresso<sup>4</sup>, espera-se que seja mais predatória a exploração de recursos naturais. Para tratar do avanço e crescimento econômico e seu efeito na economia dos recursos naturais serão abordados nos modelos de Solow e Hartwick (HARTWICK, 1977; SOLOW, 1974a, 1974b) em capítulos seguintes. Estes modelos são convenientes por que não implicam extração total em qualquer período finito e levam em conta o bem estar.

---

<sup>4</sup> Isto é capaz de explorar a natureza de forma a destruí-la pelo seu descuido ou vontade.



## 2.2 RECURSOS EXAURÍVEIS E SUAS POSSIBILIDADES DE CONSERVAÇÃO<sup>5</sup>

É razoável pensar que a espécie humana se depara com o problema dos recursos naturais desde os primórdios da civilização, em especial aqueles que podem ser esgotados. O problema econômico que eles trazem também é muito antigo. Os gregos viam o problema como uma questão de “[...] descobrirem leis da natureza e na sua implementação nas relações entre os homens e entre os homens e a natureza” (CRABÉE, 1983, p.197, tradução nossa). Por exemplo, para os fisiocratas que consideravam a terra como único recurso produtivo, os recursos naturais eram apenas mais um recurso como qualquer outro. As outras escolas também não separavam este tipo de recurso da própria terra. Sendo assim é natural que o problema dos recursos naturais fosse um “[...] apêndice da teoria da renda da terra [...]” (CRABÉE, 1983, p. 197, tradução nossa). O ponto de partida na teoria dos recursos naturais se dá em 1913 com a publicação do artigo de L.C. Gray, *Economic Possibilities Conservation*, quando a ciência econômica é estendida especificamente para esse assunto. (CRABÉE, 1983). Segundo Gray, o problema dos recursos naturais, nos Estados Unidos da América, começa quando “Estimativas científicas causaram um rude despertar dos sonhos de tesouros vastos ainda não descobertos [...]” (GRAY, 1913, p. 497 tradução nossa). A percepção de que os recursos do mundo não vão durar para sempre é a grande questão dos recursos esgotáveis. A questão a ser solucionada é que o consumo presente afetará o futuro, obviamente por que o recurso é esgotável, daí a necessidade de desconto temporal e achar uma forma de equilibrar o consumo presente e o consumo futuro. Mas antes de continuar a falar dos recursos, convém delimitar melhor o problema. Gray sugere a seguinte classificação para recursos naturais:

I. Recursos que existem em tamanha abundância que não existe aparente necessidade de economia nem no presente, nem no futuro. Por exemplo água.

II. Recursos que provavelmente vão se tornar escassos no futuro remoto, embora tão abundantes que não tem valor de mercado no presente. Por exemplo, pedras e areia de construção em algumas localidades.

III. Recursos que tem escassez presente,

1. Não exaurível pelo uso normal como energia hídrica.

---

<sup>5</sup> Uma homenagem ao trabalho seminal de Gray.

2. Necessariamente exaurível pelo uso e não restaurável após a exaustão: depósitos minerais.
  3. Necessariamente exauríveis pelo uso, mas restauráveis: peixe e florestas.
  4. Exauríveis em uma localidade, mas restauráveis pelo uso de outros recursos de tipos diferentes ou recursos similares em diferentes localidades: terra agrícola.
- (GRAY 1913, p. 499-500, tradução nossa).

Definidos dessa forma fica claro que os recursos naturais devem ser explorados de forma diferente, regrados pela sua forma de exaustão. Os itens um e dois não são exauríveis. No caso de recursos renováveis (III.3), se eles seguirem uma regra de renovação conhecida, por exemplo a equação logística<sup>6</sup>. O problema de sua preservação se resumiria em manter uma taxa de exploração pequena o suficiente para que eles possam manter sua população constante<sup>7</sup>. Nesse caso “Não existe conflito necessário entre presente e futuro.” (GRAY, 1913, p.500. tradução nossa). Não será tratado destes recursos no trabalho. A economia dos recursos exauríveis se concentra nos itens III. 2 e III.4. Gray chama de Movimentos de Conservação as pessoas que queriam conservar os recursos exauríveis em sua época. O problema eles tentavam solucionar era de como preservar os recursos naturais exauríveis o suficiente para as próximas gerações poderem os usufruir. Segundo Gray, o movimento de conservação tinha duas frentes de combate, a saber: a distribuição dos recursos naturais e o educacional. O primeiro se refere à propriedade dos recursos e o último ao modo como se explora o recurso, especialmente levando em conta os métodos de exploração. Estes métodos “[...] levam a promoção e encorajamento de pesquisa científica e inovação.” (GRAY, 1913, p. 498. tradução nossa). Os problemas a ser resolvidos podem ser resumidos pela “floresta” de Hotelling, que atribui a ação dos movimentos no fato de que “O sentimento que estes produtos são agora muito baratos para o bem das futuras gerações [...]” (HOTELLING, 1991, p.281, tradução nossa). A dita “floresta” de questões sobre os recursos exauríveis é resumida a seguir.

Quanto da produção de uma mina [ou outro recurso] deve ser visto como renda e quanto como retorno de capital. Qual é o valor da mina quando se supõe que o seu conteúdo é conhecido [...]. Se um produtor produzir muito rápido ele vai depreciar os preços para baixo,

---

<sup>6</sup>A equação logística foi proposta pelo matemático belga P.F. Verhulst para crescimento populacional. Um exemplo da equação logística pode ser visto em (BOYCE; DIPRIMA, 2014, p. 61-62). Uma apresentação do problema econômico dos recursos renováveis pode ser vista em (1990).

<sup>7</sup> Note que eles também são exauríveis a exemplo de uma floresta totalmente destruída.

talvez a zero. Se ele produzir muito devagar, os seus lucros, embora maiores, serão atrasados mais do que a taxa de juros requer. Qual é a 'regra de ouro'. [...] Supondo que a mina seja de propriedade pública. Como deve ser a exploração para o maior bem geral[...]. Como pode o estado taxar e regular a atividade para o proprietário adotar uma programação de extração em maior harmonia com o bem geral[...]. (HOTELLING, 1991, p. 282, tradução nossa).

Tentar resolver essas questões é o problema econômico dos recursos naturais. Ainda é possível delimitar um pouco mais a questão. Os recursos como os minerais em uma mina são um exemplo claro de algo que necessita alocação temporal já que existe uma quantidade finita deles no mundo e é natural que, pelo menos, uma porcentagem deles não seja reaproveitável, por exemplo, de vigas de ferro em uma construção. Um exemplo mais sutil que Gray apresenta de um recurso deste tipo é a terra agrícola. Certamente terra, no sentido de superfície, não é esgotável, apenas existe em uma quantidade finita, mas a condição dos elementos que compõe a terra pode ser esgotável, mesmo que possamos repor os componentes químicos absorvidos pelas culturas, retirando-os de uma mina, estes elementos são exauríveis, pois a mina é exaurível. A forma como a terra será gerida vai depender do custo econômico de repor as suas propriedades, supondo que isso seja possível. A rotação de culturas o reaproveitamento de terras ou a utilização das terras marginais vão ser justificados pela economia<sup>8</sup> e, portanto, em termos econômicos o ótimo de uso não é o ótimo de conservação (GRAY, 1913). No modelo de Ricardo para a utilização das terras marginais, seu uso se justifica pelo baixo preço da terra (BRUE, 2005). No caso da economia dos recursos exauríveis o preço de conservá-los também é importante na definição da extensão de seu uso.

Dessa forma estabelece-se uma condição de conservação para um recurso. O dono das terras onde estão os recursos vai tentar maximizar sua função lucro: o problema (a) de Hotelling. O problema de propriedade coletiva (i.e. estatal) altera a função que se desejaria maximizar, que passa da função lucro para alguma função de bem estar social. É problema (b) de Hotelling (ver seção 2.1). Pode-se estender a análise do problema da terra apresentado para outros recursos, notando que a escolha em extrair mais rápido um recurso é a mesma que a de estender o uso de terras àquelas com rendimentos menores. Um exemplo elucidativo: Um mineiro pode aproveitar ao máximo cada rocha extraída ou aceitar uma perda maior por volume e avançar mais fundo na

---

<sup>8</sup> Enquanto que utilizar a terra descuidadamente até esgotar os nutrientes faça sentido econômico de maximização de lucro, não faz sentido de conservação, pois poderá torna-la infértil.

mina. Resta saber as condições que vão levar o indivíduo a optar por uma forma ou outra de exploração.

### 2.2.2 AS CONDIÇÕES DE EXPLORAÇÃO DOS RECURSOS EXAURÍVEIS

A primeira condição é a da acumulação de riquezas, ou o valor do capital na forma de recurso exaurível. É importante notar que para fins de acumulação pode existir indiferença em mantê-la em dinheiro ou em recurso. Dito de outra forma, o recurso ainda não explorado é parte da riqueza do proprietário e ele vai transformá-lo aos poucos em dinheiro, isto é, um fluxo, e daí pode-se aplicar a valoração do capital de Fischer (1930). Utilizando o valor presente apresentado na seção 2.1 chega-se ao valor do recurso exaurível em dinheiro. Nesse caso a política de extração vai depender de algumas condições que Gray define como: “[...] taxa de juros, lei da produtividade decrescente e o valor dos recursos naturais que o indivíduo possui” (GRAY 1913, p. 504, tradução nossa). A taxa de juros influencia a decisão a partir do momento que existe algum lucro em extrair o recurso. Se o preço permanecer constante, enquanto for lucrativo, o proprietário vai extrair tudo que puder e vai poder aplicar o dinheiro em outra coisa a uma taxa de juros. A produtividade decrescente impedirá que todo recurso seja extraído de uma vez e o problema intertemporal será achar o equilíbrio entre extração presente e futura (GRAY 1913).

A segunda questão é o caso do preço do recurso ser tão alto que induzirá a conservação pelas pessoas e o aparecimento de substitutos. Esse caso é bastante importante quando se introduz a ideia de um recurso que é “economicamente exaurível” (i.e. ele é exaurível apenas sob certas condições), pois se fosse o caso de existir infinitos substitutos perfeitos de um recurso, ou outras fontes do mesmo, e eles forem de relativo fácil acesso o problema intertemporal fica reduzido a opção de escolher qual usar primeiro, que seria dada pelo preço do recurso e seus substitutos em cada período. Solow (1974a) nos dá um exemplo quando fala do petróleo extraído do xisto e da utilização de recursos muito caros no presente, mas relativamente baratos no futuro. A exploração destes recursos se tornaria viável se o preço aumentasse ou o custo de extração se reduzisse ao longo do tempo. Não haveria nenhum grande motivo para conservação, pelo menos pela ótica da produção intertemporal (i.e. é irrelevante a

existência do recurso para o futuro). Para a demanda, a substituição levaria o preço a se manter em níveis baixo. Do ponto de vista do produtor um preço maior sempre induz a uma extração maior. No caso mais realista de que os substitutos também são esgotáveis ou de difícil acesso (como novas tecnologias) vale que o efeito de um preço alto é ambíguo, pois dados os pontos de vista da demanda e do produtor, ele, o preço, pode tanto levar a sua substituição quanto a quantidades extras trazidas ao mercado, via intensificação e expansão da exploração (GRAY 1913, p. 508).

### 2.3 O EFEITO DA TAXA DE DESCONTO NA EXAUSTÃO DE RECURSOS

Aceitando-se que o futuro é descontado e conhecendo o problema dos recursos exauríveis pode-se estabelecer a relação da taxa de juros para o problema aqui exposto. Ela entra nesse caso como um custo em não extrair e sua magnitude vai atrasar ou apressar a extração, se ela for grande ou pequena, respectivamente<sup>9</sup>. Ao contrário da teoria de Ricardo que a terra será usada enquanto for lucrativo expandir, no caso dos recursos naturais, enquanto o a taxa de juros for pequena o suficiente para não pagar a renda decrescente de extrair em níveis maiores o proprietário vai preferir manter o recurso intacto até o próximo período. Dito de outra forma, o proprietário vai deixar extrair recursos se o valor presente da extração futura for maior que o preço ganho por ela no presente, e isso se daria em um ponto anterior à margem (GRAY 1913).

Hotelling também se pergunta: “A taxa de juros de Mercado deve ser usada pelo empreendedor em seus calculo, mas deve ela ser usada nas determinações do valor social e na politica pública ótima?” (HOTELLING 1991, p. 286, tradução nossa). Ele conclui em seguida que como essa taxa é formada pela interação de todas as pessoas, sendo recursos exauríveis uma parte pequena da economia, a taxa é adequada e reflete a real impaciência da sociedade.

---

<sup>9</sup> Utilizando a valoração de capital isso significa que o valor do fluxo aumenta ou diminui com a taxa de juros. Se ela aumenta o valor diminui e se torna atrativo extrair no presente se diminui o valor aumenta e se torna atrativo extrair no futuro.

## 2.4 O EFEITO DO APARECIMENTO DE RECURSOS SUBSTITUTOS

Enquanto a exaustão de recursos, tudo mais constante, leva a diminuição da atividade econômica e à decadência, a descoberta de novas fontes de recursos e recursos substitutos tem efeito oposto. Existem vários exemplos disso. Notoriamente Jevons (1866) e sua preocupação com o carvão na Inglaterra. Segundo ele o carvão e a energia produzida por ele eram a razão do domínio econômico inglês e este iria acabar devido ao esgotamento do carvão. Um exemplo brasileiro recente também é ilustrativo. As crises do petróleo da década de 1970 causaram um forte choque na economia dos países importadores de petróleo. Não obstante uma das saídas encontradas, no Brasil, foi a produção de álcool como combustível alternativo. O marco disto sendo o programa nacional do álcool (Proálcool) iniciado pelo presidente Geisel (MORAES, 2015). A saída para o problema de Jevons foi similar em adotar fontes alternativas de energia (incluindo a adoção de petróleo como combustível). Mesmo assim quase duzentos anos após Jevons poderia se questionar se o que acabou não acontecendo com o carvão no seu tempo pode acontecer com o carvão, petróleo, gás natural e outras fontes de energia esgotáveis em nosso tempo, ou seja eles acabarem e nós ficarmos sem energia. Segundo a Agência Internacional de Energia, do inglês *International Energy Agency* (IEA), a quantidade de energia produzida mais que dobrou desde os anos 1970 (crise do petróleo), enquanto que a participação de combustíveis fósseis passou de 86% do total para 82% (INTERNATIONAL ENERGY AGENCY, 2014). Efetivamente consumimos o dobro de combustíveis fósseis que quarenta anos atrás. Mesmo que possamos achar outra forma de energia, pensar que 82% de nossa energia pode acabar em algum tempo finito é preocupante.

Por outro lado exemplos de troca de fonte de energia ilustram um recurso que não é exaurível, o intelecto humano, chamado de Recurso Definitivo pelo economista Julian Simon, citado por Bradley<sup>10</sup>(2007). Embora esperar que uma solução seja achada sempre que estivermos perto do colapso da civilização pode ser um jeito questionável de se agir, não se pode deixar de levar em conta que o futuro pode ser, “mais brilhante” que o presente, como por exemplo, o caso extremo de esforço de guerra, quando uma nação está disposta a sacrificar muito esperando conquistar a paz para a posterioridade. Para os indivíduos isso quer dizer que o recurso será extraído mais rapidamente se eles

---

<sup>10</sup>Simon, J. L. (1981). *The ultimate resource*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

esperam que ele ganhe concorrência e seja menos importante no futuro e mais lentamente se esperam que a exaustão dele vá ocasionar perdas irreversíveis de bem estar. Ainda segundo Simon, com base em trabalhos estatísticos, recursos exauríveis não se comportam, em termos de preço, diferentemente de recursos reproduzíveis. Isto parece concordar com a IEA e o dado da manutenção de combustíveis fósseis como fonte primária de energia. Além disso, o preço do petróleo, como representante dos combustíveis fósseis, está caindo nos últimos quatro anos(2011-2015) e está no mesmo nível de 2007 (NASDAQ, 2015). Em outros setores de recursos naturais, como minérios de ferro os preços parecem estar declinando também (VALE S.A., 2015). É importante deixar claro que estes exemplos não provam nem refutam a tese de que o intelecto humano é capaz de nos “tirar de qualquer encrenca” ou que recursos exauríveis se comportam como qualquer outro recurso. Seriam necessários estudos empíricos sobre o caso e principalmente isolar efeitos da crise econômica de 2008 e da desaceleração do crescimento da China na década 2010-2020. Outro fator importante é a estrutura de mercado destas commodities. O petróleo é um símbolo de produção cartelizada e seu cartel, a OPEP, controla boa parte do petróleo no mundo e certamente os preços do petróleo não flutuam livremente. Talvez exista interesse da OPEP em manter o preço do petróleo baixo por algum motivo (destruir concorrência?). Embora isto soe como uma teoria da conspiração, não é implausível. Com isto dito, talvez o recursos exauríveis necessitem estudos caso a caso.

## 2.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 2

O capítulo dois apresentou brevemente alguns problemas que os recursos exauríveis criam. A principal parte é o desconto temporal que é a base para o que será visto a seguir. Os modelos de recursos exauríveis tentam responder os problemas citados neste capítulo.

### 3 OS MODELOS ECONÔMICOS DE RECURSOS EXAURÍVEIS

Nesta seção serão apresentados modelos econômicos “utilitaristas” com a presença de recursos exauríveis. A palavra utilitarista esta entre aspas, pois os últimos dois modelos não são exatamente de indivíduos maximizadores, mas requerem uma função de bem estar mais incomum, entretanto ainda estão dentro da economia neoclássica. Portanto, por uma questão de formalidade, até que seja dito o contrário, entende-se por ponto ótimo, ou de equilíbrio, a situação usual de ótimo de Pareto entre indivíduos e gerações (i.e. ninguém melhora sem piorar outrem) após eles maximizarem suas funções objetivo.

#### 3.1 LEWIS GRAY

Em 1913 Lewis Gray escreveu um artigo intitulado *Economic Possibilities of Conservation* onde ele descreve os problemas enfrentados pelos movimentos de conservação quando lidavam com recursos exauríveis. Alguns desses problemas abordamos no capítulo dois. A grande preocupação de Gray era com o uso de terras nos Estados Unidos. Em sua visão, o baixo preço da terra durante a expansão americana do século XIX causava os problemas de conservação. Mais tarde em seu artigo de 1914 ele utiliza o modelo de Ricardo de renda da terra com algumas modificações, e aplica à recursos exauríveis, especificamente minas (GRAY, 1913, 1914).

Segundo Robert Bradley Júnior (2007), o modelo de recursos de Gray tem três características fundamentais (que estendemos estas características a todos outros modelos apresentados depois, exceto as de número 3 e 4, quando notado): Estoque é (1) fixo e (2) conhecido e homogêneo e (3) que os agentes descontam o tempo como foi apresentado anteriormente no capítulo dois e, portanto, eles vão explorar um recurso exaurível maximizando o valor presente de sua venda durante o tempo. Também requeremos que (4) as firmas sejam competitivas (*pricetakers*). Infelizmente, segundo John Hartwick (2012) o trabalho numérico de Gray é um tanto complicado e ele peca em algumas contas, embora a essência de seus resultados seja comprovada no mesmo artigo. O modo como ele apresenta o problema também é de difícil acesso para o cálculo, pois necessita calculo discreto, o que é mais complicado que o cálculo contínuo. Gray



(1914) utiliza tabelas onde ele nos informa os custos e a receita gerados por uma mina a cada 100 toneladas extraídas e ele acha o melhor caminho de extração, em um processo que dá um resultado equivalente ao posterior trabalho de Hotelling (HARTWICK, 2012). É clara a limitação de se fazer os cálculos apenas com uma tabela, afinal o conjunto de caminhos de extração possíveis é infinito. Mas utilizando o raciocínio de Gray pode-se chegar a conclusões razoáveis e que são uma boa aproximação do cálculo mais formal.

A tabela 1 abaixo reproduz a tabela original de Gray da extração de minerais de uma mina. Por simplificação a quantidade removida é de 100 toneladas e o preço por tonelada é a unidade.

**Tabela 1 - Variações no retorno líquido na remoção de quantidades variáveis de carvão em um período de tempo**

Quantidade de carvão removida	Valor do carvão removido	Custo por remoção por 100 toneladas (USD)	Retorno Líquido Total (USD)	Retorno Líquido Médio por 100 ton.	Aumento de custo devido a remoção de 100 toneladas adicionais	Retorno Líquido de cada 100 toneladas adicionais
100	100	\$ 120,00	\$(20,00)	\$(20,00)	-	-
200	200	\$ 100,00	-	-	-	-
300	300	\$80,00	\$60,00	\$20,00	-	-
400	400	\$50,00	\$ 200,00	\$50,00	-	-
500	500	\$52,00	\$ 240,00	-	\$60,00	\$40,00
600	600	\$55,00	\$ 270,00	-	\$70,00	\$30,00
700	700	\$59,00	\$ 287,00	-	\$83,00	\$19,00
800	800	\$64,00	\$ 288,00	-	\$99,00	\$ 1,00
900	900	\$68,00	\$ 288,00	-	-	-
1000	1000	\$73,00	\$ 270,00	-	-	-
1100	1100	\$79,00	\$ 231,00	-	-	-

Fonte: Gray (1914, p. 472, tradução nossa).

Aqui se supõe que o a extração de carvão assume rendimentos decrescentes à medida que se aumenta a quantidade de carvão extraída. A tabela 1 apresenta os rendimentos e custos de extração por período e não é cumulativa (i.e. retirar carvão hoje não altera o custo de amanhã). Gray (1914) resolve o problema de maximização sem desconto temporal minimizando o custo médio. No caso apresentado isto se dá ao extrair-se 400 toneladas, ponto a partir do qual deferir a extração será mais rentável, pois cada tonelada adicional terá um rendimento maior no futuro que no presente. Ainda segundo Gray :

Se a mina fosse uma fonte de renda inesgotável não seria necessário cuidado com o fato de que cada tonelada adicional rende menos do que o máximo possível. O interesse do proprietário seria extrair oitocentas toneladas de carvão. Neste ponto o valor adicionado por cem toneladas de carvão iguala os custos de sua remoção. (GRAY, 1914, p. 473, tradução nossa)

Em outras palavras, se a mina fosse eterna o proprietário poderia extrair o quanto quisesse em cada período, cumprindo a primeira condição de maximização de lucro (custo marginal igual à receita marginal), porém na ótica da economia intertemporal pode ser mais lucrativo retardar a produção presente de forma que a condição de maximização de lucro de Gray (1914) se torna a minimização do custo médio. Por exemplo, se existirem 800 toneladas de carvão na mina o proprietário poderá escolher entre \$ 280 hoje e \$400 em duas parcelas de \$200. Uma questão levantada por ele é saber se isso vale a pena ou não para o produtor, ou seja, o que fará ele modificar a velocidade de extração. A resposta é que dependendo da taxa de juros e também do preço por tonelada é melhor retardar ou acelerar a extração. Para o caso da taxa de juros é rápido de chegar à conclusão. No exemplo acima, a taxa que iguala no segundo período, com o limite máximo de extração de 800 toneladas, a renda monetária dos dois caminhos de extração é de 127% ao período<sup>11</sup>! É difícil enxergar um exemplo real que isso aconteça em um ano, e provavelmente o país com uma taxa de juros tão grande está passando por severas dificuldades. Obviamente combinações diferentes de extração vão necessitar taxas diferentes de juros para igualar a renda recebida e também dependerão da quantidade de recursos na mina. Em síntese, quanto menor a taxa de juros menor a extração presente, pois taxas menores tornam mais atrativos fluxos de caixa futuros. Resta saber como o preço afeta o valor da mina.

Para fazer isso Gray monta duas tabelas onde ele calcula o valor presente de alguns caminhos de extração possíveis em uma mina na qual ele supõe haver uma certa quantidade de recursos. As tabelas que ele utiliza são extensas e podem ser simplificadas para motivos de exposição. A tabela 2 apresenta o lucro descontado da extração de 400, 500 e 600 toneladas de uma mina, com 2800 toneladas de recurso, baseada na tabela 1. O preço por tonelada é \$1. Note que apenas o primeiro caminho é constante (mesma quantidade extraída sempre), já que é impossível extrair 500

---

11 E o fato de que o recurso vai ser extraído se a taxa de juros pagar o custo de oportunidade de extrair com menos lucro hoje é chamado pela literatura de regra de Hotelling (PEARCE; TURNER, 1990).

toneladas após o quinto ano e 600 toneladas após o quarto ano. Nesse caso o proprietário extrai 300 toneladas no último ano da série que começa com uma extração de 500 toneladas e 400 toneladas no último ano da série que começa com extração de 600 toneladas.

**Tabela 2 - Valor presente do lucro em cada ano da exploração de uma mina com 2800 toneladas e uma taxa de juros de 10% a.a. e preço de \$ 1**

Nº de toneladas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano
400	200,00	181,82	165,29	150,26	136,60	124,18	102,63
500	240,00	218,18	198,35	180,32	149,02	33,87	-
600	160,00	145,45	132,23	120,21	124,18	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Gray (1914, p. 475)

Cada caminho (extrair 400, 500 ou 600 toneladas por ano) retorna um valor presente diferente para o total de toneladas extraído, a saber: \$1060,79, \$1019,73 e \$682,08. Como no caso sem desconto intertemporal o melhor caminho ainda é extrair 400 toneladas. Em seguida fazendo o preço ser \$2, tudo mais constante (isto é dobrando os valores da coluna 2 da tabela 1) a mesma mina têm o seguinte fluxo de lucros gerados pela extração do mesmo número de toneladas:

**Tabela 2 - Valor presente do lucro em cada ano da exploração de uma mina com 2800 toneladas e uma taxa de juros de 10% a.a. e preço de \$ 2**

Nº de toneladas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano
400	600,00	545,45	495,87	450,79	409,81	372,55	307,89
500	740,00	672,73	611,57	555,97	459,48	203,21	-
600	760,00	690,91	628,10	571,00	372,55	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Gray (1914, p. 479)

Agora os valores presentes de cada caminho de extração são, em ordem crescente de toneladas: \$3182,37, \$3242,96 e \$3022,56. Nesse caso o melhor caminho a tomar é extrair 500 toneladas enquanto for possível e extrair 300 no último ano. Estas tabelas, embora simples, ilustram resultados importantes: (1) como a taxa de juros afeta a extração de recursos exauríveis, através do cálculo do valor presente, e (2) como o preço afeta a extração. Aqui temos uma limitação de utilizar tabelas. Poderíamos fazer vários

caminhos possíveis de extração e é impossível saber se estamos de fato maximizando o lucro do proprietário.

Como foi dito, Gray (1914) estava preocupado com os movimentos de conservação, em especial com a terra<sup>12</sup>, seu baixo preço, seu uso extensivo e os efeitos que isso causou cem anos depois<sup>13</sup>. Além disso, Ele já estava ciente de problemas com o *Welfare* e se o uso da taxa global de juros da economia, para o problema de extração de recursos exauríveis, era adequado. Ele não possuía as ferramentas necessárias para responder precisamente estas questões. Seu trabalho foi feito com o que ele chamou de “[...] ‘senso comum’.” (GRAY, 1913, p. 515, tradução nossa). Por alguma razão ele não usou cálculo em seu trabalho (necessário para obter precisamente a regra de Hotelling) e o trabalho de Samuelson sobre utilidade, que o próprio Samuelson duvidava das qualidades de proporcionar *bem estar* (ver seção 2.1) só veio em 1937, várias anos após o trabalho de Gray. Mesmo assim o lugar de Gray para a teoria dos recursos exauríveis é resumido por Philippe Crabée: “[...] Gray recebe o crédito pela primeira análise neoclássica para conservação de recursos” (CRABBÉ, p. 196, tradução nossa).

### 3.1.1 FORMALIZAÇÃO DO MODELO DE GRAY

Embora as conclusões de Gray acerca da economia dos recursos exauríveis estejam corretas, um modelo matemático mais robusto é necessário para avaliar trajetórias de extração, já que tabelas fornecem um número limitado de trajetórias, para um universo infinito de possibilidades. Para o caso de tempo discreto existem dificuldades em problemas de maximização. As dificuldades se resumem, segundo Lozada (LOZADA, 1993), em achar um T ótimo tal que a quantidade extraída  $q(T)$  seja zero e maximizar o valor presente da mina, que assume o formato do langrangeano a seguir:

$$\text{Max } \sum_0^{T-2} \frac{\Pi(q_t)}{(1+r)^t} + \lambda \left[ \frac{\Pi(S - \sum_{t=0}^{T-2} q_t)}{(1+r)^{T-1}} \right] \quad (4)$$

---

<sup>12</sup> Causada, suponho, que pela expansão norte americana para o oeste durante o século XIX.

<sup>13</sup> É emblemática a compra do território de Louisiana pelo então presidente Thomas Jefferson, pouco mais de cem anos antes do trabalho de Gray, em 1803, e a expansão americana para o oeste.

Neste trabalho será alterada a notação original para T o último período de extração ao invés de T.  $\Pi(q_t)$ <sup>14</sup> é o lucro obtido pela quantidade extraída q no período t. S é o total de recurso e o termo que acompanha o multiplicador de Lagrange é o lucro do último período anterior a T. Note que isso significa  $S - \sum_0^{T-2} q_t + q_{T-1} = 0$ , ou seja, a mina é completamente esgotada em T-1. Segundo Lozada (1993, p.250, tradução nossa) “O Segundo problema pode ser resolvido pelo teorema de Kuhn-Tucker, mas o primeiro, achar T, não recebeu ainda tratamento geral. Isto é resolvido neste artigo.”. Lozada parte da regra de Hotelling, apresentada a seguir para o caso discreto (M ao lado de uma função denota a primeira derivada, no caso o lucro marginal):

$$M\Pi(q_t) = (1+r)M\Pi(q_{t-1}) \quad (5)$$

para todo  $t < T$  e

$$M\Pi(q_T) \leq (1+r) M\Pi(q_{T-1})$$
<sup>15</sup>

para  $t = T$

Assume-se que o lucro marginal é estritamente decrescente e positivo. O que se procura é um T que satisfaça essas condições e a partir de  $q(T)$  “contar para trás” e obter  $q(T-2)$ ...  $q(T-t)$  até  $q(0)$ . Estes  $q$ 's não são a solução do problema, apenas aproximações. Com a **proposição 1** de Lozada, apresentada em seguida, fica mais claro o que isso significa. As condições de Kuhn-Tucker para o lagrangeano (4) são:

$$q_t \geq 0, \frac{M\Pi(q_t)}{(1+r)^t} - \lambda = 0 \text{ e } q_t \left[ \frac{M\Pi(q_t)}{(1+r)^t} - \lambda \right] = 0$$

Segue que para  $t < T$ ,  $M\Pi_t = (1+r) M\Pi_{t-1}$  (a regra de Hotelling), mas para  $t = T$ ,  $M\Pi_T \leq (1+r) M\Pi_{T-1}$ , pois  $q(T) = 0$  (LOZADA, 1993). Desde que MΠ seja decrescente, admitirá uma função inversa tal que:

$$q_t = M\Pi^{-1} \left[ \frac{M\Pi(q_{t+1})}{(1+r)} \right] = f(q_{t+1}) \quad (6)$$

<sup>14</sup> Assume-se que o lucro é função apenas da quantidade extraída.

<sup>15</sup> Até a publicação do artigo de Lozada, utilizava-se a igualdade estrita para a regra, enquanto que segundo ele a relação correta é a inequidade estrita a condição necessária para  $q(T) = 0$ . No caso de igualdade, o problema só pode ser resolvido para quantidades específicas (LOZADA, 1993).

A equação (6) é a inversão da regra de Hotelling para obter  $q$  em função do lucro. Lozada usa um lema e duas proposições para encontrar a solução do problema. O lema será omitido. A **proposição 1** garante que  $S$  pertença ao somatório dos  $n$  últimos  $q$ 's, onde  $n$  é o número de períodos entre a primeira extração e a última. O somatório começa do último período,  $q(T) = 0$ , que é o único do qual se sabe a priori a quantidade extraída, e itera-se até que a soma destes  $q$ 's seja a menor soma possível maior ou igual a  $S$ . A segunda proposição, que é o método para achar  $q$ , será detalhada.

Seguindo a **proposição 2** (LOZADA, 1993): sejam  $f$  composições de  $f$  (ou seja, se  $j = 3$  temos  $f(f(f(q_{T-1}))) = q(T-4)$ ),  $f^0$  é a identidade, então uma solução  $q^*(T-1)$  para:

$$\sum_{t=1}^T f^{t-1}(q^*(T-1)) - S = 0 \quad (7)$$

Existe, é única e é igual a solução  $q_t$  de equilíbrio para o problema. A prova será omitida. Hartwick (2012) aplica um modelo modificado de Lozada às tabelas de Gray com preço \$2, para provar que as aproximações dele eram satisfatórias. Aqui repetimos o exercício de Hartwick com algumas modificações. Como Gray não explicitou como ele obteve os valores de sua tabela, Hartwick assume uma função linear para o custo marginal. No seu trabalho ele divide as quantidades de Gray por 100, porém aqui serão mantidas as quantidades originais. A função custo marginal de Hartwick é:  $C_{mg} = 0,1 + 0,1q$ . Esta função é uma aproximação dos valores da sexta coluna da tabela 6 (HARTWICK, 2012). Aqui será usada  $C_{mg} = 13q + 5$ <sup>16</sup>. Para poder comparar com as tabelas que utilizamos na seção 3.1 vamos aplicar diretamente o modelo de Lozada para obter  $T$ , e em seguida o sistema de equações de Hartwick para as quantidades ótimas extraídas em cada período. Uma coisa importante deve ser notada: os valores obtidos por Hartwick por este método são diferentes dos valores de Gray por que a função custo é diferente.

Para o caso apresentado na seção 3.1, a uma taxa de juros de 10% ao período, começando por  $q(T-1) = f(q(T))$ <sup>17</sup> e fazendo iterações obtemos as quantidades (em 100 toneladas), em ordem decrescente desde o último período de extração ( $T, T-1, \dots, 2, 1, 0$ ), ainda não impondo um  $S$ , até o oitavo de: 1,43; 2,73; 3,91; 4,99; 5,97; 6,86; 7,67 e 8,41. Temos que  $S = 28$  deve estar no somatório dos  $q$ 's dos  $n$  últimos períodos e portanto

<sup>16</sup>Ao invés de dividir tudo por 100, fazemos  $q$  ser múltiplos de 100 toneladas e o preço igual a 200.

<sup>17</sup> Isto é começamos pela quantidade  $q = 0$  e achamos a última quantidade positiva extraída invertendo a Regra de Hotelling.

está entre o somatório do 6º e 7º últimos períodos ( $28 \in [25,93, 33,61]$ ). E pela **proposição 1** de Lozada (1993)  $T = 6$ . Conhecendo  $T$ , podemos aplicar a **proposição 2**, equação (7), que pode ser reescrita como:  $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 28$  e podemos aplicar a regra de Hotelling a cada  $q$ , e criar o sistema de equações abaixo, segundo Hartwick (2012):

$$\begin{aligned}(1,1)(205 - 13q_0) &= (205 - 13q_1) \\(1,1)(205 - 13q_1) &= (205 - 13q_2) \\(1,1)(205 - 13q_2) &= (205 - 13q_3) \\(1,1)(205 - 13q_3) &= (205 - 13q_4) \\(1,1)(205 - 13q_4) &= (205 - 13q_5) \\q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 &= 28\end{aligned}$$

As cinco primeiras equações deste sistema são a inversão da Regra de Hotelling para a função lucro marginal. Utilizando o software WIMS<sup>18</sup> resolve-se o sistema e acham-se as quantidades ótimas, em ordem cronológica (com duas casas decimais): 7,13; 6,27; 5,32; 4,27; 3,12 e 1,86. A soma das quantidades é 27,97, uma boa aproximação (o método de cálculo e a exclusão de casas decimais afetam a soma). Estas quantidades são todas plausíveis, isto é, cumprem pelo menos a condição de custo marginal  $\leq$  preço. Se esta condição fosse de igualdade ela retornaria  $q = 15$ . Neste caso concluir-se, assim como Gray, que a quantidade a ser extraída é inferior ou igual à quantidade de maximização do lucro instantâneo. Ainda assim não se pode generalizar que isto sempre ocorrerá, apenas que a maximização do lucro intertemporal da mina tem condições diferentes para um máximo do que um problema de maximização convencional.

Integrando a função custo marginal e obtendo a função custo  $C = 6,5q^2 - 5q + 1$ , onde 1 é arbitrariamente adicionado para o custo não ser negativo, fazendo a extração pelo caminho do modelo de Lozada obtemos um valor presente de \$3996,95 para a mina, enquanto que a trajetória de extrair 500 toneladas ao período proposta por Gray, nos mesmo 6 períodos, retornaria um valor presente de \$3937,26, uma boa aproximação, embora os resultados não sejam exatamente comparáveis devido à função custo diferente.

---

<sup>18</sup> Disponível em: <<http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi>>

### 3.2 O MODELO DE HAROLD HOTELLING

A importância do trabalho de Hotelling para a economia dos recursos exauríveis é resumida por Fishcer e Devajaran, em um artigo feito cinquenta anos após a publicação do original *The Economics of Exhaustible Resources* de Harold Hotelling.

Existem poucos campos em economia cujos antecessores podem ser rastreados para um único artigo seminal. Um destes campos é a economia dos recursos naturais, que neste momento está experimentando um explosivo renascimento de interesse; sua origem é amplamente reconhecida como o artigo de 1931 de Harold Hotelling '*The Economics of Exhaustible Resources*'.(DEVAJARAN; FISCHER, 1981, p. 65, tradução nossa).

Neste trabalho esta importância certamente já foi sinalizada com a regra de Hotelling, utilizada na seção anterior. A principal diferença entre o modelo de Gray e Hotelling é o tempo contínuo neste. Assim como Gray, Hotelling estava preocupado com os movimentos de conservação e também com o preço supostamente baixo dos recursos exauríveis em seu tempo, porém diferente de Gray ele assume que o preço varia com o tempo. Além disso, ele avança a teoria com introdução de impostos como forma de retardação da extração. Outro resultado importante é que Hotelling resolve o problema tanto para competição perfeita quanto para o monopólio (HOTELLING, 1991) e também para a função ou bem estar. Uma coisa importante a notar no trabalho é que ele usa o preço líquido (preço de venda menos custo) por unidade extraída de recurso.

Hotelling parte de sua "floresta", apresentada na seção 2.2 e começa seu artigo apresentando o caso para a competição perfeita. O problema é achar melhor caminho de extração, aquele que maximiza o lucro intertemporal. Neste trabalho será modificada a notação original do artigo, para ficar igual às notações anteriores, a taxa de desconto será  $r$  ao invés de  $\gamma$  e  $\exp(-rt)$  ou  $e^{-rt}$  é o fator de desconto intertemporal.  $S$  será o estoque de recursos. A condição de indiferença entre dinheiro hoje e dinheiro amanhã para o caso contínuo é  $p_t = e^{rt}p_0$ . Segundo Hotelling (1991) a quantidade extraída por uma firma  $q = f(t,p)$  em cada período deve satisfazer, para algum  $T$  a restrição física do problema:

$$\int_0^T q = \int_0^T f(t,p)dt = S \quad (8)$$



$$f(T, e^{rt}p_0) = 0$$

### 3.2.1 COMPETIÇÃO PERFEITA

Em competição perfeita a firma toma o preço como dado e extraí recursos de acordo com o modelo apresentado a seguir. A produção em  $t$  não afeta a produção em períodos seguintes. Caso se tratasse de recursos não exauríveis a equação (8) teria um máximo quando  $f$  satisfizesse as condições para lucro máximo em cada período ( $M\Pi_t = MC_t$ ,  $C$  é o custo) e a extração seria eterna. Como no caso discreto isso é impossível. A forma do lucro presente descontado que se deseja maximizar, sujeito à equação (8), segundo Hotelling (1991) é:

$$V(q,t) = \int_0^T p q e^{-rt} dt \quad (9)$$

A função  $f$  é a demanda a cada nível de preço. Não é necessário dar uma forma a  $f$  por enquanto<sup>19</sup> (Hotelling o faz como um exemplo), apenas assume-se que ela é uma função decrescente em  $p$  e depende de  $t$  “[...]de uma forma tão simples que todas equações tenham uma única solução”(HOTELLING, 1991, p. 284, tradução nossa). Ele questiona-se sob que condições  $T$  é finito, algo que depende da própria função  $f$  e do preço. Por exemplo,  $q = e^{-bp}$  teria um  $T$  infinito, mas em geral só é preciso um preço maior no futuro para garantir o retardamento da extração (HOTELLING, 1991). Aqui já pode-se introduzir a regra de Hotelling para o caso contínuo. Seja  $\Pi(t,q) = \Pi$  o lucro em tempo contínuo então a condição de indiferença entre extração presente e futura é dada por:

$$\frac{M\Pi(t,q)}{\Pi(t,q)} = r(10)$$

Obviamente ela é similar à equação (5), mas enquanto que em tempo discreto é possível “contar o tempo”, em tempo contínuo é preciso que a cada instante o lucro marginal renda tanto quanto ou mais que o juro pago pelo investimento em outro ativo. Se isto não fosse cumprido valeria mais esperar o próximo período para extração.

<sup>19</sup> Por simplicidade de exposição optou-se por deixar de expor os exemplos de competição perfeita.

Hotelling também introduz o problema do consumidor (o que Gray não faz), por meio do que ele chama de “Valor Social”. Em competição perfeita este valor é dado Pela equação (2), com algumas alterações para recursos exauríveis. A forma é dada a seguir:

$$V = \int_0^T U(q) e^{-rt} dt (2')$$

Onde Hotelling (1991) define U como:

$$U = \int_0^q p(q) dq$$

Os problemas que Samuelson aponta para o uso desta forma de tratamento para o bem estar da sociedade continuam, porém como por enquanto trata-se apenas do valor da mina, o modelo oferece pelo menos algum parâmetro de análise. O autor prova que o resultado de otimização do valor social é o mesmo da firma em competição perfeita para uma função demanda que ele impôs (HOTELLING, 1991). Isto não quer dizer, que seja o melhor *state of affairs* do ponto de vista ético ou de bem estar, apenas que em competição perfeita as firmas produzem uma situação ótima (onde ninguém melhora sua situação sem piorar a do outro).

### 3.2.2 MONOPÓLIO

O fato de que concorrência perfeita não produzir o melhor resultado possível, pelo menos do ponto de vista da conservação, é ilustrado por fenômenos como a corrida do ouro e a tragédia dos comuns. Os agentes econômicos tendem a extrair mais recursos enquanto tiverem competição, especialmente se a propriedade não for bem definida, e tratam do futuro com menos interesse, fazendo com que o preço caia ao menor nível possível. Monopólios por outro lado tendem a ser retardadores de produção e postergam a extração de recursos mantendo o preço alto. Hotelling (1991) mostra isso usando o fato de que a função que o monopolista deseja maximizar:

$$V(q,t) = \int_0^T p(q) q e^{-rt} dt \quad (11)$$

Onde  $p$  agora depende de  $q$  e sua primeira derivada é pelo menos não positiva. Temos lucro marginal em cada período dado por  $M\Pi = p(q) + qp'(q)$ . É fácil ver que o lucro marginal por quantidade do monopólio é menor que o da firma competitiva, para a qual o termo  $p'(q)$  é zero<sup>20</sup>.

A equação (11) é o valor presente do lucro do monopolista e continua sujeita à equação (8). Se ignorarmos o sinal integral, as condições de máximo do lagrangeano  $p(q)qe^{-rt} - \lambda q$  resultam em um máximo de (11) segundo Hotelling (1991) são dadas por:

$$e^{rt} \frac{d(pq)}{dq} - \lambda = 0$$

$$e^{rt} \frac{d^2(pq)}{dq^2} < 0$$

Estas condições são as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função lucro em cada período em relação a  $q$ . Ao integrar para  $q(\lambda)$  obtido das restrições obtém-se algum  $\lambda(S, T)$  (que depende de  $T$  e do estoque de recursos) e pode-se resolver as equações (11), (8) e suas condições para máximo da forma que for mais conveniente. Outra condição necessária para achar  $T$  é a condição inicial  $q(T) = 0$  (HOTELLING, 1991).

Hotelling procede e faz com que  $V$  dependa também da quantidade  $x$  de recurso extraído anteriormente, algo que não foi usado até agora. Uma observação:  $x$  é a soma de todas as quantidades extraídas (embora não faça sentido o somatório convencional, pois o conjunto tempo não é contável. Assim  $x = \int_0^t q_t dt$  e obviamente a derivada primeira de  $x$  é  $q$ . A expressão para  $V$ , segundo Hotelling (1991) toma a forma:

$$V = \int_0^T p(t, x, x') x' e^{-rt} (12)$$

Foi escrito  $x'$  no lugar de  $q$  para ficar mais explícito que trata-se da derivada de  $x$ . Essa forma, talvez a mais importante do trabalho, é mais complicada de se resolver do

---

<sup>20</sup> Monopólios produzem mais do que firmas individuais, mas o resultado agregado (a quantidade de recursos disponíveis no mercado) é menor.

que a forma (11), necessitando o cálculo de variações. Escrevendo o que está sob o sinal da integral como  $f(x, x', t)$  a equação de Euler- Lagrange para  $V$  deve ser satisfeita para um máximo, e daí que Hotelling usa a seguinte condição de máximo para  $V$ :

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{df}{dx'} = 0 \quad (12)$$

Isto retorna uma equação diferencial de segunda ordem em  $x$  (embora não necessariamente ordinária) e necessita de duas condições de contorno:  $x(0) = 0$  e  $x(T) = S$ . Se a demanda for linear da forma:  $p = \alpha - \beta q - cx + gt$ , onde os coeficientes são positivos, exceto  $g$  que é indefinido<sup>21</sup>, a equação diferencial se reduz à forma linear (HOTELLING, 1991, p. 294):

$$\begin{aligned} 2\beta x'' - 2\beta r x' - crx &= -grt + g - \alpha \quad (13) \\ x(0) &= 0 \\ x(T) &= S \end{aligned}$$

Resolver a equação (13) é relativamente fácil, dada que é apenas uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, com métodos analíticos de resolução conhecidos<sup>22</sup>, desde que se tenha valores para as constantes e pode-se garantir a existência e unicidade de uma solução para a equação diferencial de segunda ordem e algum valor inicial desde que os coeficientes de  $x'$  e  $x$  sejam constantes (BOYCE e DIPRIMA, 2014).

Para o problema do consumidor pode aplica-se a mesma análise, segundo Hotelling (1991, p.298, tradução nossa) “[...]sem mudanças qualitativas.”. Muda-se a equação (11) para:

$$U = \int_0^T u(x, x', t) e^{-rt} \quad (12')$$

<sup>21</sup>g engloba fatores como aumento de população, aumento de concorrência ou aumento tecnológico.

<sup>22</sup> Uma família de respostas para o problema é:  $x(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} + (gr - g + \alpha)/cr$ , onde  $a$  e  $b$  são as raízes da equação característica:  $2\beta K^2 - 2\beta K - cr = 0$  e os  $C$ 's são constantes arbitrárias que dependem das condições iniciais.

(12') é resolvida da mesma forma que (12), embora não necessariamente tenha a mesma resposta.

### 3.3. UM COMENTÁRIO DO QUE FOI VISTO ATÉ AQUI

Até aqui neste capítulo foi tratado do problema dos recursos exauríveis como uma extensão da teoria microeconômica do desconto temporal. Embora a utilidade que Hotelling usa seja o valor para toda a sociedade, a advertência de Samuelson (ver capítulo 2 seção 1) deve valer também para recursos exauríveis. Alguns fatos inerentes aos recursos exauríveis podem ser contrários exatamente a essa ideia de encarar o problema simplesmente descontando o futuro. Por exemplo, se a sociedade é muito “egoísta” com o futuro, qualquer valor social presente pode não refletir a tomada de decisão preferida futura, e aí teríamos o problema de inconsistência intertemporal e maximizar o valor presente dos recursos exauríveis não seria a melhor estratégia. Outra razão para retardar ou apreçar a extração de recursos exauríveis, que não foi abordada em nenhum modelo até aqui é o aumento tecnológico futuro, que pode tornar atraente extração presente acelerada (por motivos que ficarão claros a seguir).

Além disso, como ilustra o trabalho de Lívio Luís Soares de Oliveira (OLIVEIRA, 2004) quando se trata de recursos naturais, incluindo recursos exauríveis, as soluções dos problemas<sup>23</sup> são multidisciplinares e levam em conta não só fatores econômicos, mas também biológicos, fatores de sustentabilidade, políticos e outras áreas da economia. Portanto, para a economia dos recursos exauríveis (e naturais) qualquer resposta deve levar em conta muitos fatores além do simples problema de maximização que a ciência econômica propõe, este último continua sendo importante, mas uma miríade de outros fatores devem ser incluídos. Isto quer dizer que embora os modelos apresentados a seguir, assim como os apresentados anteriormente, sejam ótimas ferramentas de análise eles não são de forma alguma a resposta definitiva para o problema dos recursos exauríveis e da continuação e, acredito que todos desejem, do melhoramento da vida no planeta Terra.

---

<sup>23</sup> Neste caso o autor trata do meio ambiente como um todo.

### 3.4. MODELOS COM CRESCIMENTO ECONÔMICO

É razoável assumir que a economia de algum lugar não é estática durante o tempo e que ela se transforma por várias razões, como novas tecnologias (invenção de uma tecnologia ou aplicação de uma existente, mas não utilizada até então), mudança de gostos intrageração ou intergerações, aumento populacional e aumento da quantidade de capital disponível. Em relação aos recursos exauríveis, os modelos utilizados até aqui eram rígidos neste sentido: os gostos permaneciam os mesmos e a tecnologia era dada e a quantidade de capital também. Isso significa que em qualquer momento do tempo o valor da mina era obtido da mesma forma que anteriormente e o resultado era constante no sentido de não ser possível nenhum outro caminho de extração que rendesse melhores resultados. É claro que sob esta ótica gerações futuras prefeririam que seus antepassados não extraíssem nada a fim de obterem todo valor da mina para si próprios. Os habitantes do presente também não teriam muitos motivos para serem mais cautelosos, inclusive por que já que as coisas vão acabar cedo ou tarde, talvez seja melhor aproveitar tudo “de uma vez”. Isto obviamente é um problema ético do quanto às gerações presentes se importam com as futuras.

O mundo real por outro lado é muito mais caótico. A tecnologia muda, em alguns casos com velocidade muito grande, como, por exemplo, computadores e a lei de Moore, fundador da Intel, que diz que “[...] o número de transistores em um chip dobra, aproximadamente, a cada dois anos” (INTEL, 2015, p.1, tradução nossa). Se utilizarmos um transistor como uma medida de velocidade de processamento então temos uma relação exponencial ( $2^t$ ), um t são dois anos, de como os computadores ficam mais rápidos, supondo que permaneçam do mesmo tamanho. Não obstante eles ficaram mais baratos. Antes apenas grandes corporações, como o exército norte americano, podiam bancar os investimentos necessários para obter um computador. Nos dias atuais carregamos computadores (*smartphones*) no bolso e é raro encontrar alguém que não utilize um computador. Um exemplo para recursos exauríveis são as máquinas utilizadas para mineração contam com melhores tecnologias, maiores tamanhos, etc. para maior produtividade em uma mina.

No caso dos recursos exauríveis uma razão é muito clara para a necessidade de implantação de novas tecnologias<sup>24</sup>: quanto mais próximos de seu esgotamento mais gostaríamos de extrair sem perdas os recursos. O trabalho de Hotelling (1991) assume um preço crescente para os recursos, entre outros motivos por que é plausível que quanto mais fundo na mina mais caro fica extrair um mineral, então será necessário um preço maior para cobrir os custos. O termo  $x$  (estoque já extraído) na equação (12) neste caso pode entrar diminuindo o lucro quando ele aumenta.

Em 1956 o prêmio Nobel em economia Robert Solow formulou a teoria neoclássica do crescimento econômico em um artigo intitulado *A contribution to the Theory of Economic Growth* (JONES, 2000). Em síntese o nível de riqueza de uma nação é devido ao seu estoque de capital. Em 1974 ele, Solow, formula o problema do crescimento introduzindo ao seu modelo recursos exauríveis (SOLOW, 1974b). O que tenta-se resolver é como o crescimento econômico afeta a economia dos recursos exauríveis e o qual o “caminho ótimo” a se tomar quando formos extraí-los e o que desejamos deixar para as próximas gerações. Além disso, o critério de bem estar que Solow utiliza remove o problema de inconsistência intertemporal na tomada de decisões.

### 3.4.1 O MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW

Antes de entrar para o modelo de recursos exauríveis se apresentará o modelo de Solow clássico. Neste trabalho define-se crescimento<sup>25</sup> como aumento de produto por trabalhador, para uma tecnologia dada, e quer-se encontrar o nível ótimo de capital por trabalhador (i.e. o que retorna o maior produto por trabalhador mantendo a economia em equilíbrio<sup>26</sup>). Primeiro considera-se a tecnologia constante e depois se permite que ela mude com o tempo. Solow (SOLOW, 1956) começa em seu trabalho definindo uma função  $Y$  em cada período, o produto<sup>27</sup>, como:

---

<sup>24</sup> E claro, ao implantar novas tecnologias ampliamos o estoque de capital.

<sup>25</sup> Isto é, crescimento que aumenta bem estar.

<sup>26</sup> Podemos chamar isto de crescimento sustentável e supomos que não existem distorções de mercado, inflação e os mercados estão em equilíbrio a cada instante, ou seja, a economia segue um padrão walrasiano de otimização em cada período. Entre períodos distintos relaxa-se a hipótese de circularidade de Walras e temos uma economia dinâmica.

<sup>27</sup>Entende-se a produção global de uma economia.

$$Y(t) = f(K_t, L_t) \quad (14)$$

Onde  $Y(t)$  é uma função da quantidade de trabalho ( $L$ ) e da quantidade de capital ( $K$ ) empregados por uma economia. Ela é uma função homogênea de grau um e não existe escassez de nenhum recurso, e portanto, apresenta (a) retornos constantes à escala, desde que se aumente todos os fatores na mesma proporção, (b) não há escassez de nenhum recurso já que: “O caso da terra escassa levaria a retornos decrescentes em capital e trabalho e o modelo ficaria mais ricardiano.” (SOLOW, 1956, p. 67, tradução nossa), poderíamos entender isso como no caso de toda a terra produtiva no sentido de Ricardo ser utilizada ela não seria mais uma variável. Também deseja-se (c) que ela tenha retornos decrescentes (derivada segunda negativa) para cada insumo. Uma coisa importante a se perguntar é se existe uma proporção fixa entre capital e trabalho necessária para cada unidade de produto, seguindo o modelo de Harrod-Domar ou se é possível substituir capital por trabalho de alguma forma (SOLOW, 1956).

A quantidade de trabalho disponível, que podemos tomar como a população, ou uma proporção dela, se comporta por uma regra bem definida de aumento no tempo (i.e. crescimento populacional) dado por  $L_0 e^{nt}$ , o crescimento natural de Harrod (SOLOW, 1956), onde  $L_0$  é a população em  $t = 0$  e  $n$  é a taxa de crescimento populacional. Já a quantidade de capital e seu nível ótimo, que é o que o modelo quer encontrar, segue a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dK}{dt} = sY(K, L_0 e^{nt}) - cK \quad (15)$$

Onde  $s$ , constante, é a taxa de poupança da economia e  $c$ <sup>28</sup>, também constante, é a depreciação do capital já existente. A equação (15) parte da identidade clássica Investimento = Poupança, sendo que (15) é o aumento líquido do estoque capital. Se  $c$  for idêntico a zero então a taxa de investimento é igual ao aumento de capital. Supõe-se que os mercados de trabalho e de capitais estão em equilíbrio, então valem todos os resultados microeconômicos para um máximo.

Se a população cresce de acordo com a taxa natural de Harrod então temos que:  $Y = Y(K, L_0 e^{nt})$ . Por simplicidade e um melhor entendimento do mecanismo de crescimento

---

<sup>28</sup> No artigo de Solow (SOLOW, 1956) utiliza-se a letra  $\delta$ , mas optou-se por utilizar  $c$  para não criar dúvida com a notação de derivada ( $d/dt$ ).



podemos assumir que  $n = 0$  e a população não cresce e, além disso, dizemos que  $L$  é a unidade. Podemos também tomar o capital por trabalhador e dividir a equação (15) por  $L$  e temos que  $k$  o capital por trabalhador e  $y$  o produto por trabalhador é dado pela equação diferencial:

$$\frac{dk}{dt} = sy(k, 1) - ck \quad (16)$$

Não é possível resolver (16) sem conhecer  $y$ . Geralmente utiliza-se uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, mas isto não é necessário ao modelo, pois Solow não utiliza um formato para estabelecer a teoria (SOLOW, 1956). É, contudo, possível achar uma resposta qualitativa para onde será a quantidade de capital de equilíbrio. Uma forma de fazer isto é com o diagrama de Solow, como em Jones e Solow (JONES, 2000; SOLOW, 1956). O resultado obtido com o diagrama de Solow e o estudo qualitativo da equação diferencial (16) é: o capital por trabalhador de equilíbrio é aquele que torna  $sy$  igual a  $ck$  ( $sY = cK$ ). O raciocínio por trás disso é que esta igualdade implica que o investimento líquido (usado para aumentar o estoque de capital) é zero, e se mantém zero enquanto permanecer em equilíbrio. Como sabemos de (c) que a  $y$  é côncava, então ela corta a reta  $ck$  em um único ponto além de zero (teorema do valor médio garante a unicidade e existência) e este ponto é o ponto de equilíbrio. Zero por sua vez não é um resultado factível (não existe economia sem nenhum capital) então podemos desconsiderá-lo como ponto de equilíbrio, embora  $y = 0$  e  $k = 0$  sejam obviamente soluções.

Se relaxássemos a hipótese (c) e permitíssemos o produto assumir concavidades diferentes em seu domínio então talvez houvesse mais de um ponto de equilíbrio de capital por trabalhador, como ilustra Solow (SOLOW, 1956). Também é possível não haver equilíbrio nenhum e o produto ser potencialmente infinito, caso  $sy$  nunca seja cortada por  $ck$ .

Ainda sem resolver a equação diferencial (16) podemos tirar outras conclusões sobre o ponto de equilíbrio. Poderíamos supor que a economia possui um estoque de capital tão grande, em um caso de sobre investimento, tal que  $sy < dk$ , e a poupança não cobriria a depreciação. Neste caso seria inviável, sem alterar alguma coisa no modelo, que a economia mantivesse este estoque de capital por tempo indeterminado. A poupança insuficiente levaria a economia de volta ao ponto de equilíbrio, destruindo

capital excedente no processo. Se houvesse um estoque de capital inferior ao de equilíbrio, em um caso de sub investimento, investimentos em capital renderiam mais do que sua depreciação e a economia tenderia a aumentar o estoque de capital (JONES, 2000). O caso do sobre investimento é especialmente importante se houvessem recursos exauríveis na economia. Embora o modelo clássico de Solow não os leve em conta, uma pergunta importante mais tarde, nos trabalhos de Solow, Heal e Dagspupta (DAGSPUPTA; HEAL, 1974; SOLOW, 1974b), similar ao caso de sobre investimento é: o que acontece quando um recurso exaurível se esgota. Por exemplo, se acabassem todos os estoques de ferro e seus substitutos no Planeta Terra então a economia global se manteria em um estado estacionário ou estaria fadada ao declínio e a penúria. Ou se os recursos exauríveis tiverem os estoques se aproximando de zero, mas compensados de alguma forma, por exemplo, avanço tecnológico.

Definindo de uma forma simples, tecnologia é a forma como o ser humano satisfaz suas necessidades e supomos que ela eventualmente mude. Esta é uma definição muito vaga para tecnologia, mas é conveniente. Pelo modelo de crescimento de Solow, aumento do produto pode ser causado por aumento do estoque de capital ou de horas trabalhadas. Jones (2000) argumenta que fazendo testes empíricos que separam o crescimento econômico por estes fatores obtém-se um resíduo, a “medida da nossa ignorância”, que causa crescimento. Uma simplificação que será feita é chamar este resíduo de tecnologia.

Estudar os efeitos do avanço tecnológico na economia é um trabalho por si só (e provavelmente maior que o estudo econômico dos recursos exauríveis, mas o efeito que procuramos, o aumento de produto que não é explicado por mais capital ou trabalho, é suficientemente direto para ser modelado. Segundo Solow: “Um tipo especialmente fácil de mudança tecnológica é a aquele que simplesmente multiplica a função produção por um fator de escala crescente” (SOLOW, 1956, p. 85, tradução nossa). A equação (14) se transforma em:

$$Y(t) = A(t)f(K_t, L_t) \quad (14')$$

Este  $A(t)$  é o fator de crescimento tecnológico neutro, ilimitado, e depende apenas do tempo. Por exemplo, uma função da forma  $At$ , onde  $A$  é uma constante, é um fator de crescimento tecnológico, que aumenta em  $A$  vezes o produto autonomamente a

cada instante. Para qualquer função tecnologia a forma como o estoque de capital será afetado, segundo a equação (15) e (16):

$$\frac{dK}{dt} = sA(Y(K, L_0 e^{nt}) - cK \quad (15')$$

$$\frac{dk}{dt} = sA(t)y(k, 1) - ck \quad (16')$$

O resultado principal de equilíbrio de Solow já não é mais válido. A cada instante, após o alcance do ponto de equilíbrio e os agentes maximizarem suas utilidades e pouparem  $s$ , no instante seguinte o produto será maior por causa de  $A(t)$  e mesmo que a taxa de poupança se mantenha igual, haverá mais poupança total e um aumento líquido de capital.

Por fim poderíamos fazer a população trabalhadora variar de alguma forma durante o tempo, a uma taxa a qualquer, mas o resultado não é muito diferente. A única mudança em (16) é que além da depreciação a cada momento será necessário investimento para equipar novos integrantes e o termo se torna  $-(a + c)k$  (JONES, 2000).

### 3.4.2 O MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW COM RECURSOS EXAURÍVEIS

Solow desenvolve seu modelo de crescimento no artigo de 1974 intitulado *Intergenerational Equity and Exhaustible Resources* onde ele parte de premissas parecidas com seu modelo apresentado na seção anterior, mas é diferente em um sentido fundamental. No artigo de 1974 Solow está preocupado com o bem estar das pessoas. Enquanto o modelo de 1956 descreve bem o crescimento, não podemos tirar nenhuma conclusão sobre o bem estar, além do suposto “produto maior gera mais bem estar”. Solow (1974b) precisa de uma medida de bem estar e ele faz isso com o critério de John Rawls, o qual ele formaliza matematicamente. O critério é: seja  $W$  a função de bem estar social e  $U_i$  a utilidade do indivíduo  $i$ , então o estado de bem estar social, para  $n$  indivíduos é:  $W = \min(U_1, \dots, U_n)$ . Maximizar  $W$  é, portanto maximizar a utilidade do indivíduo com a menor utilidade. Curiosamente este princípio de maximização de bem

estar social é descartado por Rawls<sup>29</sup> (1971 apud SOLOW, 1974b) no caso de equidade intergerações, já que o efeito das escolhas é unidirecional, sempre do passado para o futuro e as escolhas de gerações futuras não afetam gerações presentes. A pergunta que fica é quem deverá pagar, em termos de consumo, a poupança necessária para o produto crescer e de onde tirar o estoque inicial de capital.

Como exercício podemos aplicar o critério de Rawls para maximizar o bem estar intergerações. Seja  $U_{ki}$  a menor utilidade da  $i$ -ésima geração então a função de bem estar social de  $m$  gerações é  $W = \min(U_{k1}, \dots, U_{km})$ , que é um máximo apenas se as utilidades são constantes. Se dissermos que  $U = U(C)$ , onde  $C$  é o consumo agregado, temos que ter um consumo constante através do tempo para satisfazer a condição de máximo para  $W$  (SOLOW, 1974b). Em uma nota de rodapé<sup>30</sup> Solow elabora uma formula utilitarista<sup>31</sup> que descreva o critério de Rawls e conclui que este critério implica um desconto intertemporal zero e, portanto por razões éticas o futuro tem o mesmo valor do presente sem nenhum desconto. É claro que como podemos assumir que isto não foi feito até agora e que temos um estoque de capital formado por investimento passado<sup>32</sup> e aplicaremos o critério a partir de agora, o que soluciona o problema de Rawls da equidade intergerações, embora pareça exigir um grande nível de altruísmo de gerações futuras (e elas não tem como dar opinião!).

Solow(1974b) procede e monta um modelo, em suas palavras, "*Plus Rawls que le Rawls*"<sup>33</sup> de crescimento econômico. Falaremos do modelo sem recursos naturais mas não o desenvolveremos. Ele continua com as mesmas suposições do modelo clássico que foi apresentado anteriormente. O produto pode ser dividido, na ausência de governo para propósitos de simplificação, em consumo e investimento e temos que  $Y = C + dK/dt$ . Como  $Y$  cresce somente devido a  $K$  (a população é constante) então um consumo constante implica investimento líquido zero. O autor procede e relaxa a hipótese de população constante, e o resultado é que o investimento líquido deve ser igual ao crescimento da força de trabalho. O caso curioso é quando existe aumento tecnológico. De um jeito informal tomarmos a equação (14') vemos que ela é igual a  $A(t)(14)$ . Então o produto com crescimento tecnológico é  $A(t)Y = C + dK/dt$ , e logo, se quiséssemos manter constante  $C$  ao longo do tempo precisaríamos de que o estoque de capital fosse

<sup>29</sup> Rawls, J. A Theory of Justice (Harvard University Press, Cambridge, 1991).

<sup>30</sup> Ver nota 4 pág. 29 da referência (SOLOW, 1974b).

<sup>31</sup> Uma forma utilitarista é aquela que o bem estar total é uma soma de bem estares individuais.

<sup>32</sup> E nosso consumo é maior que de nossos antepassados.

<sup>33</sup> Mais Rawls do que o Rawls.

diminuído a uma taxa que diminuiria o produto à mesma taxa que ele aumenta devido ao aumento da tecnologia. Nas palavras dele: “[...] quando a sociedade consome constantemente no maior nível possível por pessoa ela assintoticamente consome todo seu estoque de capital” (SOLOW, 1974b, p. 33, tradução nossa).

Este último resultado parece um tanto dramático, mas ele não é completamente inconsistente com o mundo real se introduzirmos recursos exauríveis ao modelo, especialmente se o capital reproduzível precisar de recursos exauríveis em sua fabricação. De fato o critério de Rawls não parece interessante se a economia tivesse recursos perpétuos, mas na presença de recursos exauríveis esta hipótese é removida, por definição e o critério é mais plausível, pois pode existir algum nível de consumo constante per capita possível perpetuamente<sup>34</sup>. Consumir mais que este nível ocasionaria na exaustão total dos recursos e consumir menos não faria sentido para indivíduos racionais. Solow (1974b) introduz o produto com recursos exauríveis  $Y(K,L,R)$ , onde  $R$  é o recurso exaurível homogêneo<sup>35</sup> do qual sabe-se tudo (i.e. estoques, características físicas etc). Primeiro devemos nos perguntar como os recursos exauríveis entram no produto. Se eles forem necessários, dizemos que são recursos essenciais (DAGSPUPTA; HEAL, 1974), caso contrário não teríamos problemas e tudo se tornaria questão de substituição de um recurso por outro. Se for aceito que eles são essenciais então temos que ter uma função tal que  $Y(K,L,0) = 0$ . Como queremos estudar explicitamente recursos exauríveis damos uma forma a  $Y$ , seguindo Solow, a tradicional Cobb-Douglas:

$$Y = e^{mgt} L^g R^h K^{1-g-h} \quad (17)$$

Onde  $g$  e  $h$  pertencem ao intervalo  $[0,1]$ . O termo  $e^{mgt}$  é o avanço tecnológico Hicks-Neuro e  $m$  a taxa de aumento da produtividade do trabalho. Podemos entender  $m$  também como taxa de crescimento tecnológico. Nota-se imediatamente que em (17)  $R$  é essencial. Por simplicidade continuaremos com um crescimento populacional nulo e  $L$  idêntico à unidade pelo resto da apresentação. Fazemos  $k = K/e^{mt}$  o capital por trabalhador e  $z = R/e^{mt}$  a quantidade de recursos exauríveis por trabalhador utilizadas no produto. Como  $m$  é a produtividade do trabalho a exponencial entra dividindo

<sup>34</sup> Um fato curioso: não consumir nada é factível com isso, então de fato existe pelo menos um nível de consumo que satisfaça o critério de poder ser mantido eternamente. Solow busca um nível diferente de zero.

<sup>35</sup> Assim como capital englobamos todos os recursos exauríveis em um única variável.

também. Segundo Solow (1974b) a equação diferencial que rege o acúmulo de capital é<sup>36</sup>:

$$\frac{dk}{dt} = k^{1-h}z^h - mk - Ce^{-mt} \quad (18)$$

Esta equação é igual a (16') com a diferença de não existir depreciação (tomamos o aumento líquido de capital) e a presença de recursos exauríveis. É claro que  $k^{1-h}z^h - Ce^{-mt}$  é a poupança agregada da economia, antes denotada por  $sy$ . Ainda possuímos a hipótese de que  $K(0) = K_0$  e que  $C$  é uma constante  $C_0$  através do tempo e segundo Solow (SOLOW, 1974b) formalmente  $C_0$  é o consumo máximo capaz de satisfazer:

$$\int_0^{\infty} z(t)e^{-mt} dt \leq S \quad (19)$$

Onde  $S$  é o estoque total de recursos exauríveis existente. Temos que ter um  $z(t)$  e  $C_0$  que tornem  $k$  não negativo em cada instante, justificado, pelas palavras do autor:

Isto é para dizer que nos precisamos achar o maior consumo constante per capita que pode ser mantido para sempre, levando em conta a finitude dos recursos exauríveis e o fato de que não podemos consumir capital que não existe. (SOLOW, 1974b, p. 35, tradução nossa)

Um jeito que Solow nos dá para resolver (19) sem suposições adicionais é “chutar” um valor para  $C_0$  e minimizar (19) sujeita a (18). Se o mínimo for maior que  $S$  então o consumo é grande demais e precisa ser menor. Se for menor então ele é muito pequeno e pode ser aumentado (SOLOW, 1974b). As condições para o mínimo que devem ser satisfeitas serão omitidas, porém seu significado é: “[...] em um caminho ótimo [de extração] a taxa proporcional de mudança da produtividade marginal do recurso deve sempre igualar o nível de produtividade do capital reproduzível” (SOLOW, 1974b, p. 35, tradução nossa). Em outras palavras, como recursos exauríveis podem ser compensados por capital comum na função do produto então em um caminho ótimo vai

---

<sup>36</sup> Ao contrario de Solow fazemos  $n$ , a taxa de crescimento populacional, ser zero. Além disso como a população é constante e igual a um,  $C$  já é o consumo per capita. Isto evitará confusões de notação com outros modelos apresentados.

se trocando recursos por capital e enquanto os recursos são extraídos assintoticamente a taxas nulas e o estoque de capital aumenta ilimitadamente, pois  $\lim_{R \rightarrow 0} dY/dR = \infty$  e logo é necessário muito capital para compensar a perda. Ainda segundo Solow, se houver progresso tecnológico ilimitado, que é o caso para  $e^{mt}$  e crescimento populacional nulo, então  $C_0 e^{mt}$  é também um caminho de consumo ótimo, embora não satisfaça o critério de Rawls.

Solow conclui seu trabalho notando que: O critério de Rawls é adequado para o caso de recursos exauríveis se objetivamos manter o maior número de gerações possível em uma “boa situação” (basta lembrar que apenas um número finito de gerações pode consumir mais que  $C_0$  antes que se esgote o estoque), embora não seja capaz de nos dizer da onde saiu o capital inicial necessário para garantir um  $C_0$  “decente”. Além disso, é necessário que se possa produzir capital sem recursos exauríveis. (SOLOW, 1974b)

Um palpite mais conservador seria que, exceto na ausência de tecnologia ilimitada, é provável que esgotemos os recursos, cedo ou tarde, independente de qualquer nível de consumo. Mesmo que isso não fosse verdade, como o próprio Solow menciona em outro artigo (SOLOW, 1974a) eventualmente a terra vai acabar (junto com o sol) e horizontes infinitos são, por definição, impossíveis. O caso da tecnologia supostamente ilimitada também é perigoso. Poderíamos considerar que ela fosse, e se esta suposição estiver errada, apenas teremos apressado o fim de nossas vidas confortáveis. Do trabalho de Solow ficamos com a conclusão “gerações anteriores tem o direito de diminuir os estoques de recursos (de forma ótima, é claro!) desde que eles (de forma ótima, é claro) aumentem o estoque de capital reproduzível” (SOLOW, 1974b, p. 41, tradução nossa).

Esta última frase é completada pelo que se chama de regra de Hartwick que segundo Oliveira (2004, p. 24): “[...] permite a manutenção, em níveis constantes, do consumo per capita, desde que os lucros obtidos com a utilização de recursos naturais [exauríveis] sejam investidos em capital material”. Segundo o próprio Hartwick (1978, p. 347, tradução nossa) “[...] foi mostrado que implícita no modelo de equidade intergerações e recursos exauríveis de Solow [10]<sup>37</sup> estava a regra de [...] [Hartwick]”. Dita de forma informal a regra de Hartwick requer que para o uso de recursos exauríveis

---

<sup>37</sup>Solow, R. M. "Intergenerational Equity and Exhaustible Resources ", Review of Economic Studies (Symposium, 1974), 29-46.

seja um uso ótimo, deve-se investir o lucro obtido por ele em capital reproduzível (OLIVEIRA, 2004).

O modelo de Hartwick (1977) não pressupõe uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, mas resolve para este caso. O caso geral necessita uma função produção (que ele chama de tecnologia,  $y = f(k,z,1)$ ) onde os insumos entram em termos per capita. Mantemos que  $L = 1$ , constante e a notação do presente trabalho ( $z$  para o recurso exaurível,  $k$  para capital reproduzível,  $y$  para produto,  $C$  para consumo,  $s$  para poupança). Novamente temos  $R$  um recurso exaurível com as características do modelo de Solow. Ainda temos que  $y(t) = 0$ , se algum insumo for zero e, portanto, os insumos são todos essenciais. Ele assume que  $df/dk$  e  $df/dz$  são positivas sempre mas com derivadas negativas (retornos decrescentes à escala). A identidade contábil implica que o produto pode sempre ser dividido entre consumo, investimento e custo de extração dos recursos:  $y = C(t) + k' + az$ , onde  $az$  é o custo fixo por unidade de recurso. A função de investimento da economia (HARTWICK, 1977) é:

$$\frac{dk}{dt} = \left(\frac{dy}{dz} - a\right)y(t) \quad (20)$$

A equação (20) descreve o fato de que:

Eficiência na extração de recursos exauríveis requer que a taxa de retorno por unidade de capital reproduzível iguale a taxa de retorno em possuir uma unidade em depósito de recurso exaurível. Em termo de preço, esta condição é caracterizada pelo ganho corrente de um depósito mineral ser igual à taxa de juros, ou a taxa de retorno do capital reprodutivo. Isto é às vezes referido como a regra de Hotelling. Ela caracteriza a exploração eficiente de recursos exauríveis. (HARTWICK, 1977, p. 973, tradução nossa).

As equações abaixo, segundo Hartwick (1977, p. 973, tradução nossa) “[...]definem a dinâmica da economia.”<sup>38</sup>:

$$\frac{d \log(f_z - a)}{dt} = \frac{df}{dk} \quad (21)$$

Ou

$$f_{zz} \frac{dz}{dt} + f_{zk} \frac{dk}{dt} = f_k (f_y - a) \quad (21')$$

<sup>38</sup> Mantemos a notação original  $f_i = df/di$   $i = (k,z)$ ,  $f_{ii} = d^2f/di^2$ .



As equações (21) e (21') precisam que as condições iniciais  $k(0)$  e  $z(0)$  sejam escolhidas de forma a tornar o estoque total do recurso  $S$  suficiente para manter a produção por um período infinito de tempo. Este  $S$  é finito e  $dS/dt = -z$  (HARTWICK, 1997). Escreve-se a variação do produto como:

$$\frac{dy}{dt} = f_z \frac{dz}{dt} + f_k \frac{dk}{dt} \quad (22)$$

No caso da função de produção Cobb - Douglas (omitindo  $L = 1$ ) temos que  $y = f = k^\alpha z^\beta$  com  $\alpha + \beta = 1$ . (21') se transforma em:

$$\beta \left[ f_z \frac{dz}{dt} + f_k (f_z - a) z \right] = f_z \frac{dz}{dt} + f_k (f_z - a) z \quad (23)$$

Como  $\beta$  é diferente de zero isto só é verdade se o lado direito de (23) é igual a zero e de (22) e (20) temos que a variação do produto é zero, que é o critério de Solow para equidade intergerações. O termo direito de (21') é o retorno dos recursos exauríveis e como  $dz/dt$  é sempre negativo, enquanto  $f_z$  é positivo,  $f_z - a$  é o lucro por unidade de recurso exaurível, então o investimento em capital  $f_k$  tem que ser grande o suficiente para compensar a perda no estoque  $S$ . Nas palavras do autor:

[...] nós estabelecemos que a regra de investimento de poupança [regra de Hartwick] (investir todo lucro líquido dos recursos exauríveis em capital reproduzível) implica em equidade intergerações (HARTWICK, 1977, p. 973-974, tradução nossa)

### 3.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 3

Os modelos apresentados nesta seção são diferentes, mas não necessariamente excludentes, visto que tratam de assuntos um pouco diferentes. Do lado dos proprietários de recursos, eles provavelmente aplicariam modelos de maximização de lucro, de Gray e Hotelling (ao invés de tomar para si a carga da sociedade). Por outro lado um gestor público e seus eleitores provavelmente iriam optar por pelo menos

manter seu consumo através do tempo, como nos modelos de Solow e Hartwick. Isto aparentemente põe a vontade de uns contra a vontade dos outros e gera debates sobre leis de propriedade, externalidades e etc., como já reconhecia Gray (1913) quando falava dos movimentos de conservação e sua busca por propriedade pública de recursos exauríveis. Esta discussão também é abordada por Hotelling (1991) e sua conclusão de que monopólios são mais eficientes para recursos exauríveis do que concorrência perfeita por que exaurem os recursos mais lentamente. Porém certamente a discussão de propriedade dos recursos exauríveis é muito mais ampla e não será tratada neste trabalho. O que podemos fazer, à luz do que os modelos nos dizem é avaliar as políticas sobre recursos exauríveis.

## 4 POLÍTICAS COM RECURSOS EXAURÍVEIS

O presente capítulo apresenta algumas constatações sobre recursos exauríveis e como eles são geridos pelo mundo. Em primeiro lugar poderíamos nos perguntar como dois fenômenos, o surgimento de substitutos e variações na taxa de juros afetam recursos exauríveis. O surgimento de recursos substitutos pode ser de dois tipos: novas fontes de recursos ou novos recursos. No caso de novas fontes Solow nos dá uma descrição do movimento de substituição, começando por uma fonte mais barata e passando para uma mais cara:

A história acontece dessa forma. Primeiro uma fonte opera e supre todo o mercado. Seu preço líquido aumenta exponencialmente e o preço de mercado se move de acordo. Em um certo momento, a primeira fonte é esgotada. Apenas neste momento, e não antes, fica economicamente possível a segunda fonte entrar em produção. Dali em diante o mundo se encontra na situação de uma única fonte: o preço líquido calculado com custos de extração correntes deve aumentar exponencialmente até que toda produção seja estrangulada e a segunda fonte é esgotada. (Se existirem muitos recursos você pode ver como vai funcionar) (SOLOW, 1974b, p.4, tradução nossa)

Uma discussão mais profunda (e formal) pode ser encontrada em Hartwick (1978), onde o autor prova que o  $C_0$  de Solow existe com múltiplos recursos. O surgimento de novos recursos por outro lado é bem mais complexo e depende de nossa “sorte” em descobri-los. O artigo de Dagsupta e Heal (1974) elabora um modelo econômico com recursos exauríveis, bastante mais complicado que o de Solow, onde eles, entre outras coisas, podem aleatoriamente ser substituídos por novas tecnologias. Não abordaremos o modelo, mas é um exemplo de como as coisas ficam mais complexas, especialmente se sairmos do mundo das certezas.

Por outro lado, a taxa de juros da economia e seus efeitos na extração de recursos é bem mais direta. Ela é explícita nos modelos de Gray e Hotelling e seu uso implícito nos modelos de Solow e Hartwick<sup>39</sup>. É fácil ver pela equação (1) ou (4) que quanto mais for a taxa  $r$ , menor vai ser o valor presente de recursos extraídos no futuro e daí que valerá mais a pena extrair antes do que depois. Este último resultado é comum, mas nem sempre válido, como demonstra Farzin (1984), que une os efeitos da taxa de juros com o

---

<sup>39</sup> Um limite inferior para a taxa de juros é a taxa marginal de produtividade do capital, que é pertinente aos dois modelos.

da substituição por novos recursos, e concluí que taxas mais baixa podem induzir investimento nestes novos recursos e tornar atrativo, devido à concorrência futura, extrair recursos exauríveis no presente, tornando uma taxa de juros baixa em indutora de extração.

O governo pode atuar nas duas áreas acima de diversas maneiras (com regulação, leis etc). As maneiras mais diretas são: manter uma taxa de juros adequada, que alias, é importante para o resto da economia, e também promover de alguma forma o avanço tecnológico. Como a definição de avanço tecnológico que utilizamos é vaga, podemos incluir educação em sua constituição. Podemos supor que pessoas que se tornam mais educadas com o passar do tempo ficam mais produtivas com o passar do tempo, independente do nível de produto e, portanto a educação entra na função  $A(t)$  do avanço tecnológico. Embora não seja substituição de recursos, a educação tem um efeito de equilibrar a exaustão com mais produtividade.

Um exemplo da substituição de recursos exauríveis por educação pode ser encontrado no Brasil. A Lei 12.858 de 9 de Setembro de 2013 direciona os royalties obtidos pelo governo pela exploração de petróleo para a saúde e educação. Em especial os royalties provenientes da exploração do Pré Sal são aplicados integralmente em educação, como diz o Art. 2º da lei:

Art. 2º Para fins de cumprimento da meta prevista no inciso VI do caput do art. 214 e no art. 196 da Constituição Federal, serão destinados exclusivamente para a educação pública, com prioridade para a educação básica, e para a saúde, na forma do regulamento, os seguintes recursos:

I - as receitas dos órgãos da administração direta da União provenientes dos royalties e da participação especial decorrentes de áreas cuja declaração de comercialidade tenha ocorrido a partir de 3 de dezembro de 2012, relativas a contratos celebrados sob os regimes de concessão, de cessão onerosa e de partilha de produção, de que tratam respectivamente as Leis nºs 9.478, de 6 de agosto de 1997, 12.276, de 30 de junho de 2010, e 12.351, de 22 de dezembro de 2010, quando a lavra ocorrer na plataforma continental, no mar territorial ou na zona econômica exclusiva; (BRASIL, 2013)

A Lei 12.351, de 22 de dezembro de 2010, citada na lei anterior é que define o Pré Sal. Não precisamos ir longe e dizer que esta lei foi feita pensando na substituição de recursos, mas ela tem esse efeito, mesmo que seja uma decorrência imprevista. Educação não é o único exemplo no mundo real de tentar equilibrar a perda de renda dos recursos exauríveis. Os modelos com crescimento requerem que parte do produto, e talvez todo o excedente econômico, sempre deva ser investida em capital para contrabalancear a exaustão dos recursos e, portanto as políticas devem ser avaliadas em sua capacidade de alcançar este objetivo. Na seção seguinte apresentaremos um exemplo de política com recursos exauríveis que segue esta linha.

#### 4.1 FUNDOS SOBERANOS

Até aqui neste trabalho consideramos apenas o equilíbrio parcial no mercado de recursos exauríveis. Uma dúvida é como eles influenciam a economia. Nesta seção apresentamos um exemplo de política com recursos exauríveis, que é diretamente ligada ao efeito que sua existência causa na economia como um todo.

Segundo o site Investopédia (2015) fundos soberanos são parte das reservas de uma nação reservadas para investimento. Por reserva pode-se considerar moeda de outro país que é acumulada através do comércio, e para alguns países, como Noruega e Emirados Árabes Unidos (sigla do inglês UAE) isso significa em grande parte exportação de petróleo. Segundo o Observatory of Economic Complexity (2013a; 2013b; 2013c) as exportações de petróleo cru, gás de petróleo e petróleo refinado da Noruega e dos UAE representavam 62,5% 65% do total exportado respectivamente. Para comparação o Brasil exportava em torno de 7,3% de seu total exportado nestes produtos.

Noruega e os UAE também tem outra coisa em comum: o que eles fazem com a renda gerada pelo seu petróleo. Ambos os países possuem fundos soberanos mantidos com os rendimentos provenientes do petróleo. De fato são o terceiro e o quarto maiores fundos públicos do mundo (SOVEREIGN WEALTH FUNDS INSTITUTE, 2015), e se tratando de fundos de recursos exauríveis são os dois primeiros (eles perdem em tamanho para os fundos de previdência americano e japonês). O papel destes fundos é, segundo Lie (2013, p. 13, tradução nossa): “[...] (i) substituir a renda do petróleo quanto este acabar, (ii) diminuir flutuações na renda do petróleo, ou (iii) ser usado aqui e agora para desenvolver a economia doméstica.”. A característica (i) é um resultado

necessário para um ótimo de utilização de recursos exauríveis pela visão de Solow, embora seja importante salientar que os fundos não têm objetivos explícitos de controlar a extração de petróleo nem manter a renda per capita constante através do tempo. Pelo contrário, eles têm objetivos de aumentá-la. De qualquer forma eles são exemplos de como governos tomam decisões para resolver problemas com recursos exauríveis. Se o petróleo for de propriedade estatal e o governo quiser maximizar o capital investido do fundo ele poderá maximizar o lucro de extração e reinvesti-lo totalmente no fundo, usando os ganhos financeiros, eternos, para melhorar o bem estar da nação. Isso não é bom apenas para os detentores do fundo, mas, como o fundo é muitas vezes investido no exterior, é bom também para outros países que recebem investimento, especialmente países em desenvolvimento.

A história do fundo norueguês é interessante também por que envolve outro fenômeno advindo dos recursos exauríveis que não foi tratado até aqui: a Doença Holandesa. A Doença Holandesa ocorre especialmente em países que descobrem recursos naturais que podem ser vendidos ao exterior rapidamente e com grandes ganhos. Como a balança comercial de um país deve estar em equilíbrio, isto gera pressões de valorização sobre a moeda local e afeta a economia negativamente, efeito que se chama a Doença Holandesa. A moeda sobre valorizada por um período finito torna importações e o consumo atraentes, força para baixo a taxa de juros (e a poupança e o investimento) e prejudica a indústria local<sup>40</sup>. Novamente se os recursos fossem eternos, isso talvez não fosse um problema, visto que o fluxo eterno de importações não seria quebrado e a nação estaria em uma posição de maior consumo por um tempo indefinido. Por outro lado o excesso de investimento em recursos que não geram um fluxo eterno de renda cria no futuro problemas com falta de capital investido em outras áreas importantes. Assim que os recursos acabarem ao país não será capaz de manter seu nível de consumo. Segundo Lie (2013) o fundo soberano norueguês tem com o objetivo corrigir este problema, inclusive por que seus recursos devem ser aplicados no exterior, então, a moeda sobrevalorizada não é gasta em consumo, mas vira investimento exportado<sup>41</sup>, e quando os recursos se esgotarem vai haver um fluxo externo eterno de capital para contrabalancear a perda de renda devida a sua exaustão,

---

<sup>40</sup> E este feito, suponho, retarda em parte a extração de recursos exauríveis, então doença holandesa não implica necessariamente extração mais rápida.

<sup>41</sup> Isso reequilibra o balanço de pagamentos.

além é claro, de melhorar as condições presentes do país enquanto a exportação de petróleo existir. O fundo dos UAE segue linhas parecidas.

## 4.2 IMPOSTOS

Do ponto de vista da conservação impostos são uma ferramenta de controlar a velocidade de extração de um recurso. Eles têm um efeito na produção diferente se forem aplicados no lucro total, na receita ou na produção de uma empresa. Em um caso sem recurso exaurível, e, portanto, sem motivos para descontar o tempo na maximização o lucro, temos que,  $\alpha_i$ , um menos o imposto do tipo T por cento<sup>42</sup> de um valor retorna a seguinte função lucro e lucro marginal:

$$\Pi(x) = \alpha_1[\alpha_2 p(x)x - \alpha_3 C(x)] \quad (24)$$

$$M\Pi(x) = \alpha_1[p'(x)x - C(x)] \quad (24')$$

$$M\Pi(x) = \alpha_2 p'(x)x - C(x) \quad (24'')$$

$$M\Pi(x) = p'(x)x - \alpha_3 C(x) \quad (24''')$$

Onde  $p(x)$  é o preço,  $x$  é a quantidade vendida  $C(x)$  o custo de produção.  $C(x)$  é diferenciável duas vezes com derivada primeira e segunda positivas no domínio. Cada alfa representa um tipo de imposto, sendo:  $\alpha_1$ , o imposto sobre o lucro,  $\alpha_2$ , o imposto sobre a receita e  $\alpha_3$  o imposto sobre o custo. Supomos que só exista imposto de um tipo, então apenas uma das derivadas vai ser verdadeira. Segue que de (24'), um máximo de (24) sem imposto (cada alfa ser igual a um) é igual um máximo se  $\alpha_1$  for diferente de um, então o imposto sobre o lucro não altera a quantidade produzida. A quantidade produzida vai ser alterada para os outros dois casos. É fácil provar que se  $p$  for fixo,  $\alpha_1 = \alpha_2$  e  $\alpha_3 = 1/\alpha_2$  e  $x_i$  for a quantidade extraída com cada imposto então  $x_1 \geq x_2 = x_3$ <sup>43</sup>.

Para recursos exauríveis e imposto sobre o lucro, aplicamos este resultado em (4) e temos que a quantidade extraída é a mesma em cada t. Isso vale para o caso contínuo também visto que uma constante multiplicando o integrando é igual à constante multiplicando a integral. No caso de imposto sobre a receita ou custo,

<sup>42</sup>  $\alpha_i = (1 - T)\%$ , onde  $T$  é a taxa nominal de imposto, se  $i = 3$ , então  $T$  é negativo.

<sup>43</sup> As condições de primeira ordem para um máximo implicam que  $p = C'(x_1) = C'(x_2)/\alpha_2 = \alpha_3 C'(x_3)$ . Pelo formato de  $C$  temos que  $C(x) > C(y)$  se  $x > y$ , então para satisfazer as condições  $x_1 > x_2 = x_3$ .

aplicando a regra de Hotelling, conclui-se que a quantidade extraída é menor em cada período e portanto um tempo de exaustão da fonte maior.

Hotelling (1991) estuda dois tipos de imposto. O primeiro é um imposto anual de taxa  $\alpha$  sobre a mina. Da equação (9) temos  $\alpha V(t)$  deve ser pago todos os anos e o Valor da mina em um ano  $\tau$  qualquer é:

$$V(\tau) = \int_{\tau}^T [pq - \alpha V(t)] e^{-r(t-\tau)} dt \quad (25)$$

Hotelling (1991) remove o sinal da integral, diferenciando para  $\tau$  (condição de primeira ordem para um máximo) e obtém a equação diferencial:  $V'(\tau) = -pq + \alpha V(\tau) + rV(\tau)$  e a solução:

$$V(\tau) = \int_{\tau}^T [pq - \alpha V(t)] e^{-(r-\alpha)(t-\tau)} dt \quad (26)$$

E, portanto a única coisa que o imposto anual  $\alpha$  sobre o valor da mina faz é entrar no cálculo do desconto, e pelas conclusões anteriores sobre a taxa de juros, acelera a produção. Do lado oposto temos o imposto sobre a exaustão<sup>44</sup> (o proprietário paga por extrair recursos), que retarda produção. Hotelling (1991) mostra isso utilizando uma função demanda linear  $p = \alpha - \beta q$ . Onde  $\alpha$  é uma constante (sem relação com o imposto anterior). A taxa de lucro depois de pagar  $v$  (e o preço é líquido dos outros custos) pela extração de cada  $q$ :  $(p-v)q = (\alpha-v)q - \beta q^2$ . A derivada desta última expressão, com a condição inicial  $q(T) = 0$  cresce da seguinte forma:

$$(\alpha - v) - 2\beta q = \lambda e^{rt} \quad (27)$$

$$(\alpha - v) = \lambda e^{rT}$$

O sistema (27), segundo Hotelling (1991) tem a solução:

$$q = \frac{[1 - e^{-r(t-T)}](\alpha - v)}{2\beta} \quad (28)$$

---

<sup>44</sup> Hotelling chama de *Severance Tax*.



Utilizando este  $q$  na equação (8) temos que  $S = (rT + e^{-rT})(\alpha - v) / 2\beta$  e

$$dT = \frac{2\beta dv}{(\alpha - v)^2 (1 - e^{-r(t-T)})} \quad (29)$$

Que é positivo, logo com o aumento do imposto sobre o custo de extração ( $dv$ ) aumenta o tempo de extração total ( $dT$ ) e  $S$  permanecendo constante implica que a produção vai ser retardada.

Esta seção mostrou como governo pode mexer na extração de recursos através de impostos. Conhecendo o efeito de cada imposto o gestor público pode tomar a melhor decisão possível. Se o país quiser uma política de conservação, taxar o lucro não fará diferença, taxar o valor da mina vai acelerar a exaustão e taxar o custo de extração vai retardar a exaustão.

### 4.3 APLICANDO A REGRA DE HARTWICK

Nesta seção apresentamos uma aplicação empírica da Regra de Hartwick para comparar países que a aplicaram e países que não a aplicaram.

Segundo o Banco Mundial, do inglês *World Bank*, “é notável que o capital natural represente um quarto de toda a riqueza dos países de renda baixa, maior que a parte do capital produzido” (WORLD BANK, 2006, p. VII, tradução nossa). Para estes países uma administração ótima do capital natural é essencial enquanto eles desenvolvem o resto da economia. Ainda segundo o Banco Mundial (2006) 70% destes recursos são devidos a agricultura. Recursos exauríveis só são importantes para alguns países de baixa renda, obviamente por que os recursos não estão igualmente distribuídos pelo mundo.

Desde a década de 1970 os países que tiveram maior acesso a estes recursos, segundo Auti (2001 apud WORLD BANK, 2006)<sup>45</sup>, tiveram crescimento relativo do PIB menor do que países de menor acesso, mesmo com a vantagem que tais recursos garantem. Isso pode ser explicado por

---

<sup>45</sup> Auty, Richard M., ed. 2001. Resource Abundance and Economic Development. Oxford: Oxford University Press.

- Moedas inflacionadas podem impedir o desenvolvimento do setor exportador não petrolífero (conhecido como “Doença Holandesa”)
  - Dinheiro fácil na forma de renda de recursos podem reduzir incentivos para implementar as necessárias reformas econômicas
  - Preços voláteis de recursos podem complicar a administração macroeconômica, exacerbando conflitos políticos sobre a divisão e administração da renda de recursos
- (WORLD BANK, 2006, p.69, tradução nossa)

Uma forma de tratar estes problemas é com a Regra de Hartwick e investir toda a renda dos recursos em capital reproduzível. Na verdade a regra requer mais: que o investimento líquido (descontado de depreciação e da exaustão dos recursos) na economia seja zero. O Banco Mundial (2006) compara, para os países pobres, a quantidade produzida estimada de capital investimento constante de 1970 até 2000, com a quantidade de capital que eles teriam acumulado se tivessem aplicado a Regra de Hartwick. O Banco Mundial (2006) utiliza as seguintes identidades para investimento:

$$I^G = I - D - R$$

$$N = I - D = I^G - R$$

Onde  $I^G$  é o investimento genuíno (aumento no estoque de capital além da depreciação e extração de recursos),  $N$  o investimento líquido,  $D$  depreciação e  $R$  a exaustão de recursos.  $R$  é estimado usando a soma das rendas obtidas com: petróleo cru, gás natural, carvão, bauxita, ouro, ferro, níquel, fosfato, prata e zinco. A quantidade de capital em uma dessas economias estimadas com uma regressão simples pelo Banco Mundial (2006) no ano de 2000 e um  $I^G$  constante é:

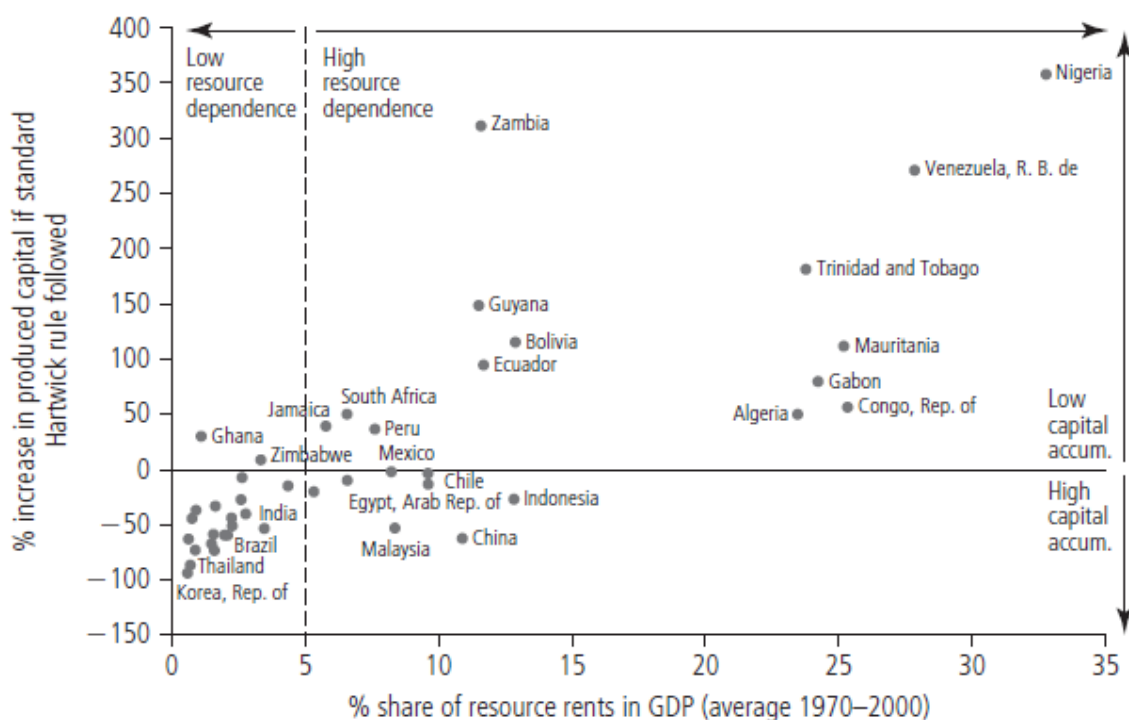
$$K^*_{2000} = K_{1970} + \sum_{t=1971}^{2000} (I_t^G - R_t) \quad (30)$$

$$K^*_{2000} = K_{1970} + \sum_{t=1971}^{2000} \text{Max}[N_t, (I_t^G - R_t)] \quad (30')$$

Onde  $K_t$  é o estoque de capital no ano  $t$ . Dois  $K^*$  são calculados. Um com  $I^G = 0$  (regra de Hartwick), e outro com  $I^G = 5\%$  do PIB de 1987. A escolha do por que deste

investimento constante é arbitrária, mas é a média histórica do investimento para os países analisados (BANCO MUNDIAL, 2006). Após a estimação das quantidades de capital a pergunta a ser feita é: quão ricas seriam essas nações em cada regime de investimento. A Figura 1 abaixo mostra os países divididos entre os que mais acumularam capital e os que menos acumularam, participação da renda dos recursos no PIB e a diferença entre o capital acumulado real e o que teria sido obtido pela aplicação da Regra de Hartwick.

Figura 1 – Abundância de Recursos e Acumulação de capital (Regra Padrão de Hartwick)



Fonte: Banco Mundial (2006, p. 73)

A linha zero horizontal é a quantidade de capital requerida pela Regra de Hartwick. Acima dela são os países que investiram menos do que o suficiente para compensar a perda em recursos exauríveis e abaixo os que investiram mais. Nota-se que a maioria dos países acumulou mais capital do que a Regra de Hartwick recomendaria. A figura ainda mostra que todos os países com grande participação (mais de 15%) de recursos exauríveis no PIB acumularam menos capital do que deveriam. Segundo o Banco Mundial (2006) estes países, com exceção de Trindad e Tobago, também tiveram queda no PIB per capita real entre 1970 e 2000. Uma razão apontada é que o consumo é muito atraente nestes países (Doença Holandesa). Por outro lado Países abaixo da linha

zero horizontal aplicaram mais em capital reprodutivo (apenas Chile e México seguiram a risca a Regra de Hartwick) recuperaram toda a perda de capital exaurível e alcançaram um estoque maior de capital.

Este pequeno exercício mostra um pouco a força da regra de Hartwick (e de investimento em geral) para a economia dos recursos exauríveis e para a economia em geral. Países como Venezuela e Nigéria poderiam estar em uma situação infinitamente melhor se tivessem poupado o suficiente para recuperar as perdas pela exaustão. É claro que aplicar a regra estritamente também pode ser um equívoco, pois para alcançar os países ricos, alguns países pobres podem necessitar de uma poupança muito grande e maior que simplesmente recuperar a exaustão e uma aplicação da Regra seria fada-los a pobreza relativa para sempre.

#### 4.4 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4

Este capítulo apresentou de forma resumida algumas políticas de recursos exauríveis e conclusões tiradas a partir dos modelos do capítulo 3. Em destaque fica a política brasileira de investir royalties do Pré Sal em educação que desperta curiosidade de quem vive no país (incluindo o autor deste trabalho) sobre como as coisas vão se desenrolar nos próximos anos.

## 5 CONCLUSÃO

Nossa discussão começou enfatizando a questão dinâmica no problema da economia dos recursos exauríveis já que a exaustão não se dá em um único período. Além disto, se estabeleceu alguns problemas criados pelo fato de estarmos tratando de recursos que são esgotáveis.

Depois, exibimos os modelos econômicos dos recursos exauríveis. Estes modelos podem ser divididos em modelos microeconômicos, onde o objetivo dos agentes é maximizar seu lucro e utilidade e a taxa de juros é uma variável chave, e modelos macroeconômicos, onde o crescimento e o investimento afetam a economia dos recursos exauríveis. A partir dos modelos é possível avaliar políticas que envolvem os recursos, seja do proprietário privado ou do governo e da população como um todo.

O primeiro destes modelos foi apresentado pelo economista Lewis Gray, em um artigo de 1914, onde ele utiliza tabelas de investimento, onde são comparados diversos fluxos de caixa de diferentes caminhos em tempo discreto para escolher a forma de extração que maximizar o lucro intertemporal do proprietário. Após isso foi apresentado um método mais formal de resolver o problema de Gray por Gabriel Lozada. Este método não depende de tabelas que formam um conjunto finito de caminhos possíveis, afinal só existe um número finito de tabelas no mundo. O modelo de Lozada utiliza o cálculo que pode ser usado para “varrer” o universo infinito de caminhos de extração a procura de uma solução que realmente é um máximo.

Após o modelo de Gray foi apresentado o modelo de Hotelling, baseado no seu trabalho de 1931, onde ele faz várias observações para a economia dos recursos exauríveis, em um mundo de tempo contínuo. O autor fez uma análise detalhada incluindo competição perfeita, monopólios, impostos e o efeito da produção passada afetar a futura. Neste último caso ele introduz o uso do cálculo de variações para resolver o problema. Aliás, um dos primeiros usos do cálculo de variações em teoria econômica. Juntos os modelos de Gray e Hotelling formam o que se classificou como modelos microeconômicos.

No seu trabalho de Hotelling desenvolve o que ficou conhecido como Regra de Hotelling, que dá a condição de extração de um recurso. Ela deriva do fato que recurso ainda não extraído ser como um investimento, e ao não extrair, espera-se lucrar a taxa de juros ou mais por postergar a extração. Em qualquer instante, devido ao custo

marginal crescente ou ao preço crescente através do tempo ou ambos, o proprietário vai extrair recursos enquanto o valor recebido e investido em outro ativo renda um pouco a mais do que deixar a produção dessa quantidade para depois. Quando estes valores se igualarem ele interromperá a extração.

Foi mencionado neste trabalho que 27 anos antes de Hotelling escrever seu artigo Gray havia chegado a conclusões parecidas, senão às mesmas de Hotelling (GRAY, 1913;1914;HARTWICK, 2012; CRABÉE, 1981). Gray já reconhecia o papel da taxa de juros na extração recursos, como um custo e como modificador da velocidade de exaustão. No fim de seu artigo de 1913 ele também levantou questões sobre o *Welfare* e se a taxa de juros global da economia era de fato adequada ao problema, mostrando que estava ciente destes problemas. Gray sabia que ele não possuía as ferramentas necessárias para responder precisamente as questões que ele levantou, mas baseou seu trabalho no que ele chamou de “[...] ‘senso comum’.” (GRAY, 1913, p. 515, tradução nossa).

Os modelos macroeconômicos, de Solow e Hartwick, levam em conta o crescimento econômico para a economia dos recursos exauríveis. Eles possuem alguns pressupostos fortes, como o critério de consumo per capita constante de Rawls para equidade intergerações. Para expor os modelos primeiro foi mostrada a economia neoclássica clássica de Solow (1956) e depois se introduziu recursos exauríveis com o modelo de Solow de 1974.

O modelo de crescimento econômico do Solow tem uma conclusão que chama muita atenção. O fato de que muitas coisas no presente (pouquíssimas das quais citadas na introdução) só são possíveis com o uso de recursos exauríveis. Este fato, por um lado, nos faz querer buscar soluções para manter nosso padrão de vida e por outro nos induzem a por “o pé no freio”. Os modelos dão uma ideia de solução (que é investir em capital ou avanço tecnológico) e a conclusão final é que talvez seja possível manter qualidade de vida em um patamar aceitável por um bom tempo. O modelo de Hartwick é um adendo ao modelo de Solow. O autor mostra que um modelo implica o outro e daí que o critério de Solow (consumo per capita constante) necessita da regra de Hartwick para ser alcançado.

Esta regra, desenvolvida por Hartwick em 1977, é uma condição de ótimo para recursos exauríveis. Para ela ser satisfeita é necessário que o lucro obtido com recursos exauríveis, em um regime de investimento líquido zero, seja totalmente aplicado em

capital reproduzível. Dessa forma a perda em estoque dos recursos e contrabalanceada por aumento do estoque de capital. Como no modelo  $I = \Delta K - \Delta R$ ,  $I$  é o investimento  $K$  é o estoque de capital e  $R$  é o estoque de recursos (que só pode ficar constante ou decrescer) e  $\Delta$  denota variação, se  $I$  for zero temos que a retirada de recursos tem que ser equilibrada por aumento de capital reproduzível, se for seguida a regra de Hartwick isso será em montante igual ao lucro obtido com a extração de recursos.

No capítulo quatro foram mostradas algumas políticas dos recursos exauríveis. No caso do Brasil, Noruega e Emirados, as duas políticas de recursos exauríveis citadas (Lei dos royalties do Pré Sal e Fundos Soberanos) mostram que alguém no mundo real está de fato preocupado com a busca de alternativas econômicas com o objetivo de manter o padrão de vida quando da exaustão dos recursos dos quais são estas economias atualmente dependentes. Não temos como saber quais motivos levaram os países a adotarem estas medidas, mas podemos avalia-las com os modelos dos autores apresentados.

Os recursos exauríveis são um universo fascinante e eles parecem ter um poder exagerado sobre nossas vidas. Mesmo assim, como nota Crabée (1983) a economia dos recursos exauríveis como um ramo específico da economia tem 102 anos de história. Destes 102 anos até 1950 ela foi obscurecida, como evidenciado por Devajaran e Fischer (1981): o trabalho seminal de Hotelling foi “esquecido” por 20 anos, até que a ciência econômica começou a utilizar o cálculo de variações e até a década de 1970 para que novos modelos aparecessem.

Este trabalho é introdutório, muitas questões sobre a economia dos recursos exauríveis foram deixadas de fora. Por exemplo, as questões relacionadas à propriedade e os problemas relacionados às externalidades.

Talvez, a mais importante seja a questão da propriedade dos recursos. Esta é uma questão que foi citada, mas não o suficiente, dada sua importância. A gestão dos recursos se modifica dependendo de quem os possui. Na verdade propriedade de capital em geral é uma questão econômica que levanta debates tão acirrados que metade do século XX foi gasta em uma guerra fria, e muitas vezes quente, entre duas ideologias que defendiam diferentes regimes de propriedade do capital.

Outra questão que poderia ser levantada são as externalidades. Combustíveis fósseis, por exemplo, são acusados de causarem problemas ambientais. Isso é importante para o desenvolvimento sustentável, como apresenta Oliveira (2006), mas

nada tem a ver com o fato de petróleo e carvão serem exauríveis. A economia dos recursos exauríveis se preocupa com o problema de como extrai-los da melhor forma e não como usa-los. Ainda assim, restaria saber se a extração dos recursos produz externalidades e de que tipo<sup>46</sup>. Segundo a Pratt School of Engineering (2015) na extração de ouro se usa mercúrio para juntar pequenos flocos do metal em peças maiores de fácil extração. Nas minas de pequenos produtores no Peru eles acabam largando o mercúrio (que é altamente nocivo ao ser humano e animais) nos rios, os poluindo. Isso é um caso em que a extração do recurso em si produz poluição. É também um problema delicado por que envolve famílias pobres que talvez não tenham recursos para lidar melhor com o mercúrio. Outra externalidade decorrente da extração é o transporte dos recursos. Navios, movidos por imensos motores a diesel, são conhecidos por causar poluição e são a forma de transportar petróleo e minérios entre continentes. Além disso, o próprio transporte da mina até o porto é feito de forma possivelmente poluente, como a ferrovia do carvão no estado de Santa Catarina (cidade de Criciúma) e tantas outras ferrovias deste tipo espalhadas pelo mundo<sup>47</sup>. Novamente este é um caso no qual a externalidade não é intrínseca ao recurso, mas, devido a suas dimensões, o transporte pode gerar externalidades grandes em termos de poluição.

---

<sup>46</sup> Isto é se ela decorre da extração e da tecnologia usada ou de um fator externo, como transporte ou guerras causadas pela invasão de inimigos querendo roubar recursos.

<sup>47</sup> O professor Jorge Paulo de Araujo conta a história de uma vez no estado do Rio de Janeiro, na casa de um amigo, pode observar o transporte contínuo de minérios pelos trens até o porto.



## REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno**. Trad. Valéria de Magalhães Iório. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

BRADLEY JÚNIOR, Robert L. Resourceship: an austrian theory of mineral resources. **The Review of Austrian Economics**, Boston, v.20, n.1 p. 63-90, Jan. 2007.

BRASIL, Lei nº 12.858, de 9 de Setembro de 2013. Dispõe sobre a destinação para as áreas de educação e saúde de parcela da participação no resultado ou da compensação financeira pela exploração de petróleo e gás natural. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**. Poder Executivo, Brasília, DF, 10 de Setembro de 2013. p.1.

BRUE, Stanley L. **História do pensamento econômico**. Trad. Luciana Penteado Miquelino. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CRABÉE, PhillipeJ.. The contribution of l. c. gray to the economic theory of exhaustible natural resources and its roots in the history of economic thought. **Journal of Environmental Economics and Management**. New York, v. 10, p. 195-220, 1983.

DAGSPUPTA, Partha, HEAL, Geoffrey. The optimal depletion rate of exhaustible resources. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v.41, p. 3-28, 1974.

DEVARAJAN, Shantayanan; FISCHER, Anthony C..Hotelling's "economics of exhaustible resources": fifty years later. **Journal of Economic Literature**, Nashville, v. 19, n. 1, p. 65 - 73, Mar. 1981.

FARZIN. Hossein Y. The effect of the discount rate on depletion of exhaustible resources. **Journal of Political Economy**, Chicago, v. 92, n. 5, p. 841-851, Oct.1984.

FISCHER, Irving. **The theory of interest determined by the impatience to spend and opportunity to invest it**. New York: Macmillan, 1930. Disponível em: <<http://oll.libertyfund.org/titles/1416>>. Acesso em: 05 Ago. 2015.

GRAY, Lewis C. The economic possibilities of conservation. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford, v. 27, n. 3, p. 497-519, May 1913.

GRAY, Lewis C. Rent under the assumption of exhaustibility. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford, v. 28, n. 3, p. 466-489, May 1914.

HEWETT, William W. Review of the theory of interest determined by the impatience to spend and opportunity to invest it, by Irwin Fischer. **The American Economic Review**, Pittsburg, v. 20, n. 4, p. 696-699, Dec. 1930.

HARTWICK, John M.. Intergenerational equity and the investing rents from exhaustible resources. **The American Economic Review**, Pittsburg, v.67, n. 5, p. 972-974, Dec. 1977.

HARTWICK, John M.. Substitution among exhaustible resources and intergenerational equity. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 45, n. 2, p. 347-354, Jun. 1978.

HARTWICK, John M.L.c. **gray on exhaustibility,1916**. [2012]. Disponível em: <<http://www.cireqmontreal.com/wp-content/uploads/2011/12/hartwick2b.pdf>>. Acesso 16 Mai. 2015.

HOTELLING, Harold. The economics of exhaustible resources. **Bulletin of Mathematical Biology**, Elmsford, v. 53, n. 1-2, p. 281-312, 1991. Baseado no artigo original de 1931.

INTEL. **Fun facts**: exactly how small (and cool) in 22 nanometer. [2015?]. Disponível em: <<http://www.intel.com/content/www/us/en/silicon-innovations/standards-22-nanometers-fun-facts.html>>. Acesso em: 18 set. 2015.

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. **Co<sub>2</sub> emissions from fuel combustion**. Paris: International Energy Agency, 2014. Disponível em: <<https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/CO2EmissionsFromFuelCombustionHighlights2014.pdf>>. Acesso em Out. 2015.

INVESTOPEDIA. **Sovereign wealth fund – SWF**. Edmont: Investopeida, 2015. Disponível em: <[http://www.investopedia.com/terms/s/sovereign\\_wealth\\_fund.asp](http://www.investopedia.com/terms/s/sovereign_wealth_fund.asp)>. Acesso em: 24 Out. 2015.

JEVONS, William Stanley. **The coal question**: an inquire concerning the progress of the nation, and the probable exhaustion of our coal-mines. 2<sup>nd</sup>. ed. London: Macmillan, 1866. Disponível em: <[http://oilcrash.net/media/pdf/The\\_Coal\\_Question.pdf](http://oilcrash.net/media/pdf/The_Coal_Question.pdf)>. Acesso em: 30 set. 2015.

JONES, Charles I. **Teoria do crescimento econômico**. Trad. Maria José Cyhlar Monteiro. Rio de Janeiro: Elsevier, 2000

LIE, Einar. **Learning by failing**. The origins of Norway Wealth Fund. Berkeley: University of California at Berkeley, 2013. Disponível em: <<http://eml.berkeley.edu/~webfac/cromer/Lie.pdf>>. Acesso em 24 Out. 2015.

LOZADA, Gabriel. Existence and characterization of discrete-time equilibria in extractive industries. **Resource and Energy Economics**, Amsterdam, n. 15, p. 249-254, 1993.

MORAES, Márcia Azanha Ferraz Dias de. **Reflections on Brazil's ethanol industry**. [Brasília]:Itamaraty,[2012?].Disponível em:<<http://dc.itamaraty.gov.br/imagens-e-textos/Biocombustiveis-08ing-consideracoesetanol.pdf>> Acesso em: 09 Nov. 2015.

NASDAQ. **WTI (NYMEX) price**: end of day commodity future prices quotes for crude oil WTI (NYMEX). New York, 2015. Disponível em: <http://www.nasdaq.com/markets/crude-oil.aspx?timeframe=10y>>. Acesso em: 30 set. 2015.

OBSERVATORY FOR ECONOMIC COMPLEXITY. **Atlas**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2013a. Disponível em: <[http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree\\_map/hs92/export/nor/all/show/2013](http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree_map/hs92/export/nor/all/show/2013)>. Acesso em: 24 Out. 2015.

OBSERVATORY FOR ECONOMIC COMPLEXITY. **Atlas**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2013b. Disponível em: <[http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree\\_map/hs92/export/are/all/show/2013/](http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree_map/hs92/export/are/all/show/2013/)>. Acesso em: 24 Out. 2015.

OBSERVATORY FOR ECONOMIC COMPLEXITY. **Atlas**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2013c. Disponível em: <[http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree\\_map/hs92/export/bra/all/show/2013/ace](http://atlas.media.mit.edu/en/visualize/tree_map/hs92/export/bra/all/show/2013/ace)>. Acesso em: 24 Out. 2015.

OLIVEIRA, Lívio Luís Soares de. **Economia dos recursos naturais, desenvolvimento sustentável e teoria do crescimento econômico**: uma aplicação para o Brasil. 2004.

Dissertação (Mestrado em Economia) – Programa de Pós-Graduação em Economia, Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

PEARCE, David W.; TURNER, R. Kerry. **Economics of natural resources and the environment**. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1990.

PRATT SCHOOL OF ENGINEERING. Mercury from gold mines accumulates hundreds of miles downstream. <http://pratt.duke.edu>. Durham: Duke University, 2015. Disponível em: <<http://pratt.duke.edu/news/mercury-gold-mines-accumulates-hundreds-miles-downstream>>. Acesso em 15 Out. 2015.

SAMUELSON, Paul A. A note on measurement of utility. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 4. n. 2, p. 155-161, Feb. 1937.

SOLOW, Robert M. A contribution to the theory of Economic Growth. **The quarterly Journal of Economics**, Massachusetts, v. 70, n. 1, p. 64-95, Feb. 1956.

SOLOW, Robert M. The Economics of resources or the resources of economics. **The American Economic Review**, Nashville, v. 64, n.2, p. 1-14, May 1974a.

SOLOW, Robert M. Intergenerational equity and exhaustible resources. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v.41, p. 29-45, 1974b.

SOVEREIGN WEALTH FUND INSTITUTE. **Fund rankings**. Las Vegas: Sovereign Wealth Fund Institute, 2015. Disponível em: <<http://www.swfinstitute.org/sovereign-wealth-fund-rankings/>>. Acesso em: 24 Out. 2015.

STROTZ, R. H.. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 23, n. 3, p. 165-180, 1956.

VALE S.A. **Iron ore indices**. 2015. Disponível em: <http://www.vale.com/brasil/EN/business/mining/iron-ore-pellets/Pages/Iron-OreIndices.aspx>>. Acesso em: 30 set. 2015.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia: conceitos básicos**. Trad. Maria José Cyhlar Monteiro e Ricardo Doninelli. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

WORLD BANK. **Where is the wealth of nations?** Measuring capital for the 21<sup>st</sup> century. Washington D.C.. The World Bank, 2006. Disponível em: <<http://siteresources.worldbank.org/INTEEI/2145781110886258964/20748034/All.pdf>>. Acesso em 24 Out. 2015.