

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SISTEMAS CONCENTRADOS E DISTRIBUÍDOS COM  
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO, UTILIZANDO A BASE GERADA  
PELA RESPOSTA IMPULSO**

por

Edson Hikaro Aseka

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Junho de 2008

**SISTEMAS CONCENTRADOS E DISTRIBUÍDOS COM  
AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO, UTILIZANDO A BASE GERADA  
PELA RESPOSTA IMPULSO**

por

Edson Hikaro Aseka

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. PhD. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Rosemaira Dalcin Copetti

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 30 de junho de 2008

À Ivanilda, Sofia Satie e Clara Akemi.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. PhD. Julio C. R. Claeysen, pela orientação, pelo espaço físico, pelo material disponibilizado e pela atenção dispendida durante o trabalho.

Meu sincero agradecimento aos professores Marcelo Augusto Rauh Schmitt e Laura Vellino Corso, à Escola Técnica e à UFRGS pelo afastamento concedido para a realização deste trabalho.

Agradeço ao secretário do Promec Paulo Kutter sempre atencioso e prestativo.

Agradeço aos funcionários do comut da Biblioteca da Engenharia pela serviços de pesquisa e obtenção dos artigos com rapidez.

Agradeço a minha esposa Ivanilda e as filhas Sofia e Clara pela paciência.

Agradeço principalmente ao Sistema Público de Ensino, Estadual e Federal, no qual realizei toda minha educação formal.

## RESUMO

### SISTEMAS CONCENTRADOS E DISTRIBUÍDOS COM AMORTECIMENTO VISCO-ELÁSTICO, UTILIZANDO A BASE GERADA PELA RESPOSTA IMPULSO

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de calcular a resposta de sistemas dinâmicos com amortecimento viscoelástico, utilizando a base gerada pela resposta impulso, desenvolvida por Claeysen no seu próprio espaço físico e utilizada em variadas aplicações por seus colaboradores e orientandos.

O uso da resposta impulso permitiu determinar a resposta dinâmica de um sistema dinâmico viscoelástico concentrado e de uma viga viscoelástica usando o princípio da correspondência.

A metodologia desenvolvida para resolver problemas dinâmicos viscoelásticos com o uso da resposta impulso foi implementada em sistemas concentrados e em um sistema distribuído correspondente a uma viga de Euler-Bernoulli. E uma ampla revisão bibliográfica sobre viscoelasticidade e dispositivos de amortecimento foi realizado.

A resposta impulso foi calculada através de equações características de natureza algébrica, diferencial e em diferenças. Nas simulações foi utilizado o software Maple.

Foi analisado o modelo de viga de Timoshenko com inércia rotatória e para materiais viscoelásticos. Devido a dificuldade de obtenção da solução analítica do modelo elástico, o modelo viscoelástico foi estudado através do método operacional para um sistema vibratório distribuído de segunda ordem.

## **ABSTRACT**

### **CONCENTRATED, DISTRIBUTED SYSTEMS WITH VISCOELASTIC DAMPING, USING THE BASE OBTAINED FROM IMPULSE RESPONSE**

This work was developed with purpose of to obtain response of system with viscoelastic damping, using the base obtained from impulse response developed by Claeysen in your own physical space and used in numerous applications by his associated and student.

The use of impulse response allowed to determine the dynamic response of concentrated viscoelastic dynamic system and of a viscoelastic Euler-Bernoulli beam using correspondence principle.

The methodology developed to solve viscoelastic dynamic problem with the use of the impulse response was implemented in concentrated systems and in distributed system corresponding to a Euler-Bernoulli beam. A wide literature review on viscoelasticity and on damping devices was conducted.

The impulse response was calculated by characteristics equations of algebraic, differential and differences nature. the simulation was implemented in software Maple.

It was considered the model of Timoshenko beam with rotation and inertia and for viscoelastic materials. Due to difficulty in obtaining the analytical solution of elastic model, the viscoelastic model was studied by the operational method for a distributed vibrating system of second order.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Preliminares . . . . .	1
1.2	Objetivos do trabalho . . . . .	3
1.3	Organização do trabalho . . . . .	3
1.4	Amortecimento . . . . .	4
1.4.1	Tipo de amortecimento . . . . .	4
1.5	Dispositivos amortecedores . . . . .	6
<b>2</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO</b>	<b>12</b>
2.1	Modelos reológicos . . . . .	12
2.1.1	Amortecimento histerético . . . . .	17
2.1.2	Módulo complexo . . . . .	18
2.2	Integral hereditária, modelo reológico na forma integral . . . . .	21
2.2.1	Função de fluência . . . . .	22
2.2.2	Função de relaxação . . . . .	22
2.2.3	Integral hereditária . . . . .	24
<b>3</b>	<b>RESPOSTA DE UM SISTEMA DE MATERIAL VISCOELÁSTICO HO-</b>	
	<b>MOGÊNICO</b>	<b>26</b>
3.1	Resposta de um sistema elástico de um grau de liberdade . . . . .	27
3.1.1	Método espectral . . . . .	28
3.1.2	Método operacional . . . . .	28
3.2	Solução fundamental . . . . .	29
3.2.1	Solução de um problema inicial não forçado $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ . . . . .	34
3.2.2	Solução de um problema inicial forçado $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$ . . . . .	35

3.3	Respostas de sistemas elásticos com múltiplos graus de liberdade . . . . .	35
3.3.1	Resposta do sistema em termos da solução dinâmica . . . . .	36
3.3.2	Solução fundamental de um sistema de n graus de liberdade . . . . .	37
3.3.3	Cálculo da solução dinâmica de um sistema, com múltiplos graus de liberdade, por equação em diferença . . . . .	37
3.3.4	Fórmula fechada para a matriz de transferência e a solução dinâmica	38
3.4	Solução de problema dinâmico viscoelástico em vibração livre . . . . .	41
3.4.1	Solução da equação diferencial de ordem m . . . . .	43
3.5	Exemplos . . . . .	44
3.5.1	Resposta de um sistema de um grau de liberdade em vibração livre com mola viscoelástica . . . . .	44
3.5.2	Resposta de barra viscoelástica engastada em vibração livre . . . . .	46
3.5.3	Resposta de barra viscoelástica engastada, em vibração forçada . . . . .	51
<b>4</b>	<b>PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA</b>	<b>53</b>
4.1	Princípio da correspondência na prática . . . . .	53
4.2	Cálculo da resposta de um sistema de um grau de liberdade com mola viscoelástica . . . . .	53
4.3	Princípio da correspondência aplicado a uma barra viscoelástica . . . . .	57
<b>5</b>	<b>RESPOSTA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI VISCOELÁSTICA</b>	<b>62</b>
5.1	Modelo matemático da viga de Euler-Bernoulli . . . . .	62
5.2	Princípio da correspondência . . . . .	63
5.3	Cálculo da resposta de viga de Euler-Bernoulli viscoelástica . . . . .	65
5.3.1	Equação de movimento da viga viscoelástica de Euler-Bernoulli no domínio de Laplace . . . . .	65
5.3.2	Equação de movimento de uma viga de Euler-Bernoulli elástica . . . . .	66
5.3.3	Solução do problema elástico análogo ao viscoelástico . . . . .	66
5.4	Exemplo: Resposta de viga viscoelástica em balanço . . . . .	71
<b>6</b>	<b>RESPOSTA DE VIGA DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICA</b>	<b>80</b>
6.1	Modelo matemático de Timoshenko para uma viga elástica . . . . .	80



6.2	O modelo de Timoshenko para um viga viscoelástica . . . . .	82
6.3	A equação evolutiva de Timoshenko para a deformação numa viga elástica .	84
6.3.1	Resposta dinâmica com a equação de Timoshenko no domínio de Laplace	86
6.4	Análise da viga de Timoshenko viscoelástica usando o sistema de segunda ordem	88
6.4.1	Viga em balanço . . . . .	91
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS</b>	<b>93</b>
7.1	Conclusões . . . . .	93
7.2	Trabalhos Futuros . . . . .	96
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>97</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>104</b>
<b>A</b>	<b>Modos vibratórios da deformação com a equação evolutiva de Timoshenko</b>	<b>104</b>
<b>B</b>	<b>Modos vibratórios do modelo de Timoshenko para uma viga elástica</b>	<b>111</b>
B.1	Equação característica para viga elásticas . . . . .	114

# Lista de Símbolos

## *Letras Romanas*

$\dot{x}$	velocidade [ $m/s$ ]
$A$	área da seção transversal [ $m^2$ ]
$a_0, a_1, \dots, a_n$	constantes
$a_i, \alpha_i$	constantes
$b_0, b_1, \dots, b_n$	constantes
$c$	coeficiente de atrito viscoso [ $kg/s$ ]
$E$	módulo de Young [ $N/m^2$ ]
$E'$	módulo elástico [ $N/m^2$ ]
$E''$	módulo de perda [ $N/m^2$ ]
$E^*$	módulo de Young complexo
$F(t), f(t)$	força de externa [ $N$ ]
$F_{at}$	força de atrito [ $N$ ]
$F_d$	força reativa [ $N$ ]
$G$	módulo de cisalhamento [ $N/m^2$ ]
$G_*$	módulo complexo de cisalhamento
$H(t - \tau)$	função de Heaviside
$J(t)$	função de fluência
$k$	rigidez [ $N/m$ ]
$L$	comprimento [ $m$ ]
$m$	massa [ $kg$ ]
$N$	força normal [ $N$ ]
$sgn$	função sinal
$t$	tempo [ $s$ ]
$x(t)$	deslocamento [ $m$ ]

$Y(t)$	função de relaxação
$\epsilon$	deformação
$\eta$	fator de perda
$\Gamma(t - \tau)$	núcleo de relaxação
$\ddot{\epsilon}$	derivada segunda da deformação
$\ddot{\sigma}$	derivada segunda da tensão
$\dot{\epsilon}$	variação da deformação
$\dot{\sigma}$	variação da tensão [ $N/m^2s$ ]
$\mu$	coeficiente de atrito dinâmico
$\omega$	frequência de excitação [ $Hz$ ]
$\sigma$	tensão [ $N/m^2$ ]

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Sistema massa-mola de um grau de liberdade com amortecedor viscoso. . . . .	7
1.2	Amortecedor utilizando material viscoelástico. . . . .	9
1.3	<i>World Trade Center</i> . . . . .	10
1.4	<i>Columbia Sea First</i> . . . . .	10
1.5	<i>The Two Union Square</i> . . . . .	11
2.1	Materiais representados por associação de molas e amortecedores: c) material de Kelvin, d) material de Maxwell, e) material de três elementos e f) material de quatro elementos. . . . .	13
2.2	Variação do fator de perda e amortecimentos com a frequência, obtidos por [Nashif e Henderson, 1985]: A e B amortecimentos hysterético, D módulo complexo, E e F amortecimentos viscoso. . . . .	20
2.3	Resposta de um sistema de um grau de liberdade para amortecimentos viscoso (caso F), hysterético (caso B) e módulo complexo (caso D). . . . .	21
2.4	(a) teste de fluência e (b) teste de relaxação. . . . .	23
2.5	Tensão $\sigma(t)$ descrita como soma incrementos . . . . .	24
3.1	Representação de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso. . . . .	27
3.2	Resposta do sistema de um grau de liberdade sem amortecimento excitado com $\omega = 2\omega_n$ . . . . .	31
3.3	Resposta dinâmica $h(t)$ do sistema com amortecimento viscoelástico. . . . .	45
3.4	Gráfico comparativo do resultado analítico e do resultado obtido usando a resposta dinâmica. . . . .	45
3.5	Barra de material viscoelástico discretizada em três elementos e com quatro nós. . . . .	46
3.6	Curva de $d(t)$ . . . . .	47
3.7	Curvas de $\hat{h}_{11}$ , $\hat{h}_{12}$ e $\hat{h}_{13}$ . . . . .	48

3.8	Curvas de $\hat{h}_{21}$ , $\hat{h}_{22}$ e $\hat{h}_{23}$ . . . . .	48
3.9	Curvas de $\hat{h}_{31}$ , $\hat{h}_{32}$ e $\hat{h}_{33}$ . . . . .	49
3.10	Curvas de $h_{11}$ , $h_{12}$ e $h_{13}$ . . . . .	49
3.11	Curvas de $h_{21}$ , $h_{22}$ e $h_{23}$ . . . . .	50
3.12	Curvas de $h_{31}$ , $h_{32}$ e $h_{33}$ . . . . .	50
3.13	Gráfico comparativo do resultado obtido utilizando a resposta dinâmica (a) e o obtido usando a transformada de Laplace (b). . . . .	51
3.14	Resposta forçada da barra de material viscoelástico. . . . .	52
4.1	Sistema de um grau de liberdade elástico. . . . .	54
4.2	Deslocamento $x(t)$ ao longo do tempo. . . . .	55
4.3	Resposta de um sistema de um grau de liberdade calculada usando o princípio da correspondência. . . . .	57
4.4	Barra homogênea de seção constante e comprimento L. . . . .	57
4.5	Resposta de uma barra elástica em $x = l$ . . . . .	59
4.6	Resposta de uma barra de material viscoelástico. . . . .	61
5.1	Viga homogênea de seção constante $A$ e comprimento L. . . . .	71
5.2	Forma do primeiro e segundo modos. . . . .	75
5.3	Forma do terceiro e quarto modos. . . . .	75
5.4	Resposta da extremidade livre da viga utilizando 1, 2, 3 e 4 modos. . . . .	76
5.5	Resposta da extremidade livre da viga em balanço elástica e viscoelástica aproximada, utilizando primeiro modo. . . . .	78
5.6	Resposta da extremidade livre da viga elástica e viscoelástica utilizando-se os quatro primeiros modos. . . . .	79
6.1	Deformação devido ao esforço cortante e ao momento fletor. . . . .	81
A.1	Modos da viga elástica bi-apoiada . . . . .	110

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado: um breve histórico sobre a necessidade da introdução de amortecimento em estruturas e o modo como isto é feito na Engenharia, os fenômenos físicos envolvidos no amortecimento, os dispositivos amortecedores clássicos, os objetivos da pesquisa e a organização do trabalho.

### 1.1 Preliminares

As estruturas têm se tornado mais flexíveis e leves devido aos recentes avanços tecnológicos na área de materiais e de produção e, em consequência, análises estáticas não são suficientes para garantir segurança e conforto. Outros fatores também ocasionam aumento das amplitudes de vibração nas estruturas sendo os principais os tipos de carga, a forma de aplicação das cargas e a frequência de excitação. Cargas têm se tornado mais intensas e aplicada de forma complexa, e em alguns casos com frequências próximas as naturais das estruturas, como é o caso da carga aplicada pela torcida nos estádios de futebol.

Outros exemplos de estruturas com problemas de vibração podem ser vistos em, [Soong, 1997], que apresenta vários exemplos de edifícios com problemas dinâmicos. Há estudos interessantes sobre o tema como: [Trapp e Bowie, 1980], que apresenta histórico dos amortecedores e perspectivas de uso, [Rao, 2003], que faz uma síntese sobre aplicações de amortecedores viscoelásticos em automóveis e aviões, e [Nakra, 1998], que apresenta um estudo sobre controle de vibrações em máquinas.

Na análise de sistemas mecânicos dinâmicos, as propriedades massa e rigidez são obtidas mesmo de estruturas com geometria complexa, e delas calculam-se as frequências naturais e os modos de vibração com precisão.

Para reduzir as amplitudes das vibrações, ruídos e fadigas, têm sido introduzido nas

estruturas amortecimento, por meio de dispositivos amortecedores ou utilizando materiais com maior capacidade de amortecimento, [Patel, 1978], e, portanto, sendo necessário quantificar o amortecimento da estrutura que, diferentemente da massa e da rigidez, a fim de obter a equação de movimento amortecido.

As equações de movimento destes sistemas são mais complicadas pois o amortecimento ocasiona acoplamento e não-linearidade por exemplo. Necessitando, portanto, para resolvê-las de ferramentas matemáticas mais sofisticadas e de um modelo de amortecimento adequado para este fim.

Vários autores têm sugerido métodos para resolver as equações de movimento com amortecimentos: por exemplo em [Golla e Hughes, 1985] e [Petyt, 1990] são apresentadas metodologias para resolver estes problemas, utilizando elementos finitos e a transformada de Laplace, em [Inman, 1994], e [Riera, 1996] é utilizado o amortecimento proporcional e análise modal, o método de elementos de contorno é apresentado em [Cozzano, 1997], o métodos baseado na integração passo a passo é apresentado em [Clough e Penzien, 1993] e um método que envolvendo solução do tipo exponencial e amortecimento hereditário é apresentado em [Muravyov, 1997b] e ainda o uso de análise experimental pode ser vista em [Ewins, 1980].

A estrutura pode ter seu amortecimento aumentado por meio de dispositivos fabricados para este fim, [Soong, 1997], ou utilizando-se materiais com maior capacidade de amortecimento para construir a estrutura, [Lakes e Quackenbush, 1996].

A eficiência dos dispositivos amortecedores em estruturas grandes (edifícios e pontes) é difícil de quantificar, pois medir o amortecimento introduzido é tarefa bastante complexa, em razão do amortecimento depender das condições climática e operacionais e das cargas aplicadas [Nashif e Henderson, 1985]. Muitos estudos envolvendo grandes estruturas têm sido realizados por [Gupta e Mutsuyoshi, 1985], [Tsai e Lee, 1993], [Shen, 1995] e [Zhang e Soong, 1992] e diversas aplicações têm sido encontradas para os amortecedores desenvolvidos.

Neste trabalho serão analisadas as situações onde o material viscoelástico é o elemento causador do amortecimento; este tipo de material é amplamente utilizado na prática da engenharia por ser robusto e eficaz no controle de vibrações. Um abrangente estudo deste tipo de material é encontrado em [Ferry, 1980], [Creus, 1986], [Christensen, 1971], [Nashif e Henderson, 1985], [Caracciolo, 2004], [Nakra, 2000], [Chu, 1980] e [Muravyov e Hutton, 1997]. Ele é utilizado em diversas configurações: vigas sanduíche, coxins, mantas, discos,

arruelas e fitas.

## 1.2 Objetivos do trabalho

Esta tese tem os seguintes objetivos:

- Estudar as propriedades dos materiais viscoelásticos e os modelos reológicos que os descrevem.
- Usar a base dinâmica para determinar as respostas de sistemas viscoelásticos (distribuído e concentrado).
- Determinar a base dinâmica para estruturas de materiais viscoelásticos.

Nesta tese, é apresentada uma metodologia para a determinação da resposta de sistemas viscoelásticos, utilizando a base dinâmica e o modelo reológico na forma integral. Uma revisão bibliográfica sobre modelos reológicos de materiais viscoelásticos e resposta impulso foi realizada para apresentar os conceitos básicos envolvidos no problema elástico e para gerar um problema viscoelástico equivalente ao elástico. Em seguida a metodologia para a solução do problema viscoelástico foi implementada, utilizando o *software* Maple 7.00 [Maple 7.0 Learning Guide].

## 1.3 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Revisão bibliográfica do conceito amortecimento e apresentação dos dispositivos usados para introduzi-lo nas estruturas.
- Revisão bibliográfica sobre modelos reológicos de materiais viscoelásticos.
- Revisão dos métodos de solução da equação de movimento de sistemas elásticos, principalmente daqueles que envolvem a base gerada pela resposta impulsiva.
- Desenvolvimento de uma metodologia para resolver a equação de movimento de um sistema viscoelástico utilizando a base dinâmica gerada pela resposta impulso e a função de Green, obtida utilizando a base gerada pela resposta impulso.



- Obtenção da equação de movimento de sistemas de um grau liberdade, de barra e de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko com amortecimento viscoelástico e estudá-los.
- Conclusões.

## 1.4 Amortecimento

Define-se amortecimento como o processo através do qual a energia mecânica do movimento vibratório de uma estrutura ou material é dissipada, ou seja uma estrutura ao ser perturbada pela aplicação de uma carga dinâmica irá responder vibrando e este movimento oscilatório só cessará quando a energia introduzida no sistema for dissipada [Nashif e Henderson, 1985]. A dissipação ocorre de diversas formas, ocorre internamente nos materiais que constituem a estrutura por meio de uma complexa combinação de mecanismos que fazem uso de interações elétricas, magnéticas, gravitacionais, mecânicas, químicas, entre outras, e através da interação da estrutura com o meio (atrito com ar ou água, atrito no apoio, atrito no contorno, atrito nas juntas, atrito nas interfaces) e por meio de dispositivos denominados amortecedores instalados na estrutura para dissipar energia [Rao, 2003].

O amortecimento é um fenômeno físico difícil de ser modelado, em virtude da diversidade e complexidade dos mecanismos que atuam simultaneamente para causar a dissipação e, também, em razão da influência do meio ambiente e das condições operacionais sobre esses mecanismos. Estudos analisando a variação do amortecimento com estes fatores podem ser vistos em [Nashif e Henderson, 1985], [Jones, 1974], [Jones, 1978] e [Chang, 1992] que analisaram o efeito da temperatura e da frequência. Trabalhos sobre a determinação experimental do amortecimento de materiais viscoelásticos, usando vigas, são apresentadas em [Faisca, 2000] e [Lopes, 1989] e, ainda há o método padrão para caracterizar um material viscoelástico, usando viga de Oberst, descrito na norma [E756-93, 1993] do ASTM.

### 1.4.1 Tipo de amortecimento

#### **Amortecimento devido a interação da estrutura com o meio**

A resposta de uma estrutura a uma carga dinâmica aplicada depende da forma como a estrutura interage com o meio e das propriedades físicas do material que a constitui. Neste trabalho, apenas o segundo caso será tratado, mas a estrutura sempre terá como vizinhança

um sólido, fluido ou forças de campo que interagem com ela, causando dissipação, além de apoios, juntas, interfaces, etc.

Por exemplo, uma forma importante de amortecimento devido ao meio é o causado pelo deslizamento relativo de duas superfícies em contato, denominado atrito seco, no qual a quantidade de energia dissipada depende das características das superfícies em contato e da intensidade da força normal que as mantém unidas. Para um sistema massa-mola de um grau de liberdade [Riera, 1996], a relação entre forças inerciais, forças elásticas, força excitadora externa e força dissipativa, devido a interação com o meio, é dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t) - F_d, \quad (1.1)$$

onde  $m$  é a massa do sistema,  $k$  a rigidez. O termo  $F_d$  depende do tipo de interação entre estrutura e meio.

### **Amortecimento material**

Denomina-se amortecimento material o amortecimento devido aos mecanismos de dissipação que são internos aos materiais e distribuídos por todo volume do material, sendo portanto o amortecimento uma característica do material. A energia do movimento vibratório introduzida no sistema pela aplicação de uma carga dinâmica sobre o material será dissipada através de interações elétricas, magnéticas e mecânicas originadas pelos movimentos relativos dos átomos, moléculas e cristais do material.

A medida da energia dissipada pelo material, a cada ciclo de deformação, é relativamente pequena na maioria dos materiais estruturais (aço, alumínio, ferro, etc.) e é consideravelmente grande para os materiais viscoelásticos, como as borrachas poliméricas. O interesse em materiais viscoelásticos para utilização na manufatura de amortecedores e isoladores tem crescido, desde 1950, na área da aviação militar e aero-espacial, por apresentarem grande amortecimento material, além de serem robustos e estáveis, características que lhes conferem grande utilidade industrial. O amortecimento causado por este tipo de material, no entanto, varia com a temperatura e a frequência, em virtude da influência destes fatores sobre os movimentos atômicos e moleculares [Nashif e Henderson, 1985].

## 1.5 Dispositivos amortecedores

Os dispositivos amortecedores são fabricados sob-medida ou em série, nos mais variados tamanhos e formas, e são instalados em estruturas, máquinas, automóveis e aeronaves por exemplo, com o objetivo de reduzir as amplitudes das vibrações para diminuir os ruídos, evitar danos nas estruturas e equipamentos, eliminar o desconforto humano causado pela vibração e evitar a fadiga dos materiais. Eles podem ser classificados em amortecedores passivos, ativos, e semi-ativos, estes dois últimos são sistemas complexos e precisam de realimentação, tornando sua operação e manutenção caras, além de necessitarem de energia para alimentar o sistema o que pode não acontecer quando a estrutura sofrer ação de terremotos, ventos e tempestades muito fortes e de impactos intensos.

Os amortecedores ativos funcionam por meio de atuadores que irão impor forças ao sistema com o objetivo de anular ou minimizar a vibração, e os semi-ativos tentam minimizar a vibração mudando as propriedades reológicas do material amortecedor aplicando-lhe campos elétricos ou magnéticos. Os amortecedores passivos, por outro lado, são dispositivos que não necessitam de realimentação e são robustos, o que os torna interessantes para uso comercial, sendo, por este motivo, os mais usados na prática, e o tipo mais comum:

### Amortecedor de Fluido Viscoso

No amortecedor de fluido viscoso, o princípio de funcionamento está baseado no escoamento de fluido por orifícios. A dissipação de energia ocorre em virtude do atrito do fluido com as bordas dos orifícios. Se o fluido utilizado for newtoniano, a força reativa será diretamente proporcional à velocidade instantânea e de sentido contrário, sendo representada da seguinte forma

$$F_d = -c\dot{x}. \quad (1.2)$$

Os amortecedores de veículos são exemplos clássicos de amortecedores de fluidos viscosos. Este tipo de amortecedor é mais difícil de ser utilizado em estruturas de grande porte, devido à necessidade de manutenção, porque os fluidos envelhecem, ocasionando variação de sua viscosidade, tornam-se rançosos, ocasionando mal cheiro e, além disso podem ocorrer problemas relacionados a vazamentos. Neste contexto, deve-se lembrar que, em grandes es-

truturas, utilizam-se poucos amortecedores de grande porte ou muitos amortecedores de pequeno porte. Por exemplo, o edifício "World Trade Center", possuía 10.000 dispositivos amortecedores em cada torre, totalizando 20.000 [Mahmoodi, 1969] e [Soong, 1997]. Portanto, verifica-se que a manutenção é um fator importante a ser considerado no projeto de estrutura, visto que o conjunto de amortecedores ou é difícil ou é trabalhoso de ser trocado além de envolver custos elevados.

A fig. 1.1 mostra um sistema de um grau de liberdade (1GL), constituído de massa-mola-amortecedor viscoso,

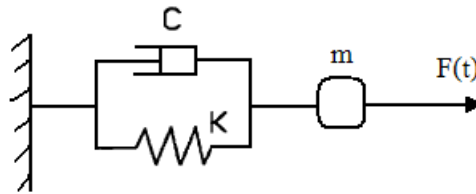


Figura 1.1 – Sistema massa-mola de um grau de liberdade com amortecedor viscoso.

cuja equação de movimento é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad (1.3)$$

onde  $c$  é o coeficiente de amortecimento do fluido,  $m$  é a massa,  $k$  é a rigidez da mola e  $F(t)$  é a força externa aplicada sobre a massa  $m$ .

### Amortecedores de Atrito Seco

São dispositivos construídos de modo que duas superfícies em contato deslizem uma em relação a outra e dissipem energia, através da fricção das mesmas. O funcionamento deste tipo de amortecedor depende das características das superfícies em contato e da intensidade da força normal que as mantém unidas. A expressão da força reativa deste modelo é

$$F_d = -\mu \cdot N \operatorname{sgn} \left( \frac{dx}{dt} \right), \quad (1.4)$$

onde  $F_d$  é a força reativa (força de atrito),  $N$  é a força normal que mantém as superfícies unidas,  $dx/dt$  é a velocidade relativa entre as superfícies,  $sgn$  é a função sinal e  $\mu$ , o coeficiente de atrito dinâmico.

Este tipo de amortecedor caracteriza-se por alcançar o repouso em um intervalo de tempo finito e apresentar uma configuração final diferente da inicial, pois o movimento relativo das superfícies cessará quando a força aplicada neles for igual à força de atrito estático, logo as posições finais relativas das superfícies serão definidas pela intensidade da força aplicada sobre o amortecedor.

A equação do movimento de um sistema de um grau de liberdade no qual o amortecimento é devido ao atrito seco, é obtida substituindo-se, na eq. (1.1), a força reativa  $F_d$ , dada pela eq. (1.4), resultando em

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \cdot N \operatorname{sgn} \left( \frac{dx}{dt} \right) + kx = F(t). \quad (1.5)$$

### **Amortecedores de Metal**

Este tipo de dispositivo dissipa uma grande quantidade de energia, através do escoamento de um metal (plastificação), ou seja, ele funcionará somente quando lhe for aplicada uma carga de magnitude suficiente para gerar tensões maiores que a de escoamento do metal, caso contrário, toda a energia absorvida pela estrutura será preservada, até que algum mecanismo a dissipe. Ele é, portanto, apropriado para minimizar os efeitos de terremotos.

Este tipo de amortecedor é fabricado geralmente em aço de baixa liga ou chumbo. Amortecedores metálicos, utilizando chumbo como material dissipador foram desenvolvidos por Raul O. Curadelli [Curadelli, 2001], na UFRGS, no Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, como parte de sua tese de doutorado.

### **Amortecedores de Material Viscoelástico**

Neste tipo de amortecedores, a energia do movimento vibratório é dissipada através da deformação de materiais viscoelásticos, geralmente materiais orgânicos, tais como, borracha natural, silicone, SBR e neopreno.

A partir de 1950, houve um grande desenvolvimento na sua utilização em aviação

a jato e aeroespacial, tendo como principais autores Trapp [Trapp e Bowie, 1980], Nahif [Nashif e Henderson, 1985], Jones [Jones, 1978], [Jones, 1974], [Jones e Parin, 1972], Ungar [Ungar e Kerwin, 1962] e Ferry [Ferry, 1980]. O uso deste material difundiu-se, rapidamente, deixando de ser tema apenas de pesquisa, de aplicações específicas e caras, envolvendo poucos especialistas, para se tornar de uso bastante variado, desde máquinas, veículos e até em grandes estruturas.

Em 1960, cada uma das torres de 110 andares do *World Trade Center* mostrada fig. 1.3, em Nova Iorque, foi projetada com 10.000 dispositivos amortecedores viscoelásticos para reduzir o efeitos dos ventos. Outros exemplos são: *The Columbia SeaFirst Building* mostrado na fig. 1.4, em Seattle, de 76 andares e 285 metros de altura, construído em 1982, equipado com 260 amortecedores e o *The Union Square Building* mostrado na fig. 1.5, em Seattle, de 56 andares e 222 metros de altura, construído em 1989, equipado com 16 grandes amortecedores. Na fig. 1.2, está o amortecedor projetado por Mahmoodi [Mahmoodi e Kell, 1990] e [Mahmoodi, 1969] para o *World Trade Center*.

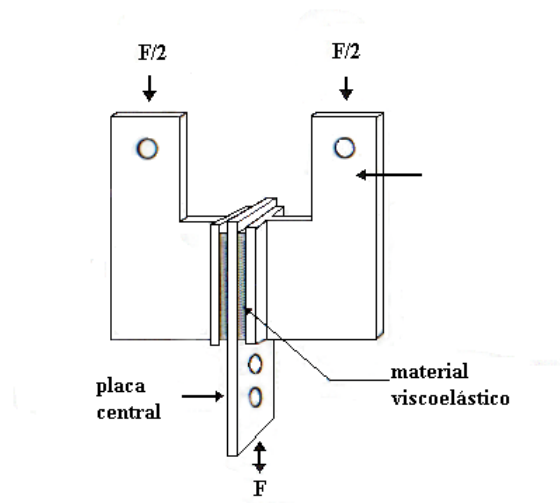


Figura 1.2 – Amortecedor utilizando material viscoelástico.

Os dispositivos amortecedores viscoelásticos encontram-se também na forma de mantas, coxins, ruelas, adesivos, fitas, filmes, entre outros, e são geralmente usados para sustentar ou unir os elementos vibrantes.



Figura 1.3 – *World Trade Center*.



Figura 1.4 – *Columbia Sea First*.



Figura 1.5 – *The Two Union Square.*



## CAPÍTULO 2

### MODELOS MATEMÁTICOS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO

Neste capítulo, são apresentados os modelos matemáticos que descrevem o comportamento reológico de materiais utilizados para aumentar a dissipação da energia do movimento vibratório de estruturas. Estes materiais são dos mais variados tipos: ligas metálicas especiais, chumbo, aço, fluidos e polímeros (materiais viscoelásticos). Os materiais viscoelásticos são objeto de estudo neste trabalho, assim sendo, os modelos matemáticos que descrevem seu comportamento constituem o foco deste capítulo.

Um modelo matemático que represente bem o efeito do amortecimento não é uma tarefa simples, visto que os parâmetros que medem o amortecimento não podem ser aferidos diretamente, mas sim das respostas das estruturas às cargas dinâmicas aplicadas. As respostas das estruturas reais dependem de um grande conjunto de fatores (geometria, solda, rebite, apoios, ambiente, entre outros), que causam dissipação de energia, da massa que introduz inércia (resistência a variação da velocidade) e da rigidez que permite armazenar energia no sistema, além dos fatores operacionais e ambientais.

Modelos matemáticos que representem a realidade da forma mais fiel possível e que também facilitem a resolução das equações de movimento são desejáveis. Neste contexto, a compreensão dos mecanismos de dissipação de energia em estruturas e de materiais é de fundamental importância, pois irá permitir modelar e determinar as respostas das estruturas com maior fidelidade.

#### 2.1 Modelos reológicos

Nesta seção vários modelos reológicos são descritos do ponto de vista fenomenológico, representados por uma combinação de molas, que relacionam tensão e deformação por  $\sigma = E \epsilon$ , e de amortecedores viscosos, que relacionam tensão e deformação por  $\sigma = c \dot{\epsilon}$ .

Entretanto, estes modelos não descrevem o comportamento dos muitos materiais reais de forma simples, sendo, para isto, necessária uma combinação complexa de mola e amortecedores. Quanto maior for a precisão desejada e mais complexo for o comportamento do material, maior será o número de molas e amortecedores que terão de ser associados para obter-se um modelo matemático que se ajuste aos dados experimentais.

Vários modelos reológicos que utilizam associações de molas e de amortecedores viscosos são apresentados na literatura [Creus, 1986] e [Findley e Onaran, 1976], sendo que os modelos mais conhecidos são: Kelvin, Maxwell, sólido de três elementos, Kelvin Generalizado, Maxwell Generalizado, e quatro elementos (Maxwell-Kelvin) [Riera, 1996].

A figura 2.1 apresenta os modelos citados

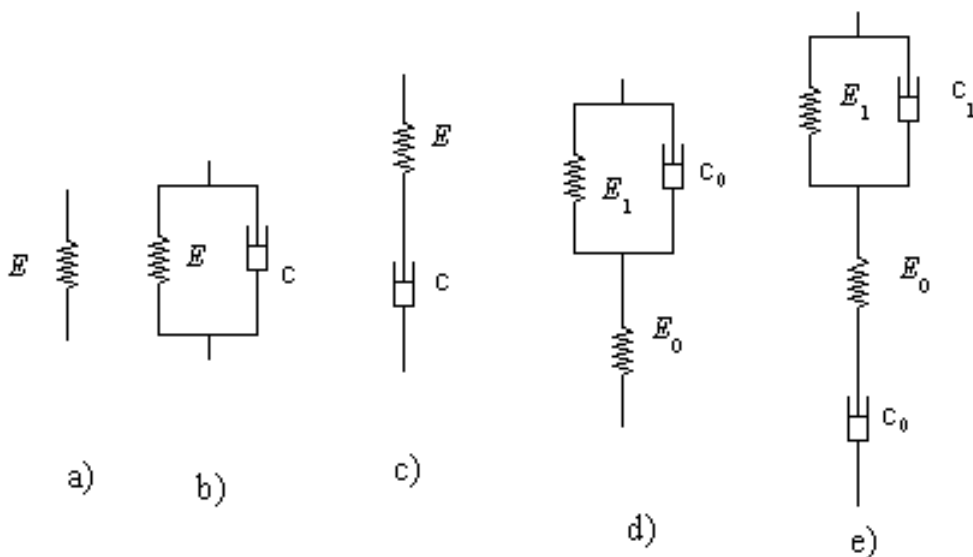


Figura 2.1 – Materiais representados por associação de molas e amortecedores: c) material de Kelvin, d) material de Maxwell, e) material de três elementos e f) material de quatro elementos.

As relações constitutivas do material viscoso e elástico são respectivamente:

$$\sigma = c \dot{\epsilon} \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  é a tensão,  $c$  é o coeficiente de amortecimentos viscoso,  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação,

$$\sigma = E \epsilon, \quad (2.2)$$

onde  $\sigma$  é a tensão,  $E$  é o módulo de Young e  $\epsilon$  é a deformação.

As equações diferenciais dos modelos reológicos são:

$$\sigma = E \epsilon + c \dot{\epsilon}, \quad \text{modelo Kelvin} \quad (2.3)$$

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{c} = \dot{\epsilon}, \quad \text{modelo Maxwell} \quad (2.4)$$

$$\sigma(E_1 + E_0) + \dot{\sigma} c = E_1 E_0 \epsilon + E_0 c \dot{\epsilon}, \quad \text{modelo de três elementos} \quad (2.5)$$

$$\sigma + \dot{\sigma} \left( \frac{c_0}{E_0} + \frac{c_1}{E_1} + \frac{c_0}{E_1} \right) + \ddot{\sigma} \frac{c_1 c_0}{E_1 E_0} = \dot{\epsilon} c_0 + \ddot{\epsilon} \frac{c_0 c_1}{E_1}, \quad \text{modelo de quatro elementos.} \quad (2.6)$$

onde  $c_i$  e  $k_i$  são os coeficientes de atrito viscoso e de rigidez.

Para representar o comportamento de um material de forma mais realístico deve-se adicionar derivadas de ordem superior de  $\sigma$  e de  $\epsilon$  na eq. (2.6), que no modelo reológico corresponde à adição de amortecedores e molas, obtendo-se no limite o modelo denominado padrão generalizado.

### Modelo Padrão Generalizado

Qualquer material viscoelástico real pode ser descrito, através do modelo *Standard* Generalizado, que é da seguinte forma

$$\left[ a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots \right] \sigma(t) = \left[ b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots \right] \epsilon(t), \quad (2.7)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são coeficientes constantes que caracterizam o material. Observe que assumindo-se valores adequados para as constantes  $a_i$  e  $b_i$ , os modelos matemáticos, eqs. (2.1)-(2.6) são obtidos e, portanto, constituem-se em casos especiais do Modelo *Standard* Generalizado.

### Relação módulo elástico e fator de perda

Considere-se agora um elemento uniaxial, cuja área da seção é  $A$  e o comprimento é  $L$ . A força total no elemento  $F(t)$  é dado por  $A\sigma$ , e o deslocamento  $x$ , é dado por  $\epsilon L$ . Multiplicando ambos os membros da eq. (2.7) por  $AL$ , obtém-se a expressão que relaciona a força  $f(t)$  e o deslocamento  $x(t)$ ,

$$\left[ a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots \right] \frac{Lf(t)}{A} = \left[ b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots \right] x(t). \quad (2.8)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier, na eq.(2.8), e utilizando suas propriedades obtém-se

$$\begin{aligned} & [(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + i(-a_1\omega + a_3\omega^3 - a_5\omega^5 + \dots)] \frac{LF(\omega)}{A} = \\ & = [(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + i(-b_1\omega + b_3\omega^3 - b_5\omega^5 + \dots)] X(\omega), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $F(\omega)$  e  $X(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $f(t)$  e  $x(t)$ , dadas por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{e} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt. \quad (2.10)$$

A eq. (2.9) pode ser reescrita como

$$[A_1(\omega) + iA_2(\omega)] \frac{LF(\omega)}{A} = [B_1(\omega) + iB_2(\omega)] X(\omega), \quad (2.11)$$

onde  $A_1(\omega)$  e  $B_1(\omega)$  representam funções reais e pares da frequência, enquanto  $A_2(\omega)$  e  $B_2(\omega)$  são funções reais e ímpares da frequência, visto que a soma de funções pares é par e a soma de funções ímpares é ímpar. Da eq. (2.11), é possível obter uma expressão explícita para a transformada da força

$$F(\omega) = \frac{AE'(\omega)}{L} [1 + i \eta(\omega)] X(\omega), \quad (2.12)$$

na qual

$$E'(\omega) = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{A_1^2 + B_1^2} \quad (2.13)$$

e

$$\eta(\omega) = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_1 + A_2 B_2}. \quad (2.14)$$

O produto  $E'(\omega)[1 + i \eta(\omega)] = E^*(\omega)$  é denominado módulo complexo de Young e  $\eta(\omega)$  o fator de perda [Nashif e Henderson, 1985], [Christensen, 1971], [Bert, 1973], [Creus, 1986] e [Flügge, 1975]. Outra notação usual para o módulo complexo é,

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + i E''(\omega) \quad (2.15)$$

onde  $E'$  é denominado módulo elástico e  $E''$  módulo de perda e o fator de perda  $\eta$  é dado por

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}. \quad (2.16)$$

Estão apresentados, a seguir, a relação entre módulo elástico  $E'(\omega)$  e o fator de perda  $\eta(\omega)$  de alguns materiais citados anteriormente e os coeficientes de amortecimentos e rigidez usados para modelá-los.

- Modelo de material elástico perfeito

$$E'(\omega) = E \quad (2.17)$$

$$\eta(\omega) = 0. \quad (2.18)$$

- Modelo Kelvin

$$E'(\omega) = E \quad (2.19)$$

$$\eta(\omega) = -\frac{c}{E}\omega. \quad (2.20)$$

- Modelo Maxwell

$$E'(\omega) = \frac{c^2 E}{E^2 + c^2 \omega^2} \omega^2 \quad (2.21)$$

$$\eta(\omega) = -\frac{E}{c\omega}. \quad (2.22)$$

### 2.1.1 Amortecimento histerético

O amortecimento representado pelo fator de perda, eqs. (2.20) e (2.22), varia rapidamente com a frequência, mas os materiais reais não apresentam, em geral, este tipo de comportamento. O fator de perda varia com a frequência de modo mais lento para alguns materiais, portanto estes modelos para materiais com amortecimento, obtidos combinando-se amortecedores viscosos e molas elásticas não é uma solução ideal, apesar de descrever qualitativamente o efeito do amortecimento. No entanto, o amortecimento histerético, proposto por [?], descreve bem o comportamento de materiais que apresentam variação do amortecimento muito suave ou nula com a frequência, e é matematicamente simples de operar, sendo representado por

$$E^* = E' + E'' i, \quad (2.23)$$

e o fator de perda por

$$\eta = \frac{E''}{E'}, \quad (2.24)$$

ou seja, a força que atua sobre o sistema pode ser calculada somando-se as componentes das forças, devido ao amortecimento, à componente da força, devido à parte elástica. Neste caso o módulo de perda  $E''$  ("loss modulus") e o módulo de elasticidade  $E'$  ("storage modulus"), são constantes (não variam com a frequência) e são obtidos, experimentalmente, através de excitação harmônica. Em intervalos, onde o amortecimento tem pouca dependência da frequência, o amortecimento histerético modela bem o material, como por exemplo, os materiais de baixos amortecimentos usados em estruturas. Por outro lado, em materiais de alto amortecimento, o módulo de elasticidade e o módulo de perda variam com a frequência e temperatura e os resultados obtidos, usando este modelo, não serão precisos.

### 2.1.2 Módulo complexo

Uma abordagem clássica para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos é aquela em que a equação de movimento está no domínio da frequência, e um módulo de rigidez complexo aparece em substituição ao módulo de Young real. Nesta abordagem, o módulo complexo é obtido experimentalmente através de excitação harmônica controlada, [Ewins, 1980] e [E756-93, 1993]. Abaixo são apresentadas as expressões dos diferentes módulos complexos.

- **Módulo de Young Complexo**

O módulo complexo é equivalente ao módulo de elasticidade  $E$  e é representado por  $E^*(\omega)$  e expresso por

$$E^*(\omega) = E'(\omega)(1 + i\eta_e(\omega)), \quad (2.25)$$

onde  $E'(\omega)$  é o componente real do módulo complexo,  $\eta(\omega)$  é o fator de perda. Uma das grandes vantagens de se trabalhar com o módulo complexo é que uma formulação elástica, é transformada em viscoelástica substituindo o módulo de elasticidade  $E$  pelo módulo complexo  $E^*(\omega)$ . Um problema elástico é levado para o domínio da viscoelasticidade substituindo-se o módulo elástico real pelo correspondente módulo complexo. Abaixo estão apresentadas as relações entre os módulos:

- **Módulo Complexo de Cisalhamento**

$$G^* = G'(1 + i\eta_s) \quad (2.26)$$

onde  $G^*$  é o módulo de cisalhamento complexo e  $G'$  é o componente real e  $\eta_s$ , o fator de perda devido ao cisalhamento.

- **Razão Complexa de Poisson**

$$E^* = 2(1 + \nu^*)G^* \quad (2.27)$$

onde  $\nu^*$  é a razão de poisson complexo. Realizando-se algumas operações algébricas e tomando  $\nu^* = \nu'(1 + i\eta)$ , chega-se a um resultado mais interessante, como mostrado a seguir

$$\frac{E^*}{2G^*} = (1 + \nu^*), \quad (2.28)$$

e

$$\frac{E^* \bar{G}^*}{2G^* \bar{G}^*} = (1 + \nu^*), \quad (2.29)$$

substituindo-se as expressões de  $G^*$  e  $\bar{G}^*$ , obtém-se

$$(1 + \nu^*) = E' G' \frac{1 - i\eta_s + i\eta_e + \eta_s \eta_e}{2(G')^2(1 + \eta_s^2)}, \quad (2.30)$$

e assumindo que  $\eta_e \cong \eta_s$  [Nashif e Henderson, 1985], a parte imaginária de  $\nu^*$  será muito pequena, resulta que

$$E' = 2(1 + \nu')G' \quad (2.31)$$

e

$$\nu' = \frac{E'}{2G'} - 1, \quad (2.32)$$

logo, a variação da componente real  $\nu'$ , com a frequência e temperatura, pode ser determinada através dos componentes reais  $E'$  e  $G'$ .

Na fig. 2.2 são mostradas a variação do fator de perda e da rigidez, com a frequência e na figura 2.3 são mostradas as respostas de um sistema de um grau de liberdade, com amortecimentos modelados como sendo histerético, viscoso e complexo.

Observa-se na fig. 2.3 que as respostas calculadas variam de acordo com o modelo matemático adotado para o amortecimento.



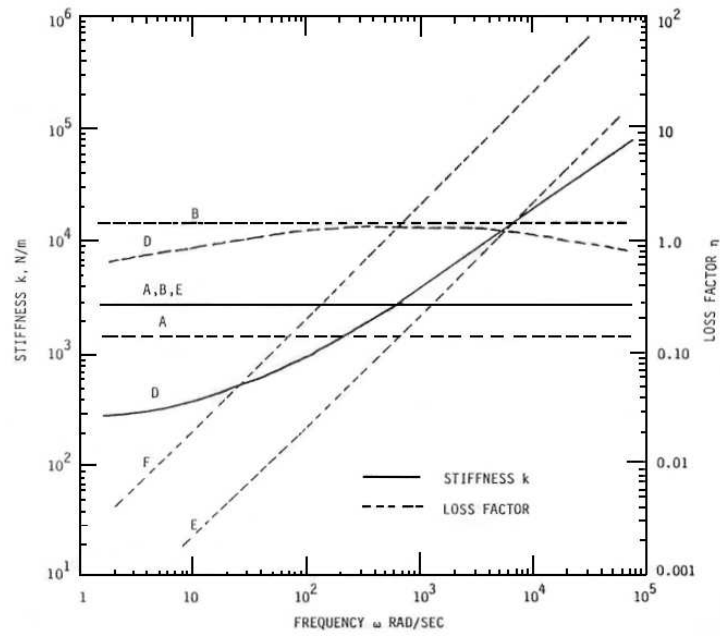


Figura 2.2 – Variação do fator de perda e amortecimentos com a frequência, obtidos por [Nashif e Henderson, 1985]: A e B amortecimentos histerético, D módulo complexo, E e F amortecimentos viscoso.

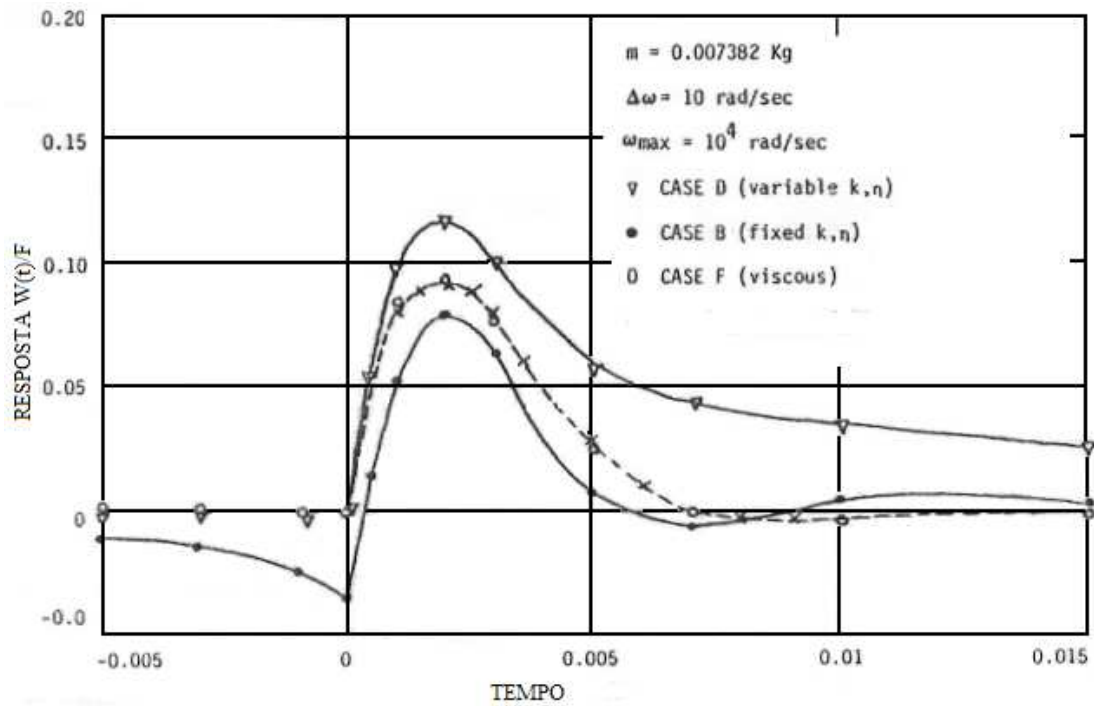


Figura 2.3 – Resposta de um sistema de um grau de liberdade para amortecimentos viscoso (caso F), histerético (caso B) e módulo complexo (caso D).

## 2.2 Integral hereditária, modelo reológico na forma integral

Para se obter uma descrição precisa do comportamento de um material viscoelástico real com alto amortecimento, usando a relação constitutiva na forma diferencial dada pela eq. (2.7), será necessário usar vários termos da série, o que tornará sua utilização trabalhosa pois as várias constantes da equação terão que ser determinadas experimentalmente.

Uma outra forma de equação constitutiva, na forma integral, que pode representar igualmente bem um material viscoelástico, pode ser encontrada em [Creus, 1986], [Gross, 1958] e [Flügge, 1975], a qual é apresentada nesta seção, mas antes alguns conceitos importantes serão desenvolvidos para melhor compreensão do modelo.

### 2.2.1 Função de fluência

A função de fluência é obtida aplicando-se uma tensão constante  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  ao material de teste, onde  $H(t)$  é a função degrau unitário (função de Heaviside). A evolução da deformação com o tempo, pode ser expressa pela relação constitutiva

$$\epsilon(t) = D(\sigma(t)), \quad (2.33)$$

onde  $D$  é um operador. Substituindo o carregamento  $\sigma(t)$  dado acima tem-se

$$\epsilon(t) = \sigma_0 D(H(t)) = \sigma_0 J(t), \quad (2.34)$$

aqui  $J(t)$  é denominado de função de fluência e representa a deformação do material por unidade de tensão [Creus, 1986], ou seja, aplicando-se uma tensão unitária constante sobre o corpo em teste, em um determinado instante, a deformação resultante é  $J(t)$ . Para um material elástico perfeito tem-se

$$J(t) = \frac{1}{E} \quad (2.35)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

### 2.2.2 Função de relaxação

Aplicando-se sobre o corpo de teste uma deformação  $\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t)$ , a tensão resultante é dada por

$$\sigma(t) = F(\epsilon_0 H(t)) = \epsilon_0 F(H(t)) = \epsilon_0 Y(t), \quad (2.36)$$

onde  $F$  é um operador linear e  $Y(t)$  é a função de relaxação que representa a tensão resultante, no corpo de teste, por unidade de deformação aplicada. Para um material elástico perfeito tem-se

$$Y(t) = E. \quad (2.37)$$

Observe que nos exemplos acima as funções dadas pelas eqs (2.35) e (2.37) não são dependentes do tempo, portanto o material testado não apresenta o comportamento

hereditário que caracteriza os materiais viscoelásticos. Abaixo, são apresentadas as curvas esquemáticas de teste de fluência e relaxação para um material viscoelástico:

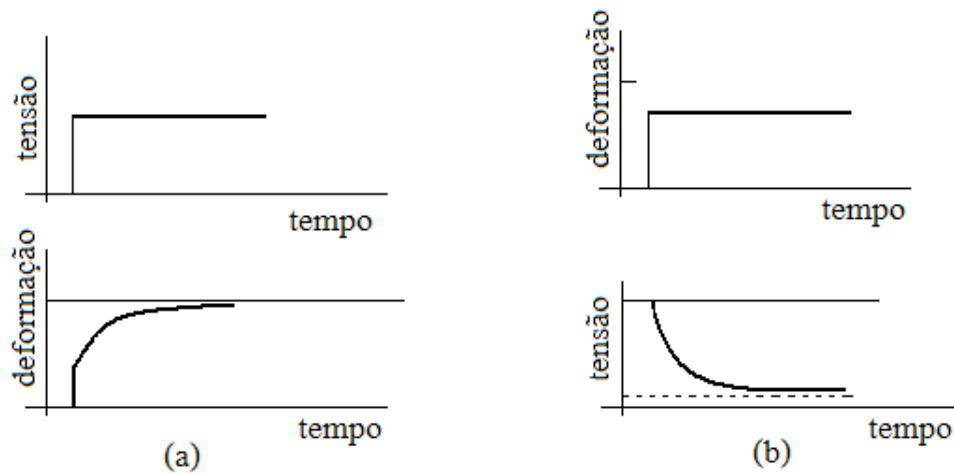


Figura 2.4 – (a) teste de fluência e (b) teste de relaxação.

A fig. 2.4 mostra o comportamento típico de um material viscoelástico, caracterizado pela evolução da deformação do corpo de teste com o tempo, apesar da intensidade da tensão aplicada manter-se constante com o decorrer do tempo. Em virtude da deformação, na fig. 2.4(a), tender a um limite a uma deformação  $\epsilon$ , é possível concluir que o material do corpo de teste é um sólido, nos casos em que o material do corpo de teste for um fluido, a deformação deve tender ao infinito.

As curvas apresentadas na fig. 2.4(b) são obtidas aplicando-se uma deformação constante, ao longo do tempo (função de Heaviside), sobre o corpo de teste, observando-se a evolução da tensão com o tempo, a qual tende a um limite a uma tensão  $\sigma$ , o que informa que o material do corpo de prova é um sólido. No caso em que a tensão tender a zero, o material testado é um líquido e diz-se que deverá ocorrer relaxação completa do corpo de teste. Na fig. 2.4(a) a curva de deformação será a função de fluência se a tensão aplicada for unitária e em (b) a curva da tensão será a função de relaxação se a deformação aplicada for unitária.

### 2.2.3 Integral hereditária

A tensão aplicada sobre um corpo de teste pode ser representada como a soma de incrementos de tensão  $\Delta\sigma$  aplicados nos instantes  $\tau$ , como é demonstrado a seguir

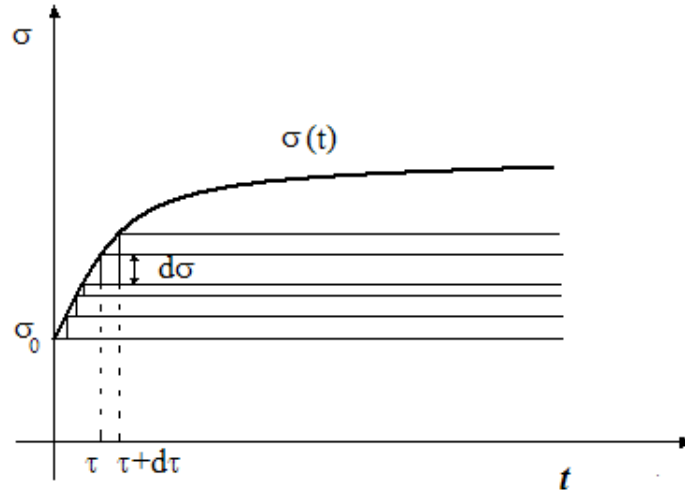


Figura 2.5 – Tensão  $\sigma(t)$  descrita como soma incrementos

Usando a função degrau unitário tem-se

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{k=0}^N d\sigma H(t - \tau_k) \quad (2.38)$$

e no limite

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \int_0^t d\dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.39)$$

onde  $\dot{\sigma} = d\sigma/d\tau$ .

Para um material linear, a deformação no instante  $t$  pode também ser calculada pela superposição das deformações causadas pelos incrementos de tensão  $d\sigma$ , no intervalo  $0 < \tau < t$ , então, usando-se a eq. (2.34) segue que

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (2.40)$$

ou utilizando-se integração por partes, tem-se equivalentemente

$$\epsilon(t) = \sigma(t) J(0) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau. \quad (2.41)$$

Esta fórmula mostra como a deformação em um instante  $t$  qualquer depende de tudo o que aconteceu antes deste instante, ou seja, da história do carregamento. Ela descreve, portanto, o comportamento hereditário do material.

No caso do material elástico perfeito a integral desaparece, pois a função fluência é constante, e, neste tipo de material, o comportamento hereditário não se apresenta, ou seja, a deformação em um instante  $t$  depende somente da tensão aplicada naquele instante.

De modo semelhante, a tensão resultante em um corpo de prova, ao aplicar-se uma deformação qualquer, é dada usando o princípio da superposição por

$$\sigma(t) = \epsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t-\tau) \frac{d\epsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.42)$$

e, realizando-se integração por partes,

$$\sigma(t) = \epsilon(t) Y(0) + \int_0^t \epsilon(\tau) \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau \quad (2.43)$$

quando é dada a história da deformação.

Na eq. (2.43),  $Y(0)$  é denominado módulo instantâneo e será representado por  $E_0$  [Muravyov, 1997b], representando a derivada da função de relaxação por

$$\frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} = E_0 \Gamma(t-\tau) \quad (2.44)$$

onde a função  $\Gamma(t-\tau)$  é denominada núcleo de relaxação, então

$$\sigma(t) = E_0 \left( \epsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \epsilon(\tau) d\tau \right). \quad (2.45)$$

A função  $\Gamma(t-\tau)$  pode ser aproximada pela série de Prony:

$$\Gamma(t-\tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}, \quad (2.46)$$

onde as constantes  $a_i$  e  $\alpha_i$  são determinadas pelo ajuste da curva de dados obtido no teste de relaxação.

## CAPÍTULO 3

### RESPOSTA DE UM SISTEMA DE MATERIAL VISCOELÁSTICO HOMOGÊNEO

Neste capítulo é desenvolvida uma metodologia para o cálculo da resposta de um sistema de material viscoelástico homogêneo. A equação de movimento [Menon and Tang, 2004] para este caso é

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + K \left[ x(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau)x(\tau)d\tau \right] = F(t) \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Aqui, o núcleo de relaxação,  $\Gamma(t - \tau)$ , é aproximado pela série de Prony, ou seja

$$\Gamma(t - \tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}. \quad (3.2)$$

As constantes  $a_i$  e  $\alpha_i$ , que caracterizam o material, são obtidas experimentalmente, veja Muravyov [Muravyov, 1997a] para detalhes experimentais e o método para ajuste dos dados experimentais obtidos no teste de relaxação.

A seguir são apresentadas algumas metodologias para obtenção de resposta de sistemas elásticos de um e múltiplos graus de liberdade que podem ser usadas para resolver problemas viscoelásticos, utilizando o princípio da analogia elástico/viscoelástico; é também apresentada a solução dinâmica e os procedimentos para obter-se a solução de um problema elástico, usando a solução dinâmica e sua extensão para o caso viscoelástico.

### 3.1 Resposta de um sistema elástico de um grau de liberdade

Nesta seção são descritos os procedimentos necessários para se obter a resposta de um sistema dinâmico elástico. O objetivo da análise de vibrações é prever a resposta de sistemas vibrantes para evitar efeitos indesejados como fadiga de material, desconforto, colapso ou danos em estruturas e ruídos, para isso é necessário criar um modelo matemático do sistema físico e resolvê-lo. A resposta do sistema será obtida solucionando-se as equações diferenciais resultantes da modelagem. Portanto, a qualidade da resposta está limitada à qualidade do modelo e de sua correta solução, logo partindo-se de um modelo pobre uma solução precisa não será alcançada.

O sistema de um grau de liberdade aqui analisado é o modelo onde os parâmetros massa, rigidez e amortecimento estão concentrados, e cuja equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (3.3)$$

sendo,  $m$  a massa do sistema,  $c$  o coeficiente de amortecimento viscoso,  $k$  o coeficiente de rigidez da mola e  $f(t)$  a força externa aplicada sobre o sistema. A fig. 3.1, mostra o modelo em questão, onde o amortecimento foi modelado como sendo do tipo viscoso.

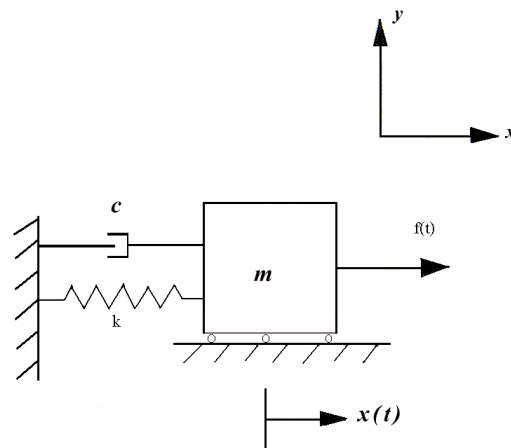


Figura 3.1 – Representação de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso.



A solução analítica da eq. (3.3) pode ser obtida pelo método espectral e pelo método operacional, os quais são descritos nas próximas seções.

### 3.1.1 Método espectral

Este método consiste em decompor a resposta em duas partes, uma livre e outra forçada (princípio da decomposição) e obter a resposta livre considerando-a como sendo uma função do tipo exponencial [Claeysen et al., 2004]. A resposta livre é obtida resolvendo-se a equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (3.4)$$

obtida da eq. (3.3) tornando-se a força externa nula, isto é,  $f(t) = 0$ . Assumindo uma solução do tipo  $x(t) = e^{\lambda t}$  para a eq. (3.4), obtém-se o polinômio característico

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k. \quad (3.5)$$

As raízes deste polinômio são os parâmetros  $\lambda$ . O polinômio característico é de segundo grau, logo existirão duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que fornecerão as soluções

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando o princípio da superposição,  $x(t)$  é escrito como

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (3.7)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, calculadas usando-se as condições iniciais.

Uma análise das raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é necessária. As raízes podem ser reais repetidas, reais distintas, ou complexas.

### 3.1.2 Método operacional

Este método consiste em converter a equação diferencial (3.3) numa equação operacional, no domínio de Laplace  $s$ , aplicando-lhe a transformada de Laplace e utilizando as condições iniciais dadas. Resolvendo-se a equação operacional, obtém-se a resposta do sistema no domínio  $s$ , e a resposta, no domínio do tempo, é obtida aplicando-se a transformada

inversa de Laplace [Boyce, W. E. and DiPrima, R. C., 1979]. A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (3.8)$$

onde  $f(t)$  é integrável. Portanto a resposta, no domínio  $s$ , do sistema representado na fig. 3.1 é obtida de

$$\mathcal{L}[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx] = \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.9)$$

e, utilizando-se as propriedades da transformada de Laplace, tem-se

$$m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + c(sX(s) - x(0)) + kX(s) = F(s). \quad (3.10)$$

Agrupando-se os termos semelhantes, tem-se

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0) + F(s) \quad (3.11)$$

e, então, a resposta do sistema no domínio  $s$  é dada por

$$X(s) = \left( \frac{ms + c}{ms^2 + cs + k} \right) x_0 + \left( \frac{1}{ms^2 + cs + k} \right) m\dot{x}_0 + \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} \quad (3.12)$$

A resposta  $x(t)$ , no domínio do tempo, é obtida calculando-se a transformada inversa de Laplace de  $X(s)$ .

### 3.2 Solução fundamental

Nos métodos Espectral e Operacional, o comportamento do sistema é conhecido depois que as condições iniciais são aplicadas. Uma solução que não tenha dependência das condições iniciais e carregue somente informações do sistema é de interesse, pois ela pode ser usada como uma base para representar a resposta do sistema dinâmico, esta solução é denominada resposta impulso ou solução dinâmica, definida a seguir.

Denomina-se solução fundamental  $h(t)$  do sistema de um grau de liberdade, representado na fig. 3.1, a solução do seguinte problema inicial

$$\begin{aligned} m\ddot{h}(t) + c\dot{h}(t) + kh(t) &= 0, \\ m\dot{h}(0) &= 1, \quad h(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A resposta impulso do caso com  $N$  graus de liberdade (matricial) é apresentado na subseção 3.3.2, e é obtido resolvendo

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{h}}(t) + C\dot{\mathbf{h}}(t) + K\mathbf{h}(t) &= 0, \\ M\dot{\mathbf{h}}(0) &= I, \quad \mathbf{h}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são matrizes,  $\mathbf{I}$  matriz identidade e  $\mathbf{h}(t)$  vetor.

A eq. (3.13) pode ser resolvida pelo método operacional. Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$m \left( s^2 H(s) - sh(0) - \dot{h}(0) \right) + c (sH(s) - h(0)) + kH(s) = 0 \quad (3.15)$$

e, substituindo-se as condições iniciais, obtém-se a seguinte expressão

$$H(s) = \frac{1}{(ms^2 + cs + k)}. \quad (3.16)$$

A solução fundamental  $h(t)$  é obtida aplicando-se a transformada inversa de Laplace em  $H(s)$  e será

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{\text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n} \quad (3.17)$$

onde,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  e  $c = 0$ , ou seja sem amortecimento. Para o caso com amortecimento tem-se

$$h(t) = \frac{1}{m} e^{-\xi\omega_n t} \frac{\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d} \quad (3.18)$$

onde  $\xi = c/2m\omega_n < 1$ ,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .

A relação entre a entrada e a saída, para o problema dado pela eq. (3.3), quando o sistema parte da origem e com velocidade inicial nula, é

$$X(s) = H(s)F(s), \quad (3.19)$$

onde  $H(s)$  é a denominada função de transferência ou admitância do sistema. Por exemplo, para um sistema de um grau de liberdade sem amortecimento, excitado por  $f(t) = \text{sen}(\omega t)$ , onde  $\omega = 2\omega_n$ , tem-se

$$H(s) = \frac{1}{(ms^2 + k)}, \quad (3.20)$$

$$F(s) = \frac{2\omega_n}{(s^2 + 4\omega_n^2)}, \quad (3.21)$$

e usando a eq. (3.19) obtém-se

$$X(s) = \frac{1}{(ms^2 + k)} \frac{2\omega_n}{(s^2 + 4\omega_n^2)} \quad (3.22)$$

e calculando a transformada inversa para  $m = 1$  e  $k = 1$ , tem-se

$$x(t) = \frac{2}{3}\text{sen}(t) - \frac{1}{3}\text{sen}(2t) \quad (3.23)$$

cujo gráfico é

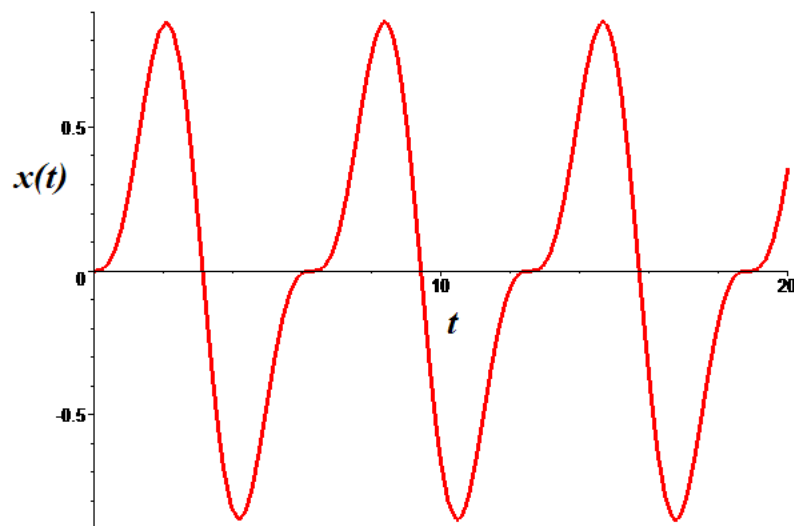


Figura 3.2 – Resposta do sistema de um grau de liberdade sem amortecimento excitado com  $\omega = 2\omega_n$ .

### Interpretação da solução fundamental

É mostrado a seguir que a solução fundamental  $h(t)$ , obtida da eq. (3.13), sob o ponto de vista físico, é interpretada como a resposta do sistema, inicialmente em repouso e na origem, a uma carga impulsiva aplicada,  $\delta(t)$ .

Ao modelar um sistema de um grau de liberdade, inicialmente em repouso, no qual uma carga impulsiva, representada pela função delta de Dirac  $\delta(t)$ , é aplicada, a seguinte equação do movimento resultará

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \delta_\epsilon(t) \\ \dot{x}(0) &= 0 \quad \text{e} \quad x(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A função delta, definida no intervalo  $\tau - \epsilon$  e  $\tau + \epsilon$  como  $\delta_\epsilon(t) = 1/\epsilon$ , tem a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1. \quad (3.25)$$

Para mostrar a relação entre solução dinâmica e a resposta de um sistema à carga impulsiva aplicada, integra-se a equação do movimento eq. (3.24) no intervalo  $[-\epsilon, \epsilon]$ ,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(t) dt \quad (3.26)$$

e assim,

$$m\dot{x}(t)|_{-\epsilon}^{\epsilon} + cx(t)|_{-\epsilon}^{\epsilon} + k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(t) dt = 1 \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$m(\dot{x}(\epsilon) - \dot{x}(-\epsilon)) + c(x(\epsilon) - x(-\epsilon)) + k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_\epsilon(t) dt = 1. \quad (3.28)$$

Utilizando a notação  $0^-$  para o instante imediatamente anterior à aplicação do impulso e por  $0^+$ , o instante imediatamente posterior, e visto que a massa do sistema encontra-se inicialmente na origem, em repouso e devido a sua inércia e a curta duração da aplicação da carga, a seguinte afirmação é verdadeira:

$$\begin{aligned} x(0^-) &= x(0^+) = 0 \\ \dot{x}(0^-) &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

e quando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$c(x(0^+) - x(0^-)) = 0, \quad (3.30)$$

$$k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t) dt = 0, \quad (3.31)$$

logo, da eq. (3.28) tem-se que

$$m(\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)) = 1. \quad (3.32)$$

Como a velocidade imediatamente anterior a aplicação do impulso é nula, tem-se

$$m\dot{x}(0^+) = 1, \quad (3.33)$$

e como o impulso unitário no limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) é

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t), \quad (3.34)$$

segue que

$$m\dot{x}(0) = 1. \quad (3.35)$$

Então, pode-se concluir que a resposta de um sistema de um grau de liberdade, dada pela eq. (3.24), é equivalente a resposta do seguinte problema inicial

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \\ m\dot{x}(0) &= 1, \quad \text{e } x(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

ou seja, a resposta de um sistema a uma carga impulsiva é idêntica à sua solução dinâmica.

O seguinte resultado é de interesse adiante: a derivada da solução de uma equação diferencial linear, com coeficientes constantes é a solução da equação diferencial. Assim, utilizando o princípio da superposição pode-se escrever a solução para o problema (3.13), na forma

$$h_0(t) = \dot{h}(t)m + h(t)c. \quad (3.37)$$

Substituindo-se a eq. (3.37) na eq. (3.13), verifica-se que esta solução satisfaz as condições iniciais

$$m\dot{h}_0(0) = 1, \quad h_0(0) = 0. \quad (3.38)$$

Portanto,  $h_0(t)$  também é solução.

### 3.2.1 Solução de um problema inicial não forçado $f(t) = 0$

Dado o problema inicial

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

sua resposta  $x(t)$  pode ser escrita como

$$x(t) = h_0(t)x_0 + h(t)m\dot{x}_0, \quad (3.40)$$

onde,  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$  são constantes e  $h(t)$ ,  $h_0(t)$  são soluções da equação homogênea, deste modo, pelo princípio da superposição,  $x(t)$  também é solução da equação diferencial homogênea, e visto que:

$$x(0) = h_0(0)x_0 + h(0)m\dot{x}_0 = x_0 \quad (3.41)$$

e

$$\dot{x}(0) = \dot{h}(0)x_0 + \dot{h}(0)m\dot{x}_0 = \dot{x}_0. \quad (3.42)$$

Portanto, a eq. (3.40), representada em termos da solução fundamental, é solução do problema (3.39), visto que ela satisfaz as condições iniciais do problema. Portanto, obtida a solução fundamental do sistema, ela pode ser usada para representar as respostas do sistema dinâmico.

As soluções dinâmicas do sistema de um grau de liberdade, mostrada na fig. 3.1, estão apresentadas em forma de tabela em [Claeyssen et al., 2004].

### 3.2.2 Solução de um problema inicial forçado $f(t) \neq 0$

Dado o problema

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= f(t), \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

a resposta, no domínio de Laplace, é dada pela equação operacional

$$X(s) = [sH(s)m + H(s)c]x_0 + H(s)m\dot{x}_0 + H(s)F(s), \tag{3.44}$$

e a resposta, no domínio do tempo é:

$$x(t) = \left( \dot{h}(t)m + h(t)c \right) x_0 + h(t)m\dot{x}_0 + \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)]. \tag{3.45}$$

Observe que a eq. (3.45), a resposta  $x(t)$ , é representada em termos da resposta dinâmica  $h(t)$  que caracteriza o sistema, onde o termo  $\mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)]$  é calculado, utilizando-se a propriedade da convolução.

### 3.3 Respostas de sistemas elásticos com múltiplos graus de liberdade

Nesta seção, é descrito o procedimento para o cálculo da resposta de um sistema de  $n$  graus de liberdade utilizando-se a resposta dinâmica. O estudo inicia-se pela modelagem física e aplicação da condição de equilíbrio ou balanço de energia para obter a equação de movimento, na forma padrão:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t), \tag{3.46}$$

onde

- $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes  $n \times n$  que representam respectivamente os parâmetros massa, amortecimento e rigidez do sistema;
- $x$  é um vetor de ordem  $n \times 1$  cujos componentes representam os deslocamentos;
- $f(t)$  é o vetor que representa a carga externa aplicada ao sistema.



Obtida a equação de movimento eq. (3.46), é necessário resolvê-la e analisar a resposta obtida.

### 3.3.1 Resposta do sistema em termos da solução dinâmica

A resposta do sistema  $x(t)$ , em termos de  $h(t)$ , é obtida aplicando-se a transformada de Laplace na eq. (3.46):

$$M (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + C (sX(s) - x(0)) + KX(s) = F(s) \quad (3.47)$$

ou

$$\Delta(s)X(s) = M\dot{x}(0) + (sM + C)x(0) + F(s), \quad (3.48)$$

e

$$\Delta(s) = s^2 M + sC + K. \quad (3.49)$$

onde  $\dot{x}(0)$  e  $x(0)$  são vetores e  $\Delta(s)$  matriz.

Então da eq. (3.48) tem-se que a resposta  $X(s)$  no domínio de Laplace, é

$$X(s) = H(s)M\dot{x}(0) + H(s)(sM + C)x(0) + H(s)F(s), \quad (3.50)$$

e

$$H(s) = \Delta^{-1}(s) \quad (3.51)$$

onde  $H(s)$  é uma matriz.

Calculando-se a transformada inversa de Laplace, da eq. (3.50), obtém-se

$$x(t) = h(t)M\dot{x}(0) + (\dot{h}(t)M + h(t)C)x(0) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (3.52)$$

representando a resposta no domínio do tempo, em termos da solução dinâmica. Onde  $h(t)$  e  $\dot{h}(t)$  são matrizes e  $x(t)$  é um vetor.

Para a resposta dinâmica, o seguinte é válido:

$$H(s)\Delta(s) = I \quad (3.53)$$

e

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = I, \quad (3.54)$$

o que permite expressar  $H(s)$ , utilizando a identidade de Cramer, como

$$H(s) = \frac{\text{adj}(\Delta(s))}{\det(\Delta(s))}. \quad (3.55)$$

Estas propriedades serão usadas na seção seguinte, no cálculo da resposta dinâmica de um sistema de  $n$  graus de liberdade.

### 3.3.2 Solução fundamental de um sistema de $n$ graus de liberdade

A solução dinâmica é obtida resolvendo-se o seguinte problema

$$\begin{aligned} M\ddot{h} + C\dot{h} + Kh &= 0 \\ M\dot{h}(0) &= I \quad \text{e} \quad h(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes,  $I$  matriz identidade e  $h$ ,  $\dot{h}$ , e  $\ddot{h}$  são matrizes.

Aplicando-se a transformada de Laplace e utilizado as condições iniciais obtém-se

$$H(s) = \frac{1}{s^2M + sC + K}, \quad (3.57)$$

onde a matriz de transferência do sistema  $H(s)$  relaciona entrada e saída, da seguinte forma

$$X(s) = H(s)F(s). \quad (3.58)$$

### 3.3.3 Cálculo da solução dinâmica de um sistema, com múltiplos graus de liberdade, por equação em diferença

A resposta dinâmica pode ser descrita pela série de Taylor

$$h(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \frac{t^j}{j!}, \quad (3.59)$$

onde  $h_j = h^{(j)}(0)$  é uma matriz.

A seguinte equação em diferença é obtida substituindo-se a eq. (3.59) na eq. (3.56)

$$\begin{aligned} Mh_{j+2} + Ch_{j+1} + Kh_j &= 0, \quad j = 0 : 2n - 2 \\ Mh_1 &= I, \quad h_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

### 3.3.4 Fórmula fechada para a matriz de transferência e a solução dinâmica

Para se obter uma expressão para  $H(s)$  e  $h(t)$ , partir-se-á da eq. (3.55), onde o termo  $adj(\Delta(s))$  é substituído por  $B(s)$ , que é um polinômio de ordem menor do que  $2n - 1$  e  $det(\Delta(s))$ , por  $p(s)$ , resultando em

$$p(s) = det(s^2M + sC + K) = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^{2n-k}, \quad (3.61)$$

e

$$H(s) = \frac{B(s)}{p(s)}. \quad (3.62)$$

A derivada de ordem  $k$  do polinômio  $B(s)$  em zero será denotado por  $B_k$ , ou seja,  $B_k = B^{(k)}(0)$ . Da ordem do polinômio  $B(s)$  tem-se que

$$B_{2n-1} = B_{2n} = 0 \quad (3.63)$$

Para se obter uma fórmula fechada para  $H(s)$ , o termo  $B(s)$  na eq. (3.62) será desenvolvido em série de Taylor, visto que  $B^{(k)}(0) = B_k = 0$  para  $k > 2n$ , assim então

$$B(s) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{B_{2n-k}}{(2n-k)!} s^{2n-k} \quad (3.64)$$

Em conseqüência, obtendo-se  $B_{2n-k}$ , ter-se-á uma expressão para  $B(s)$  que substituída na eq. (3.62) dará a matriz de transferência.

Para se obter uma fórmula que forneça  $B_{2n-k}$  faz-se o seguinte desenvolvimento. Fazendo-se as mudanças de notação na eq. (3.55) obtém-se

$$B(s)\Delta(s) = \Delta(s)B(s) = p(s)I, \quad (3.65)$$

visto que,  $B(s)$  e  $\Delta(s)$  comutam, bem como suas derivadas, então é possível escrever

$$\frac{d^j}{ds^j} [\Delta(s)B(s)] = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \Delta^i(s)B^{j-i} = p^j(s)I, \quad (3.66)$$

e derivando a eq. (3.49) obtém-se

$$\Delta^{(i)}(0) = \begin{cases} K, & i = 0 \\ C, & i = 1 \\ 2M, & i = 2 \\ 0, & i > 2 \end{cases} \quad (3.67)$$

Derivando o polinômio característico eq. (3.61) obtém-se

$$p^j(0) = \begin{cases} j! b_{2n-j} & j = 0 : 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (3.68)$$

Substituindo as eqs. (3.67) e (3.68) na eq. (3.66) obtém-se a equação em diferença

$$\begin{cases} KB_j + jCB_{j-1} + j(j-1)MB_{j-2} = j!b_{2n-j}, & j = 2 : 2n, \\ B_{2n-1} = B_{2n} = 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Desta relação pode-se obter o termo  $B_{2n-k}$  necessário na eq. (3.64) de  $B(s)$ .

Para obter-se uma expressão mais simples para a eq. (3.69), realiza-se a seguinte mudança de variável

$$A_j = \frac{B_{2n-j}}{(2n-j)}. \quad (3.70)$$

Substituindo a eq. (3.70) na eq. (3.67), tem-se

$$\begin{cases} MA_{j+2} + CA_{j+1} + KA_j = b_j I & j = 0 : 2n - 2 \\ A_0 = A_1 = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

A solução da eq. (3.71) é

$$A_i = \sum_{i=0}^{j-1} b_i h_{j-i-1}, \quad (3.72)$$

como pode ser verificado, substituindo-se a eq. (3.72) na eq. (3.71) e utilizando as condições iniciais dadas pela equação em diferença (3.60).

A eq. (3.64), após a mudança de variável, será escrita em termos de  $A_j$  como

$$B(s) = \sum_{k=1}^{2n} A_k s^{2n-k}. \quad (3.73)$$

Substituindo-se a eq. (3.72) na eq. (3.73) obtém-se

$$B(s) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=0}^{k-1} b_i s^{2n-k} h_{k-i-1} \quad (3.74)$$

e, realizando uma reordenação dos índices

$$B(s) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{i-j-1} h_{2n-j}. \quad (3.75)$$

Agora, substituindo-se a eq. (3.75) na eq. (3.62), a matriz de transferência é dada por

$$H(s) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{i-j-1}}{p(s)} h_{2n-j}. \quad (3.76)$$

A solução dinâmica necessária para representar a resposta  $x(t)$ , dada pela eq. (3.52), é obtida calculando-se a transformada inversa de Laplace de  $H(s)$ , ou seja

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} H(s) e^{st} ds, \quad (3.77)$$

logo

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^{j-i-1} \frac{e^{st}}{p(s)} ds \right) h_{2n-j}. \quad (3.78)$$

O termo integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} s^j \frac{e^{st}}{p(s)} ds \quad (3.79)$$

corresponde a  $j$ -ésima derivada da função

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{st}}{p(s)} ds \quad (3.80)$$

que é a solução do seguinte problema inicial

$$b_0 d^{(2n)}(t) + b_1 d^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n-1} d^{(1)}(t) + b_{(2n)} d(t) = 0, \quad (3.81)$$

$$d(0) = 0, \quad d^{(1)}(0) = 0, \quad \dots, \quad d^{(2n-2)}(0) = 0 \quad b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1$$

Assim, usando a eq. 3.78, obtém-se

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{j-i-1}(t) h_{2n-j}, \quad (3.82)$$

onde,  $b_i$  são os coeficientes do polinômio característico dado pela eq. (3.61),  $h_{2n-j}$  e  $d^{j-i-1}(t)$  são obtidos resolvendo-se os problemas dados pelas eq. (3.60) e (3.81), respectivamente.

### 3.4 Solução de problema dinâmico viscoelástico em vibração livre

A resposta do problema dado pela eq. (3.1) em vibração livre,  $f(t) = 0$ , em termos da solução dinâmica é

$$x(t) = \left( \dot{h}(t)M + h(t)C \right) x_0 + h(t)M\dot{x}_0. \quad (3.83)$$

Pode-se notar que, conhecida a solução dinâmica  $h(t)$  e as condições iniciais do problema, a resposta  $x(t)$  estará caracterizada. A solução dinâmica do problema que apresenta comportamento hereditário será obtida resolvendo-se o seguinte problema

$$M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + K \left[ h(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)h(\tau)d\tau \right] = \delta(t)I \quad (3.84)$$

$$M\dot{h}(0) = 0 \quad \text{e} \quad h(0) = 0$$

onde o núcleo  $\Gamma(t-\tau)$  será aproximado pela série de Prony. Assim,

$$M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + K \left[ h(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} h(\tau)d\tau \right] = I\delta(t). \quad (3.85)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace, na eq. (3.85), obtém-se a matriz de transferência

$$H(s) = \left( Ms^2 + Cs + K \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right) \right)^{-1}, \quad (3.86)$$

e tomando-se um termo na série

$$H(s) = \left( Ms^2 + Cs + K \left( 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right) \right)^{-1}, \quad (3.87)$$

ou

$$H(s) = (s + \alpha) (s^3 M + s^2 A + sB + D)^{-1} \quad (3.88)$$

ou ainda,

$$H(s) = (s + \alpha) \hat{H}(s), \quad (3.89)$$

onde

$$\hat{H}(s) = \hat{\Delta}^{-1}(s) \quad (3.90)$$

e

$$\hat{\Delta}(s) = s^3 M + s^2 A + sB + D, \quad (3.91)$$

sendo  $A = \alpha M + C$ ,  $B = \alpha C + K$  e  $D = K(\alpha - a)$ . Assim, da eq. 3.89, a solução dinâmica  $h(t)$ , usando-se a transformada inversa de Laplace, é

$$h(t) = \dot{\hat{h}}(t) + \alpha \hat{h}(t). \quad (3.92)$$

Portanto, para se obter a solução dinâmica  $h(t)$  é necessário calcular  $\hat{h}(t)$ , o que é conseguido observando-se que  $\hat{H}(s)$  está associada ao problema inicial

$$\begin{aligned} M \ddot{\hat{h}}(t) + A \ddot{\hat{h}}(t) + B \dot{\hat{h}}(t) + D \hat{h}(t) &= 0 \\ M \ddot{\hat{h}}(0) = I \quad \dot{\hat{h}}(0) = 0 \quad \hat{h}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

e de sua solução  $\hat{h}(t)$  é obtida. Na seção seguinte será apresentada, a metodologia desenvolvida por Claeysen [Claeysen et al., 1999] para a solução de uma equação diferencial de ordem  $m$ .

### 3.4.1 Solução da equação diferencial de ordem $m$

A solução de uma equação diferencial de ordem  $m$  qualquer [Claeyssen et al., 1999], é obtida da mesma forma que a de ordem 2, utilizando-se a fórmula de variação de parâmetros e a solução dinâmica obtida da fórmula fechada, que utiliza as equações algébrica, diferencial e em diferença, as quais são apresentadas a seguir.

#### A fórmula fechada

$$\hat{h}(t) = \sum_{j=1}^{mn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{mn-j} \quad (3.94)$$

Na eq. (3.93),  $m$ , a ordem da equação diferencial é 3, e  $n$ , o número de graus de liberdade do sistema depende da modelagem e define a dimensão da matriz  $M$ . As equações algébrica, diferencial e em diferença são:

#### Equação algébrica

Os coeficientes  $b_i$  são os coeficientes do polinômio  $p(s)$

$$p(s) = \det(\hat{\Delta}(s)), \quad (3.95)$$

onde  $\hat{\Delta}(s) = Ms^3 + As^2 + Bs + D$ .

#### Equação em diferença

Os termos  $h_{mn-j}$  são obtidos de

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m A_j h_{m+k-j} &= 0 \\ Mh_{m-1} &= I \quad \text{e} \quad h_j = 0 \quad j = 0 : m-2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

para  $m = 3$  e  $n = 1$

$$Mh_{3+k} + Ah_{2+k} + Bh_{1+k} + Dh_k = 0 \quad (3.97)$$

#### Equação diferencial

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{mn} b_j d^{(j)}(t) &= 0 \\ b_0 d_{mn-1} &= 1, \quad d^j(0) = 0, \quad j = 0 : mn-2 \end{aligned} \quad (3.98)$$



para  $m = 3$  e  $n = 1$

$$\begin{aligned} b_0 d(t) + b_1 d^{(1)}(t) + b_2 d^{(2)} + b_3 d^{(3)}(t) &= 0 \\ d(0) = 0, \quad d^{(1)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad b_0 d^{(2)}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde  $b_i$  são os coeficientes do polinômio característico  $p(s)$ .

### 3.5 Exemplos

#### 3.5.1 Resposta de um sistema de um grau de liberdade em vibração livre com mola viscoelástica

Neste exemplo, a resposta de um sistema de um grau de liberdade, com mola viscoelástica, com as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 1,5$ , é calculada e comparada com a analítica obtida resolvendo-se a equação de movimento, eq. (3.1), para testar a validade do método. A resposta  $x(t)$ , utilizando a eq. (3.83) é

$$x(t) = 1,5 h(t). \quad (3.100)$$

Os parâmetros que caracterizam o sistema são  $\alpha = 2$ ,  $a = 2$ ,  $c = 0$ ,  $m = 1$  e  $k = 1$ , resultando portanto em

$$\Gamma(t - \tau) = 2 e^{-2(t-\tau)}. \quad (3.101)$$

A resposta dinâmica é obtida utilizando a eq. (3.92) e  $\hat{h}(t)$ , resolvendo o problema dado pela eq. (3.93) são

$$\hat{h}(t) = 1 - e^{-t}t - e^{-t} \quad (3.102)$$

$$h(t) = 2 - e^{-t}t - 2e^{-t} \quad (3.103)$$

cuja forma é mostrada na figura abaixo

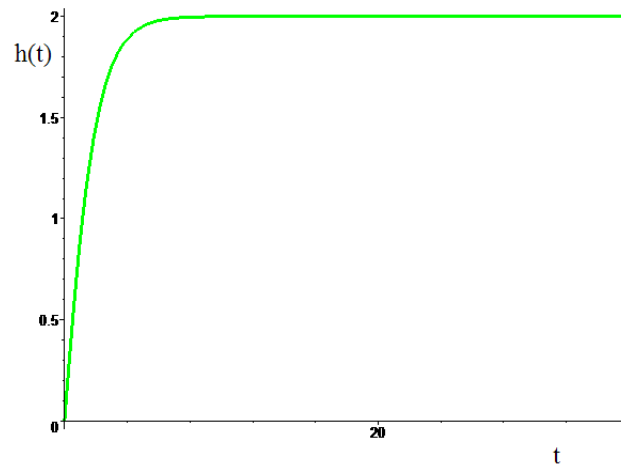


Figura 3.3 – Resposta dinâmica  $h(t)$  do sistema com amortecimento viscoelástico.

O deslocamento  $x(t)$  obtido usando a base dinâmica, ao longo do tempo, e a solução analítica  $x(t) = -(1.5t + 3)e^{-t} + 3$  são mostrados na figura abaixo

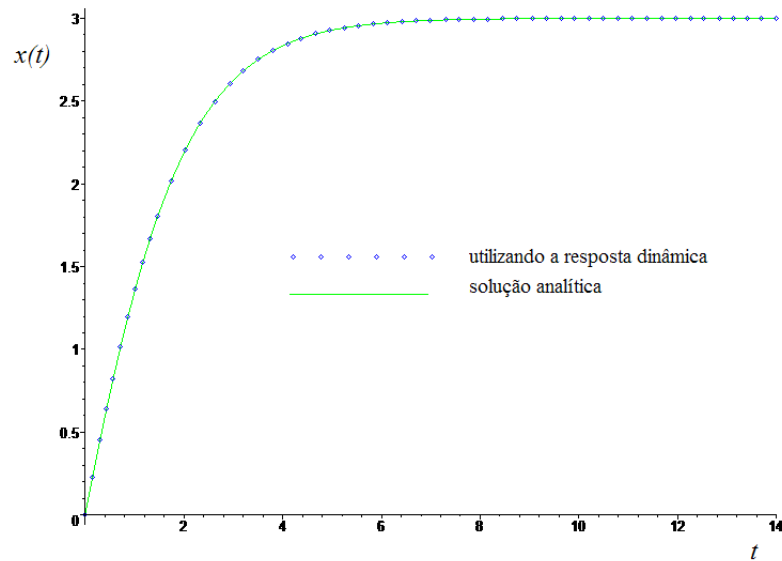


Figura 3.4 – Gráfico comparativo do resultado analítico e do resultado obtido usando a resposta dinâmica.

O gráfico permite inferir que os resultados são idênticos.

### 3.5.2 Resposta de barra viscoelástica engastada em vibração livre

A resposta (deslocamento na direção axial) de uma barra viscoelástica engastada-livre, discretizada em 3 elementos e quatro nós utilizando elementos finitos, fig. 3.5 , é calculada utilizando-se a resposta dinâmica e comparada com a resposta obtida através do método operacional.

Os parâmetros de amortecimentos são  $\alpha = 2$ ,  $a = 2$  e onde  $\rho = 1400k/m^3$ ,  $A_s = 0,01 \times 0,01m^2$ ,  $l = 0,12m$  e  $E = 1,5 \cdot 10^7 N/m^2$ .

As condições iniciais do problema são  $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^t$  e  $\dot{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^t$ .

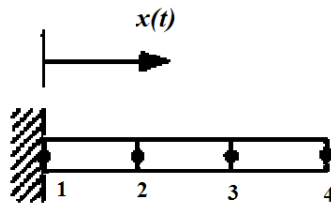


Figura 3.5 – Barra de material viscoelástico discretizada em três elementos e com quatro nós.

A resposta livre em termos da base dinâmica, é

$$x(t) = \left( \dot{h}(t)M + h(t)C \right) x_0 + h(t)M\dot{x}_0.$$

As matrizes de massa e rigidez  $M$  e  $K$ , obtidas da formulação em elementos finitos, para detalhes sobre o método veja [Inman, 1994], são:

$$M = \frac{\rho A_s l}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$K = \frac{3EA_s}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $A_s$  é a área da seção transversal,  $l$  é o comprimento da barra e  $E$  é o módulo de Young.

Recordando que  $\widehat{\Delta}(s) = Ms^3 + As^2 + Bs + D$ , onde  $A = \alpha M + C$ ,  $B = \alpha C + K$  e  $D = K(\alpha - a)$ , e que

$$H(s) = (s + \alpha)\widehat{H}(s)$$

e

$$\widehat{h}(t) = \sum_{j=1}^{mn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{mn-j}$$

onde,  $b_i$ ,  $h_{mn-j}$  e  $d^{(j-i-1)}(t)$  são obtidas de (3.95), (3.97) e (3.99), as curvas de  $d(t)$ ,  $\widehat{h}(t)$  e  $h(t)$  são mostradas a seguir nas figs 3.6 a 3.12

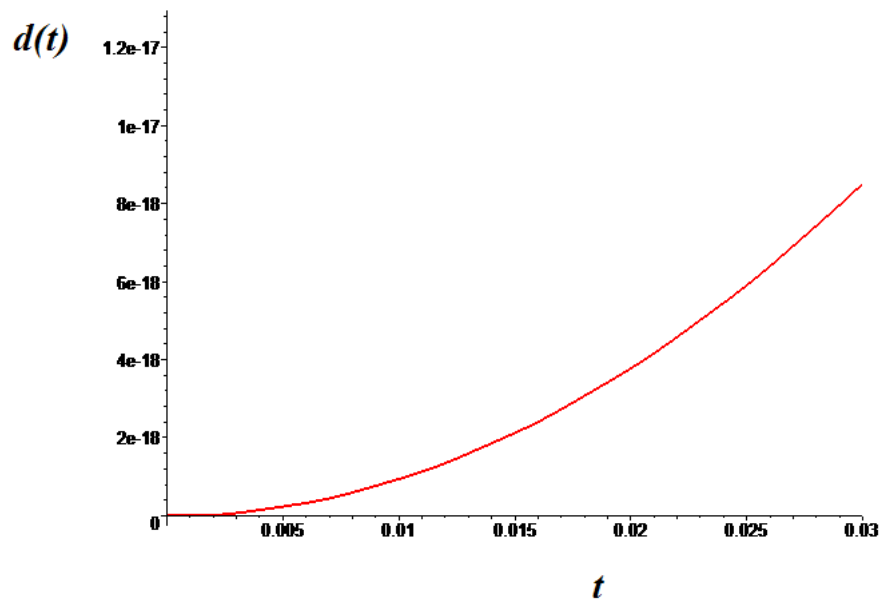


Figura 3.6 – Curva de  $d(t)$ .

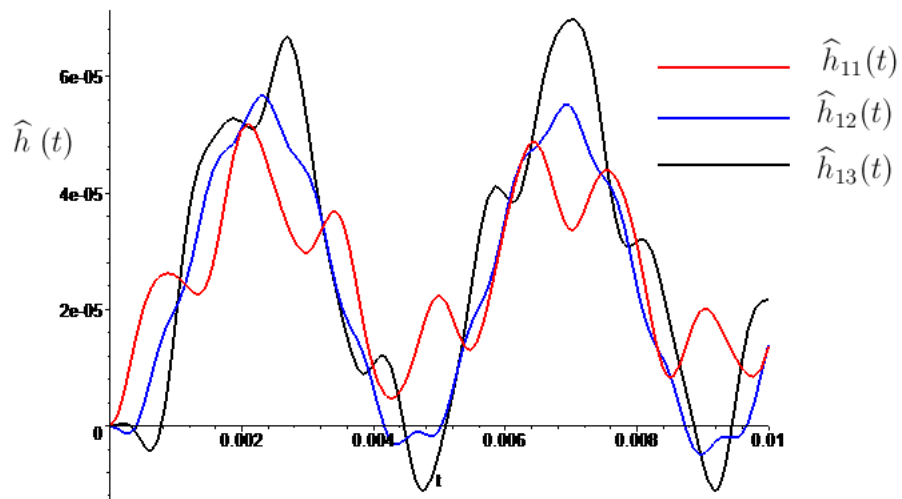


Figura 3.7 – Curvas de  $\hat{h}_{11}$ ,  $\hat{h}_{12}$  e  $\hat{h}_{13}$ .

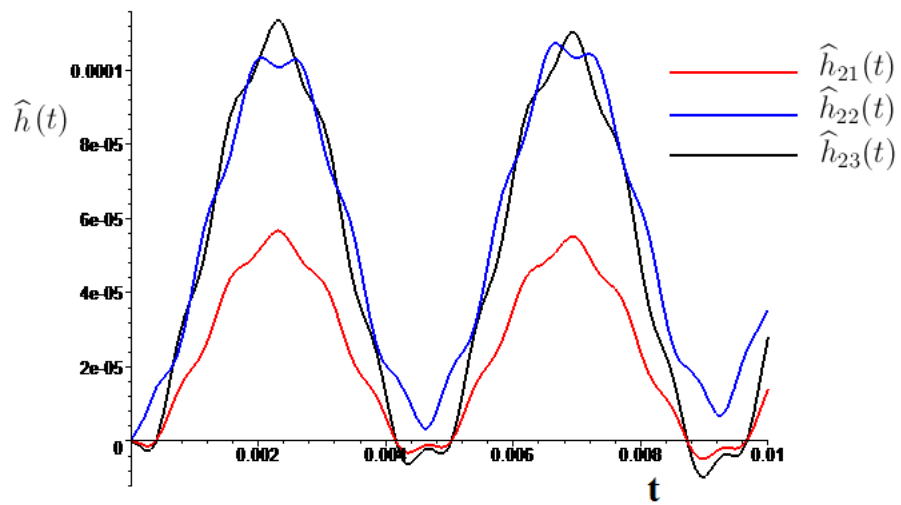


Figura 3.8 – Curvas de  $\hat{h}_{21}$ ,  $\hat{h}_{22}$  e  $\hat{h}_{23}$ .

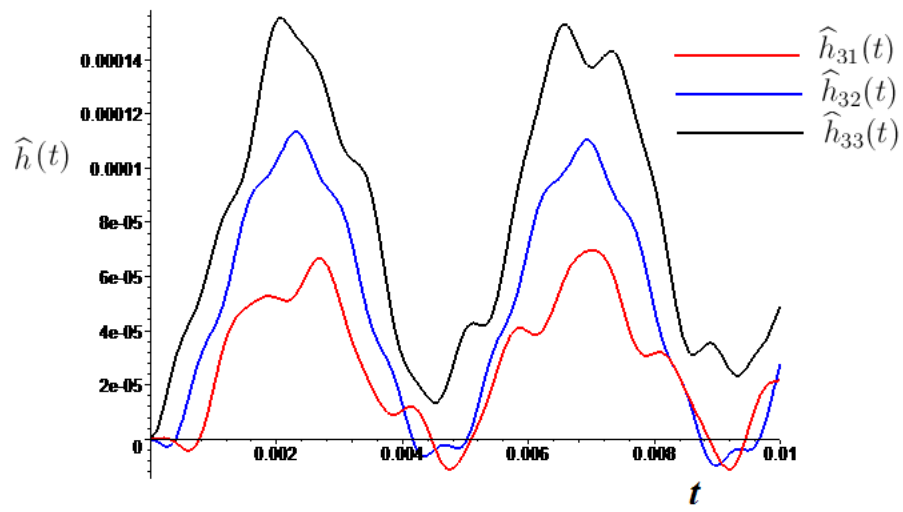


Figura 3.9 – Curvas de  $\hat{h}_{31}$ ,  $\hat{h}_{32}$  e  $\hat{h}_{33}$ .

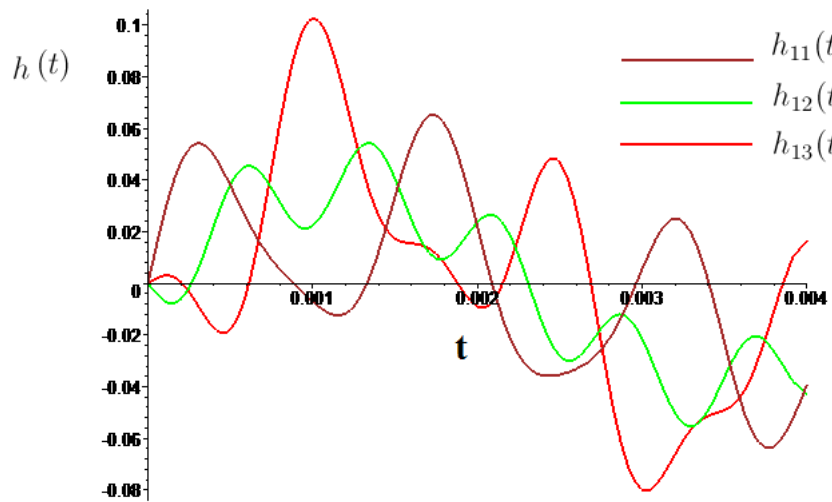


Figura 3.10 – Curvas de  $h_{11}$ ,  $h_{12}$  e  $h_{13}$ .

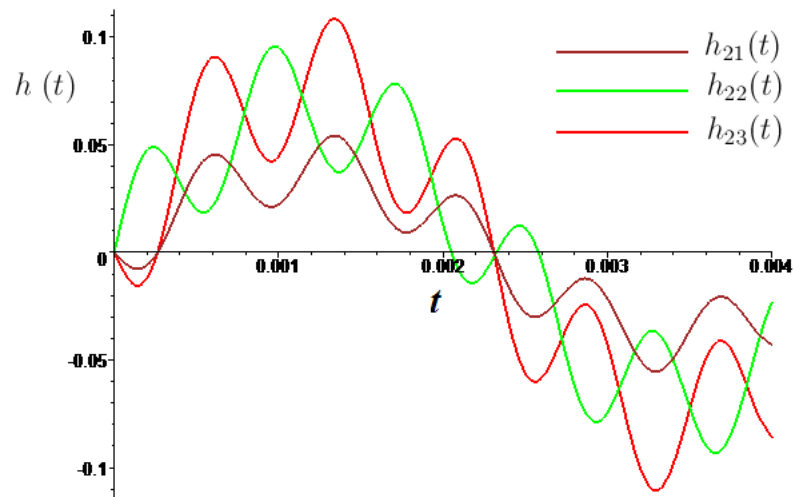


Figura 3.11 – Curvas de  $h_{21}$ ,  $h_{22}$  e  $h_{23}$ .

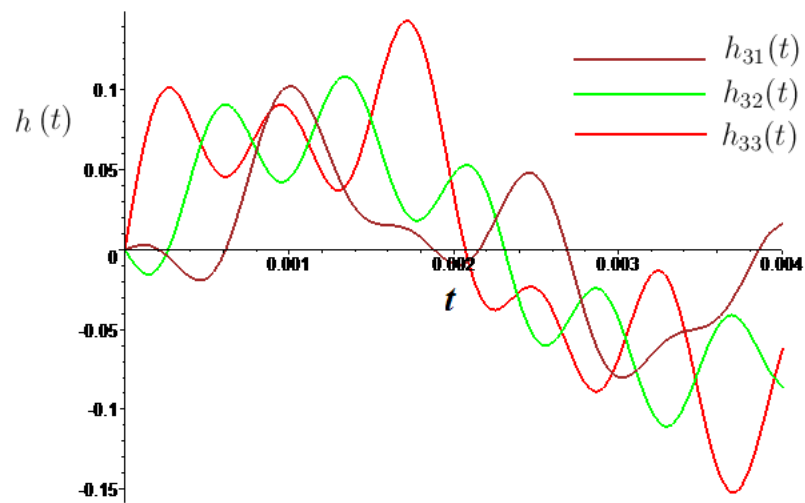


Figura 3.12 – Curvas de  $h_{31}$ ,  $h_{32}$  e  $h_{33}$ .

A fig. 3.13 mostra os resultados obtidos utilizando-se a resposta dinâmica e o resultado obtido usando a transformada de Laplace, onde pode-se observar que os resultados estão de acordo.

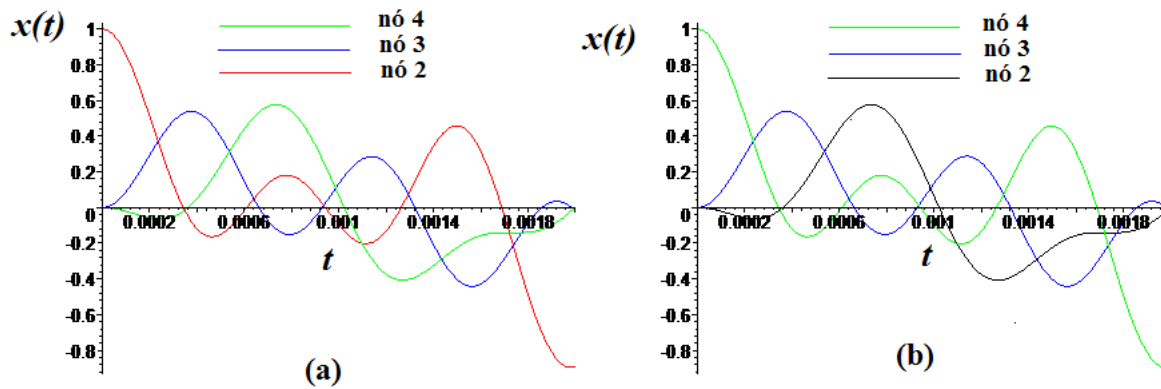


Figura 3.13 – Gráfico comparativo do resultado obtido utilizando a resposta dinâmica (a) e o obtido usando a transformada de Laplace (b).

### 3.5.3 Resposta de barra viscoelástica engastada, em vibração forçada

Nesta seção, a resposta da barra, mostrada na figura 3.5, excitada por uma carga harmônica  $f(t) = \text{sen}(50t)$  aplicada ao nó 4, cujos parâmetros de amortecimentos são  $\alpha = 2$ ,  $a = 2$  e as matrizes de massa  $M$  e rigidez  $K$  são obtidas da formulação em elementos finitos, é calculada e comparada como o resultado obtido pelo método operacional. Aqui, as condições iniciais são nulas e a resposta impulso é a mesma do caso anterior. A resposta força é

$$x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) f(\tau) \quad (3.104)$$

a fig. 3.14 mostra os resultado obtido usando resposta impulso e a transformada de Laplace,



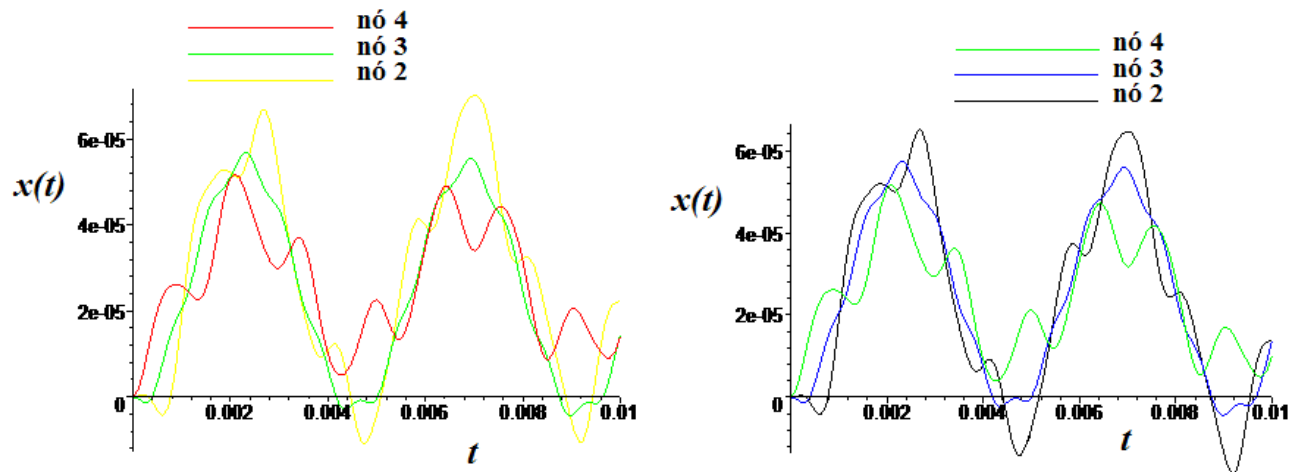


Figura 3.14 – Resposta forçada da barra de material viscoelástico.

Nos gráficos pode-se observar boa concordância entre os dos resultados obtidos usando a base dinâmica e a transformada de Laplace.

## CAPÍTULO 4

### PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

O princípio da correspondência, ou analogia elástico/viscoelástico, diz que um problema viscoelástico pode ser resolvido utilizando-se a mesma metodologia usada para resolver o problema elástico. Para isto substitui-se, no modelo matemático elástico, os parâmetros que caracterizam o material elástico pelos operadores que caracterizam o material viscoelástico, ou seja, substitui-se o módulo de elasticidade  $E$ , módulo de cisalhamento  $G$  e razão de Poisson  $\nu$  pelos operadores  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{G}$  e  $\tilde{\nu}$ .

#### 4.1 Princípio da correspondência na prática

Em termos práticos, o princípio da correspondência pode ser resumido em:

- obter a solução elástica;
- calcular a transformada de Laplace da solução elástica,
- substituir todos os parâmetros elásticos pelos seus equivalentes viscoelásticos;
- calcular a transformada inversa de Laplace para obter a resposta no domínio do tempo.

A seguir, a resposta de um sistema de um grau de liberdade viscoelástico é calculada utilizando-se o princípio da correspondência e representada usando a base gerada pela resposta impulso.

#### 4.2 Cálculo da resposta de um sistema de um grau de liberdade com mola viscoelástica

Nesta seção, a resposta de um sistema de um grau de liberdade constituído de uma massa e ligado a um referencial fixo, por meio de um elemento (mola ou viga) viscoelástico

é obtida, utilizando-se o princípio da correspondência.

A figura abaixo mostra um sistema de um grau de liberdade, com mola elástica. Observe que a mesma figura pode ser utilizada para ilustrar o problema viscoelástico análogo, sendo necessário apenas substituir a rigidez  $k$ , da mola elástica, por  $\tilde{k}$  da mola viscoelástica.

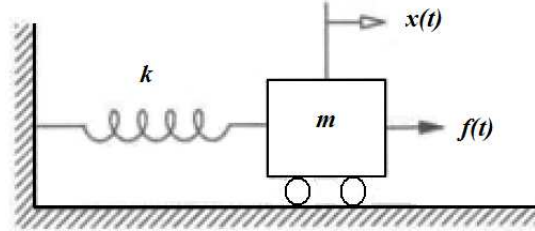


Figura 4.1 – Sistema de um grau de liberdade elástico.

A resposta do sistema acima é obtido como segue.

**Passo 1** - Calcular a resposta do problema de um grau de liberdade elástico

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4.1)$$

e no domínio de Laplace

$$m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) - kX(s) = F(s) \quad (4.2)$$

e cujo problema análogo viscoelástico tem equação de movimento

$$m\ddot{x}(t) + \tilde{k}x(t) = f(t) \quad (4.3)$$

$$m\ddot{x} + k_0 \left( 1(\cdot) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\cdot) d\tau \right) x(t) = f(t) \quad (4.4)$$

e no domínio de Laplace

$$m(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) - k_vX(s) = F(s) \quad (4.5)$$

onde,  $k_v$ , utilizando um termo da série é

$$k_v = \frac{E_0A}{l} \left[ 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right] \quad (4.6)$$

A solução da eq. (4.1), pelo método espectral é

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\frac{k}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\frac{k}{m}}t}. \quad (4.7)$$

Assumindo que a massa está inicialmente na origem,  $x_0 = 0$ , e que parte com velocidade inicial unitária,  $\dot{x}_0 = 1,5$ ,  $m = 1$  e  $k = 1$  resulta da eq. (4.7)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \sqrt{-\frac{k}{m}} - c_2 \sqrt{-\frac{k}{m}} = 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (4.8), obtém-se as constantes

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{k}{m}}} \quad (4.9)$$

e

$$c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{-\frac{k}{m}}}. \quad (4.10)$$

Logo

$$x(t) = \frac{1.5}{2\sqrt{-\frac{k}{m}}} e^{\sqrt{-\frac{k}{m}}t} - \frac{1.5}{2\sqrt{-\frac{k}{m}}} e^{-\sqrt{-\frac{k}{m}}t} = \frac{3}{2} \frac{\text{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t}{\sqrt{\frac{k}{m}}}. \quad (4.11)$$

Após substituírem-se os parâmetros massa e rigidez obtém-se a seguinte curva

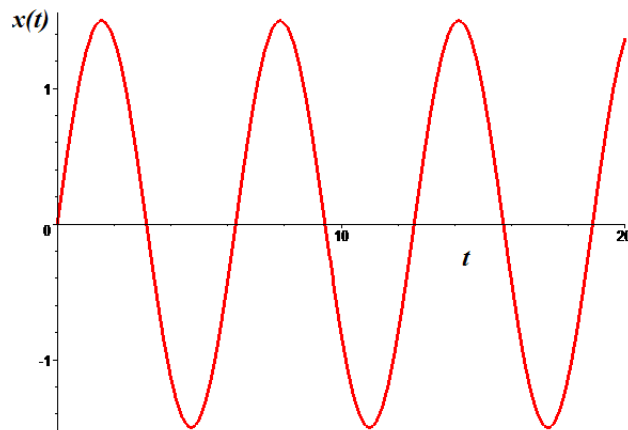


Figura 4.2 – Deslocamento  $x(t)$  ao longo do tempo.

**Passo 2** - Substituir os termos dependentes do tempo pelo equivalente transformado

$$X(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}} \quad (4.12)$$

**Passo 3** - Substituir as constantes elásticas pelas correspondentes viscoelásticas.

A rigidez no caso elástico, considerando que a massa está ligada ao referencial fixo por uma barra, é dada por

$$k = \frac{EA}{L}, \quad (4.13)$$

onde E é o módulo de Young, A a área da seção transversal e L o comprimento. Como visto anteriormente, a relação constitutiva, na forma integral é

$$\sigma(t) = E_0 \left( \epsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \epsilon(\tau) d\tau \right) \quad (4.14)$$

e o núcleo de relaxação

$$\Gamma(t - \tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} \quad (4.15)$$

O módulo de Young, no caso viscoelástico, tomando um termo da série de Prony será

$$E(s) = E_0 \left[ 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right] \quad (4.16)$$

logo a rigidez da viga viscoelástica é

$$\tilde{k} = \frac{E_0 \left[ 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right] A}{L} \quad (4.17)$$

e a resposta do problema viscoelástico no domínio de Laplace, após substituir  $k$  por  $\tilde{k}$  será

$$\bar{X}(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + \frac{\tilde{k}}{m}} \quad (4.18)$$

Agora substituindo-se a eq. (4.17) na eq. (4.18), obtém-se a expressão final para a resposta no domínio de Laplace:

$$X(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + \frac{E_0 A}{Lm} \left( 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right)} \quad (4.19)$$

A resposta no domínio do tempo  $x(t) = -(1.5t + 3)e^{-t} + 3$ , para condição inicial  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 1,5m/s$  e parâmetros  $a = 2$  e  $\alpha = 2$ , foi obtida aplicando-se a transformada inversa de Laplace à eq. (4.19).

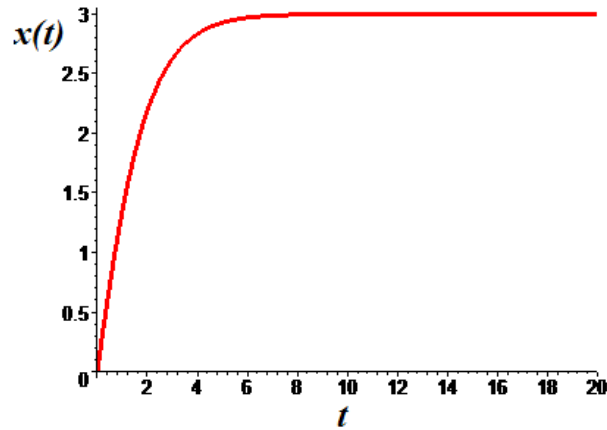


Figura 4.3 – Resposta de um sistema de um grau de liberdade calculada usando o princípio da correspondência.

Esta solução é idêntica à analítica  $x(t) = -(1.5t + 3)e^{-t} + 3$ .

### 4.3 Princípio da correspondência aplicado a uma barra viscoelástica

Seguindo o procedimento prático, citado anteriormente, o cálculo da resposta de uma barra viscoelástica inicia-se resolvendo o problema elástico análogo ao viscoelástico, mostrado abaixo.

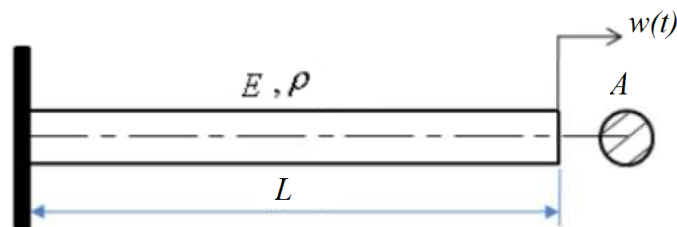


Figura 4.4 – Barra homogênea de seção constante e comprimento L.

**Problema elástico** - A equação de movimento do problema elástico análogo ao viscoelástico é

$$\left(\frac{E}{\rho}\right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4.20)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à eq.(4.20), obtém-se,

$$\left(\frac{E}{\rho}\right) W_{xx}(x, s) + F(x, s) = s^2 W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0) \quad (4.21)$$

ou

$$c^2 W_{xx}(x, s) + F(x, s) = s^2 W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0) \quad (4.22)$$

onde

$$c^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (4.23)$$

A resposta de uma barra elástica, em vibração livre  $f(t) = 0$ , com  $E = 20 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $\rho = 8 \times 10^3 kg/m^3$ ,  $l = 5m$ , e condições iniciais  $w_0 = 0m$  e  $\dot{w}_0 = 0,03m/s$  é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(\sigma_n x) \text{sen}(\sigma_n ct) + d_n \text{sen}(\sigma_n x) \cos(\sigma_n ct) \quad (4.24)$$

onde

$$\sigma_n = \frac{2n-1}{2l} \quad (4.25)$$

e utilizando as condições iniciais

$$w(x, t) = 2,43 \times 10^{-5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{10}\right) \text{sen}(500(2n-1)t). \quad (4.26)$$

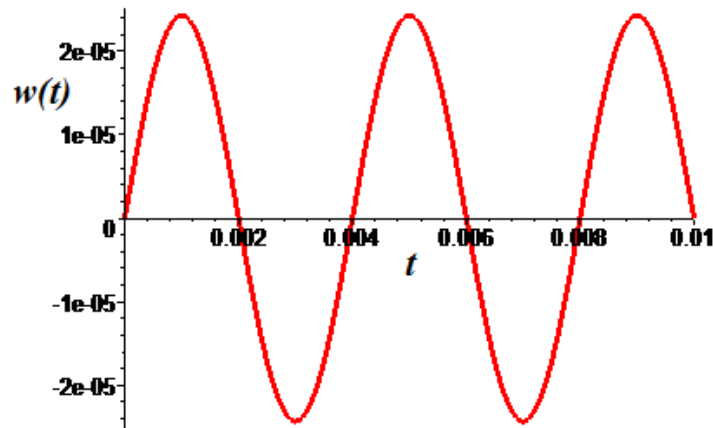


Figura 4.5 – Resposta de uma barra elástica em  $x = l$ .

A resposta, dada pela eq. (4.26), apresentada na fig. (4.3) foi obtida usando o método da separação de variáveis e a propriedade da ortogonalidade dos modos [Inman, 1994] e [Meirovitch, 1967].

**Problema viscoelástico** - A equação de movimento da barra viscoelástica engastada é

$$\left(\frac{\tilde{E}}{\rho}\right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.27)$$

Observe que a equação é a mesma do caso elástico, diferindo apenas o módulo de Young, visto que a única mudança que ocorreu, na modelagem do problema, foi o tipo de material da barra, cuja relação constitutiva neste caso é

$$\sigma(t) = E_0 \left( \epsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \epsilon(\tau) d\tau \right), \quad (4.28)$$

onde núcleo  $\Gamma(t-\tau)$  é aproximado por

$$\Gamma(t-\tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}. \quad (4.29)$$

O módulo viscoelástico equivalente ao módulo de Young elástico é

$$E(s) = E_0 \left[ 1 - \frac{a}{s + \alpha} \right]. \quad (4.30)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à eq (4.27), obtém-se



$$c_v^2(s)W_{xx}(x, s) + F(x, s) = s^2W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0) \quad (4.31)$$

ou ainda, no caso de vibração livre, ou seja  $f(t) = 0$ , tem-se

$$-c_v^2(s)W_{xx}(x, s) + s^2W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0) = 0, \quad (4.32)$$

onde

$$c_v^2(s) = \frac{\tilde{E}}{\rho}. \quad (4.33)$$

observado as (4.31) e (4.22), verifica-se que as soluções do problema elástico e viscoelástico são iguais no domínio de Laplace. Portanto substituindo na solução elástica  $c$  por  $c_v$ , tem-se a solução do problema viscoelástico.

Tomando-se um termo da série, no núcleo de relaxação, tem-se

$$c_v^2(s) = \frac{E_0 \left[1 - \frac{a}{s+\alpha}\right]}{\rho}. \quad (4.34)$$

Observando-se as equações de movimento no domínio de Laplace, verifica-se que o problema viscoelástico, eq. (4.32), pode ser resolvido utilizando-se a solução elástica, eq. (4.24), ou seja, utilizando a analogia elástico/viscoelástico. A resposta da barra de material viscoelástico onde  $a = 100$  e  $\alpha = 150$  é :

$$w(t, x = l) = 0.15 \times 10^{-5} e^{-50.10t} - 0.155 \cdot 10^{-5} e^{-49.94t} \cos(1568.40t) \\ + 0.24 \times 10^{-4} e^{-49.94t} \sen(1568.40t) \quad (4.35)$$

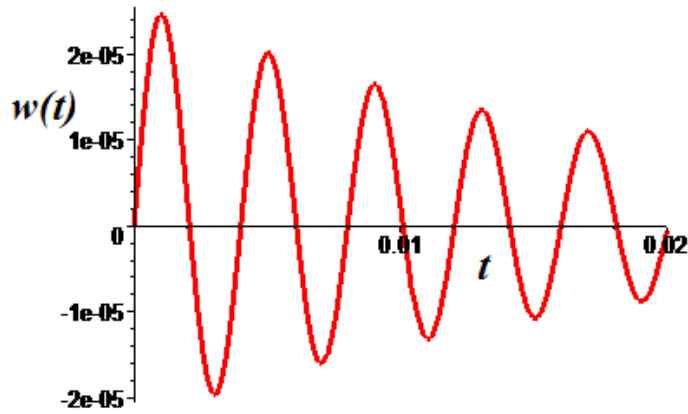


Figura 4.6 – Resposta de uma barra de material viscoelástico.

A resposta apresentada na fig. 4.6 foi obtida substituindo-se o módulo de Young pelo correspondente operador viscoelástico na solução, eq. (4.24), do problema elástico. Observa-se, aqui, o efeito do amortecimento devido ao comportamento hereditário do material em contraste com o caso elástico mostrado na fig. 4.4, no qual a energia é preservada e, conseqüentemente, não ocorrendo decaimento da resposta com o decorrer do tempo.

## CAPÍTULO 5

### RESPOSTA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI VISCOELÁSTICA

Neste capítulo é apresentado um método para calcular a resposta de uma viga de Euler-Bernoulli viscoelástica vibrante. O modelo mais simples de viga é o de Euler-Bernoulli, que tem apenas uma variável dependente  $w(x, t)$  que representa a posição da linha central da viga. Neste modelo, o efeito da rotação e do cisalhamento não são considerados e, em razão destas hipóteses simplificativas, este modelo descreve com precisão apenas o comportamento de vigas esbeltas.

Se as vigas forem curtas o efeito do cisalhamento e da rotação terão de ser considerados e modelos mais sofisticados deverão ser utilizados, por exemplo o modelo de Timoshenko.

No entanto, o modelo de Euler-Bernoulli fornece resultados razoáveis para muitos problemas em engenharia [Han e Wei, 1999] e, além disto, a adoção de um ou outro modelo de viga depende de uma série de fatores além da precisão, tais como treinamento matemático, treinamento computacional, existência de dados experimentais, tempo disponível, custos, entre outros.

#### 5.1 Modelo matemático da viga de Euler-Bernoulli

Utilizando o método variacional ou a condição de equilíbrio [Dym e Shames, 1973] tem-se, para uma viga submetida a uma carga  $q(x)$ , a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x), \quad (5.1)$$

onde  $E$  é o módulo de Young,  $t$  é o tempo,  $w$  é o deslocamento lateral e  $q$  é a carga externa aplicada. As condições de contorno deste problema dependem da configuração da viga, por exemplo no caso em que a viga está em balanço (fixa-livre), tem-se na extremidade livre

$$EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = V = 0.$$

e na extremidade fixa

$$w(x) = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = 0.$$

Em termos físicos, as condições de contorno acima querem dizer que na extremidade livre o momento e a força cortante são nulos, e na fixa, o deslocamento e a rotação da secção transversal são nulos. As outras condições de contorno clássicas bi-apoiada, fixa-apoiada, fixa-fixa podem ser vistas em [Dym e Shames, 1973] e [Clough e Penzien, 1993] por exemplo, e as não clássicas em [Morelato, 2000].

No entanto, se a viga em análise estiver submetida a uma carga dinâmica  $q(t)$ , o efeito da massa deve ser considerado, utilizando-se o princípio de D'Alembert, que trata o problema dinâmico como estático pela introdução da força inercial  $\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$  ou introduzindo o efeito da energia cinética, nos métodos baseados no balanço de energia, resultando na equação de movimento

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = q(x, t) \quad (5.4)$$

sendo,  $\rho$  a densidade,  $A$  a área da secção transversal,  $w(x, t)$  o deslocamento lateral e  $q(x, t)$  a carga dinâmica aplicada. Se a rigidez à flexão,  $EI$ , for constante, tem-se

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t). \quad (5.5)$$

## 5.2 Princípio da correspondência

O que distingue dois problemas com a mesma configuração, sendo um elástico e o outro viscoelástico, é a relação constitutiva, pois a equação de equilíbrio, as relações cinemáticas, as equações de compatibilidade e a condição de contorno independem das pro-

priedades do material sendo, portanto, as mesmas para os dois problemas, ou seja

Equação de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (5.6)$$

Relação deslocamento deformação

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.7)$$

Relação constitutiva

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5.8)$$

Condições iniciais

$$u_i = u_i^0, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (5.9)$$

Condições de contorno

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{em} & \quad S_u \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{t}_i & \text{em} & \quad S - S_u. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Portanto, um problema viscoelástico é análogo a um elástico quando eles têm a mesma configuração. Como a equação de movimento de ambos tem a mesma forma no domínio de Laplace, a resposta do problema viscoelástico pode ser obtido, substituindo-se na resposta do problema elástico, os parâmetros elásticos pelos correspondentes operadores viscoelásticos [Findley e Onaran, 1976], [Rabotnov, 1980], [Cozzano, 1997], [Creus, 1986].

### Equação de movimento da viga viscoelástica de Euler-Bernoulli

Substituindo-se na eq. (5.4) o módulo de elasticidade  $E$ , pelo seu correspondente operador  $\tilde{E}$ , dado por

$$\tilde{E}(\cdot) = E \left( 1(\cdot) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) (\cdot) d\tau \right). \quad (5.11)$$

tem-se

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \tilde{E}(t) I \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = q(x, t). \quad (5.12)$$

O problema viscoelástico envolve uma equação integro-diferencial, o que dificulta sua solução. Desenvolvimentos teóricos e aplicações do princípio da correspondência podem ser encontrados por exemplo em [Alfrey, 1944], [Alfrey, 1945], [Carini, 1992] e [Findley e Onaran, 1976].

### 5.3 Cálculo da resposta de viga de Euler-Bernoulli viscoelástica

Para obter a resposta da viga viscoelástica usando o princípio da correspondência é necessário obter a resposta da viga elástica para, em seguida, substituir os módulos elásticos pelos operadores viscoelásticos. Nas secções seguintes, as equações de movimento da viga elástica e viscoelástica são trabalhadas a fim de que o procedimento adotado para resolver o problema fique mais claro.

#### 5.3.1 Equação de movimento da viga viscoelástica de Euler-Bernoulli no domínio de Laplace

A equação de movimento de uma viga viscoelástica esbelta, obedecendo as hipóteses de Euler-Bernoulli é

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \tilde{E} I \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = q(x, t) \quad (5.13)$$

se  $EI$  for constante,

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \tilde{E} I \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t), \quad (5.14)$$

onde o operador  $\tilde{E}$  é dado por

$$\tilde{E}(\cdot) = E_0 \left( 1(\cdot) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) (\cdot) d\tau \right), \quad (5.15)$$

e o núcleo de relaxação  $\Gamma(t - \tau)$  aproximado por

$$\Gamma(t - \tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}. \quad (5.16)$$

Substituindo-se as eqs (5.15) na eq. (5.14) e aplicando-se a transformada de Laplace, e usando a série de Prony para aproximar o núcleo, obtém-se

$$\rho A (s^2 W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0)) + E_0 \left[ 1 - \left[ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right] \right] I \frac{d^4 W(x, s)}{dx^4} = Q(x, s), \quad (5.17)$$

e denotando

$$E_v(s) = E_0 \left[ 1 - \left[ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right] \right] \quad (5.18)$$

tem-se a equação de movimento da viga viscoelástica no domínio de Laplace,

$$E_v(s) I \frac{d^4 W(x, s)}{dx^4} + \rho A (s^2 W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0)) = Q(x, s). \quad (5.19)$$

### 5.3.2 Equação de movimento de uma viga de Euler-Bernoulli elástica

A equação de movimento de uma viga esbelta que obedece as hipóteses de Euler-Bernoulli é

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (5.20)$$

aplicando-se a transformada de Laplace na eq. 5.20 tem-se

$$EI \frac{d^4 W(x, s)}{dx^4} + \rho A (s^2 W(x, s) - sw(x, 0) - \dot{w}(x, 0)) = Q(x, s). \quad (5.21)$$

As eqs. (5.19) e (5.21) têm a mesma forma, ou seja, as duas modelam problemas de contorno lineares de quarta ordem em  $x$  e, portanto, elas podem ser resolvidas usando a mesma metodologia. O problema viscoelástico dado pela eq. (5.19) pode ser resolvido como se fosse elástico, por exemplo, usando a fórmula de variação de parâmetros e representada pela base gerada pela resposta impulso, como pode ser visto em [Morelatto, 2000], [Giaretta, 2000] e [Copetti, 2002], entre outros.

### 5.3.3 Solução do problema elástico análogo ao viscoelástico

O primeiro passo para a aplicação do princípio da correspondência é obter a resposta da viga elástica, equivalente ao viscoelástico, cuja equação do movimento é

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (5.22)$$

com condições de contorno e inicial definidas pela configuração do problema. A solução  $w(x, t)$  de eq. (5.22) pode ser escrita como

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) X_n(x), \quad (5.23)$$

onde  $X_n(x)$  são as formas dos modos de vibração, obtidas da equação característica da eq. (5.22), obtida utilizando-se as condições de contorno e o problema homogêneo;  $A_n$  e  $B_n$  são obtidas utilizando as condições iniciais e ortogonalidade dos modos e a eq. (5.23), como será relatado a seguir.

### Os modos de vibração utilizando a base dinâmica

Os modos de vibração são obtidos resolvendo-se o problema homogêneo

$$EI \frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} - \rho A \omega^2 w(t, x) = 0 \quad (5.24)$$

ou

$$\frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} - \beta^4 w(t, x) = 0, \quad (5.25)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5.26)$$

e

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.27)$$

onde,  $\omega$  é a frequência natural do modo. Substituindo  $w(t, x) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) X(x)$  na eq. (5.25), obtém-se

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \beta^4 X(x) = 0, \quad (5.28)$$

cuja solução pode ser escrita em termos da base dinâmica, como



$$X(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x), \quad (5.29)$$

onde  $\{h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)\}$  é a base dinâmica. A eq. (5.29), na forma matricial, é

$$X(x) = \Phi \mathbf{c}, \quad (5.30)$$

onde

$$\Phi = [h(x) \quad h'(x) \quad h''(x) \quad h'''(x)]$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

As constantes  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são obtidas utilizando-se as condições de contorno, que podem ser escritas de maneira geral [Costa, 2001] como:

$$\text{em } x = 0 \quad \begin{cases} A_{11} X(0) + B_{11} X'(0) + C_{11} X''(0) + D_{11} X'''(0) = 0 \\ A_{12} X(0) + B_{12} X'(0) + C_{12} X''(0) + D_{12} X'''(0) = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

e

$$\text{em } x = L \quad \begin{cases} A_{21} X(L) + B_{21} X'(L) + C_{21} X''(L) + D_{21} X'''(L) = 0 \\ A_{22} X(L) + B_{22} X'(L) + C_{22} X''(L) + D_{22} X'''(L) = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Substituindo-se  $X(x)$ , dada pela eq. (5.29), nas condições de contorno, eqs. (5.32) e (5.33), obtém-se

$$\text{em } x = 0 \quad \begin{cases} A_{11} \Phi(0) \mathbf{c} + B_{11} \Phi'(0) \mathbf{c} + C_{11} \Phi''(0) \mathbf{c} + D_{11} \Phi'''(0) \mathbf{c} = 0 \\ A_{12} \Phi(0) \mathbf{c} + B_{12} \Phi'(0) \mathbf{c} + C_{12} \Phi''(0) \mathbf{c} + D_{12} \Phi'''(0) \mathbf{c} = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

e

$$\text{em } x = L \quad \begin{cases} A_{21} \Phi(L) \mathbf{c} + B_{21} \Phi'(L) \mathbf{c} + C_{21} \Phi''(L) \mathbf{c} + D_{21} \Phi'''(L) \mathbf{c} = 0 \\ A_{22} \Phi(L) \mathbf{c} + B_{22} \Phi'(L) \mathbf{c} + C_{22} \Phi''(L) \mathbf{c} + D_{22} \Phi'''(L) \mathbf{c} = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

que, na forma matricial, fica

$$\mathbf{B} \Phi^D \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

onde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.37)$$

Resolvendo-se este sistema, obtêm-se as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  que, substituindo na eq. (5.29), determina a forma dos modos de vibração.

O passo seguinte é determinar a base de soluções gerada pela resposta impulso (base dinâmica)

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) & h'(x) & h''(x) & h'''(x) \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

A resposta impulso  $h(x)$  da viga viscoelástica é obtida resolvendo-se

$$\frac{d^4 h(x)}{dx^4} - \beta^4 h(x) = 0, \quad (5.39)$$

com condições iniciais

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0 \quad h'''(0) = 1 \quad (5.40)$$

onde,  $\beta^4 = \rho A \omega^2 / \tilde{E} I$ .

A resposta impulso  $h(t)$  para a viga de Euler-Bernoulli elástica [Giaretta, 2000] e [Morelato, 2000] é

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \frac{[-\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)]}{\beta^3}, \\ h'(x) &= \frac{1}{2} \frac{[-\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)]}{\beta^2}, \\ h''(x) &= \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)]}{\beta}, \\ h'''(x) &= \frac{1}{2} [\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)], \end{aligned} \quad (5.41)$$

e na forma matricial

$$\Phi^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{[-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta^3} & \frac{1}{2} \frac{[-\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{\beta^2} & \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta} & \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] \\ \frac{1}{2} \frac{[-\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{\beta^2} & \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta} & \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta [-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] \\ \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta} & \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta [-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta^2 [-\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] \\ \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta [-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta^2 [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta^3 [\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Com esta base a forma de  $X(x)$  e os autovalores  $\beta$  são obtidos. A seguir, a resposta de uma viga em balanço é apresentada.

#### 5.4 Exemplo: Resposta de viga viscoelástica em balanço

Calcular a resposta da viga engastada em balanço, onde  $E = 15 \times 10^{12} \text{N/m}^2$ ,  $\rho = 0.141 \times 10^4 \text{kg/m}^3$ ,  $A = 0.1 \times 0.1 \text{m}^2$  e  $L = 1 \text{m}$ , e condições iniciais  $\dot{w}(0) = 0.05$  e  $w(0) = 0$ , mostrada abaixo

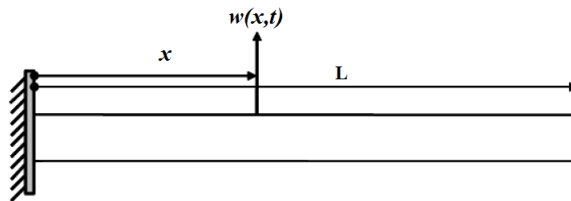


Figura 5.1 – Viga homogênea de seção constante  $A$  e comprimento  $L$ .

cuja equação de movimento é

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t).$$

As condições de contorno de uma viga em balanço são:

a) Na extremidade engastada,  $x = 0$ , o deslocamento e a rotação são nulos

$$w(0) = 0$$

e

$$\frac{\partial w(0)}{\partial x} = 0$$

b) Na extremidade livre,  $x = L$ , o momento e a força de cisalhamento são nulas

$$EI \frac{\partial^2 w(L)}{\partial x^2} = 0$$

e

$$\left[ EI \frac{\partial^3 w(L)}{\partial x^3} \right] = 0.$$

Usando a base dinâmica tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.48)$$

onde  $\Phi^D$  em termos da base dinâmica é dada pela eq. (5.42). A equação característica é obtida de

$$\begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ EI\Phi''(L) \\ EI\Phi'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.49)$$

e na forma matricial,  $\Phi_r^D \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , onde

$$\Phi_r^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta} & \frac{[\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{2} & \frac{\beta[-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{2} & \frac{\beta^2[-\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{2} \\ \frac{[\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{2} & \frac{\beta[-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{2} & \frac{\beta^2[\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]}{2} & \frac{\beta^3[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{2} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Verifica-se no sistema dado pela eq. (5.49) que as constantes  $c_3$  e  $c_4$  são nulas, assim o sistema é reduzido a

raízes da eq. caract.	1.875	4.694	7.854	10.995.
-----------------------	-------	-------	-------	---------

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{[\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)]}{\beta} & \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] \\ \frac{1}{2} [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & \frac{1}{2} \beta [-\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

Para um solução não nula da eq. (5.51) com  $L = 1$ , tem-se

$$1 + \cos(\beta) \cosh(\beta) = 0, \quad (5.52)$$

cujas quatro primeiras raízes são

Resolvendo o sistema (5.51) para a primeira raiz, obtém-se  $c_1 = -1.376$  e  $c_2 = 1$ , que representado na forma vetorial é

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1.376 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

e utilizando

$$w(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x) = \Phi \mathbf{c} \quad (5.54)$$

obtém-se substituindo na eq. (5.54) as constante  $c_i$  a forma do primeiro modo

$$w_1(x) = -1.376 h(x) + h'(x) \quad (5.55)$$

onde,  $h(x)$  e  $h'(x)$  são dados por

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \frac{[-\text{sen}(\beta x) + \text{senh}(\beta x)]}{\beta^3}, \\ h'(x) &= \frac{1}{2} \frac{[-\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)]}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para a segunda raiz da equação característica o vetor de constantes  $\mathbf{c}$  é

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4.780 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

e a forma do segundo modo

$$w_2(x) = 4.780 h(x) + h'(x). \quad (5.58)$$

Para a terceira raiz o vetor constante é

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -7.848 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

e a forma do terceiro modo

$$w_3(x) = -7.848 h(x) + h'(x). \quad (5.60)$$

Para a quarta raiz o vetor constante é

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10.995 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

e a forma do quarto modo

$$w_4(x) = 10.995 h(x) + h'(x). \quad (5.62)$$

Na engenharia civil e mecânica, os primeiros modos são o mais importantes em geral, pois são os mais perceptíveis pelo corpo humano e têm amplitudes maiores. As fig. 5.2 e 5.3 mostram as formas dos primeiro, segundo, terceiro e quarto modos.

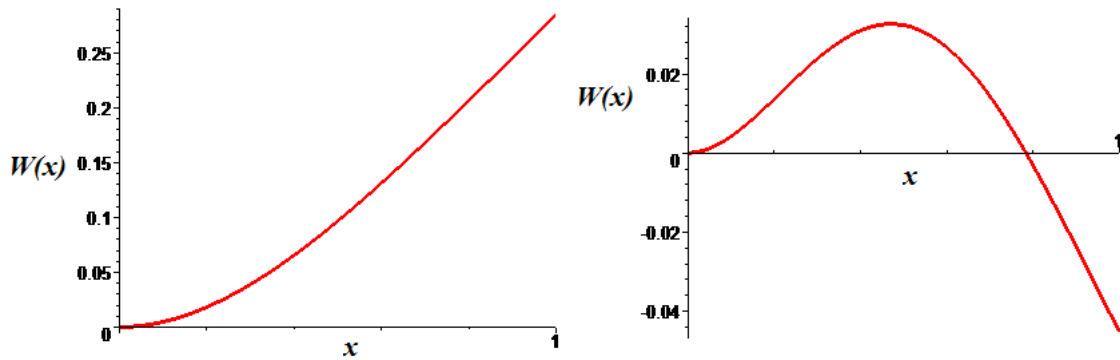


Figura 5.2 – Forma do primeiro e segundo modos.

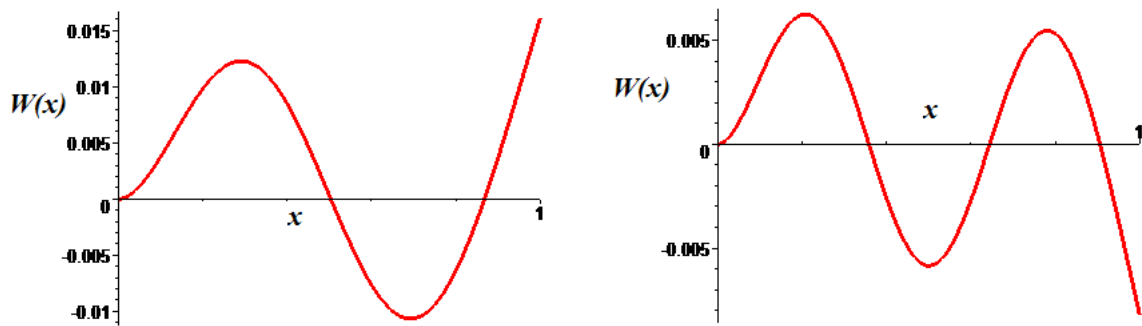


Figura 5.3 – Forma do terceiro e quarto modos.

Falta ainda determinar as constante  $A_n$  e  $B_n$  da solução geral, eq. (5.23). Estas são obtidas utilizando-se as condições iniciais e a propriedade da ortogonalidade dos modos. Sendo a condições iniciais  $\dot{w}(0) = 0.05$  e  $w(0) = 0$ , tem-se  $A_1 = 0.2753$  e  $B_1 = 0$ ,  $A_2 = 0.9561$  e  $B_2 = 0$ ,  $A_3 = 1,5697$  e  $B_3 = 0$ ,  $A_4 = 2,1992$  e  $B_4 = 0$ , e a resposta usando os quatro modos é



$$\begin{aligned}
w(x, t) = & 0.2753\cos(740.25t)(0.1043\sen(1.8751x) - 0.1043\senh(1.8751x) - 0.1422\cos(1.8751x) \\
& + 0.1422\cosh(1.8751x)) + 0.9561\cos(4639.09t)(0.2311 \cdot 10^{-1}\sen(4.6940x) \\
& - 0.2311 \cdot 10^{-1}\senh(4.6940x) - 0.2269 \cdot 10^{-1}\cos(4.6940x) \\
& + 0.2269 \cdot 10^{-1}\cosh(4.6940x)) + 1.5697\cos(12989.60691t)(0.8097 \cdot 10^{-2}\sen(7.8547x) \\
& - 0.8097 \cdot 10^{-2}\senh(7.8547x) - 0.8104 \cdot 10^{-2}\cos(7.8547x) + 0.8104 \cdot 10^{-2}\cosh(7.8547x)) \\
& + 2.1992\cos(25454.4451t)(0.4135 \cdot 10^{-2}\sen(10.9955x) - 0.41357 \cdot 10^{-2}\senh(10.9955x) \\
& - 413558375910^{-2}\cos(10.9955x) + 0.4135 \cdot 10^{-2}\cosh(10.9955x)).
\end{aligned}
\tag{5.63}$$

A resposta da viga em balanço aproximada utilizando um, dois, três e quatro modos está apresentada abaixo

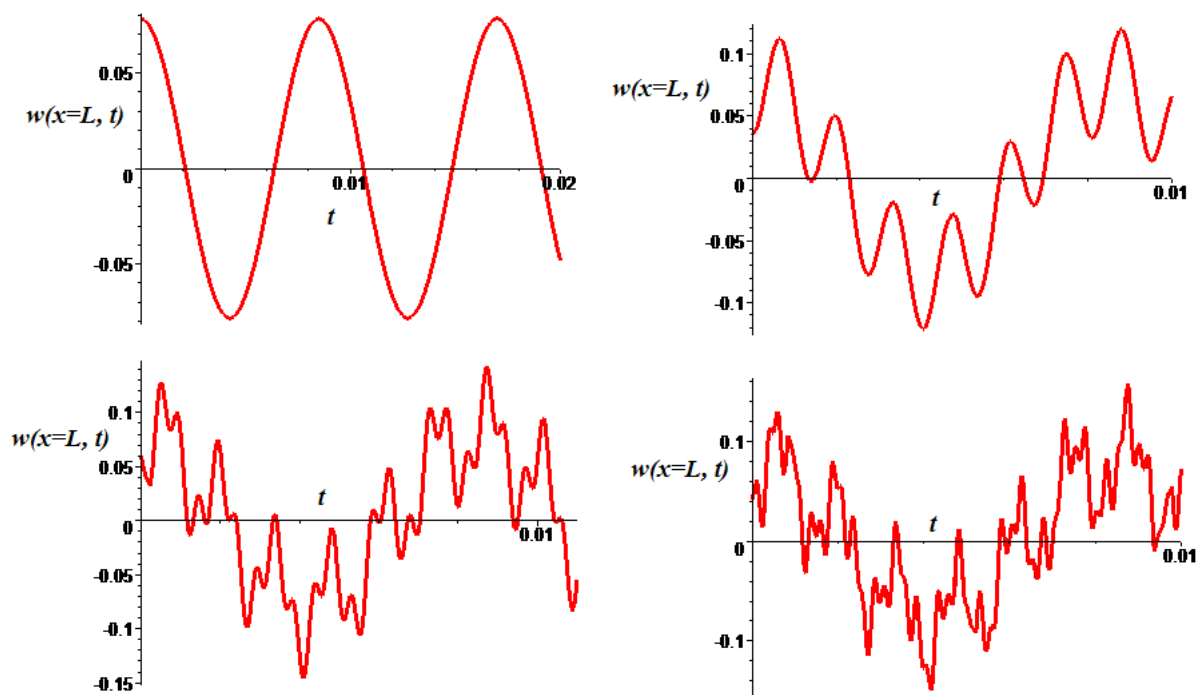


Figura 5.4 – Resposta da extremidade livre da viga utilizando 1, 2, 3 e 4 modos.

Tendo sido obtida a solução da viga em balanço elástico, o passo seguinte é transformar a solução para o domínio de Laplace e substituir os parâmetros elásticos pelos operadores viscoelásticos transformados para o domínio de Laplace. A resposta da viga de material vis-

coelástico, no domínio do tempo, é obtida da transformada inversa de Laplace da expressão resultante da expressão do passo anterior. A resposta da viga elástica no domínio do tempo é

$$w(x, t) = 0.2753 \cos(0.1911 \cdot 10^{-5} \sqrt{Et}) \left( 0.1043 \operatorname{sen}(1.8751x) - .10439 \operatorname{senh}(1.8751x) - 0.1422 \cos(1.8751x) + 0.1422 \operatorname{cosh}(1.8751x) \right) \quad (5.64)$$

e no domínio de Laplace

$$W(x, s) = 0.100 \cdot 10^{10} s (0.7184 \cdot 10^{10} \operatorname{sen}(1.8751x) - 0.7184 \cdot 10^{10} \operatorname{senh}(1.8751x) - 0.9787 \cdot 10^{10} \cos(1.8751x) + 0.9787 \cdot 10^{10} \operatorname{cosh}(1.8751x)) / (0.250 \cdot 10^{21} s^2 + 0.9132 \cdot 10^{10} E). \quad (5.65)$$

Substituindo em  $w(x, t)$  o módulo elástico  $E$  pelo viscoelástico

$$E_v = 0.15 \cdot 10^{18} - \frac{0.1500 \cdot 10^{20}}{(s + 150)} \quad (5.66)$$

obtem-se a resposta da viga viscoelástica no domínio de Laplace

$$W_v(x, s) = 0.10 \cdot 10^{-9} s (s + 150.) (0.287 \cdot 10^{10} \operatorname{sen}(1.8751x) - 0.2873 \cdot 10^{10} \operatorname{senh}(1.8751x) - 0.3914 \cdot 10^{10} \cos(1.8751x) + 0.3914 \cdot 10^{10} \operatorname{cosh}(1.8751x)) / (10s^3 + 1500s^2 + 0.54 \cdot 10^7 s + 0.273 \cdot 10^{10}) \quad (5.67)$$

e usando a transformada inversa obtém-se a resposta da viga no domínio do tempo

$$\begin{aligned} w_v(x, t) = & -0.26 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}(1.87x) e^{(-50.46t)} + 0.29 \cdot 10^{-1} \operatorname{sen}(1.87x) e^{-49.76t} \cos(735.17t) \\ & + 0.19 \cdot 10^{-2} \operatorname{sen}(1.87x) e^{(-49.76t)} \operatorname{sen}(735.17t) + .26 \cdot 10^{-3} \operatorname{senh}(1.87x) e^{(-50.46t)} \\ & - 0.29 \cdot 10^{-1} \operatorname{senh}(1.87x) e^{(-49.76t)} \cos(735.17t) - 0.19 \cdot 10^{-2} \operatorname{senh}(1.87x) e^{(-49.76t)} \operatorname{sen}(735.17t) \\ & + 0.36 \cdot 10^{-3} \cos(1.87x) e^{(-50.46t)} - 0.39 \cdot 10^{-1} \cos(1.875x) e^{(-49.76t)} \cos(735.17t) \\ & - 0.26 \cdot 10^{-2} \cos(1.8751x) e^{(-49.768t)} \operatorname{sen}(735.17t) - 0.36 \cdot 10^{-3} \operatorname{cosh}(1.8751x) e^{(-50.46t)} \\ & + 0.39 \cdot 10^{-1} \operatorname{cosh}(1.8751x) e^{(-49.76t)} \cos(735.17t) \\ & + 0.26 \cdot 10^{-2} \operatorname{cosh}(1.8751x) e^{(-49.76t)} \operatorname{sen}(735.17t). \end{aligned} \quad (5.68)$$

A fig. 5.5 abaixo apresenta a resposta da extremidade livre  $x = L$

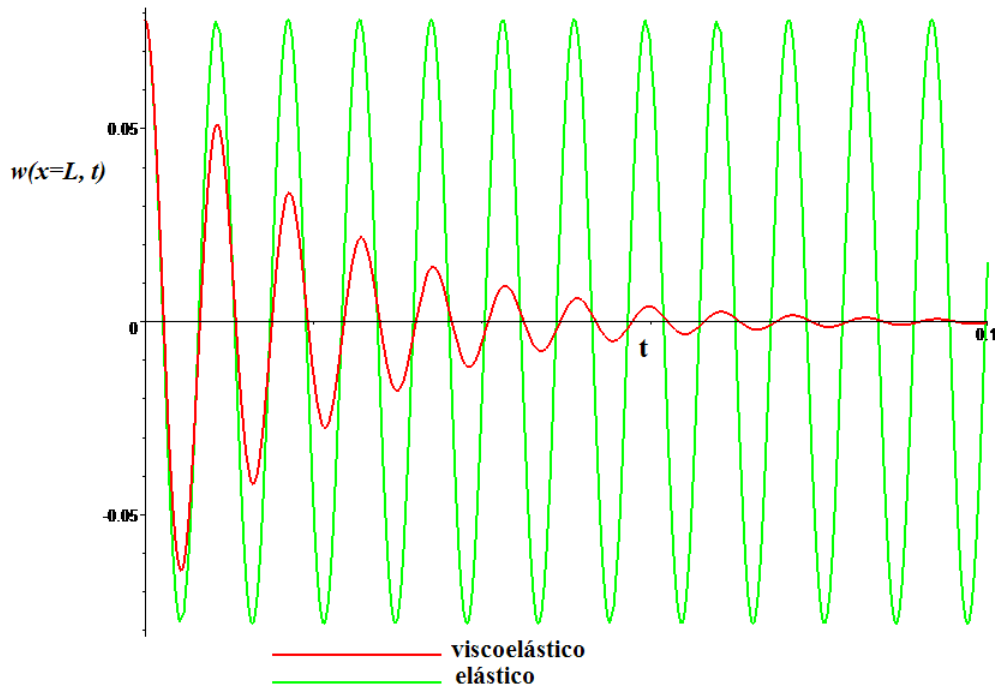


Figura 5.5 – Resposta da extremidade livre da viga em balanço elástica e viscoelástica aproximada, utilizando primeiro modo.

Na resposta da viga viscoelástica, observa-se o efeito do amortecimento, ou seja, a amplitude da resposta decresce com o decorrer do tempo; o que não ocorre na viga elástica.

Na fig. 5.6, está mostrada a resposta da extremidade livre da viga em balanço aproximada, utilizando-se os quatro primeiros modos. As expressões matemáticas não são apresentadas aqui, pois são bastante longas, e não trarão informações significativas.

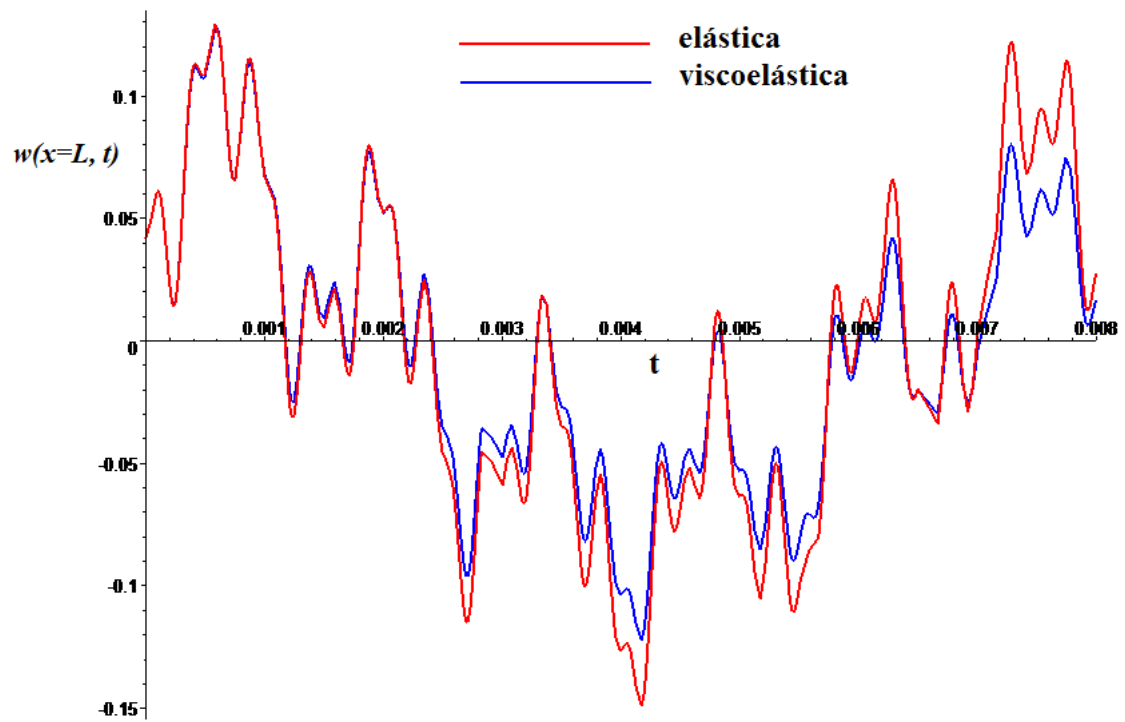


Figura 5.6 – Resposta da extremidade livre da viga elástica e viscoelástica utilizando-se os quatro primeiros modos.

É possível constatar, nesta figura, que a amplitude da resposta da viga viscoelástica decresce com o decorrer do tempo, devido à dissipação da energia do movimento vibratório devido à propriedade viscoelástica do material.

## CAPÍTULO 6

### RESPOSTA DE VIGA DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICA

Neste capítulo é apresentado um estudo sobre a determinação da resposta de uma viga de Timoshenko viscoelástica, cujo comportamento é descrito pelo modelo reológico na forma integral e com o núcleo de relaxação aproximado pela série de Prony.

#### 6.1 Modelo matemático de Timoshenko para uma viga elástica

Na análise de vigas curtas, se o efeito do cisalhamento e rotação não forem considerados na modelagem, haverá diferença entre as respostas obtidas resolvendo-se estes modelos matemáticos e os dos dados experimentais, sendo então fontes de imprecisão. O modelo Rayleigh introduz o efeito da inércia rotatória, o modelo de Vlasov o efeito do cisalhamento e o modelo de Timoshenko os dois para detalhes veja [Han e Wei, 1999] e [Costa, 2006]. Neste capítulo, o último é estudado.

O modelo de viga de Timoshenko introduz estes efeitos separadamente, e depois superpõe as deformações resultantes. No cálculo energia devido rotação somente o efeito da flexão é considerado. Ao considerar o efeito do cisalhamento na deformação da viga a seção plana ao eixo central move-se verticalmente e portanto rotacionando de um ângulo  $\beta(x)$  em relação o eixo central da viga, em seguida a seção plana é rotacionada de um ângulo  $\psi(x)$  para considerar o efeito da flexão, resultando em  $dw/dx$ , inclinação total da linha central, dada por

$$\frac{dw}{dx} = \psi(x) + \beta(x). \quad (6.1)$$

A figura abaixo mostra a deformação devido ao momento fletor e ao esforço cortante.

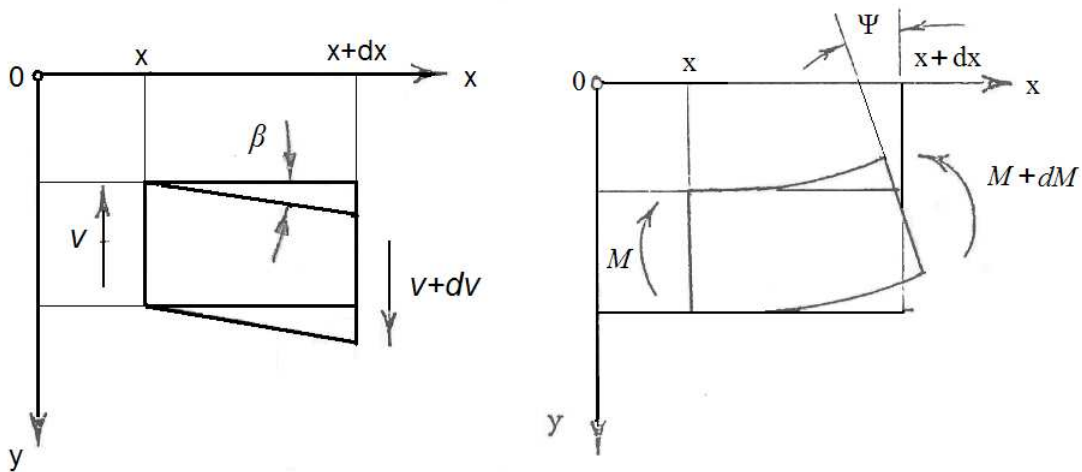


Figura 6.1 – Deformação devido ao esforço cortante e ao momento fletor.

Aqui está sendo assumido que a deformação devido ao cisalhamento é a mesma ao longo da seção da viga, mas em vigas reais esta deformação é máxima no centro da viga e diminui em direção a superfície externa, este erro é corrigido pela introdução do fator  $\kappa$ , cujos valores são encontrados para alguns tipos de perfis em [Cowper, 1966].

Para uma viga com carregamento  $q(x)$  tem-se, utilizando a condição de equilíbrio ou balanço de energia, as seguintes equações

$$EI \frac{d\psi(x)}{dx} + \kappa GA \left( \frac{dw(x)}{dx} - \psi(x) \right) = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \kappa GA \left( \frac{dw(x)}{dx} - \psi(x) \right) \right] + q(x) = 0, \quad (6.3)$$

onde,  $E$  é o módulo de Young [ $N/m^2$ ],  $I$  é o momento de inércia da seção transversal [ $m^4$ ],  $G$  é o módulo de cisalhamento [ $N/m^2$ ] e  $A$  é a área da seção transversal [ $m^2$ ]. Se os parâmetros  $E$ ,  $I$ ,  $G$  e  $A$  forem constantes tem-se

$$EI \frac{d\psi(x)}{dx} + \kappa GA \left( \frac{dw(x)}{dx} - \psi(x) \right) = 0, \quad (6.4)$$

$$\kappa GA \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + q(x) = 0. \quad (6.5)$$

Na análise dinâmica da viga é necessário introduzir o efeito da inércia, realizado através do princípio de D'Alembert ou introduzindo-se no Lagrangiano a energia cinética, resultando nas equações de movimento

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0 \quad (6.6)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0. \quad (6.7)$$

Estas equações diferentemente do modelo de viga de Euler-Bernoulli, que apresenta apenas uma variável dependente  $w(x, t)$ , o deslocamento lateral, apresenta duas variáveis dependentes:  $w(x, t)$ , o deslocamento lateral, e  $\psi(x, t)$ , o ângulo de rotação, devido ao momento fletor. O passo seguinte consiste em resolver este sistema de equações diferenciais acoplado. Veja-se [Ginsberg, 2001] para uma derivação do tipo newtoniana.

## 6.2 O modelo de Timoshenko para um viga viscoelástica

Como já discutido no capítulo sobre modelos reológicos, ao modelar duas vigas de mesma geometria mas de material diferente, a equação de equilíbrio e a relação tensão-deformação são as mesmas para ambos, pois elas dependem apenas de relações de forças e relações cinemáticas. Assumindo que os dois problemas têm as mesmas condições iniciais e de contorno, a única diferença entre os dois modelos matemáticos será a relação constitutiva.

O modelo de Timoshenko da viga viscoelástica quando as propriedades dos materiais são representadas pelos módulos complexos é

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - E^* I \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \kappa G^* A \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0 \quad (6.8)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa G^* A \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0, \quad (6.9)$$

onde,  $E^*(\omega) = E'(\omega) + i E''(\omega)$  e  $G^*(\omega) = G'(\omega) + i G''(\omega)$ , são obtidos experimentalmente. Veja [Nashif e Henderson, 1985] e [Muravyov, 1999] para maiores detalhes.

Utilizando-se a integral hereditária para descrever o comportamento do material viscoelástico, tem-se

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \tilde{E} I \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0 \quad (6.10)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0 \quad (6.11)$$

onde

$$\tilde{E}(\cdot) = E_0 \left( 1(\cdot) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) (\cdot) d\tau \right), \quad (6.12)$$

$$\Gamma(t - \tau) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} \quad (6.13)$$

e

$$\tilde{G}(\cdot) = G_0 \left( 1(\cdot) - \int_0^t \Upsilon(t - \tau) (\cdot) d\tau \right), \quad (6.14)$$

$$\Upsilon(t - \tau) = \sum_{i=1}^n b_i e^{-\delta_i(t-\tau)}. \quad (6.15)$$

As constantes  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $b_i$  e  $\delta_i$  são obtidas através do teste de relaxação e ajuste de curvas, veja [Muravyov, 1997b].

Matricialmente,

$$\mathcal{M} \mathbf{w}_{tt} + \mathcal{K} \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (6.16)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G} A \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\kappa \tilde{G} A \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa \tilde{G} A \frac{\partial}{\partial x} & -\tilde{E} I \frac{\partial}{\partial x} + \kappa \tilde{G} A \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -q(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Para obter a resposta da viga, às excitações dinâmicas  $\mathbf{f}$ , é necessário resolver o sistema de equações diferenciais dado pelas eqs. (6.8) e (6.9) ou pelas eqs. (6.10) e (6.11). A seguir, será analisado o problema elástico análogo para verificar se sua solução é útil para resolver o problema viscoelástico.



### 6.3 A equação evolutiva de Timoshenko para a deformação numa viga elástica

A solução do problema elástico

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0 \quad (6.19)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0 \quad (6.20)$$

pode ser obtida resolvendo-se o sistema com o uso da transformada de Laplace ou eliminando as variáveis do sistema pelo método de Cramer. Com este método, obtém-se, uma equação de quarta ordem para o deslocamento  $w(x, t)$  e outra para o ângulo de rotação  $\psi(x, t)$ , sendo ambas do mesmo tipo. Esta equação de quarta ordem é analisada a seguir. O primeiro passo é obter a equação evolutiva.

Isola-se  $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$  na eq. (6.20), segue

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa GA} \left( \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + q(x, t) \right) + \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right). \quad (6.21)$$

Deriva-se as eqs. (6.19) e (6.20) em relação a  $x$  e obtém-se

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) - EI \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (6.22)$$

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) - \kappa GA \left( \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (6.23)$$

deriva-se novamente as eqs. (6.22) e (6.23) em relação a  $x$  e tem-se

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right) - EI \frac{\partial^4 \psi(x, t)}{\partial x^4} - \kappa GA \left( \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (6.24)$$

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) - \kappa GA \left( \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.25)$$

Substitui-se o termo  $\partial^3\psi/\partial x^3$  na eq. 6.25, obtido das eqs. (6.21) e (6.22), para chegar a equação de Timoshenko de quarta ordem

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} + \left[ \frac{\rho A}{EI} - \left( \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\rho}{\kappa G A E} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} + \frac{q(x,t)}{EI} - \frac{1}{\kappa G A} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}. \quad (6.26)$$

Denominando

$$\tau^2 = \frac{\rho}{E}, \quad \beta^2 = \frac{\rho A}{EI}, \quad \alpha^2 = \frac{\rho}{\kappa G} \quad (6.27)$$

segue

$$\tau^2 \alpha^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} + \left[ \beta^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] + \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (6.28)$$

$$\tau^2 \alpha^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} + \left[ \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad (6.29)$$

ou na forma compacta

$$A_4 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} + A_2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + A_0 w(x,t) = 0 \quad (6.30)$$

onde

$$A_4 = \tau^2 \alpha^2, \quad (6.31)$$

$$A_2 = \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (6.32)$$

$$A_0 = \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \quad (6.33)$$

Deve-se salientar que uma equação similar é obtida para o ângulo de rotação  $\Psi(x,t)$ . Obtida a equação evolutiva de Timoshenko, o próximo passo é obter e analisar a solução elástica e tentar resolver o problema viscolástico usando-a.

A resposta no domínio do tempo,  $w(x, t)$  ou  $\Psi(x, t)$ , pode ser obtido pelo método da expansão modal [Han e Wei, 1999]. Os modos do caso elástico, dado pela eq. (6.30), foi estudada por [Costa, 2006] e [Turcatto, 2002].

No anexo A é apresentada a metodologia para o cálculo dos modos vibratórios deste problema. O que se verifica neste caso é que os modos dependem da propriedade do material e portanto obter uma expressão para a resposta elástica em termo do módulo de elasticidade  $E$  e  $G$  se torna bastante complexa.

Aqui, não se procederá como no caso da Viga de Euler-Bernoulli, naquele caso a resposta da viga viscoelástica no domínio de Laplace foi obtida trocando-se o módulo de Young  $E$  pelo operador viscoelástico  $E_v$  na solução analítica elástica. A resposta no domínio do tempo foi obtido calculando-se a transformada inversa de Laplace.

No caso da viga de Timoshenko viscoelástica, os sistema de equações deverá ser resolvido no domínio de Laplace. A seguir é feito uma análise deste problema.

### 6.3.1 Resposta dinâmica com a equação de Timoshenko no domínio de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace na eq. (6.30), obtém-se

$$A_4 [s^4 W(x, s) - s^3 w(x, 0) - s^2 \dot{w}(x, 0) - s \ddot{w}(x, 0) - \ddot{w}(x, 0)] \\ + A_2 [s^2 W(x, s) - s w(x, 0) - \dot{w}(x, 0)] + A_0 W(x, s) = 0 \quad (6.34)$$

ou,

$$A_4 [s^4 W(x, s) - s^3 w_0(x) - s^2 \dot{w}_0(x)] \\ + A_2 [s^2 W(x, s) - s w_0(x) - \dot{w}_0(x)] + A_0 W(x, s) = 0 \quad (6.35)$$

onde as condições iniciais são  $w(x, 0) = w_0(x)$  e  $\dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x)$ .

Substituindo  $A_4$ ,  $A_2$  e  $A_0$  obtém-se

$$\tau^2 \alpha^2 [s^4 W(x, s) - s^3 w_0(x) - s^2 \dot{w}_0(x)] \\ + (\beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}) [s^2 W(x, s) - s w_0(x) - \dot{w}_0(x)] + \frac{\partial^4 W(x, s)}{\partial x^4} = 0 \quad (6.36)$$

ou,

$$\frac{\partial^4 W(x, s)}{\partial x^4} - (\alpha^2 + \tau^2) s^2 \frac{\partial^2 W(x, s)}{\partial x^2} + (\tau^2 \alpha^2 s^4 + \beta^2 s^2) W(x, s) = D(x, s) \quad (6.37)$$

onde

$$D(x, s) = (\tau^2 \alpha^2 s^3 + \beta^2 s) w_0(x) + (s^2 \tau^2 \alpha^2 + \beta^2) \dot{w}_0(x) - (\alpha^2 + \tau^2) s w_0''(x) + (\alpha^2 + \tau^2) \dot{w}_0''(x). \quad (6.38)$$

Denominando-se

$$\Delta(s) = \left[ \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left( (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\tau^2 \alpha^2 s^4 + \beta^2) \right) s^2 \right] \quad (6.39)$$

e

$$H(s) = \Delta^{-1}(s) \quad (6.40)$$

segue

$$W(x, s) = H(s)D(x, s) = \int_0^L G(x, s, \xi) D(\xi, s) d\xi, \quad (6.41)$$

onde  $H(x, s, \xi)$  é a função de Green espacial correspondente às condições de contorno. Esta função pode ser obtida utilizando a resposta impulso  $h(s, x)$ , como solução do seguinte problema

$$h^{(iv)}(x, s) + g^2 h''(x, s) - K^4 h(x, s) = 0 \quad (6.42)$$

com as condições iniciais

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0 \quad \text{e} \quad h'''(0) = 1, \quad (6.43)$$

aqui

$$g^2 = -(\alpha^2 + \tau^2), \quad K^4 = -(\tau^2 \alpha^2 s^4 + \beta^2 s^2). \quad (6.44)$$

Para detalhes, veja-se [Moraes, 2002] e [Naimark, 1967]. A resposta no domínio do tempo  $w(t, x)$  é obtida calculando-se, a transformada inversa de Laplace,  $\mathcal{L}^{-1}(W(s, x))$ .

Para transformar o problema elástico em viscoelástico deve-se trocar em  $\tau^2$ ,  $\beta^2$  e  $\alpha^2$  os parâmetros  $E$  e  $G$  por  $\tilde{E}$  e  $\tilde{G}$ , obtendo-se então a expressão da resposta da viga viscoelástica,  $W_v(x, s)$ , no domínio de Laplace. Devido à complexidade simbólica, a transformada inversa é obtida usando-se a quadratura.

## INVERSÃO ATRAVÉS DA QUADRATURA GAUSSIANA

A resposta  $w_v(x, t)$  no domínio do tempo é obtida calculando-se a transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}(W_v(x, s))$  usando-se a quadratura Gaussiana

$$w_v(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{q_k}{t} W_v\left(\frac{q_k}{t}\right) \quad (6.45)$$

onde,  $q_k$  são as raízes de

$$(-1) \sum_{r=0}^n a(n, r) q^{n-r} = 0 \quad (6.46)$$

com

$$a(n, r) = \frac{(-1)^{n-r} n! [n+r-1]!}{r! (n-r)!} \quad (6.47)$$

e os  $A_k$  são obtidos de

$$A_k q_k^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq (n-1). \quad (6.48)$$

Os valores de  $A_k$  e  $q_k$ , no entanto, estão tabelados em [Stroud e Secrest, 1966] com 30 casas decimais, Heydarian e Cozzano utilizam  $n = 8$  [Heydarian e Reed, 1981] e [Cozzano, 1997] e obtém resultado com grande precisão. A dificuldade aqui está relacionada ao número de vezes que  $W_v(s, x)$  terá de ser calculada, ou seja, se for adotado  $n = 8$ , será necessário calculá-lo 8 vezes para cada valor de  $x$ .

## 6.4 Análise da viga de Timoshenko viscoelástica usando o sistema de segunda ordem

A equação de Timoshenko de quarta ordem apesar de desacoplar a rotação e o deslocamento transversal, apresenta problemas no que diz respeito às condições de contorno. Por este motivo, aqui é analisado o sistema de segunda ordem acoplado,

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0, \quad (6.49)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \tilde{E} I \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0 \quad (6.50)$$

Substituindo os operadores viscoelásticos (6.12) e (6.14) em (6.49) e (6.50), que são do tipo convolução no tempo, e calculando a transformada de Laplace obtém-se

$$\begin{aligned} \rho I \left( s^2 \Psi(x, s) - s\psi(0, x) - \dot{\psi}(0, x) \right) - E_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right) I \frac{d^2 \Psi(x, s)}{dx^2} \\ - \kappa G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s + \delta_i} \right) A \left( \frac{dW(x, s)}{dx} - \Psi(x, s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \rho A \left( s^2 W(x, s) - sw(0, x) - \dot{w}(0, x) \right) \\ - \kappa G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s + \delta_i} \right) A \left( \frac{d^2 W(x, s)}{dx^2} - \frac{d\Psi(x, s)}{dx} \right) + q(x, s) = 0. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Denominando

$$E_v(s) = E_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right) \quad (6.53)$$

$$G_v(s) = G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s + \delta_i} \right) \quad (6.54)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \rho I \left( s^2 \Psi(s, x) - s\psi(0, x) - \dot{\psi}(0, x) \right) \\ - E_v(s) I \frac{d^2 \Psi(s, x)}{dx^2} - \kappa G_v(s) A \left( \frac{dW(s, x)}{dx} - \Psi(s, x) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \rho A \left( s^2 W(s, x) - sw(0, x) - \dot{w}(0, x) \right) \\ - \kappa G_v(s) A \left( \frac{d^2 W(s, x)}{dx^2} - \frac{d\Psi(s, x)}{dx} \right) + q(s, x) = 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Agrupando os termos relacionados às condições iniciais e à força externa na eq. (6.55) e (6.56) obtém-se

$$\begin{aligned} \kappa G_v(s) A \frac{d^2 W(s, x)}{dx^2} - \kappa G_v(s) A \frac{d\Psi(s, x)}{dx} - \rho A \left( s^2 W(s, x) \right) = \\ = -\rho A \left( sw(0, x) + \dot{w}(0, x) \right) + q(s, x) \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned}
E_v(s)I \frac{d^2 \bar{\Psi}(s, x)}{dx^2} + \kappa G_v(s)A \frac{d\bar{W}(s, x)}{dx} - (\kappa G_v(s)A + \rho I s^2) \bar{\Psi}(s, x) = \\
= -\rho I \left( s\psi(0, x) + \dot{\psi}(0, x) \right) \quad (6.58)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\kappa G_v(s)A W''(s, x) - \kappa G_v(s)A \Psi'(s, x) - \rho A s^2 W(s, x) = \\
= -\rho A (s w(0, x) + \dot{w}(0, x)) + q(s, x) \quad (6.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_v(s)I \Psi''(s, x) + \kappa G_v(s)A W'(s, x) - (\kappa G_v(s)A + \rho I s^2) \Psi(s, x) = \\
= -\rho I \left( s\psi(0, x) + \dot{\psi}(0, x) \right) \quad (6.60)
\end{aligned}$$

que é semelhante à eq. (B.3), dada no anexo B, porém, agora não mais homogênea. Na forma matricial tem-se,

$$\mathcal{M}\mathbf{X}''(x, s) + \mathcal{C}\mathbf{X}'(x, s) + \mathcal{K}\mathbf{X}(x, s) = \mathcal{F}(x, s) \quad (6.61)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \kappa G_v A & 0 \\ 0 & E_v I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa G_v A \\ \kappa G_v A & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} -\rho A s^2 & 0 \\ 0 & \rho I s^2 - \kappa G_v A \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

e

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} W(s, x) \\ \Psi(s, x) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(s, x) \\ \mathbf{g}(s, x) \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

onde,

$$\mathbf{q}(x, s) = -\rho A [s w(0, x) + \dot{w}(0, x)] + q(x, s), \quad \mathbf{g}(x, s) = -\rho I [s \Psi(0, x) + \dot{\Psi}(0, x)]$$

### 6.4.1 Viga em balanço

Para uma viga em balanço, tem-se as condições de contorno

$$\begin{aligned} w(t, 0) = 0, \quad \psi(t, 0) = 0 \\ -\psi(t, L) + w_x(t, L) = 0, \quad \psi_x(t, L) = 0 \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{X}(s, 0) = 0, \quad (6.64)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}(s, L) + \mathbf{X}'(s, L) = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

Utilizando a base normalizada [Claeyssen et al., 2004]

$$\mathbf{h}_o(s, x) = \mathbf{h}'(s, x)\mathcal{M} + \mathbf{h}(s, x)\mathcal{C}, \quad \mathbf{h}_1(s, x) = \mathbf{h}(s, x)\mathcal{M} \quad (6.66)$$

a solução da equação (6.61), escreve-se

$$\mathbf{X}(x, s) = \mathbf{h}_o(s, x)\mathbf{X}(s, 0) + \mathbf{h}_1(s, x)\mathbf{X}'(s, 0) + \int_0^x \mathbf{h}_1(s, x - \xi)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(s, \xi)d\xi$$

Da primeira condição de contorno, segue que

$$\mathbf{X}(x, s) = \mathbf{h}_1(s, x)\mathbf{X}'(s, 0) + \int_0^x \mathbf{h}_1(s, x - \xi)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(s, \xi)d\xi,$$

O valor  $\mathbf{X}'(s, 0)$  deve ser determinado com o uso da segunda condição de contorno, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \left[ \mathbf{h}_1(s, L)\mathbf{X}'(s, 0) + \int_0^L \mathbf{h}_1(s, L - \xi)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(s, \xi)d\xi \right] + \mathbf{h}'_1(s, L)\mathbf{X}'(s, 0) \\ + \int_0^L \mathbf{h}'_1(s, L - \xi)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(s, \xi)d\xi = 0 \end{aligned} \quad (6.67)$$

Segue

$$(\mathbf{A}\mathbf{h}(s, L) + \mathbf{h}'(s, L))\mathcal{M}\mathbf{X}'(s, 0) = - \int_0^L (\mathbf{h}'(s, L - \xi) + \mathbf{h}(s, L - \xi))\mathcal{F}(s, \xi)d\xi \quad (6.68)$$

Assim,

$$\mathbf{w}(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \left( \mathbf{h}(s, x)\mathcal{M}\mathbf{X}'(s, 0) + \int_0^x \mathbf{h}(s, x - \xi)\mathcal{F}(s, \xi)d\xi \right) \quad (6.69)$$



com  $\mathbf{X}'(s, 0)$  substituído pela expressão que resulta de (6.68) e  $\mathbf{h}(s, x)$  sendo a solução do problema de valor inicial

$$\mathcal{M}\mathbf{h}''(x, s) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(x, s) + \mathcal{K}\mathbf{h}(x, s) = 0, \quad (6.70)$$

$$\mathbf{h}(0, s) = 0, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(x, s) = \mathbf{I} \quad (6.71)$$

Da fórmula analítica obtida em (B.32) para o caso elástico, segue que

$$\mathbf{h}(s, x) = \begin{pmatrix} E_v I d''(x) + (\rho I \omega^2 - \kappa G_v A) d(x) & \kappa G A d'(x) \\ -\kappa G A d'(x) & \kappa G_v A d''(x) + \rho A \omega^2 d(x) \end{pmatrix} \quad (6.72)$$

com

$$E_v(s) = E_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + \alpha_i} \right), \quad G_v(s) = G_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s + \delta_i} \right).$$

Devido a complexidade simbólica, a resposta pode ser calculada utilizando quadratura de Gauss e será deixado como trabalho futuro.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

#### 7.1 Conclusões

Os materiais viscoelásticos são muito utilizados em máquinas, veículos, edifícios, equipamentos industriais, luvas, calçados, na fixação de janelas, aviões e carrocerias de ônibus para isolar ou amortecer o efeito dos motores, das cargas impulsivas (pancadas, golpes) e ruídos. Servem portanto para manter as vibrações e os ruídos em níveis que assegurem conforto e segurança aos usuários destes produtos e perfeito funcionamento dos equipamentos.

Em equipamentos e estruturas onde material viscoelástico é usado como amortecedor e é necessário inferir com precisão a eficiência e a eficácia destes materiais, medidas dos parâmetros que o caracterizam o material precisam ser realizadas e a equação de movimento do sistema amortecido precisa ser calculada. A resolução da equação de movimento de estruturas viscoelásticas envolve conceitos matemáticos mais sofisticados do que aquele presente na resolução de modelos elásticos o que dificulta o trabalho. Adicionalmente, as propriedades químicas e o comportamento físico dos materiais viscoelásticos variam de lote para lote, o que torna sua caracterização uma tarefa nada fácil, pois é necessário realizá-lo a cada lote. Neste trabalho utilizou-se o modelo reológico na forma integral e não o diferencial (padrão generalizado). No modelo padrão generalizado os parâmetros são mais artificiais que os da integral hereditária visto que nenhum material real é composto de mola e amortecedores.

As ferramentas matemáticas desenvolvidas pelo prof. Claeysen e seu colaboradores funcionou de maneira adequada para resolver sistemas viscoelásticos concentrados e distribuídos. O uso da base gerada pela resposta impulso permite representar a resposta de um sistema dinâmico de um forma elegante e sucinta.

A fórmula fechada eq. (3.82) de Claeysen foi utilizada para obter solução dinâmica do problema viscoelástico dado pelas eqs. (3.92) e (3.93) que foi obtida do problema inicial

$$M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + K \left[ h(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau)h(\tau)d\tau \right] = \delta(t)I$$

$$M\dot{h}(0) = 0 \quad \text{e} \quad h(0) = 0$$

onde o núcleo de relaxação foi aproximado pela série de Prony. Este procedimento para calcular a solução fundamental, desenvolvido neste trabalho, foi implementado em um sistema de um grau de liberdade. A resposta do sistema foi calculada usando a fórmula de variação de parâmetro (3.83) que representa a resposta em termos da solução fundamental viscoelástica e o resultado foi idêntico à analítica obtida resolvendo-se a equação de movimento usando o método operacional. A resposta de uma barra em vibração livre e em vibração forçada foi calculada seguindo o mesmo procedimento e comparada com a obtida utilizando o método espectral. Os resultados estão em boa concordância. Verificou-se que o procedimento desenvolvido neste trabalho, usando a base dinâmica viscoelástica, pode ser utilizado para calcular a resposta de um sistema viscoelástico.

Foi realizado um estudo sobre o princípio da correspondência em sistema de um grau de liberdade e em barra. Verificou-se que sua utilização nem sempre é fácil visto a necessidade de obter uma solução analítica do problema elástico em termos dos parâmetros elásticos,  $E$  e  $G$  por exemplo. No caso da vigas de Euler-Bernoulli com condições de contorno clássico os modos de vibração independem das propriedades do material da viga, o que permitiu obter a resposta elástica em termos  $E$  o módulo de Young. E a viga de Euler-Bernoulli foi estudada utilizando o princípio da correspondência e a solução fundamental. O resultado obtido apresentou o amortecimento esperado.

Foi realizado uma análise da equação evolutiva de quarta ordem da viga de Timoshenko viscoelástica utilizando a base gerada pela resposta impulso. Verificou que os modos de vibração no modelo de Timoshenko dependem de  $E$  e  $G$ , os parâmetros que caracterizam o material, e portanto tornou-se difícil obter uma solução analítica do problema elástico em termos destes parâmetros para obter a solução elástica análoga ao viscoelástico. O caminho

então para resolver a equação evolutiva (6.29) é o método operacional ou seja resolvê-lo no domínio de Laplace usando a base gerada pela resposta impulso e calcular a transformada inversa de Laplace para obter a resposta no domínio do tempo.

A equação evolutiva de quarta ordem

$$\tau^2 \alpha^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + \left[ \beta^2 - (\alpha^2 + \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0,$$

apresentada frequentemente na literatura, desacopla  $\psi(x, t)$  e  $w(x, t)$ , mas as condições de contorno continuam acopladas e desacoplar as condições de contorno não é simples e nem sempre possível. O melhor então é resolver o sistema de equações de segunda ordem acoplado

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) = 0,$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \tilde{E} I \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \kappa \tilde{G} A \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) = 0.$$

A resposta do modelo de viga de Timoshenko em termo da base gerada pela resposta impulso necessita ser mais pesquisada devido a sua complexidade, mas uma viga em balanço foi analisado. A solução fundamental neste caso é obtido de

$$\mathcal{M}\mathbf{h}''(x, s) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(x, s) + \mathcal{K}\mathbf{h}(x, s) = 0,$$

$$\mathbf{h}(0, s) = 0, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(x, s) = \mathbf{I}$$

e a resposta  $\mathbf{X}(x, s)$  de

$$\mathbf{X}(x, s) = \mathbf{h}_0(s, x)\mathbf{X}(s, 0) + \mathbf{h}_1(s, x)\mathbf{X}'(s, 0) + \int_0^x \mathbf{h}_1(s, x - \xi)\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(s, \xi)d\xi.$$

O problema aqui está relacionada ao termo  $\mathbf{X}(s, 0)$  e  $\mathbf{X}'(s, 0)$  que para o caso da viga biapoiada é dada pela eq. (6.65) e da resolução da (6.68) respectivamente. A resposta no domínio do tempo é obtido calculando-se a transformada inversa de Laplace. Este tema precisa ser mais desenvolvido.

## 7.2 Trabalhos Futuros

Os seguintes assuntos podem ser tema de pesquisa:

As vigas de Euler-Bernoulli com condições de contorno não clássica;

Vigas de Euler-Bernoulli compostas (viga sanduíche por exemplo);

Vigas de Euler-Bernoulli não homogênea, visto que neste trabalho as vigas analisadas são de apenas um material viscoelástico homogêneo;

Vigas de Timoshenko viscoelástica com condições de contorno clássica e não clássica;

Vigas de Timoshenko compostas (viga sanduíche por exemplo);

Vigas de Timoshenko não homogênea;

Estruturas equipadas com amortecedores viscoelásticos;

Sistemas mecânicos que usam coxins de borracha como amortecedores;

Placas e cascas viscoelásticas;

Placas fixas à estruturas com fitas adesivas viscoelásticas (vibro das janelas em edifícios).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfrey, T., 1944. "Methods of representing the properties of viscoelastic materials", **Quarterly of Appl. Math.**, vol. 2, pp. 143–151.

Alfrey, T., 1945. "Non-homogeneous stresses in visco-elastic media", **Quarterly of Appl. Math. III**, vol. 2, pp. 13–119.

Bert, C., 1973. "Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques", **Journal of Sound and Vibrating**, vol. 29-2, pp. 129–153.

Boyce, William E. e DiPrima, Richard C., 1979. "**Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**". Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro.

Caracciolo, R., Gasparetto, A. e Giovanoni, M., 2004. "An experimental technique for complete for complete dynamic characterization of a viscoelastic material", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 272, pp. 1013–1032.

Carini, A., 1992. "Fundamental solutions for linear viscoelastic continua", **Int. J. Solids Structures**, vol. 29, pp. 2989–3009.

Chang, K.C., Oh, S.T. e Lai, M.L., 1992. "Effect of Ambient Temperature on Viscoelastically Damped Structure", **Journal Of Structural Engineering**, vol. 118(7).

Christensen, R., 1971. "**Theory of Viscoelasticity an introduction**". Academic Press, USA.

Chu, F.H. e Wang, B.P., 1980. "Experimental Determination of Damping in Material And Structures", **Meeting of the American Society of Mechanical Engineers**, vol. .

Claeysen, J. C. R., 1990. "On Predicting the Response of Non-conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(1), pp. 73–84.

Claeysen, J. C. R., Canahualpa, G., e Jung, C., 1999. "A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, pp. 65–78.

Claeysen, J. C. R., Chiwiacowsky, L.D. e Suazo, G.C., 2002. "The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 40, pp. 119–135.

Claeysen, J. C. R. e Costa, S., 2006. "Modes for the coupled Timoshenko model with restrained end", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 296, pp. 1053–1058.

Claeysen, J. C. R., Ferreira, I. M., e Copetti, R. D., 2003. "Decomposition of forced responses in vibrating systems", **Applied Numerical Mathematics**, vol. (47), pp. 391–405.

Claeysen, J. C. R., Gallicchio, E., e Tamagna, A., 2004. "**Sistema Vibratórios Amortecidos**". UFRGS editora, Porto Alegre.

Claeysen, J. C. R. e Soder, R., 2003. "A Dynamical Basis for Computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 259(4), pp. 986–990.

Clough, R. W. e Penzien, J., 1993. "**Dynamics of Structures**". McGraw-Hill, Inc, United States of America.

Copetti, R. D., 2002. "**Sistemas Concentrados e Distribuídos Através da Análise Modal Adjunta**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Costa, S. N. J., 2001. "**Problemas de contorno de ordem superior e Cálculo da Função de Green**", Dissertação de Mestrado, PPGmap-Ufrgs, Porto Alegre, Rio Grande do Sul Brasil.

Costa, S. N. J., 2006. **"O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial"**, Tese de Doutorado, PPGmap-Ufrgs, Porto Alegre, Rio Grande do Sul Brasil.

Cowper, G., 1966. "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 88.

Cozzano, B. S., 1997. **"Sobre o Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Viscoelasticidade"**, Dissertação de Mestrado, PPGECC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Creus, G. J., 1986. **"Lecture Notes in Engineering"**. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.

Curadelli, R. O., 2001. **"Dissipação de Energia Através de Dispositivos metálicos"**, Dissertação de Mestrado, PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Dym, C. L. e Shames, I. H., 1973. **"Solids Mechanics A Variational Approach"**. McGraw-Hill Book Company, New York.

E756-93, A., 1993. "Standard Test Method For Measuring Vibration - Damping Properties Of Materials", **Progress in Nuclear Energy**, vol. E, pp. 860-866.

Ewins, D. J., 1980. **"Modal Testing Theory and Practice"**. Research Studies Press Ltd., Somerset, England.

Faisca, F., 2000. **"Caracterização de Materiais Viscoelásticos como Amortecedores de Vibração"**, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil.

Ferry, J., 1980. **"Viscoelastic Properties of Polymers"**. John Wiley and Sons, USA.

Findley, W. N., Lai, J. M. e Onaran, Kasif, 1976. **"Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials"**. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.



Flügge, W., 1975. "**Viscoelasticity**". Springer-Verlag, Berlin-Germany.

Giaretta, M. K., 2000. "**Vibrações Forçadas com força axial num Modelo de Euler-Bernoulli para vigas**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Ginsberg, J., 2001. "**Mechanical and Structural Vibrations**". John Wiley and Sons, inc., New York.

Golla, D. e Hughes, P., 1985. "Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time-Domain, Finite Element Formulation", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 52, pp. 897–906.

Gross, B., 1958. "**Mathematical structure of the Theories of Viscoelasticity**". Hermann, Paris.

Gupta, N. e Mutsuyoshi, H., 1985. "Analysis and design of viscoelastic damper for earthquake-resistant structure.", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 52, pp. 897–906.

Han, S. M., Benaroya, H. e Wei, T, 1999. "DYNAMICS OF TRANSVERSELY VIBRATING BEAMS USING FOUR ENGINEERING THEORIES", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 255(5), pp. 935–988.

Heydarian, M, Mullineux, N. e Reed, J.R., 1981. "Solution of parabolic partial differential equations", **Appl. Math. Modelling**, vol. 5, pp. 448–449.

Inman, D. J., 1994. "**Engineering Vibration**". Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Jones, D., 1974. "Temperature - Frequency Dependence of Dynamic Properties of Damping Materials", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 33, pp. 451–470.

Jones, D., 1978. "Reduced - Temperature Nomogram for Characterization of Damping Material Behavior", **Shock and Vibrating Bull.**, vol. 48, pt 2, pp. 13–22.

Jones, D. e Parin, M., 1972. "Technique For Measuring Damping Properties of Thin Viscoelastic Layers", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 24-2, pp. 201–210.

Lakes, R. e Quackenbush, J., 1996. "Viscoelastic behaviour in indium tin alloys over a wide range of frequency and time", **Philosophical Magazine Letters**, vol. 74, pp. 227–232.

Lopes, E., 1989. "**Um Estudo da Precisão do Método da Viga Vibrante Aplicada à Determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros**", Dissertação de mestrado, PPEM/UFSC, SC, Brasil.

Mahmoodi, P., 1969. "Structural Dampers", **Journal of the Structural Division**, vol. 95(8), pp. 1661–1672.

Mahmoodi, P. e Kell, C. J., 1990. "Method of Damped Energy Calculation For A Multilayer Viscoelastic Damper", **J. Wind Eng. Ind. Aerodynamic**, vol. 36-2, pp. 749–756.

"**Maple 7.0 Learning Guide**". Waterloo Maple Inc, 2001, .

Meirovitch, L., 1967. "**Analytical Methods in Vibrations**". Macmillan Company, New York.

Menon, S. e Tang, T., 2004. "A state-space approach for the dynamic analysis of viscoelastic systems", **Computers and Structures**, vol. 82, pp. 1123-1130.

Moraes, I. F., 2002. "**Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo para Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos**", Tese de doutorado, PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Morelatto, T., 2000. "**Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Clássica e Não-clássica**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Muravyov, A., 1997a. "**Discrete Dynamics Viscoelastic Systems and Vibration Analysis of An Engine Supported on Viscoelastic Mounts**", Tese de doutorado, The University of British Columbia, British Columbia, Canada.

Muravyov, A., 1997b. "**Discrete Dynamics Viscoelastic Systems and Vibration Analysis of an Engine Supported on Viscoelastic Mounts**", Dissertação de Mestrado, The University of British Columbia.

Muravyov, A., 1999. "Determination of complex moduli of isotropic viscoelastic materials", **Polymer Testing**, vol. 18, pp. 267–279.

Muravyov, A. e Hutton, S., 1997. "Closed-form Solutions and the Eigenvalue Problem for Vibration of Discrete Viscoelastic Systems", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 64, pp. 684–691.

Naimark, M., 1967. "**Linear Differential Operators**". Frederick Ungar Pub., New York.

Nakra, B., 1998. "Vibration Control in Machines and Structures Using Viscoelastic Damping", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 211-3, pp. 449–465.

Nakra, B., 2000. "Structural dynamic modification using additive damping", **Sādhanā**, vol. 25(3), pp. 277–289.

Nashif, A. D., Jones, D. I. G. e Henderson, J. P., 1985. "**Vibration Damping**". John Wiley & Sons, Inc., New York.

Neuman, R. P. S., 2001. "**Determinação dos Modos Vibratórios Sujeitos a Efeitos de Cisalhamento e Inércia Rotativa**", Dissertação de Mestrado, PPGmap-Ufrgs, Porto Alegre, Rio Grande do Sul Brasil.

Patel, B.M., W. G. M. D., 1978. "NEW STRUCTURAL DAMPING TECHIQUE FOR VIBRATION CONTROL", **Schok and Vibrating Bull.**, vol. 48, pp. 13–92.

Petyt, M., 1990. "**Introdução to finite element vibration analysis**". Cambridge University Press, Cambridge.

Rabotnov, Y. N., 1980. "**Elements of Hereditary Solid Mechanics**". Mir Publishers, Moscow.

Rao, M. D., 2003. "Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 262, pp. 457–474.

Riera, J. D., 1996, "**Introdução à Análise de Vibrações em Estruturas**". Laboratório de Dinâmica Estrutural e Confiabilidade/Escola de Engenharia, Ufrgs, Porto Alegre, RS.

Shen, K., 1995. "Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural Applications", **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 121-6, pp. 694–701.

Soong, T.T. e Dargush, G.F., 1997. "**Passive Dissipation Systems in Structural Engineering**". John Wiley And Sons, Great Britain.

Stroud, A. e Secrest, D., 1966. "**Gaussian quadrature formulas**". Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Trapp, W. J. e Bowie, G., 1980. "Perspectives on Damping", **The Winter Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers**, vol. 38, pp. 1–26.

Tsai, C. e Lee, H., 1993. "Applications of Viscoelastic Dampers to High-Rise Building.", **Journal of Structural Engineering**, vol. 119(4), pp. 1222–1233.

Turcatto, R. B., 2002. "**Vibrações Livres e Forçadas no Modelo de Timoshenko**", Dissertação de Mestrado, PPGmap-Ufrgs, Porto Alegre, Rio Grande do Sul Brasil.

Ungar, E. e Kerwin, E., 1962. "Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts", **The Journal of the acoustical Society of America**, vol. 34(7), pp. 954–957.

Zhang, Ri-hui e Soong, T.T., 1992. "Seismic Design of Viscoelastic Dampers for Structural Applications", **Journal of Structural Engineering**, vol. 118-5, pp. 1375–1393.

## ANEXO A

### Modos vibratórios da deformação com a equação evolutiva de Timoshenko

Tomando-se a equação de evolutiva de quarta ordem

$$A_4 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + A_2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + A_0 w(x, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

considerando-se que a solução seja

$$w(x, t) = W(x) \cos(\omega t) \quad (\text{A.2})$$

tem-se

$$A_4 \omega^4 W(x) - \omega^2 A_2 W(x) + A_0 W(x) = 0 \quad (\text{A.3})$$

e substituindo  $A_4$ ,  $A_2$  e  $A_0$  em (A.1), obtém-se

$$\tau^2 \alpha^2 \omega^4 W(x) - \omega^2 \beta^2 W(x) + \omega^2 (\alpha^2 + \tau^2) W''(x) + W^{(iv)}(x) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Agrupando os termos semelhantes tem-se

$$(\tau^2 \alpha^2 \omega^4 - \omega^2 \beta^2) W(x) + \omega^2 (\alpha^2 + \tau^2) W''(x) + W^{(iv)}(x) = 0 \quad (\text{A.5})$$

e de na forma mais compacta

$$-K^4 W(x) + g^2 W''(x) + W^{(iv)}(x) = 0 \quad (\text{A.6})$$

onde

$$K^4 = -\tau^2 \alpha^2 \omega^4 + \omega^2 \beta^2 \quad (\text{A.7})$$

$$g^2 = \omega^2 (\alpha^2 + \tau^2). \quad (\text{A.8})$$

A solução da eq. (A.6) pode ser escrita como

$$W(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 \quad (\text{A.9})$$

onde  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ ,  $\phi_3(x)$  e  $\phi_4(x)$  é uma base qualquer de soluções. Obtidas as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ , diante determinadas condições de contorno, os  $W(x)$  serão as formas dos modos de vibração.

#### BASE ESPECTRAL DE EULER

Se a base escolhida para representar os modos for a clássica [Dym e Shames, 1973], ou seja, em termos da natureza das raízes

$$\lambda_1 = s \quad \lambda_2 = -s \quad \lambda_3 = qi \quad \lambda_4 = -qi \quad (\text{A.10})$$

do polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^4 + g^2\lambda^2 - K^4 \quad (\text{A.11})$$

onde

$$s = s(\omega) = \sqrt{\left(K^4 + \frac{g^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{g^2}{2}}, \quad q = q(\omega) = \sqrt{g^2 + s^2} \quad (\text{A.12})$$

tem-se as formas dos modos de vibração

$$W(x) = C_1\text{sen}(\lambda_1x) + C_2\text{cos}(\lambda_2x) + C_3\text{senh}(\lambda_3x) + C_4\text{cosh}(\lambda_4x) \quad (\text{A.13})$$

onde as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  e  $\lambda = \lambda(\omega)$  são determinadas utilizando-se as condições de contorno.

#### BASE FUNDAMENTAL GERADA PELA RESPOSTA IMPULSO

Neste trabalho será utilizada a base fundamental ou dinâmica que é gerada pela resposta impulso ou função de Green de valor inicial  $h(x)$  [Turcatto, 2002] e [Neuman, 2001]. A base é constituída pelas funções

$$h(x), h'(x), h''(x), h'''(x) \quad (\text{A.14})$$

onde  $h(x)$  é obtida resolvendo-se o seguinte problema inicial

$$h^{(iv)}(x) + g^2 h''(x) - K^4 h(x) = 0 \quad (\text{A.15})$$

com as condições iniciais

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0 \quad \text{e} \quad h'''(0) = 1. \quad (\text{A.16})$$

Utilizando a base de Euler, escrevemos

$$h(x) = C_1 \cos(\lambda_1 x) + C_2 \sen(\lambda_2 x) + C_3 \cosh(\lambda_3 x) + C_4 \sinh(\lambda_4 x). \quad (\text{A.17})$$

Usando as condições iniciais (A.16) e a eq. (A.17) as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são obtidas resolvendo-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & s \\ -q^2 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & q^3 & 0 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

A solução do sistema acima é

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{q(q^2 + s^2)}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{s(q^2 + s^2)}. \quad (\text{A.19})$$

Assim

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{q(q^2 + s^2)} \sen(qx) + \frac{1}{s(q^2 + s^2)} \sinh(sx) \\ h(x) &= \frac{(q \sinh(sx) - s \sen(qx))}{qs(q^2 + s^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Com a base fundamental

$$\Phi = \{h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)\}$$

a forma do modo de vibração é

$$W(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x). \quad (\text{A.21})$$

Utilizando-se as condições de contorno do problema tem-se

$$\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{D}}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\Phi^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{iv}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{iv}(0) & h^v(0) & h^{(vi)}(0) \\ h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h'(L) & h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{iv}(L) & h^{(v)}(L) \\ h'''(L) & h^{iv}(L) & h^v(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

e  $\mathbf{B}$  é a matriz que envolve os coeficientes das condições de contorno

$$a_{11}W(0) + a_{13}W(0) + a_{13}W(0) + a_{14}W'''(0) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$a_{21}W(0) + a_{22}W(0) + a_{23}W(0) + a_{24}W'''(0) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$b_{11}W(L) + b_{13}W(L) + b_{13}W(0) + b_{14}W'''(0) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$b_{21}W(0) + b_{22}W(0) + b_{23}W(0) + b_{24}W'''(0) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Para obter uma solução  $\mathbf{c}$  do sistema (A.22) que não seja identicamente nula, deve ser assumindo que  $\omega$  é raiz da equação característica

$$\det(\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{D}}) = 0. \quad (\text{A.28})$$

Para cada frequência natural, obtém-se o modo desejado.

### Cálculo dos modos da deformação de uma viga biapoçada

As condições de contorno de viga biapoçada são deslocamento e momento nulo em cada extremo da viga:

$$W(0) = 0 \quad W_{xx}(0) = 0, \quad W(L) = 0 \quad W_{xx}(L) = 0. \quad (\text{A.29})$$



Escrevendo

$$W(x) = \Phi(x)\mathbf{c},$$

$$\Phi(x) = (h(x), h'(x), h''(x), h'''(x)), \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

segue que

$$\text{em } x = 0 \begin{cases} 1 \Phi(0) \mathbf{c} + 0 \Phi'(0) \mathbf{c} + 0 \Phi''(0) \mathbf{c} + 0 \Phi'''(0) \mathbf{c} = 0 \\ 0 \Phi(0) \mathbf{c} + 0 \Phi'(0) \mathbf{c} + 1 \Phi''(0) \mathbf{c} + 0 \Phi'''(0) \mathbf{c} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

e

$$\text{em } x = L \begin{cases} 1 \Phi(L) \mathbf{c} + 0 \Phi'(L) \mathbf{c} + 0 \Phi''(L) \mathbf{c} + 0 \Phi'''(L) \mathbf{c} = 0 \\ 0 \Phi(L) \mathbf{c} + 0 \Phi'(L) \mathbf{c} + 1 \Phi''(L) \mathbf{c} + 0 \Phi'''(L) \mathbf{c} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

que na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi''(0) \\ \Phi'''(0) \\ \Phi(L) \\ \Phi'(L) \\ \Phi''(L) \\ \Phi'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.32})$$

$$\Phi^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\text{sen}(qx) + \frac{\text{senh}(sx)}{s}}{(q^2+s^2)} & \frac{-\cos(qx) + \cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q\text{sen}(qx) + s\text{senh}(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^2\cos(qx) + s^2\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} \\ \frac{-\cos(qx) + \cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q\text{sen}(qx) + s\text{senh}(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^2\cos(qx) + s^2\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^3\text{sen}(qx) + s^3\text{sinh}(sx)}{(q^2+s^2)} \\ \frac{q\text{sen}(qx) + s\text{senh}(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^2\cos(qx) + s^2\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^3\text{sen}(qx) + s^3\text{sinh}(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^4\cos(qx) + s^4\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} \\ \frac{q^2\cos(qx) + s^2\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^3\text{sen}(qx) + s^3\text{sinh}(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^4\cos(qx) + s^4\cosh(sx)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^5\text{sin}(qx) + s^5\text{sinh}(sx)}{(q^2+s^2)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{B}\Phi^D \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.34})$$

O produto  $\mathbf{U} = \mathbf{B}\Phi^D$  é

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & q^2 + s^2 \\ \frac{-\text{sen}(qL) + \frac{\text{senh}(sL)}{s}}{(q^2+s^2)} & \frac{-\cos(qL) + \cosh(sL)}{(q^2+s^2)} & \frac{q\text{sen}(qL) + s\text{senh}(sL)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^2\cos(qL) + s^2\cosh(sL)}{(q^2+s^2)} \\ \frac{q\text{sen}(qL) + s\text{senh}(sL)}{(q^2+s^2)} & \frac{q^2\cos(qL) + s^2\cosh(sL)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^3\text{sen}(qL) + s^3\text{sinh}(sL)}{(q^2+s^2)} & \frac{-q^4\cos(qL) + s^4\cosh(sL)}{(q^2+s^2)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Sendo que para ter uma solução não trivial  $\mathbf{c}$ , o determinante de  $\mathbf{U}$  deve ser zero e resulta a equação característica

$$\text{sen}(qL) \text{senh}(sL) = 0 \quad (\text{A.36})$$

Recordando que  $q$  e  $s$  são funções da frequência natural  $\omega$ , resolvendo eq (A.36) obtém-se as frequências naturais da viga e a forma dos modos  $W(x)$  é dada por

$$W(x) = c_1 h(x) + c_2 h'(x) + c_3 h''(x) + c_4 h'''(x) \quad (\text{A.37})$$

e as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são obtidas resolvendo-se o sistema eq. (A.34) para as frequências  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$ .

Na fig.A.1, abaixo, estão mostrados as formas dos modos de vibração de uma viga biapoiada,

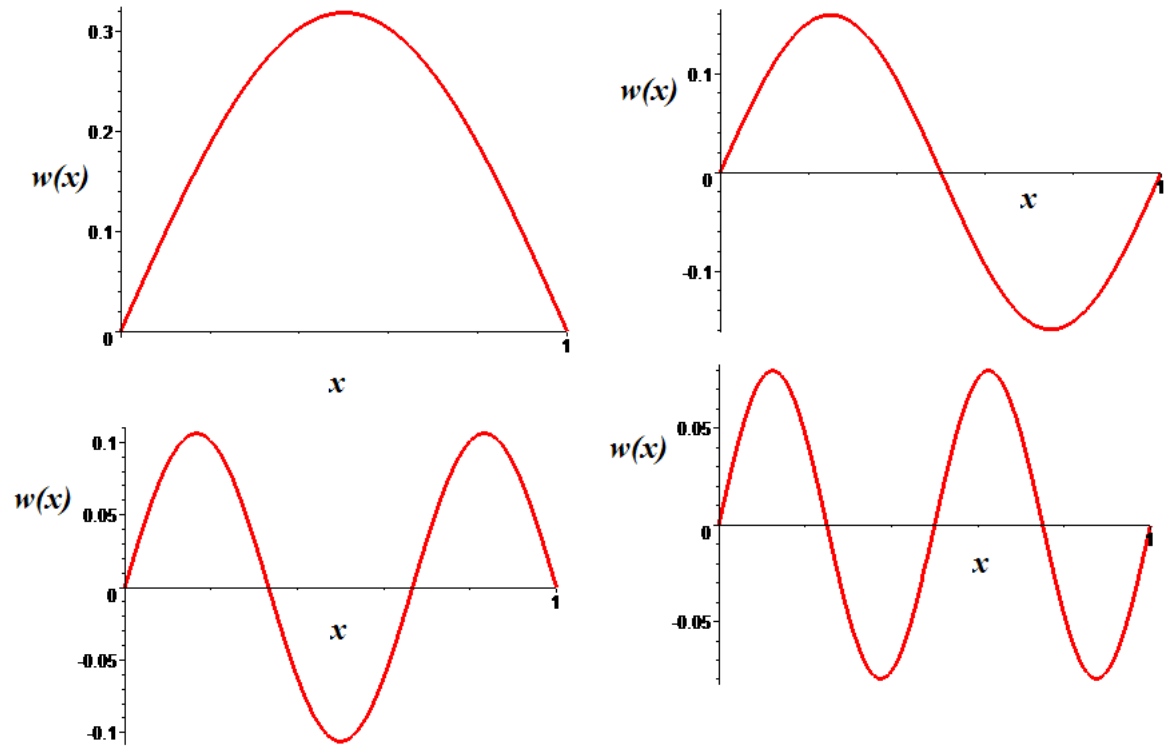


Figura A.1 – Modos da viga elástica bi-apoiada

## ANEXO B

### Modos vibratórios do modelo de Timoshenko para uma viga elástica

No modelo de Timoshenko para uma viga elástica

$$\begin{aligned}\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) &= 0 \\ \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa GA \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) + q(x, t) &= 0,\end{aligned}$$

assumindo

$$w(x, t) = e^{i\omega t} W(x) \quad (\text{B.1})$$

e

$$\psi(x, t) = e^{i\omega t} \Psi(x) \quad (\text{B.2})$$

obtem-se

$$\begin{aligned}\kappa GA W'''(x) - \kappa GA \Psi'(x) + \rho A \omega^2 W(x) &= 0 \\ EI \Psi''(x) + \kappa GA W'(x) + (\rho I \omega^2 - \kappa GA) \Psi(x) &= 0\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A equação B.3 na forma matricial, escreve-se

$$\mathcal{M} \mathbf{X}''(\mathbf{x}) + \mathcal{C} \mathbf{X}'(\mathbf{x}) + \mathcal{K}(\omega) \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa GA \\ \kappa GA & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{K}(\omega) = \begin{bmatrix} \rho A \omega^2 & 0 \\ 0 & \rho I \omega^2 - \kappa G A \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} W(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A solução da eq. (B.3) usando a base dinâmica

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}_0 \mathbf{X}(0) + \mathbf{h}_1(x) \mathbf{X}'(0) \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}'(x) \mathcal{M} + \mathbf{h}(x) \mathcal{C} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\mathbf{h}_1(x) = \mathbf{h}(x) \mathcal{M} \quad (\text{B.11})$$

ou

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x) \mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x) \mathbf{c}_2 \quad (\text{B.12})$$

onde  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  são os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

e a base  $\mathbf{h}(x)$  é obtida resolvendo-se o problema inicial

$$\mathcal{M} \mathbf{h}''(x) + \mathcal{C} \mathbf{h}'(x) + \mathcal{K}(\omega) \mathbf{h}(x) = \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0} \quad \mathcal{M} \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}. \quad (\text{B.16})$$

Como já discutido anteriormente,  $\mathbf{h}(x)$  pode ser obtido utilizando a fórmula fechada obtida por Claeysen [Claeysen, 1990]

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j} \quad (\text{B.17})$$

onde  $b_i$ ,  $h^{(j-1-i)}(x)$  e  $\mathbf{h}_{4-j}$  são obtidas do polinômio característico de um problema inicial e de uma equação em diferença matricial, as quais são apresentadas a seguir.

### Polinômio característico

$$P(s) = \det [s^2 \mathcal{M} + s \mathcal{C} + \mathcal{M}] = \sum_{k=0}^4 b_k s^{4-k} \quad (\text{B.18})$$

$$b_0 = ab, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = (ae + cb)\omega^2, \quad b_3 = 0 \text{ e } b_4 = ce\omega^4 - ca\omega^2, \quad (\text{B.19})$$

onde

$$a = \kappa GA, \quad b = EI, \quad c = \rho A \text{ e } e = \rho I. \quad (\text{B.20})$$

### Problema de valor inicial

$$b_0 h^{(iv)}(x) + b_2 h''(x) + b_4 h(x) = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad b_0 h'''(0) = 1$$

cujas solução é

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{g^4 + 4r^4}} \quad (\text{B.23})$$

$$\delta = \sqrt{g^2 + \epsilon^2} \quad (\text{B.24})$$

$$g^2 = \left( \frac{e}{b} + \frac{c}{a} \right) \omega^2 \quad (\text{B.25})$$

$$r^4 = c\omega^2 \frac{(-e\omega^2 + a)}{ab} \quad (\text{B.26})$$

**Equação em diferença matricial**

$$\mathcal{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathcal{K}\mathbf{h}_k = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}_1 = \bar{\mathbf{I}},$$

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.29})$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 + c\omega^2 b}{a^2 b} & 0 \\ 0 & -\frac{e\omega^2}{b^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &= \begin{pmatrix} (e\omega^2 - a)d(x) & ad'(x) \\ -ad'(x) & ad''(x) + c\omega^2 d(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} EId''(x) + (\rho I\omega^2 - \kappa GA)d(x) & \kappa GA d'(x) \\ -\kappa GA d'(x) & \kappa GA d''(x) + \rho A\omega^2 d(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Observe-se que a anti-simetria da solução fundamental deve-se à matriz  $\mathcal{C}$ , que contém parâmetros correspondentes a inércia rotatória, ser anti-simétrica.

### B.1 Equação característica para viga elásticas

Condições de contorno podem ser escritas de forma genérica como

$$\begin{aligned} A_{11}X(0) + B_{11}X'(0) &= \mathbf{0} \\ A_{21}X(L) + B_{21}X'(L) &= \mathbf{0} \end{aligned}, \quad (\text{B.33})$$

onde os coeficientes são matrizes de ordem 2.

De (B.4), segue

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(0) &= \mathbf{h}(0) \mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(0) \mathbf{c}_2, \\
 \mathbf{X}'(0) &= \mathbf{h}'(0) \mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(0) \mathbf{c}_2, \\
 \mathbf{X}(L) &= \mathbf{h}(L) \mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(L) \mathbf{c}_2, \\
 \mathbf{X}'(L) &= \mathbf{h}'(L) \mathbf{c}_1 + \mathbf{h}''(L) \mathbf{c}_2.
 \end{aligned}
 \tag{B.34}$$

Substituindo (B.34) nas condições de contorno (B.33), resulta o sistema algébrico

$$\mathbf{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{B}\Phi
 \tag{B.35}$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}
 \tag{B.36}$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}
 \tag{B.37}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}.
 \tag{B.38}$$

Soluções  $\mathbf{c}$  não nulas são obtidas quando

$$\Delta(\omega) = \det(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.
 \tag{B.39}$$

### O caso de uma viga em balanço

Para uma viga em balanço tem-se as condições de contorno

$$\text{extremidade fixa} \begin{cases} W(0) = 0 \\ \Psi(0) = 0 \end{cases}
 \tag{B.40}$$

e

$$\text{extremidade livre} \begin{cases} W_x(L) - \Psi(L) = 0 \\ \Psi(L) = 0 \end{cases}
 \tag{B.41}$$



Assim,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.44})$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.45})$$

e recordando que

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(0) = 1, \quad (\text{B.46})$$

tem-se

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{M}^{-1} \\ \mathcal{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix} \quad (\text{B.47})$$

Assim, obtém-se da condição de contorno na extremidade fixa

$$\mathbf{h}(0)c_1 + \mathbf{h}'(0)c_2 = \mathbf{0}c_1 + \mathcal{M}^{-1}c_2 = \mathbf{0} \quad (\text{B.48})$$

que  $c_2 = \mathbf{0}$  e da condição na extremidade livre tem-se

$$\mathbf{A}_{21} \left( \mathbf{h}(L)c_1 + \mathbf{h}'(L)c_2 \right) + \mathbf{B}_{21} \left( \mathbf{h}'(L)c_1 + \mathbf{h}''(L)c_2 \right) = \mathbf{0} \quad (\text{B.49})$$

$$\left( \mathbf{A}_{21}\mathbf{h}(L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{h}'(L) \right) c_1 = \mathbf{0} \quad (\text{B.50})$$

para uma solução  $c_1$  não nula deve-se ter que

$$\det \left( \mathbf{A}_{21}\mathbf{h}(L) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{h}'(L) \right) = 0 \quad (\text{B.51})$$