

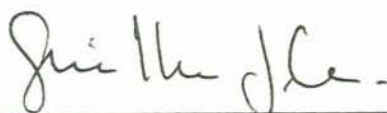
ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA
DE PÓRTICOS ESPACIAIS

SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES

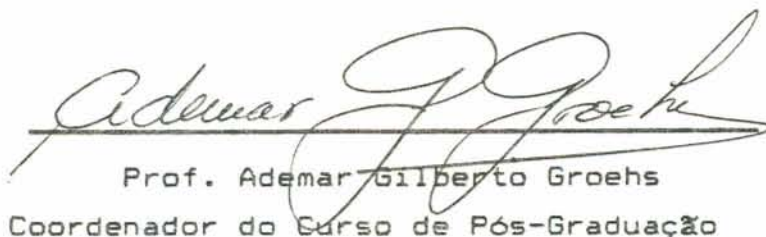
Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL.

Porto Alegre
Setembro de 1990

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Guillermo Juan Creus
Orientador



Prof. Ademar Gilberto Groehs
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Guillermo Juan Creus (Orientador)
D.Sc. pela COPPE - UFRJ
- Prof. Ademar Gilberto Groehs
D.Sc. pela COPPE - UFRJ
- Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Ph.D. pela S. M. U.
- Prof. Júlio C. R. Claeysen
Ph.D. pela Brown University

À
Dilze
Fernando , Gustavo
e
Clarissa

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Jarbas Milititsky pelo importante apoio prestado quando Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

Ao Prof. Dr. Guillermo Juan Creus pelos valiosos ensinamentos, compreensão e eficiente orientação na elaboração deste trabalho.

Aos colegas professores do Departamento de Engenharia Estrutural da UFAL, Carlos Cardoso, Adeildo Ramos e Viviane Ramos, pela amizade e estímulo.

A todos os professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS que de forma direta ou indireta contribuíram para a viabilização do presente trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES pela bolsa de estudos concedida.

INDICE

LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
RESUMO.....	xii
ABSTRACT	xiii
1. INTRODUÇÃO.....	1.
1.1- Considerações Gerais	1
1.2- Objetivo, Hipóteses e Conteúdo do Trabalho	4
2. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS	7
2.1- Relações Cinemáticas	7
2.2- Critério de Plastificação de uma Seção	17
2.3- Matrizes de Rigidez dos Elementos	25
2.3.1- Matriz de Rigidez Elástica de um Elemento.....	25
2.3.2- Matriz de Rigidez Elasto-Plástica de um Elemento	35
2.3.2.1- Caso de um elemento com uma rótula plástica no extremo 1	35
2.3.2.2- Caso de um elemento com duas rótulas plásticas nas suas extremidades.....	38
3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	41
3.1- Método Numérico da Análise	41
3.2- Sistematização dos Procedimentos da Análise	45
3.3- Fluxograma Geral	53
3.4- Exemplos Numéricos	57
3.4.1- Caso de um pórtico plano	57
3.4.2- Caso de uma coluna engastada na base e livre no topo e sujeita a uma carga axial	61

3.4.3-	Caso de uma viga em balanço sujeita a uma carga concentrada no extremo livre	65
3.4.4-	Caso de uma estrutura reticular espacial	65
3.4.5-	Caso de uma grelha	66
4.	ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA	75
4.1-	Considerações Iniciais	75
4.2-	Correção do Afastamento entre a Superfície de Plastificação e os Pontos Correspondentes aos Esforços em uma Rótula Plástica	76
4.3-	Procedimentos Numéricos da Análise	79
4.4-	Fluxograma Geral	88
4.5-	Exemplos Numéricos	94
4.5.1-	Caso de um pórtico bidimensional	94
4.5.2-	Caso de uma viga em balanço	97
4.5.3-	Caso de uma viga biengastada	97
4.5.4-	Caso de uma grelha	100
4.5.5-	Caso de uma estrutura reticular espacial ...	103
5.	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	108
	BIBLIOGRAFIA	110
	APÊNDICE A- POSTULADOS DE DRUCKER	117
	APÊNDICE B- CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO - Relações Úteis ...	119
	APÊNDICE C- NATUREZA DOS MOMENTOS FLETORES E TORÇORES	123

LISTA DE SÍMBOLOS

- A_x - área da seção transversal de um elemento
- \tilde{B}_i - vetor gradiente da superfície de plastificação para os esforços atuantes na seção i
- \tilde{B}_A, \tilde{B}_B - vetores gradientes nos pontos A e B da superfície de plastificação
- \tilde{B}_M - vetor gradiente médio
- C_x, C_y e C_z - cossenos diretores do eixos locais x, y e z
- \tilde{D}_t - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura na iteração t
- \tilde{E} - matriz constitutiva do material
- E - módulo de elasticidade longitudinal do material
- $F(,)$ - função de escoamento
- \tilde{F}_t - vetor das forças desequilibradas no final da iteração t
- G - módulo de elasticidade transversal do material
- I_y, I_z - momentos de inércia da seção
- I_x - constante de torção da seção
- I_p - soma dos momentos de inércia I_y e I_z
- \tilde{K}_t - matriz de rigidez tangente da estrutura
- \tilde{K}_E - matriz de rigidez elástica de um elemento
- \tilde{K}_E^t - matriz de rigidez elástica de um elemento na iteração t
- \tilde{K}_L - matriz de rigidez linear de um elemento
- \tilde{K}_G - matriz de rigidez geométrica de um elemento
- \tilde{K}_G^s - matriz de rigidez geométrica de um elemento baseada em momentos semitangenciais
- \tilde{K}_E^G - matriz de rigidez elástica de um elemento referida às coordenadas globais
- $\tilde{K}_{EP}^{(i)}$ - matriz de rigidez elastoplástica de um elemento com uma rótula plástica no extremo i

$K_{EP}^{(1,2)}$ - matriz de rigidez elastoplástica de um elemento com os dois extremos plastificados

L_0, L - comprimentos inicial e atual de um elemento

M_y, M_z - momentos fletores atuantes em uma seção

M_x - momento torçor atuante em uma seção

M_y^q, M_z^q - vetores momentos fletores quasitangenciais

M_y^s, M_z^s - vetores momentos fletores semitangenciais

M_{yi}, M_{zi} - momentos fletores atuantes no extremo i de um elemento

M_{xi} - momento torsor atuante no extremo i de um elemento

M_{py}, M_{pz} - momentos fletores de plastificação da seção

M_{px} - momento torsor de plastificação da seção

M_{uy}, M_{uz} - momentos fletores de plastificação reduzidos pela presença de esforço normal

m_x, m_y, m_z - relação entre o momento (torçor ou fletor) e o correspondente valor do momento de plastificação

N_x - esforço normal atuante em uma seção

N_{xi} - esforço normal atuante no extremo i do elemento

N_p - esforço normal de plastificação de uma seção

n_x - relação entre o esforço normal atuante na seção e N_p

$NOPLA(i_e)$ - variável que identifica o estado (elástico ou plástico) dos extremos do elemento i_e

n - número de graus de liberdade da estrutura

n_{max} - número máximo de passos incrementais admitido na análise

$\underline{0}$ - matriz nula

\underline{P} - vetor dos esforços atuantes nos extremos de um elemento

$\dot{\underline{P}}$ - taxa do vetor de esforços

$\underline{P}^{(i)}$ - vetor dos esforços atuantes no extremo i do elemento

$\dot{\underline{P}}_i$ - vetor das taxas dos esforços atuantes no extremo i

$P_{N1}, P_{N2}, P_{N3}, P_{N4}, P_{N5}, P_{N6}$ - forças naturais do elemento

- $P^{(i)}$ - matriz 3 x 3 cujas colunas são os cossenos diretores das direções normal e principais do seção i
- $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}, P_3^{(i)}$ - vetores unitários nas direções normal e principais da seção i
- \tilde{P}^e - vetor dos esforços atuantes nos extremos do elemento, com todos os momentos tomados como semitangenciais
- \tilde{P}_L - vetor das ações nodais locais de um elemento
- $\tilde{P}_0^{(i)}$ - vetor das ações na seção i de um elemento, referidas aos eixos globais
- \tilde{R}_t - vetor das cargas atuantes na estrutura no final da iteração t
- \bar{R} - vetor das cargas de referência
- \tilde{r}_T - matriz de transformação de coordenadas de um elemento
- r_e - fator de carga necessário para formar uma ou duas rótulas plásticas em um elemento
- $(r_e)_{\min}$ - menor valor do fator r_e
- \tilde{r} - matriz de rotação de um elemento
- \tilde{r}_0 - matriz de rotação inicial de um elemento
- \tilde{r}_1 - vetor unitário na direção do eixo local x
- \tilde{S}_t - vetor das resultantes das ações exercidas pelos elementos sobre os nós da estrutura
- s_E - contribuição de um elemento no vetor \tilde{S}_t
- \tilde{U} - vetor dos deslocamentos nodais de um elemento
- \tilde{U}_E - vetor dos deslocamentos relativos de um elemento
- \tilde{U} - vetor de taxas dos deslocamentos de um elemento
- \tilde{U}_i - vetor de taxas dos deslocamentos do extremo i
- \tilde{U}_i^e - vetor de taxas da parte elástica dos deslocamentos do extremo i
- \tilde{U}_i^p - vetor de taxas da parte plástica dos deslocamentos do extremo i
- u_i, v_i, w_i - translações do extremo i, segundo os eixos locais x, y e z

u_x - alongamento ou encurtamento de um elemento

V - volume de um elemento

X, Y, Z - eixos globais

x, y, z - eixos locais de um elemento

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - eixos de referência usados para definir a orientação das seções extremas dos elementos

X_t, Y_t, Z_t - coordenadas cartesianas dos pontos nodais da estrutura no final da iteração t

α - ângulo usado para definição dos eixos principais da seção transversal de um elemento no espaço

$\beta^{(i)}$ - matriz 3×3 cujas colunas são formadas pelos cossenos diretores dos eixos \bar{x}, \bar{y} e \bar{z} do extremo i do elemento

$\beta_t^{(i)}$ - matriz $\beta^{(i)}$ no final da iteração t

$\Delta\beta_t^{(i)}$ - matriz incremental de $\beta_t^{(i)}$ relativa à iteração t

$\Delta\tilde{D}_t$ - vetor de incrementos de deslocamentos nodais da estrutura obtidos durante a iteração t

ΔW - trabalho utilizado como controle da análise

$\Delta\tilde{D}_0, \Delta\tilde{R}_0$ - vetores de incrementos totais de deslocamentos e de cargas, respectivamente, de um passo incremental

$\Delta\tilde{D}_t, \Delta\tilde{D}_t$ - vetores de incrementos de deslocamentos auxiliares

$\Delta\tilde{R}_t$ - vetor de incrementos de cargas da iteração t

$\Delta D_t^{(X)}, \Delta D_t^{(Y)}, \Delta D_t^{(Z)}$ - incrementos de translações de um nó, nas direções X, Y e Z e na iteração t

$\Delta\tilde{U}_E^t$ - vetor de incrementos de deslocamentos relativos de um elemento obtidos na iteração t

$\Delta\tilde{P}_L^t$ - vetor de incrementos das ações nodais de um elemento, segundo os eixos locais, na iteração t

$\Delta N_x, \Delta Q_y, \Delta Q_z, \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ - incrementos de esforços internos

$\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$ - incrementos de rotações em torno dos eixos X, Y e Z

δ - valor adotado para a relação que caracteriza o colapso convencional da estrutura

δU - vetor de deslocamentos virtuais do elemento
 $\delta \underline{\varepsilon}$ - vetor de incrementos virtuais nas deformações
 $\underline{\varepsilon}$ - vetor de deformações do elemento
 $\underline{\varepsilon}_L$ - vetor contendo os termos lineares de $\underline{\varepsilon}$
 $\underline{\varepsilon}_Q$ - vetor contendo os termos quadráticos de $\underline{\varepsilon}$
 $\varepsilon_{\alpha kl}$ - parte quadrática da componente de deformação ε_{kl}
 $\underline{\rho}$ - vetor que contém rotações finitas em torno dos eixos x, y e z
 $\rho_i, \vartheta_i, \chi_i$ - rotações finitas no extremo i, em torno dos eixos x, y e z
 γ - ângulo entre o eixo local x e sua projeção no plano XZ
 $\dot{\Lambda}_1, \dot{\Lambda}_2$ - constantes de plastificação relativas aos extremos 1 e 2 do elemento
 λ_t - fator de carga correspondente à iteração t
 ρ_{tol} - tolerância admitida no critério de convergência
 μ_t - relação entre uma carga qualquer no final da iteração t e seu correspondente valor no vetor de cargas de referência
 $\underline{\sigma}$ - vetor das tensões atuantes no elemento
 σ_e - tensão de escoamento do material
 $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ - componentes de tensões
 ψ - função de plastificação de uma seção
 θ_x - ângulo relativo de torção de um elemento
 θ_{iy}, θ_{iz} - ângulos de flexão do extremo i do elemento

RESUMO

Apresenta-se uma formulação do tipo incremental-iterativa destinada a análise não linear de pórticos espaciais. Considera-se os efeitos não lineares introduzidos pelas mudanças de configuração geométrica da estrutura e também pela combinação destes efeitos com aqueles inerentes ao comportamento plástico exibido pelo material.

As relações cinemáticas empregadas permitem a consideração de deslocamentos arbitrariamente grandes, acompanhados de pequenas deformações.

A modelagem do comportamento plástico do material é efetuada através do conceito de rótula plástica, estabelecido a partir de um critério de plastificação generalizado.

Adota-se uma matriz de rigidez geométrica de barra baseada em momentos semitangenciais. Para elementos com extremos plastificados, é deduzida uma matriz de rigidez elasto-plástica.

Emprega-se um método numérico do tipo incremental-iterativo, que utiliza como condição básica de controle da análise a constância do trabalho realizado pelos incrementos de cargas, em cada passo incremental (Método de Controle por Trabalho).

A formulação permite uma descrição completa do desempenho mecânico da estrutura, inclusive em estágio de deformação pós-crítico em que ocorre regressão do carregamento com aumento de deslocamentos, ou vice-versa.

A formulação foi implementada em um programa computacional elaborado em linguagem FORTRAN. Vários exemplos numéricos são apresentados para mostrar a eficiência dos procedimentos propostos.

ABSTRACT

An incremental-iterative formulation for the nonlinear analysis of space frames is presented. Nonlinear effects due to the changes in the geometrical configuration of the structure and also the combination of these effects with those due to the plastic behavior of the material are considered.

The kinematics relations employed allow the consideration of arbitrarily large displacements with small strains.

The plastic behavior of the elements is modeled using the plastic hinge concept, based on a generalized yield criterion.

A geometrical stiffness matrix based on semitangential moments is adopted. For elements with plastic hinges at their ends, a elastic-plastic stiffness matrix is derived.

An incremental-iterative numerical method is employed which uses the condition of constant work increment to determine the increments of load (Work Control Method).

The analysis allows a complete description of the structural response both in the pre and post-critical stages, even in situations in which displacements increase with decreasing loads or vice versa.

The formulation was implemented into a computational code in FORTRAN language. Several examples are presented to illustrate the efficiency of the procedures proposed.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações Gerais

Os recentes avanços na tecnologia de fabricação de novos materiais e a necessidade cada vez maior de se aprimorar o desempenho das estruturas, aliados a aspectos de carácter económico, tem motivado um constante e vigoroso estudo das propriedades mecânicas dos materiais, assim como do comportamento global das estruturas quando submetidas às mais diversas formas de solicitação externa. O progresso na área da informática, ocorrido durante as últimas duas décadas, tem proporcionado a viabilização desse estudo, sendo inclusive o grande responsável pelo desenvolvimento atualmente verificado no campo da modelagem matemática do comportamento estrutural. Os modelos propostos tornam-se, cada dia, mais sofisticados, apresentando quase sempre inovações em suas formulações matemáticas e incluindo a influência de novos significantes fatores antes desprezados.

A busca incessante de modelos que permitam uma descrição mais realística do comportamento das estruturas tem tido como consequência um grande impulso na área da Análise Não Linear. A tendência de se utilizar estruturas cada vez mais esbeltas e mais leves, com grandes vãos livres, tem revestido de fundamental importância a consideração de efeitos não lineares introduzidos pelas mudanças na configuração geométrica das mesmas quando sujeitas a carregamentos crescentes. Analogamente, a evidente necessidade de um melhor aproveitamento do desempenho mecânico dos materiais que constituem as estruturas tem implicado no uso dos mesmos em faixas de solicitação acima daquelas que permitem a simplificação de se admitir uma relação linear entre tensões e deformações. Como consequência disto, decorre o interesse da

inclusão de efeitos não lineares relacionados com aspectos constitutivos dos materiais nas modernas formulações de análise estrutural.

Tradicionalmente, a não linearidade do comportamento de uma estrutura introduzida pela mudança da configuração geométrica da mesma é denominada de não linearidade geométrica, e aquela que se manifesta devido a efeitos inerentes à lei constitutiva do material é dita não linearidade física.

Evidentemente, em uma análise não linear existem alguns aspectos peculiares não encontrados na análise linear convencional. Relacionando-se com tais aspectos, podem ser citados como indispensáveis na formulação de uma análise não linear física e geométrica os seguintes requerimentos:

- estabelecimento de uma formulação cinemática consistente que permita o tratamento de grandes deslocamentos (translações e rotações),
- adoção de adequadas relações entre os esforços internos que definam o limite entre os regimes linear e não linear,
- implementação de métodos numéricos estáveis que possibilitem o tratamento do problema em qualquer estágio de solicitação da estrutura.

Tratando-se do primeiro requerimento acima citado, e referindo-se a estruturas de barras, podem ser mencionados os trabalhos de DRAN [43] e ARGYRIS [2], os quais permitem a manipulação de deslocamentos arbitrariamente grandes, acompanhados de pequenas deformações.

No que diz respeito ao segundo requerimento, pode-se afirmar que as relações oriundas da Teoria da Plasticidade tem sido usada de forma satisfatória, principalmente, para materiais metálicos. No caso específico de estruturas constituídas por barras, podem ser citadas as referências [5-11-19-38-39-52], dentre outras.

Os procedimentos numéricos propostos para solução de problemas não lineares de estruturas são, frequentemente, de natureza incremental, podendo ser incremental puro ou incremental-iterativo, e se baseiam no conceito de matriz de

rigidez tangente.

O método incremental puro tem como vantagem, em relação a outros procedimentos, a sua simplicidade e como principal desvantagem o fato de que ao final de cada passo incremental os esforços internos correspondentes à configuração deformada da estrutura não estarem em equilíbrio com as cargas externas, o que implica em erros que vão se acumulando à medida em que se aumenta o número de passos incrementais.

Por outro lado, com os métodos do tipo incremental - iterativo, os erros acima mencionados podem ser reduzidos a valores insignificantes, graças aos procedimentos iterativos realizados dentro de cada passo incremental, os quais levam os esforços internos atuantes na estrutura a estarem praticamente em equilíbrio com as cargas externas. Dentre estes métodos, destaca-se como o mais tradicional o Método de Newton-Raphson, no qual as cargas permanecem constantes durante cada passo incremental [16]. Usualmente o Método de Newton-Raphson apresenta resultados convergentes até as proximidades do primeiro ponto de singularidade da matriz de rigidez da estrutura (ponto crítico) e, a partir daí, começa a fornecer resultados divergentes. Esta é uma característica que inclusive inviabiliza o emprego do citado método quando se deseja investigar o comportamento de uma estrutura em um estágio pós-crítico.

Desta forma, o interesse na investigação do desempenho mecânico das estruturas em estágios de deformação além daquele que convencionalmente se denomina crítico motivou o aparecimento de novos métodos incrementais-iterativos, os quais quase sempre são generalizações do Método de Newton-Raphson. Entre eles podem ser mencionados os Métodos de Controle por Deslocamentos, do Comprimento de Arco, do Parâmetro de Rigidez Corrente e de Controle por Trabalho [56].

A principal diferença entre estes últimos métodos está basicamente no critério utilizado como controle dos incrementos de carga em cada etapa iterativa da análise.

A diversificação e complexidade do comportamento das estruturas, juntamente com a natureza numérica de uma análise não linear, a qual envolve aspectos relacionados com

estabilidade numérica, são fatores suficientes para que se use de certa cautela ao se fazer juízo sobre a eficiência de um ou outro método. A prática tem demonstrado que não existe um método ideal para a solução de problemas gerais. Existem, sim, métodos que apresentam eficiência em determinados tipos de problemas, mas que estão sujeitos a falhas em outros.

1.2 - Objetivo, Hipóteses e Conteúdo do Trabalho

O presente trabalho objetiva o estudo de pórticos espaciais considerando-se os efeitos não lineares devidos às mudanças de geometria dos mesmos e ao comportamento plástico do material quando solicitado além de seu limite elástico. Os aspectos da não linearidade física aqui considerada orientam a formulação apresentada para os casos de estruturas metálicas.

As barras que constituem os pórticos estudados são admitidas como de material elasto-plástico perfeito e apresentam seção transversal duplamente simétrica. A simulação do comportamento plástico dos elementos de barras é feita através do conceito de rótulas plásticas, as quais são definidas por um critério de plastificação generalizado.

Considera-se, ainda, que as cargas externas variem proporcionalmente e que atuem nas extremidades dos elementos definidos pela discretização da estrutura, ou seja, supõe-se apenas carregamento nodal. Esta hipótese implica na formação de rótulas plásticas somente nas extremidades dos elementos considerados.

Na fase elástica, o relacionamento entre forças e deslocamentos nodais de um elemento é efetuado através de uma matriz de rigidez elástica que consiste na soma da matriz de rigidez linear convencional de barra com uma matriz de rigidez geométrica apresentada em [4], a qual leva em conta a influência de rotações finitas sobre o comportamento dos momentos atuantes nas seções transversais do elemento.

Já na fase elasto-plástica, a matriz de rigidez acima mencionada é modificada através de um procedimento que depende do critério de plastificação especificado,

resultando, assim, a matriz de rigidez elasto-plástica do elemento.

Considera-se ainda a possibilidade de ocorrer, durante a análise, a desativação de rótulas plásticas previamente formadas e o conseqüente retorno à fase elástica dos pontos onde as mesmas estavam localizadas.

Como procedimento numérico, emprega-se no presente estudo o Método de Controle por Trabalho[56], o qual utiliza como condição básica para controle dos incrementos de cargas a constância do trabalho realizado por tais incrementos em cada passo incremental da análise. A adoção do citado método é justificada pelo interesse de se obter uma descrição completa do comportamento das estruturas aqui consideradas, inclusive em estágios pós-críticos em que ocorram aumento de deslocamentos com redução nos valores das cargas ou vice-versa.

As relações básicas necessárias para a formulação do trabalho, tais como: relações cinemáticas, matrizes de rigidez elásticas e elasto-plásticas dos elementos de barra e critérios de plastificação de uma seção transversal, são expostas no capítulo 2.

No capítulo 3 constam os procedimentos do método numérico considerado e sua aplicação na análise não linear geométrica.

Finalmente, no capítulo 4 são descritos os detalhes relativos à análise não linear física e geométrica.

Os procedimentos da formulação foram implementados em um programa computacional em linguagem FORTRAN, o qual permite a realização dos dois tipos de análise: elástica e elasto-plástica. Para este último caso, foram considerados critérios de plastificação indicados para seções transversais retangulares e em I ou H.

Para testar a eficiência da formulação foram resolvidos diversos exemplos numéricos apresentados em várias referências bibliográficas.

Os resultados dos exemplos numéricos resolvidos estão expostos nos finais dos capítulos 3 e 4, juntamente com outros obtidos através de diferentes formulações e publicados na literatura.

Por último, são apresentados também Apêndices A, B e C com o objetivo de fornecer maiores esclarecimentos sobre alguns importantes conceitos e afirmações utilizados nos procedimentos da análise.

Ressalta-se ainda que o presente trabalho foi elaborado como parte da linha de pesquisa em Análise Não Linear, em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

2. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

2.1 - Relações Cinemáticas

A figura 2.1 mostra um elemento típico de barra, com extremidades identificadas pelos números 1 e 2, e ao qual está associado um sistema de eixos locais x , y e z , cujas orientações são referidas a um sistema de referência fixo definido pelos eixos globais X , Y e Z .

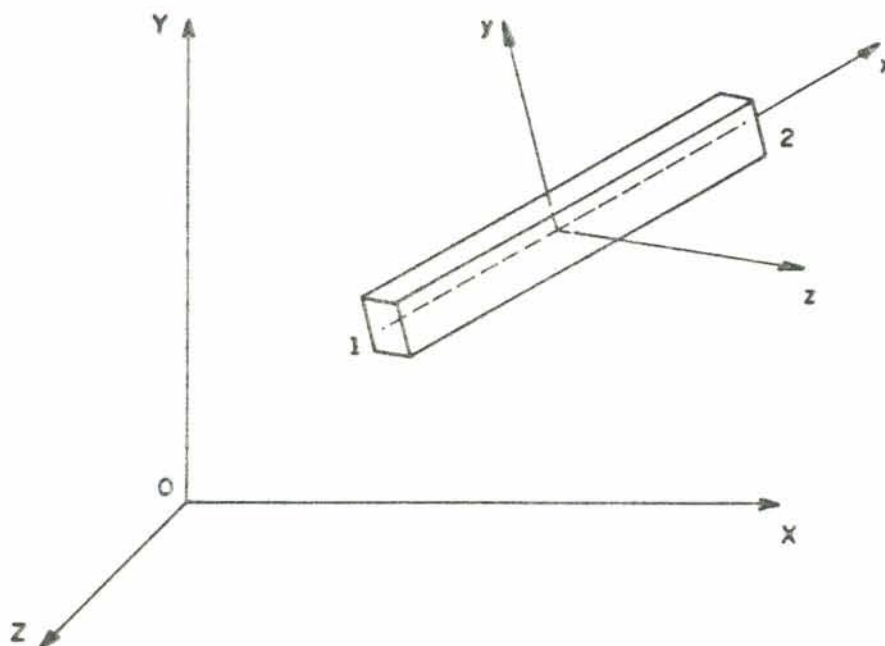


Figura 2.1 - Sistemas de eixos locais e globais

Na presente análise o eixo x é adotado na direção da linha que une os centróides das seções transversais extremas do elemento e os eixos y e z são paralelos às direções principais da seção transversal. No entanto, após a

deformação, as seções transversais das extremidades de um mesmo elemento, em geral, não continuam paralelas entre si e, assim, a rigor seria necessário a adoção de eixos locais transversais com direções diferentes em cada extremo do elemento. Porém, em se tratando de elemento com comprimento relativamente pequeno, pode-se considerar os eixos y e z com direções paralelas aos eixos principais da seção transversal média do elemento.

Desta forma, torna-se necessária, em cada etapa da análise, a determinação da nova posição dos eixos principais da seção média dos elementos, o que pode ser feito através dos deslocamentos verificados nas seções extremas dos mesmos. Para isto será utilizada aqui uma formulação apresentada por DRAN [43], que permite inclusive a consideração de translações e rotações finitas.

A identificação da posição e da orientação de cada seção transversal extrema de um elemento, no espaço, será efetuada pelas translações da mesma ao longo das direções X , Y e Z e por uma matriz β de ordem 3×3 , cujas colunas contém, respectivamente, as componentes dos vetores unitários segundo três eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} , mutuamente perpendiculares entre si e rigidamente ligados à seção.

Admite-se aqui, como na referência [43], que inicialmente os eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} , de cada extremidade do elemento, sejam paralelos aos respectivos eixos globais X , Y e Z (figura 2.2). Assim, antes da deformação, as matrizes β coincidem com uma matriz identidade de ordem 3×3 .

Vale observar, portanto, que sendo os eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} rigidamente ligados à seção transversal extrema do elemento, os ângulos entre eles e as direções normal e principais da referida seção não se alteram durante a deformação. Desta forma, a matriz que contém em suas linhas, respectivamente, os cossenos diretores das direções normal e principais daquela seção, com relação aos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} , não se altera e é sempre igual a matriz de rotação r_0 inicial do elemento. As linhas da matriz de rotação de um elemento, por definição, são constituídas pelos cossenos diretores dos eixos locais x , y e z , com respeito aos eixos globais X , Y , e Z .

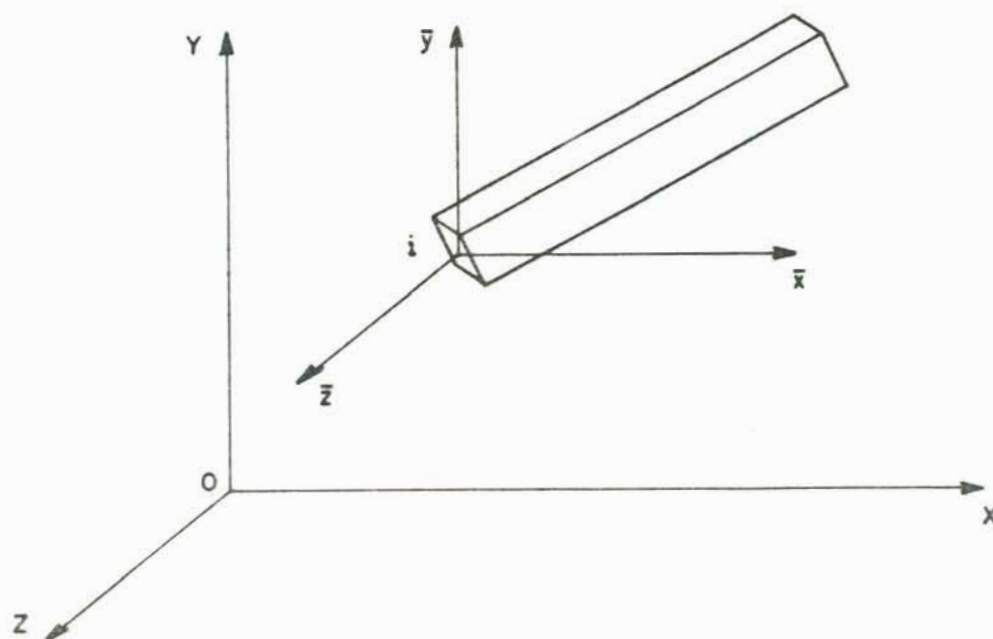


Figura 2.2 - Eixos de referência iniciais do extremo i

Suponha-se, agora, que $p^{(i)}$ seja uma matriz de ordem 3×3 cujas colunas reúnem, respectivamente, os vetores unitários segundo as direções normal e principais da seção transversal extrema i de um elemento (figura 2.3).

$$p^{(i)} = [p_1^{(i)} \quad p_2^{(i)} \quad p_3^{(i)}] \quad (2.1)$$

Pelo que se expôs acima, pode-se concluir que as linhas da matriz r_o contém as componentes dos vetores $p_1^{(i)}$, $p_2^{(i)}$ e $p_3^{(i)}$, respectivamente, com relação aos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} . Assim sendo, como os termos das colunas de $\beta^{(i)}$, correspondente à extremidade i do elemento, são os cossenos diretores das direções \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} com respeito aos eixos globais X, Y e Z, chega-se à conclusão de que $p^{(i)}$, referida ao sistema global, pode ser obtida através da expressão

$$p^{(i)} = \beta^{(i)} r_o^T \quad (2.2)$$

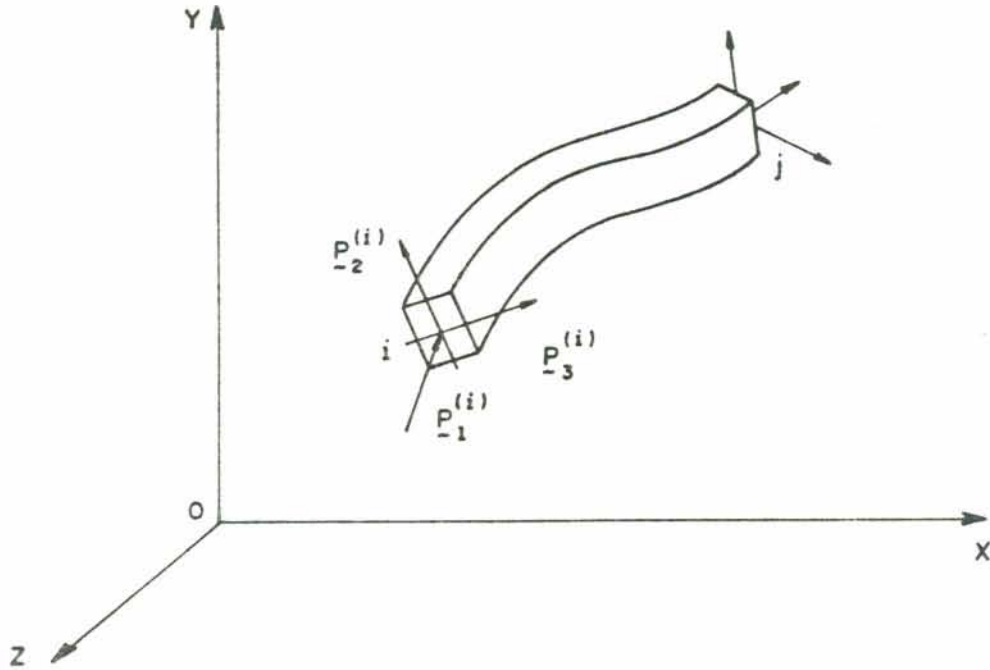


Figura 2.3 - Vetores unitários nas direções normal e principais da seção transversal i do elemento.

A matriz de rotação de um elemento cujo eixo local x não seja paralelo ao eixo global Y é dada por [22]

$$r_0 = \begin{bmatrix} C_x & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_x C_Y \cos\alpha - C_Z \text{sen}\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_Z^2} \cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_x \text{sen}\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_Z^2}} \\ \frac{C_x C_Y \text{sen}\alpha - C_Z \cos\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_Z^2} \text{sen}\alpha & \frac{C_Y C_Z \text{sen}\alpha + C_x \cos\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_Z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde

C_x , C_Y e C_Z - cossenos diretores do eixo local x com relação aos eixos globais X , Y e Z .

α - ângulo entre o eixo principal y da seção transversal do elemento, antes da deformação, e o eixo Y' (figura 2.4), o qual está contido no plano vertical que contém x e Y e forma com este último eixo um ângulo γ igual ao ângulo

inicial entre o eixo local x e sua projeção no plano XZ .

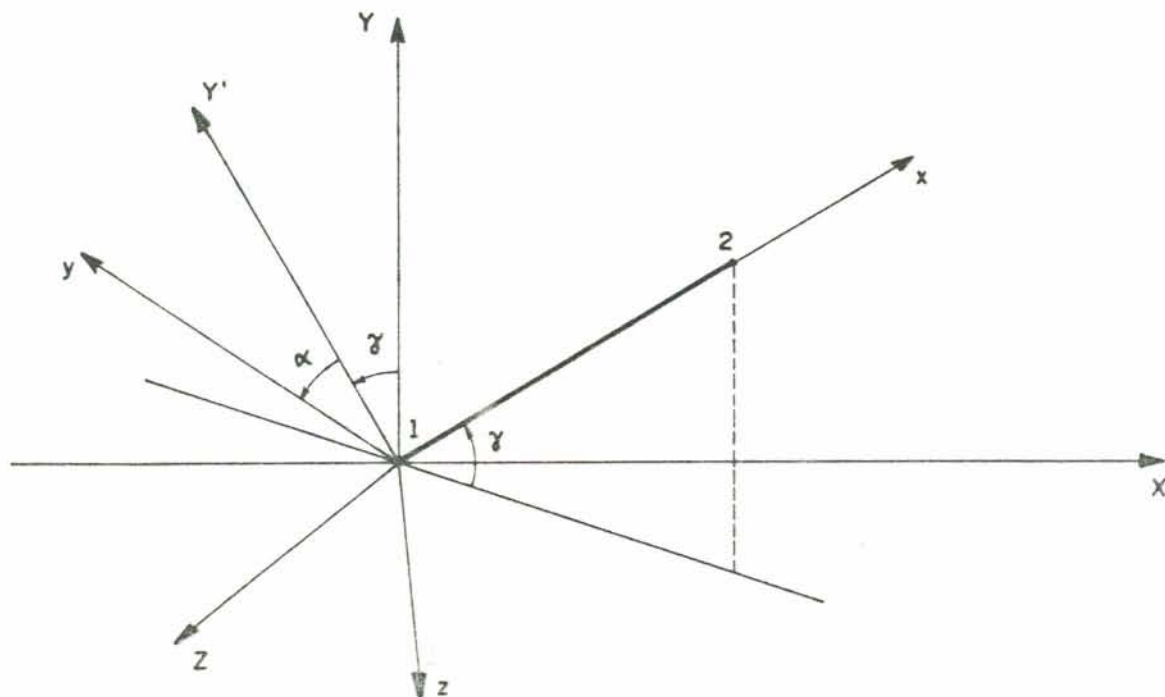


Figura 2.4 - Fixação dos eixos principais da seção transversal de um elemento.

Para elemento com o eixo local x inicialmente paralelo a Y , a matriz r_0 é dada pela equação (2.4), onde C_Y vale +1 se o extremo 2 está acima do extremo 1 (figura 2.5) e, em caso contrário, vale -1 [22].

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \text{coss} \alpha & 0 & \text{sens} \alpha \\ C_Y \text{sens} \alpha & 0 & \text{coss} \alpha \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

No presente estudo a matriz $\beta^{(i)}$, em cada etapa da análise, pode ser obtida através de um procedimento incremental, como mostrado a seguir.

Suponha-se que $\beta_t^{(i)}$ e $\beta_{t+1}^{(i)}$ representem as matrizes de

orientação da seção na extremidade i de um elemento nas etapas t e $t+1$, respectivamente. Pode-se mostrar que

$$\tilde{\beta}_{t+1}^{(i)} = \tilde{\beta}_t^{(i)} + \Delta\tilde{\beta}_{t+1}^{(i)} \quad (2.5)$$

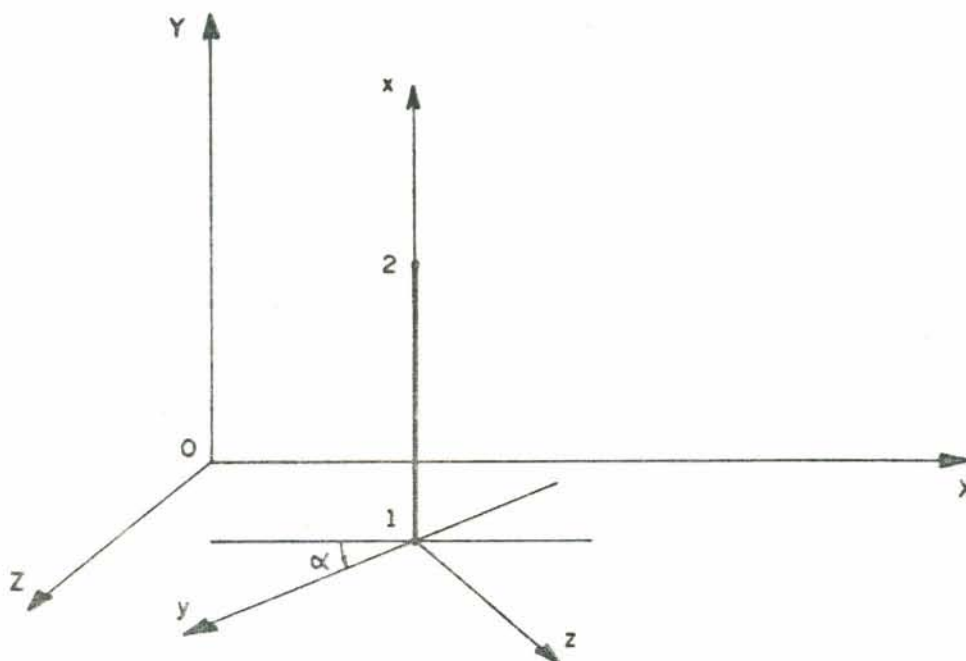


Figura 2.5 - Ângulo α para o caso de elemento com eixo x paralelo a Y .

onde $\Delta\tilde{\beta}_{t+1}^{(i)}$ é uma matriz incremental obtida a partir dos incrementos de rotações da referida extremidade em torno dos eixos globais X , Y e Z , ocorridos durante a etapa t .

Admita-se, agora, que na etapa $t+1$ os eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} sofram pequenos incrementos de rotações $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$ e $\Delta\omega_z$ em torno dos respectivos eixos globais X , Y e Z (figura 2.6). Verifica-se que em virtude dos mencionados incrementos de rotações, os novos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} terão, respectivamente, os seguintes cossenos diretores:

Eixo \bar{x} :

$$\beta_{11} + \beta_{31}\Delta\omega_y - \beta_{21}\Delta\omega_z, \quad \beta_{21} - \beta_{31}\Delta\omega_x + \beta_{11}\Delta\omega_z, \quad \beta_{31} + \beta_{21}\Delta\omega_x - \beta_{11}\Delta\omega_y$$

Eixo \bar{y} :

$$\beta_{12} + \beta_{32} \Delta\omega_Y - \beta_{22} \Delta\omega_Z, \quad \beta_{22} - \beta_{32} \Delta\omega_X + \beta_{12} \Delta\omega_Z, \quad \beta_{32} + \beta_{22} \Delta\omega_X - \beta_{12} \Delta\omega_Y$$

Eixo \bar{z} :

$$\beta_{13} + \beta_{33} \Delta\omega_Y - \beta_{23} \Delta\omega_Z, \quad \beta_{23} - \beta_{33} \Delta\omega_X + \beta_{13} \Delta\omega_Z, \quad \beta_{33} + \beta_{23} \Delta\omega_X - \beta_{13} \Delta\omega_Y$$

(2.6)

onde β_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) são os termos da matriz $\beta_t^{(i)}$.

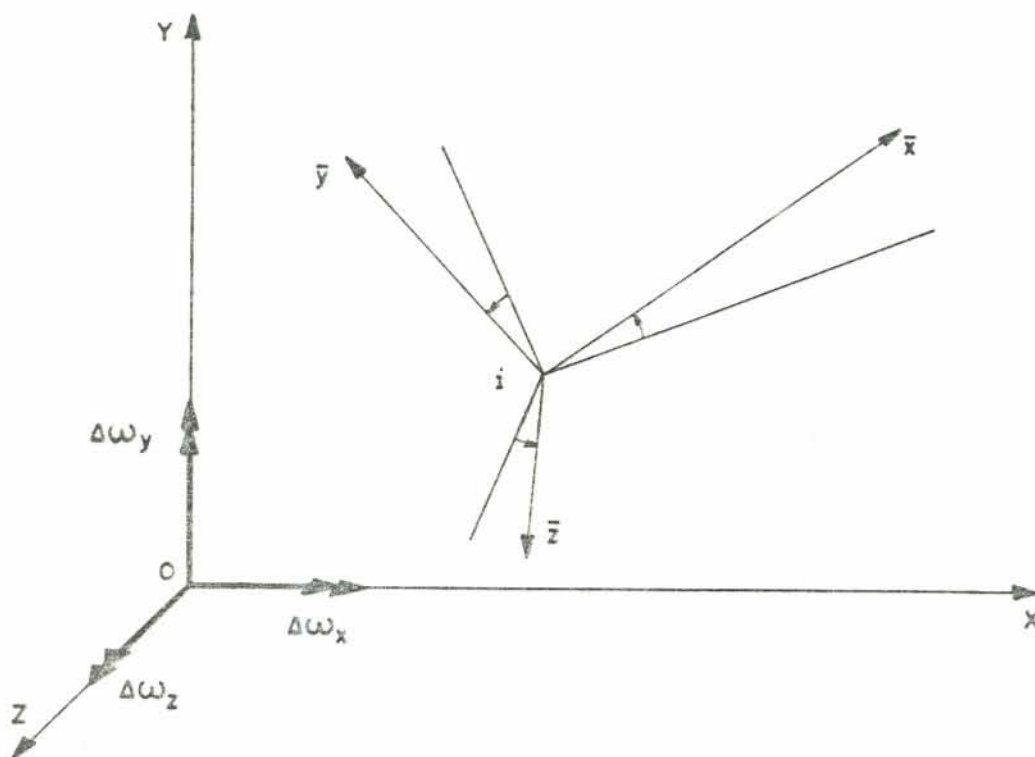


Figura 2.6 - Incrementos de rotações de uma junta

Assim, com base nas expressões (2.6) chega-se à conclusão de que

$$\Delta\beta_t^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\omega_Z & \Delta\omega_Y \\ \Delta\omega_Z & 0 & -\Delta\omega_X \\ -\Delta\omega_Y & \Delta\omega_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ou, abreviadamente,

$$\Delta \tilde{\beta}_{t+1}^{(i)} = \Delta \tilde{\omega}_{t+1}^{(i)} \tilde{\beta}_t^{(i)} \quad (2.8)$$

Pode-se mostrar, também, que conhecidas as matrizes $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$, correspondentes às seções localizadas nas extremidades 1 e 2 de um elemento, e dados os cossenos diretores do eixo local x atualizado, é possível a determinação dos giros de flexão e de torção naquelas citadas extremidades, já subtraídas as rotações de corpo rígido sofridas pelo elemento. Logo, sendo \tilde{r}_1 o vetor que contém os mencionados cossenos diretores, e que corresponde à primeira linha da matriz de rotação \tilde{r} do elemento, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} p_1^{(1)T} \tilde{r}_1 &\cong 1 \\ p_2^{(1)T} \tilde{r}_1 &= \cos(90^\circ + \theta_{1z}) = -\text{sen } \theta_{1z} \cong -\theta_{1z} \\ p_3^{(1)T} \tilde{r}_1 &= \cos(90^\circ - \theta_{1y}) = \text{sen } \theta_{1y} \cong \theta_{1y} \end{aligned} \quad (2.9)$$

ou melhor,

$$p^{(1)T} \tilde{r}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\theta_{1z} \\ \theta_{1y} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

onde θ_{1y} e θ_{1z} são os giros de flexão em torno dos eixos locais y e z , respectivamente, da extremidade 1 do elemento, já descontadas, portanto, as rotações de corpo rígido (figura 2.7).

De modo análogo, obtém-se o seguinte resultado para a extremidade 2 do elemento:

$$p^{(2)T} \tilde{r}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\theta_{2z} \\ \theta_{2y} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Observa-se também (figura 2.7) que o giro relativo

de torção entre as seções transversais extremas 1 e 2 do elemento é dado por

$$\theta_x = \underline{P}_3^{(1)T} \underline{P}_2^{(2)} \quad (2.12)$$

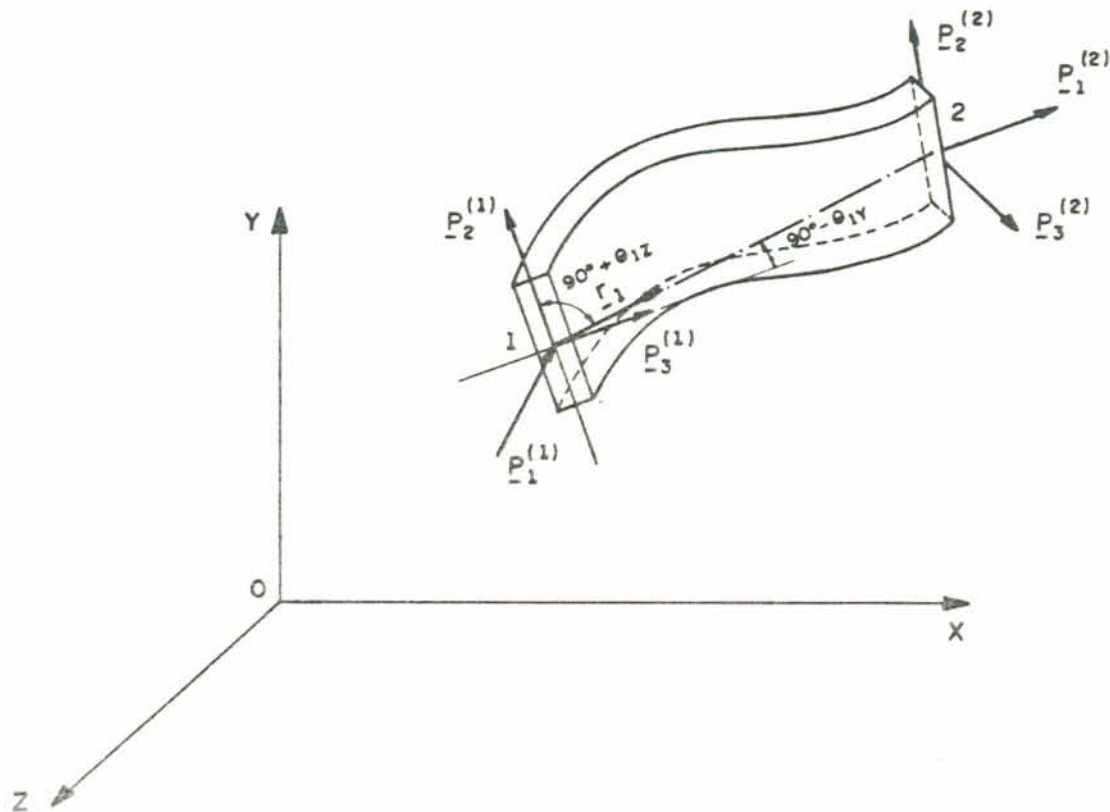


Figura 2.7 - Giros nas extremidades do elemento.

De posse das equações (2.10), (2.11) e (2.12), resta apenas determinar, para caracterizar completamente o estado de deformação do elemento, a deformação axial u_x do mesmo. Isto pode ser feito subtraindo-se o comprimento inicial do elemento L_0 do comprimento atual L , o que é facilmente calculado através das coordenadas nodais, as quais são constantemente atualizadas ao final de cada etapa da análise.

$$u_x = L - L_0 \quad (2.13)$$

A matriz de rotação do elemento, r , que permite o relacionamento entre os sistemas de eixos globais e locais,

pode ser obtida através das matrizes $\underline{p}^{(i)}$ relativas às seções transversais extremas do elemento, e dos giros de flexão destas seções, conforme se mostra a seguir.

Em geral, após a deformação, o eixo local x não permanecerá normal às seções transversais extremas do elemento. Para o caso de pequenas deformações, pode-se admitir aproximadamente que no plano xy o ângulo entre o eixo local x e a direção da normal à seção transversal da extremidade i , definida por $\underline{p}_1^{(i)}$, é igual a θ_{iz} , e que no plano xz o citado ângulo vale θ_{iy} (figuras 2.8a e 2.8b).

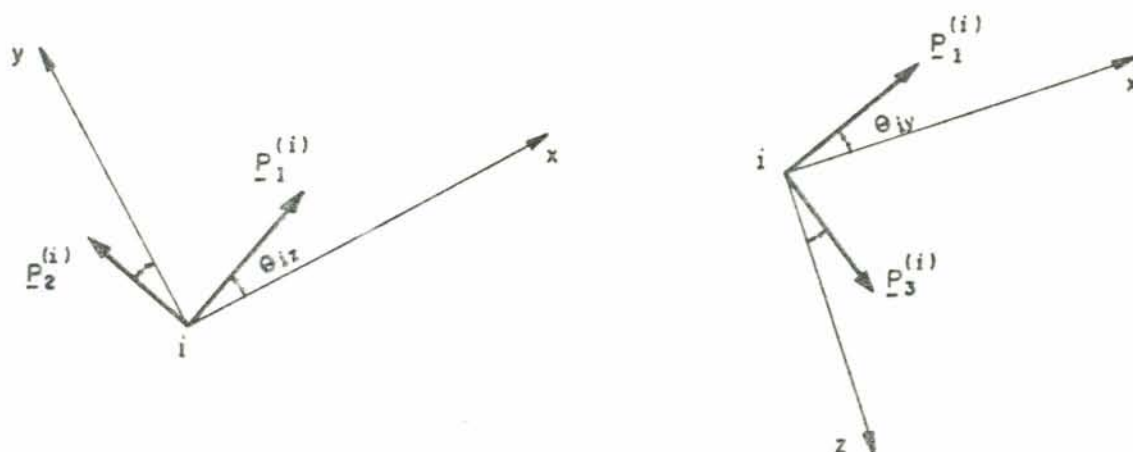


Figura 2.8 - Ângulos entre a normal à seção transversal i e o eixo x do elemento nos planos xy e xz .

Ainda com base na figuras 2.8a e 2.8b, pode-se concluir que os cossenos diretores dos eixos x , y e z com relação às direções definidas por $\underline{p}_1^{(i)}$, $\underline{p}_2^{(i)}$ e $\underline{p}_3^{(i)}$ são respectivamente dados, de forma aproximada, por

$$\begin{aligned}
 \text{Eixo } x : & \quad 1, \quad -\theta_{iz} \quad \text{e} \quad \theta_{iy} \\
 \text{Eixo } y : & \quad \theta_{iz}, \quad 1 \quad \text{e} \quad 0 \\
 \text{Eixo } z : & \quad -\theta_{iy}, \quad 0 \quad \text{e} \quad 1
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Assim, reunindo tais cossenos diretores na matriz

$$\underline{g}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{iz} & -\theta_{iy} \\ -\theta_{iz} & 1 & 0 \\ \theta_{iy} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

tem-se que no extremo i do elemento, e com respeito agora aos eixos globais X , Y e Z , os citados cossenos diretores podem ser obtidos através das colunas da matriz resultante do produto $\underline{p}^{(i)} \underline{g}^{(i)}$.

Daí, considerando-se então que os eixos y e z são adotados como paralelos às respectivas direções principais da seção média do elemento, e lembrando que este tem comprimento relativamente pequeno, é razoável escrever que a transposta da matriz de rotação \underline{r} do elemento é dada por

$$\underline{r}^T = \frac{1}{2} \underline{p}^{(1)} \underline{g}^{(1)} + \frac{1}{2} \underline{p}^{(2)} \underline{g}^{(2)} \quad (2.16)$$

2.2 - Crítério de Plastificação de uma Seção

A Teoria da Plasticidade é formulada com base na idéia da existência de uma relação que define, quantitativamente, a condição de escoamento de um ponto. Ela admite, portanto, que existe um certo relacionamento entre as grandezas das tensões que atuam no ponto quando neste ocorre escoamento. Uma expressão analítica que descreve tal relacionamento é denominada um critério de escoamento. Em geral, um critério de escoamento é dado por uma função

$$F(\underline{\sigma}, \underline{h}) = k \quad (2.17)$$

onde $\underline{\sigma}$ representa o estado de tensão do ponto, \underline{h} é um conjunto de parâmetros que dependem da história das deformações do ponto e k é uma função de \underline{h} .

A equação (2.17) define, para cada conjunto de variáveis \underline{h} , uma superfície no espaço das tensões, a qual é chamada de superfície de escoamento. Cada ponto desta superfície representa um estado de tensão que, para as condições fixadas por \underline{h} , plastifica o ponto material.

Para material elasto-plástico perfeito os parâmetros relacionados com a história das deformações são nulos e a equação (2.17) torna-se

$$F(\underline{\sigma}) = k \quad (2.18)$$

com k constante.

Dentre os critérios de escoamento empregados para materiais dúcteis pode-se destacar os critérios de von Mises e de Tresca, os quais para o caso de barras espaciais podem ser expressos por

$$\sigma_{xx}^2 + c(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) = \sigma_e^2 \quad (2.19)$$

sendo

σ_{xx} - tensão normal paralela ao eixo da barra

τ_{xy}, τ_{xz} - tensões de cisalhamento

σ_e - tensão de escoamento do material na tração simples

$c = 4$ (Tresca) ou $c = 3$ (von Mises)

Quando todos os pontos da seção transversal de uma barra estão sujeitos a estados de tensão que satisfazem ao critério de escoamento adotado diz-se que naquela seção existe uma rótula plástica.

Similarmente, pode-se estabelecer uma relação que deve ser cumprida pelos esforços internos, atuantes numa dada seção transversal de um corpo, para que nela ocorra plastificação total. No caso de uma barra, isto representa a abertura de uma rótula plástica. Uma tal relação é, então, referida como um critério de plastificação da seção transversal e sua representação geométrica no espaço dos esforços internos é chamada de superfície de plastificação.

Para o caso de material elasto-plástico perfeito, um critério de plastificação da seção transversal de uma barra espacial pode em geral ser expresso na forma

$$\psi (N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z) = 0 \quad (2.20)$$

onde os parâmetros de entrada da função ψ são os esforços internos atuantes na seção transversal (figura 2.9).

Usualmente a função ψ é estabelecida de modo que quando $\psi > 0$ a seção transversal apresenta comportamento elástico.

Alternativamente, o critério de plastificação da seção transversal de uma barra pode ser expresso em termos de parâmetros adimensionais como mostrado abaixo:

$$\psi (n_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z) = 0 \quad (2.21)$$

com

$$\begin{aligned} n_x &= N_x / N_p & q_y &= Q_y / Q_{py} & q_z &= Q_z / Q_{pz} \\ m_x &= M_x / M_{px} & m_y &= M_y / M_{py} & m_z &= M_z / M_{pz} \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde os termos que figuram nos denominadores das relações (2.22) representam os valores dos esforços que atuando individualmente plastificam a seção transversal.

Quando o material satisfaz a condição de estabilidade expressa pelos postulados de Drucker [13], tem-se que

- a) a superfície de plastificação $\psi = 0$ é convexa,
- b) o vetor cujas componentes são os incrementos de deslocamentos plásticos \dot{U}^P (o ponto indica derivada com respeito ao tempo) é normal à superfície $\psi = 0$ no ponto cujas coordenadas são os esforços internos na seção.

Nesta situação, o vetor dos incrementos de deslocamentos plásticos da seção é dado pela condição de normalidade

$$\dot{\underline{U}}^P = \dot{\Lambda} \underline{B} \quad (2.23)$$

onde \underline{B} é o vetor gradiente da superfície de plastificação no ponto (figura. 2.10), o qual é dado para o caso de barra espacial por

$$\underline{B} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial N_x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Q_x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Q_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_z} \right\} \quad (2.24)$$

e $\dot{\Lambda}$ é um escalar positivo denominado constante de plastificação.

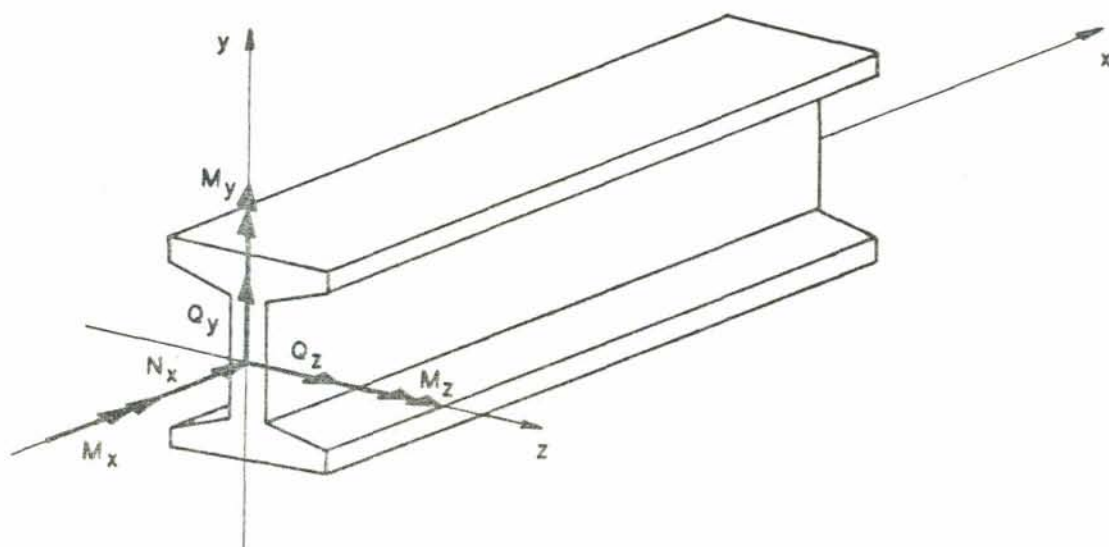


Figura 2.9 - Esforços internos em uma seção transversal

Se os incrementos dos esforços internos $\dot{\underline{P}}$ são tais que introduzem incrementos $\dot{\underline{U}}_p$ nos deslocamentos plásticos da seção, tem-se pela condição de consistência [13] que

$$\underline{B}^T \dot{\underline{P}} = 0 \quad (2.25)$$

indicando que os novos esforços, já incrementados, satisfazem ainda a condição $\psi = 0$, ou seja, a seção continua apresentando comportamento plástico. As equações (2.23) e (2.25) permitem a conclusão de que o vetor dos incrementos de deslocamentos

plásticos é normal ao vetor dos incrementos de esforços em uma seção plastificada.

Vale observar que a equação (2.25) foi estabelecida para incrementos infinitesimais de esforços. Para o caso de uma análise numérica incremental, com incrementos finitos nos esforços, a aplicação direta da citada equação leva a erro, cuja grandeza depende dos valores daqueles incrementos e do número de passos incrementais da análise. Na formulação apresentada no capítulo 4 deste trabalho indica-se um procedimento que reduz a grandeza do citado erro.

Considere-se que em uma dada seção transversal atuem inicialmente os esforços

$$\vec{P} = \{N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z\}, \quad (2.26)$$

os quais posteriormente sofrem incrementos dados por

$$\Delta \vec{P} = \{\Delta N_x, \Delta Q_y, \Delta Q_z, \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z\} \quad (2.27)$$

Supondo-se uma relação de proporcionalidade entre estes incrementos de esforços, é possível a determinação de um fator r_e que deve ser multiplicado por tais incrementos (figura 2.11), de modo que os esforços resultantes provoquem a plastificação da referida seção transversal. O fator r_e pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\psi(N_x + r_e \Delta N_x, Q_y + r_e \Delta Q_y, Q_z + r_e \Delta Q_z, M_x + r_e \Delta M_x, M_y + r_e \Delta M_y, M_z + r_e \Delta M_z) = 0 \quad (2.28)$$

Dependendo da expressão $\psi = 0$, o cálculo do fator r_e pode exigir o emprego de método numérico para determinação de raízes de equações.

Em geral, o estabelecimento de um critério de plastificação consiste em um problema bastante complicado, pois, quase sempre a distribuição das tensões ao longo de uma seção se dá de forma muito complexa.

Nos caso de barras espaciais sujeitas à sollicitação geral, mesmo se tratando de seção transversal de

geometria simples, a fixação de um critério de plastificação exige que se recorra a hipóteses simplificadoras, o que implica na obtenção de expressões aproximadas para a função ψ . Em tais casos, é comum, por exemplo se desprezar as

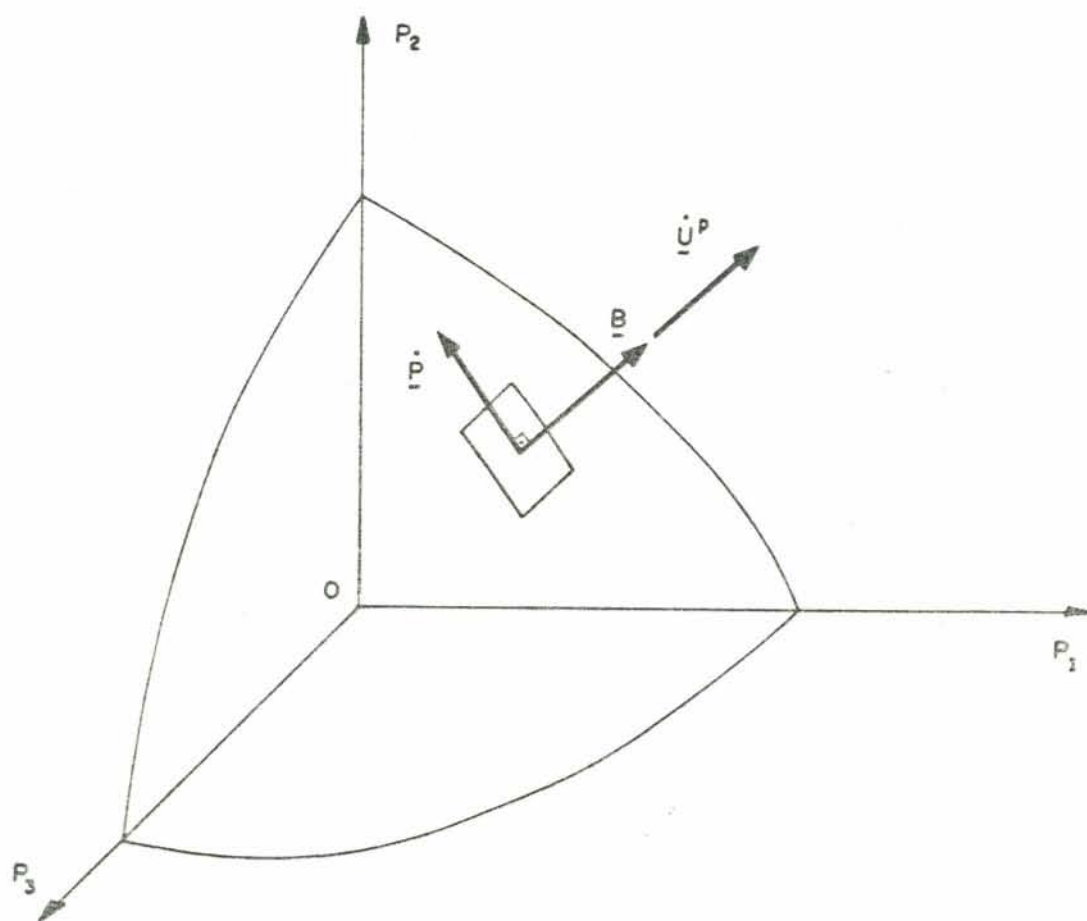


Figura 2.10 - Vetores dos incrementos de esforços e de deslocamentos em uma rótula plástica (Caso de três esforços representados por P_1 , P_2 e P_3).

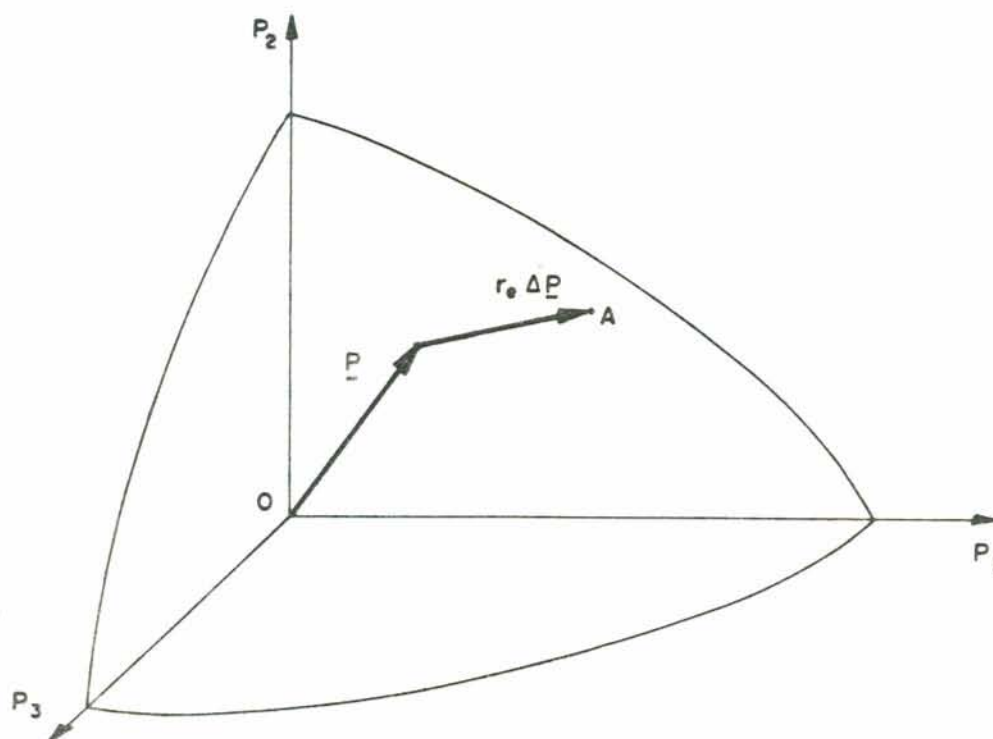


Figura 2.11 - Fator r_e para formação de uma rótula plástica.

influências das forças cortantes e dos momentos torçores, em comparação com os efeitos oriundos das forças normais e dos momentos fletores. Vale ressaltar que dependendo da geometria da seção transversal e das características do problema a influência dos momentos torçores pode ser considerável.

No que segue são apresentados vários exemplos de funções de plastificação, as quais são recomendadas para o estudo de algumas formas de seção transversal típicas de barras espaciais. Em todas elas são negligenciados os efeitos das forças cortantes e do momento torçor. Vale observar, no entanto, que as citadas funções estão estabelecidas para o primeiro quadrante do espaço dos esforços. Porém, considerando-se que o material tenha o mesmo desempenho à tração e à compressão, pode-se sem maiores dificuldades, levando-se em conta simplesmente aspectos relacionados com simetria, adaptar as expressões das referidas funções para todos os quadrantes do espaço dos esforços.

-Seção retangular:

Para o caso de seção retangular, considerando-se os efeitos de força axial e de momentos fletores, pode-se usar as expressões [36] para a função ψ

$$\psi = n_x + m_z + 0.75m_y - 1 \quad \text{para } 0 \leq m_y \leq 2(1 - n_x)/3$$

$$\psi = 2(1 - n_x)(m_z + m_y) - m_z m_y - 4(5 + 4n_x)(1 - n_x)^2/9 \quad \text{para} \\ 2(1 - n_x)/3 \leq m_y \leq 2(1 - n_x)(1 + 2n_x)/3$$

$$\psi = n_x^2 + m_y + 0.75m_z^2 - 1 \quad \text{para} \\ 2(1 - n_x)(1 + 2n_x)/3 \leq m_y \leq 1 - n_x^2$$

(2.29)

onde os termos n_x , m_y e m_z são dados pelas equações (2.22).

Ainda com respeito à seção retangular, recomenda-se também em [36] o uso da função

$$\psi = (M_z/M_{uz})^\eta + (M_y/M_{uy})^\beta - 1 \quad (2.30)$$

sendo

$$\eta = \beta = 1,73 + n_x^3 \quad (2.31)$$

$$M_{uy} = M_{py} (1 - n_x^2) \quad (2.32)$$

$$M_{uz} = M_{pz} (1 - n_x^2) \quad (2.33)$$

Na referência [36] são apresentados gráficos que mostram uma boa aproximação nos resultados obtidos através das equações (2.29) e (2.30), para vários valores da relação N/N_p .

-Seção em I ou H

Para o caso de seção em I é recomendado o uso da seguinte expressão para a função de plastificação:

$$\psi = (M_z/M_{uz})^2 + (M_y/M_{uy})^\beta - 1 \quad (2.34)$$

onde β é o maior dos números 1 e $5N/N_p$. Os momentos M_{uy} e M_{uz} são dados pelas equações (2.32) e (2.33) e o eixo z é perpendicular à alma da seção.

HORNE [27] propõe para seção em I ou H a utilização da equação (2.34) com $\beta = 1$.

-Seção em caixa

No caso de seção retangular vazada, na forma de caixa, é recomendado em [36] o uso da expressão (2.30), porém com

$$\eta = \beta = 1,66 / (1 - 1,13n_x^2) \quad \text{se } 0 \leq n_x \leq 0,8 \quad (2.35)$$

$$\eta = \beta = 6 \quad \text{se } 0,8 \leq n_x \leq 1 \quad (2.36)$$

No programa computacional elaborado com a formulação aqui apresentada foram implementadas as funções (2.30) com $\alpha = \beta = 2$ e (2.34) com $\beta = 1$. As expressões correspondentes ao gradiente e ao fator r_o de tais funções podem ser vistas no Apêndice B deste trabalho.

2.3 - Matrizes de Rigidez dos Elementos

2.3.1 - Matriz de Rigidez Elástica de um Elemento

No presente estudo considera-se elementos de barra com doze graus de liberdade, três translações e três rotações por extremidade, como mostrado na figura 2.12. A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais a um tal elemento, de volume V , resulta na familiar expressão

$$\int \delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \delta \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{P}} \quad (2.37)$$

com $\delta \underline{\underline{\epsilon}}$ representando um vetor de incrementos virtuais nas deformações, as quais devem apresentar compatibilidade cinemática com os deslocamentos nodais colecionados no vetor

$$\underline{\underline{U}} = \{u_1, v_1, w_1, \varphi_1, \theta_1, \chi_1, u_2, v_2, w_2, \varphi_2, \theta_2, \chi_2\} \quad (2.38)$$

Na expressão (2.37) $\underline{\sigma}$ corresponde ao vetor das tensões, que por sua vez são estaticamente compatíveis com as forças nodais no elemento, dadas por

$$\underline{P} = \{ N_{x1} \quad Q_{y1} \quad Q_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad N_{x2} \quad Q_{y2} \quad Q_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2} \} \quad (2.39)$$

O vetor das deformações $\underline{\varepsilon}$ pode ser decomposto em duas partes

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_L + \underline{\varepsilon}_Q \quad (2.40)$$

onde $\underline{\varepsilon}_L$ contém os termos lineares das componentes de deformações e $\underline{\varepsilon}_Q$ coleciona os termos quadráticos das mesmas.

Adotando-se funções de interpolação de deslocamentos, é possível expressar as deformações (ou suas partes lineares e quadráticas) em termos dos deslocamentos nodais \underline{U} . Chega-se, então, às seguintes expressões :

$$\underline{\varepsilon}_L = \underline{A} \underline{U} \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_{Qkl} = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{B}_{kl} \underline{U} \quad (2.42)$$

onde ε_{Qkl} representa a parte quadrática da componente de deformação relacionada com as direções k e l. Nas expressões acima, \underline{A} e \underline{B}_{kl} são matrizes com ordens, respectivamente, 3x12 e 12x12 [4]. No caso de vigas espaciais, considera-se usualmente apenas três componentes de deformação.

A introdução da expressão de $\underline{\varepsilon}$, com suas partes dadas em (2.41) e (2.42), na equação (2.37), e tendo em vista que $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$, onde \underline{E} é a matriz constitutiva do material, fornece

$$(\underline{K}_L + \underline{K}_Q) \underline{U} = \underline{P} \quad (2.43)$$

sendo

\tilde{K}_L - matriz de rigidez linear do elemento

\tilde{K}_G - matriz de rigidez geométrica do elemento,

com

$$\tilde{K}_L = \int_V \tilde{A}^T \tilde{E} \tilde{A} dV \quad (2.44)$$

e

$$\tilde{K}_G = \int_V (\sigma_{xx} \tilde{B}_{xx} + 2\sigma_{xy} \tilde{B}_{xy} + 2\sigma_{xz} \tilde{B}_{xz}) dV \quad (2.45)$$

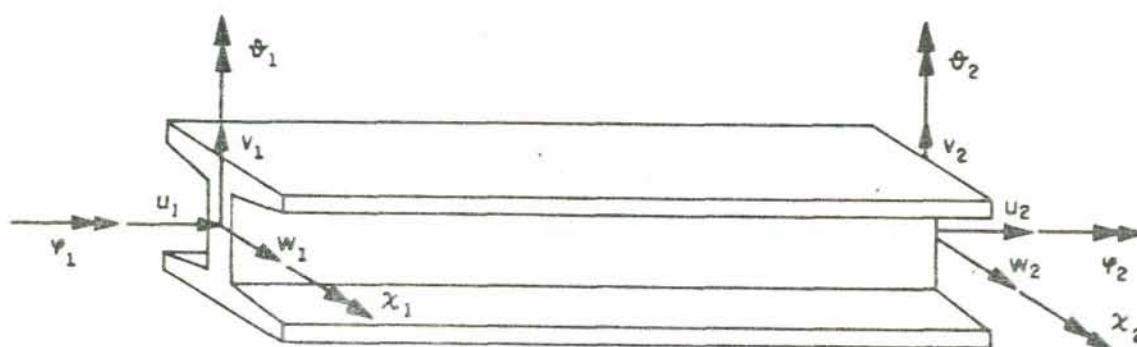


Figura 2.12 - Graus de liberdade de um elemento

Os procedimentos acima expostos constituem a formulação convencional utilizada para a determinação da matriz de rigidez de um elemento elástico. Porém, em se tratando de elemento de viga dotado de graus de liberdade rotacional no espaço tridimensional, o uso dos mencionados procedimentos exige uma análise mais detalhada da natureza do comportamento dos momentos fletores e torçores, atuantes no elemento, quando este é submetido a rotações finitas.

Considerando-se que as tensões atuantes sobre uma dada seção transversal acompanham esta quando a mesma sofre uma rotação finita, tem-se que a orientação e a intensidade de um momento, interpretado como resultante daquelas tensões, devem mudar com a mencionada rotação.

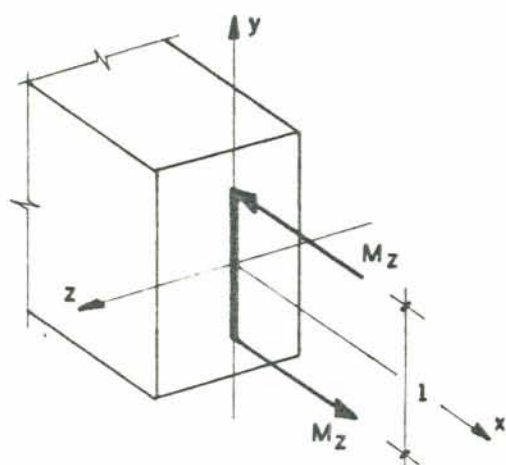
Em uma análise não linear geométrica, a consideração do comportamento dos momentos nodais na presença de rotações finitas é um indispensável requisito para a aplicação correta do Princípio dos Trabalhos Virtuais, expresso pela equação (2.37), uma vez que este exige sempre o cumprimento da condição de compatibilidade estática entre as ações nodais (forças e momentos) e as tensões internas.

ARGYRIS [4] estudou de forma detalhada o comportamento de momentos na presença de rotações finitas, chegando à conclusão de que numa seção transversal de viga espacial os momentos fletores e os momentos torçores, vistos como resultantes das tensões calculadas na forma usual sobre a configuração inicial (antes das rotações), comportam-se, respectivamente, como momentos quasitangenciais e semitangenciais (ver Apêndice C). Esta última conclusão, com respeito aos momentos torçores, é válida quando não se considera efeito de empenamento sobre a seção transversal.

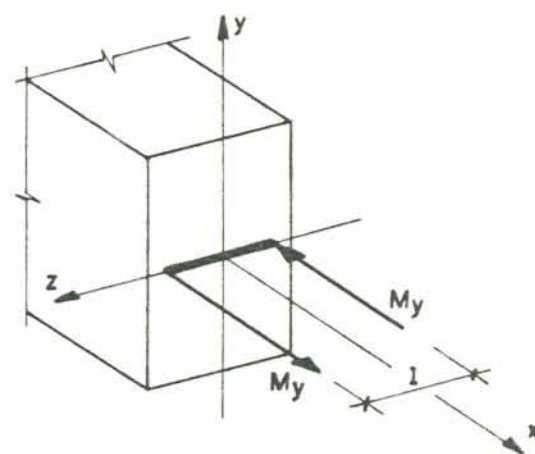
ZIEGLER [57] define como quasitangencial um momento gerado por um binário cujas forças apresentam direção e intensidade fixas e são aplicadas sobre um braço de alavanca rígido (figura 2.13 a,b) e, como semitangencial, um momento gerado por um conjunto plano de dois binários com braços de alavanca rígidos e ortogonais e com forças de mesma intensidade e direções fixas (figura 2.13 c).

As conclusões acima podem sugerir, no entanto, a elaboração de uma formulação que considere diferentes comportamentos para momentos fletores e torçores, na presença de rotações finitas. Porém, conforme alertado em [4], uma tal formulação, além de se apresentar praticamente inadequada, deve ter caráter bastante restritivo, uma vez que as considerações acima, relativas à natureza dos momentos, falham quando aplicadas a estruturas espaciais possuindo ângulos, tais como pórticos. Maiores detalhes sobre este último assunto podem ser encontrados em [56].

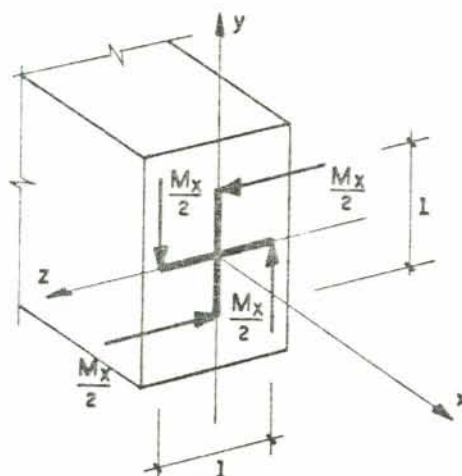
Assim sendo, a maior dificuldade está na fixação de um único modelo de comportamento para os momentos fletores e torçores que proporcione uma formulação adequada, do ponto de



(a)

Momento quasitangencial M_z 

(b)

Momento quasitangencial M_y 

(c)

Momento semitangencial M_x

Figura 2.13 - Momentos quasitangenciais e semitangenciais

vista da praticidade e da aplicabilidade.

ARGYRIS[4] ao verificar que a hipótese de comportamento semitangencial para ambos os momentos fletores e torções conduz a procedimentos que atendem as exigências acima, propôs uma formulação que leva a uma matriz de rigidez geométrica de barra espacial, a qual é baseada em momentos puramente semitangenciais.

Na citada formulação, os momentos fletores, quasitangenciais, modificados por rotações finitas, são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{matrix} M_{\tilde{y}}^q \\ \tilde{y} \end{matrix} = \begin{matrix} M_y^0 \\ y \end{matrix} + M_y \begin{matrix} \lambda_{\tilde{y}}^q \\ \tilde{y} \end{matrix} \varphi \qquad \begin{matrix} M_{\tilde{z}}^q \\ \tilde{z} \end{matrix} = \begin{matrix} M_z^0 \\ z \end{matrix} + M_z \begin{matrix} \lambda_{\tilde{z}}^q \\ \tilde{z} \end{matrix} \varphi \qquad (2.46)$$

onde

$M_{\tilde{y}}^0$ e $M_{\tilde{z}}^0$ - momentos fletores iniciais, em torno dos eixos y e z , respectivamente, dados por

$$\begin{matrix} M_{\tilde{y}}^0 \\ \tilde{y} \end{matrix} = \{ 0 \quad M_y \quad 0 \} \qquad \begin{matrix} M_{\tilde{z}}^0 \\ \tilde{z} \end{matrix} = \{ 0 \quad 0 \quad M_z \} \qquad (2.47)$$

φ - vetor que reúne as rotações finitas em torno dos eixos x , y e z , sofridas pela seção transversal.

e

$$\begin{matrix} \lambda_{\tilde{y}}^q \\ \tilde{y} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{\tilde{z}}^q \\ \tilde{z} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.48)$$

Se os momentos $M_{\tilde{y}}^0$ e $M_{\tilde{z}}^0$ se comportam como momentos semitangenciais, suas novas componentes, depois de ocorrerem as rotações φ , são dadas pelas equações

$$\begin{matrix} M_{\tilde{y}}^s \\ \tilde{y} \end{matrix} = \begin{matrix} M_y^0 \\ y \end{matrix} + M_y \begin{matrix} \lambda_{\tilde{y}}^s \\ \tilde{y} \end{matrix} \varphi \qquad \begin{matrix} M_{\tilde{z}}^s \\ \tilde{z} \end{matrix} = \begin{matrix} M_z^0 \\ z \end{matrix} + M_z \begin{matrix} \lambda_{\tilde{z}}^s \\ \tilde{z} \end{matrix} \varphi \qquad (2.49)$$

com

$$\begin{matrix} \lambda_{\tilde{y}}^s \\ \tilde{y} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{\tilde{z}}^s \\ \tilde{z} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.50)$$

As equações (2.46) e (2.49) permitem que se escreva as seguintes relações entre os momentos quasitangenciais e semitangenciais

$$\begin{matrix} M_{\tilde{y}}^q \\ \tilde{y} \end{matrix} = M_{\tilde{y}}^s + M_y \lambda_{\tilde{y}}^{qs} \varphi \qquad \begin{matrix} M_{\tilde{z}}^q \\ \tilde{z} \end{matrix} = M_{\tilde{z}}^q + M_z \lambda_{\tilde{z}}^{qs} \varphi \qquad (2.51)$$

onde

$$\begin{matrix} \lambda_{\tilde{y}}^{qs} \\ \tilde{y} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{\tilde{z}}^{qs} \\ \tilde{z} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.52)$$

Com base nas equações (2.51), pode-se escrever o vetor das ações nodais atuantes sobre o elemento, depois de verificadas as rotações, através da relação

$$\tilde{P} = \tilde{P}^s + \tilde{K}_M \tilde{U} \qquad (2.53)$$

com

\tilde{P}^s - vetor das ações nodais sobre o elemento, contendo forças e momentos semitangenciais,

\tilde{U} - vetor dos deslocamentos nodais do elemento

e

\tilde{K}_M - matriz simétrica de ordem 12x12, dada por

$$\tilde{K}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Q}_{3 \times 12} \\ K \\ \tilde{Q}_{3 \times 12} \\ 0 \\ \tilde{Q}_{3 \times 12} \\ K \\ \tilde{Q}_{3 \times 12} \end{bmatrix} \qquad (2.54)$$

onde \tilde{Q} representa matriz nula e

$$\tilde{K}_{3 \times 12} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \vdots & M_{y1} \lambda_{\tilde{y}}^{qs} + M_{z1} \lambda_{\tilde{z}}^{qs} & \vdots & 0_{3 \times 3} & \vdots & M_{y2} \lambda_{\tilde{y}}^{qs} + M_{z2} \lambda_{\tilde{z}}^{qs} & \vdots \end{bmatrix}$$

(2.55)

Substituindo-se a equação (2.53) em (2.43), resulta então

$$(\tilde{K}_L + \tilde{K}_G) \tilde{U} = \tilde{P}^e + \tilde{K}_M \tilde{U},$$

ou ainda,

$$(\tilde{K}_L + \tilde{K}_G - \tilde{K}_M) \tilde{U} = \tilde{P}^e \quad (2.56)$$

A equação (2.56) sugere então o uso da seguinte matriz de rigidez geométrica

$$\tilde{K}_G^e = \tilde{K}_G - \tilde{K}_M \quad (2.57)$$

a qual é baseada em momentos puramente semitangenciais. A matriz \tilde{K}_G é obtida diretamente a partir da expressão (2.45).

Assim sendo, propõe-se em [4], para o estudo de estruturas de barras espaciais elásticas com seção transversal sólida, sem empenamento, o uso da matriz de rigidez linear convencional, mostrada na figura 2.14, juntamente com a matriz de rigidez geométrica indicada na equação (2.57), cuja forma final se encontra explicitada na figura 2.15.

Indica-se abaixo os significados dos símbolos que aparecem nas figuras 2.14 e 2.15.

I_y, I_z - momentos de inércia da seção transversal do elemento em relação aos eixos principais y e z, respectivamente.

I_x - constante de torção da seção transversal do elemento.

A_x - área da seção transversal do elemento.

L - comprimento do elemento

E, G - módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material, respectivamente.

$$I_p = I_y + I_z \quad (2.58)$$

P_{Ni} - forças naturais do elemento [2], com

$$\begin{aligned} P_{N1} &= (N_{x2} - N_{x1})/2 \\ P_{N2} &= (M_{z1} - M_{z2})/2 \\ P_{N3} &= (M_{z1} + M_{z2})/2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

EA_x/L						$-EA_x/L$					
	$12EI_z/L^3$				$6EI_z/L^2$		$-12EI_z/L^3$				$6EI_z/L^2$
		$12EI_y/L^3$		$-6EI_y/L^2$				$-12EI_y/L^3$		$-6EI_y/L^2$	
			GI_x/L						$-GI_x/L$		
				$4EI_y/L$				$6EI_y/L^2$		$2EI_y/L$	
					$4EI_z/L$		$-6EI_z/L^2$				$2EI_z/L$
						EA_x/L					
							$12EI_z/L^3$				$-6EI_z/L^2$
								$12EI_y/L^3$		$6EI_y/L^2$	
									GI_x/L		
										$4EI_y/L$	
											$4EI_z/L$

Simétrico

Figura 2.14 - Matriz de rigidez elástica lineal K_L

	$\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$\frac{2}{L^2} P_{N5}$					$-\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N5}$			
	$\frac{6}{5L} P_{N1}$		$-\frac{1}{L}(P_{N4}+P_{N5})$	$\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$-\frac{6}{5L} P_{N1}$		$\frac{1}{L}(P_{N4}-P_{N5})$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$
		$\frac{6}{5L} P_{N1}$	$\frac{1}{L}(P_{N2}+P_{N3})$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$\frac{1}{L} P_{N6}$	$-\frac{2}{L^2} P_{N5}$		$-\frac{6}{5L} P_{N1}$	$-\frac{1}{L}(P_{N2}-P_{N3})$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$
			$\frac{I_D}{AL} P_{N1}$	$-\frac{1}{2} P_{N2} - \frac{1}{6} P_{N3}$	$-\frac{1}{2} P_{N4} - \frac{1}{6} P_{N5}$		$\frac{1}{L}(P_{N4}+P_{N5})$	$-\frac{1}{L}(P_{N2}+P_{N3})$	$-\frac{I_D}{AL} P_{N1}$	$-\frac{1}{3} P_{N3}$	$-\frac{1}{3} P_{N5}$
				$\frac{2L}{15} P_{N1}$			$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{3} P_{N3}$	$-\frac{L}{30} P_{N1}$	$\frac{1}{2} P_{N6}$
					$\frac{2L}{15} P_{N1}$		$-\frac{1}{10} P_{N1}$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$-\frac{1}{3} P_{N5}$	$-\frac{1}{2} P_{N6}$	$-\frac{L}{30} P_{N1}$
							$\frac{2}{L^2} P_{N3}$	$\frac{2}{L^2} P_{N5}$			
							$\frac{6}{5L} P_{N1}$		$-\frac{1}{L}(P_{N4}-P_{N5})$	$-\frac{1}{L} P_{N6}$	$-\frac{1}{10} P_{N1}$
								$\frac{6}{5L} P_{N1}$	$\frac{1}{L}(P_{N2}-P_{N3})$	$\frac{1}{10} P_{N1}$	$\frac{1}{L} P_{N6}$
									$\frac{I_D}{AL} P_{N1}$	$\frac{1}{2} P_{N2} - \frac{1}{6} P_{N3}$	$\frac{1}{2} P_{N4} - \frac{1}{6} P_{N5}$
										$\frac{2L}{15} P_{N1}$	
											$\frac{2L}{15} P_{N1}$

Simétrico

Figura 2.15 - Matriz de rigidez geométrica K_G^S

$$\begin{aligned}
 P_{N4} &= (M_{y2} - M_{y1})/2 \\
 P_{N5} &= (-M_{y2} - M_{y1})/2 \\
 P_{N6} &= (M_{x2} - M_{x1})/2
 \end{aligned}$$

2.3.2 - Matriz de Rigidez Elasto-Plástica de um Elemento

Apresenta-se nesta seção os procedimentos para obtenção da matriz de rigidez de um elemento de barra tridimensional com uma ou duas rótulas plásticas em suas extremidades.

2.3.2.1 - Caso de um elemento com uma rótula plástica no extremo 1.

Supõe-se um elemento de barra apresentando uma rótula plástica em sua extremidade 1 e com todos os demais pontos no regime elástico.

Se os deslocamentos das extremidades 1 e 2 do elemento sofrem incrementos representados pelos vetores $\dot{\tilde{U}}_1$ e $\dot{\tilde{U}}_2$, respectivamente, os correspondentes incrementos nos esforços atuantes nas citadas extremidades são dados por

$$\dot{\tilde{P}}_1 = K_{\tilde{11}\tilde{1}} \dot{\tilde{U}}_1^e + K_{\tilde{12}\tilde{2}} \dot{\tilde{U}}_2 \quad (2.60)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = K_{\tilde{21}\tilde{1}} \dot{\tilde{U}}_1^e + K_{\tilde{22}\tilde{2}} \dot{\tilde{U}}_2$$

sendo

$$\dot{\tilde{U}}_1^e = \dot{\tilde{U}}_1 - \dot{\tilde{U}}_1^p \quad (2.61)$$

a parte elástica de $\dot{\tilde{U}}_1$, ao contrário de $\dot{\tilde{U}}_1^p$ que representa a parte plástica. As matrizes $K_{\tilde{11}\tilde{1}}$, $K_{\tilde{12}\tilde{2}}$, $K_{\tilde{21}\tilde{1}}$ e $K_{\tilde{22}\tilde{2}}$ são submatrizes, de ordem 6x6, da matriz de rigidez elástica K_E do elemento, conforme mostrado a seguir:

$$\tilde{K}_E = \begin{bmatrix} K_{\tilde{11}} & K_{\tilde{12}} \\ K_{\tilde{21}} & K_{\tilde{22}} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

onde as letras usadas como índices nas referidas submatrizes indicam os extremos do elemento em relação aos quais as mesmas representam a rigidez.

De acordo com a condição de normalidade, dada pela equação (2.23), $\dot{U}_{\tilde{1}}^P$ tem a direção e o sentido do vetor gradiente $B_{\tilde{1}}$ da superfície de plastificação no ponto correspondente aos esforços atuantes no extremo 1 do elemento. Assim, tem-se

$$\dot{U}_{\tilde{1}}^P = \dot{\Lambda}_{\tilde{1}} B_{\tilde{1}} \quad (2.63)$$

sendo $\dot{\Lambda}_{\tilde{1}}$ a constante de plastificação no extremo 1 e $B_{\tilde{1}} = (\partial\psi/\partial\tilde{P})_{\tilde{1}}$.

Introduzindo-se as equações (2.61) e (2.63) nas expressões (2.60), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\tilde{1}} &= K_{\tilde{11}} (\dot{U}_{\tilde{1}} - \dot{\Lambda}_{\tilde{1}} B_{\tilde{1}}) + K_{\tilde{12}} \dot{U}_{\tilde{2}} \\ \dot{P}_{\tilde{2}} &= K_{\tilde{21}} (\dot{U}_{\tilde{1}} - \dot{\Lambda}_{\tilde{1}} B_{\tilde{1}}) + K_{\tilde{22}} \dot{U}_{\tilde{2}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Usando-se agora a condição de consistência, dada por (2.25), pode-se escrever que

$$B_{\tilde{1}}^T \dot{P}_{\tilde{1}} = 0 \quad (2.65)$$

Introduzindo a equação (2.65) na primeira das expressões (2.60) com todos os termos pré multiplicados por $B_{\tilde{1}}^T$, resulta

$$B_{\tilde{1}}^T K_{\tilde{11}} \dot{U}_{\tilde{1}} + B_{\tilde{1}}^T K_{\tilde{12}} \dot{U}_{\tilde{2}} - B_{\tilde{1}}^T K_{\tilde{11}} \dot{\Lambda}_{\tilde{1}} B_{\tilde{1}} = 0,$$

ou ainda,

$$\dot{\Lambda}_1 = \frac{1}{B_{11}^T K_{11} B_1} \begin{bmatrix} B_{11}^T K_{11} & B_{11}^T K_{12} \\ B_{21}^T K_{11} & B_{21}^T K_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

As equações (2.64) podem ser combinadas na seguinte expressão matricial

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_1 B_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

Agora, usando as equações (2.66) e (2.67) chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{B_{11}^T K_{11} B_1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^T K_{11} & B_{11}^T K_{12} \\ B_{21}^T K_{11} & B_{21}^T K_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} B_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

sendo I a matriz identidade de ordem 12×12 e a constante c é dada pela expressão

$$c = B_{11}^T K_{11} B_1 \quad (2.70)$$

Analisando a equação (2.69), conclui-se que a matriz de rigidez elasto-plástica do elemento, relativa aos

incrementos dos deslocamentos segundo às coordenadas locais (figura 2.12), é dada por

$$\tilde{K}_{EP}^{(1)} = \tilde{K}_E \left(I - \frac{1}{C} \tilde{B} \tilde{B}^T \tilde{K}_E \right) \quad (2.71)$$

onde

$$\tilde{B}^T = [\tilde{B}_1^T \quad 0] \quad (2.72)$$

é um vetor linha com doze elementos.

Caso a rótula plástica esteja localizada no extremo 2, a matriz elasto-plástica $\tilde{K}_{EP}^{(2)}$ do elemento pode ser obtida a partir da equação (2.71) tomando-se

$$\tilde{B}^T = [0 \quad \tilde{B}_2^T] \quad (2.73)$$

onde \tilde{B}_2 é o vetor gradiente da superfície de plastificação no ponto correspondente aos esforços atuantes no extremo 2 do elemento, ou seja, $\tilde{B}_2 = (\partial\psi/\partial\tilde{P})_2$.

2.3.2.2 - Caso de um elemento com duas rótulas plásticas nas suas extremidades

Supõe-se agora que o elemento de barra apresente duas rótulas plásticas nos extremos 1 e 2, nos quais ocorrem incrementos de deslocamentos $\dot{\tilde{U}}_1$ e $\dot{\tilde{U}}_2$, respectivamente. Os correspondentes incrementos verificados nos esforços são expressos por

$$\dot{\tilde{P}}_1 = \tilde{K}_{11} (\dot{\tilde{U}}_1 - \dot{\Lambda}_1 \tilde{B}_1) + \tilde{K}_{12} (\dot{\tilde{U}}_2 - \dot{\Lambda}_2 \tilde{B}_2) \quad (2.74)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = \tilde{K}_{21} (\dot{\tilde{U}}_1 - \dot{\Lambda}_1 \tilde{B}_1) + \tilde{K}_{22} (\dot{\tilde{U}}_2 - \dot{\Lambda}_2 \tilde{B}_2)$$

sendo $\dot{\Lambda}_2$ a constante de plastificação do extremo 2 do elemento.

Através da condição de consistência, pode-se escrever

$$\tilde{B}_1^T \dot{\tilde{P}}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{B}_2^T \dot{\tilde{P}}_2 = 0 \quad (2.75)$$

Usando-se as equações (2.74) e (2.75) chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Lambda}_1 \\ \dot{\Lambda}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^T K_{11} B_{11} & B_{11}^T K_{12} B_{22} \\ B_{21}^T K_{21} B_{11} & B_{21}^T K_{22} B_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^T & 0 \\ 0 & B_{21}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Introduzindo a equação (2.76) em (2.74), resulta

$$\begin{Bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \left[I - \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^T K_{11} B_{11} & B_{11}^T K_{12} B_{22} \\ B_{21}^T K_{21} B_{11} & B_{21}^T K_{22} B_{22} \end{bmatrix}^{-1} \right] \begin{bmatrix} B_{11}^T & 0 \\ 0 & B_{21}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Observando-se a equação (2.77), chega-se à conclusão de que a matriz de rigidez elasto-plástica do elemento, relativa aos incrementos de deslocamentos segundo às coordenadas locais, é dada pela seguinte expressão:

$$K_{EP}^{(1,2)} = K_E \left(I - B C^{-1} B^T K_E \right) \quad (2.78)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} B_{11}^T K_{11} B_{11} & B_{11}^T K_{12} B_{22} \\ B_{21}^T K_{21} B_{11} & B_{21}^T K_{22} B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

e

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{21} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Vale no entanto observar que a equação (2.78) transforma-se em (2.71) tomando-se $\underline{B}_2 = \underline{0}$.

Conforme foi mencionado anteriormente no item 2.2, a constante de plastificação de uma seção, $\dot{\Lambda}_1$ ou $\dot{\Lambda}_2$, deve ser positiva sempre que ocorram incrementos nas deformações plásticas da seção. Assim, o sinal da referida constante pode ser utilizado para verificação da ocorrência de desativação de uma rótula plástica. Um valor negativo para $\dot{\Lambda}_i$ significa que o extremo i , previamente plastificado, volta a apresentar comportamento elástico.

3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Apresenta-se neste capítulo os procedimentos para a realização da análise não linear geométrica de pórticos espaciais, utilizando-se para tal fim um método numérico incremental-iterativo que adota como parâmetro de controle, para o estabelecimento dos incrementos de cargas, uma certa quantidade de trabalho. No final do capítulo são apresentados vários exemplos numéricos resolvidos com os mencionados procedimentos e os resultados obtidos são confrontados com outros provenientes de diferentes formulações.

3.1 - Método Numérico da Análise

Para solução de problemas estruturais não lineares YANG [56] propôs um método numérico que pode ser classificado como uma generalização do tradicional método de Newton-Raphson e que é indicado quando se pretende obter uma descrição completa do comportamento pós-crítico da estrutura, particularmente, quando este apresenta o fenômeno "snap-through" ou "snap-back". A diferença essencial entre o referido método e outros já existentes e de mesma natureza está no critério estabelecido para controlar os incrementos de carga nas diversas iterações realizadas durante a análise. Tal método impõe como condição básica para a determinação dos citados incrementos de carga a constância do trabalho realizado pelos mesmos ao longo dos correspondentes incrementos de deslocamentos, em cada passo incremental. Entendendo-se como passo incremental qualquer etapa da análise entre dois pontos consecutivos onde se admite atingido o equilíbrio entre cargas externas e esforços internos. Geralmente, é necessário a realização de mais de uma iteração em cada passo incremental da análise.

No que segue se apresenta os procedimentos propostos

por YANG [56].

Em geral, na análise não linear geométrica de uma estrutura através de procedimentos iterativos se chega a uma equação incremental de equilíbrio na forma

$$K_{\sim t-1} \Delta \bar{D}_{\sim t} = \lambda_t \bar{R} + F_{\sim t-1} \quad (3.1)$$

onde

$K_{\sim t-1}$ - matriz de rigidez da estrutura, baseada na configuração deformada resultante da iteração t-1.

$\Delta \bar{D}_{\sim t}$ - vetor dos incrementos de deslocamentos na iteração t

λ_t - fator de carga correspondente à iteração t

\bar{R} - vetor das cargas de referência

$F_{\sim t-1}$ - vetor das forças desequilibradas existentes no final da iteração t-1.

Pela equação (3.1) o vetor dos incrementos de cargas obtidos na iteração t é dado por

$$\Delta R_{\sim t} = \lambda_t \bar{R} \quad (3.2)$$

O vetor dos incrementos de deslocamentos $\Delta \bar{D}_{\sim t}$ pode ser estrategicamente decomposto em dois vetores, de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \bar{D}_{\sim t} = \lambda_t \Delta \bar{D}_{\sim t} + \Delta \bar{D}_{\sim t} \quad (3.3)$$

e de modo que

$$K_{\sim t-1} \Delta \bar{D}_{\sim t} = \bar{R} \quad (3.4)$$

$$K_{\sim t-1} \Delta \bar{D}_{\sim t} = F_{\sim t-1} \quad (3.5)$$

Definindo-se, então, convenientemente um valor ΔW como o trabalho de controle acima mencionado, as expressões básicas do método resultam da imposição de que em cada passo

incremental os incrementos de carga relativos à primeira iteração sejam tais que o trabalho dos mesmos ao longo dos incrementos de deslocamentos correspondentes seja igual a ΔW e que nas iterações seguintes, do mesmo passo incremental, o trabalho realizado pelos novos incrementos de carga seja nulo. Assim, pode-se escrever

$$\Delta \bar{D}_1^T (\lambda_1 \bar{R}) = \Delta W \quad (3.6)$$

Como no início de cada passo incremental é admitido o equilíbrio entre cargas externas e esforços internos, tem-se que para $t=1$ o vetor $F_{t-1} = F_0$ é nulo. Resulta, então, da equação (3.5), que $\Delta \bar{D}_1 = 0$. Daí, considerando as equações (3.3) e (3.6), chega-se à seguinte expressão para o cálculo do fator de carga da primeira iteração de cada passo incremental:

$$\lambda_1^2 = \frac{\Delta W}{\Delta \bar{D}_1^T \bar{R}} \quad (3.7)$$

Para as demais iterações, a imposição acima referida permite que se escreva

$$\Delta \bar{D}_t^T (\lambda_t \bar{R}) = 0 \quad (3.8)$$

ou, equivalentemente, usando a equação (3.3),

$$\lambda_t = - \frac{\Delta \bar{D}_t^T \bar{R}}{\Delta \bar{D}_t^T \bar{R}} \quad (3.9)$$

com $t=2,3,4,\dots$

Como na equação (3.7) aparece o quadrado de λ_1 , é necessário o estabelecimento de uma condição adicional para a definição do sinal daquele fator de carga. Para isto, pode-se impor que o desenvolvimento da análise, em seus vários passos, seja efetuado num único sentido ao longo da trajetória de equilíbrio da estrutura. Isto equivale a dizer que no caso simples de uma única carga e um só deslocamento, a curva carga/deslocamento da estrutura é percorrida num sentido

único durante a análise. Com esta condição desaparece a ambigüidade no sinal de λ_1 , dado pela equação (3.7), e seu valor assim calculado pode ser aplicado para qualquer tipo de trajetória de equilíbrio, ascendente ou descendente, inclusive com reversões de cargas ou de deslocamentos [20]. Matematicamente a condição acima pode ser introduzida através do procedimento dado a seguir.

Suponha-se que $\Delta \bar{D}_0$ e $\Delta \bar{R}_0$ sejam os vetores de incrementos totais de deslocamentos e de cargas, respectivamente, do passo incremental anterior ao corrente. Para a primeira iteração do atual passo incremental, lembrando que $\Delta \bar{D}_1 = \bar{0}$, pode-se então escrever

$$\Delta \bar{D}_1 = \lambda_1 \Delta \bar{D}_1 \quad (3.10)$$

$$\Delta \bar{R}_1 = \lambda_1 \bar{R} \quad (3.11)$$

Deste modo, a condição de fixação do sinal de λ_1 pode ser estabelecida pela expressão

$$\Delta \bar{D}_0^T \lambda_1 \Delta \bar{D}_1 + \Delta \bar{R}_0^T \lambda_1 \bar{R} \geq 0$$

ou ainda,

$$\lambda_1 [\Delta \bar{D}_0^T \Delta \bar{D}_1 + \Delta \bar{R}_0^T \bar{R}] \geq 0 \quad (3.12)$$

A equação (3.12) expressa que o produto escalar entre os vetores $\{ \Delta \bar{D}_0 \quad \Delta \bar{R}_0 \}$ e $\{ \lambda_1 \Delta \bar{D}_1 \quad \lambda_1 \bar{R} \}$ deve ser não negativo.

A última expressão acima permite que se escreva, finalmente [20],

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \frac{H}{|H|} \quad (3.13)$$

onde

$$H = \Delta \bar{D}_0^T \Delta \bar{D}_1 + \Delta \bar{R}_0^T \bar{R} \quad (3.14)$$

Logo, na t-ésima iteração de cada passo incremental, os incrementos de cargas e de deslocamentos são obtidos

através das equações (3.2) e (3.3), respectivamente, com λ_t calculado pelas expressões (3.7), quando $t=1$, e (3.9), para $t \geq 2$, observando-se que o sinal de λ_t é dado por (3.13).

Os detalhes do emprego dos procedimentos acima descritos na formulação da análise das estruturas aqui consideradas estão expostos no item dado a seguir.

3.2 - Sistematização dos Procedimentos da Análise

As relações e procedimentos anteriormente apresentados nos itens 2.1, 2.3 e 3.1 podem ser organizados de forma sistemática para constituir uma formulação do tipo Lagrangeana Atualizada destinada a análise não linear geométrica de estruturas. Tal formulação consiste basicamente nas etapas expostas a seguir.

1ª etapa : Estabelecimento das cargas de referência e do valor do trabalho de controle.

Para iniciar a análise de uma estrutura usando-se o método numérico anteriormente descrito, é necessário a fixação do trabalho ΔW que servirá de controle durante toda a análise. Embora, a priori, a quantidade ΔW seja arbitrária, é importante o uso de certa cautela na especificação de seu valor. A atribuição de valores grandes para a referida grandeza pode implicar na obtenção de pontos de equilíbrio muito afastados, o que pode prejudicar a interpretação dos resultados, ou mesmo acarretar falta de convergência nos resultados da análise.

Recomenda-se, portanto, a adoção de valores baixos para ΔW , principalmente, quando se pretende analisar uma estrutura muito flexível. Sugere-se, no entanto, que o valor do referido trabalho seja estabelecido com base no trabalho realizado pelas cargas de referência. Para isto, pode-se definir estas cargas, por exemplo, como uma pequena fração (tal como 1/10 ou 1/20) das correspondentes cargas necessárias para provocar o início de escoamento em algum ponto da estrutura, e daí, estabelecer como valor de ΔW a quantidade de trabalho realizado pelas citadas cargas de referência ao longo

dos correspondentes deslocamentos obtidos em uma análise linear convencional da estrutura.

2ª etapa : Cálculo do fator de carga λ_1

A determinação do fator de carga λ_1 é feita através da equação (3.7). Para isto, o vetor $\Delta \bar{D}_{\sim 1}$ deve ser calculado pela expressão (3.4) mediante o uso de um método de resolução de sistema de equações lineares, tal como o Método de Eliminação de Gauss ou procedimento similar. No programa computacional elaborado com a presente formulação foi implementado o Método Frontal [24,30].

Quando o passo incremental em realização não é o primeiro, deve-se recorrer à equação (3.13) para a definição do sinal de λ_1 .

3ª etapa : Obtenção dos incrementos de deslocamentos e de cargas e atualização de variáveis

De posse do valor de λ_1 e do vetor $\Delta \bar{D}_{\sim 1}$, determina-se através de (3.2) e (3.3) os incrementos de carga e de deslocamentos pelas expressões:

$$\Delta R_{\sim 1} = \lambda_1 \bar{R}_{\sim 1} \quad (3.15)$$

$$\Delta D_{\sim 1} = \lambda_1 \Delta \bar{D}_{\sim 1} \quad (3.16)$$

A atualização das cargas e dos deslocamentos totais é feita, respectivamente, pelas equações:

$$D_{\sim t} = D_{\sim t-1} + \Delta D_{\sim t} \quad (3.17)$$

$$R_{\sim t} = R_{\sim t-1} + \Delta R_{\sim t} \quad (3.18)$$

Observa-se que quando $t=1$, tem-se $\Delta \bar{D}_{\sim t} = \bar{D}_{\sim t}$ e $F_{\sim t-1} = \bar{F}_{\sim t}$.

Para a definição da configuração geométrica atualizada da estrutura é necessário se efetuar a atualização das coordenadas cartesianas dos nós da mesma, o que deve ser

feito através das três expressões seguintes:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \Delta D_t^{(X)} \\ Y_t &= Y_{t-1} + \Delta D_t^{(Y)} \\ Z_t &= Z_{t-1} + \Delta D_t^{(Z)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde X, Y e Z representam as coordenadas do nó considerado, em relação aos eixos globais da estrutura, e os termos $\Delta D_t^{(X)}$, $\Delta D_t^{(Y)}$, $\Delta D_t^{(Z)}$ indicam os respectivos incrementos de deslocamentos (translações) ocorridos no nó, segundo as direções X, Y e Z.

Com os incrementos de rotações nodais já conhecidos procede-se por intermédio da equação (2.5) a atualização das matrizes de orientação das seções extremas dos elementos, e daí, finalmente, determina-se as novas matrizes de rotação r dos vários elementos em que foi discretizada a estrutura, usando-se para isto a expressão (2.16).

4ª etapa : Cálculo dos esforços internos solicitantes

Após a obtenção da nova configuração geométrica da estrutura, através do processo de atualização descrito na etapa anterior, pode-se calcular os correspondentes esforços internos que atuam nas extremidades dos diversos elementos que constituem a estrutura.

Para uma dada configuração, a determinação dos esforços internos que solicitam os extremos de um elemento qualquer pode ser iniciada calculando-se o vetor

$$\tilde{P}_L = K_E \tilde{U}_E \quad (3.20)$$

onde

\tilde{K}_E - matriz de rigidez elástica do elemento ($\tilde{K}_E = \tilde{K}_L + \tilde{K}_G$)

\tilde{U}_E - vetor de deslocamentos nodais do elemento, relativos às

deformações axial, de flexão e de torção, ou seja.

$$\underline{U}_E = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \theta_{1y} \ \theta_{1z} \ u_x \ 0 \ 0 \ \theta_x \ \theta_{2y} \ \theta_{2z}\} \quad (3.21)$$

sendo os termos de \underline{U}_E calculados através das equações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13).

O vetor \underline{P}_L obtido pela equação (3.20) reúne as ações nodais do elemento referidas a eixos locais que, em geral, não coincidem com as direções normais e principais das seções transversais extremas do elemento deformado. Por exemplo, as componentes nas posições um e sete do vetor \underline{P}_L são referidas à direção da corda que une os centróides das seções transversais situadas nas extremidades do elemento e não às direções normais destas seções transversais, conforme se exigiria, a rigor, para se classificar aquelas componentes como esforços normais atuantes nos extremos do elemento.

Assim sendo, o fato da equação (3.20) envolver, implicitamente, eixos locais que não coincidem com as direções normais e principais das seções transversais das extremidades do elemento implica na necessidade de se referir aquelas ações nodais com relação a estas últimas direções, para que desta forma sejam obtidos os esforços internos reais atuantes nos extremos do elemento.

De acordo com o que se expôs no item 2.1, as direções da normal e dos eixos principais de uma seção transversal extrema i de um elemento são definidas por uma matriz $\underline{p}^{(i)}$, dada pela equação (2.2). As colunas da matriz $\underline{p}^{(i)}$ fornecem as componentes, em relação aos eixos globais X , Y e Z , dos vetores unitários $\underline{p}_1^{(i)}$, $\underline{p}_2^{(i)}$ e $\underline{p}_3^{(i)}$, orientados segundo as direções da normal e dos eixos principais da seção transversal i , respectivamente (figura 2.7).

Portanto, os esforços internos que solicitam a seção transversal i do elemento podem ser determinados projetando-se as correspondentes ações nodais nas direções dos vetores unitários acima mencionados. Esta operação pode ser executada através da seguinte expressão:

$$\underline{P}^{(i)} = \underline{p}^{(i)} \underline{P}_L^{(i)} \quad (3.22)$$

onde

$\tilde{P}^{(i)}$ - vetor (6 x 1) que coleciona os esforços internos na seção i do elemento,

$\tilde{P}_G^{(i)}$ - vetor (6 x 1) que reúne as componentes das ações nodais no extremo i , referidas aos eixos globais X, Y e Z. Dado por

$$\tilde{P}_G^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{r}^T & 0 \\ 0 & \tilde{r}^T \end{bmatrix}_{6 \times 6} \tilde{P}_L^{(i)} \quad (3.23)$$

\tilde{r}^T - transposta da matriz de rotação do elemento (equação 2.16).

5ª etapa : Obtenção das forças desequilibradas

Calculando-se as ações nodais exercidas por todos os elementos sobre as juntas da estrutura, numa dada configuração, verifica-se que, em geral, tais ações não estão em equilíbrio com as cargas externas. Resulta, portanto, deste fato, um vetor de forças desequilibradas definido por

$$\tilde{F}_t = \tilde{R}_t + \tilde{S}_t \quad (3.24)$$

onde \tilde{S}_t corresponde ao vetor das ações nodais exercidas pelos elementos sobre as diversas juntas da estrutura na configuração considerada.

O vetor \tilde{S}_t é construído considerando-se, nas devidas posições, as contribuições provenientes dos vários elementos da estrutura. Para cada elemento, a citada contribuição pode ser encontrada pela seguinte expressão:

$$\tilde{S}_E = -\tilde{r}_T^T K_E \tilde{U}_E \quad (3.25)$$

com

\tilde{r}_T - matriz de transformação de coordenadas do elemento, de

ordem 12×12 , dada por

$$\tilde{r}_T = \begin{bmatrix} \tilde{r} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{r} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{r} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{r} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Assim, o vetor das forças desequilibradas da estrutura pode ser simbolicamente indicado por

$$F_{\tilde{t}} = R_{\tilde{t}} + \sum_l (-r_{\tilde{T}}^T K_{\tilde{E}} U_{\tilde{E}}) \quad (3.27)$$

onde $l = 1, 2, \dots$ número de elementos.

6ª etapa : Montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura

Com base na configuração atualizada da estrutura, monta-se para cada elemento uma nova matriz de rigidez referida aos eixos globais, usando-se a seguinte relação de similaridade

$$K_{\tilde{E}}^G = r_{\tilde{T}}^T K_{\tilde{E}} r_{\tilde{T}} \quad (3.28)$$

Somando-se, então, convenientemente, os termos das matrizes $K_{\tilde{E}}^G$ de todos os elementos, constrói-se a matriz de rigidez tangente da estrutura, a qual é usada na iteração seguinte.

7ª etapa : Teste de convergência

Ao final de cada iteração deve-se verificar se a configuração deformada atualizada está suficientemente próxima da configuração real de equilíbrio para as cargas externas atualizadas. Assim, é necessário que se estabeleça um critério

que permita um julgamento do grau de aproximação entre a configuração encontrada e a verdadeira, que aliás, é a priori desconhecida. Tal critério é denominado critério de convergência e a mencionada verificação pode ser chamada de teste de convergência.

Existem várias formas de se definir um critério de convergência. Como exemplo, cita-se o critério baseado na norma euclidiana ponderada das forças desequilibradas, o qual foi implementado no programa computacional desenvolvido com a presente formulação, e se expressa por

$$\frac{\|F_t\|}{n |\mu_t|} \leq \rho_{tol} \quad (3.29)$$

onde

$\|F_t\|$ - norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas

n - número de graus de liberdade da estrutura

$|\mu_t|$ - valor absoluto da relação entre a intensidade de qualquer carga não nula atualizada e seu correspondente valor no vetor das cargas de referência.

ρ_{tol} - tolerância (usualmente entre 0.001 e 0.000001)

Quando a desigualdade (3.29) é atendida, para o valor de ρ_{tol} especificado, admite-se que foi atingido um ponto de equilíbrio e passa-se então para novo passo incremental, voltando à segunda etapa acima, com a matriz de rigidez já atualizada. Em caso contrário, prossegue-se no mesmo passo incremental realizando-se a oitava etapa, que corresponde ao início de nova iteração.

8ª etapa : Cálculo do fator de carga λ_t

O início de uma nova iteração t , com $t = 1$, se dá com a determinação dos deslocamentos $\Delta \bar{D}_t$ e $\Delta \bar{D}_t$, usando-se para isto a matriz de rigidez tangente montada na sexta etapa

acima e o vetor de forças desequilibradas obtido na quinta etapa. Calcula-se em seguida, através da equação (3.9), o novo fator de carga λ_t .

9ª etapa : Determinação dos incrementos de deslocamentos e de cargas e atualização de variáveis

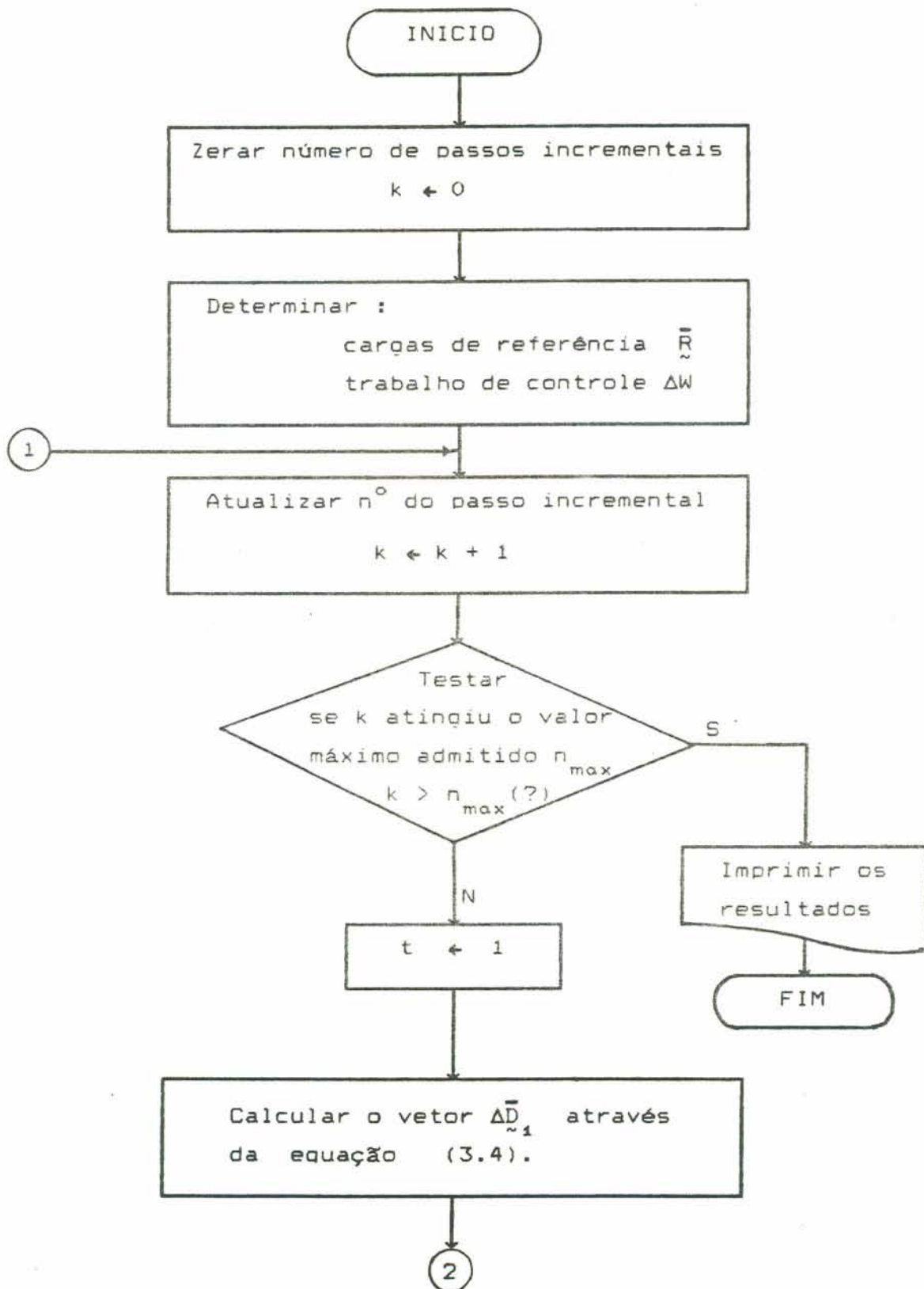
Com o fator de cargas λ_t já obtido, determina-se os vetores de incrementos de carga e de deslocamentos pelas expressões (3.2) e (3.3), respectivamente, e daí, procede-se a atualização das cargas, dos deslocamentos e das coordenadas dos nós da estrutura, utilizando-se para este fim as mesmas expressões indicadas na terceira etapa, ou seja, as equações (3.17), (3.18) e (3.19).

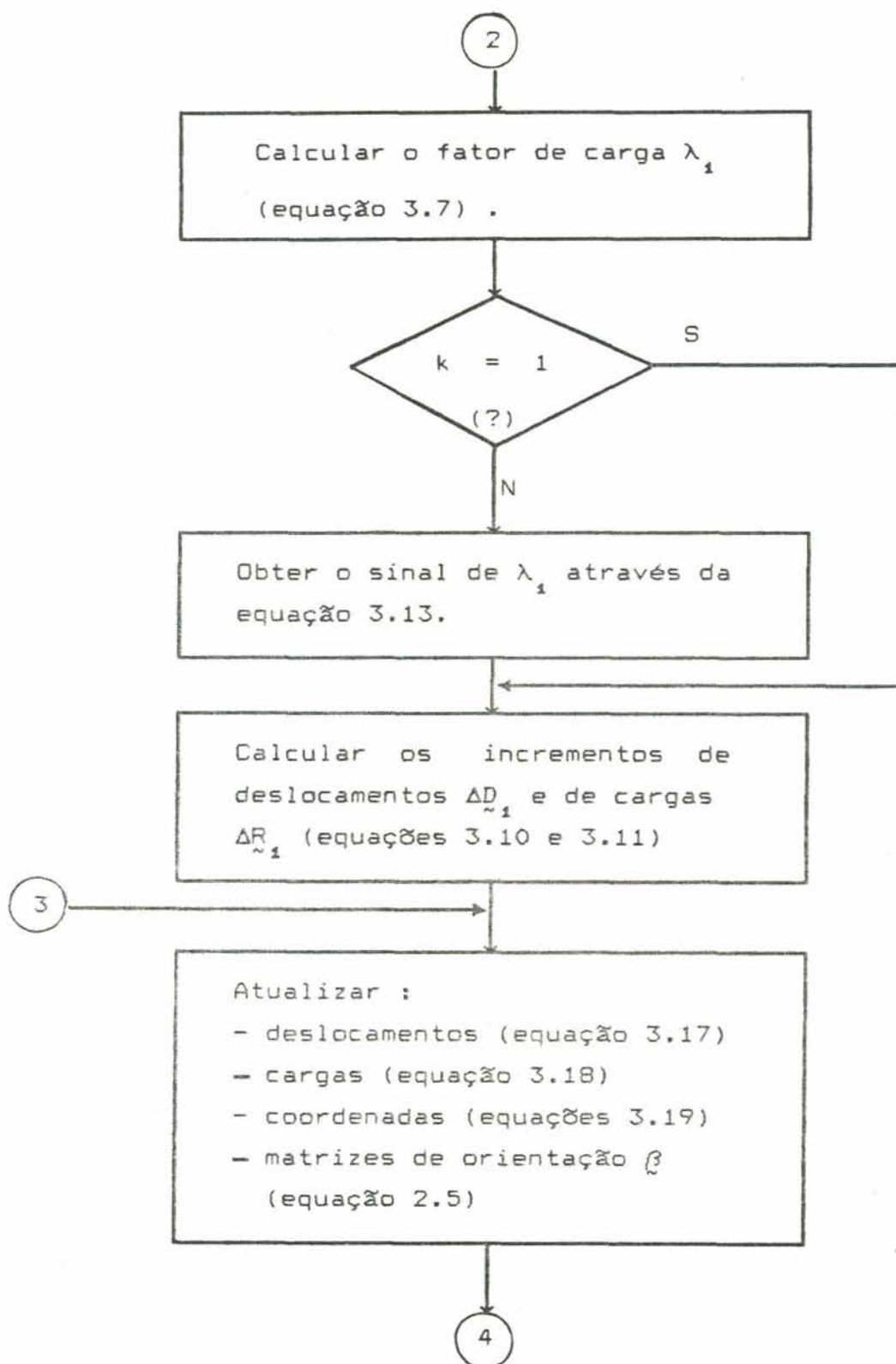
As matrizes de orientação das seções extremas e de rotações dos elementos devem também ser atualizadas em função dos incrementos de rotações ocorridos na presente iteração, de acordo com o mencionado na terceira etapa apresentada anteriormente.

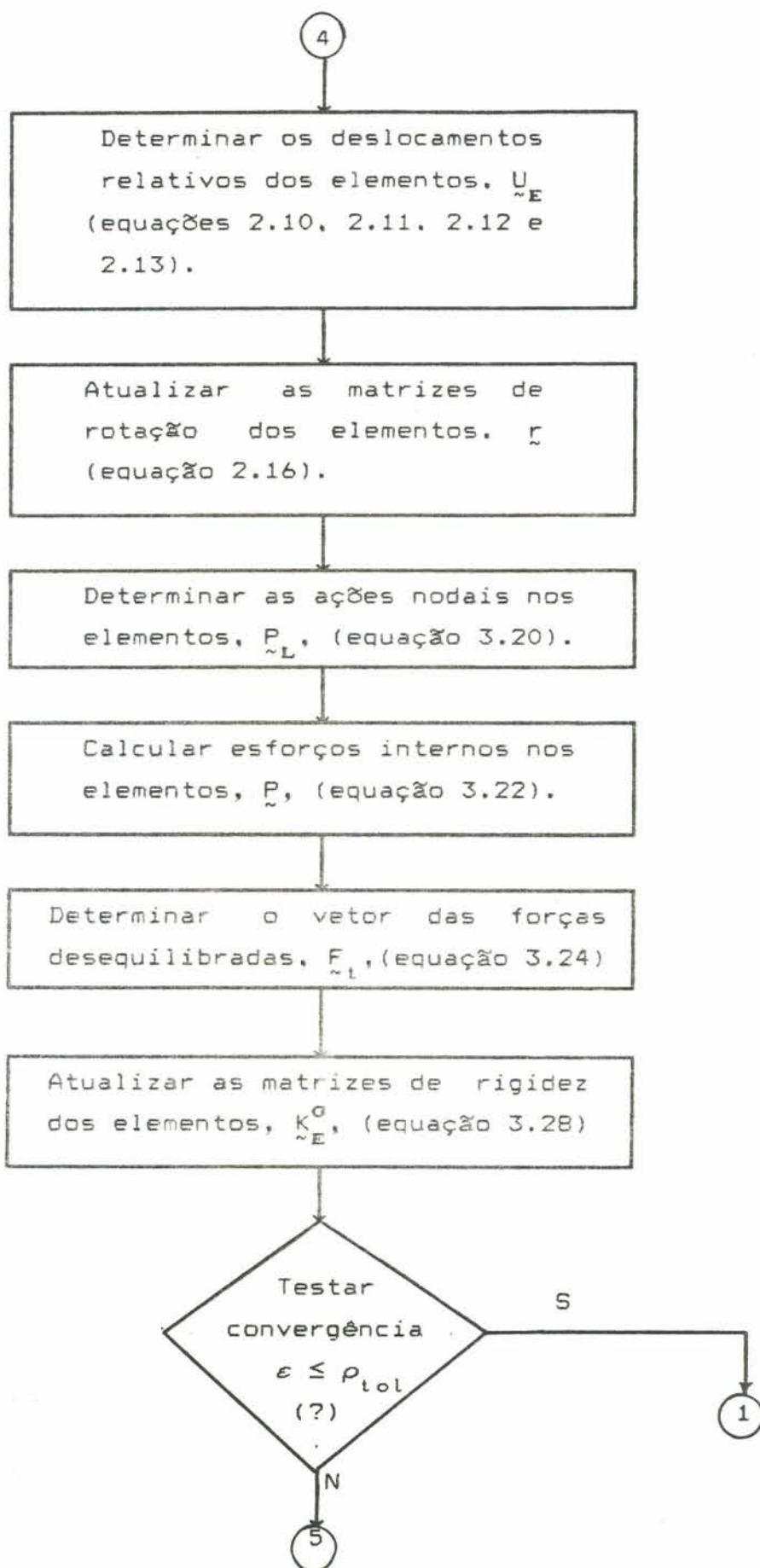
Terminada a nona etapa, calcula-se as forças desequilibradas correspondentes à nova configuração deformada da estrutura, utilizando-se os procedimentos dispostos na quinta etapa, e realiza-se o teste de convergência mencionado acima. Se o critério de convergência for atendido, está terminado o atual passo incremental, podendo outro ser imediatamente iniciado, repetindo-se todo o processo descrito anteriormente através das várias etapas apresentadas. Em caso contrário, inicia-se nova iteração, partindo-se dos procedimentos dispostos na oitava etapa e prosseguindo-se com o processo até que ocorra convergência de resultados.

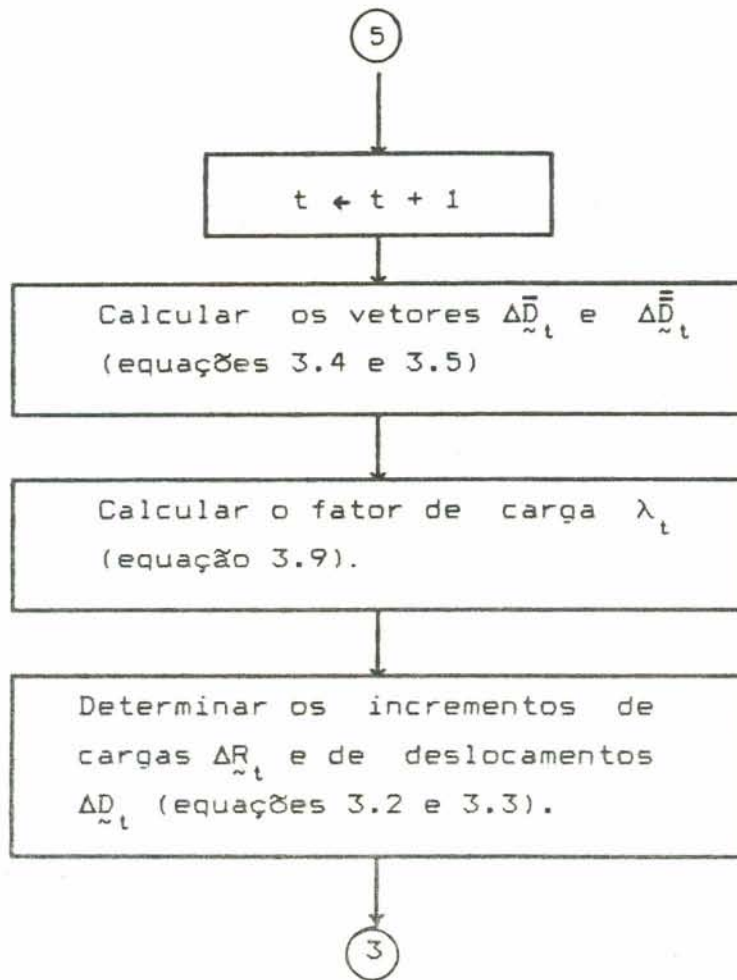
Em seguida se apresenta um fluxograma que proporciona uma visão global das operações envolvidas no processo estabelecido através das etapas descritas acima.

3.3 - Fluxograma Geral









3.4 - Exemplos Numéricos

No que segue são apresentados vários exemplos numéricos resolvidos através dos procedimentos expostos neste capítulo. Para mostrar a eficiência da análise, os resultados obtidos são confrontados com outros encontrados por diferentes formulações e publicados em várias referências bibliográficas.

3.4.1 - Caso de um pórtico plano

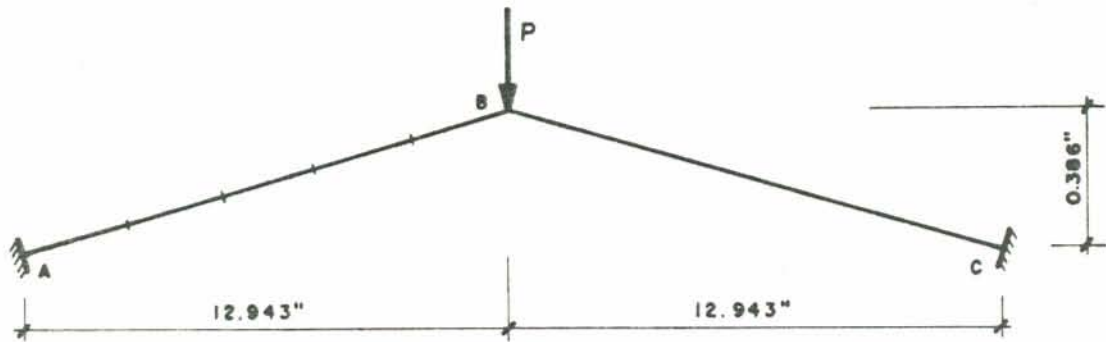
Consiste este exemplo de uma estrutura bidimensional simétrica, biengastada, constituída por duas barras que formam entre si um ângulo obtuso, e que está submetida a uma carga concentrada vertical em seu vértice superior, conforme ilustra a figura 3.1.

A estrutura foi inicialmente resolvida de forma analítica por William's [54] que, inclusive, comprovou os resultados obtidos com observações experimentais. Em seguida, outros pesquisadores [28,33,46,55,56] analisaram a mesma estrutura através de diversos processos numéricos.

A necessidade de se verificar a eficiência das formulações numéricas no que diz respeito ao tratamento do fenômeno "snap - through", que aliás é a característica especial do comportamento pós-crítico da estrutura em questão, justifica o fato de a mesma constar como exemplo em diversas referências bibliográficas.

No presente estudo a estrutura foi discretizada em dez elementos, sendo cinco deles em cada barra. A análise foi executada em dezesseis passos incrementais, com três iterações em cada um. Adotou-se como tolerância no critério de convergência $\rho_{tol} = 10^{-5}$ e como valor do trabalho de controle o trabalho realizado por uma carga igual a 10% da carga necessária para iniciar o escoamento da estrutura, ao longo do correspondente deslocamento obtido através de uma análise linear convencional, o que é feito automaticamente pelo programa de computador desenvolvido.

As figuras 3.2 e 3.3 mostram os resultados obtidos



SEÇÃO TRANSVERSAL



Dado:

$$E = 10.30 \times 10^6 \text{ psi}$$

Figura 3.1 - Exemplo de um pórtico bidimensional

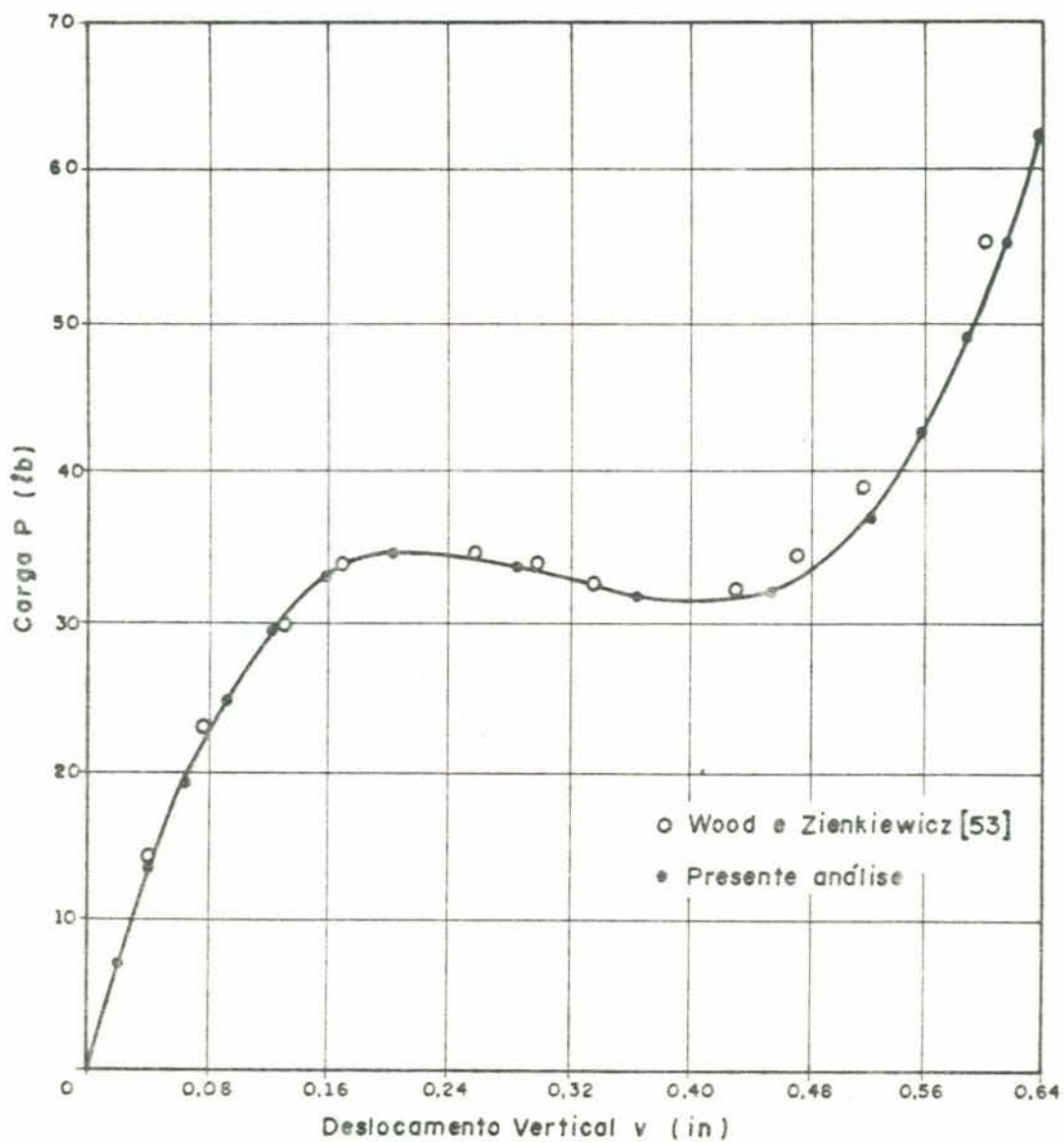


Figura 3.2 - Curva carga/deslocamento vertical do ponto B do exemplo 3.4.1

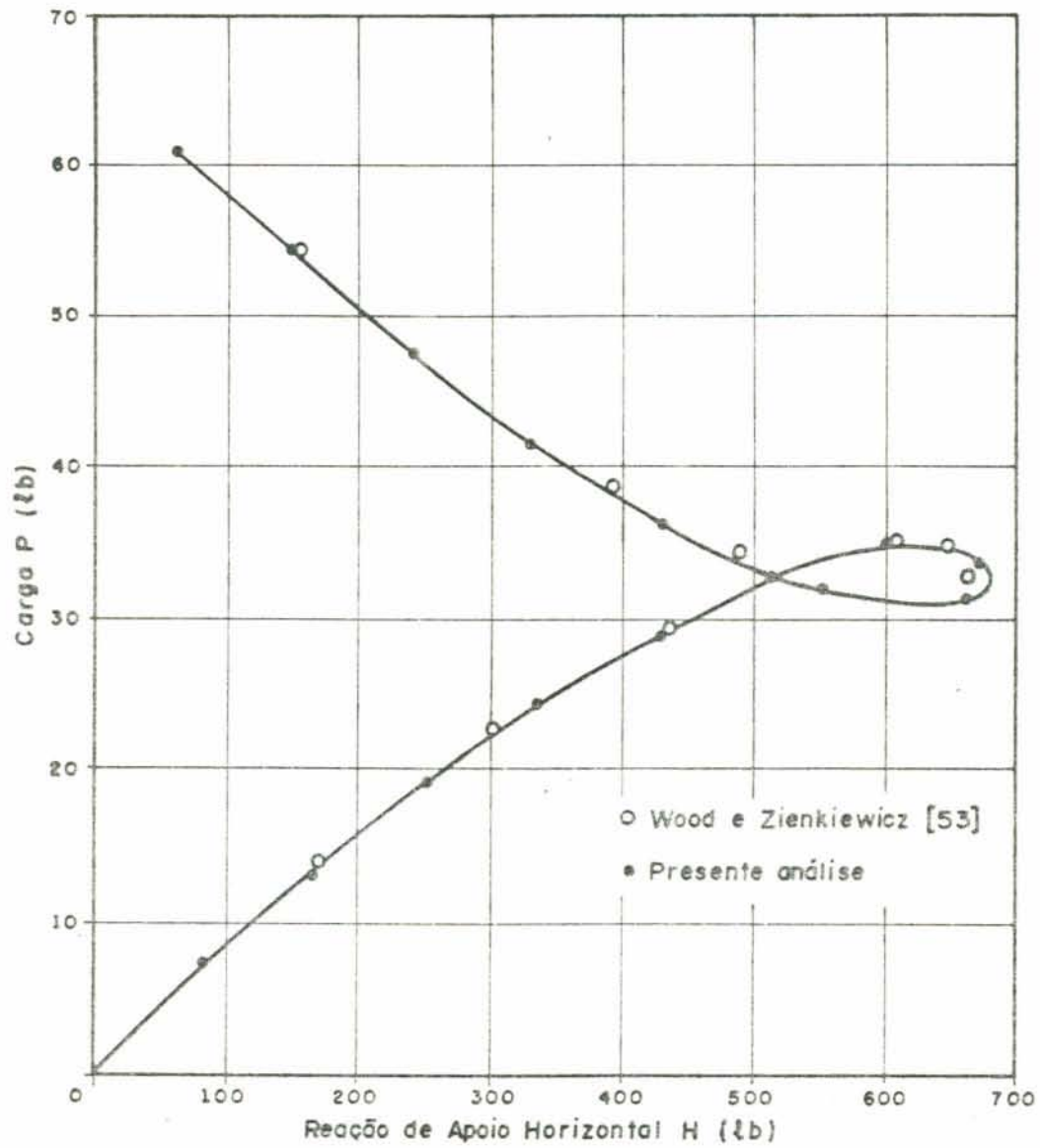


Figura 3.3 - Curva carga/reação horizontal do apoio A do exemplo 3.4.1

pela presente formulação, os quais estão confrontados com aqueles encontrados na referência [55] que utilizou como ferramenta numérica o método de controle por deslocamento.

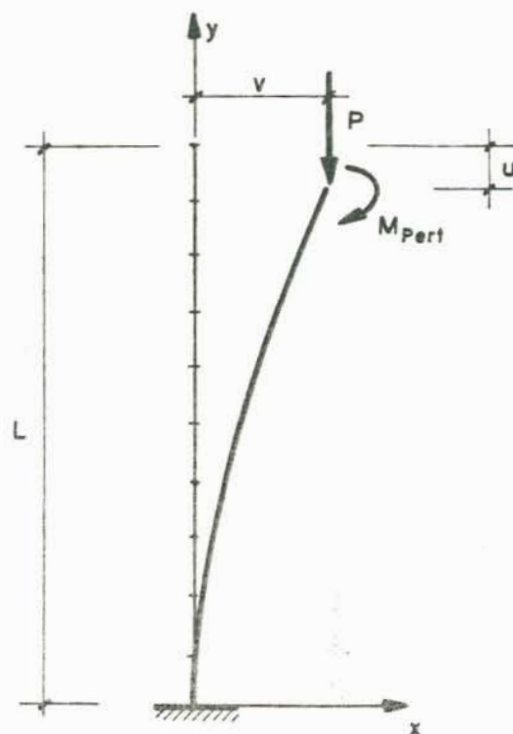
3.4.2 - Caso de uma coluna engastada na base e livre no topo e sujeita a uma carga axial.

O caso de uma barra com base engastada e com seu extremo superior livre, submetida a uma carga axial, mostrado na figura 3.4, é um dos mais tradicionais problemas de análise não linear geométrica encontrado na literatura técnica. Sua solução analítica, sob a hipótese de grandes deslocamentos, é encontrada em [51].

A importância deste exemplo deve-se ao fato de que, apesar de sua geometria simples, ele apresenta um comportamento altamente não linear, que o caracteriza como um excelente teste de eficiência e habilidade de formulações não lineares.

No presente estudo, a referida coluna foi discretizada em dez elementos e aplicado em seu topo um pequeno momento perturbador $M_{pert} = 0.01PL$ para dar origem aos deslocamentos laterais (figura 3.4). Foram realizados cento e trinta e três passos incrementais com um número de iterações, por passo, variando de quatro a cinco. Como tolerância no critério de convergência foi adotado $\rho_{tol} = 10^{-5}$ e como carga de referência o valor correspondente a 7.5% da carga necessária para provocar o início de escoamento da coluna.

Os resultados encontrados podem ser vistos nas figuras 3.5 e 3.6. Ressalta-se que em virtude da proximidade dos pontos de equilíbrio encontrados na análise, principalmente durante e após o estágio correspondente à segunda curva na trajetória ilustrada na figura 3.5, não se encontram representados nos gráficos todos aqueles mencionados pontos.



Dados:

$$A_x = 0.30 \text{ cm}^2$$

$$I_z = 0.00025 \text{ cm}^4$$

$$L = 58 \text{ cm}$$

$$E = 2.10 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$M_{pert} = 0.01 PL$$

Figura 3.4 - Exemplo de uma coluna axialmente carregada

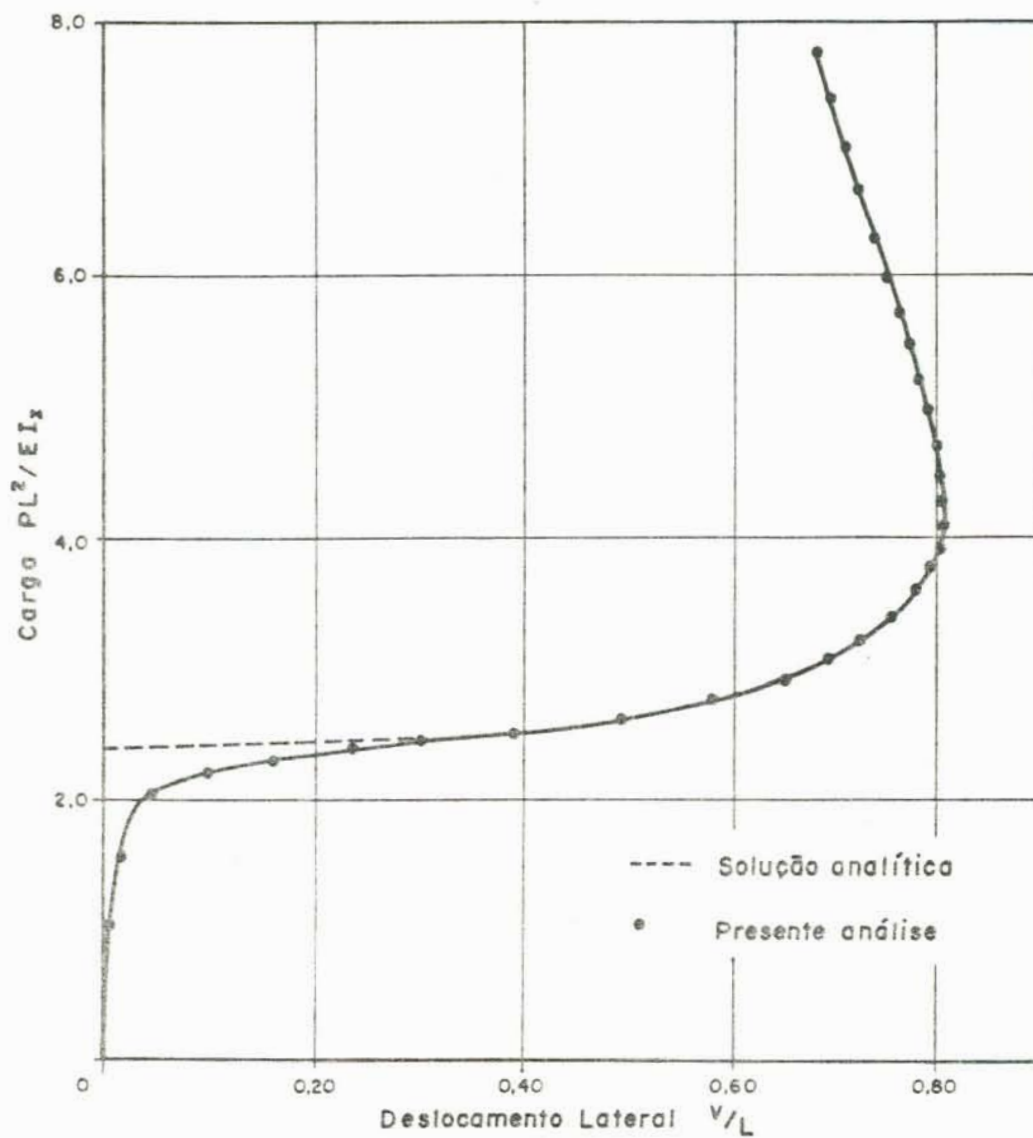


Figura 3.5 - Curva carga/deslocamento horizontal no topo da coluna do exemplo 3.4.2.

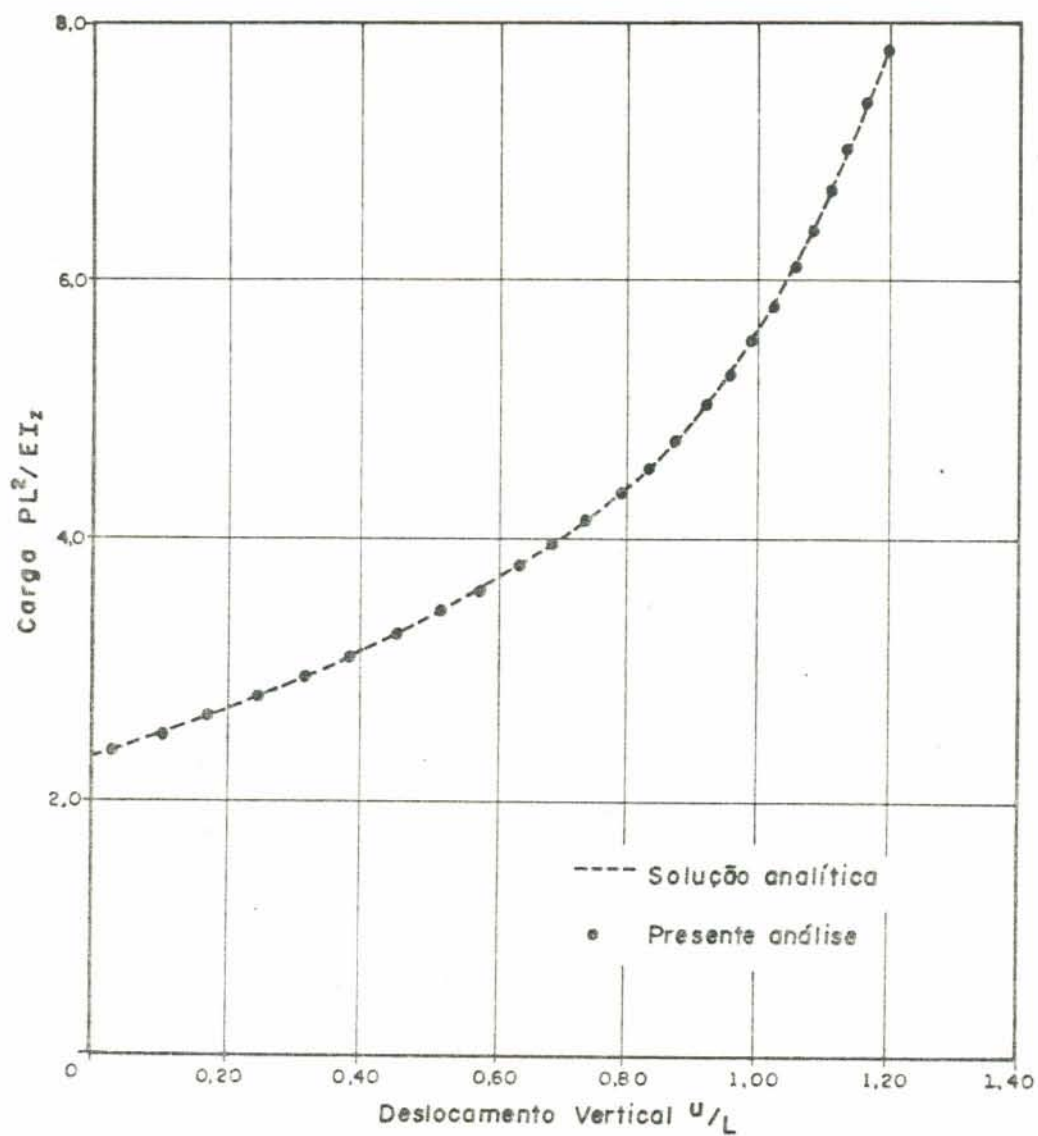


Figura 3.6 - Curva carga/deslocamento vertical no topo da coluna do exemplo 3.4.2.

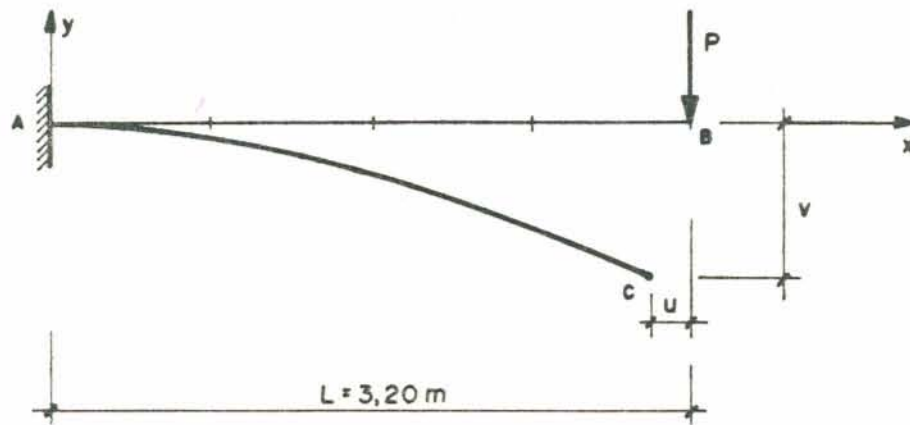
formulações apresentadas em [6,44,48].

Para a realização da análise aqui executada, a estrutura foi discretizada em dezoito elementos, os quais coincidem com as barras que constituem a mesma. Adotou-se no critério de convergência uma tolerância $\rho_{tol} = 10^{-4}$ e como carga de referência um valor correspondente a 10% da carga necessária para provocar o início de escoamento da estrutura, calculada através de uma análise linear. Foram executados vinte e oito passos incrementais com duas iterações cada um.

A figura 3.11 apresenta um gráfico que mostra o relacionamento entre os deslocamentos verticais no ponto central superior da estrutura e os valores do parâmetro de carga λ , obtidos durante a análise. Visando-se unicamente a comparação gráfica dos resultados, definiu-se como parâmetro de carga, na figura 3.11, o mesmo valor adotado em [6], ou seja, $\lambda = P / 123.8 \text{ MN}$.

3.4.5 - Caso de uma grelha

Ainda como um exemplo de estrutura tridimensional, apresenta-se os resultados encontrados na análise de uma grelha, cujas características estão indicadas na figura 3.12. A estrutura foi discretizada em dez elementos e adotou-se uma tolerância $\rho_{tol} = 0.0001$. A análise foi executada com um número de iterações crescente e variando de quatro a oito. Adotou-se como cargas de referência aquelas correspondentes a 10% do carregamento necessário para iniciar o escoamento da estrutura. As figuras 3.13 e 3.14 mostram os gráficos encontrados na análise, relacionando o valor de P com os deslocamentos, nas direções globais Y e X, respectivamente, relativos ao ponto B indicado na figura 3.12.



SEÇÃO TRANSVERSAL



Dado:

$$E = 2,10 \times 10^5 \text{ MPa}$$

Figura 3.7 - Exemplo de uma viga em balanço

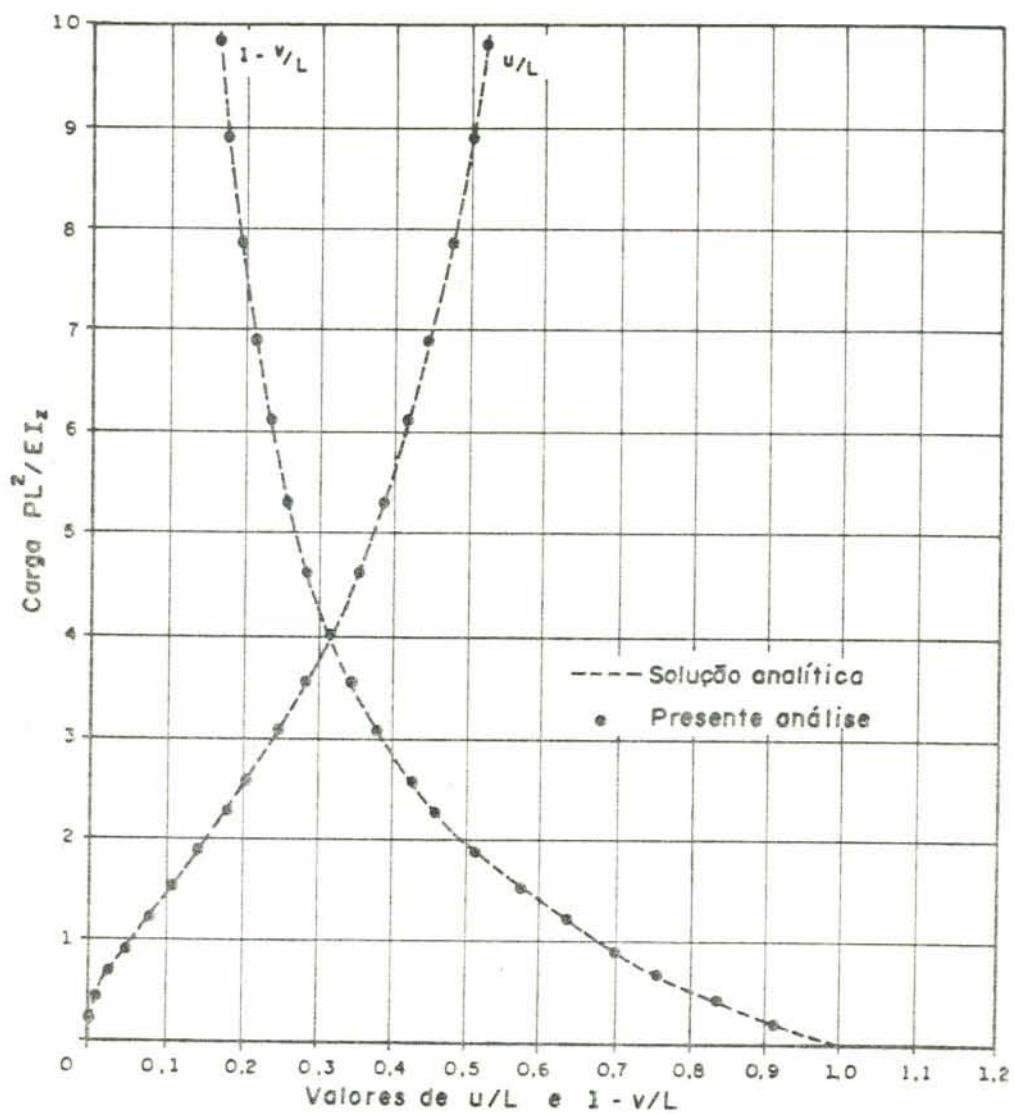


Figura 3.8 - Curvas carga/deslocamentos horizontal e vertical no extremo livre da viga do exemplo 3.4.3.

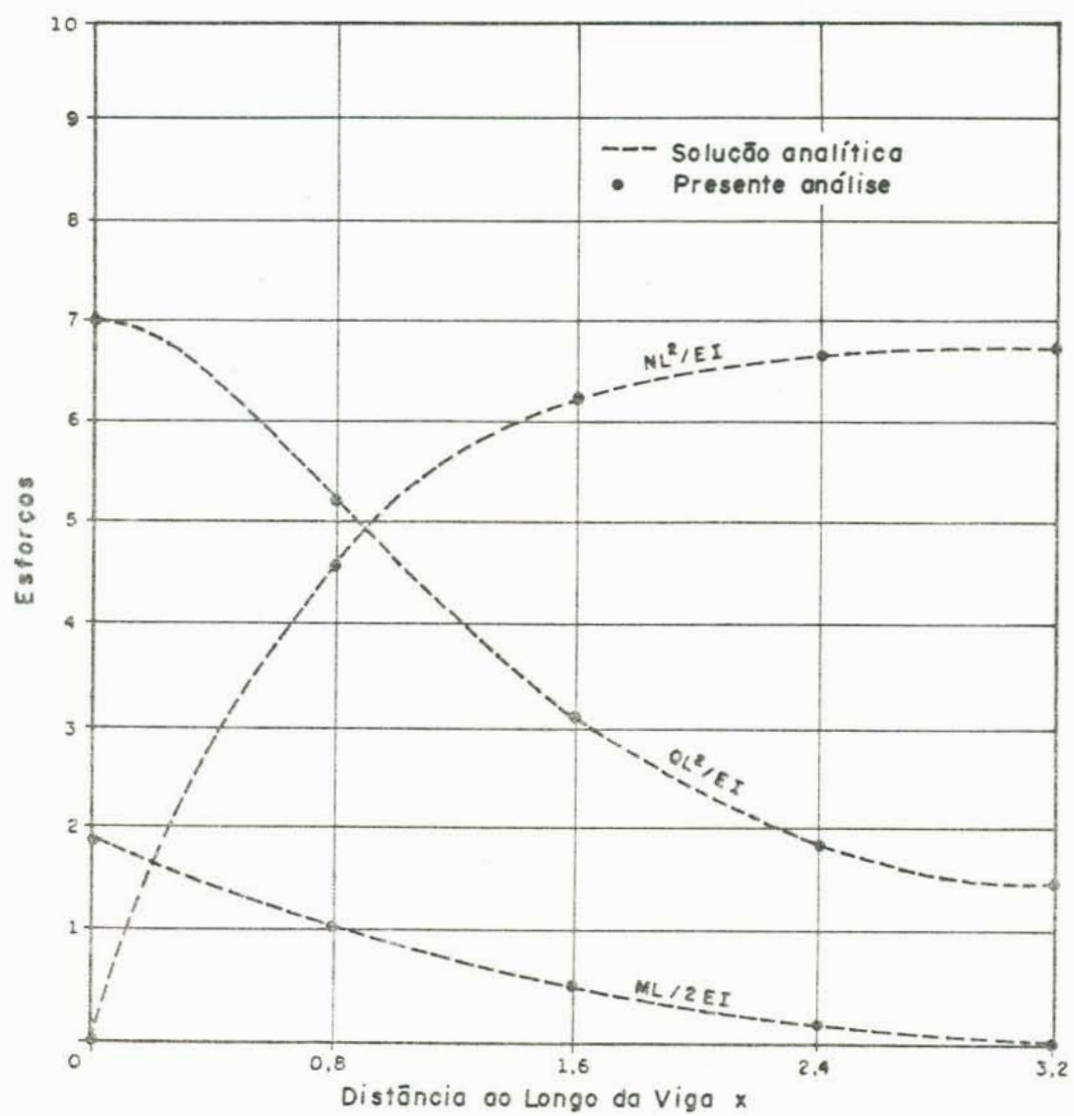


Figura 3.9 - Curvas dos esforços internos ao longo da viga do exemplo 3.4.3

3.4.3 - Caso de uma viga em balanço sujeita a uma carga concentrada no extremo livre

Trata-se este exemplo de um problema clássico do estudo da linha elástica cuja solução foi inicialmente encontrada por Euler em 1744. O fato de se conhecer a solução analítica deste exemplo e, além disto, pelas características de seu comportamento não linear, leva o mesmo a ser muito utilizado para teste de formulações destinadas a análise não linear. Por exemplo, a referência [49] utiliza o presente caso como um " benchmark test " para mostrar a eficiência de um programa de elementos finitos na determinação de deslocamentos e de esforços internos.

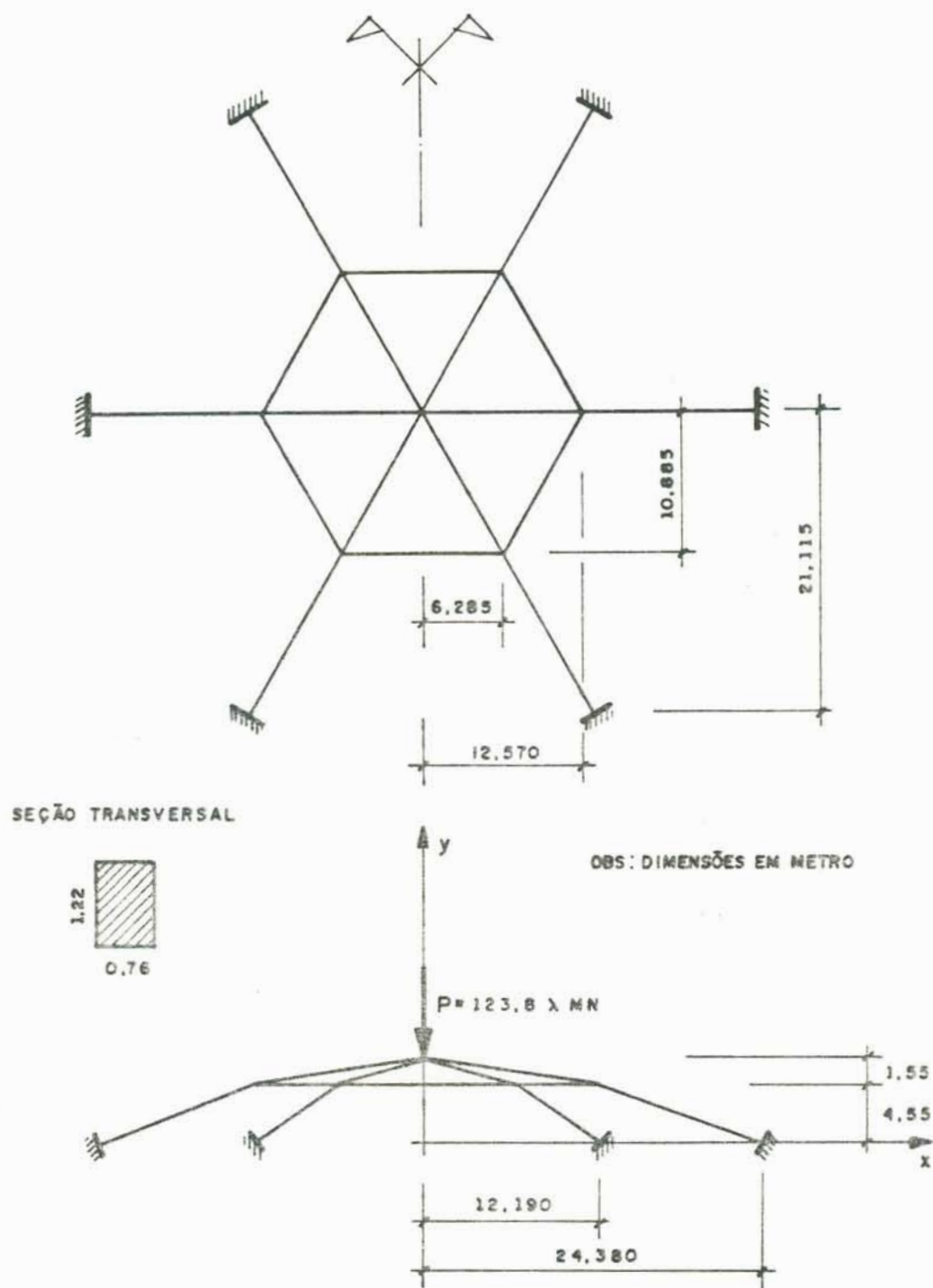
Os dados numéricos adotados na análise aqui efetuada estão ilustrados na figura 3.7.

A viga foi dividida em quatro elementos e se adotou como carga de referência o valor de P correspondente a 5% da carga de escoamento. Foram realizados cento e trinta e oito passos incrementais, com um número de iterações variando de três a seis. A tolerância admitida no critério de convergência foi $\rho_{tol} = 10^{-4}$. Os resultados encontrados para os deslocamentos horizontal u e vertical v , na extremidade livre da viga, estão confrontados com os provenientes da solução analítica na figura 3.8. Os esforços internos (força normal N , força cortante Q e momento fletor M) atuantes ao longo da viga, e relativos ao valor $PL^2/EI_z = 7$, estão representados juntamente com os correspondentes resultados analíticos pelos gráficos da figura 3.9.

Como se constata, através dos gráficos mencionados, os resultados encontrados pela presente formulação apresentam uma muito boa precisão, tanto para os deslocamentos como para os esforços internos.

3.4.4 - Caso de uma estrutura reticular espacial

Trata-se este caso de uma estrutura tridimensional cuja geometria está definida na figura 3.10. A estrutura foi inicialmente analisada em [12] e posteriormente através das



Dados:

$$E = 20690 \text{ Mpa}$$

$$G = 8830 \text{ MPa}$$

Figura 3.10 - Exemplo de uma estrutura reticular espacial

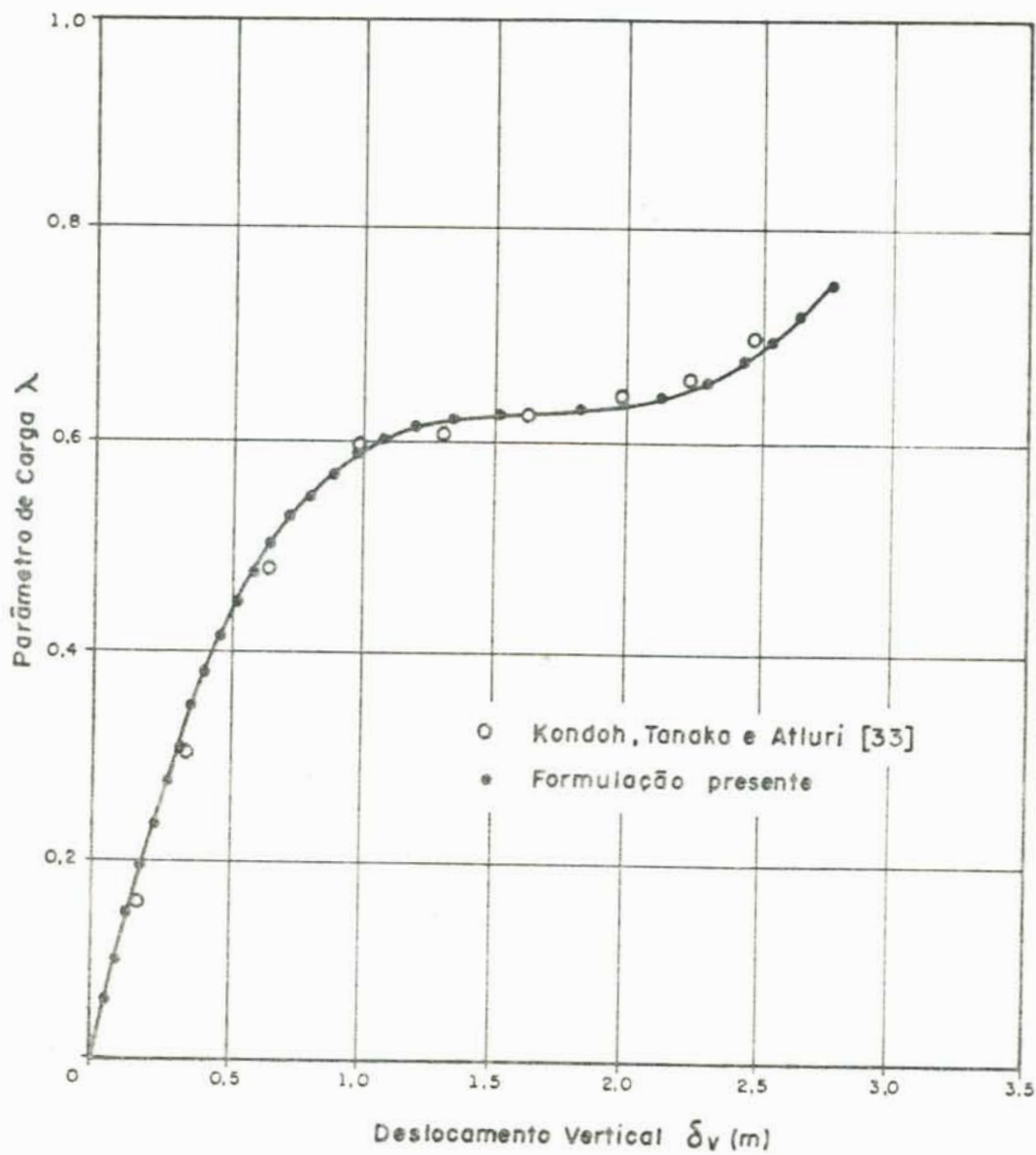
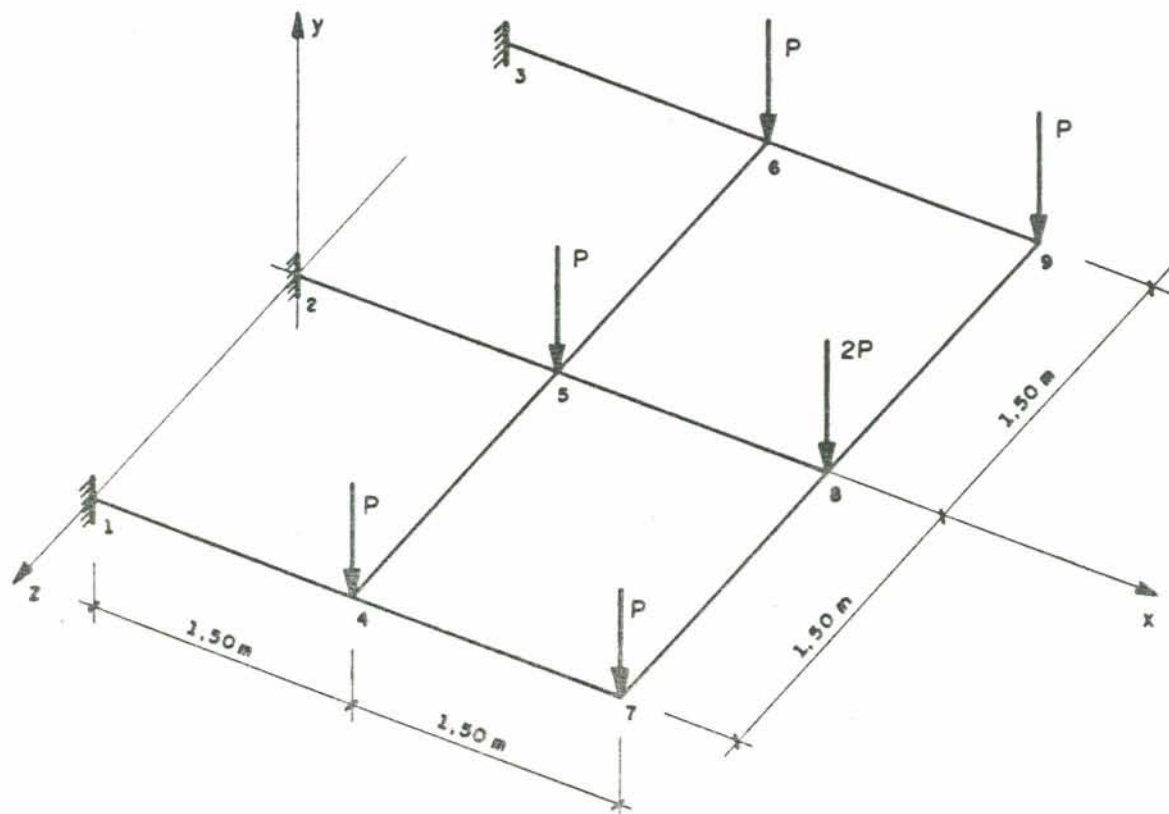


Figura 3.11 - Curva parâmetro de carga/deslocamento vertical do topo da estrutura do exemplo 3.4.4.



SEÇÃO TRANSVERSAL



Dados:

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$G = 80000 \text{ MPa}$$

Figura 3.12 - Exemplo de uma grelha

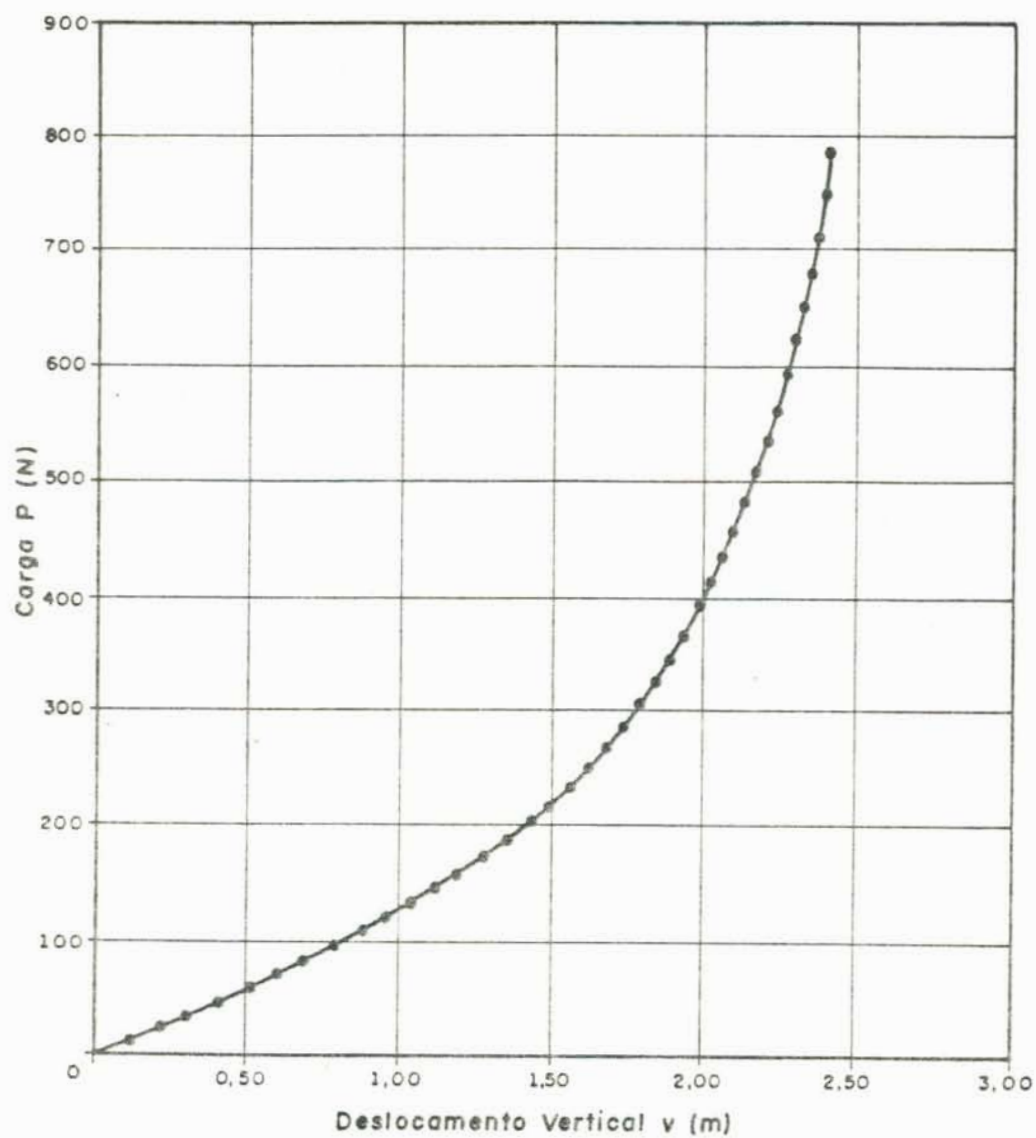


Figura 3.13 - Curva carga/deslocamento vertical do ponto B do exemplo 3.4.5

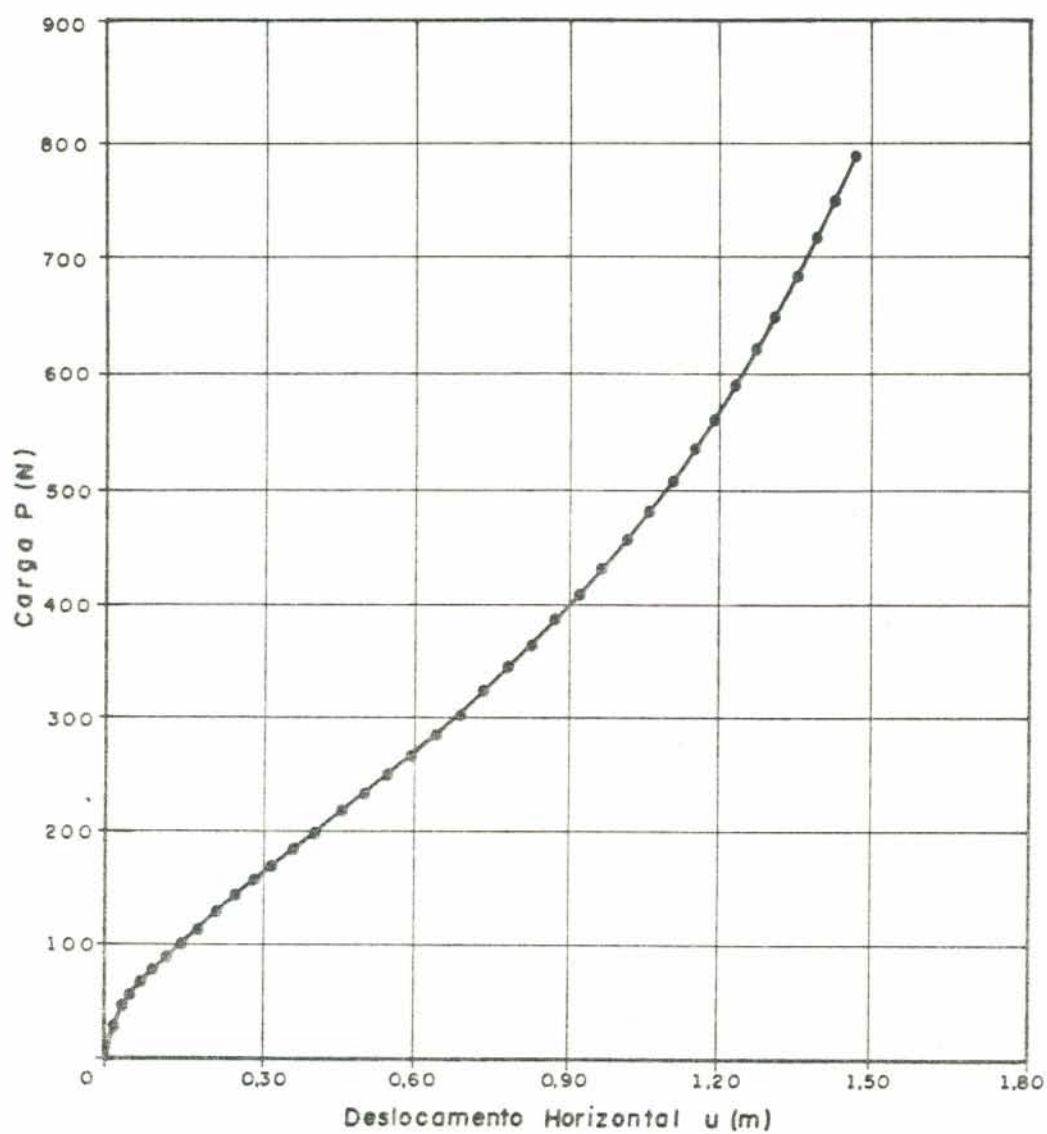


Figura 3.14 - Curva carga/deslocamento horizontal do ponto B do exemplo 3.4.5

4. ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA

4.1 - Considerações Iniciais

Apresenta-se neste capítulo uma formulação incremental-iterativa destinada à análise não linear física e geométrica de pórticos espaciais. Conforme mencionado anteriormente no capítulo 1, admite-se que o material que constitui os pórticos é elasto-plástico perfeito, que as seções transversais das barras são duplamente simétricas e que as cargas externas estão aplicadas somente em extremidades de elementos em que os pórticos considerados são discretizados. Supõe-se também que as cargas externas variem proporcionalmente. O comportamento plástico de um elemento é simulado através da introdução de rótula plástica em uma ou nas duas extremidades do mesmo, sempre que os esforços internos atuantes em tais pontos satisfaçam ao critério de plastificação adotado na análise.

Admite-se ainda que as seções transversais continuam apresentando comportamento totalmente elástico até que ocorra sua plastificação total. Isto significa que na formulação não se considera o estágio elasto-plástico das seções, existente entre o início de escoamento e a plastificação total das mesmas.

Considera-se também a possibilidade de ocorrer, durante a análise, a desativação de rótulas plásticas já existentes, isto é, de acontecer que seções transversais anteriormente plastificadas voltem a ter comportamento elástico. Este fenômeno é detectado, conforme exposto no item 4.3, através da verificação do sinal das constantes de plastificação das seções, λ , as quais devem ser positivas sempre que ocorrer incremento nas deformações plásticas das referidas seções.

Em análise elasto-plástica numérica incremental, quando se processa um incremento nas deformações plásticas de uma seção, os correspondentes incrementos de esforços internos sendo finitos levam os valores dos esforços internos finais a não obedecerem, a rigor, ao critério de plastificação adotado. Geometricamente, isto significa que o ponto representativo dos mencionados esforços não se localiza sobre a superfície de plastificação, conforme se ilustra através do ponto B da figura 4.1. Isto representa um erro cuja grandeza depende dos valores dos incrementos de esforços.

Dentre as várias formas que se dispõe para redução do erro mencionado acima [38,45], optou-se na presente formulação por um procedimento do tipo previsor-corretor apresentado no item 4.2, o qual é empregado sistematicamente, na primeira iteração de cada passo incremental, para todas as seções em que acontecem incrementos nas deformações plásticas. A escolha deste procedimento, frente a outros inclusive do tipo iterativo, é justificada pela intenção de se priorizar a redução do tempo computacional e também pelo fato de que normalmente, com a formulação aqui apresentada, resultam incrementos de esforços relativamente pequenos, principalmente para as iterações posteriores à primeira de cada passo incremental.

Na análise elasto-plástica aqui proposta, os procedimentos descritos no capítulo 3 deste trabalho são inteiramente aplicados em conjunto com outras operações complementares, tais como: verificação de geração ou de desativação de rótulas plásticas, determinação de vetor gradiente da superfície de plastificação, montagem de matriz de rigidez elasto-plástica de elementos com extremidades plastificadas e estabelecimento de critério para definição de cargas de colapso convencional.

4.2 - Correção do Afastamento entre a Superfície de Plastificação e os Pontos Correspondentes aos Esforços em uma Rótula Plástica

A figura 4.1 mostra a representação geométrica de um

critério de plastificação de uma seção transversal. Para melhores esclarecimentos dos procedimentos aqui descritos, considera-se na citada figura a influência de apenas dois esforços (P_1 e P_2).

Suponha-se que inicialmente os esforços atuantes sobre a seção considerada sejam dados por \vec{P}_A e correspondam ao ponto A da figura 4.1. Com base no que se dispôs no item 2.2, pode-se afirmar que se ocorrer um incremento infinitesimal nas deformações plásticas da seção, o vetor dos correspondentes incrementos de esforços é perpendicular ao vetor gradiente \vec{B}_A da superfície de plastificação no ponto A.

Porém, no caso da análise numérica incremental os incrementos de esforços são finitos e, assim, admitindo-se ainda a normalidade entre o vetor de tais incrementos e o mencionado vetor gradiente, observa-se que o novo ponto correspondente aos esforços já incrementados (ponto B da figura 4.1) não se encontra sobre a superfície de plastificação.

Na realidade, tudo se passa como se a superfície de plastificação tivesse sofrido uma evolução no espaço dos esforços, de forma semelhante a um processo de endurecimento. Como o material é elasto-plástico perfeito, o afastamento do ponto em relação a aquela superfície sempre representa um erro que, conforme mencionado anteriormente, pode ser reduzido. Na presente formulação indica-se para redução do referido erro um procedimento previsor-corretor, o qual é executado através das duas etapas descritas a seguir :

- a) Previsão - O vetor de incrementos finitos de esforços $\Delta \vec{P}$ é calculado com base na rigidez da seção estabelecida em termos do vetor gradiente \vec{B}_A , chegando-se desta forma ao ponto B, conforme ilustrado na figura 4.1.
- b) Correção - Com os valores dos esforços definidos pelo ponto B, determina-se o gradiente da superfície de plastificação, \vec{B}_B , e em seguida, obtém-se um vetor gradiente médio através da seguinte expressão:

$$\underline{B}_M = (\underline{B}_A + \underline{B}_B) / 2 \quad (4.1)$$

Agora, com a rigidez da seção estabelecida em termos deste vetor gradiente médio, calcula-se um novo vetor de incrementos de esforços $\Delta \underline{P}$, o qual define um outro ponto B, que se localiza mais próximo da superfície de plastificação do que o ponto B inicialmente encontrado.

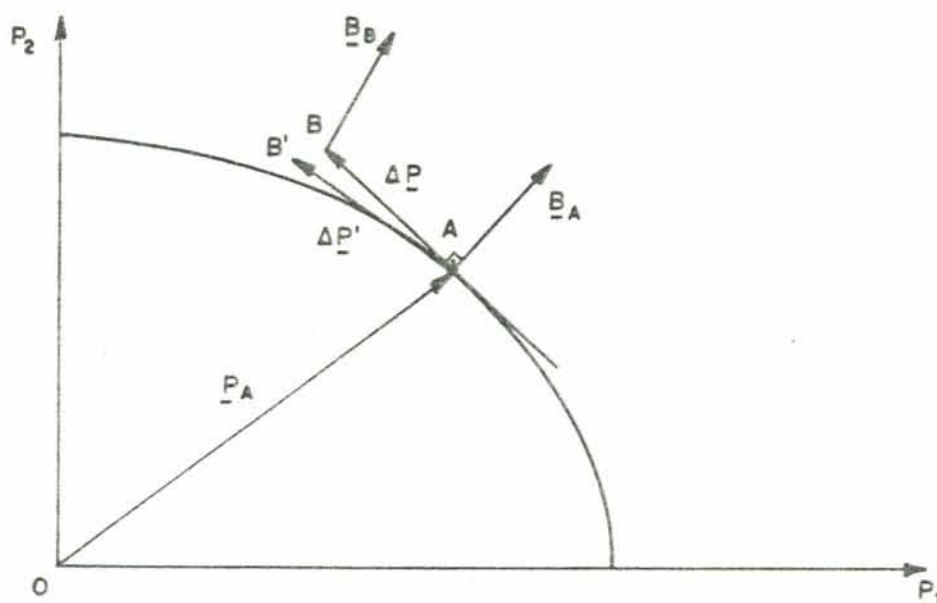


Figura 4.1 - Procedimento de redução do erro devido ao afastamento do ponto que define os esforços em uma rótula plástica em relação à superfície de plastificação.

Sugere-se que o procedimento acima seja aplicado somente na primeira iteração de cada passo incremental, uma vez que os incrementos de esforços nesta iteração são em geral bem maiores do que aqueles verificados durante as demais iterações.

Vale salientar, no entanto, que repetições sucessivas das duas etapas acima descritas podem constituir um processo iterativo, conforme comentado em [45], para redução do erro em questão. Porém, considerando-se principalmente aspectos relacionados com esforço computacional, descartou-se no programa de computador elaborado com a presente formulação o uso de tal procedimento iterativo.

4.3 - Procedimentos Numéricos da Análise

Fundamentando-se na idéia de que uma análise elasto-plástica pode ser executada através de sucessivos passos lineares, os procedimentos apresentados no capítulo 3 deste trabalho podem ser organizados, juntamente com outros procedimentos adicionais, para constituir uma formulação mais geral, que leve em conta a não linearidade física e geométrica.

Apresenta-se a seguir, em forma sequencial, as operações básicas necessárias para elaboração da análise não linear física e geométrica das estruturas aqui consideradas.

1ª etapa : Estabelecimento das cargas de referência e do valor do trabalho de controle.

As cargas de referência e a quantidade do trabalho para controle da análise podem ser estabelecidos através das mesmas recomendações expressas na primeira etapa do item 3.2 anteriormente apresentado.

2ª etapa : Cálculo do valor de λ_1

A determinação do fator de carga relativo à primeira iteração de cada passo incremental deve ser feita de acordo

com as mesmas disposições contidas na segunda etapa do item 3.2.

3ª etapa : Verificação da estrutura quanto ao colapso

Quando no final do passo incremental anterior ao presente se detecta a formação de uma nova rótula plástica, deve-se verificar se a estrutura considerada atingiu o estágio admitido como de colapso convencional.

Considera-se na presente formulação como critério de colapso convencional uma condição que envolve as normas euclidianas dos vetores de deslocamentos globais produzidos pelas cargas de referência sobre a estrutura nos estágios inicial e atual.

Convenciona-se, portanto, que ocorre o colapso da estrutura quando os deslocamentos produzidos pelas cargas de referência cumprem a seguinte condição:

$$\frac{\|\Delta\bar{D}_{\sim 1}^{(l)}\|}{\|\Delta\bar{D}_{\sim 1}^{(1)}\|} \geq \delta \quad (4.2)$$

onde

$\Delta\bar{D}_{\sim 1}^{(l)}$, $\Delta\bar{D}_{\sim 1}^{(1)}$ - vetores dos deslocamentos, referidos aos eixos globais, e calculados através da equação (3.4) usando-se, respectivamente, a rigidez da estrutura em seu estágio atual e aquela correspondente à configuração inicial indeformada.

δ - valor adotado de acordo com as exigências e os fins da análise.

Quando a condição (4.2) é atendida a análise da estrutura é terminada e as cargas externas encontradas no final do passo incremental anterior são admitidas como as cargas de colapso.

4ª etapa : Obtenção dos incrementos de esforços

Com o valor de λ_1 obtido, determina-se através da expressão (3.16) os incrementos de deslocamentos e, a partir destes, calcula-se os incrementos correspondentes de esforços nos diversos elementos da estrutura, usando-se nesta operação as matrizes de rotação dos elementos encontradas no final da iteração anterior.

5ª etapa : Cálculo do menor fator de carga necessário para plastificar um nó da estrutura

Com os incrementos de esforços obtidos na etapa anterior são avaliados os esforços finais, através de um processo de acumulação, e em seguida, procede-se o cálculo dos parâmetros r_e (ver figura 2.11) necessários para plastificar as extremidades de todos os elementos. Daí, entre todos os valores de r_e encontrados, seleciona-se o menor que é designado por $(r_e)_{\min}$.

6ª etapa : Modificação do valor de λ_1

Quando o valor de $(r_e)_{\min}$ é menor do que a unidade, o fator de carga λ_1 deve ser alterado de acordo com a seguinte expressão:

$$\lambda'_1 = (r_e)_{\min} \lambda_1 \quad (4.3)$$

Caso a condição citada acima não seja cumprida, ou seja, se $(r_e)_{\min} \geq 1$, esta etapa não deve ser executada.

7ª etapa : Obtenção dos incrementos de deslocamentos e de cargas e atualização de variáveis

Nesta etapa são realizadas todas as operações descritas na terceira etapa do item 3.2, porém, com a observação de que o fator de carga λ_1 deve ser substituído por λ'_1 quando $(r_e)_{\min} < 1$.

8ª etapa : Cálculo dos esforços e das forças desequilibradas

Com a definição da nova configuração da estrutura, obtida após o processo de atualização das coordenadas das extremidades dos elementos e das matrizes de orientação das seções extremas β , procede-se a determinação das ações nodais atuantes nos extremos dos vários elementos da estrutura.

Em cada iteração, pode-se calcular os incrementos das ações nodais em um elemento multiplicando-se a matriz de rigidez do mesmo pelos incrementos de deslocamentos relativos verificados em suas extremidades.

Os incrementos de deslocamentos relativos nas extremidades de um elemento, em uma dada iteração t , podem ser calculados pela expressão:

$$\Delta \underset{\sim}{U}_E^t = \underset{\sim}{U}_E^t - \underset{\sim}{U}_E^{t-1} \quad (4.4)$$

onde $\underset{\sim}{U}_E^t$ e $\underset{\sim}{U}_E^{t-1}$ são os vetores de deslocamentos do elemento (ver equação 3.21) correspondentes às iterações t e $t-1$, respectivamente.

Assim, na iteração t , os incrementos das ações nodais em um dado elemento são calculados pela expressão:

$$\Delta \underset{\sim}{P}_L^t = \underset{\sim}{K}_E^{t-1} \Delta \underset{\sim}{U}_E^t \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), $\underset{\sim}{K}_E^{t-1}$ representa a matriz de rigidez local (elástica ou elasto-plástica, conforme o caso) do elemento, obtida no final da iteração $t-1$.

Em se tratando da primeira iteração ($t=1$), os incrementos das ações nodais de um elemento com extremo plastificado podem ser corrigidos através do procedimento descrito no item 4.2.

Desta forma, as ações nodais referidas aos eixos locais do elemento, na iteração t , são obtidas através da equação:

$$\underset{\sim}{P}_L^t = \underset{\sim}{P}_L^{t-1} + \Delta \underset{\sim}{P}_L^t \quad (4.6)$$

Levando-se em conta que as direções dos eixos

locais do elemento, em geral, não coincidem com as direções da normal e dos eixos principais de cada seção transversal extrema do mesmo, os esforços internos atuantes nas extremidades do elemento devem ser calculados usando-se a equação (3.22) do capítulo anterior.

Obtidas, para cada elemento, as ações nodais pela equação (4.6) e a matriz de rotação, o cálculo das forças desequilibradas deve ser efetuado utilizando-se os mesmos procedimentos descritos na quinta etapa do item 3.2.

9ª etapa : Teste de convergência

Determinado o vetor das forças desequilibradas, deve-se efetuar, através das operações descritas na sexta etapa do item 3.2, a verificação se o critério de convergência adotado na análise, o qual é expresso pela desigualdade (3.29), é satisfeito. Caso isto não ocorra, passa-se imediatamente para a décima segunda etapa apresentada abaixo.

10ª etapa : Verificação da formação ou desativação de rótulas plásticas

Quando o critério de convergência é satisfeito, deve-se verificar se para a nova configuração atualizada ocorrem duas possibilidades: a formação de alguma nova rótula plástica nas extremidades dos elementos e o retorno elástico de alguma seção anteriormente plastificada.

Recomenda-se que na verificação da ocorrência de uma nova rótula plástica em uma seção seja adotada uma certa margem de tolerância, usando-se então o que pode ser chamado de faixa de plastificação. Isto significa que também são consideradas plastificadas as seções que não cumpram, a rigor, o critério de plastificação $\psi = 0$, mas que satisfaçam a condição $|\psi| \leq \alpha_{tol}$, onde α_{tol} é um número pequeno que depende da precisão desejada na análise. Pode-se adotar, por exemplo, como um valor razoável, $\alpha_{tol} = 0,01$.

A detecção da ocorrência de desativação de uma rótula plástica é feita através da verificação do sinal da constante de plastificação Λ correspondente à seção em

questão. De acordo com o que se expôs no item 2.2, quando acontece um incremento nas deformações plásticas de uma seção, a constante de plastificação associada à mesma é sempre positiva. Assim, a obtenção de um valor negativo para $\dot{\Lambda}$ em uma seção, antes plastificada, indica que a mesma volta a apresentar comportamento elástico.

Para os casos de elementos que possuem uma rótula plástica no extremo 1, e duas rótulas plásticas nos extremos 1 e 2, a verificação de desativação acima mencionada pode ser efetuada utilizando-se as expressões (2.66) e (2.76), respectivamente, fazendo-se os vetores \dot{U}_1 e \dot{U}_2 iguais aos vetores de incrementos totais de deslocamentos que se verificam nas extremidades 1 e 2 do elemento, durante o considerado passo incremental. Caso o elemento apresente uma rótula plástica no extremo 2, a verificação acima deve ser efetuada através da expressão da constante de plastificação $\dot{\Lambda}_2$, deduzida de forma semelhante a utilizada para se chegar a (2.66).

Nesta etapa é necessário que se recorra a algum meio que permita a identificação de como se comportam as extremidades dos diversos elementos que constituem a estrutura para que, desta forma, seja possível um posterior estabelecimento preciso das matrizes de rigidez dos mesmos. No programa computacional desenvolvido, a identificação do comportamento das seções transversais das extremidades de um elemento genérico i_e é efetuada através de uma variável designada por $NOPLA(i_e)$ e que assume os seguintes valores:

$NOPLA(i_e) = 0$ (dois extremos elásticos)

$NOPLA(i_e) = 1$ (rótula plástica no extremo 1 e extremo 2 elástico)

$NOPLA(i_e) = 2$ (extremo 1 elástico e rótula plástica no extremo 2)

$NOPLA(i_e) = 3$ (dois extremos plastificados)

No início da análise toma-se $NOPLA(i_e) = 0$ para todos os elementos da estrutura.

11ª etapa : Montagem das matrizes de rigidez dos elementos

Caso tenha sido realizada a décima etapa acima e constatada alguma modificação no comportamento das extremidades de um elemento, procede-se a alteração da matriz de rigidez local do mesmo, observando-se para isto o valor da variável $NOPLA(i)$. Quando esta variável é nula, a matriz de rigidez do elemento, \tilde{K}_E , é dada pela soma das matrizes de rigidez linear e geométrica, apresentadas no final do item 2.3. Em caso contrário, ao elemento corresponde uma matriz de rigidez elasto-plástica \tilde{K}_{EP} , a qual é calculada de acordo com o disposto no item 2.3.2.

Com base na configuração atualizada da estrutura deve-se determinar as matrizes de rigidez, relativa às coordenadas globais, de todos os elementos em que a estrutura foi discretizada. Esta operação é efetuada através da equação (3.28), devendo-se, no entanto, substituir a matriz de rigidez elástica, que figura na mesma, pela elasto-plástica quando o elemento em consideração tiver alguma extremidade plastificada.

Dispondo-se convenientemente as contribuições dadas pelos termos das matrizes de rigidez dos elementos, referidas às coordenadas globais, monta-se então a matriz de rigidez tangente da estrutura, a qual é usada na iteração subsequente.

Se a presente etapa é executada depois de verificado o critério de convergência acima mencionado, retorna-se à segunda etapa, iniciando-se novo passo incremental.

12ª etapa : Cálculo do fator de carga λ_t

Esta etapa corresponde ao início de mais uma iteração que deve ser realizada sempre que o critério de convergência adotado não tenha sido satisfeito.

Com a matriz de rigidez da estrutura já atualizada e com o vetor das forças desequilibradas obtido na oitava etapa, calcula-se os deslocamentos $\Delta \bar{D}_t$ e $\Delta \bar{D}_t^*$ usando-se as equações (3.4) e (3.5) e, em seguida, determina-se o valor do fator de carga λ_t através da equação (3.9).

13ª etapa : Determinação dos incrementos de deslocamentos e de cargas e atualização de variáveis

Os procedimentos para execução desta etapa da análise são os mesmos indicados na nona etapa do item 3.2.

Encerrados estes últimos procedimentos retorna-se à oitava etapa acima, calculando-se as novas forças desequilibradas e, em seguida, executando-se todas as operações prescritas nas demais etapas subsequentes.

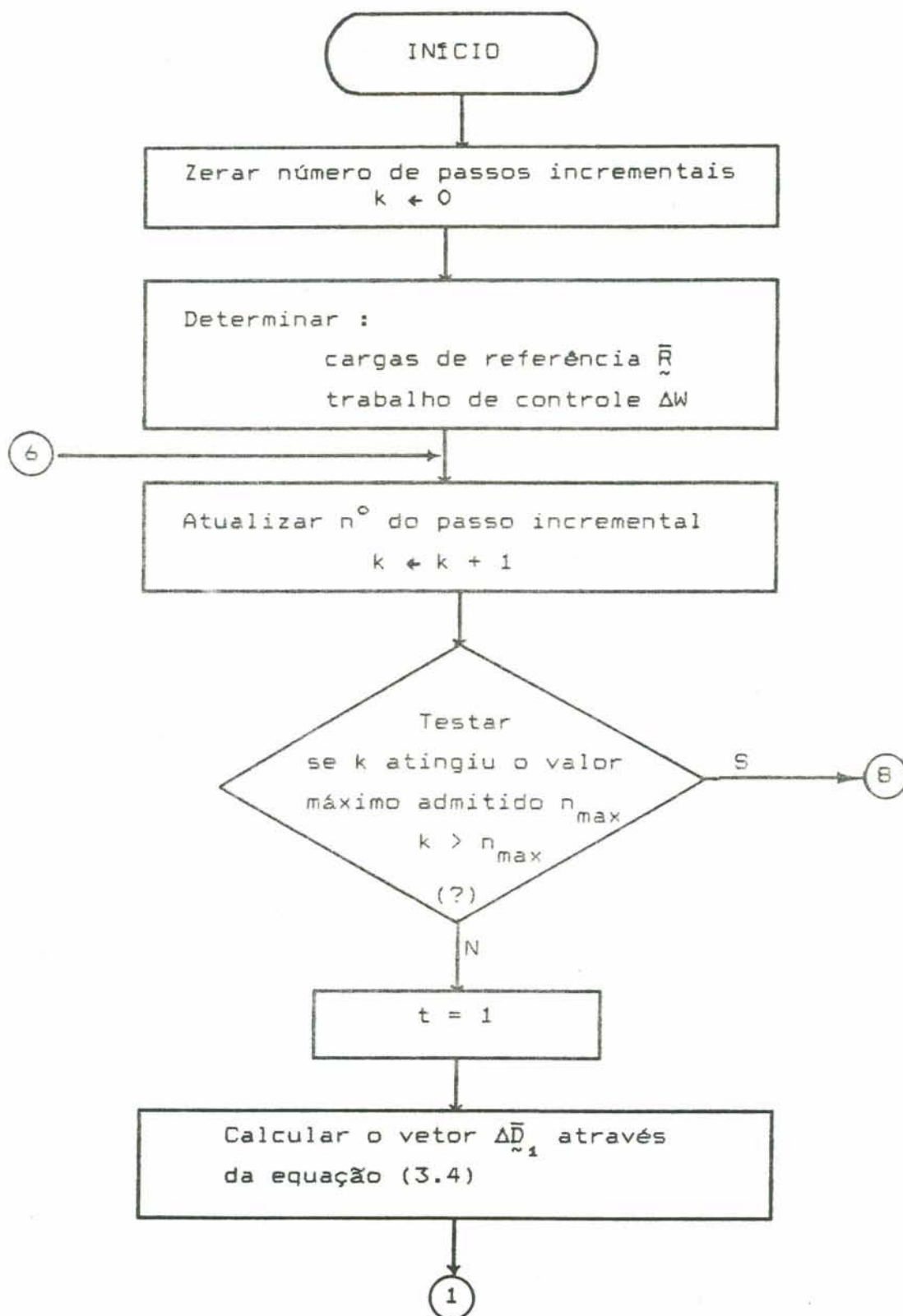
A análise da estrutura é encerrada quando se atinge o número máximo de passos incrementais especificado ou quando o critério de colapso convencional adotado for atendido.

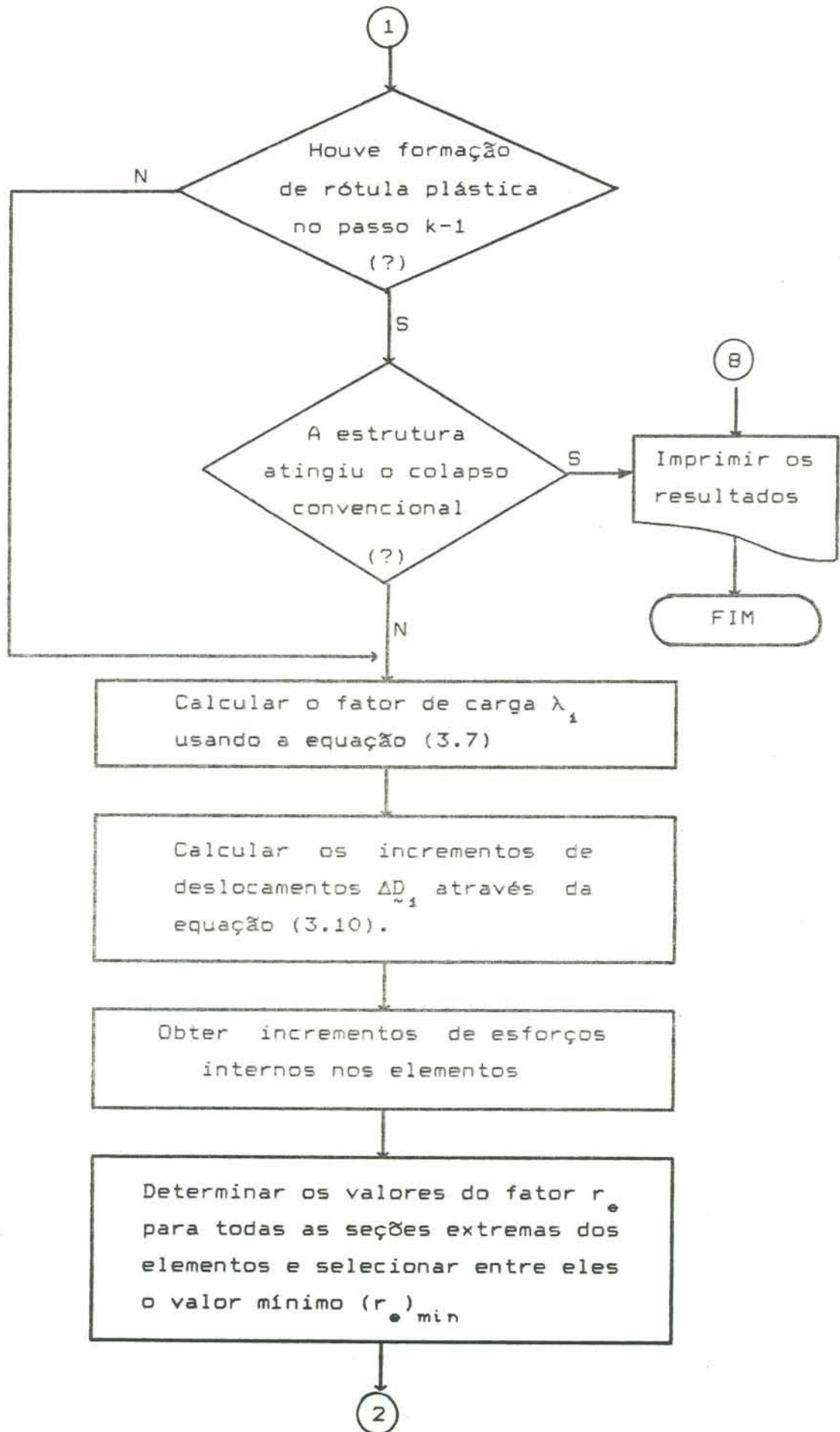
Um detalhe que merece ser abordado refere-se às situações em que o esforço normal atuante num elemento coincide com o valor de N_p . Quando isto acontece, os momentos fletores atuantes no elemento devem ser nulos, para que o ponto representativo dos esforços internos nas várias seções transversais permaneçam sobre a superfície de plastificação. Do ponto de vista numérico e computacional, o tratamento de tal situação apresenta algumas dificuldades que exigem, em geral, a tomada de algumas medidas adicionais, como as mencionadas a seguir.

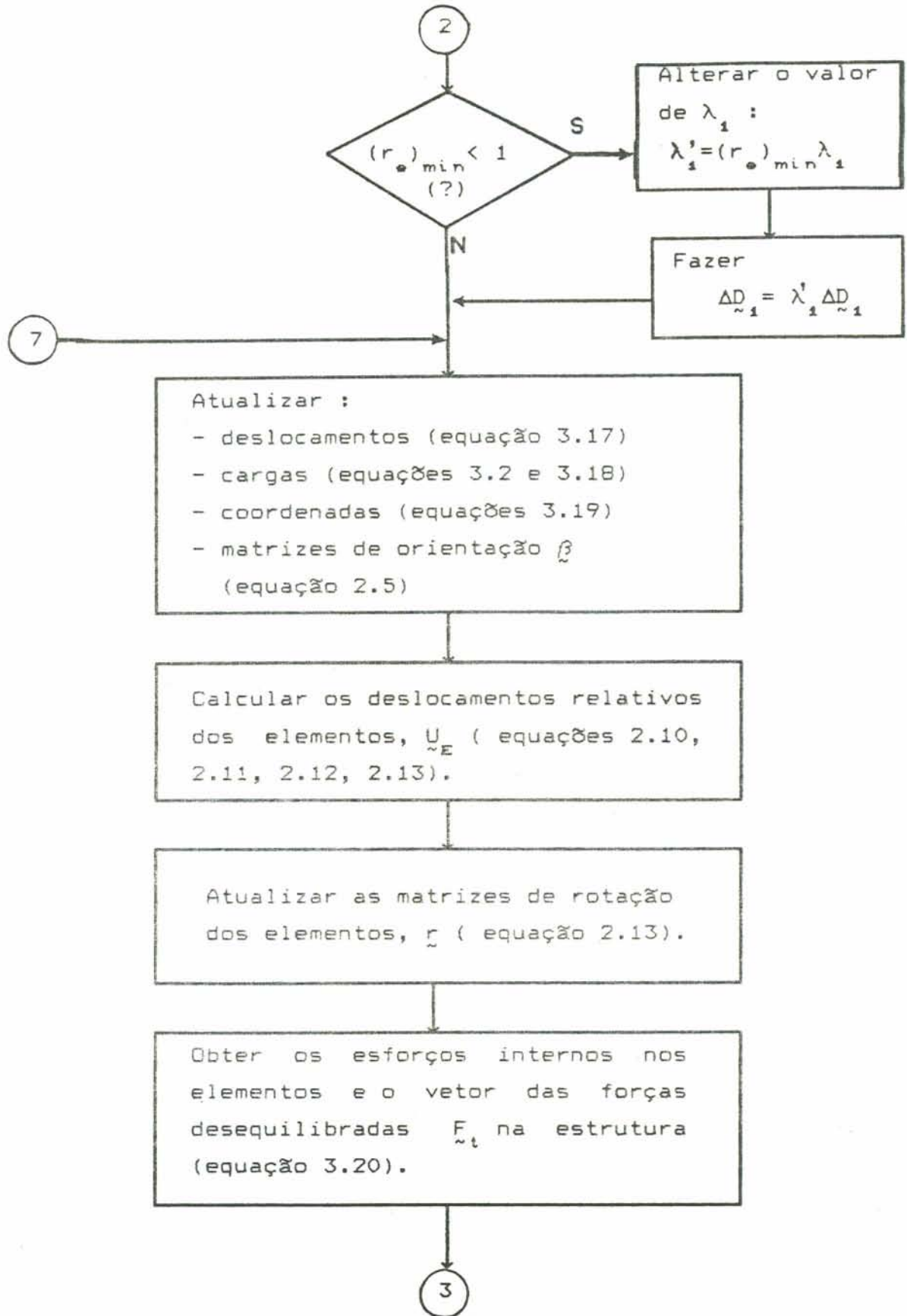
Para as superfícies de plastificação implementadas no programa de computador da presente formulação, ocorre uma indeterminação matemática nas expressões do vetor gradiente no ponto correspondente a momentos fletores nulos e esforço normal igual a N_p . Assim, no referido programa procurou-se evitar que tal ponto seja atingido, adotando-se para a determinação do vetor gradiente valores muito próximos de N_p para o esforço normal e muito pequenos para os momentos fletores, sempre que se detectar uma razoável aproximação daquele ponto. Além do mais, para permitir o prosseguimento da análise sem incrementos significativos nos esforços normais, é recomendável que, para efeito apenas de montagem da matriz elasto-plástica do elemento considerado, seja tomada providência no sentido de reduzir a rigidez axial elástica do mesmo, tal como adotando-se valores próximos de zero para a área das seções transversais.

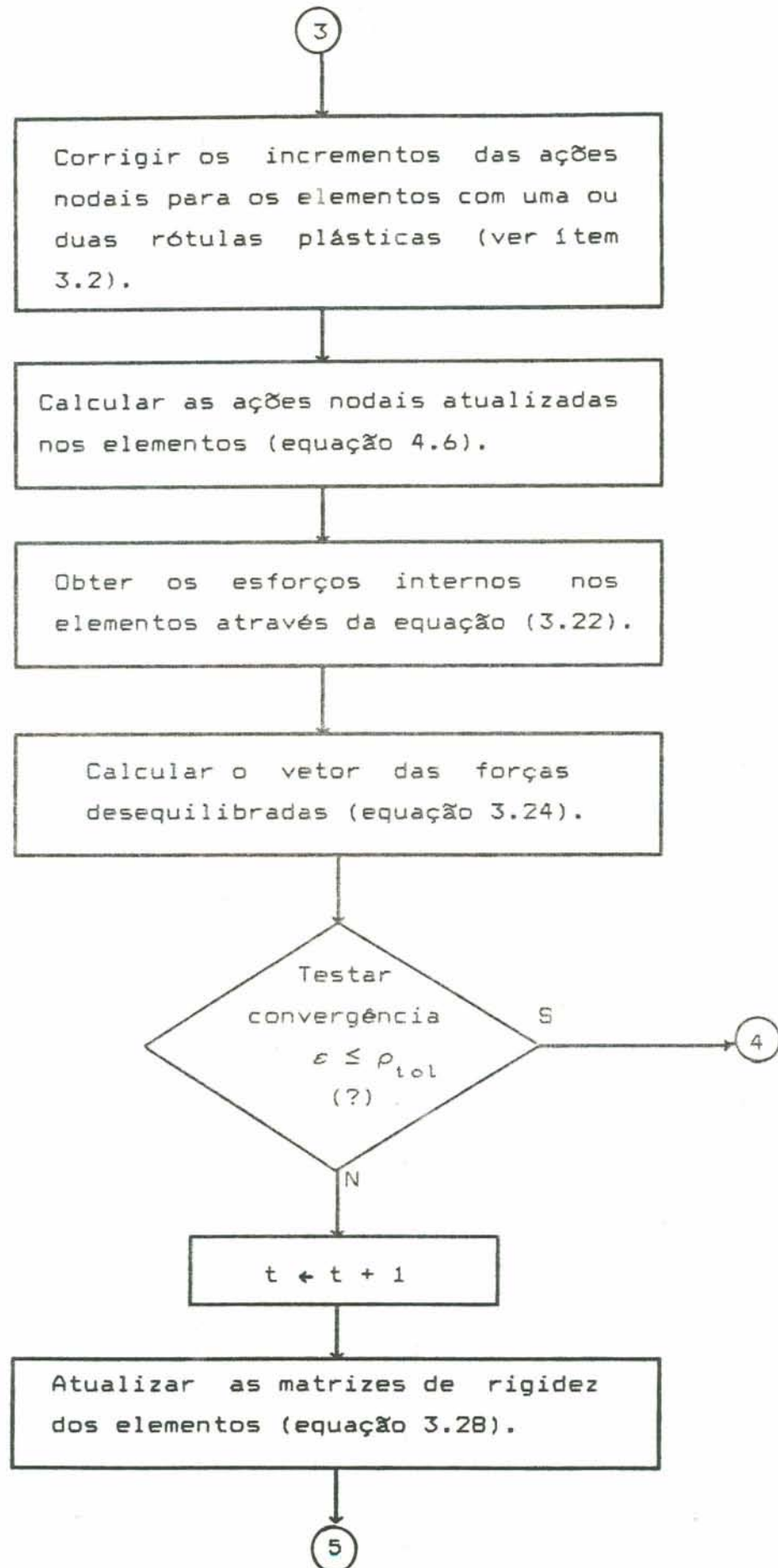
No que segue apresenta-se um fluxograma que proporciona um melhor entendimento do conjunto de operações contidas nas etapas acima indicadas e como as mesmas são reunidas para constituir a formulação considerada.

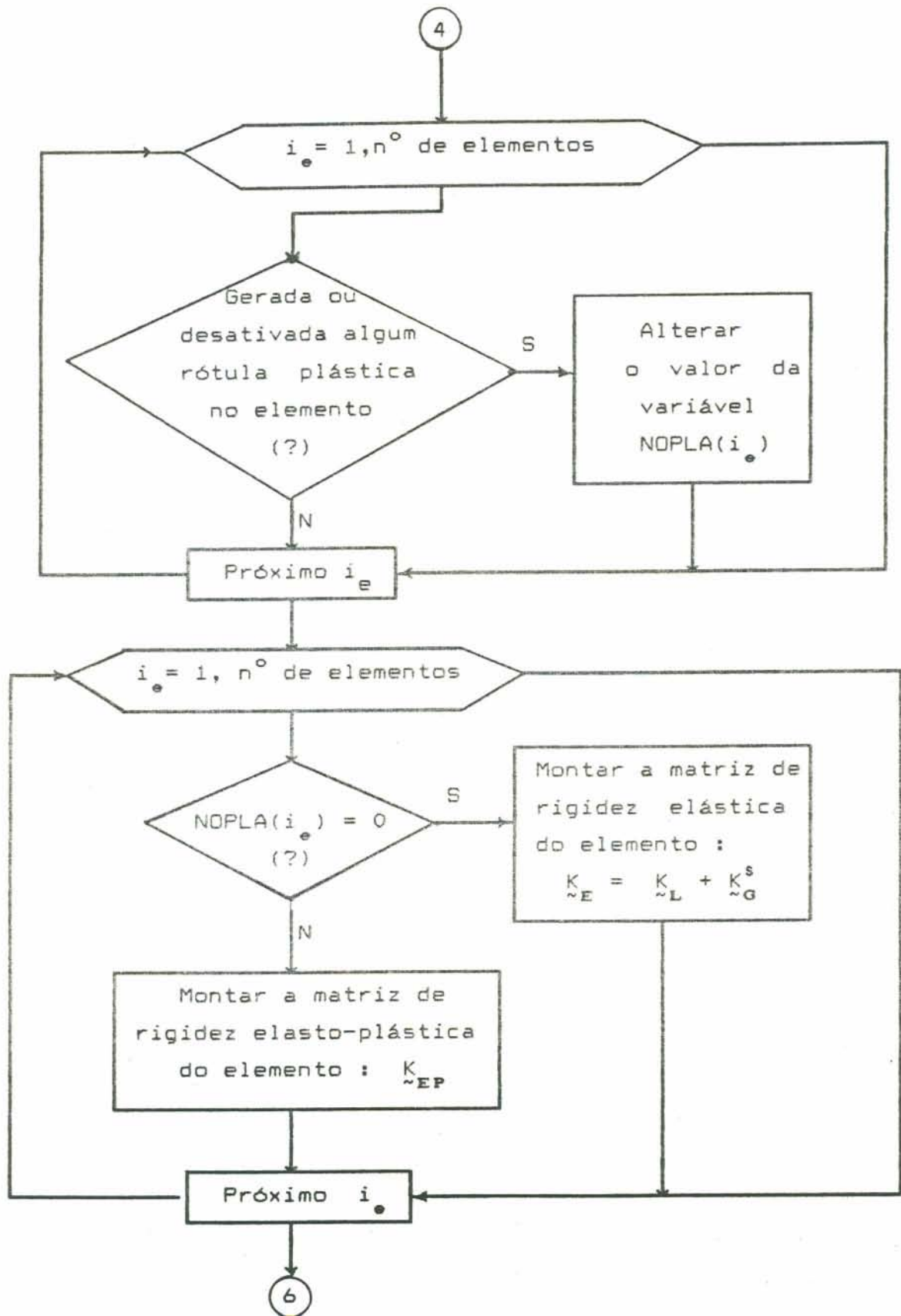
4.4 - Fluxograma Geral

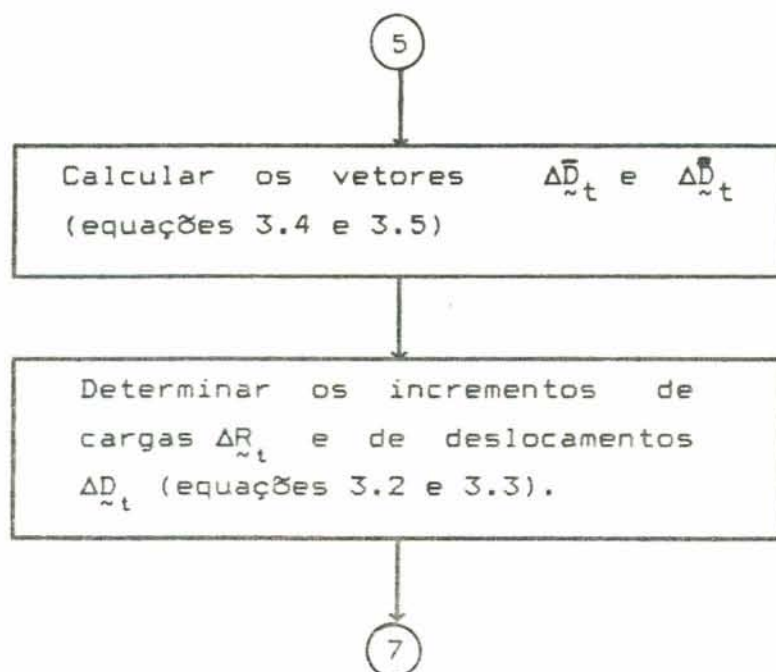












4.5 - Exemplos Numéricos

Apresenta-se neste item vários exemplos numéricos resolvidos através dos procedimentos propostos no presente capítulo.

Vale no entanto observar que apesar de se encontrar, na literatura técnica, um volume relativamente grande de trabalhos versando sobre análise não linear de pórticos, pode-se afirmar que ainda é escassa a quantidade de exemplos de pórticos espaciais elastoplásticos, na presença de grandes deslocamentos, cujos resultados estejam apresentados naqueles referidos trabalhos. É comum se encontrar trabalhos destinados ao estudo de pórticos espaciais apresentando somente exemplos numéricos de pórticos planos.

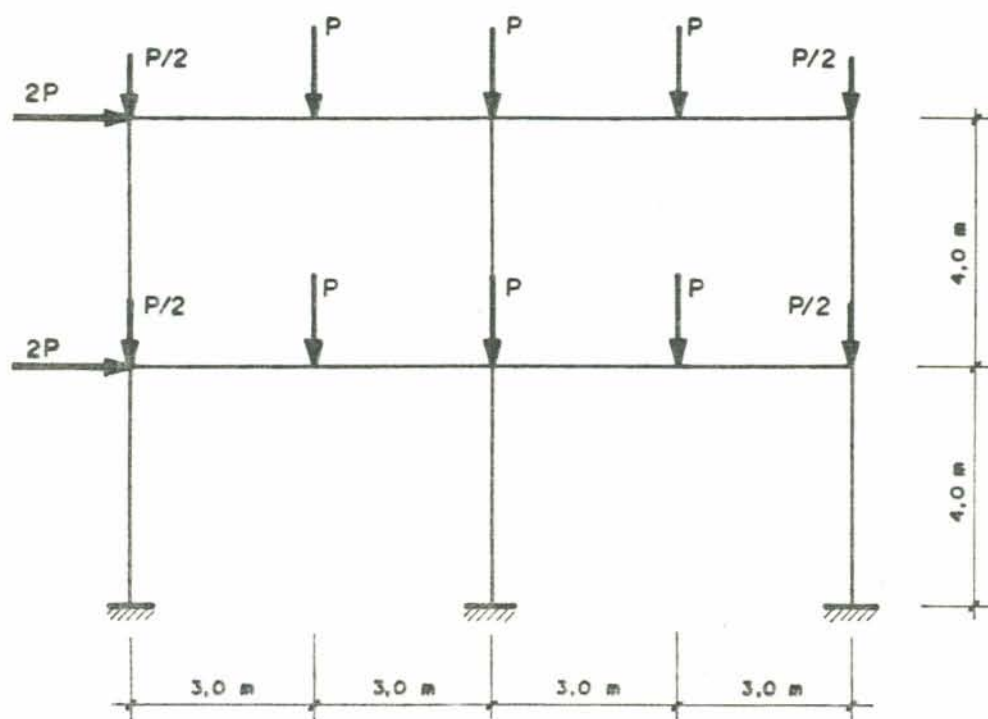
4.5.1 - Caso de um pórtico bidimensional

Trata-se este exemplo de um pórtico plano com dois andares apresentado na referência [5] e ilustrado na figura 4.2. A estrutura foi discretizada em quatorze elementos, onde se tomou dois elementos em cada peça horizontal e um único elemento em cada barra vertical.

A análise foi efetuada em setenta e oito passos incrementais com um número de iterações variando de um a dois. Adotou-se como tolerância no critério de convergência o valor $\rho_{tol} = 10^{-4}$ e como cargas de referência o carregamento correspondente a 5% daquele necessário para principiar o escoamento no ponto mais solicitado da estrutura.

A carga crítica encontrada corresponde a um valor de P igual a 213 N. A partir desta carga ocorreu uma regressão de carregamento acompanhada de incremento de deslocamentos.

A figura 4.3 mostra o gráfico que relaciona o valor de P com o deslocamento horizontal do nó superior esquerdo da estrutura, assim como a sequência de formação das rótulas plásticas geradas durante a análise. Os resultados estão apresentados juntamente com aqueles encontrados através de uma formulação que admite grandes deslocamentos apresentada na referência [5].



Dados:

Colunas

$$A_x = 0,0192 \text{ m}^2$$

$$I_z = 0,000511 \text{ m}^4$$

$$N_p = 4800 \text{ KN}$$

$$M_{pz} = 732 \text{ KNm}$$

Vigas

$$A_x = 0,0118 \text{ m}^2$$

$$I_z = 0,000292 \text{ m}^4$$

$$N_p = 2950 \text{ KN}$$

$$M_{pz} = 420 \text{ KNm}$$

Materiais

$$E = 2,1 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$$

$$\alpha_y = 250000 \text{ KN/m}^2$$

Figura 4.2 - Exemplo de um pórtico bidimensional

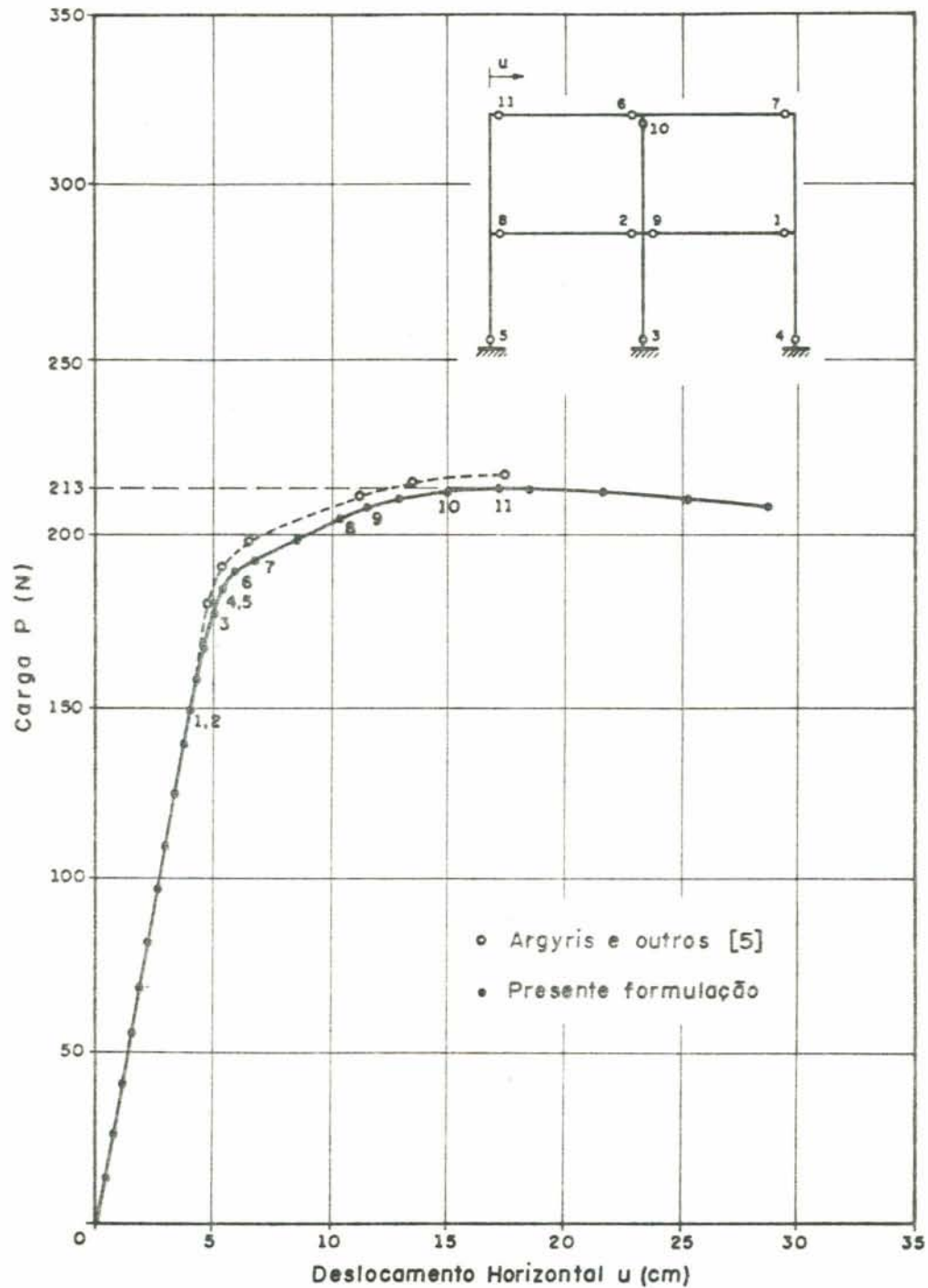


Figura 4.3 - Curva carga/deslocamento horizontal do exemplo 4.5.1

4.5.2 - Caso de uma viga em balanço

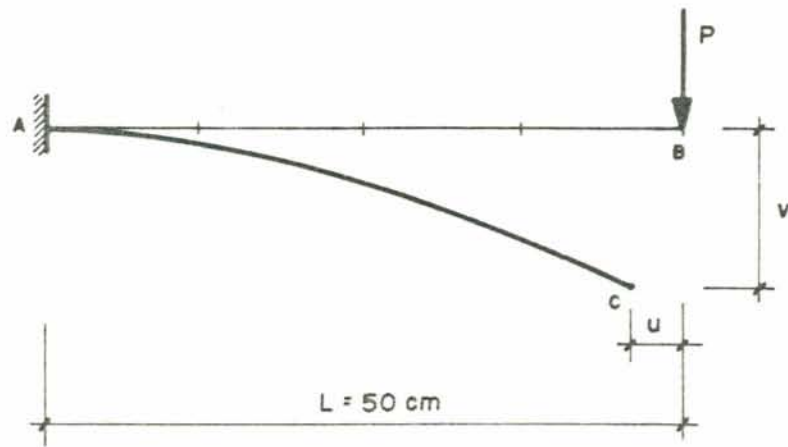
Trata-se este exemplo de uma viga em balanço sujeita a uma carga concentrada vertical atuante em seu extremo livre, conforme representado na figura 4.4.

A viga foi discretizada em quatro elementos e a análise foi realizada em sessenta passos incrementais, com uma quantidade de iterações, em cada passo, aumentando desde três, no início da análise, até sete, no final da mesma. A tolerância admitida no critério de convergência foi $\rho_{tol} = 10^{-4}$ e o valor da carga de referência foi de 5% daquele necessário para provocar o início de escoamento na seção vizinha ao engastamento.

Os gráficos mostrados na figura 4.5 correspondem ao relacionamento entre o valor da carga P e os deslocamentos horizontal e vertical no extremo livre da viga.

4.5.3 - Caso de uma viga biengastada

Analisou-se a viga com extremidades engastadas, suportando uma carga concentrada no meio do vão, representada na figura 4.6. Este exemplo consiste em um excelente teste para a eficiência de uma formulação elastoplástica para estudo de estruturas de barras. A característica especial que o mesmo apresenta se manifesta quando os esforços normais que solicitam seus diversos elementos atingem o valor correspondente ao esforço normal de plastificação N_p . Nesta situação os momentos fletores ao longo dos elementos, a rigor, devem ser nulos, para que o ponto representativo dos esforços internos nas várias seções transversais permaneçam sobre a superfície de plastificação. A partir daí, a estrutura deve apresentar um comportamento semelhante ao de uma treliça, em que ocorrem incrementos de carga e de deslocamentos sem que aconteçam incrementos de momentos fletores e de esforços normais. Isto significa que tais aumentos de carga estão relacionados unicamente com as mudanças de geometria da estrutura.



SEÇÃO TRANSVERSAL



Dados:

Material

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 300 \text{ Mpa}$$

Figura 4.4 - Exemplo de uma viga em balanço

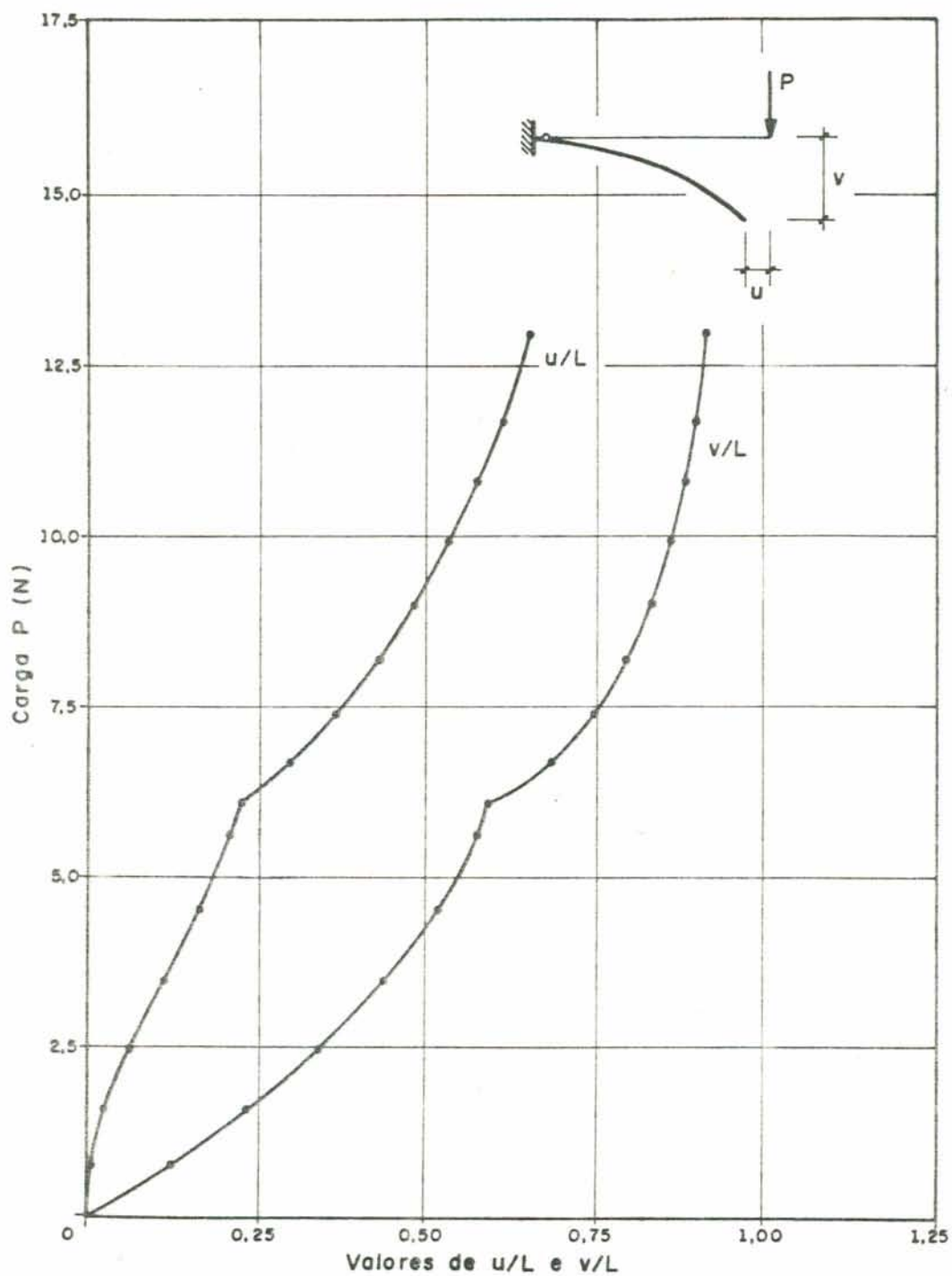


Figura 4.5 - Curva carga/deslocamentos horizontal e vertical no extremo livre do exemplo 4.5.2

Para a realização da análise a estrutura foi discretizada em quatro elementos. Foram executados trezentos e dezesseis passos incrementais, com um número de iterações mudando de dois para três depois do aparecimento da quarta rótula plástica. A carga crítica, correspondente à geração das três primeiras rótulas plásticas, encontrada na análise foi de 25,5 KN. A carga de referência foi tomada igual 5% do valor necessário para provocar o início de escoamento da estrutura. Adotou-se uma tolerância $\rho_{tol} = 10^{-4}$ no critério de convergência.

A figura 4.7 mostra um gráfico relacionando os valores da carga com os deslocamentos verticais verificados no meio do vão da viga e a sequência de geração das diversas rótulas plásticas. Apresenta-se também, na mesma figura, os resultados analíticos correspondentes à hipótese de material rígido-plástico encontrados em [23].

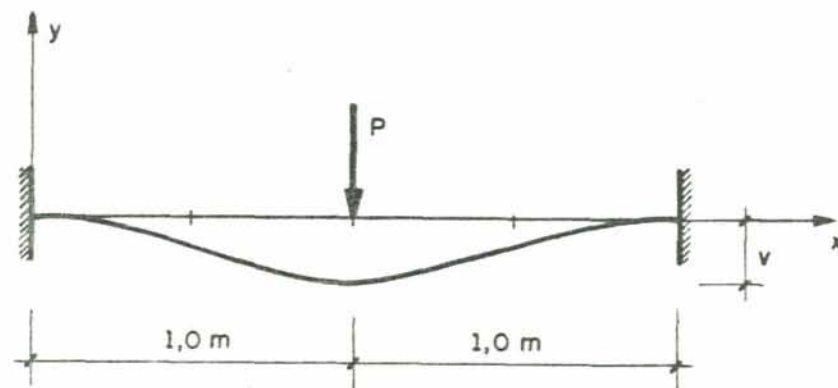
Como se constata através da figura 4.7, as medidas tomadas para contornar as dificuldades que aparecem quando o esforços normais nos elementos atingem o valor de N_p , as quais estão mencionadas no final do item anterior, proporcionaram neste exemplo resultados bastante satisfatórios.

4.5.4 - Caso de uma grelha

Como um dos exemplos de estrutura espacial, analisou-se a grelha esquematizada na figura 4.8, a qual foi inicialmente resolvida em [38] sob a hipótese de pequenos deslocamentos.

A estrutura foi dividida em quatro elementos, dois em cada barra, e a análise foi executada adotando-se o critério de plastificação indicado aqui para seção retangular. Foram realizados noventa e dois passos incrementais com uma ou duas iterações em cada um deles. Admitiu-se uma tolerância no critério de convergência igual a $\rho_{tol} = 10^{-8}$. Para definição das cargas de referência foi adotada uma fração de 5% do carregamento correspondente ao início de escoamento.

Os resultados encontrados e a sequência de formação



SEÇÃO TRANSVERSAL



Dados:

Material

$$E = 210000 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_y = 250 \text{ MPa}$$

Figura 4.6 - Exemplo de uma viga biengastada

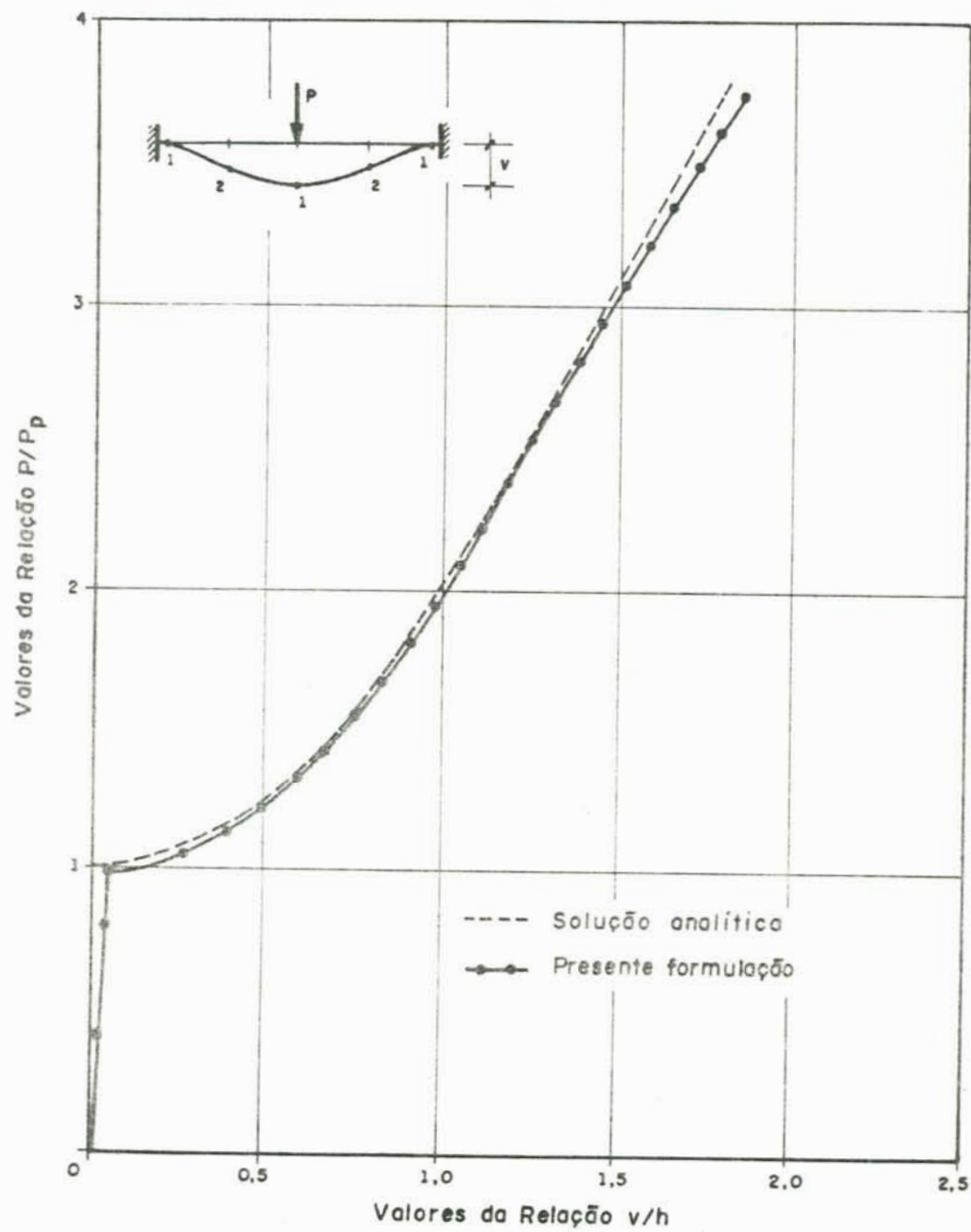


Figura 4.7 - Curva carga/deslocamento vertical do exemplo 4.5.3

das rótulas plásticas estão ilustrados na figura 4.9. juntamente com aqueles obtidos em [38] com um critério de plastificação para seção em coroa circular que leva em conta a ação conjunta de força normal, momento fletor e momento torçor. O valor de P correspondente à formação da terceira rótula plástica foi de 12.5 lb.

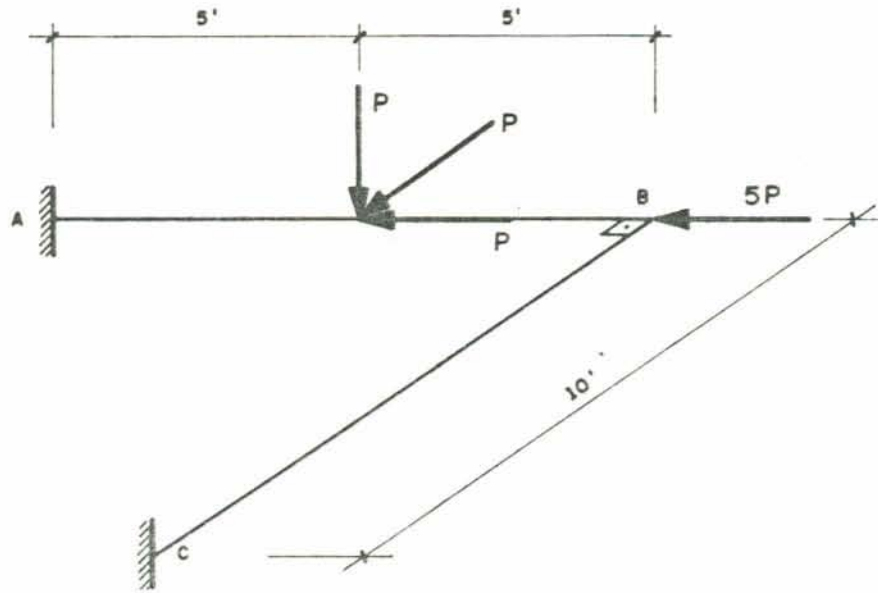
4.5.5 - Caso de uma estrutura reticular espacial

Um outro exemplo de estrutura tridimensional analisada, ilustrado na figura 4.10, foi inicialmente resolvido em [38], sob a hipótese de pequenos deslocamentos.

A estrutura foi discretizada em doze elementos, um para cada barra. A análise foi executada em quarenta e quatro passos incrementais, com um número de iterações, por passo, variando de um a dois. Adotou-se um critério de convergência com uma tolerância $\rho_{tol} = 10^{-3}$. As barras foram admitidas como de seção retangular. Para estabelecimento das cargas de referência adotou-se uma fração de 5% do carregamento de escoamento.

A figura 4.11 mostra um gráfico relacionando o valor da carga P com os deslocamentos verticais encontrados nos vértices superiores da estrutura (por exemplo, ponto 2 da figura 4.10). Apresenta-se, na mesma figura, a correspondente curva encontrada na referência [38]. Observa-se uma ligeira diferença, mesmo na fase inicial, entre esta última curva e aquela obtida com a presente formulação. Isto pode ser justificado pelo fato de que em [38] não se considera a influência das matrizes de rigidez geométrica das barras no comportamento à flexão. No caso em consideração, todas as barras estão sujeitas a esforços normais de compressão, o que reduz a rigidez flexional das mesmas. Este fato implica, portanto, na obtenção de maiores deslocamentos para um mesmo nível de carga, conforme pode ser observado na figura 4.11, através dos resultados fornecidos pela presente formulação.

A sequência de formação das rótulas plásticas, obtida durante a análise, pode ser vista na figura 4.11.



Dados:

Barras

$$\begin{aligned}
 A_x &= 4,98 \text{ in}^2 \\
 I_x &= 88,74 \text{ in}^4 \\
 I_y &= 44,36 \text{ in}^4 \\
 I_z &= 44,36 \text{ in}^4 \\
 N_P &= 179390 \text{ lb} \\
 M_{py} &= 481900 \text{ lbin} \\
 M_{pz} &= 481900 \text{ lbin}
 \end{aligned}$$

Material

$$\begin{aligned}
 E &= 30,00 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \\
 G &= 11,36 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \\
 \alpha_y &= 36,02 \times 10^3 \text{ lb/in}^2
 \end{aligned}$$

Figura 4.8 - Exemplo de uma grelha

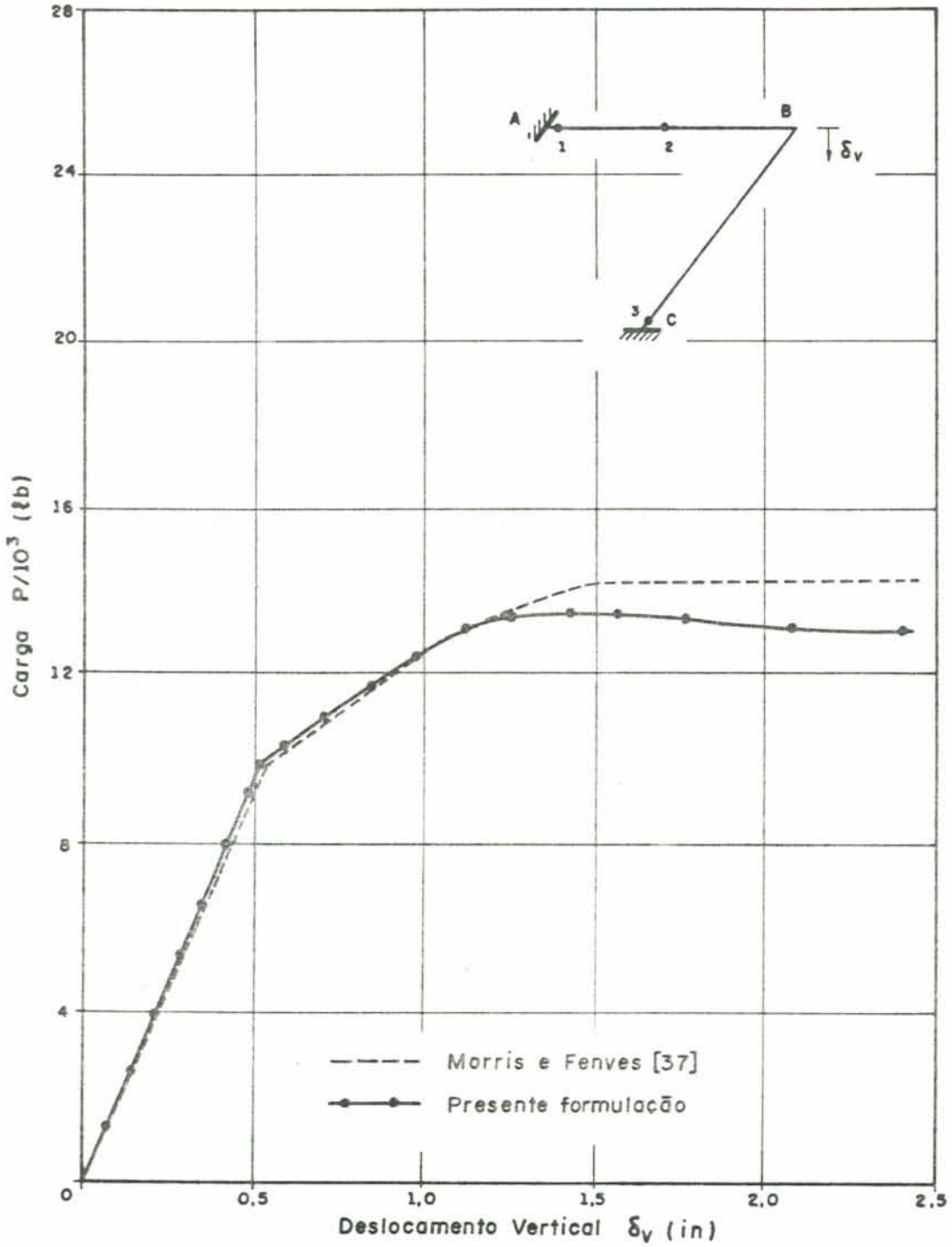
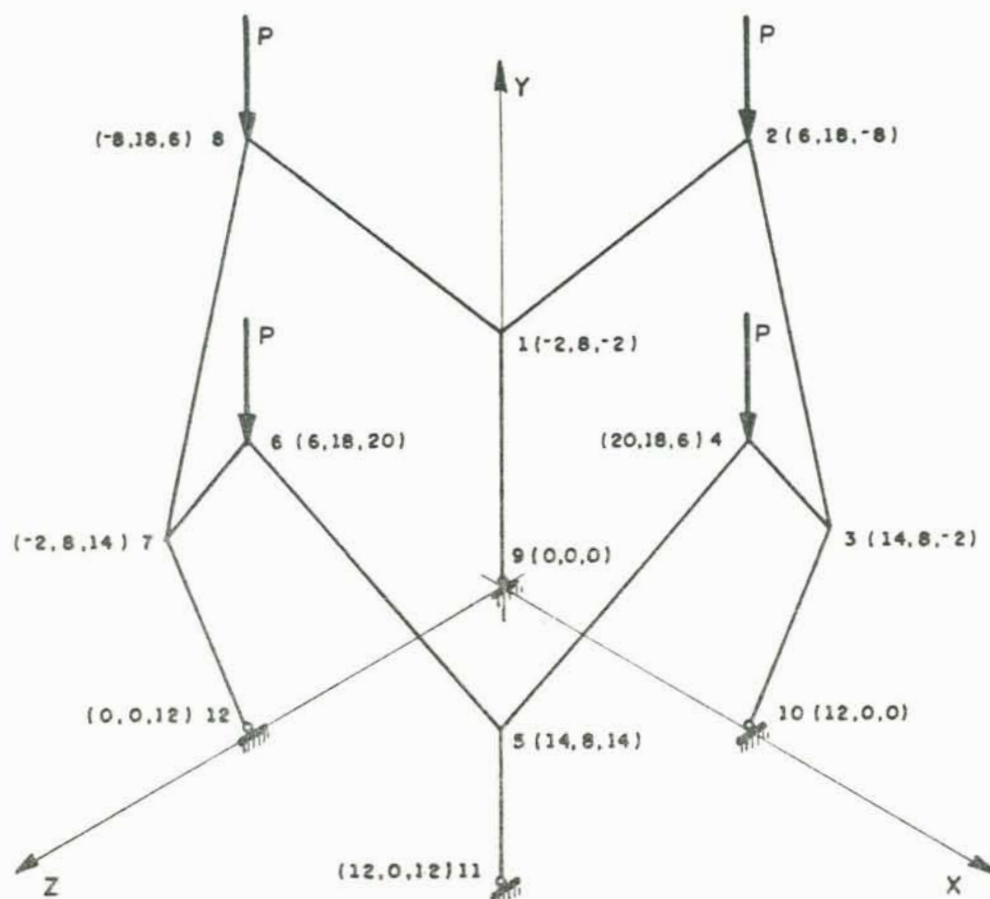


Figura 4.9 - Curva carga/deslocamento vertical do exemplo 4.5.4



Dados:

Barras

$$\begin{aligned}
 A_x &= 4,98 \text{ in}^2 \\
 I_x &= 88,74 \text{ in}^4 \\
 I_z &= 44,36 \text{ in}^4 \\
 N &= 179390 \text{ lb} \\
 M_{py} &= 481900 \text{ lbin} \\
 M_{pz} &= 481900 \text{ lbin}
 \end{aligned}$$

Material

$$\begin{aligned}
 E &= 30,00 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \\
 G &= 11,36 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \\
 \sigma_y &= 36,02 \times 10^3 \text{ lb/in}^2
 \end{aligned}$$

Figura 4.10 - Exemplo de uma estrutura tridimensional

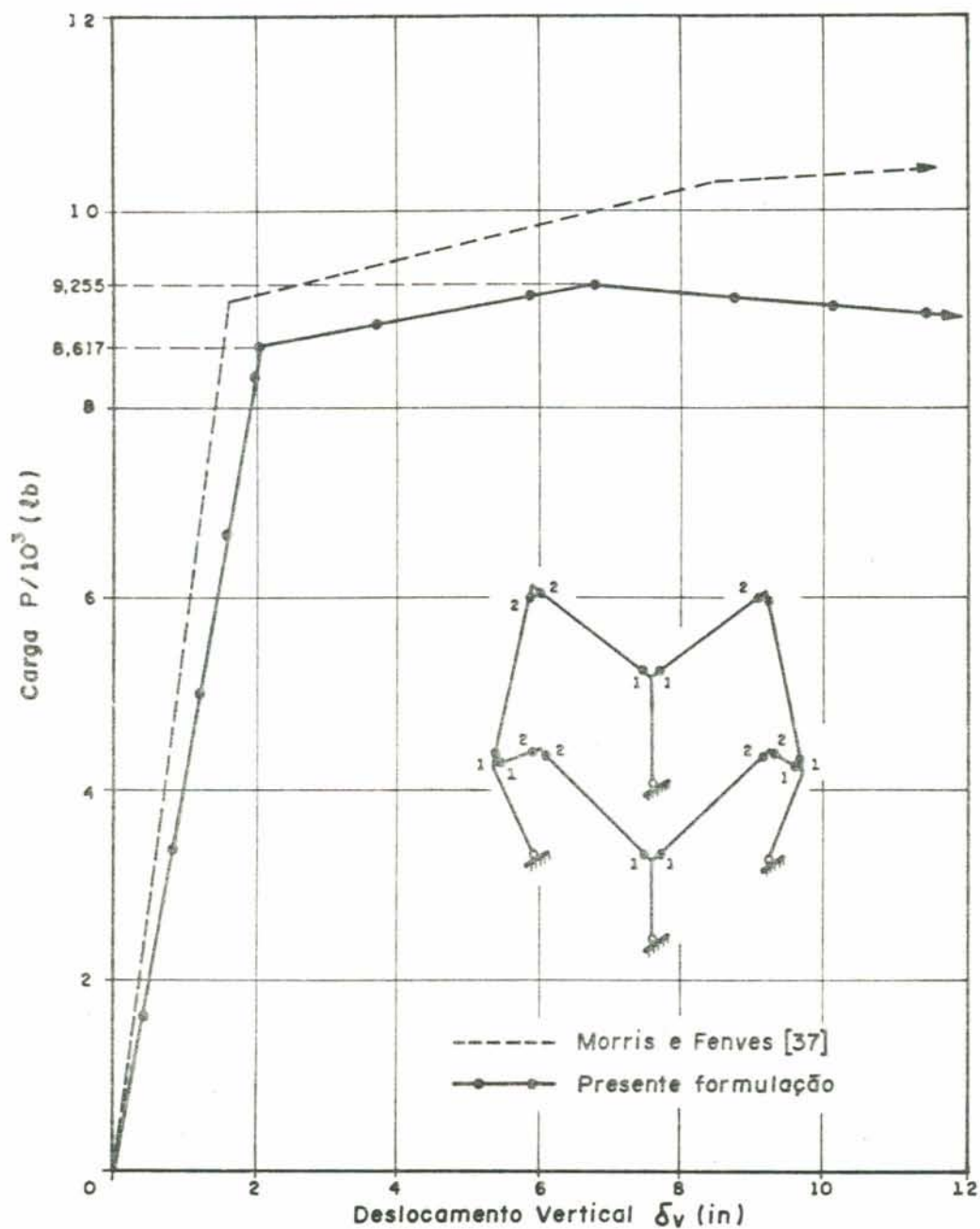


Figura 4.11 - Curva carga/deslocamento vertical do exemplo 4.5.5

5. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente formulação permite a descrição do comportamento de pórticos tridimensionais, em regime elástico ou elastoplástico, na presença de deslocamentos finitos, e em qualquer estágio de deformação.

O procedimento numérico empregado na análise, nominalmente o Método de Controle por Trabalho, demonstrou eficiência e estabilidade em todos os exemplos numéricos resolvidos. O número de iterações necessárias para se atingir a convergência em cada passo incremental, na maioria dos citados exemplos, se comportou de modo bastante uniforme, o que pode ser constatado através dos itens 3.4 e 4.5. Em estágios de deformações em que a estrutura se apresente muito flexível, tal como aquele verificado no exemplo 3.4.2, quando a coluna se aproxima da posição horizontal, ou no exemplo 4.5.1, após a formação de um número de rótulas plásticas que leva a estrutura a ter um comportamento próximo ao de um mecanismo, ocorrem em geral um aumento do número de iterações necessárias para se atingir a convergência e uma maior aproximação entre os pontos de equilíbrio correspondentes a passos incrementais consecutivos. O mesmo acontece nas situações em que a estrutura adquire uma acentuada rigidez, tal como nos exemplos 3.4.3 e 3.4.5, quando a viga e a grelha se aproximam da posição vertical. Este fato, obviamente, provoca um aumento no tempo necessário para se obter uma descrição completa do comportamento de estruturas que apresentem as características de rigidez ou de flexibilidade acima mencionadas.

Os resultados encontrados com este trabalho evidenciam a importância da consideração de deslocamentos finitos e também da implementação de método numérico que proporcione a descrição do comportamento da estrutura em

estágios pós-críticos. Uma formulação baseada na hipótese de deslocamentos infinitesimais pode fornecer resultados bastante diferentes daqueles obtidos através de procedimentos em que se admite a ocorrência de deslocamentos finitos. Um evidente exemplo deste fato pode ser constatado através do estudo da viga elastoplástica do exemplo 4.5.2, para a qual a análise que adota a hipótese de deslocamentos finitos revela uma considerável rigidez após a formação da rótula plástica, enquanto que uma teoria baseada em pequenos deslocamentos acusaria a geração de um mecanismo desprovido totalmente de rigidez. Pode-se também constatar através do exemplo 4.5.5 a importância da consideração da rigidez geométrica dos elementos da estrutura. Observa-se claramente, no citado exemplo, a diferença entre os deslocamentos correspondentes a um mesmo nível de carga, calculados através de dois procedimentos: um que considera a citada rigidez geométrica e outro que a despreza.

Entendendo-se que a eficiência de uma formulação não deve ser julgada somente a partir do grau de aproximação dos valores encontrados para os deslocamentos, houve também na elaboração do presente trabalho uma preocupação com a determinação correta dos valores dos esforços internos que solicitam as seções transversais das extremidades dos elementos. A este respeito, pode-se afirmar que os procedimentos dispostos na formulação proporcionam resultados bastante satisfatórios, conforme se constata através do exemplo 3.4.3.

Deste modo, tomando-se como base todos os aspectos acima abordados, conclui-se que o objetivo central que motivou a realização do presente trabalho foi devidamente alcançado.

Enfim, entende-se que este trabalho pode ser bastante útil como um instrumento auxiliar em atividades de projetos de estruturas aporticadas e, principalmente, para fins de pesquisas científicas. Neste último caso, o trabalho pode inclusive servir como uma base para implementação de outros efeitos não lineares que se apresentam em estruturas de barras, tal como aqueles oriundos da flexibilidade das juntas, que aliás, deixa-se aqui como sugestão para um futuro trabalho dentro da área de análise não linear.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AL-BERMANI, F. and KITIPORNCHAI, S., " Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Thin-Walled Structures ", Eng. Struct., Vol. 12, January, 1990, pp. 28-36.
- [2] ARGYRIS, J. H., DUNNE, P. C. and SCHARPF, D. W., " On Large Displacement - Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 14/15, 1978, pp. 401 - 451/99 - 135.
- [3] ARGYRIS, J. H., BALMER, H., DOLTSINIS, J. St., DUNNE, P. C., HAASE, M., KLEIBER, M., MALEJANNAKIS, G. A., MLEJNEK, H. P., MÜLLER, M. and SCHARPF, D. W., " Finite Element Method - The Natural Approach ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 1979, pp. 1-106.
- [4] ARGYRIS, J. H., HILPERT, O., MALEJANNAKIS, G. A. and SCHARPF, D. W., " On the Geometrical Stiffness of a Beam in Space - A Consistent V. W. Approach ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, 1979, pp. 105 - 131.
- [5] ARGYRIS, J. H., BONI, B., HINDENLANG, U. and KLEIBER, M. " Finite Element Analysis of Two- and Three Dimensional Elasto-Plastic Frames - The Natural Approach ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 35, No. 2, 1982, pp. 221 - 245.
- [6] ATLURI, S. N. and SHI, G., " Elasto - Plastic Large

- Deformation Analysis of Space Frames : a Plastic-Hinge and Stress - Based Explicit Derivation of Tangent Stiffnesses ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988, pp. 589 - 615.
- [7] BATHE, K. J. and CIMENTO, A. P., " Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22, 1980, pp. 231 - 277.
- [8] BERGAN, P. G., " Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, 1978, pp. 1677 - 1696.
- [9] BERNUZZI, C. and GOBETTI, A., " Elasto Plastic Analysis of the Tridimensional Behaviour of Thin-Walled Beams ", Costruzioni Metalliche No. 4, 1987.
- [10] BIRNSTIEL, C. and IFFLAND, J. S. B., " Factors Influencing Frame Stability ", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST2, Proc. Paper 15196, February, 1980, pp. 491 - 504.
- [11] BRUNETTE, K. E. and FENVES, S. J., " A General Formulation of the Elastic-Plastic Analysis of Space Frameworks ", International Conference on Space Structures, Univ. of Surrey, 1966.
- [12] CHU, K. H. and RAMPETSREITER, R. H., " Large Deflection Buckling of Space Frames ", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST12, Proc. Paper 9455, December, 1972, pp. 2701 - 2722.
- [13] CHEN, W. F., " Plasticity for Structural Engineers ", Spring-Verlag New York Inc., 1988.
- [14] CICHON, C., " Large Displacements In-Plane Analysis of

- Elastic-Plastic Frames ", Computers & Structures, Vol. 19, No. 5-6, 1984, pp. 737 - 745.
- [15] COHN, M. Z. and ABDEL-ROHMAN., M., " Analysis up to Collpase of Elasto-Plastic Arches ", Computers & Structures, Vol. 6, 1976, pp. 511 - 517.
- [16] COOK, R. D., " Concepts and Applications of Finite Element Analysis ", John Wiley & Sons, Inc., Second Edition, 1981.
- [17] CREUS, G. J., TORRES, P. A. L. and GROEHS, A. G., " Elastoplastic Frame Analysis with Generalized Yield Function and Finite Displacements ", Computers & Structures, Vol. 18(5), 1984, pp. 925 - 29.
- [18] CRISFIELD, M. A., " A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles " Snap Through ", Computers & Structures, Vol. 13(1-3), 1981, pp. 55 - 62.
- [19] CRISFIELD, M. A., " An Arc-Lenght Method Including Line Searches and Accelerations ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1983, pp. 1269 - 1289.
- [20] DUMONT, N. A. and KRÜGER, S. D., " Um Método Eficiente para a Resolução de Problemas Altamente Não Lineares ", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Brasil, Dezembro, 1989.
- [21] EBNER, A. M. and UCCIFERRO, J. J., " A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods ", Computers & Structures, Vol. 2, 1972, pp. 1043 - 1061.
- [22] GERE, J. M. and WEAVER Jr., W., " Analysis of Framed Structures ", Toronto, Van Nostrand, 1965.

- [23] HAYTHORNWAITE, R. M. " Beams with full end fixity ",
Engineering, 183, 1957, pp. 110 - 112.
- [24] HINTON, E. and OWEN, D. R. J., " Finite Element
Programming ", London, Academic Press Inc., 1977.
Analysis
- [25] HODGE Jr., P. G. " Plastic Analysis of Structures ",
McGraw - Hill, 1959.
- [26] HORNE, M. R., " Plastic Theory of Structures ", London,
William Clowes & Sons Limited, 1971.
- [27] HORNE, M. R. and MORRIS, L. J., " Plastic Design of
Low-Rise Frames ", London, Granada Publishing, 1981.
- [28] HSIAO, K. M. and HOU, F. Y., " Nonlinear Finite Element
Analysis of Elastic Frames ", Computers & Structures,
Vol.26, No. 4, 1987, pp. 693 - 701.
- [29] HSIAO, K. M., HOU, F. Y. and SPILIOPOULOS, K. V., " Large
Displacement Analysis of Elasto-Plastic Frames ",
Computers & Structures, Vol. 28, No. 5, 1988, pp. 627 -
633.
- [30] IRONS, B. M., " A Frontal Solution Program for Finite
Element Analysis ", International Journal for Numerical
Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 5 - 32.
- [31] JOHNSON, D. and BROTTON, M. D., " A Finite Deflection
Analysis for Space Structures ", International Conference
on Space Structures, Univ. of Surrey, 1966.
- [32] JONATOWSKI, J. J. and BIRNSTIEL, C., " Inelastic
Stiffened Suspension Space Structures ", Journal of the
Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST6, Proc. Paper
7364, June, 1970, pp. 1143 - 1166.

- [33] KONDOH, K. and ATLURI, S. N., " A Simplified Finite Element Method for Large Deformation, Post-Buckling Analysis of Large Frame Structures, using Explicitly Derived Tangent Stiffness Matrices ", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, 1986, pp. 69 - 90.
- [34] KONDOH, K., TANAKA, K. and ATLURI, S. N., " An Explicit Expression for the Tangent - Stiffness of a Finitely Deformed 3-D Beam and its use in the Analysis of Space Frames ", Computers & Structures, Vol. 24, No. 2, 1986, pp. 253 - 271.
- [35] KORN, A. and GALAMBOS, T. V., " Behavior of Elastic-Plastic Frames ", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST5, Proc. Paper 5492, May, 1968, pp. 1119 - 1142.
- [36] LESCOUARC'H, Y., " Sollicitations Ultimes dans une Section ", Manuel pour le Calcul en Plasticité des Constructions en Acier, Chapitre 4, Centre Technique Industriel de la Construction Metallique.
- [37] LEMASTER, R., NOPRATVARAKORN, V. and THEISS, T., " Elastic-Plastic Analysis of Tubular Transmission Structures ", Computers & Structures, Vol. 28, No.5, 1988 pp. 603 - 620.
- [38] MORRIS, G. A. and FENVES, S. J., "A General Procedure for the Analysis of Elastic and Plastic Frameworks ", SRS No.325, Department of Civil Engineering , Univ. of Illinois, Aug., 1967.
- [39] MORRIS., G. A. and FENVES, S. J., " Approximate Yield Surface Equations ", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM4, Proc. Paper 6741, August, 1969, pp. 937 - 954.

- [40] MORRIS, L. J., " Instability and Plastic Collapse of Steel Structures ", Proceedings of the Michael R. Horne Conference, 1983.
- [41] NEAL, B. G., " The Plastic Methods of Structural Analysis ", London, Chapman and Hall, Third Edition, 1977.
- [42] OLIVETO, G. and CUOMO, M., " Incremental Analysis of Plane Frames with Geometric and Material Nonlinearities ", Eng. Struct., Vol. 10, January, 1988, pp. 2 - 12.
- [43] DRAN, C., " Tangent Stiffness in Space Frames ", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST6, Proc. Paper 9813, June, 1973, pp. 987 - 1001.
- [44] DRAN, C. and KASSIMALI, A., " Large Deformations of Framed Structures under Static and Dynamic Loads, Computers & Structures, Vol. 6, 1976, pp. 539 - 547.
- [45] ORBISON, G. J., McGUIRE, W. and ABEL, J. F., " Yield Surface Applications in Nonlinear Steel Frame Analysis ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 33 No. 1-3, 1982, pp. 557 - 573.
- [46] PAPADRAKAKIS, M., " Post-Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods ", Computers & Structures, Vol. 14, No. 5-6, 1981, pp. 393 - 402.
- [47] PRAGER, W., " An Introduction to Plasticity ", Reading, Massachusetts, Addison - Wesley, 1959
- [48] REMSETH, S. N., " Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Framed Structures ", Computer & Structures, Vol. 10, 1979, pp. 879 - 897.
- [49] SMITH, M., " The NAFEMS Benchmark Tests for Two-Dimensional Thin Beams and Axisymmetric Shells with

- Geometric Nonlinearity ", Benchmark, April, 1990, pp. 13 - 15.
- [50] STRICKLIN, J. A., HAISLER, W. E. and VON RIESEMANN, W. A., " Geometrically Nonlinear Structural Analysis by Direct Stiffness Method ", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST9, September, 1971, pp. 2299 - 2314.
- [51] TIMOSHENKO, S. P. and GERE, J. M., " Theory of Elastic Stability ", McGraw - Hill, Second Edition, 1961.
- [52] TORRES, P. A. L., " Análise de Pórticos Planos Elasto-plásticos na Presença de Deslocamentos Finitos ", Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1986.
- [53] WASZCZYSZYN, Z., " Numerical Problems of Nonlinear Stability Analysis of Elastic Structures ", Computers & Structures, Vol. 17, No. 1, 1983, pp. 13 - 24.
- [54] WILLIAMS, F. W., " An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework with Finite Deflections ", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 17, 1964, PP. 451 - 459.
- [55] WOOD, R. D. and ZIENKIEWICZ, O. C., " Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells ", Computers & Structures, Vol. 7, 1977, pp. 725 - 735.
- [56] YANG, Y. B., " Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion using Interactive Computer Graphics ", Department of Structural Engineering Report, Cornell University, Number 84 - 10, June, 1984.
- [57] ZIEGLER, H., " Principles of Structural Stability ", 2nd Edition, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1977.

APENDICE A - POSTULADOS DE DRUCKER

As relações entre tensões e deformações no regime plástico podem ser consistentemente formuladas com base em duas importantes proposições conhecidas como Postulados da Estabilidade de Drucker, as quais foram apresentadas por Drucker na década de 50.

Para enunciar as proposições acima mencionadas, admita-se um corpo submetido inicialmente a um sistema de forças de massa e de superfície, denotadas por f e s , respectivamente. Considere-se, que neste estado, o corpo apresente deslocamentos u , tensões σ_{ij} e deformações ϵ_{ij} .

Suponha-se, agora, que aquelas forças f e s sofram incrementos \dot{f} e \dot{s} , motivados por uma causa qualquer. Em consequência disto, os deslocamentos, as tensões e as deformações, existentes inicialmente no corpo, serão incrementados de \dot{u} , $\dot{\sigma}$ e $\dot{\epsilon}$, respectivamente. Nestas condições, os Postulados da Estabilidade de Drucker podem ser assim enunciados:

1^o) O trabalho realizado pelos incrementos de forças \dot{f} e \dot{s} ao longo dos correspondentes incrementos de deslocamentos \dot{u} é sempre positivo, isto é,

$$\int_V \dot{f} \dot{u} dV + \int_A \dot{s} \dot{u} dA > 0 \quad (\text{A.1})$$

onde V e A representam, respectivamente, o volume e a área superficial do corpo.

Em termos de tensão e de deformação, a expressão (A.1) é equivalente a

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (\text{A.2})$$

o que pode ser constatado sem grandes dificuldades aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais para os campos dos incrementos de tensões e de deformações, e lembrando que o volume V , na expressão (A.1), é arbitrário. A equação (A.2) está escrita em notação indicial.

2^o) Durante o ciclo de aplicação e posterior remoção dos incrementos de forças \dot{f} e \dot{s} , o trabalho realizado pelos mesmos ao longo dos correspondentes incrementos de deslocamentos não é negativo, ou seja,

$$\oint_V \dot{f}_i u_i dV + \oint_A \dot{s}_i u_i dA \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

O símbolo de integral utilizado em (A.3) indica integração sobre o ciclo de aplicação e remoção dos referidos incrementos de forças.

Em termos de incrementos de tensão e de deformação, a expressão (A.3) equivale à seguinte integral realizada ao longo do ciclo acima mencionado:

$$\oint \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Como consequências dos postulados anteriores, decorrem as seguintes importantes conclusões:

- a) A superfície de escoamento ou de plastificação é convexa.
- b) O vetor de incrementos de deformações ou de deslocamentos, plásticos, é normal à superfície de escoamento ou de plastificação no ponto correspondente às tensões ou aos esforços atuantes.
- c) Um estado de tensão é unicamente determinado pelo correspondente estado de deformação, e vice-versa.

Um material que satisfaz as condições expressas pelos Postulados de Drucker é chamado de material estável.

APENDICE B - CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO : Relações Úteis

No que segue são apresentadas algumas expressões relacionadas com os critérios de plastificação propostos para seções transversais retangulares e em forma de I, as quais tem bastante utilidade dentro dos procedimentos utilizados para a realização de uma análise elastoplástica. Tais expressões correspondem às componentes do vetor gradiente da superfície de plastificação e do fator de proporcionalidade que deve multiplicar os incrementos de esforços para que na seção transversal onde eles atuem seja gerada uma rótula plástica.

a) Caso de uma seção transversal retangular

Como critério de plastificação para uma seção transversal retangular foi implementada no presente trabalho a seguinte expressão simplificada:

$$\left(\frac{M_y}{M_{uy}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{uz}}\right)^2 = 1 \quad (\text{B.1})$$

onde

$$M_{uy} = M_{py} [1 - (N/N_p)^2] \quad \text{e} \quad M_{uz} = M_{pz} [1 - (N/N_p)^2] \quad (\text{B.2})$$

sendo N_p , M_{py} e M_{pz} , respectivamente, a força normal e os momentos fletores de plastificação da seção.

Suponha-se que uma dada seção transversal retangular sujeita os esforços N , M_y e M_z tenha comportamento elástico. Se estes esforços sofrerem incrementos ΔN , ΔM_y e ΔM_z , o cálculo do fator de proporcionalidade r que deve multiplicar tais incrementos para que ocorra a plastificação total da seção pode ser feito substituindo-se N , M_y e M_z na equação (B.1) por, respectivamente, $N + r\Delta N$, $M_y + r\Delta M_y$ e $M_z + r\Delta M_z$ e em seguida, tirando-se o valor de r da equação resultante.

Atavés da substituição acima mencionada, chega-se à equação

$$Ar^4 + Br^3 + Cr^2 + Dr + E = 0 \quad (B.3)$$

cujos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} A &= \Delta N^4 / N_p^4 \\ B &= 4N \Delta N^3 / N_p^4 \\ C &= 6N^2 \Delta N^2 / N_p^4 - 2\Delta N^2 / N_p^2 - \Delta M_y^2 / M_{py}^2 - \Delta M_z^2 / M_{pz}^2 \\ D &= 4N^3 \Delta N / N_p^4 - 4N \Delta N / N_p^2 - 2M_y \Delta M_y / M_{py}^2 - 2M_z \Delta M_z / M_{pz}^2 \\ E &= 1 - 2N^2 / N_p^2 + N^4 / N_p^4 - M_y^2 / M_{py}^2 - M_z^2 / M_{pz}^2 \end{aligned} \quad (B.4)$$

As raízes da equação (B.3) podem ser obtida analiticamente ou através do uso de procedimentos numéricos.

Uma boa aproximação do valor de r é obtida desprezando-se nas expressões (B.4) os termos que dependem de ΔN , em comparação com os demais termos. Esta simplificação reduz a equação do quarto grau acima mostrada para uma do segundo grau. Vale ressaltar que numa análise elastoplástica interessa apenas a menor raiz positiva da equação.

Como o critério de plastificação adotado não considera as influências das forças cortantes e do momento torçor atuantes na seção transversal, as componentes do vetor gradiente da superfície de plastificação, relativa a aqueles esforços, são nulas. Assim, denotando por ψ o primeiro membro da equação (B.1), o vetor gradiente é expresso por

$$\vec{B} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial N} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial M_z} \right\} \quad (B.5)$$

onde

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{4N}{N_p^2 [1 - (N/N_p)^2]^3} \left[\left(\frac{M_y}{M_{py}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial M_y} = \frac{2M_y}{M_{py}^2 [1 - (N/N_p)^2]^2} \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial M_z} = \frac{2M_z}{M_{pz}^2 [1 - (N/N_p)^2]^2}$$

b) Caso de uma seção em I

Para uma seção em I se implementou um critério de plastificação simplificado dado pela equação

$$M_y/M_{uy} + (M_z/M_{uz})^2 = 1 \quad (B.7)$$

Utilizando-se procedimentos semelhantes a aqueles descritos para o caso de seção retangular, obtém-se, para o cálculo do fator de proporcionalidade r , uma equação do quarto grau idêntica a (B.3), porém, com coeficientes dados pelas seguintes expressões:

$$A = \Delta N^4 / N_p^4$$

$$B = 4N \Delta N^3 / N_p^4 + \Delta M_y \Delta N^2 / (M_{py} N_p^2)$$

$$C = 6N^2 \Delta N^2 / N_p^4 - 2\Delta N^2 / N_p^2 + M_y \Delta N^2 / (M_{py} N_p^2) - \Delta M_z^2 / M_{pz}^2 +$$

$$2N \Delta N \Delta M_y / (M_{py} N_p^2) \quad (B.8)$$

$$D = 4N^3 \Delta N / N_p^4 - 4N \Delta N / N_p^2 + 2M_y N \Delta N / (M_{py} N_p^2) - 2M_z \Delta M_z / M_{pz}^2 -$$

$$\Delta M_y / M_{py} + N^2 \Delta M_y / (M_{py} N_p^2)$$

$$E = 1 - 2N^2 / N_p^2 + N^4 / N_p^4 - M_y / M_{py} - M_z^2 / M_{pz}^2 + M_y N^2 / (M_{py} N_p^2)$$

Com respeito a determinação do valor de r , pode-se utilizar a mesma simplificação acima descrita.

Quanto ao vetor gradiente da superfície de plastificação, tem-se neste caso as seguintes componentes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{2N}{N_p^2 [1 - (N/N_p)^2]^3} \left[M_y / M_{py} + \frac{2M_z^2}{(M_{pz}^2 - M_{pz}^2 N^2 / N_p^2)} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial M_y} = \frac{1}{M_{py} [1 - (N/N_p)^2]} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial M_z} = \frac{2M_z}{M_{pz}^2 [1 - (N/N_p)^2]^2}$$

APENDICE C - NATUREZA DOS MOMENTOS FLETORES E TORÇORES

Apresenta-se aqui as relações que justificam a classificação dos momentos fletores e torçores, definidos como resultantes das tensões atuantes sobre a seção transversal de uma viga espacial, como momentos quasitangenciais e semitangenciais, respectivamente. Os procedimentos utilizados para as necessárias deduções apresentadas a seguir são idênticos a aqueles utilizados na referência [4] para o mesmo fim.

A figura C.1 mostra uma seção transversal de um elemento de viga espacial, submetida a uma certa distribuição de tensões. Tomando-se um elemento infinitesimal de área dA sobre a referida seção e definindo-se, então, os momentos fletores e torçores, atuantes sobre a mesma, como resultantes de tais tensões, pode-se escrever

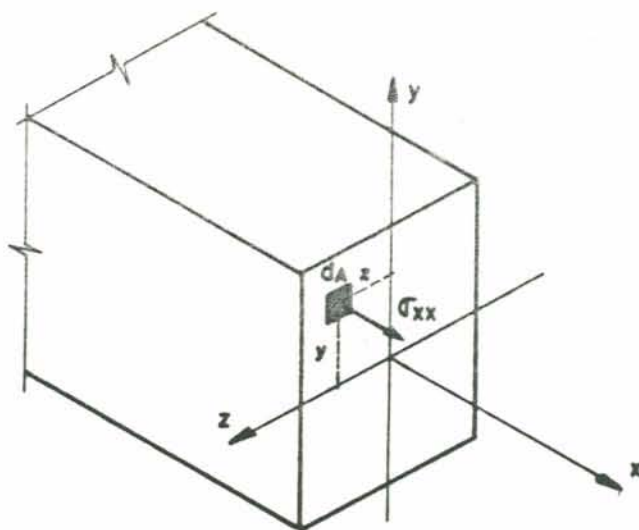


Figura C.1 - Seção transversal de um elemento de viga espacial

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z \, dA, \quad M_z = -\int_A \sigma_{xx} y \, dA \quad (C.1)$$

$$M_x = \int_A (\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z) \, dA \quad (C.2)$$

onde

M_y e M_z - momentos fletores em torno dos eixos y e z , respectivamente.

M_x - momento torçor

σ_{xx} - tensão normal na direção x

σ_{xz} , σ_{xy} - tensões de cisalhamento segundo as direções z e y , respectivamente

y, z - coordenadas do elemento de área

A - área da seção transversal

Não se considera aqui nenhum efeito proveniente de empenamento da seção transversal.

Supondo-se, agora, que seja imposta uma pequena rotação φ , em torno do eixo x , sobre a seção transversal considerada, tem-se que, na posição deslocada, os novos momentos fletores são dados por

$$M_y + \Delta M_y = \int_A \sigma_{xx} (z + y\varphi) \, dA \quad (C.3)$$

$$M_z + \Delta M_z = -\int_A \sigma_{xx} (y - z\varphi) \, dA$$

Daí, os incrementos de momentos introduzidos pela rotação φ são

$$\Delta M_y = \varphi \int_A \sigma_{xx} y \, dA \quad \text{e} \quad \Delta M_z = \varphi \int_A \sigma_{xx} z \, dA,$$

ou ainda, usando as expressões (C.1),

$$\Delta M_y = -M_z \varphi \quad \text{e} \quad \Delta M_z = M_y \varphi \quad (C.4)$$

As relações (C.4) expressam as contribuições dos momentos M_z e M_y sobre os novos momentos modificados pela rotação φ .

Admita-se desta vez que sejam impostas sobre a seção transversal pequenas rotações θ e χ , em torno dos eixos y e z , respectivamente. Como consequência de tais rotações, ocorrem incrementos de momentos dados por

$$\Delta M_y = \int_A \sigma_{xz} y \chi \, dA \quad \text{e} \quad \Delta M_z = \int_A \sigma_{xy} z \theta \, dA \quad (\text{C.5})$$

Integrando-se por partes a expressão (C.2) e usando-se a relação da torção pura

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.6})$$

chega-se com as seguintes equações para os incrementos de momentos na seção

$$\Delta M_y = \chi M_x / 2 \quad \Delta M_z = - \theta M_x / 2 \quad (\text{C.7})$$

As relações (C.7) expressam as contribuições do momento M_x para os novos momentos modificados pelas rotações θ e χ .

Vale no entanto observar que as equações (C.4) e (C.7) reúnem todos os incrementos de momentos devidos a introdução das pequenas rotações ϕ , θ e χ em torno dos eixos x , y e z .

Considerando-se os momentos fletores M_y e M_z como gerados através dos mecanismos quasitangenciais mostrados na figura C.2, verifica-se facilmente que ao se introduzir uma pequena rotação ϕ , em torno do eixo x , sobre os braços de alavanca dos mesmos, os incrementos de momentos que surgem são exatamente iguais a aqueles dados pelas equações (C.4). É fácil também verificar que nenhum incremento de momento aparece quando são impostas pequenas rotações, em torno dos eixos y e z , nos mecanismos da figura C.2. Assim, estas conclusões justificam a classificação dos momentos fletores, definidos de acordo com equações (C.1), como momentos quasitangenciais.

Suponha-se agora que o momento M_x seja gerado pelo mecanismo semitangencial mostrado na figura (C.3).

Introduzindo-se pequenas rotações φ , ϑ e χ , em torno dos eixos x , y e z , sobre tal mecanismo, facilmente se verifica que os incrementos de momentos gerados podem ser calculados pelas expressões (C.7). Este fato justifica a afirmação de que o momento torçor M_x , dado pela relação (C.2), se comporta como um momento semitangencial.

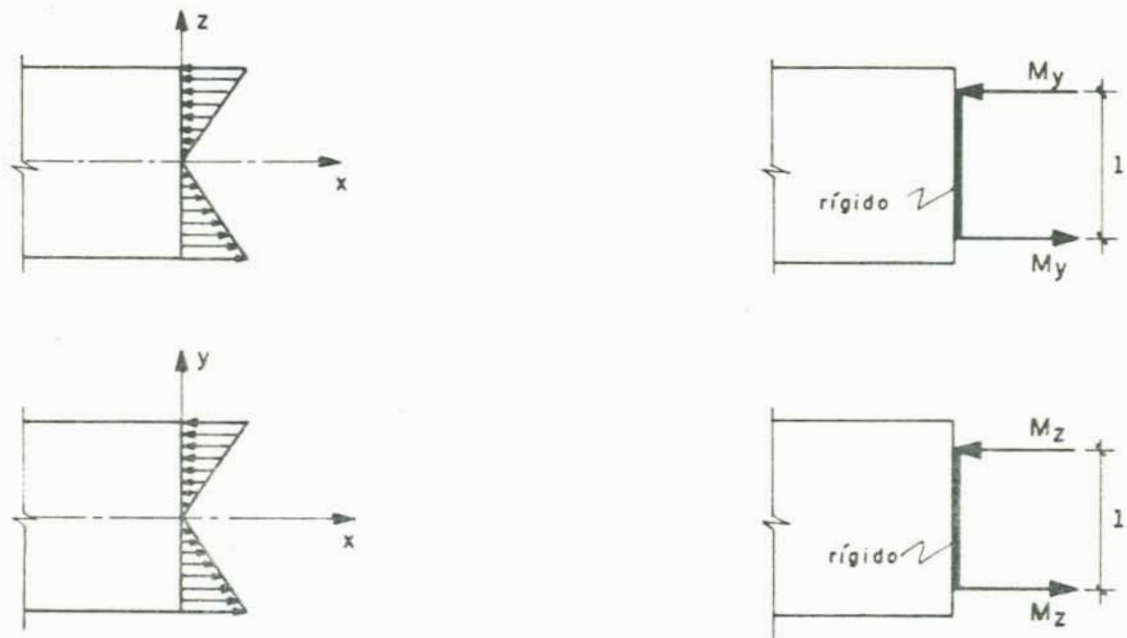


Figura C.2 - Momentos gerados por mecanismos quasitangenciais



Figura C.3 - Momento gerado por mecanismo semitangencial