

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

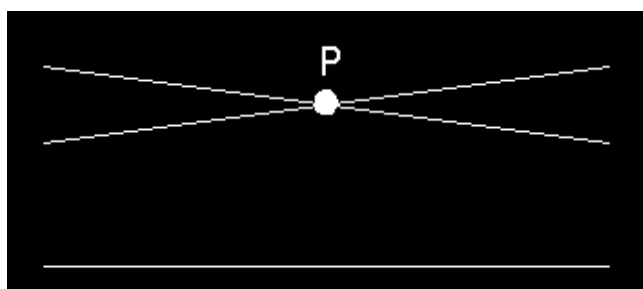
Introdução aos Pontos Ultra-ideais da Geometria Hiperbólica

Bruno Capoani

Professora Orientadora: Miriam Telichevesky

**A Geometria Hiperbólica**

Quinto postulado da geometria hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.



**Retas Paralelas**

Devido ao grande número de retas que não interceptam  $n$ , precisamos de uma nova definição de retas paralelas:

Dados uma reta  $n$  e um ponto  $P$  fora desta reta, existem exatamente duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $n$  do conjunto das que não interceptam  $n$ .

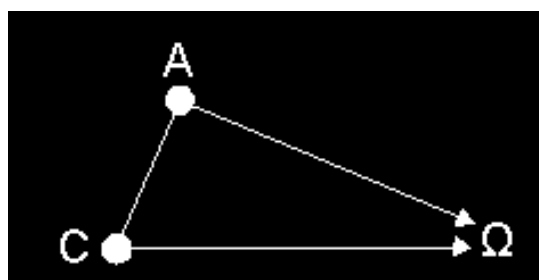
Essas são as retas paralelas a  $n$  passando por  $P$  em uma determinada direção. Estas retas formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de  $P$  à reta  $n$ . Além disso, o ângulo mencionado é agudo.

**O Ponto Ideal**

É um ponto antes de todos os pontos de uma reta ou um ponto depois de todos os pontos desta mesma reta. Retas paralelas têm em comum um ponto ideal na direção do paralelismo.

**Triângulo Generalizado**

Um triângulo generalizado é um triângulo formado por, pelo menos, um ponto ideal.



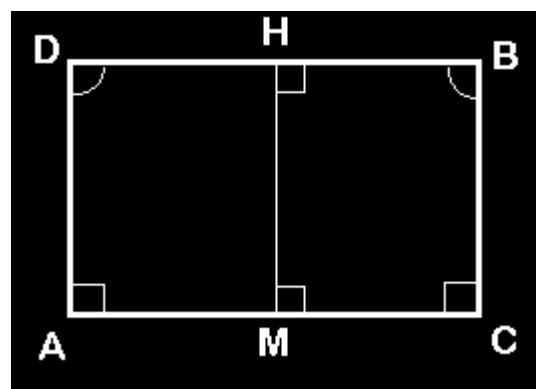
Um triângulo generalizado pode também ser formado por dois pontos ideais ou três pontos ideais.

**Teorema do Ângulo Externo**

Um ângulo externo de um triângulo generalizado  $ACQ$  é sempre maior que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

**Quadrilátero de Saccheri**

São quadriláteros  $ABCD$  nos quais  $AD = CB$  e os ângulos  $D\hat{A}C$  e  $A\hat{C}B$  são retos. Na geometria euclidiana, eles seriam retângulos, mas isso não acontece na geometria hiperbólica.



**Teorema da Perpendicular Comum**

Duas retas que não se interceptam têm uma e somente uma perpendicular comum. Este será o teorema principal a ser demonstrado.

**O Ponto Ultra-Ideal**

Em uma reta  $n$ , serão acrescentados os pontos ultra-ideais  $\Gamma_m$ , onde  $m$  é qualquer reta perpendicular a  $n$ . Duas retas que não se interceptam tem em comum um único ponto ultra ideal.

**Teorema das Mediatrizes de Triângulos**

As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes (em um ponto ordinário, ideal ou ultra-ideal).

**Referências**

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria hiperbólica. Rio de Janeiro, IMPA, 2003.