Evento	Salão UFRGS 2015: SIC - XXVII SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2015
Local	Porto Alegre - RS
Título	Construções de números normais
Autor	MATHEUS FREDERICO STAPENHORST
Orientador	JAIRO KRÁS MENGUE

Título: Construções de números normais
Autor: Matheus Frederico Stapenhorst
Orientador: Jairo Krás Mengue
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Seja $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto formado pelas sequências de zeros e uns e $\sigma : S \to S$ o shift definido por $\sigma(a_0a_1a_2\ldots) = a_1a_2\ldots, \forall a = (a_0a_1a_2\ldots) \in S$. Seja μ uma medida ergódica para (S,σ). Dado $\alpha \in S$, dizemos que α é μ-normal se para cada cilindro $B_k = \overline{b_0b_1\ldots b_k} = \{x = a_0a_1a_2\ldots \in S : a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots a_k = b_k\}$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#(B_k;n;\alpha)}{n} = \mu(B_k) \tag{1}$$

onde $\#(B_k;n;\alpha)$ denota o número de ocorrências de B_k em α até seu n-ésimo símbolo. Para dar exemplos concretos de números normais, é útil o Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro. Este critério afirma que existindo uma subsequência N_j de naturais e constantes positivas C_1, C_2 tais que $\lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} \leq C_1$ e

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\#(B_k;N_j;\alpha)}{N_j} \leq C_2\mu(B_k) \tag{2}$$

então α é μ-normal.

A primeira parte do nosso trabalho consistiu em dar um exemplo de número normal em relação à uma medida de Markov: seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}$ uma matriz estocástica positiva e $p = [\frac{3}{7}, \frac{4}{7}] = [p_0, p_1]$ o vetor de probabilidade estacionário associado . Então consideramos em S a medida de Markov ν que satisfaz $\nu(B_k) = p_{b_0}A_{b_0b_1}A_{b_1b_2}\ldots A_{b_{k-1}b_k}$ para cada cilindro $B_k = \overline{b_0b_1\ldots b_k}$. Mostramos que o número δ obtido concatenando-se blocos formados pelos símbolos 0 e 1 em ordem crescente de tamanho e lexicográfica de tal forma que cada bloco de k dígitos $b_0\ldots b_k$ se repita $7.6^{k-1}p_{b_0}A_{b_0b_1}\ldots A_{b_{k-1}b_k}$ vezes

$$\delta = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00 \quad 00\ldots$$

é ν-normal. A constante 7.6^{k-1} garante que o número $7.6^{k-1}p_{b_0}A_{b_0b_1}\ldots A_{b_{k-1}b_k}$ seja inteiro.

Em um segundo momento, consideramos $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$ e o vetor de probabilidade estacionário associado $q = [\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}] = [q_0, q_1]$. Neste caso, estudamos a prova de que o número γ obtido concatenando-se os blocos que não contém uns consecutivos, ou seja,

$$\gamma = 0 \quad 1 \quad 00 \quad 01 \quad 10 \quad 000 \quad 001 \quad 010 \quad 100 \quad 101 \quad 0000\ldots \tag{3}$$

é normal com respeito à medida de Markov associada à matriz B.