Construções de números normais

Autor: Matheus Frederico Stapenhorst
Orientador: Jairo Krás Mengue
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Algumas definições e resultados iniciais

Definição 1 *Seja $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto formado pelas sequências de zeros e uns e $\sigma : S \to S$ o shift definido por $\sigma(a_1a_2\dots) = a_2a_3\dots \forall a = a_1a_2a_3\dots \in S$. Seja μ uma medida ergódica para (S,σ). Dado $\alpha \in S$ dizemos que α é normal com respeito à medida μ se para cada palavra $B_k = b_1b_2\dots b_k \in \{0,1\}^k$ tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#(B_k;n;\alpha)}{n} = \mu(B_k) \tag{1}$$

onde $\#(B_k;n;\alpha)$ denota o número de ocorrências de B_k em α até seu n-ésimo símbolo.

O nosso trabalho fez uso do seguinte teorema.

Teorema 2 ***(Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro)*** *Suponha que exista uma subsequência (N_j) de naturais e constantes positivas C_1 e C_2 tais que $\lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} \leq C_1$ e*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\#(B_k;N_j;\alpha)}{N_j} \leq C_2\mu(B_k) \tag{2}$$

então α é μ-normal.

Resultado apresentado

O nosso trabalho consistiu em aplicar o Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro para dar um exemplo de número normal com respeito a uma medida de Markov μ. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, uma matriz estocástica positiva e considere o vetor de probabilidade estacionário associado $p = \left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right] = [p_1, p_2]$. Então consideramos em S a medida de Markov ν que satisfaz $\nu(B_k) = p_{b_1}A_{b_1b_2}A_{b_2b_3}\dots A_{b_{k-1}b_k}$ para cada palavra $B_k = b_1b_2\dots b_k$. Mostramos que o número δ obtido concatenando-se blocos formados pelos símbolos 0 e 1 em ordem crescente de tamanho e lexicográfica de tal forma que cada bloco de k dígitos $b_1b_2\dots b_k$ se repita $7.6^{k-1}p_{b_1}A_{b_1b_2}\dots A_{b_{k-1}b_k}$ vezes

$$\delta = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 11 \quad 11 \quad 11 \quad 11 \quad 11 \quad 11\dots \tag{3}$$

é ν-normal.

Ideia da demonstração

Teorema 3 *A constante dada em 3 é normal com respeito à medida ν.*

Prova. Seja $(N_j) = \sum_{i=1}^{j} 7i6^{i-1}$. Note que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} = \lim_{j\to\infty} 1 + \frac{7(j+1)6^j}{\sum_{i=1}^{j} 7i6^{i-1}} \leq 1 + \lim_{j\to\infty} \frac{7(j+1)6^j}{7j6^{j-1}} = 7. \tag{4}$$

Portanto, a primeira hipótese do Critério de Normalidade está satisfeita.

Fixe uma palavra $B_k = b_1\dots b_k$. Vamos mostrar que ele satisfaz (2). Escreva

$$\delta = C_1C_2\dots$$

onde C_i é uma sequência de tamanho $7i6^{i-1}$ formada pelos blocos de tamanho i.(por exemplo, $C_1 = 0001111$). Denotando por $\#(B_k;C_i)$ o número de ocorrências do bloco B_k em C_i, e desprezando ocorrências em junções, temos que

$$\#(B_k;N_j;\delta) = \sum_{i=0}^{j-k} \#(B_k;C_{i+k}) \tag{5}$$

Como $p = [p_1, p_2]$ é o vetor de probabilidade estacionário associado a A, temos que $pA^m = p \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\#(B_k;C_{i+k}) = 7.6^{i+k-1}[\left(\sum_{l_n\in\{0,1\}} p_{b_1}A_{b_1b_2}\dots A_{b_{k-1}b_k}A_{b_kl_1}\dots A_{l_{i-1}l_i}\right)$$

$$+\left(\sum_{l_n\in\{0,1\}} p_{l_1}A_{l_1b_1}A_{b_1b_2}\dots A_{b_{k-1}b_k}A_{b_kl_2}\dots A_{l_{i-1}l_i}\right) + \dots +$$

$$+\left(\sum_{l_n\in\{0,1\}} p_{l_1}A_{l_1l_2}A_{l_2l_3}\dots A_{l_{i-1}l_i}A_{l_ib_1}A_{b_1b_2}\dots A_{b_{k-1}b_k}\right)] =$$

$$= 7.6^{i+k-1}A_{b_1b_2}\dots A_{b_{k-1}b_k}(i-k)p_{b_1}.$$

Logo,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\#(B_k;N_j;\delta)}{N_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\sum_{i=k+1}^{j} \#(B_k;C_i)}{\sum_{i=k+1}^{j} 7i6^{i-1}} = \nu(B_k), \tag{6}$$

e o teorema fica demonstrado.

■

Comentários sobre β-normalidade

Em um segundo momento, passamos ao estudo de normalidade em beta expansões. Dado um número real $\beta > 1$, considere a transformação $T_\beta : [0,1) \to [0,1)$ definida por $T_\beta(x) = \{\beta x\}$, onde $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Sabe-se que se $x \in [0,1)$ e $a_n = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor$ então $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$ e essa série é chamada de β-expansão de x. Dizemos que uma palavra $(b_1, b_2, \dots, b_k) \in \{0, 1, \dots, \lceil \beta \rceil - 1\}^k$ é β-admissível se existe $x \in [0,1)$ tal que sua β-expansão começa com os dígitos $b_1, \dots, b_k$. É conhecido que existe uma única medida de probabilidade ν em $[0,1)$ equivalente à de Lebesgue e ergódica para T_β. Portanto podemos aplicar o Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro para a construção de números β-normais. Seja $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Neste caso as palavras Φ-admissíveis são as que não possuem uns consecutivos, sendo fácil ver que existem exatamente x_{n+2} palavras admissíveis de tamanho n, onde (x_n) é a sequência de Fibonacci. Estudamos uma prova de que o número γ obtido concatenando-se os vetores Φ-admissíveis em ordem lexicográfica e crescente de tamanho é Φ-normal.

$$\gamma = 0 \quad 1 \quad 00 \quad 01 \quad 10 \quad 000\dots \tag{7}$$

Referências

Postnikov, A. G. “*Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations*” (Russo), Trudy Mat. Inst. Steklov. 82 (1966); Engl. trad., Proc. Steklov Inst. Math. 82, Americ. Math. Society, Province, R.I., 1967.

A. Renyi “*Representations for real numbers and their ergodic properties*”, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 8,447-493,1957.

S. Ito, I. Shiokawa “*A construction of β-normal sequences*”J. Math. Soc. Japan, 27, 20-23, 1975.