

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**USO DE DESCONTINUIDADES FORTES NA SIMULAÇÃO
DE PROBLEMAS DE FRATURA**

Cristiane Zuffo da Silva

Porto Alegre
2015

CRISTIANE ZUFFO DA SILVA

**USO DE DESCONTINUIDADES FORTES NA SIMULAÇÃO
DE PROBLEMAS DE FRATURA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Orientação: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Coorientação: Prof.^a Dra. Virgínia Maria R. d'Avila Bessa

Porto Alegre
2015

CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Cristiane Zuffo da
USO DE DESCONTINUIDADES FORTE NA SIMULAÇÃO DE
PROBLEMAS DE FRATURA / Cristiane Zuffo da Silva. --
2015.
90 f.

Orientador: Eduardo Bittencourt.
Coorientadora: Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-
RS, 2015.

1. Modelo de fissura incorporada. 2.
descontinuidade forte. I. Bittencourt, Eduardo,
orient. II. Bessa, Virgínia Maria Rosito d'Avila,
coorient. III. Título.

CRISTIANE ZUFFO DA SILVA

**USO DE DESCONTINUIDADES FORTES NA SIMULAÇÃO
DE PROBLEMAS DE FRATURA**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 22 de dezembro de 2015

Prof. Eduardo Bittencourt
Dr. pelo PPGEC/UFRGS
Orientador

Prof.^a Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa
Dra. pelo PPGEC/UFRGS
Coorientadora

Prof. PhD Carlos Torres Formoso
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Alexandre Luiz Braun (PPGEC/UFRGS)
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

Prof. Inácio Benvegno Morsch (PPGEC/UFRGS)
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

Prof. Rogério José Marczak (PROMEC/UFRGS)
Dr. pelo PROMEC/UFRGS

Dedico este trabalho às pessoas que me fazem querer ser uma pessoa melhor, àquelas que dão sentido a todo meu esforço. Aos meus pais, José e Sirlei, e ao meu namorado, André.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por guiar meus passos, dando força e coragem para a concretização deste sonho.

Agradeço aos meus pais Sirlei Zuffo da Silva e José Camargo da Silva, pelo exemplo de vida, por todo amor e dedicação. Não há formas de agradecer por todos os conselhos, orações e apoio recebido.

Agradeço ao meu namorado e amigo André Luiz Marasca, por apoiar minhas decisões e comemorar minhas vitórias, pelo companheirismo e por compreender minha ausência.

Agradeço aos Professores Eduardo Bittencourt, Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa, pela orientação, pelos ensinamentos transmitidos, pela disponibilidade, dedicação e pela confiança depositada. Me sinto honrada pela oportunidade de ter realizado este trabalho sobre a orientação de vocês.

Agradeço aos demais docentes do PPGEC da área de Estruturas que através de seus conhecimentos contribuíram para minha formação profissional.

Agradeço aos amigos que fiz em Porto Alegre, os quais se tornaram minha família nesta cidade. Agradeço de forma especial à Karla Suzana Moresco, pela companhia nos finais de semana, pelo ombro amigo nas horas difíceis e por seu exemplo de pessoa. À Patrícia Tonon, pelos anos de amizade, pelo companheirismo e pelos sábios conselhos. À Alina de la Cruz López e Abel Carrasco Luzardo pela troca de conhecimentos e pela amizade construída.

Agradeço aos amigos que deixei no Paraná, e aos que foram para longe, mas que de uma forma ou outra se fizeram presentes ao longo desta caminhada.

Agradeço à CAPES E CNPQ pelo auxílio financeiro.

"Eu aprendi que a coragem não é a ausência de medo, mas o triunfo sobre ele. O homem corajoso não é aquele que não sente medo, mas aquele que conquista por cima do medo."

Nelson Mandela

RESUMO

SILVA, C.Z. Uso de descontinuidades fortes na simulação de problemas de fratura. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A formação e propagação de fissuras é um fenômeno observado em diversos materiais utilizados na engenharia, como concreto, metais, cerâmicas e rochas. Tendo em vista a grande influência que fissuras têm no comportamento global da estrutura o objetivo deste trabalho consiste na implementação de um modelo de fissura com descontinuidades fortes incorporadas a fim de analisar o processo de fratura em materiais quase-frágeis. A descontinuidade no campo de deslocamentos (descontinuidade forte) é representada através da introdução de graus de liberdade adicionais no interior do elemento finito, sendo esta abordagem denominada enriquecimento elementar (E-FEM). Nestes modelos a fissura pode se propagar em qualquer direção dentro do elemento finito, evitando a necessidade de redefinição da malha em cada etapa, além de fornecer resultados relativamente independentes da malha de elementos finitos utilizada. Por serem internos a cada elemento finito, os graus de liberdade adicionais podem ser eliminados da solução global por condensação estática. Desta forma as descontinuidades são definidas em nível de elemento e o modelo pode ser facilmente implementado em códigos computacionais existentes. O modelo implementado foi proposto por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990), o qual pertence à classe de modelos com formulação assimétrica estaticamente e cinematicamente consistente (SKON). Esta formulação é caracterizada por garantir o movimento de corpo rígido entre as partes do elemento além de assegurar a continuidade de tensões na linha de fissura, resultando numa matriz de rigidez assimétrica. Diferentes relações constitutivas podem ser utilizadas para descrever o comportamento das regiões com e sem fissura. Portanto, para a região não fissurada, utilizou-se um modelo constitutivo elástico linear e para a região fissurada foi analisada a performance de dois modelos constitutivos distintos: linear e exponencial. A capacidade de representar o comportamento de elementos estruturais fissurados foi ilustrada através de exemplos de tração e flexão comparados com outros modelos de fissura existentes e com resultados experimentais. Em relação aos modelos constitutivos para a linha da fissura, o modelo linear não se mostrou adequado por superestimar as tensões de pico além de apresentar um ramo de amolecimento mais frágil. Já o modelo exponencial mostrou-se bastante eficiente representando de forma correta o comportamento de materiais quase-frágeis.

Palavras-chave: Modelo de fissura incorporada; descontinuidade forte; enriquecimento elementar; formulação assimétrica; material quase-frágil.

ABSTRACT

SILVA, C.Z. Uso de descontinuidades fortes na simulação de problemas de fratura. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The formation and propagation of cracks is a phenomenon observed in many materials used in engineering, such as concrete, metals, ceramics and rocks. In view of the influence of cracks in the global behavior of the structure, the aim of this work is the implementation of an embedded strong discontinuity model in order to analyze the fracture process in quasi-brittle materials. The discontinuity in the displacement field (strong discontinuity) is represented by the introduction of additional degrees of freedom within the finite element. This approach is called elemental enrichment (E-FEM). The embedded models allow the propagation of crack in any direction within the finite element, avoiding the need of remeshing and providing objective results (mesh independent). The additional degrees of freedom are introduced into the finite element, then these degrees can be eliminated from the global solution by static condensation and the model can be easily implemented in existent computational codes. The model used here was proposed by Dvorkin, Cuitiño and Gioia (1990), which belongs to the statically and kinematically optimal non-symmetric (SKON) formulation. In this formulation, the kinematics that allows for relative rigid body motion and the enforcement of the traction continuity are introduced at element level, resulting a non-symmetric formulation. Different constitutive relations can be used to describe the behavior of the zones with and without cracks. For the zone without cracks it was used a linear elastic model and for the cracked zone it was analyzed the behavior of two different constitutive models: linear and exponential. The ability of the model to represent the behavior of cracked structural elements was illustrated by bending and tensile tests and the results were compared with numerical and experimental data. Regarding the constitutive models for the fracture zone, it was concluded that the linear model was not suitable because it overestimated the maximum stress and promoted a brittle softening. In contrast, the exponential model proved to be very efficient to represent the behavior of quasi-brittle materials.

Keywords: Embedded discontinuities model; Strong discontinuity; elemental enrichments; non-symmetric formulation; quasi-brittle material.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	13
1.2	OBJETIVOS	15
1.3	JUSTIFICATIVA	15
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	ASPECTOS FÍSICOS E TEÓRICOS SOBRE A FRATURA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS	17
2.1	LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	17
2.2	CONTEXTUALIZAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA	19
2.3	MECÂNICA DA FRATURA E MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS	21
3	MODELOS DE FRATURA EM ELEMENTOS FINITOS.....	23
3.1	CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES	23
3.2	MODELOS DISCRETOS	24
3.3	MODELOS DISTRIBUÍDOS	26
3.4	MODELOS INCORPORADOS	28
3.5	TENDÊNCIAS DE UNIFICAÇÃO	32
4	MODELOS COM DESCONTINUIDADES FORTES INCORPORADAS.....	34
4.1	PRINCÍPIO VARIACIONAL	34
4.2	APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	36
4.3	FORMULAÇÃO ASSIMÉTRICA ESTATICAMENTE E CINEMATICAMENTE CONSISTENTE	40
4.4	PARTICULARIDADES DOS MODELOS ASSIMÉTRICOS	42
4.5	MODELO ASSIMÉTRICO IMPLEMENTADO	46
4.6	CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA	53
4.7	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EMPREGADAS	54
4.8	FLUXOGRAMA DO MODELO IMPLEMENTADO	56
5	RESULTADOS	57
5.1	TRAÇÃO PURA COM APLICAÇÃO DE DESLOCAMENTO	57
5.1.1	Comprovação do modelo e teste de objetividade	57
5.1.2	Efeito da variação de comprimento da peça	60
5.2	FLEXÃO PURA COM APLICAÇÃO DE DESLOCAMENTO	67
5.2.1	Flexão a quatro pontos.....	67
5.2.2	Flexão a três pontos	72
6	CONCLUSÃO	76
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	77
	REFERÊNCIAS	79
	ANEXOS	85
	ANEXO A - TENSÕES PRINCIPAIS E DEFINIÇÃO DA MATRIZ P	86
	A1- TENSÕES PRINCIPAIS EM ELEMENTOS FINITOS	86
	A2- DEFINIÇÃO DA MATRIZ P	87
	ANEXO B – DEDUÇÃO DO PRINCÍPIO VARIACIONAL EMPREGADO	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Processo de fissuração	18
Figura 2: Representação das regiões com e sem localização	19
Figura 3: Relação entre a curva tensão-abertura de fissura e energia de fratura	21
Figura 4: Modos de abertura de fissura	22
Figura 5: Modelos para representação de fissura a) discreto b) distribuído c) descontinuidade fraca (campo de deformações) incorporada d) descontinuidade forte (campo de deslocamentos) incorporada	24
Figura 6: Domínio com condições de contorno. a) contínuo, b) com interface interna	35
Figura 7: Funções de forma a) padrão b) deslocamento adicional	37
Figura 8: Elemento finito com banda de localização	43
Figura 9: Elemento finito com linha de localização a) unidimensional b) bidimensional	46
Figura 10: Deslocamento que causa deformação	49
Figura 11: Falha em materiais quase-frágeis a) tração simples b) torção	53
Figura 12: Relações constitutivas para o modelo implementado. a) relação para a região não fissurada. b) e c) relações constitutivas para a região fissurada	54
Figura 13: Fluxograma do modelo implementado	56
Figura 14: Barra submetida a tração pura – malhas com condições de contorno	57
Figura 15: Relação constitutiva para a linha de localização	59
Figura 16: Relação Tensão x Deformação fora da região fissurada	59
Figura 17: Relação Força x Deslocamento	60
Figura 18: Representação das peças modeladas	61
Figura 19: Relação Tensão x Deslocamento na extremidade da peça -modelo implementado	62
Figura 20: Relação Tensão x Deslocamento na extremidade da peça –referência. Fonte: d’Avila (2003)	62
Figura 21: Relação Tensão x Deformação total - modelo implementado	65
Figura 22: Relação Tensão x Deformação total	65
Figura 23: Relação constitutiva para região fissurada	66
Figura 24: Relação Tensão x Deformação região não fissurada	67
Figura 25: Geometria da peça e condições de contorno - flexão a quatro pontos	68
Figura 26: Discretização das malhas mais grosseira (M1) e mais fina (M4) com detalhe da discretização no entalhe – flexão a quatro pontos	69
Figura 27: Modelos constitutivos para a linha da fissura	70
Figura 28: Relação Carga x Deslocamento vertical com amolecimento linear e exponencial	71
Figura 29: Carga x deslocamento vertical nos pontos de aplicação de carga para diferentes malhas empregadas	72
Figura 30: Geometria da peça e condições de contorno - flexão a três pontos	73
Figura 31: Discretização das malhas com detalhe na região do entalhe – flexão a três pontos	73
Figura 32: Relação Carga x Deflexão da viga com amolecimento linear e exponencial	75
Figura 33: Carga x Deflexão da viga para diferentes malhas empregadas	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de entrada tração pura.....	58
Tabela 2 – Parâmetros de entrada tração com variação de comprimento	61
Tabela 3 – Análise energética.....	64
Tabela 4 – Malhas empregadas flexão a quatro pontos.....	68
Tabela 5 – Parâmetros de entrada flexão a quatro pontos	69
Tabela 6 – Malhas empregadas flexão a três pontos	73
Tabela 7 – Parâmetros de entrada flexão a três pontos.....	74

LISTA DE SIMBOLOS

A_e	Área do elemento
A_L	Área da região com localização
A_N	Área da região sem localização
B	Derivadas das funções de forma usuais
B_C	Derivadas das funções de forma dos deslocamentos adicionais
b	Espessura da banda de localização
\hat{b}	Forças de volume
c	Altura do elemento
D	Matriz constitutiva do material
D^{cr}	Matriz constitutiva da linha de localização
D^e	Matriz constitutiva elástica
dc	Modos de deslocamento adicionais
d_N	Deslocamento que causa deformação
$E_l(u^e)$	Módulo de elasticidade para a linha de localização
e	Modos de deformação adicionais
e'	Modos de deformação adicionais no sistema de coordenadas locais
F	Forças internas
F_e, F_i	Forças internas resultante nos nós
F^{**}	Forças internas condensadas do elemento
f_c	Forças externas adicionais
f_{ext}	Forças externas usuais
f_{ext}^i	Contribuição elementar das forças internas
f_t	Resistência a tração
G	Matriz das funções de forma dos termos adicionais para as deformações
G_T	Parâmetro relacionado ao módulo de cisalhamento
G_f	Energia de fratura
h	Largura do elemento
K^{**}	Matriz de rigidez condensada
K_{ee}, K_{ei}	Submatrizes de rigidez do elemento
K_{ee}, K_{ei}	
N	Funções de forma usuais
N_c	Funções de forma dos termos adicionais para o deslocamento
n	Direção normal ao contorno
P	Matriz que seleciona as tensões que serão transmitidas pela fissura
p	Forças nodais externas
R	Matriz de rotação
r	Vetor posição
S	Funções de interpolações de tensão
S	Interface interna
S_L	Superfície da fissura
S_t	Superfície onde são aplicadas condições de contorno naturais
S_u	Superfície onde são aplicadas condições de contorno essenciais
s	Parâmetros de tensão
t	Forças transmitidas através da fissura
t	Instante de tempo atual

$\hat{\mathbf{t}}$	Forças de superfície
t_j	Forças na interface interna
t_0	Instante de tempo inicial
\mathbf{U}	Deslocamentos nodais
\mathbf{u}	Campos de deslocamento
$\hat{\mathbf{u}}$	Condições de contorno essenciais
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$	Deslocamentos dos subdomínios do elemento
V_e	Volume do elemento
V_1, V_2	Subdomínios do elemento
w_{max}	Máxima abertura de fissura
δ	Variação
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformação
ν	Coefficiente de Poisson
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$	Tensões obtidas das relações constitutivas
$\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$	Tensões principais
χ_L, χ_N	Funções características para região com e sem localização
$\nabla \mathbf{u}$	Gradiente dos deslocamentos
$\boldsymbol{\phi}$	Matriz que seleciona nós de cada subdomínio do elemento

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Análises pela mecânica dos sólidos geralmente são conduzidas no âmbito da Mecânica do Contínuo, onde é assumida a continuidade de deslocamentos e deformações. No entanto, na maioria dos problemas de engenharia é essencial considerar as descontinuidades que ocorrem, por exemplo, nas fissuras em rochas e concretos, deslizamentos em solos e bandas de cisalhamento em metais. Três diferentes abordagens podem ser apontadas na simulação de fissuras em sólidos: abordagem por fissura discreta, abordagem por fissura distribuída e abordagem por fissura incorporada.

Neste contexto, a Mecânica da Fratura é uma ferramenta essencial para compreender os fenômenos que ocorrem a partir do momento em que o material atinge sua carga limite. Os primeiros estudos nessa área datam do início do século XX motivados por grandes perdas como naufrágios de navios, rupturas de pontes, entre outros.

Um grande salto nos estudos de fratura ocorreu por volta da década de 60 com o aperfeiçoamento dos computadores. Os primeiros modelos para representar o processo de fissura foram os modelos discretos. Nestes, a fissura é representada como uma descontinuidade na malha de elementos finitos, sendo um problema em certas situações devido a necessidade de readaptação da malha de elementos finitos ao longo do processo (*remeshing*). Apesar deste inconveniente, estes modelos são amplamente utilizados na simulação de fissuras.

Os modelos distribuídos são uma alternativa aos modelos discretos. Estes modelos começaram a se popularizar no meio científico a partir da década de 80. Nestes modelos o material é assumido contínuo e a fissura é espalhada por todo o elemento. A fissuração se dá pela perda das propriedades de rigidez do material. Um inconveniente dos modelos

distribuídos é a falta de objetividade em relação a malha de elementos finitos, mas em contrapartida apresentam a capacidade de representar o comportamento de materiais com diversas fissuras espalhadas ao longo da estrutura e por isso são extensivamente utilizados.

Já formulados no contexto de elementos finitos, os modelos incorporados surgiram como uma alternativa para eliminar as desvantagens apresentadas pelos modelos discretos e distribuídos. Para isso a fissura é incorporada no interior do elemento finito podendo simular descontinuidades fortes (deslocamentos) e fracas (deformações). Estes modelos vêm ganhando espaço por eliminar os inconvenientes das formulações discreta e distribuída além de poder ser incluído em códigos de elementos finitos existentes.

Os modelos acima citados são capazes de representar o comportamento de diversos tipos de materiais. Dentre estes, os materiais quase-frágeis que são caracterizados por apresentar um ramo de abrandamento de tensões após atingir a carga de pico (*softening*). Estes materiais são de grande relevância no ramo da engenharia visto que representam o comportamento de diversos materiais atualmente utilizados, como concretos, alvenarias, rochas, certos polímeros, cerâmicas e também alguns tipos de metais podem ser considerados de comportamento quase-frágil. Além disso, sob algumas condições atmosféricas particulares, materiais que são normalmente classificados como dúcteis ou frágeis podem apresentar comportamento quase-frágeis (WELLS, 2001).

Esta classe de materiais é caracterizada por apresentar um regime elástico bem definido seguido por um regime não elástico no qual são identificados dois estágios. Um primeiro estágio onde ocorre a localização de deformações, e um segundo estágio onde é observada a descontinuidade de deslocamentos. Quando o carregamento se aproxima da carga de pico começam a ocorrer deformações inelásticas em uma banda estreita do material. A partir deste ponto começam a ocorrer descontinuidades de deslocamentos sobre uma superfície enquanto as tensões vão tendendo a zero, quando ocorre a ruptura completa do material. A fim de captar este comportamento quase-frágil, nesta dissertação foi implementado um modelo de descontinuidades fortes incorporadas.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho apresenta como objetivo geral a simulação do processo de fratura através de um modelo de descontinuidades fortes.

Para tal, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- Investigar teoricamente as formulações existentes para a simulação de fratura através do uso de descontinuidades fortes;
- Implementar o modelo de descontinuidades fortes adotado dentro do programa *Metafor* (PONTHOT, 1995).
- Validar resultados através da comparação com resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura.

1.3 JUSTIFICATIVA

A formação e propagação de fissuras é um fenômeno observado em diversos materiais utilizados na engenharia, como concreto, metais, cerâmicas e rochas. Estes materiais geralmente apresentam um regime elástico bem definido, seguido por um regime não elástico caracterizado pelo aparecimento de um pronunciado gradiente de deslocamentos em zonas estreitas, denominadas *zonas de localização de deformação*. O aumento da localização de deformações é acompanhado pela redução das tensões, processo denominado de amolecimento (*softening*). Tanto para a modelagem de elementos estruturais como para a compreensão do comportamento destes materiais é importante uma representação numérica precisa deste fenômeno.

Atualmente estão disponíveis na literatura diversos modelos capazes de representar o processo de propagação de fissuras. Entretanto, a utilização de modelos incorporados, se justifica por introduzir a descontinuidade de deslocamentos no volume do elemento, evitando o processo de reconstrução de malha pois a fissura pode se propagar em qualquer direção

dentro do elemento finito, não estando restrita ao contorno destes, além de possibilitar uma melhor precisão do processo de fratura em comparação com modelos distribuídos.

A implementação de um modelo de descontinuidades fortes ainda se justifica por prover uma plataforma computacional para que outros trabalhos numéricos e aplicados sejam desenvolvidos no Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM) do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está estruturada em 6 capítulos.

No Capítulo 2 discorre-se sobre aspectos físicos e teóricos relacionados ao processo de formação e propagação de fissura em materiais quase-frágeis. Inicialmente é exposto o fenômeno de localização de deformações. Passa-se a uma breve revisão bibliográfica sobre a Mecânica da Fratura. Por fim são abordados aspectos teóricos do problema de fissuração em materiais quase-frágeis descritos no contexto da Mecânica da Fratura.

No Capítulo 3 são compilados os principais modelos no contexto da mecânica da fratura não-linear, elencando suas características e apontando as vantagens e desvantagens de cada um. O modelo de fissura com descontinuidades forte, utilizado nesta dissertação para simular o fenômeno de formação de fissuras em materiais quase-frágeis é apresentado no Capítulo 4. Ainda neste capítulo é demonstrado o Princípio Variacional utilizado para descrever o problema. São expostas as características do modelo bem como a particularização para a análise por elementos finitos. Por fim é descrito o modelo implementado.

O Capítulo 5 se destina a apresentação e discussão dos resultados obtidos. A validação do modelo foi realizada através da comparação dos resultados com valores numéricos e experimentais obtidos na literatura. Inicialmente são apresentados exemplos de tração pura, em seguida, são apresentados exemplos de flexão a três e quatro pontos.

Para finalizar esta dissertação no Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

2 ASPECTOS FÍSICOS E TEÓRICOS SOBRE A FRATURA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS

Concreto, rochas e cerâmicas são conhecidos como materiais quase-frágeis. Estes materiais se diferenciam dos materiais frágeis por apresentarem como característica um regime elástico bem delineado seguido por um regime não elástico onde ocorre uma redução de tensões a cada incremento de deformação, ou seja, um processo de amolecimento. Essa distinção entre os dois tipos de materiais é importante para que se possa estudar de forma correta os diversos mecanismos envolvidos na dissipação de energia que levam a este comportamento. Neste capítulo é apresentado o fenômeno de fratura em materiais quase-frágeis e também as formas de representar este problema através da Mecânica da Fratura.

2.1 LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

O fenômeno de localização de deformações é observado em diversos materiais de comportamento dúctil e quase-frágil. Estes materiais apresentam dois regimes bem definidos. Até certos níveis de carregamento o comportamento é elástico, onde todos os processos são reversíveis, e para níveis maiores de carregamento passa-se a um regime não elástico, representado por fenômenos não reversíveis que antecedem a ruptura. Tais comportamentos são consequência do aparecimento de elevados gradientes de deslocamento em regiões estreitas denominadas de *banda de localização de deformação*. Esse fenômeno é influenciado pela geometria da peça, condições de contorno, heterogeneidade ou defeitos locais do material (DRIEMEIER, 1999).

Em materiais quase-frágeis o fenômeno de localização é observado quando a máxima tensão principal ultrapassa a resistência à tração, e as fissuras começam a se formar em planos perpendiculares à esta tensão. A partir desse ponto, ocorre uma redução nas tensões enquanto as deformações continuam a aumentar, ou seja, um amolecimento na resposta de carga-deslocamento (D'HERS; DVORKIN, 2008).

Este processo pode ser dividido em três estágios. Num primeiro momento ocorre a formação de microfissuras que induzem a uma resposta não-linear do material e uma notável dissipação de energia. A deformação e o campo de deslocamentos são contínuos, porém há uma concentração de tensão e o material começa a sofrer o amolecimento (CLARO, 2011).

Numa segunda fase, a resposta macroscópica do material torna-se instável. Ocorre uma localização de deformações em uma banda de espessura estreita formando uma descontinuidade fraca, ou seja, o campo de deslocamentos permanece contínuo, mas observa-se um salto no campo de deformações (HUESPE; OLIVER, 2011).

Com o acréscimo de carregamento, a banda de localização colapsa em uma superfície e a capacidade de transmitir tensão através da fissura tende a zero. O campo de deslocamentos torna-se descontínuo sobre a superfície (descontinuidade forte) e o campo de deformações torna-se infinito (CHAVES; OLIVER, 2001). A representação deste processo pode ser observada na figura 1, em que ϵ é a deformação, u é o campo de deslocamentos e x é o eixo ao longo da abertura da fissura.

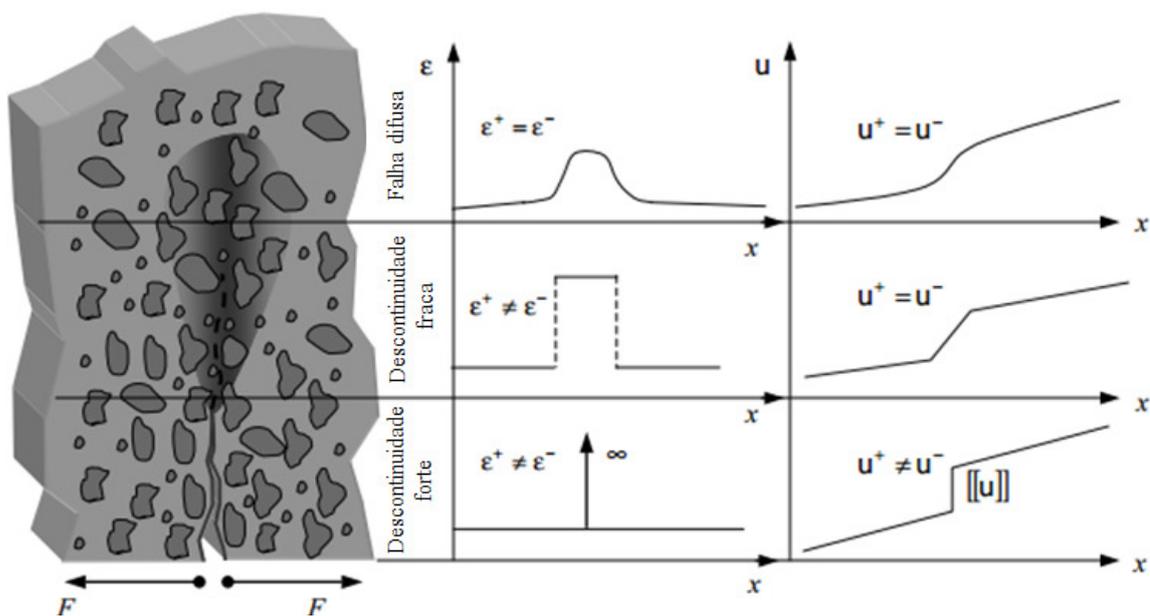


Figura 1: Processo de fissuração. Adaptado de Chaves e Oliver (2001)

É importante ressaltar que, antes de ocorrer a localização das deformações todo o material se comporta de forma uniforme, conforme observa-se no trecho ascendente da curva representada na figura 2. Entretanto, após atingir a tensão de pico (f_i), a resistência do material

começa a diminuir e as regiões com e sem localização apresentam comportamentos diferentes. Na região com localização ocorre um acréscimo de deformações, representado pela curva II da figura 2. Como consequência deste processo, na região onde não ocorre a localização ocorre uma retração, o que é chamada de descarga elástica, fenômeno observado na curva I da figura 2. Este fenômeno foi primeiramente observado por Hillerborg, Modéer e Petersson(1976).

Como o material já não se comporta de forma uniforme são necessárias duas curvas para representar o comportamento pós-pico do material. Uma curva tensão-deformação para a parte do material que sofre descarga elástica e no trecho de amolecimento é adequado representar o comportamento do material por uma curva de tensão-deslocamento, ou também, de tensão-abertura de fissura (ARAÚJO, 2001)

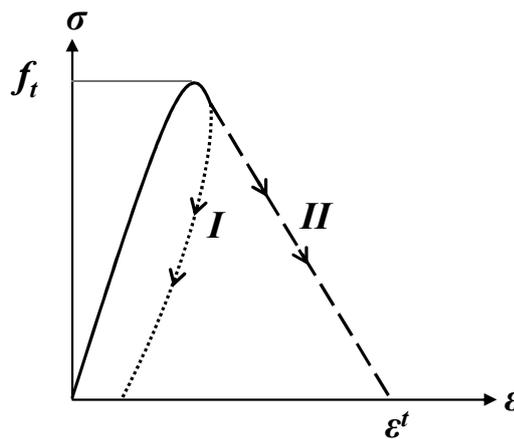


Figura 2: Representação das regiões com e sem localização

2.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA

Conhecimentos de mecânica dos sólidos e ciência dos materiais são fundamentais para a compreensão do processo de fratura em sólidos, pois estas duas áreas dão base para descrever de forma adequada o processo de deformação bem como para conhecer os mecanismos físicos envolvidos no processo. A Mecânica da Fratura une essas duas áreas de conhecimento, tendo como finalidade quantificar as condições que levam um sólido ao

colapso após o início do processo de fissuração. A forma como ocorre o processo de fissuração é diferente de acordo com o material, portanto, existem diversos modelos para simular fissuras de forma mais adequada para cada situação (BITTENCOURT, 1999).

Os primeiros estudos relacionados com a Mecânica da Fratura remontam ao início do século 20, quando Inglis, em 1913, publicou um trabalho sobre a concentração de tensões em uma placa com furo, comprovando que defeitos localizados poderiam causar elevação no campo de tensões. Com base nesses estudos, em 1920, Griffith estabeleceu uma relação entre a resistência à fratura e o tamanho da fissura através de um critério energético, sendo este o marco inicial da Mecânica da Fratura (KUMAR, BARAI, 2011; ANDERSON, 2005).

Entre as décadas de 30 e 40 foram desenvolvidas diversas soluções matemáticas para meios elásticos próximos a ponta da fissura. Entretanto, tais estudos apresentavam apenas fins acadêmicos não se fazendo uso em aplicações de engenharia. Irwin foi o responsável por tornar a Mecânica da Fratura uma ferramenta aplicável a análise estrutural. Em 1948, estendeu a teoria de Griffith para metais, incluindo a energia dissipada pelo fluxo plástico. Além disso, introduziu os conceitos de “Taxa de Alívio de Energia”, em 1956, e “Fator de Intensidade de Tensões”, em 1958 (KANNINEN; POPELAR, 1985).

A década de 60 foi marcada por grandes avanços na área. Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) introduziram o conceito de forças coesivas na ponta da fissura. Wells, no ano de 1961, propôs a abertura da ponta da fissura como medida da resistência à fratura, parâmetro conhecido como CTDO (*Crack Tip Opening Displacement*). Em 1968, Rice introduziu a integral J , possibilitando a obtenção da taxa de alívio de energia para materiais com comportamento linear e não-linear. No mesmo ano, Rice, Rosengren e Hutchinson, relacionaram a integral J com o campo de tensões na ponta da fissura para materiais elastoplásticos, denominada de solução HRR (ANDERSON, 2005), (KANNINEN; POPELAR, 1985).

Nesse período a Mecânica da Fratura atraía o interesse de diversos pesquisadores. Entre esses, dois nomes que se destacam a partir da década de 70 são Hillerborg e Needleman. Baseado nos conceitos de forças coesivas, Hillerborg e colaboradores (1976) desenvolveram o modelo de fratura fictícia. No ano de 1987, Needleman propôs a metodologia das interfaces coesivas aplicadas a materiais frágeis e dúcteis.

2.3 MECÂNICA DA FRATURA E MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS

O processo de propagação de fissuras pode estar associado a tensões ou deformações excessivas e os efeitos de localização de deformação podem ser intensos ou moderados. Essas respostas do material estão relacionadas a forma como a fissuração se dá na microestrutura do material. Quando as localizações de deformação estão limitadas em uma pequena região na ponta da fissura o meio elástico envolve-a é o principal responsável por conter a fissuração. Logo, o processo pode ser simulado através da mecânica da fratura linear elástica satisfatoriamente. No entanto, se a região onde ocorrem fenômenos não elásticos for significativa, em relação ao tamanho da região elástica, a mecânica da fratura linear elástica não tem mais efeito. Sendo necessária a introdução de um modelo baseado na mecânica da fratura não-linear (BITTENCOURT, 1999).

No contexto da Mecânica da Fratura não-linear, as formulações existentes são divididas em três categorias: fissura discreta, fissura distribuída e fissura incorporada. Estes modelos serão tratados no capítulo 3.

Na curva de tensão (σ) - abertura de fissura (w), a energia de fratura (G_f) é representada pela área sob a curva. Portanto, conhecendo a forma da curva a energia de fratura pode ser completamente definida. Na figura 3 são apresentadas algumas formas de representação da curva tensão-abertura de fissura e a energia de fratura.

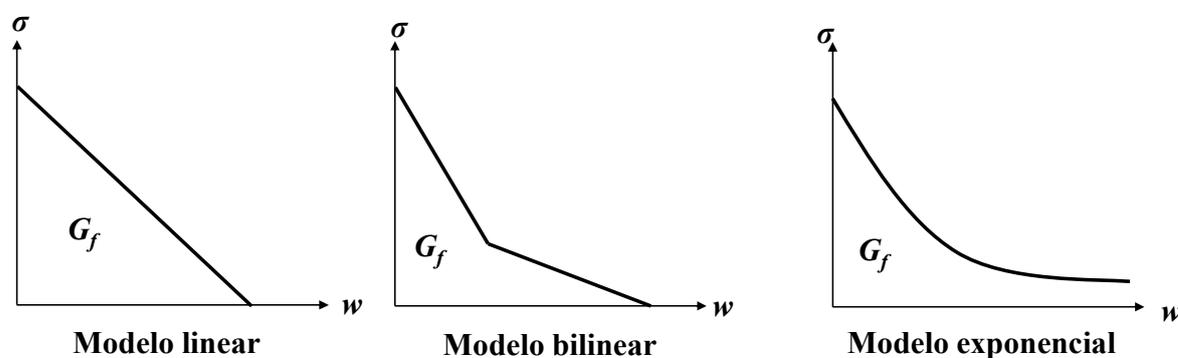


Figura 3: Relação entre a curva tensão-abertura de fissura e energia de fratura

Além de fatores como energia de fratura e lei de amolecimento é importante saber a forma com que a fissura se propaga. O modo de abertura de fissura está relacionado ao material e a forma como o corpo é solicitado. A propagação pode ocorrer de três diferentes formas, conforme figura 4.

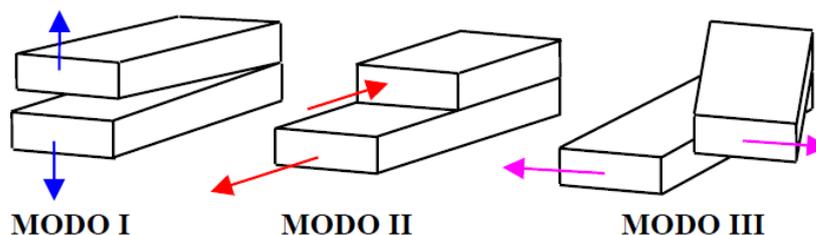


Figura 4: Modos de abertura de fissura. Fonte: d'Avila (2003)

O modo I ocorre para esforços de tração, onde o desenvolvimento da fissura se dá num plano perpendicular ao do carregamento. No modo II ocorre cisalhamento, com deslocamento em plano paralelo ao carregamento. O modo III é representado pelo rasgamento, caracterizado pelo escorregamento entre as faces da fissura, entretanto com deslocamento perpendicular à fissura (ANDERSON, 2005).

Quando um corpo é solicitado por mais de uma das formas apresentadas na figura 4, a abertura da fissura ocorre em modo misto. O caso de uma viga ensaiada a 4 pontos, ou seja, dois pontos de apoio nas extremidades da viga e dois pontos de aplicação de carga de forma assimétrica em relação aos apoios, é um exemplo do modo misto, onde o processo de fratura se dá por uma combinação dos modos I e II (d'AVILA, 2003).

3 MODELOS DE FRATURA EM ELEMENTOS FINITOS

3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

A modelagem do processo de fissuração em elementos estruturais inicialmente foi proposta no contexto de fissuras discretas, posteriormente modelos distribuídos foram ganhando espaço e mais recentemente grande atenção tem sido dada aos modelos incorporados.

Nos modelos de fissura discreta se trabalha com a parte do sólido que permanece contínua, visto que a formação e propagação de fissuras se dá na interface entre os elementos finitos. Esta metodologia acaba gerando uma restrição na direção de propagação de fissuras o que restringe a sua aplicação a modelos que envolvem a progressão de poucas fissuras.

Nos modelos de fissura distribuída, o material fissurado é considerado como contínuo e a descontinuidade de deslocamentos é espalhada ao longo do elemento alterando-se as equações constitutivas. Esta abordagem apresenta problemas relacionados com a objetividade em relação a malha de elementos finitos, travamento de tensões e dificuldades no estudo de fraturamento localizado.

Uma abordagem que vem ganhando espaço são os modelos de fissura incorporada, onde a descontinuidade de deslocamentos é incorporada dentro do elemento finito de forma forte (descontinuidade no campo de deslocamentos) ou de forma fraca (descontinuidade no campo de deformações). Esta metodologia reúne aspectos interessantes das formulações discretas e distribuídas. Não sendo necessária a redefinição da malha de elementos finitos (*remeshing*), problema observado nos modelos discreto e também há objetividade em relação a malha de elementos finitos, grande desvantagem dos modelos distribuídos. Porém, apresentam como desvantagens a necessidade de realizar um processo iterativo em nível de elemento e formulações relativamente complexas.

Uma representação de como o processo de fratura é abordado na análise por elementos finitos é mostrada na figura 5 para uma melhor compreensão da diferença entre os modelos.

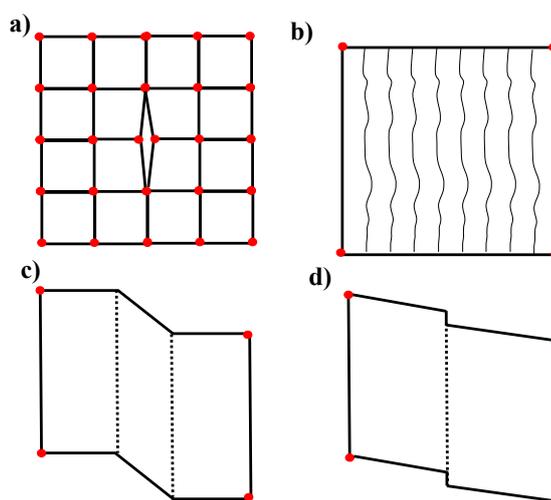


Figura 5: Modelos para representação de fissura a) discreto b) distribuído c) descontinuidade fraca (campo de deformações) incorporada d) descontinuidade forte (campo de deslocamentos) incorporada

Estes modelos apresentam em comum três componentes essenciais: uma relação tensão-deformação para a região não fissurada, um critério de abertura de fissura que também define a direção da fissura e uma lei de evolução para a área fissurada. (PLANAS et al., 2003)

Nas seções seguintes é feita uma breve revisão sobre os três modelos, os campos de aplicação, suas vantagens e desvantagens. Além de apresentar uma tendência de unificação entre os modelos a fim de tirar proveitos dos benefícios e também eliminando alguns inconvenientes inerentes a cada formulação.

3.2 MODELOS DISCRETOS

Os precursores dos modelos discretos foram Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), os quais introduziram conceitos de forças coesivas na ponta da fissura. Em seguida, Hillerborg e

coautores (1976) sugeriram um modelo considerando duas relações constitutivas independentes, uma relação tensão-deformação para o material não fissurado e uma relação tensão-abertura de fissura para representar o processo de fratura. Devido a simplicidade de aplicação e coerência com a realidade física, este modelo é amplamente utilizado em engenharia.

De grande relevância no contexto das fissuras coesivas aplicadas ao método dos elementos finitos é o modelo desenvolvido por Needleman (1987). Neste, empregam-se elementos de interface (coesivos) entre os elementos finitos, nos quais são estabelecidas relações constitutivas diferentes das consideradas para o volume do corpo.

Os trabalhos apresentados acima abriram caminho para que diversos modelos fossem desenvolvidos para representar os mais diversos tipos de materiais como concreto (LENS; BITTENCOURT; D'AVILA, 2009) cerâmicas (BITTENCOURT; INGRAFFEA, 1995), rochas, polímeros (PLANAS; ELICES, 2002), metais (YUAN; LI, 2014), além de interface entre diferentes materiais (XU; NEEDLEMAN, 1993).

A ideia principal da abordagem discreta é representar as fissuras através da separação dos elementos ao mesmo tempo em que forças são introduzidas para representar as tensões transmitidas na região danificada. Uma forma de implementar estes modelos em elementos finitos é considerar elementos de interface sem espessura e com rigidez muito alta antes do material fissurar e ao atingir um critério de propagação tornar a rigidez dependente da abertura da fissura, o que simula o efeito coesivo da região fraturada (D'AVILA, 2003).

Nos modelos discretos é necessário estabelecer condições relativas a malha de elementos finitos. Neste sentido, é possível utilizar a abordagem por superfícies coesivas ou por malhas adaptativas (*remeshing*). Na primeira a fissura é representada por uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. A formação e propagação de fissuras ocorre nos contornos dos elementos finitos e a parte volumétrica permanece contínua, restringindo a direção da propagação de fissura, como observa-se no trabalho de Lens, Bittencourt e d'Avila (2009). Pode-se representar também através de modelos com readaptação de malha. Nestes, os elementos de interface somente são inseridos quando é atingido um critério de propagação de fissura. As faces das fissuras são continuamente reorientadas e a malha é refeita para adaptação das novas superfícies de fissura como no trabalho de Geissle, Netzker e Kaliske (2010).

Visto que as fissuras não se propagam em uma linha reta, os modelos de superfícies coesivas apresentam como inconveniente a restrição da fissura aos contornos dos elementos finitos, gerando a necessidade de malhas mais refinadas. Já os modelos de malhas adaptativas representam de forma mais natural a propagação de fissuras, porém tem um elevado custo computacional devido às repetidas mudanças topológicas da malha.

Os métodos de fissura discreta possuem a capacidade de representar realisticamente o processo de fratura. Entretanto, a direção e o comprimento das fissuras devem ser conhecidos a priori a fim de prever o correto comportamento da estrutura analisada. Contudo, modelos coesivos são relativamente simples para implementação numérica e extensivamente utilizados.

3.3 MODELOS DISTRIBUÍDOS

Os modelos distribuídos representam as descontinuidades de deslocamento com base em conceitos da Mecânica do Contínuo. O processo de fratura é iniciado quando um critério de propagação é alcançado e a fissura é simulada pela alteração da relação tensão-deformação nos pontos de integração (SPENCER, 2000).

Inicialmente, os modelos de fissura distribuída consideravam a direção da fissura fixa ao longo do processo (*fixed smeared approach*) como no modelo de Suidan e Schonobrich (1973). Mais tarde, Cope et al. (1980) propuseram um modelo com rotação dos eixos de ortotropia do material, estimulando o desenvolvimento de modelos que permitissem a rotação da fissura de acordo com os eixos das tensões principais (*rotational smeared approach*) (GUPTA E AKBAR, 1984).

Um inconveniente destes modelos é a falta de objetividade com relação a malha de elementos finitos, isto porque a parte inelástica das deformações é descrita como deformações de fissuração e o material é assumido contínuo, entretanto a abertura da fissura é uma descontinuidade real de deslocamentos. Para contornar este problema, Bazant e Oh (1983) introduziram o conceito de fissura em banda, sendo que a região não-linear onde ocorre a

fissura foi considerada como contínua e correspondente a uma banda estreita na ponta da fissura.

De acordo com d'Avila (2003), mesmo considerando o conceito de fissura em banda tais modelos apresentavam alguns problemas na simulação nos casos de uma fissura dominante para malhas muito refinadas. Portanto, para que se tenha objetividade em relação à malha é necessário delimitar um tamanho mínimo para os elementos localizados na banda de fissuração. Em Rots (1988) são apresentadas algumas recomendações para determinar a largura da banda de localização de acordo com o elemento finito e a quantidade de pontos de Gauss empregados. Uma aproximação mais rigorosa é sugerida por Oliver (1989) onde a largura da banda é definida pela relação entre a energia dissipada por unidade de área (energia de fratura) e a energia dissipada por unidade de volume (energia específica) no ponto em questão. Desta forma, uma expressão para a largura da banda pode ser definida de acordo com o tamanho da malha, direção da fissura e posição desta. Esta técnica permite o refinamento da malha o quanto for necessário além de ser insensível à regra de integração utilizada.

Nas soluções apresentadas a dependência de malha é eliminada pela utilização de métodos de regularização. As principais ramificações destes métodos são os modelos não-locais, onde as tensões em um ponto dependem das tensões em pontos vizinhos (HU et al., 2014; JIRÁSEK, 1998), modelos contínuos com gradiente de ordem superior, que são descritos através de equações diferenciais com derivadas espaciais de alta ordem (LEE; CHOI; CHO, 2004) e modelos contínuos de Cosserat que também são considerados de alta ordem visto que são adicionados graus de liberdades de rotação independentes das translações (ALSHIBLI, ALSALEH, VOYAJIDJIS, 2006; BORST, 1991).

Um problema que pode acontecer nestes modelos é o travamento de tensões (*stress-locking*) devido a possibilidade de a fissura se desenvolver em direções arbitrárias não alinhadas com a malha de elementos finitos. Como alternativa para solucionar este problema, Jirasek e Zimmermann (1998) propuseram uma solução baseada na transição de modelos de fissura rotacional para um modelo de dano escalar.

Apesar disto, a abordagem distribuída é extensivamente utilizada devido a simplicidade de implementação por considerar fissuras usando meios contínuos, além de apresentar bons resultados na previsão do comportamento estrutural, como nos trabalhos de Hariri-Ardebili e Seyed-Kolbadi (2015) e d'Avila (2003). No primeiro são modeladas

barragens submetidas a carregamentos sísmicos e no segundo são modelados diversos elementos estruturais em concreto armado, ambos apresentando resultados precisos em comparação com dados experimentais e teóricos.

Os modelos distribuídos se mostram atrativos por preservar a topologia da malha de elementos finitos, mantendo a continuidade de deslocamentos ao longo da análise, além de não impor restrições com respeito a orientação dos eixos da fissura (GAMINO et al., 2010).

3.4 MODELOS INCORPORADOS

Os modelos com fissura incorporada são mais recentes que os modelos discretos e distribuídos. A ideia principal desta formulação é incorporar descontinuidades de deslocamentos ou deformações no interior de elementos finitos padrão, sendo que o surgimento e propagação de fissuras pode ocorrer em qualquer direção e a malha de elementos finitos tem pouca interferência no resultado final. Essa abordagem se mostra uma ferramenta valiosa na modelagem de regiões com alta concentração de deformações, como a zona de processo de fratura em concreto ou bandas de cisalhamento em solos e metais (JIRÁSEK, 2000).

Motivados pelo fato de que formulações de elementos finitos convencionais não se adaptavam bem a problemas de plasticidade Johnson e Scott (1981) desenvolveram uma das primeiras tentativas de modificar as funções de forma de elementos finitos para captar os efeitos de descontinuidades de deslocamento. O modelo apresentado era limitado a casos perfeitamente plásticos unidimensionais. Droz (1987) apresentou uma tentativa de melhorar a descrição cinemática para elementos fissurados considerando um material perfeitamente frágil em que as tensões normais caíam a zero imediatamente após a formação da fissura.

Ortiz, Leroy e Needleman (1987) propuseram a incorporação de descontinuidades no campo de deformações de tal forma que uma descontinuidade fraca pudesse ser capturada. As descontinuidades eram incorporadas a partir do momento em que um critério de localização era atingido. A banda de localização era obtida pela incorporação das descontinuidades em dois elementos adjacentes tornando a solução dependente da malha.

O trabalho de Ortiz, Leroy e Needleman (1987) pode ser considerado o marco inicial dos modelos incorporados. Com base neste, inúmeros estudos foram desenvolvidos considerando descontinuidades incorporadas. A ideia destes autores foi ampliada e melhorada por Belytschko, Fish e Englemann (1988). A proposta era incorporar uma banda de localização dentro do elemento finito. Desta forma, a espessura da banda não depende mais do tamanho do elemento podendo ser considerada uma propriedade do material.

Os modelos de descontinuidades incorporadas podem ser classificados em três categorias, definidas como simétrica estaticamente consistente (SOS), simétrica cinematicamente consistente (KOS) e assimétrica estaticamente e cinematicamente consistente (SKON). A primeira considera a continuidade das tensões através da interface interna, mas não garante a continuidade cinemática. A segunda descreve os aspectos cinemáticos satisfatoriamente, mas conduz a uma inapropriada relação de tensões na fissura. E a última apresenta uma melhor performance por usar uma condição de continuidade de tensões natural e representar razoavelmente bem a continuidade cinemática (JIRÁSEK, 2000).

As técnicas de incorporação de descontinuidades em elementos finitos são elaboradas a partir de diferentes pontos de partida. Na literatura são encontradas formulações partindo de simples considerações físicas (KLISINSKI; RUNESSON; STURE, 1991), ou adicionando termos em princípios variacionais como os de Hellinger-Reissner (ORTIZ; LEROY; NEEDLEMAN, 1987) ou o de Hu-Washizu (DVORKIN; ASSANELLI, 1991; DVORKIN; CUITIÑO; GIOIA, 1990), para representar o trabalho das forças coesivas na interface interna.

Do ponto de vista matemático, a incorporação de descontinuidades fortes é equivalente a considerar a adição de uma função Heaviside (H) no campo de deslocamentos e por consequência a distribuição de Dirac (δ) no campo de deformações. Com base nisso, Simo, Oliver e Armero (1993) elaboraram uma formulação considerando uma lei constitutiva de amolecimento com caráter distribucional. Em vez de postular uma lei para a interface, este método possibilita o uso de leis contínuas com uma função regular aproximada pela distribuição de Dirac. O modelo pode ser aplicado tanto para fratura dúctil como para fratura quase-frágil.

Dvorkin e coautores (DVORKIN; ASSANELLI, 1991; DVORKIN; CUITIÑO; GIOIA, 1990) desenvolveram um método para simular descontinuidades fortes utilizando o

princípio dos trabalhos virtuais considerando um termo adicional para representar as forças de superfície na interface interna do elemento. O modelo proposto é não simétrico (SKON) e é apropriado para simular fratura em materiais quase-frágeis, sendo implementado nesta dissertação. Além disso, os autores propõem um elemento bidimensional baseado no método de interpolação mista de componentes tensoriais, o QMITC. As vantagens deste elemento são relacionadas à insensibilidade de distorção de malha. Este modelo foi ampliado por d'Avila (2003) em sua tese de doutorado para a simulação de estruturas de concreto armado.

No contexto das descontinuidades fracas Huespe et al. (2009) apresentam um modelo para análise de fratura dúctil utilizando uma relação constitutiva de Gurson modificada. No modelo implementado a largura de banda é considerada uma propriedade do material. A formulação permite que a descontinuidade fraca evolua para uma descontinuidade forte, além de ser utilizado um algoritmo de rastreamento para obter a continuidade da geometria da banda sobre a malha de elementos finitos.

Um dos motivos da popularização de modelos incorporados está relacionado a facilidade em se aplicar diversas equações constitutivas, para modelar diferentes comportamento em sólidos. Dujc, Brank e Ibrahimbegović (2010) demonstram a versatilidade desta metodologia através de um modelo capaz de representar a zona de processo de fratura em concreto, a delaminação em materiais compostos e falha em materiais dúcteis. Neste modelo o salto de deslocamento é interpolado de forma linear nas direções normal e tangencial da linha de descontinuidade.

Algumas formulações, principalmente as simétricas estaticamente consistentes (SOS), não asseguram o movimento relativo entre as partes separadas pela abertura da fissura e a progressão destas pode ser travada devido a incompatibilidades cinemáticas entre fissuras dos elementos vizinhos, problema conhecido como travamento de tensões (*stress locking*). Uma solução para reestabelecer a continuidade geométrica das linhas de fissuras nestes elementos são os algoritmos de rastreamento (*tracking algorithm*) que preveem o caminho de propagação com base na história de carregamento e no estado de deformação do sistema (OLIVER et al., 2002a; ZHANG et al., 2015).

Estes algoritmos tornam a análise mais complexa e apresentam alguns inconvenientes na implementação em programas de elementos finitos padrão. Como alternativa Sancho et al. (2007) consideraram uma certa adaptabilidade na direção de

propagação de fissuras em cada elemento. Geralmente a direção de propagação de fissura é considerada fixa, ou seja, a partir do momento em que é detectada a abertura de fissura não se altera mais esta direção. No trabalho de Sancho et al. (2007) esta direção é recalculada até que a abertura de fissura atinja um valor entre 10 a 20% da relação Gf/ft , onde Gf é a energia de fratura e ft é a resistência a tração do material. Esta técnica é aplicada com êxito por Gálvez et al. (2013).

Os elementos finitos com descontinuidades incorporadas, fazem parte dos modelos com enriquecimento elementar (E-FEM), nestes geralmente são adicionados graus de liberdade que necessitam de condensação estática para não influenciar na solução global. Mas esta não é a única forma de representar fissuras por modelos incorporados. Recentemente vem ganhando espaços os chamados elementos finitos estendidos (X-FEM), baseados no enriquecimento das funções interpoladoras associadas aos nós existentes tendo como precursores Melenk e Babuška (1996). No entanto, estes elementos requerem um maior esforço na implementação em comparação com os modelos de enriquecimento elementar.

Oliver, Huespe e Sánchez (2006) realizaram um estudo comparativo entre as duas metodologias constatando que não há diferença significativas quanto à precisão e convergência de resultados para malhas refinadas. Entretanto, uma melhor performance para malhas mais grosseiras é observada nos modelos de enriquecimento elementar (E-FEM). Estes modelos também se sobressaem aos de enriquecimento nodal (X-FEM) em relação ao custo computacional, principalmente quando há o surgimento de múltiplas fissuras. Estudos mais aprofundados sobre estes modelos podem ser encontrados em Jirásek e Belytschko (2002) e Wells (2001).

A utilização de modelos incorporados em análise dinâmica são mais recentes e vem se mostrando uma ferramenta bastante atrativa. Linder e Armero (2009) conseguiram representar o processo de ramificação de fissuras em materiais frágeis utilizando um modelo de descontinuidades fortes incorporadas. Apontando como vantagem a simplicidade da cinemática adotada para representar a ramificação das fissuras. Huespe et al. (2006) propõem uma formulação para analisar a propagação rápida de fissuras sem a necessidade de um tratamento especial para os elementos interceptados pela ramificação da fissura.

Em resumo, as abordagens por descontinuidades de deslocamento ou deformação levam em conta duas condições básicas na região com localização. A primeira é referente ao

equilíbrio, atentando-se para a continuidade de tensões através da interface da descontinuidade. A segunda diz respeito a correta representação do movimento de corpo rígido entre os lados do elemento separados pela descontinuidade (JUÁREZ-LUNA; AYALA, 2014).

Como as descontinuidades são introduzidas nas funções de forma do elemento finito, os modelos incorporados se sobressaem aos discretos por não restringir a propagação da fissura na interface entre os elementos. Estes modelos também não apresentam a dependência de malha observada nos modelos distribuídos. Além disso, os modelos incorporados podem simular o comportamento de diversos tipos de materiais submetidos à carregamentos quase estáticos e dinâmicos.

3.5 TENDÊNCIAS DE UNIFICAÇÃO

Como observado nas seções precedentes todos os modelos apresentam vantagens e desvantagens na representação de fissuras e também possuem suas limitações. Para tirar proveito das melhores características de cada formulação alguns autores têm trabalhando em combinações de modelos como Borst et al.(2004), Jirásek e Zimmermann (2001a), Jirásek e Zimmermann (2001b) e Oliver et al.(2002b).

Para aproveitar as vantagens dos modelos discreto e distribuído e eliminar algumas desvantagens, Borst et al.(2004) propuseram uma unificação das duas técnicas. No modelo desenvolvido as fissuras inicialmente são tratadas com um modelo distribuído evoluindo gradualmente para uma fissura discreta através de processos adaptativos. A formulação apresentada se assemelha muito a ideia dos modelos de descontinuidades fortes incorporadas.

A combinação de modelos distribuídos e incorporados é interessante do ponto de vista físico. Modelando o processo inicial de formação de fissuras por modelos distribuídos e a partir de certo ponto incorporar as descontinuidades de deslocamentos. Tal proposta é abordada por Jirásek e Zimmermann (2001a), Jirásek e Zimmermann (2001b). O processo de fraturamento é inicialmente modelado por um modelo distribuído não-local e a partir de certo ponto é introduzido um modelo incorporado de descontinuidades fortes.

Na abordagem por modelos incorporados o processo de fratura pode ser representado por descontinuidades fracas (alterações no campo de deformações) ou descontinuidades fortes (alterações no campo de deslocamentos). Tendo em vista que a abertura de fissura é inicialmente caracterizada por alterações no campo de deformações e seguida por descontinuidade no campo de deslocamentos, Oliver et al.(2002b) desenvolveram um modelo unificando descontinuidades fortes e fracas, onde o processo inicia-se com a introdução de descontinuidades fracas em uma banda de fissura que ao longo do processo vai reduzindo seu tamanho até colapsar em uma descontinuidade forte.

4 MODELOS COM DESCONTINUIDADES FORTES INCORPORADAS

A incorporação de descontinuidades fortes em elementos finitos tem como finalidade representar o processo de fissuração em sólidos. A formulação apresentada a seguir é aplicada à análise não-linear material de estruturas sob estado plano de deformações com solução em deslocamentos no contexto de pequenas deformações e o elemento finito utilizado é o quadrilátero bilinear com funções interpoladoras de Lagrange.

4.1 PRINCÍPIO VARIACIONAL

Os modelos com descontinuidades fortes incorporadas simulam a relação entre os esforços transmitidos através da fissura e a abertura da fissura (descontinuidade do campo de deslocamentos interno do elemento). Para estes modelos, é necessário que o princípio variacional que representa o problema inclua a relação entre as tensões transmitidas x abertura de fissura (D'AVILA, 2003).

O princípio variacional de energia potencial total, amplamente utilizado em elementos finitos, é dito irreduzível ou de um campo, por ter apenas os deslocamentos como variáveis dependentes que devem atender às condições geométricas de contorno, além de relações deformação-deslocamento e de relações tensão-deformação. A sua condição de mínimo fornece apenas parte das equações que regem o modelo matemático dos sólidos elásticos (SORIANO; LIMA, 2003).

Para incorporar descontinuidades no campo de deslocamentos, utiliza-se o princípio variacional de Hu-Washizu. Neste princípio os campos de deslocamento, \mathbf{u} , deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e tensão, $\boldsymbol{\sigma}$, são independentes entre si. Estes campos são definidos em um domínio \mathbf{V} , em que são aplicadas forças de volume, $\hat{\mathbf{b}}$, e no qual a superfície é dividida em duas partes: S_u , em

que são aplicadas as condições de contorno essenciais, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$, e S_t , em que são aplicadas as condições de contorno naturais, conforme figura 6a) (JIRÁSEK, 2000).

O princípio pode ser estendido para um corpo com uma interface interna S , figura 6b), a qual divide o domínio e as condições de contorno em duas partes. Um campo de forças de superfície, \mathbf{t}_j , surge na superfície interna. Este campo é função da descontinuidade de deslocamentos através da interface interna (D'AVILA, 2003).

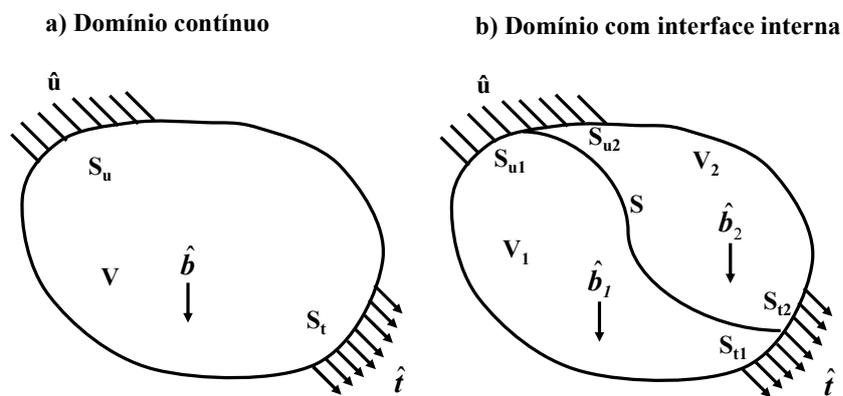


Figura 6: Domínio com condições de contorno. a) contínuo, b) com interface interna.

As equações de campo que regem o problema podem ser acopladas em um princípio variacional conforme equação (4.1.1)

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_{S_t} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} dV, \quad (4.1.1)$$

em que δ representa variação, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ são as tensões obtidas das relações constitutivas, $\nabla \mathbf{u}$ o gradiente dos deslocamentos.

A condição de estacionariedade deste princípio fornece as relações de deformação-deslocamento, a relação constitutiva, a equação diferencial de equilíbrio e a condição estática de contorno, conforme equações (4.1.2) a (4.1.5), respectivamente. Além disso, fornece as condições geométricas e mecânicas de contorno como condições naturais de contorno (SORIANO; LIMA, 2003).

$$\nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \quad (4.1.3)$$

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{b}} \quad (4.1.4)$$

$$\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{t}} \quad (4.1.5)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal ao contorno.

4.2 APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A modelagem numérica de descontinuidades fortes em sólidos requer o uso de uma formulação diferente para representar de forma correta o salto no campo de deslocamentos, a qual deve levar em conta a independência entre os campos de tensão, deformação e deslocamentos. Neste item será apresentada uma formulação geral dentro do contexto de elementos finitos, que está baseada nos trabalhos de d'Avila (2003), Jirasék (2000) e Spencer (2000).

Em elementos finitos padrão, o campo de deslocamento é interpolado por funções de forma contínuas para os deslocamentos nodais. O campo de deslocamento fica representado por

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}_N \quad (4.2.1)$$

Sendo \mathbf{N} as funções de forma, que assumem valor igual a um sobre o seu respectivo nó e zero para os outros nós e \mathbf{d}_N são os deslocamentos nodais.

A fim de representar a descontinuidade de deslocamento da interface interna, o campo de deslocamentos é representado através da soma entre a parcela contínua dada em (4.2.1) e uma parcela descontínua que representa o movimento relativo entre as duas partes do domínio separadas pela descontinuidade (SPENCER, 2000). O campo de deslocamentos com descontinuidades, portanto é

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}_N + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c \quad (4.2.2)$$

sendo \mathbf{N}_c as funções de forma dos termos adicionais para o deslocamento e \mathbf{d}_c os modos de deslocamento adicionais.

Na figura 7 são representadas as funções de forma para um caso unidimensional. A figura 7a) representa a função de forma \mathbf{N} e a figura 7b) representa as funções de forma adicionais \mathbf{N}_c .

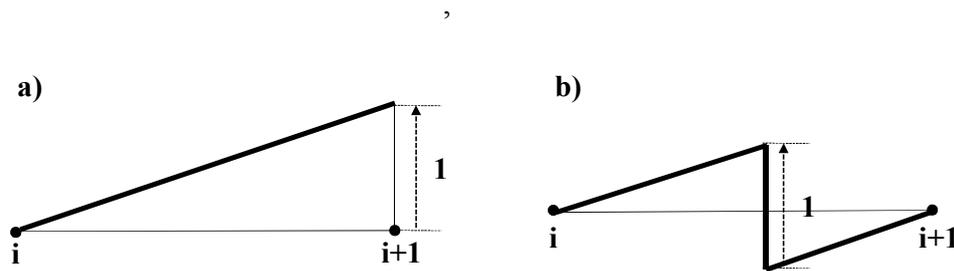


Figura 7: Funções de forma a) padrão b) deslocamento adicional

O campo de deformações é dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B}\mathbf{d}_N + \mathbf{G}\mathbf{e} \quad (4.2.3)$$

sendo \mathbf{B} as derivadas das funções de forma usuais (\mathbf{N}), \mathbf{G} é a matriz que contém as funções de forma dos termos adicionais para as deformações, e o vetor que contém os modos de deformação adicional (D'AVILA, 2003).

Partindo do princípio variacional definido em (4.1.1), os campos de tensões, deformações e deslocamentos podem ser definidos de forma independente. Portanto, as tensões são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{S}\mathbf{s}, \quad (4.2.4)$$

em que \mathbf{S} é a matriz que contém as funções de interpolações de tensão e \mathbf{s} o vetor que contém os parâmetros de tensão.

Substituindo as equações (4.2.2) a (4.2.4) em (4.1.1) e levando em conta que $\nabla(\mathbf{N}\mathbf{d}_N) = \mathbf{B}\mathbf{d}_N$ e $\nabla(\mathbf{N}_c\mathbf{d}_c) = \mathbf{B}_c\mathbf{d}_c$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T [\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{S}\mathbf{s}] dV + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c\mathbf{d}_c - \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} dV \\ = \delta \mathbf{d}_N^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Em que \mathbf{f}_{ext} são as forças externas usuais e \mathbf{f}_c são as forças externas adicionais definidas por

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dS \quad (4.2.6)$$

e

$$\mathbf{f}_c = \int_V \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{t}} dS \quad (4.2.7)$$

Sendo que, para cargas aplicadas fora da região com interpolação adicional, $\mathbf{f}_c = 0$. A obtenção do princípio variacional como apresentado na equação (4.2.5) é detalhada no ANEXO B.

Na equação (4.2.5) \mathbf{B}_c é a matriz das derivadas das funções de interpolação dos deslocamentos adicionais, \mathbf{G} a matriz das funções de forma dos termos adicionais para as deformações as quais podem ser definidas independentemente no caso onde são definidos deslocamentos e deformações adicionais de forma independente.

Devido à independência das variáveis podem ser obtidas as equações discretizadas

$$\int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4.2.8)$$

$$\int_V \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV - \left(\int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} dV \right) \mathbf{s} = 0 \quad (4.2.9)$$

$$\left(\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c dV \right) \mathbf{d}_c - \left(\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{G} dV \right) \mathbf{e} = 0 \quad (4.2.10)$$

$$\left(\int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} dV \right) \mathbf{s} = 0. \quad (4.2.11)$$

A fim de linearizar a dependência de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ em relação à \mathbf{d}_N e \mathbf{e} , a formulação é alterada para a forma incremental (taxas). Para um dado estado a relação tensão-deformação linearizada é dada por

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{d}}_N + \mathbf{G}\dot{\mathbf{e}}), \quad (4.2.12)$$

em que $\mathbf{D} \equiv \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} / \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (matriz constitutiva do material).

Alterando as equações (4.2.8) a (4.2.11) para a forma de taxa e substituindo (4.2.12) nestas equações obtém-se o seguinte conjunto de equações

$$\int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & 0 & 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & -\mathbf{G}^T \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}^T \mathbf{G} & 0 & \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} & 0 \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

A interpolação de tensões e deformações pode ser descontínua. Portanto, podem ser selecionadas funções de forma de tal maneira que cada parâmetro de tensão e deformação esteja associado a apenas um elemento finito. O mesmo é válido para os parâmetros de deslocamento adicional (\mathbf{e} , \mathbf{s} , \mathbf{d}_c), os quais podem ser condensados no nível do elemento fazendo com que as equações globais contenham apenas os graus de liberdade relativos ao deslocamento padrão, \mathbf{d}_N (D'AVILA, 2003).

Portanto, as equações de (4.2.8) a (4.2.11) e (4.2.13) podem ser reescritas para um elemento finito que ocupa um volume V_e e as forças externas \mathbf{f}_{ext} são substituídas pela contribuição elementar das forças internas $\mathbf{f}_{\text{ext}}^i$.

De acordo com Jirásek (2000), a formulação apresentada pode se particularizada em três casos:

- a) *Formulação simétrica estaticamente consistente (Statically optimal symmetric elements, SOS)*: a continuidade das tensões através da interface de descontinuidade interna é satisfeita automaticamente, resultando numa formulação simétrica. Entretanto, o modo com que são introduzidas as condições cinemáticas nesta formulação não garante o movimento relativo de corpo rígido entre as duas partes do elemento divididas pela descontinuidade. Esta formulação em muitos casos apresenta o problema de travamento de tensões (*stress locking*).
- b) *Formulação simétrica cinematicamente consistente (Kinematically optimal symmetric elements, KOS)*: as condições cinemáticas são introduzidas de tal forma que permitem capturar o movimento relativo entre as duas partes do elemento separadas pela descontinuidade. Porém, a continuidade das tensões na interface não é garantida no nível do elemento.

- c) *Formulação assimétrica estaticamente e cinematicamente consistente (Kinematically and statically optimal non-symmetric elements, SKON)*: tanto a cinemática que permite o movimento relativo entre as duas partes do elemento e a continuidade de tensão na interface são garantidos no nível do elemento. Como resultado a formulação é assimétrica.

O modelo implementado pertence à família de elementos assimétricos. Tendo em vista que esta formulação apresenta resultados mais robustos e confiáveis que as outras. Oliver, Huespe e Samaniego (2003) aplicaram duas técnicas para melhorar a resposta da formulação simétrica estaticamente consistente (SOS), obtendo uma significativa redução no travamento de tensões. Entretanto, em comparação com resultados experimentais, as melhores respostas ainda estavam relacionadas a formulação assimétrica.

4.3 FORMULAÇÃO ASSIMÉTRICA ESTATICAMENTE E CINEMATICAMENTE CONSISTENTE

Esta formulação pode ser considerada como uma junção das duas formulações simétricas. Assim como na formulação cinematicamente consistente, as tensões dentro e fora da região de deformação intensa são calculadas a partir das respectivas deformações. E a condição de continuidade de tensões é dada conforme a formulação estaticamente consistente. A seguir, são apresentadas as características da formulação assimétrica, com base nos trabalhos de d'Avila (2003) e Jirasék (2000).

A condição de compatibilidade entre as tensões no domínio do elemento e na interface interna é dada por

$$\int_{V_e} \mathbf{G} dV \mathbf{e} = 0, \quad (4.3.1)$$

sendo que a matriz \mathbf{G} pode ser construída a partir da condição

$$\int_{V_e} \mathbf{G} dV = 0. \quad (4.3.2)$$

Se a matriz \mathbf{G} cumpre a condição imposta em (4.3.2), a condição de compatibilidade em (4.3.1) é satisfeita para qualquer \mathbf{e} . Em decorrência disso, a segunda parte da equação (4.2.9) é anulada.

Na formulação cinematicamente consistente considera-se que a matriz \mathbf{G} seja a derivada das funções de forma \mathbf{N}_c , portanto

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}_c \quad (4.3.3)$$

substituindo (4.3.3) em (4.2.10), nota-se que

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{e} \quad (4.3.4)$$

Nesta formulação, a fim de eliminar os parâmetros de tensão \mathbf{s} , é feita a adição das equações (4.2.9) e (4.2.11). Percebe-se que para ambas as formulações simétricas o que resta do sistema de equações apresentado em (4.2.13) são as equações

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \mathbf{f}_{\text{int}}^e \quad (4.3.5)$$

e

$$\int_{V_e} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = 0. \quad (4.3.6)$$

Na formulação assimétrica a fim de assegurar a condição de compatibilidade determinada em (4.3.2), \mathbf{G}^T não é mais a transposta de \mathbf{B}_c , e sim uma matriz \mathbf{G}^* definida de tal forma que satisfaça esta condição. Portanto, substituindo (4.2.12) nas equações (4.3.5) e (4.3.6), o sistema de equações não-lineares fica

$$\int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.3.7)$$

O parâmetro de deslocamento adicional $\dot{\mathbf{e}}$ por ser interno ao elemento finito pode ser eliminado da formulação através de condensação estática. Inicialmente considera-se que o sistema de equações apresentado em (4.3.7) pode tomar a forma apresentada em (4.3.8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bg} \\ \mathbf{K}_{gb} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_N \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{int} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.8)$$

E através da condensação estática do grau de liberdade $\dot{\mathbf{e}}$ tem-se que

$$\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{K}_{gg}^{-1} \mathbf{K}_{gb} \dot{\mathbf{d}}_N. \quad (4.3.9)$$

Logo o equilíbrio global fica dado por

$$\dot{\mathbf{f}}_{int} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{d}}_N, \quad (4.3.10)$$

em que

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bg} \mathbf{K}_{gg}^{-1} \mathbf{K}_{gb}. \quad (4.3.11)$$

4.4 PARTICULARIDADES DOS MODELOS ASSIMÉTRICOS

A incorporação de descontinuidades fortes é uma simplificação da incorporação de descontinuidades fracas. Portanto, para uma melhor compreensão, será explanada inicialmente a mecânica das descontinuidades fracas, para, em seguida ser particularizada para descontinuidades fortes.

A formulação apresentada segue o proposto em d'Avila (2003) e Jirásek (2000) e pode ser aplicada a elementos finitos planos triangulares ou quadriláteros. Neste trabalho será utilizado o elemento finito quadrilátero bilinear de quatro nós, amplamente utilizado em elementos finitos.

Considerando um elemento finito com uma banda de localização, conforme figura 8. A região central (L) representa a banda de localização de espessura b , e seu complemento N_- e N_+ . No nível de elemento o eixo x é normal e o eixo y é paralelo à banda.

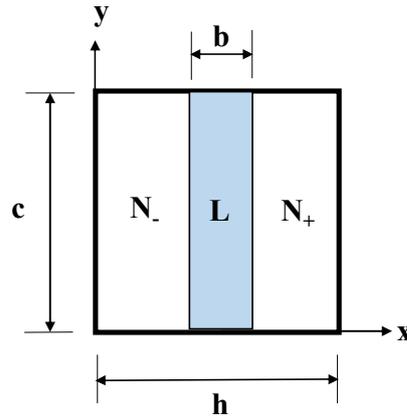


Figura 8: Elemento finito com banda de localização

A área total do elemento A_e , da região com localização A_L , e da região sem localização A_N , ficam definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} A_e &= hc, \\ A_L &= bc, \\ A_N &= (h-b)c, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

e a matriz \mathbf{G} é dada por

$$\mathbf{G} = \frac{1}{bA_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) \mathbf{P}. \quad (4.4.2)$$

Em que \mathbf{P} é a matriz que seleciona as tensões que serão transmitidas pela fissura (normal e de corte), ver anexo A. χ_L e χ_N são as funções características de cada região, sendo que

$$\chi_N = \begin{cases} 1 & \text{em } N_{\pm} \\ 0 & \text{em } L \end{cases} \quad \chi_L = \begin{cases} 1 & \text{em } L \\ 0 & \text{em } N_{\pm} \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Portanto, a matriz \mathbf{G} é constante por partes e pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_L \chi_L + \mathbf{P}_N \chi_N, \quad (4.4.4)$$

em que

$$\mathbf{P}_L = \frac{A_N}{bA_e} \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{P}_N = -\frac{A_L}{bA_e} \mathbf{P}. \quad (4.4.5)$$

A matriz \mathbf{G} apresentada cumpre a condição (4.3.2), devido à escolha dos fatores χ_L e χ_N . Conforme se observa nas equações (4.4.6).

$$\begin{aligned} \int_{Ae} \mathbf{G} dA &= 0, \\ \frac{\mathbf{P}}{bA_e} \int_{Ae} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) dA &= 0, \\ A_N A_L - A_L A_N &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

O fator de escala comum $1/bA_e$ foi escolhido a fim de que \mathbf{e} represente a diferença entre as deformações (normal e de corte) entre a região com e sem localização, multiplicadas pela largura de banda. No caso limite, no qual a largura da banda tende a zero, este fator representa a abertura ou deslizamento da descontinuidade forte incorporada.

Tendo em vista que o elemento é composto pelas partes com e sem localização, as forças internas da equação (4.3.5) passam a ser representadas por

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{Ae} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dA = \int_{A_L} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_L dA + \int_{A_N} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_N dA, \quad (4.4.7)$$

sendo as tensões obtidas das deformações em cada área, a partir da equação (4.2.3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{P}_L \mathbf{e}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N &= \mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{P}_N \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

A condição de equilíbrio interno (4.3.6), para a matriz \mathbf{G} fica

$$\begin{aligned} \int_{Ae} \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dA &= 0, \\ \int_{Ae} \frac{1}{bA_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) \mathbf{P}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dA &= 0, \\ \frac{1}{bA_e} \int_{Ae} (A_N \boldsymbol{\sigma}_L - A_L \boldsymbol{\sigma}_N) \mathbf{P}^T dA &= 0, \\ \frac{1}{A_L} \int_{A_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_L dA &= \frac{1}{A_N} \int_{A_N} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_N dA. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Devido ao fato de \mathbf{P} selecionar os componentes de tensão normal (σ_x) e de corte (τ_{xy}), a condição de equilíbrio interna acima pode ser interpretada como uma condição fraca de

continuidade de tensões. Isto porque o valor médio de σ_x e τ_{xy} sobre a localização deve ser o mesmo que o determinado fora da localização.

Para o caso no qual a espessura \mathbf{b} da região com localização tende a zero, a banda colapsa em uma superfície S_L . Considerando (4.4.1), é conveniente representar a matriz \mathbf{G} (4.4.2) como

$$\mathbf{G} = \frac{1}{bhc} [(h-b)c\chi_L - bl\chi_N] \mathbf{P} = \left(\frac{h-b}{bhc} \chi_L - \frac{1}{h} \chi_N \right) \mathbf{P} \quad (4.4.10)$$

visto que a espessura b tende a zero, o termo χ_L/b tende a delta de Dirac δ_L e \mathbf{G} tende a

$$\mathbf{G}_0 = \left(\delta_L - \frac{1}{h} \right) \mathbf{P}. \quad (4.4.11)$$

Como não existe mais uma banda de localização, e a região sem localização se estende por todo o domínio do elemento, as forças internas voltam a ser

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA. \quad (4.4.12)$$

A condição de equilíbrio interno (4.4.9) também é alterada, pois as tensões transmitidas na banda são substituídas pelas tensões coesivas, resultando em

$$\frac{1}{c} \int_{S_L} \mathbf{t} dS = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dA. \quad (4.4.13)$$

Portanto, as forças coesivas sobre a linha de descontinuidade S_L devem ser iguais às forças resultantes das tensões normal e de corte sobre o elemento. Sendo esta, a forma fraca da condição de continuidade de tensões sobre a linha de localização.

Essas tensões coesivas são relacionadas diretamente com a abertura da fissura (\mathbf{e}), através da equação constitutiva de amolecimento.

As deformações também sofrem alteração e voltam a ser definidas sobre todo o domínio, portanto,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}_N \quad (4.4.14)$$

4.5 MODELO ASSIMÉTRICO IMPLEMENTADO

Nesta dissertação foi implementado um modelo assimétrico para representar as descontinuidades fortes, proposto por Dvorkin; Cuitiño e Gioia (1990), o qual apresenta como características:

- considerar todo o elemento como domínio mínimo na localização de deformação, em vez de trabalhar em nível de pontos de integração.
- a localização de deformações dentro do elemento finito é considerada como uma linha de descontinuidade de deslocamento incorporada no domínio do elemento.
- assim que a localização é iniciada em um dado elemento são definidas duas relações constitutivas para representar o comportamento do material. Uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade, relacionada com a energia de fratura e uma relação tensão-deformação para o domínio do elemento.
- os elementos resultantes dessa formulação são não conformes.
- esta formulação visa representar os efeitos globais da localização de deformações sobre a estrutura. Por isso, não é possível obter uma descrição detalhada do campo de tensões perto da zona de localização.

A fim de compreender melhor a formulação assimétrica implementada, inicialmente é analisado o caso simples de um elemento finito de barra com dois nós, conforme figura 9a).

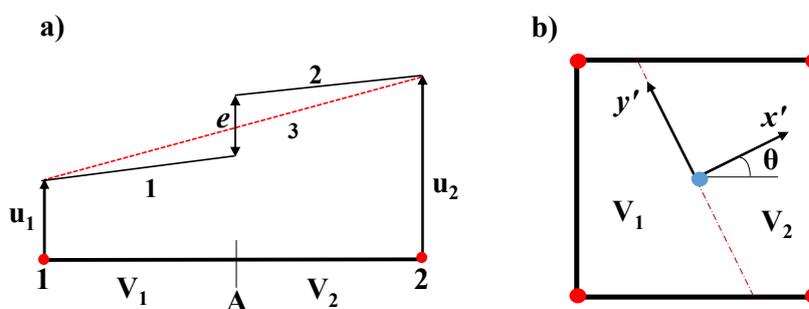


Figura 9: Elemento finito com linha de localização a) unidimensional
b) bidimensional

Antes da abertura da fissura os deslocamentos são obtidos conforme equação (4.5.1).

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\mathbf{U}, \quad (4.5.1)$$

em que \mathbf{U} é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais e \mathbf{N} contém as funções de interpolação. Esta interpolação é representada pela linha tracejada 3 na figura 9a). Quando ocorre a abertura da fissura, é considerada uma descontinuidade de deslocamentos no centro A , que divide o elemento em dois subdomínios V_1 e V_2 . Considera-se que V_2 sofre um incremento de deslocamento de corpo rígido (\mathbf{e}) em relação à V_1 . Com o propósito de obter a mesma deformação para ambos os subdomínios, são adotadas para V_1 e V_2 as interpolações das linhas 1 e 2 apresentadas na figura 9a). Portanto, os deslocamentos para cada subdomínio considerando a linha de descontinuidade passa a ser

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{e}) \quad (4.5.2)$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{e}) + \mathbf{e}. \quad (4.5.3)$$

Sendo $\phi = (0 \ 1)^T$. Derivando as equações (4.5.2) e (4.5.3), obtém-se a mesma deformação incremental. Portanto, para qualquer ponto V_1 e V_2

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{e}). \quad (4.5.4)$$

Para o caso bidimensional (figura 9b)) os conceitos apresentados acima podem ser generalizados considerando

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_c = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (4.5.5)$$

em que \mathbf{e}' contém os componentes de movimento de corpo rígido associado à linha de localização, avaliado no centro do elemento, no sistema local (x', y')

$$\mathbf{e}' = \begin{bmatrix} u^c \\ v^c \end{bmatrix}, \quad (4.5.6)$$

e \mathbf{R} é a matriz de rotação do sistema cartesiano local da descontinuidade (x', y') para o sistema de coordenadas do elemento.

Além disso, ϕ passa a ser uma matriz definida por

$$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \boldsymbol{\phi}_3 \quad \boldsymbol{\phi}_4]^T, \quad (4.5.7)$$

sendo que cada submatriz $\boldsymbol{\phi}_n$ é uma matriz de dimensão 2x2, definida de acordo com

$$\boldsymbol{\phi}_n = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{em } V_1 \\ \mathbf{I} & \text{em } V_2 \end{cases}$$

em que \mathbf{I} representa a matriz identidade.

Logo, os deslocamentos \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 assumem a forma

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}') \quad (4.5.8)$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}') + \mathbf{Re}', \quad (4.5.9)$$

em que

$$\mathbf{d}_N = \mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}', \quad (4.5.10)$$

que é o deslocamento que causa deformação.

Na figura 10 é apresentado um elemento submetido a um carregamento de tração, onde o deslocamento que gera deformação está representado em azul (\mathbf{d}_N) e a abertura da fissura (\mathbf{e}) em laranja. Até que a fissura não esteja aberta, todo o deslocamento gerado causa deformação. Entretanto, após a abertura da fissura uma parte do deslocamento é referente ao movimento de corpo rígido entre as duas partes da fissura, e, portanto, deve ser descontado para calcular as deformações e tensões.

Para dois pontos próximos a linha de descontinuidade um sobre V_1 e outro sobre V_2 o deslocamento é dado por

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \mathbf{Re}' \quad (4.5.11)$$

A deformação para o caso bidimensional fica dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}') = \mathbf{B}\mathbf{d}_N \quad (4.5.12)$$

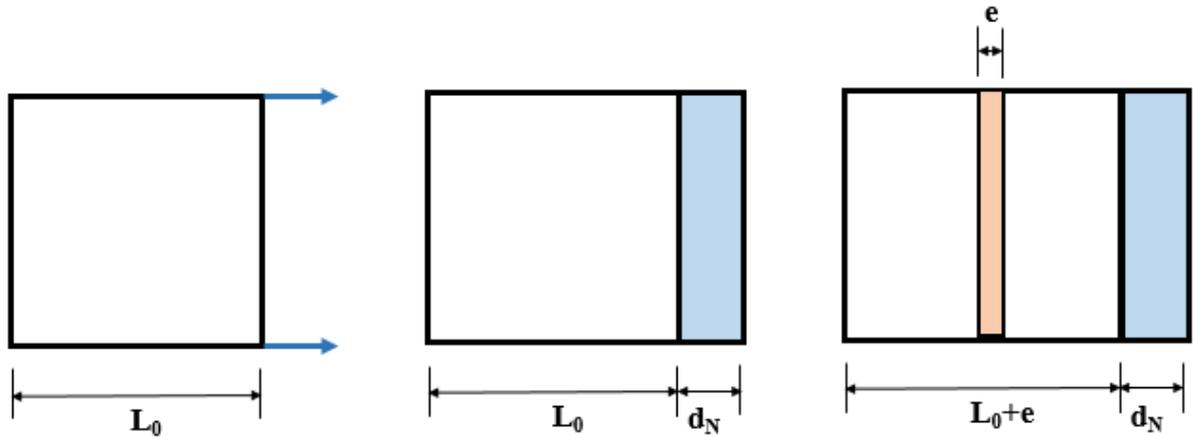


Figura 10: Deslocamento que causa deformação

Após a abertura da fissura é necessário considerar uma condição de equilíbrio interno para a linha de descontinuidade. Partindo da equação (4.4.13) tem-se que

$$\int_{S_L} \mathbf{t} dS = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS. \quad (4.5.13)$$

A relação constitutiva para a linha de localização é definida como

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (4.5.14)$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t(u^c) & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^c \\ v^c \end{bmatrix},$$

em que $E_t(u^c)$ é ajustado de acordo com a energia de fratura, G_f , e G_t está relacionado com o módulo de cisalhamento.

Para o domínio do elemento

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.5.15)$$

em que t e $t+\Delta t$ representam um pseudotempo relativo aos incrementos de carga, sendo t o incremento anterior e $t+\Delta t$ o incremento atual (total) de carga. \mathbf{D}^e é a matriz constitutiva elástica do material.

Para os elementos na região onde não ocorre a localização é utilizada a mesma relação apresentada em (4.5.15).

Considerando as deformações em (4.5.12), substituindo (4.5.15), em (4.2.8) resultando em

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}') dV = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F} \quad (4.5.16)$$

Sendo

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_S \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} dS \quad (4.5.17)$$

e

$${}^t \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T {}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.5.18)$$

Substituindo (4.5.15) e (4.5.14) na condição de equilíbrio adicional em (4.5.13), resulta em

$$\begin{aligned} \int_{S_L} \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' dS &= \int_{S_L} \mathbf{P}^T [\mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}')] dS \\ \left(\int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} dS \right) \mathbf{U} &= \left[\int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) dS \right] \mathbf{e}' \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

sendo

$$\mathbf{S}_{uu} = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} dS \quad (4.5.20)$$

e

$$\mathbf{S}_{cc} = \int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) dS \quad (4.5.21)$$

Portanto, substituindo (4.5.20) e (4.5.21) em (4.5.19) e isolando o deslocamento adicional, chega-se

$$\mathbf{e}' = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu} \mathbf{U} \quad (4.5.22)$$

A partir de **Erro! Fonte de referência não encontrada.** obtém-se a condensação dos graus de liberdade internos da equação (4.5.16), resultando em

$$\left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{I} - \phi \mathbf{R} \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu}) dV \right] \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F} \quad (4.5.23)$$

sendo

$${}^t \mathbf{K}^* = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{I} - \phi \mathbf{R} \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu}) dV \quad (4.5.24)$$

é a matriz de rigidez tangente consistente. Observa-se que os termos entre parêntesis tornam a matriz acima assimétrica, o que pode ser um problema para a implementação em códigos preexistentes que utilizem apenas matrizes simétricas.

Neste ponto é importante ressaltar que no modelo implementado utilizou-se apenas a parte simétrica da matriz de rigidez da equação (4.5.24), visto que para os problemas analisados a diferença entre considerar e não considerar a parte assimétrica é pequena. Tal afirmação é respaldada pela comparação realizada por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990), na qual foi observada que apesar de necessitar mais iterações para atingir a convergência a matriz simétrica apresentou resultados satisfatórios.

Apesar de utilizar somente a parte simétrica da matriz de rigidez na equação (4.5.24), o método apresentado produz resultados mais consistentes e robustos do que métodos baseados nas formulações simétricas. Tendo em vista que no processo de formação e propagação de fissuras ainda são garantidas as condições de continuidade de tensões na interface interna e movimento de corpo rígido entre os lados do elemento separados pela fissura.

Portanto, em nível global o sistema de equações a ser resolvido fica dado por

$${}^t \mathbf{K}^* \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F}. \quad (4.5.25)$$

Para obter o equilíbrio no tempo $t + \Delta t$ é necessário iterar no nível de elemento a equação (4.5.13) e, no nível global (estrutura), utilizando controle de cargas para a i -ésima iteração

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}^* \Delta \mathbf{U}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F}^{(i-1)} \\ \mathbf{U}^{(i)} &= \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

O equilíbrio final das equações dadas em (4.5.26) é obtido usando algum método iterativo, sendo que no modelo implementado utilizou-se o Método iterativo de Newton-Rhapson.

A matriz de rigidez é obtida por integração com 2x2 pontos de Gauss. A partir do momento em que uma fissura é aberta em um dado elemento, passa-se a considerar o elemento como domínio mínimo, ou seja, todas as propriedades são calculadas no centro do elemento, sendo utilizada integração com 1 ponto de Gauss. Isto pode levar a modos de deformação nula (modos espúrios) na utilização de elementos finitos distorcidos na região fissurada. Para evitar este problema é interessante a utilização de elementos finitos capazes de contornar este problema, como é o caso do elemento QMITC (D'AVILA, 2003).

A obtenção de equilíbrio dentro do elemento, equação (4.5.13), apresenta algumas particularidades. Dvorkin e Assanelli (1991), apresentam um algoritmo para obtenção desse equilíbrio quando uma linha de localização é aberta dentro de um elemento:

- a) considerar a abertura de fissura igual à abertura da iteração global anterior

$$k = 0 \text{ contador de iteração local} \quad (4.5.27)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'_{(0)} = {}^t \mathbf{e}' \quad (4.5.28)$$

- b) a partir do deslocamento obtido pela resolução do sistema de equações global, determinar o deslocamento que causa deformação no elemento

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{d}_{Ne(k)}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi} \mathbf{R} \mathbf{e}'_{(k)}^{(i)} \quad (4.5.29)$$

- c) calcular as tensões incrementais no domínio do elemento, utilizando (4.5.15)
d) calcular as tensões incrementais na linha de descontinuidade, utilizando(4.5.14)
e) obter o incremento de abertura da fissura

$$\Delta \mathbf{e}'_{(k)}^{(i)} = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \left[\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(i)} dS - \int_{S_L} \mathbf{t}_{(k)}^{(i)} dS \right] \quad (4.5.30)$$

- f) atualiza o valor da abertura da fissura

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'_{(k+1)}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'_{(k)}^{(i)} + \Delta \mathbf{e}'_{(k)}^{(i)} \quad (4.5.31)$$

g) verificar convergência

$$\text{se } (|\Delta \mathbf{e}'| < \text{Tolerância}) \text{ ok} \quad (4.5.32)$$

h) senão

$$k = k + 1 \quad (4.5.33)$$

i) Retorna para o item b)

4.6 CRITÉRIO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA

Em materiais frágeis e quase-frágeis, testes de tração mostram que a fratura ocorre quando a tensão normal atinge o limite de resistência. Em testes de torção, nota-se que a fratura ocorre em decorrência da tensão de tração máxima, visto que o plano de fratura está a 45° em relação a direção da máxima tensão de cisalhamento, conforme figura 11 (HIBBELER, 2010).

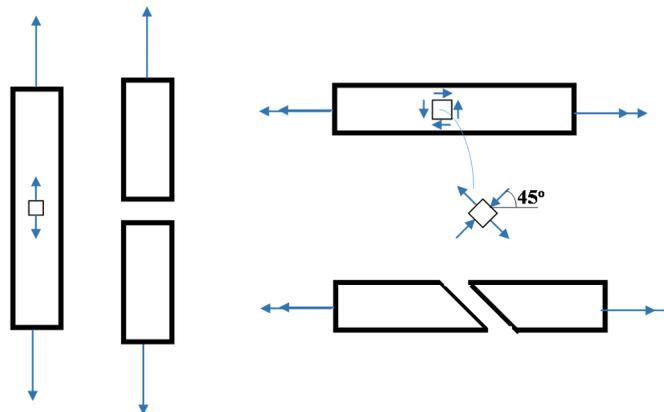


Figura 11: Falha em materiais quase-frágeis a) tração simples b) torção

No modelo implementado utilizou-se o critério de ruptura proposto por Rankine, pois se adapta bem para a ruptura de materiais quase-frágeis. Conforme apresentado acima, a falha em materiais quase-frágeis ocorre por fratura em planos de máxima tensão de tração. Portanto, segundo este critério, quando uma das tensões principais (em módulo), $|\sigma_1|$ ou $|\sigma_2|$, atinge a resistência à tração (f_t) ocorre a abertura da fissura (HIBBELER, 2010).

No modelo implementado, a cada incremento de carga são calculadas as tensões e direções principais em cada elemento. Se a tensão principal ultrapassa a resistência a tração ($\sigma_1 > f_t$) a fissura é formada em um plano perpendicular a essa tensão, conforme observa-se na figura 11.

Este método, apesar de simples, é capaz de capturar aspectos básicos de fratura em materiais quase-frágeis. Em comparação com outros modelos simplificados, neste é possível reproduzir o comportamento de corpos de prova e componentes estruturais que não apresentam uma fissura pré-definida (PLANAS et al., 2003).

4.7 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EMPREGADAS

As relações constitutivas utilizadas neste trabalho são apresentadas na figura 12.

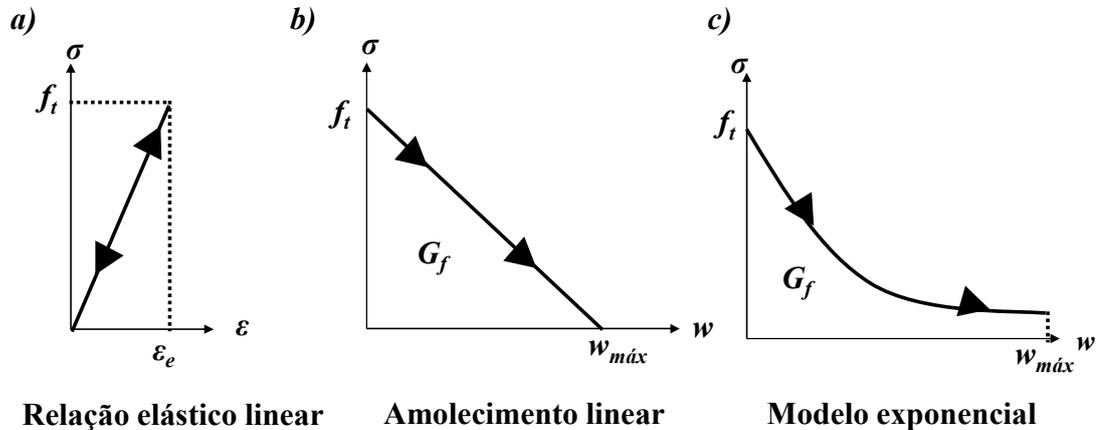


Figura 12: Relações constitutivas para o modelo implementado. a) relação para a região não fissurada. b) e c) relações constitutivas para a região fissurada.

A relação constitutiva elástico linear (figura 12a)) é utilizada para representar tanto o comportamento do material intacto (sem fissura) como para representar o comportamento de descarga do material na região não fissurada após o início do processo de fissuração. Esta relação é apresentada na equação (4.7.1).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.7.1)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ representa a tensão no domínio, \mathbf{D}^e representa a matriz constitutiva elástica e $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa a deformação.

A relação constitutiva de amolecimento linear, figura 12b), utilizada para a linha da fissura é conhecida como modelo de Hillerborg (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976). Neste modelo, a máxima tensão que pode ser transmitida através da fissura é considerada como sendo a resistência a tração, a partir do momento que uma fissura se abre, esta tensão decresce de forma linear até atingir um valor igual a zero, enquanto a abertura da fissura aumenta até um valor limite. A área sobre o gráfico da figura 12b) representa a energia de fratura.

Como a energia de fratura e a resistência a tração são características do material pode-se obter a máxima abertura de fissura através da equação (4.7.2),

$$w_{\max} = \frac{2G_f}{f_t}. \quad (4.7.2)$$

A equação que representa esta relação constitutiva é dada por:

$$\sigma = f_t \left(1 - \frac{w}{w_{\max}} \right) \quad (4.7.3)$$

A relação constitutiva exponencial, esquematizada na figura 12c), é baseada no modelo apresentado por Dvorkin; Cuitiño e Gioia (1990). A seguir são apresentadas as equações que representam a curva de amolecimento exponencial.

$$\sigma = f_t \exp(-aw) \quad (4.7.4)$$

$$a = \alpha f_t / G_f \quad (4.7.5)$$

É imposto um limitante para o fator $\exp(-aw)=0,05$ a fim de obter um valor de máxima abertura de fissura (w_{\max}). Além disso, no modelo de Dvorkin o fator α é tomado

como 0,95 e no modelo implementado utilizou-se um valor de 1,05 tendo em vista uma melhor representação do comportamento global da peça com este valor.

4.8 FLUXOGRAMA DO MODELO IMPLEMENTADO

Neste item é apresentado um fluxograma (figura 13) no qual podem ser observadas as etapas de cálculo realizadas nas iterações global e local. A iteração global representa o processo iterativo realizado em nível de estrutura, onde é utilizado um código de elementos finitos padrão. Já a iteração local, representa o processo de cálculo do modelo implementado que é realizado em nível de elemento na abertura de fissura.

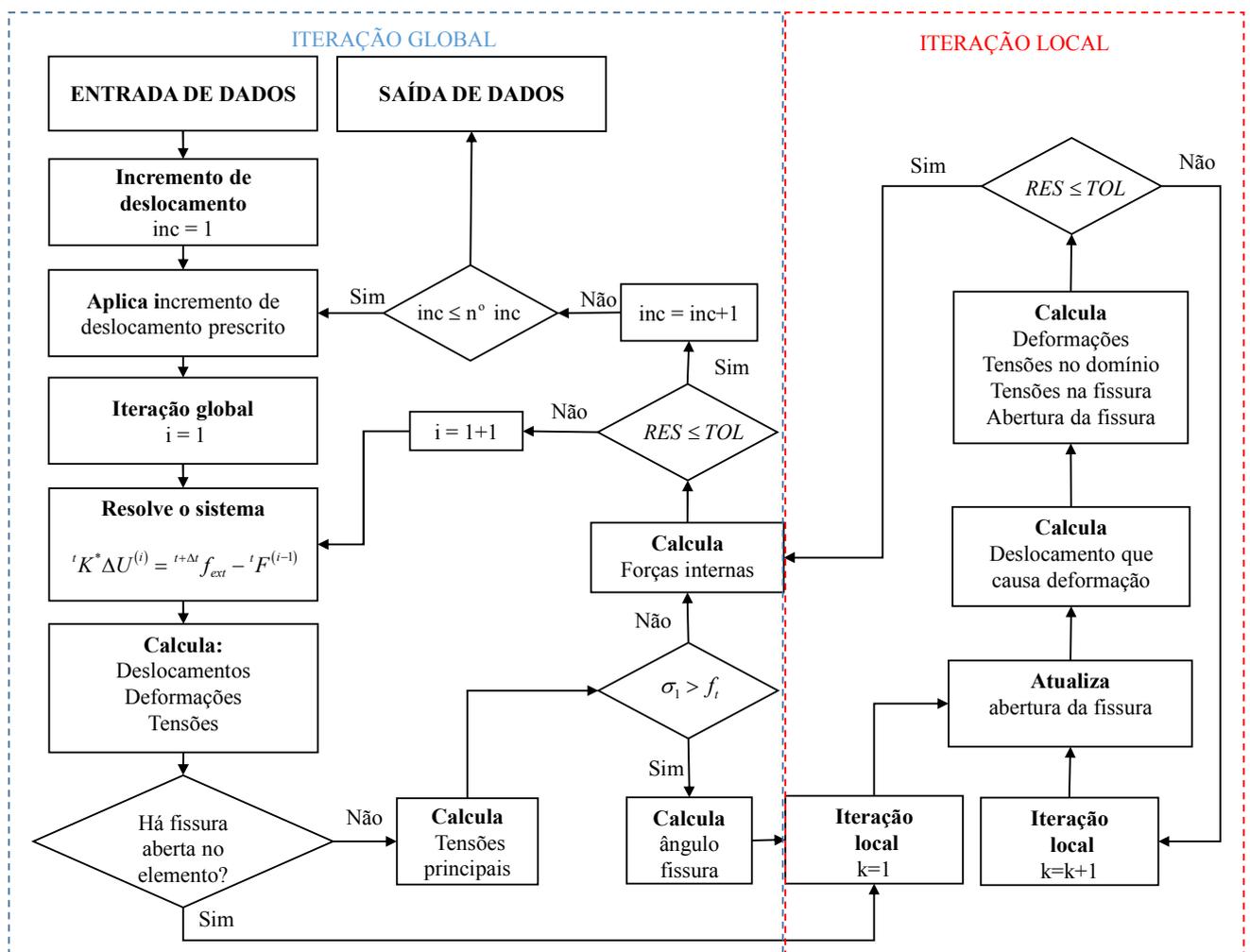


Figura 13: Fluxograma do modelo implementado

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as experimentações numéricas da presente dissertação, os resultados obtidos através das simulações são comparados com valores teóricos, numéricos e experimentais presentes na literatura. A validação da metodologia empregada é feita através da análise de diferentes tipos de carregamento.

5.1 TRAÇÃO PURA COM APLICAÇÃO DE DESLOCAMENTO

5.1.1 Comprovação do modelo e teste de objetividade

Com a finalidade de comprovar a eficácia do modelo desenvolvido e também de verificar a objetividade do modelo em relação a malha de elementos finitos, neste item é apresentado um exemplo teórico de uma barra submetida à tração pura com controle de deslocamentos. Na figura 14 são apresentadas as malhas empregadas bem como as condições de contorno. Foram testadas três malhas de elementos finitos com 1, 25 e 100 elementos, sendo que nas malhas com 25 e 100 elementos a propagação da fissura foi induzida pela redução da resistência dos elementos centrais, representados pela hachura na figura 14.

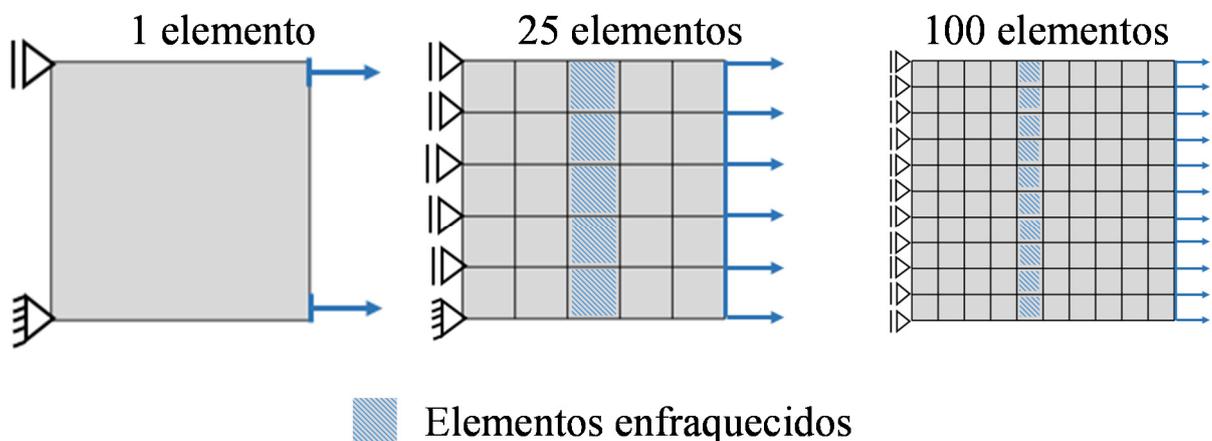


Figura 14: Barra submetida a tração pura – malhas com condições de contorno

Na tabela 1 são apresentados os dados de entrada utilizados para o exemplo desenvolvido. Estes valores foram obtidos do trabalho de d'AVILA (2003).

Tabela 1 – Parâmetros de entrada tração pura

Propriedades Geométricas	
Comprimento	0,1 cm
Altura	0,1 cm
Espessura	0,1 cm
Propriedades do Material	
Resistência à tração (f_t)	0,1 kN/cm ²
Módulo de elasticidade (E)	1000 kN/cm ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0,0
Energia de Fratura (G_f)	2E-5 kN/cm

Para o material fora da linha de fissuração foi considerado o modelo constitutivo elástico linear e para a linha de localização utilizou-se o modelo de Hillerborg (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976), ambos descritos no item 4.7.

Na figura 15 são apresentadas as curvas de amolecimento obtidas numericamente para as diferentes malhas e a curva analítica. Conforme observado todas as malhas apresentam objetividade dos resultados em relação a curva analítica.

De acordo com a formulação, na região fora da zona de abertura da fissura o elemento deve sofrer uma descarga elástica. Como não há modelo de dano implementado a descarga deve ser total. Tal comportamento é observado na figura 16.

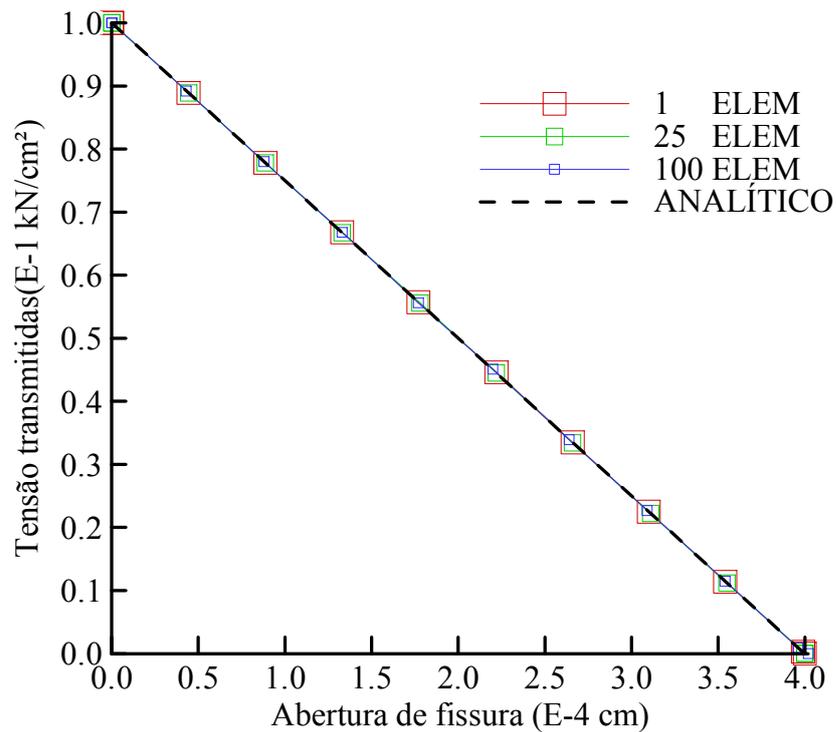


Figura 15: Relação constitutiva para a linha de localização

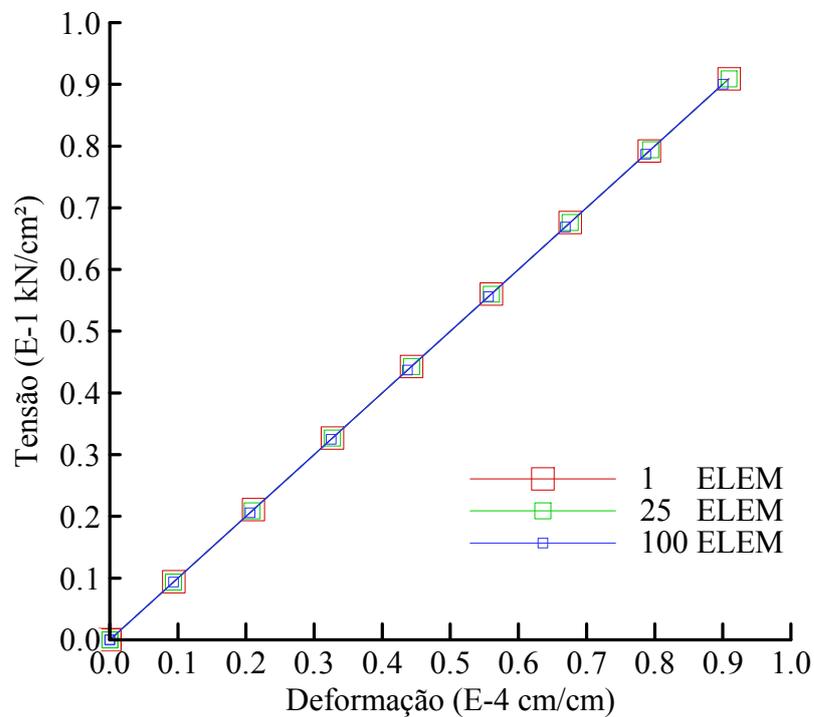


Figura 16: Relação Tensão x Deformação fora da região fissurada

E por fim, na figura 17 é apresentada a relação entre os deslocamentos da extremidade livre e a carga axial para o modelo implementado, esta relação representa a

resposta global da estrutura. Conforme pode-se observar os resultados obtidos são coincidentes para as três malhas de elementos finitos comprovando a objetividade dos resultados em relação a malha de elementos finitos utilizada. Vale ressaltar que esta característica dos modelos incorporados é um dos motivos pelos quais estes modelos se sobressaem aos modelos distribuídos, os quais são dependentes da malha de elementos finitos utilizada.

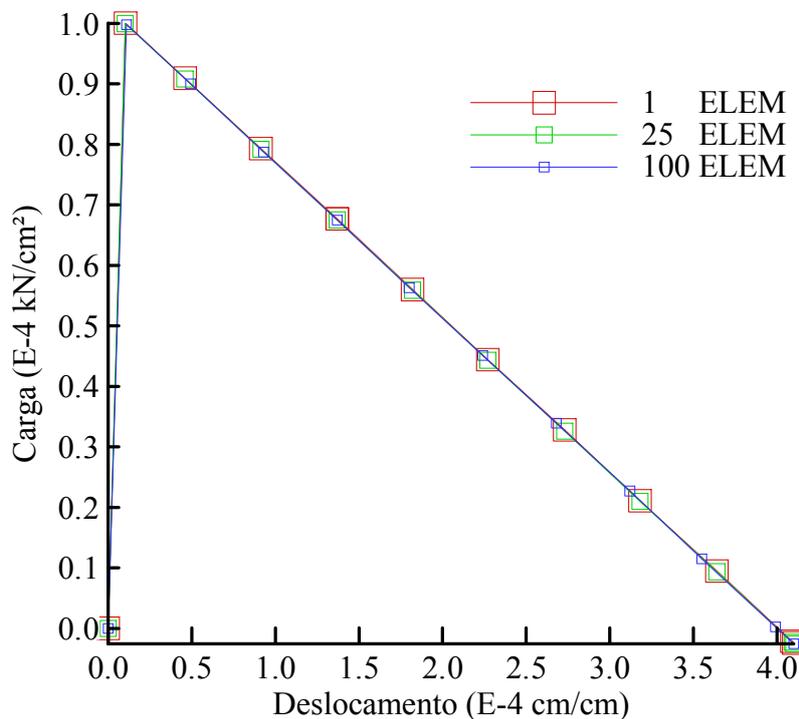


Figura 17: Relação Força x Deslocamento

5.1.2 Efeito da variação de comprimento da peça

O segundo exemplo tem a finalidade de capturar a influência do comprimento da peça no comportamento do material. Serão analisadas cinco peças com mesma seção transversal e de comprimentos diferentes. Conforme demonstrado no exemplo anterior, para exemplos de tração pura com carregamento axial a resposta se mantém a mesma, independente da malha de elementos finitos adotada. Portanto, para todas as peças adotaram-se malhas com apenas um elemento finito. Na figura 18 são observadas as condições de contorno do problema estudado.

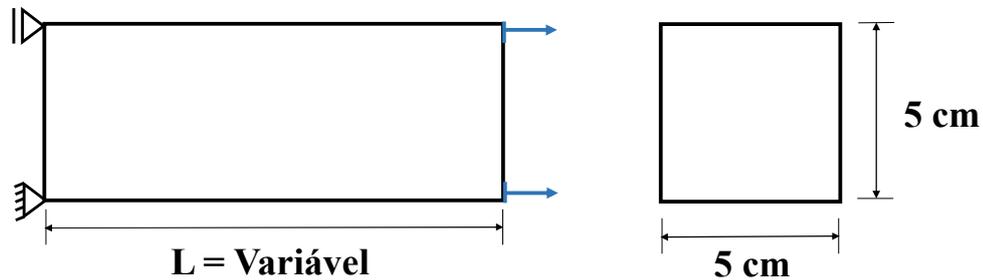


Figura 18: Representação das peças modeladas

A relação constitutiva utilizadas para a região sem fissura é a relação elástico linear, e para a região fissurada utilizou-se o modelo linear de Hillerborg (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976).

Na tabela 2 são apresentados os dados de entrada utilizados para o exemplo desenvolvido. Estes valores foram obtidos do trabalho de d'AVILA (2003).

Tabela 2 – Parâmetros de entrada tração com variação de comprimento

Propriedades Geométricas	
Comprimento	10,50,100,125,150 cm
Altura	5 cm
Espessura	5 cm
Propriedades do Material	
Resistência à tração (f_t)	0,158 kN/cm ²
Módulo de elasticidade (E)	3224 kN/cm ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0,0
Energia de Fratura (G_f)	4,87E-4 kN/cm

Na figura 19 é apresentado o gráfico com a relação entre as tensões e o deslocamento total na extremidade livre do elemento estrutural. Conforme pode ser observado o comportamento vai se tornando frágil com o aumento do comprimento da peça. As peças com comprimento de 10 cm, 50 cm e 100 cm apresentam um comportamento pós fissura com amolecimento. Já a peça de 125 cm apresenta um comportamento totalmente frágil. A peça com 150 cm apresenta uma redução nos deslocamentos após atingir a resistência a tração, fenômeno conhecido como “*snapback*”. Este fenômeno pode ser observado

experimentalmente com o aumento da peça, como no trabalho de Hordijk (1991). É importante ressaltar que neste exemplo o efeito de *snapback* não foi obtido numericamente, a linha tracejada apenas indica a solução teórica. Na figura 20 é apresentada a relação entre a tensão e o deslocamento obtidos por d'Avila (2003). Conforme pode-se observar os resultados obtidos nesta dissertação estão de acordo com valores de referência.

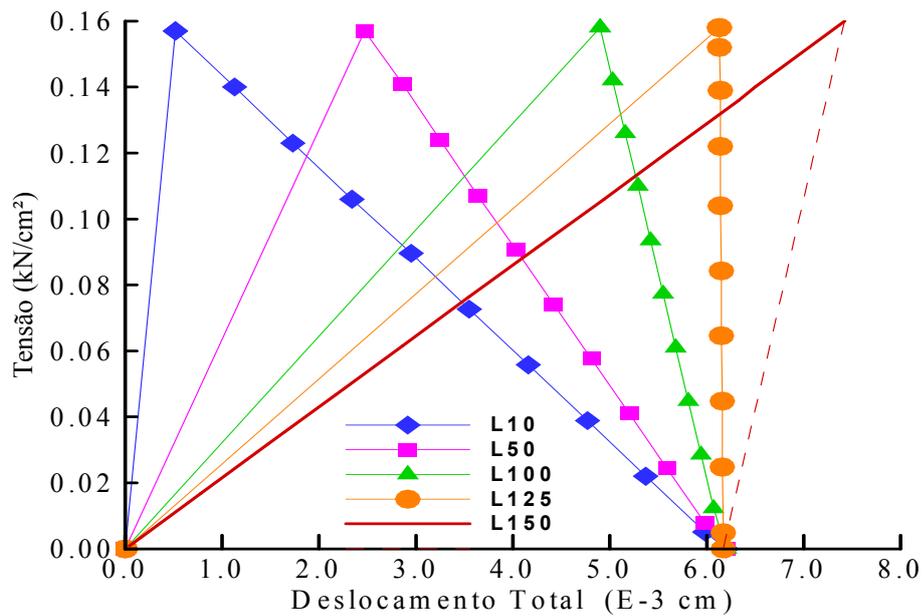


Figura 19: Relação Tensão x Deslocamento na extremidade da peça -modelo implementado

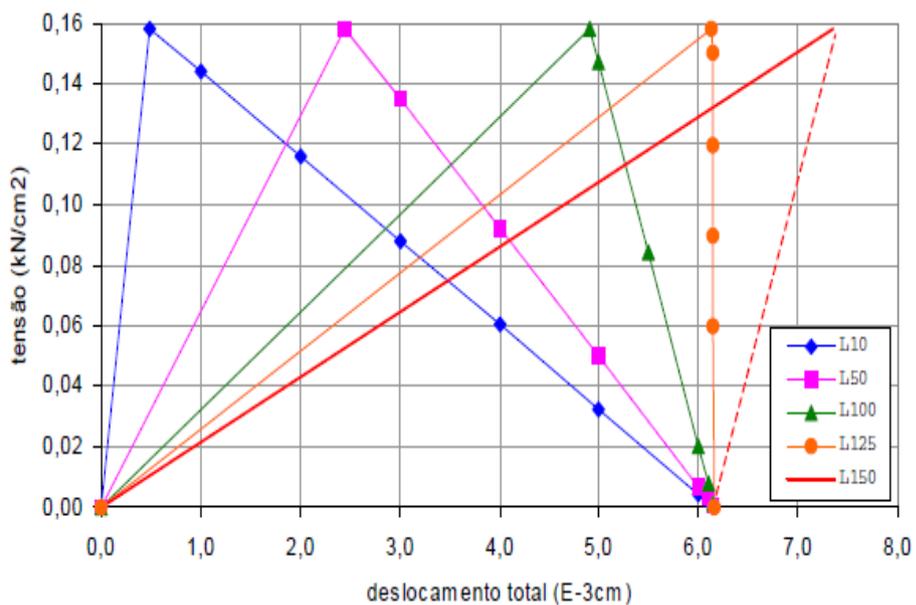


Figura 20: Relação Tensão x Deslocamento na extremidade da peça –referência.
Fonte: d'Avila (2003) .

A variação do comportamento devido ao comprimento das peças pode ser entendida através de conceitos de resistência dos materiais e mecânica da fratura. Primeiramente, sabe-se que antes de atingir a resistência a tração o material apresenta um comportamento elástico linear, logo o deslocamento pode ser dado pela equação (5.1.1)

$$u = \frac{FL}{AE}. \quad (5.1.1)$$

Em que u é o deslocamento da seção transversal, F é a força aplicada, L é o comprimento da peça, A é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade.

A partir da equação (5.1.1), observa-se que o deslocamento é dependente do comprimento da peça para uma mesma força aplicada. Assim, supondo a aplicação de uma carga, em todas as peças, que leve o material a atingir a resistência a tração o deslocamento será maior quanto maior for o tamanho da peça. Conforme pode ser observado na figura 19.

Quando o carregamento aplicado ultrapassa a resistência a tração, simultaneamente ao processo de abertura de fissura começa a ocorrer uma redução da deformação na região não fissurada. Portanto, no final do processo, quando não é mais possível transferir tensões através da fissura, o deslocamento (u) será igual a máxima abertura de fissura ($w_{m\acute{a}x}$), conforme equação

$$u = w_{m\acute{a}x} \quad (5.1.2)$$

Pode-se concluir, a partir das considerações acima, que todas as peças terão o mesmo deslocamento final, visto que as propriedades do material são as mesmas e assim terão a mesma abertura de fissura, comportamento observado na figura 19. Neste caso, o que determina o comportamento quase-frágil ou frágil do material é o deslocamento que ocorre no regime elástico do material.

Outra análise que pode ser feita sobre os resultados apresentados na figura 19 é a partir do ponto de vista energético. Na Tabela 3 é feita uma comparação entre a energia de deformação por unidade de fissura e a energia de fratura. Nesta tabela, ue representa o deslocamento referente a tensão máxima atingida, Ue é a energia de deformação, dada pela equação (5.1.3), U^* é a energia de deformação por área de fissura, dada pela equação (5.1.4) e Gf é a energia de fratura.

$$U_e = \frac{Pu}{2}, \quad (5.1.3)$$

em que U_e é a energia de deformação, P é o carregamento aplicado e u é o deslocamento.

$$U^* = \frac{U_e}{A}, \quad (5.1.4)$$

em que U^* é a energia de deformação por área de fissura e A é a área da fissura, correspondente a seção transversal da peça.

Tabela 3 – Análise energética

L(cm)	u_e (cm)	$u_{m\acute{a}x}$ (cm)	U_e (kN.cm)	U^* (kN/cm)	G_f (kN/cm)	U^*/ G_f
10	4,90E-4	6,16E-3	9,68E-4	3,87E-5	4,87E-4	0,0795
50	2,45E-3	6,16E-3	4,84E-3	1,94E-4	4,87E-4	0,3984
100	4,90E-3	6,16E-3	9,68E-3	3,87E-4	4,87E-4	0,7947
125	6,13E-3	6,16E-3	1,21E-2	4,84E-4	4,87E-4	0,9938
150	7,35E-3	6,16E-3	1,45E-2	5,81E-4	4,87E-4	1,1930

Analisando a Tabela 3 pode-se concluir que o comportamento de amolecimento do material também está relacionado com as transformações energéticas que ocorrem na peça durante o processo de abertura de fissura. Podem ser observadas três situações, de acordo Saouma (2000) apud d'Ávila (2003):

- a) Energia de fratura maior que a energia de deformação por área de fissura: a peça apresenta um ramo de amolecimento de tensões;
- b) Energia de fratura igual a energia de deformação por área de fissura: ocorre a ruptura frágil;
- c) Energia de fratura menor que a energia de deformação por área de fissura: ocorre uma ruptura brusca com redução de deslocamento.

Nota-se através desta análise que, enquanto a energia liberada pode por ser transformada em energia de fratura, o processo de propagação de fissura é estável. Entretanto se a energia liberada é maior do que a energia que pode ser absorvida na fratura, o processo é instável, resultando num comportamento de “*snapback*” (D'AVILA, 2003).

A seguir, é apresentada na figura 21 a relação entre a tensão e a deformação total da peça, ou seja, a deformação referente ao deslocamento total da extremidade livre da peça.

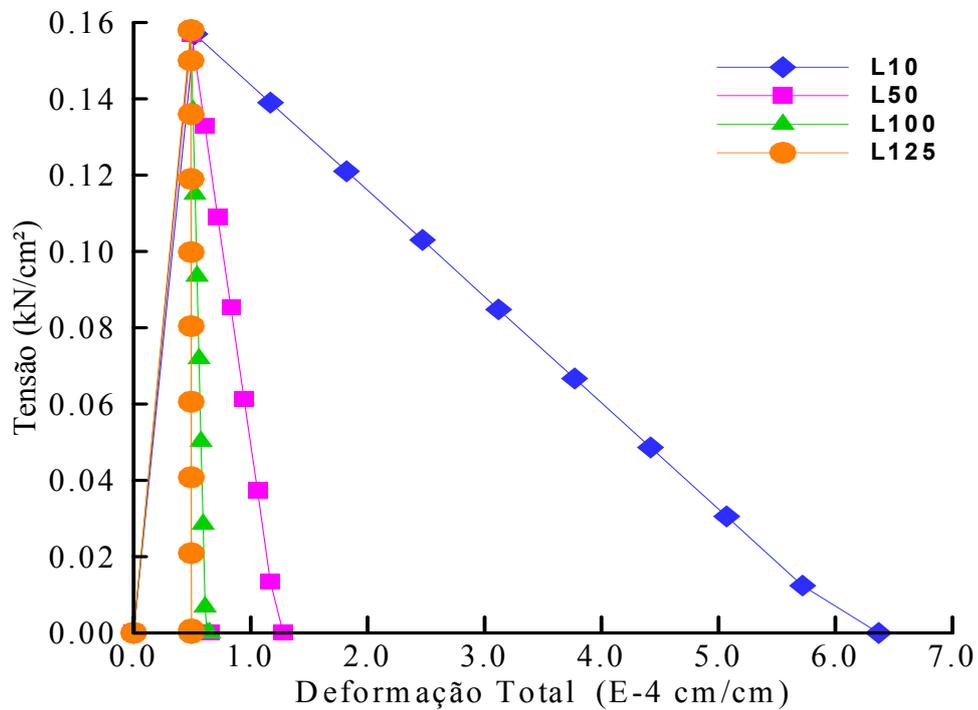


Figura 21: Relação Tensão x Deformação total - modelo implementado

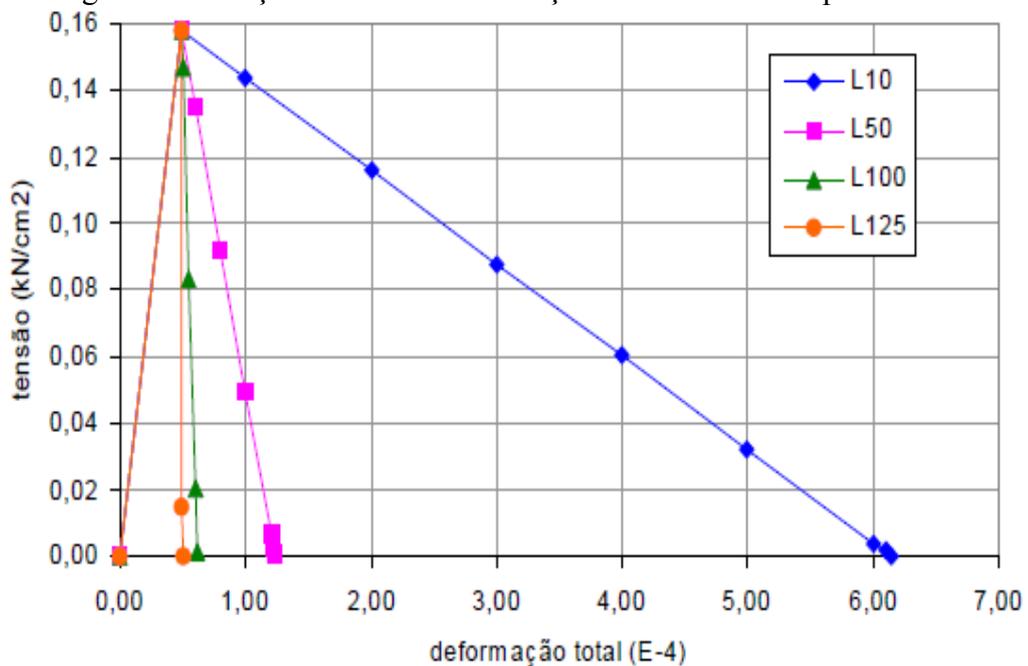


Figura 22: Relação Tensão x Deformação total. Fonte: d'AVILA (2003) .

Observa-se através da comparação entre as figuras 21 e 22 que os resultados obtidos neste trabalho estão de acordo com os valores obtidos por d'Ávila (2003). Os resultados da figura 21 corroboram com a análise energética, onde pode-se observar que peças mais curtas

apresentam mais deformação após o aparecimento de fissuras do que peças mais longas, representando o aumento da fragilidade com o aumento do comprimento das peças. Nesta figura não são apresentados os resultados para a peça de 150 cm pois não foi possível simular o ramo de amolecimento desta peça pois neste problema são aplicados deslocamentos prescritos.

Na figura 23 são apresentados os resultados obtidos através da simulação numérica para a região com fissura.

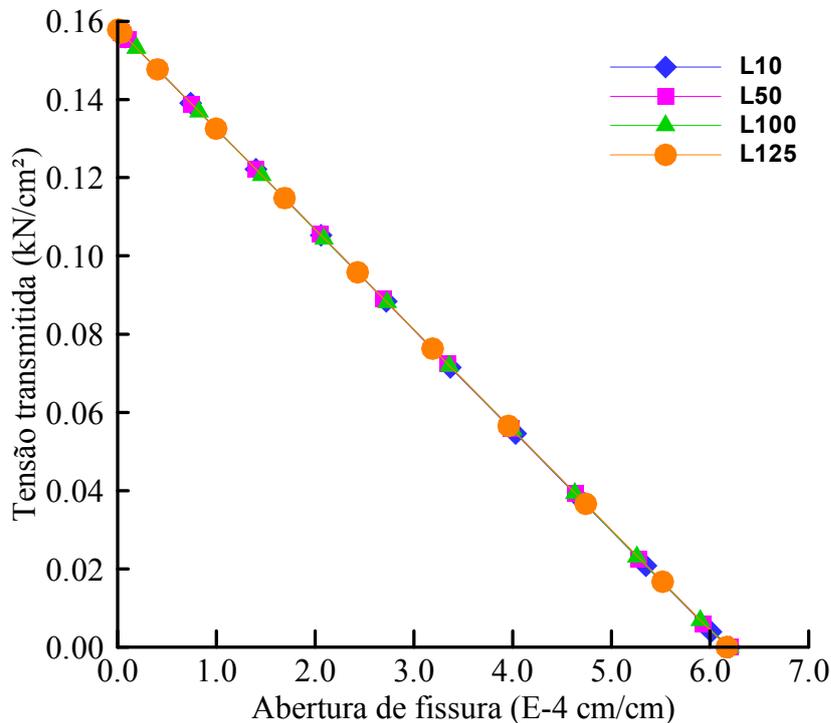


Figura 23: Relação constitutiva para região fissurada

Conforme pode-se observar os resultados obtidos na simulação numérica estão de acordo com os modelos constitutivos implementados. Sendo que na região fissurada as tensões vão reduzindo a zero de forma linear conforme ocorre a abertura de fissura.

Na figura 24 são apresentados os resultados obtidos para a região não fissurada. Nota-se que após atingir as tensões máximas, quando se inicia o processo de fissuração, começa a ocorrer uma descarga elástica até que as tensões e deformações sejam igual a zero.

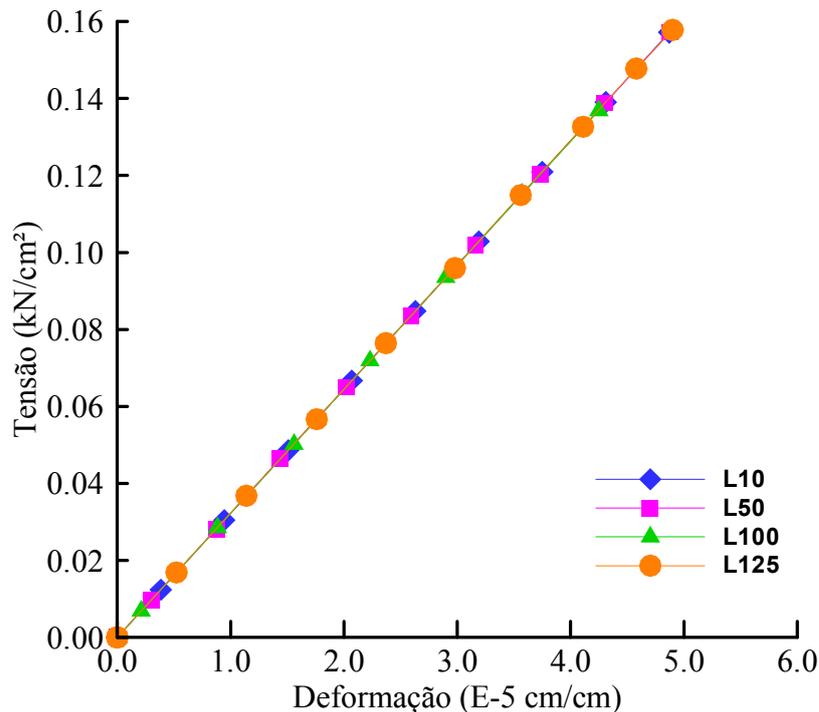


Figura 24: Relação Tensão x Deformação região não fissurada

5.2 FLEXÃO PURA COM APLICAÇÃO DE DESLOCAMENTO

5.2.1 Flexão a quatro pontos

Neste primeiro exemplo de flexão será analisado o comportamento de uma viga simplesmente apoiada submetida a duas cargas simetricamente aplicadas a uma distância de 150 mm entre os pontos de aplicação, este exemplo está baseado no trabalho de Lotfi e Shing (1995). O ensaio de flexão a quatro pontos foi escolhido inicialmente a fim de evitar qualquer influência de corte sobre os resultados, visto que na região entre os pontos de aplicação de carga a viga está submetida apenas à flexão pura.

Na figura 25 é apresentada a geometria da peça, bem como as condições de contorno. A viga foi discretizada com quatro diferentes malhas de elementos finitos, conforme tabela 4. Além da quantidade de elementos de cada malha, são apresentados nesta tabela a quantidade de elementos finitos empregados para discretizar a linha por onde passa a fissura.

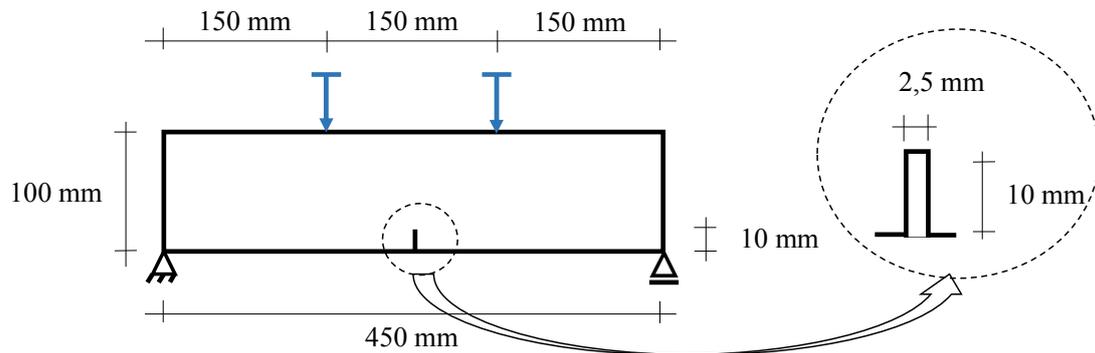


Figura 25: Geometria da peça e condições de contorno - flexão a quatro pontos.

Tabela 4 – Malhas empregadas flexão a quatro pontos

Nome	Total de elementos	Elementos na linha da fissura
M1	423	15
M2	548	20
M3	690	30
M4	822	30

Na figura 26 são apresentadas as malhas M1 e M4 com detalhe na discretização na região com entalhe.

Na tabela 5 são apresentados os dados de entrada utilizados para este exemplo. Os valores foram obtidos do trabalho de Lotfi e Shing (1995). Neste trabalho de referência os autores também desenvolvem um modelo de fissura incorporada, validando os resultados através da comparação com modelos discretos e distribuídos.

Para a região não fissurada utilizou-se uma relação constitutiva elástico linear. Na região fissurada foi analisada a influência de duas diferentes leis de amolecimento, uma linear e outra exponencial, apresentadas no item 4.7.

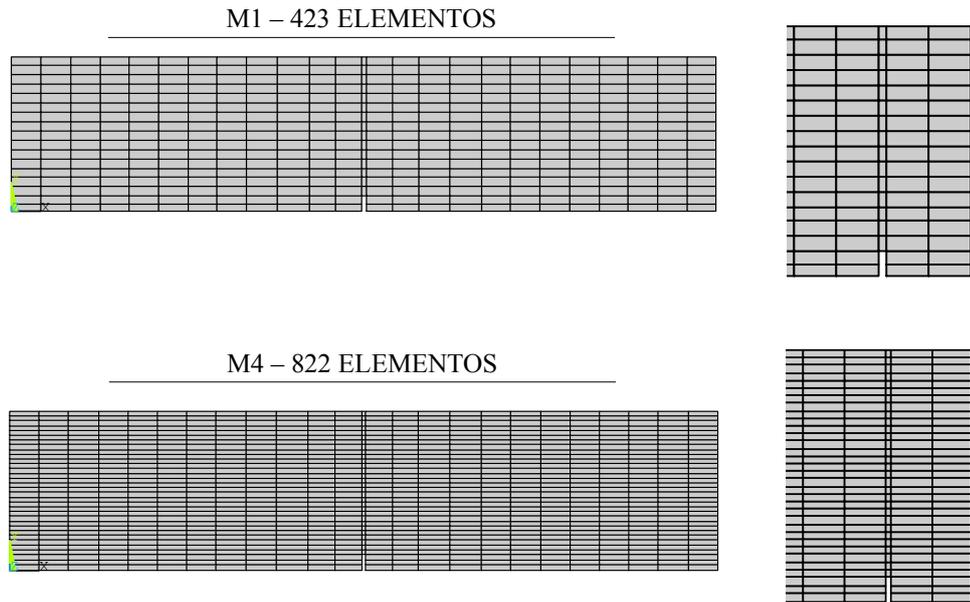


Figura 26: Discretização das malhas mais grosseira (M1) e mais fina (M4) com detalhe da discretização no entalhe – flexão a quatro pontos

Tabela 5 – Parâmetros de entrada flexão a quatro pontos

Propriedades Geométricas	
Viga	
Comprimento	450 mm
Altura	100 mm
Espessura	50 mm
Entalhe	
Comprimento	2,5 mm
Altura	10 mm
Espessura	50 mm
Propriedades do Material	
Resistência à tração (f_t)	3,0 MPa
Módulo de elasticidade (E)	38000 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2
Energia de Fratura (G_f)	0,06 N/mm

Inicialmente foi analisada a influência que a lei de amolecimento exerce sobre a resposta global. Na figura 27 são apresentados os modelos de amolecimento empregados. Nota-se que para o modelo de amolecimento linear a máxima abertura de fissura é menor do que para o modelo exponencial, como será visto mais adiante esta diferença de comportamento irá impactar na resposta global da estrutura.

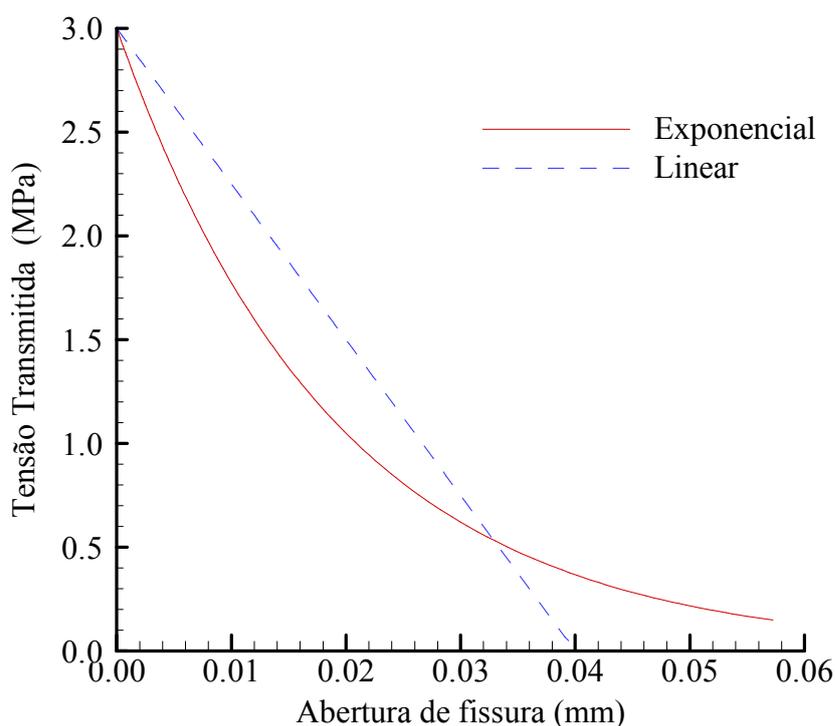


Figura 27: Modelos constitutivos para a linha da fissura

Na figura 28 é apresentado o comportamento global da estrutura para os dois modelos constitutivos empregados, para a malha mais refinada (M4) e também o valor de referência correspondente ao modelo incorporado implementado no trabalho de Lotfi e Shing (1995). É apresentada a relação entre a carga e o deslocamento vertical nos pontos de aplicação de carga. Como pode ser observado no modelo de amolecimento linear, a carga de pico é maior que para os modelos com amolecimento exponencial, tanto para a referência quanto para o modelo implementado nesta dissertação. Outra característica observada é o trecho pós pico, que se apresenta mais frágil para o modelo linear em relação ao exponencial. A fragilidade no comportamento do modelo linear é devida a ausência de energia de fratura para aberturas maiores. No modelo exponencial observa-se uma curva pós pico mais suave, representando de forma mais realista o comportamento pós pico de materiais quase-frágeis.

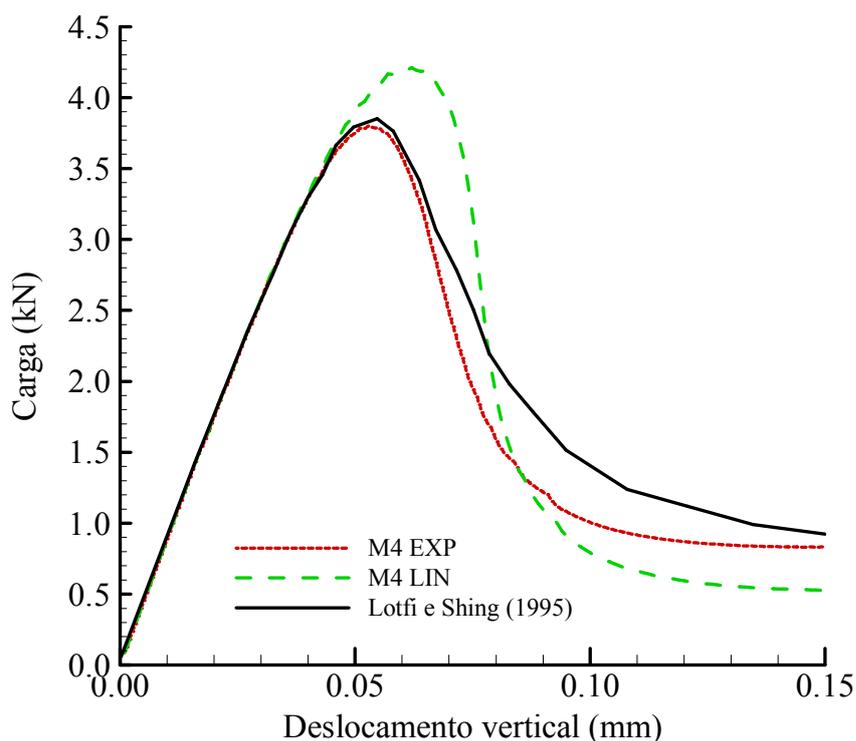


Figura 28: Relação Carga x Deslocamento vertical com amolecimento linear e exponencial.

No trabalho de referência (LOTFI; SHING, 1995) é feita a comparação dos resultados entre modelos discretos, distribuídos e incorporados. Utilizaram-se como base para comparação apenas as respostas obtidas pelos modelos discretos e incorporados, visto que o modelo distribuído superestima a tensão de pico e resulta numa relação pós pico incorreta.

Na figura 29 são apresentadas as curvas obtidas através da simulação do modelo implementado com diferentes malhas e também as curvas do trabalho de referência. As curvas R1 e R2 mostram as respostas obtidas no trabalho de referência para os modelos incorporado e discreto, respectivamente e as curvas M1, M2, M3 e M4 representam as respostas obtidas pelo modelo de fissura incorporada implementado nessa dissertação, de acordo com tabela 4.

Visto que o modelo de amolecimento linear não se mostrou adequado para a representação do comportamento do material, conforme figura 28, na figura 29 são apresentadas apenas as curvas obtidas pelo modelo de amolecimento exponencial. Conforme é observado na figura 29 o modelo implementado apresenta uma resposta coerente com os resultados do trabalho de referência. A tensão de pico é estimada de forma correta e nota-se que conforme a malha vai sendo refinada as curvas tendem a convergir para um mesmo comportamento. Observa-se ainda que as curvas resultantes do modelo implementado

apresentam um comportamento pós pico mais frágil que as curvas de referência. Ambos os modelos foram simulados com curva de amolecimento exponencial, porém no artigo de referência esta curva não é apresentada, desta forma não foi possível realizar uma comparação entre os parâmetros de cada curva.

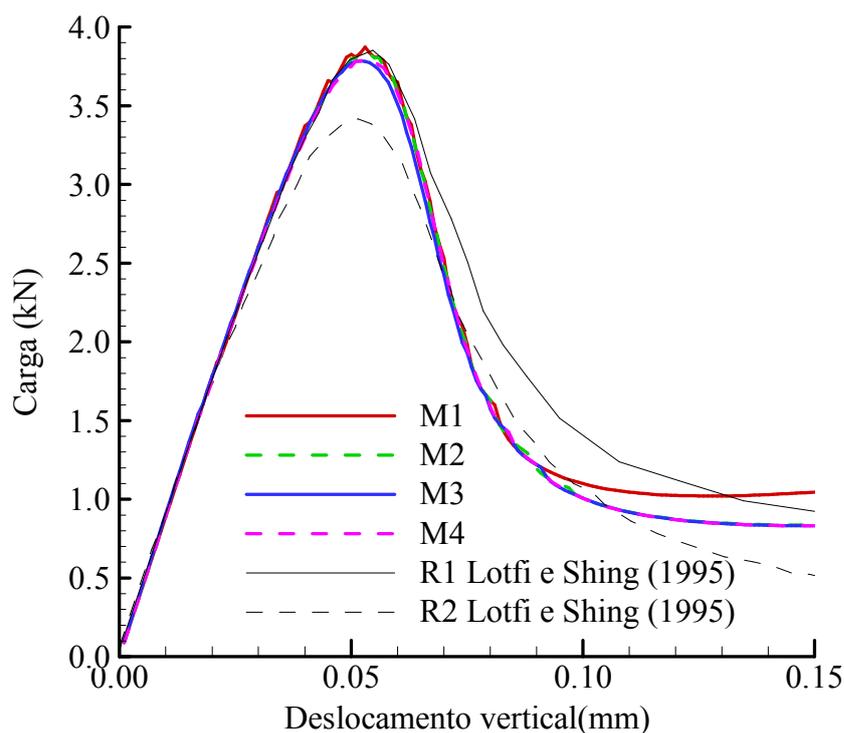


Figura 29: Carga x deslocamento vertical nos pontos de aplicação de carga para diferentes malhas empregadas

5.2.2 Flexão a três pontos

Um teste clássico para analisar a propagação de fissura em modo I é a viga com entalhe ensaiada sob flexão a três pontos. Para validar a metodologia implementada nesta dissertação utilizou-se como referência a viga ensaiada experimentalmente por Petersson (1981).

Na figura 30 é apresentada a geometria da peça, bem como as condições de contorno. A viga foi discretizada com três diferentes malhas de elementos finitos, conforme tabela 6.

Além da quantidade de elementos de cada malha, são apresentados nesta tabela a quantidade de elementos finitos empregados para discretizar a linha por onde passa a fissura.

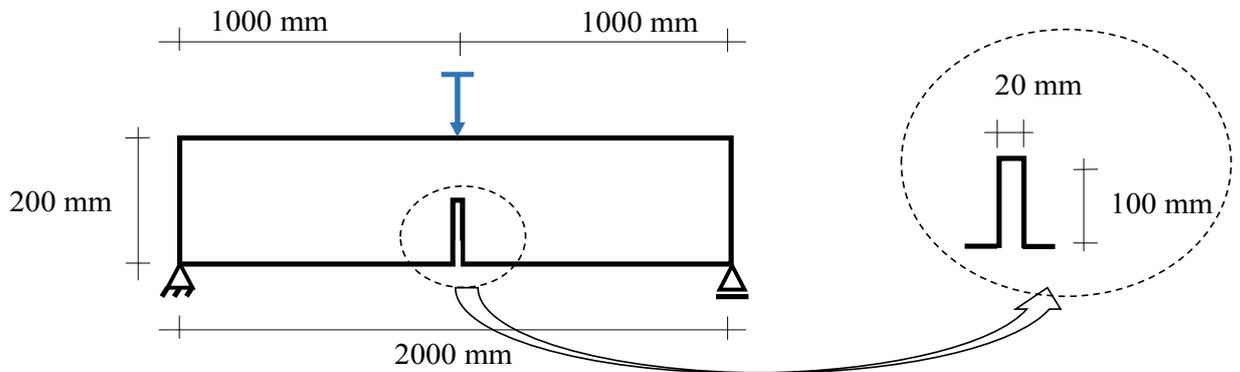


Figura 30: Geometria da peça e condições de contorno - flexão a três pontos.

Tabela 6 – Malhas empregadas flexão a três pontos

Nome	Total de elementos	Elementos na linha da fissura
M1	381	15
M2	721	25
M3	811	25

Na figura 31 são apresentadas as malhas empregadas com detalhe da discretização na região com entalhe.

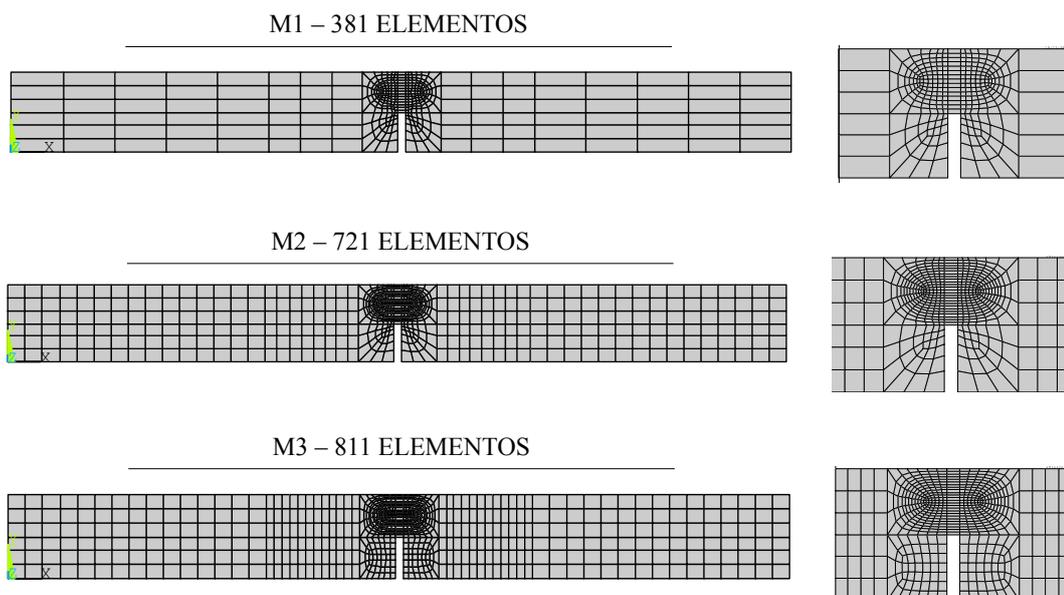


Figura 31: Discretização das malhas com detalhe na região do entalhe – flexão a três pontos

Na tabela 7 são apresentados os dados de entrada utilizados para este exemplo. Estes valores são correspondentes as características do modelo ensaiado por Petersson (1981).

Tabela 7 – Parâmetros de entrada flexão a três pontos

Propriedades Geométricas	
Viga	
Comprimento	2000 mm
Altura	200 mm
Espessura	50 mm
Entalhe	
Comprimento	20 mm
Altura	100 mm
Espessura	50 mm
Propriedades do Material	
Resistência à tração (f_t)	3,33 MPa
Módulo de elasticidade (E)	30000 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2
Energia de Fratura (G_f)	0,124 N/mm

Para a região não fissurada utilizou-se uma relação constitutiva elástico linear. Na região fissurada foi analisada a influência de duas diferentes leis de amolecimento, uma linear e outra exponencial, apresentadas no item 4.7.

Na figura 32 é apresentada uma comparação dos resultados obtidos para as duas leis de amolecimento empregadas para a malha mais refinada (M3) e também os resultados experimentais. Conforme pode ser observado a lei de amolecimento exponencial é a que apresenta resultados que mais se aproximam do comportamento real da peça ensaiada. No modelo linear, assim como no exemplo de flexão a quatro pontos, as tensões máximas são superestimadas e a curva pós pico é mais íngreme que a do modelo exponencial. Como o modelo linear não apresentou resultados satisfatórios, as comparações realizadas na figura 33 foram feitas apenas considerando os resultados do modelo constitutivo exponencial.

E por fim uma comparação com diferentes malhas de elementos finitos é apresentada na figura 33. Nota-se que mesmo para uma malha grosseira (M1) os resultados apresentados são satisfatórios e que tendem a convergir para uma resposta mais suavizada com o refinamento. É importante enfatizar que nas malhas geradas foi priorizado o refinamento da região fissura, sendo que na malha M1 a região fissurada foi modelada com 15 elementos

finitos e as outras malhas, M2 e M3, a região fissurada foi modelada com 25 elementos finitos.

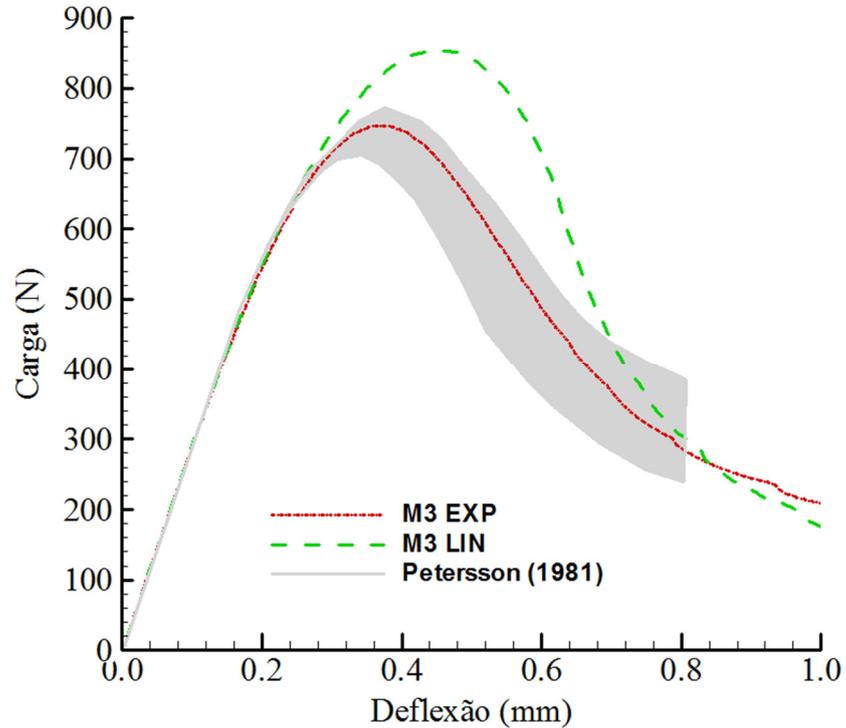


Figura 32: Relação Carga x Deflexão da viga com amolecimento linear e exponencial

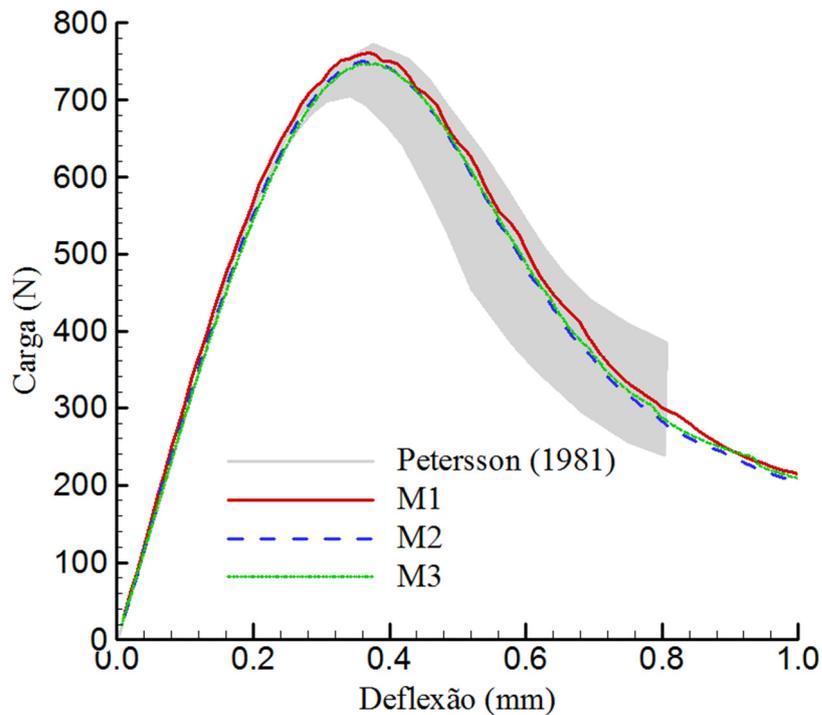


Figura 33: Carga x Deflexão da viga para diferentes malhas empregadas

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo a implementação de um modelo de fissura com descontinuidades fortes incorporadas a fim de analisar o comportamento de elementos estruturais no estágio pós-fissura. O modelo implementado foi baseado no modelo proposto por Dvorkin; Cuitiño e Gioia (1990). Estes autores implementaram um modelo de fissuração com base na formulação assimétrica estática e cinematicamente consistente (SKON) e utilizaram um elemento finito denominado QMITC (Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components). Nesta dissertação propôs-se a utilização do elemento quadrilátero bilinear além da utilização da parte simétrica da matriz de rigidez.

Foram empregadas relações constitutivas distintas para a região com fissura e sem fissura. A região não fissurada foi modelada por uma relação constitutiva elástico linear, e para a região fissurada foi analisada a influência de dois modelos constitutivos, o modelo linear proposto por Hillerborg e coautores (1976) e o modelo exponencial proposto por Dvorkin; Cuitiño e Gioia (1990).

A validação dos resultados foi feita através da análise de diferentes situações de carregamentos com objetivo de capturar a propagação de fissura em modo I para materiais quase-frágeis, sendo estes resultados comparados com valores experimentais e numéricos obtidos na literatura.

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando os resultados apresentados no Capítulo 5 pode-se chegar a algumas conclusões sobre o modelo de fissura implementado.

Através de exemplos de tração foi possível comprovar a eficiência do modelo implementado. Pode-se observar a independência dos resultados em relação as diferentes malhas de elementos finitos adotadas, também sendo verificada a capacidade do modelo de captar de forma correta o comportamento do material nas regiões com e sem fissura. Ainda no

exemplo de tração com comprimento variável o modelo conseguiu representar de forma correta a fragilização das peças com o aumento do comprimento.

Nos exemplos de flexão foram utilizados dois modelos constitutivos distintos para representar o comportamento do material na linha de fissura. A partir da comparação dos resultados obtidos foi possível verificar que as leis de amolecimento têm grande influência sobre o comportamento global da estrutura.

O modelo de amolecimento exponencial (DVORKIN; CUITIÑO; GIOIA, 1990) se mostrou mais adequado visto que a tensão de pico foi estimada de forma correta além de que a curva de amolecimento apresentou um comportamento mais realista quando comparado com dados experimentais. Para ambos os exemplos de flexão, no modelo linear (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976) as cargas máximas foram superestimadas tanto em comparação com valores numéricos (flexão a 4 pontos) quanto com dados experimentais (flexão a 3 pontos), além disso, o modelo linear apresentou um ramo de amolecimento mais frágil do que é realmente observado para materiais quase-frágeis.

De forma geral os resultados obtidos apresentaram uma boa aproximação à resultados experimentais bem como resultados numéricos obtidos por modelos de fissura apresentados na literatura. Portanto, pode-se afirmar que o modelo implementado é adequado para a simulação de materiais quase-frágeis. Vale ressaltar ainda que este modelo apresenta como vantagem a utilização de malhas de elementos finitos relativamente grosseiras, além da possibilidade de implementação em códigos de elementos finitos existentes.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O modelo implementado nesta dissertação abre a possibilidade de análise de outras situações além das aqui estudadas. Portanto, a seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Consideração de modo misto de propagação de fissura: Na literatura são apresentadas diversas situações de carregamento em que as fissuras se propagam em modo misto, ou seja, uma combinação entre abertura e deslizamento. Desta forma,

sugere-se a investigação de propagação em modo misto utilizando o presente modelo.

- Análise do efeito de escala: outra análise interessante de ser realizada a partir do modelo implementado é relacionada ao efeito de escala, ou seja, a variação do comportamento de corpos de prova ensaiados em laboratório e estruturas reais.
- Análise dinâmica: através da realização de considerações dos efeitos de inércia este modelo de fissura pode ser utilizado na análise da propagação de fissura de forma dinâmica.
- Implementação de descontinuidades fracas: ao implementar uma subrotina para captar o aparecimento de descontinuidades fracas, pode-se estudar o comportamento de uma gama mais variada de materiais, como, por exemplo, materiais dúcteis. Além disso, a implementação de descontinuidades fracas possibilita uma análise completa do processo de fratura, ou seja, desde a localização de deformações em uma banda (descontinuidades fracas) até a abertura de fissuras (descontinuidades fortes).
- Investigar a influência de elementos finitos distorcidos: nesta dissertação trabalhou-se com elementos retangulares e quadrados na região fissurada. Portanto, sugere-se a análise de casos onde os elementos são distorcidos.

REFERÊNCIAS

- ALSHIBLI, K. A.; ALSALEH, M. I.; VOYAJIDJIS, G. Z. Modelling strain localization in granular materials using micropolar theory: numerical implementation and verification. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 30, n. 15, p. 1525–1544, 2006.
- ANDERSON, T. **Fracture Mechanics: fundamentals and applications**. 3. ed. New York: CRC press, 2005.
- ARAÚJO, J. M. DE. **Estruturas de concreto - A resistência à tração e energia de fratura do concreto**. Rio Grande: Dunas, 2001.
- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55–129, 1962.
- BAZANT, Z.; OH, B. Crack band theory of concrete. **Materials and Structures**, v. 16, p. 155, 1983.
- BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B. E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 70, n. 1, p. 59–89, 1988.
- BITTENCOURT, T. N. **Faturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentais, e suas Aplicações**. Tese (Livre docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- BITTENCOURT, T. N.; INGRAFFEA, A. Um método numérico para a modelagem de fraturamento coesivo em 3D. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 11, n. 4, p. 555–564, 1995.
- BORST, R. DE. Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum. **Engineering Computations**, v. 8, n. 4, p. 317–332, 1991.
- BORST, R. DE et al. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: Bridging the gap. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 28, n. 7-8, p. 583–607, 2004.
- CHAVES, E. W. V.; OLIVER, J. On the Strong Discontinuity Approach in 3D settings. **XXII CILAMCE**, 2001.
- CLARO, G. K. S. **Um algoritmo para a construção de superfícies potenciais de falha em sólidos tridimensionais**. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2011.
- COPE, R. J. et al. Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs. **Numerical Methods for Nonlinear Problems**, p. 457–470, 1980.

D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

D'HERS, S.; DVORKIN, E. N. Modelling of strain localization via a two-scale formulation. **Mecánica Computacional**, v. 28, p. 1225–1236, 2008.

DRIEMEIER, L. **Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

DROZ. **Modèle numérique du comportement non-linéaire d'ouvrages massifs en béton non armé**. Tese (Doutorado) - Departament de Genie Civil, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, 1987.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960.

DUJC, J.; BRANK, B.; IBRAHIMBEGOVIĆ, A. Quadrilateral finite element with embedded strong discontinuity for failure analysis of solids. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 69, n. 3, p. 223–260, 2010.

DVORKIN, E. N.; ASSANELLI, A. P. 2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 90, n. 1-3, p. 829–844, 1991.

DVORKIN, E. N.; CUITIÑO, A. M.; GIOIA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 541–564, 1990.

GÁLVEZ, J. C. et al. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 109, p. 369–386, 2013.

GAMINO, A. L. et al. A comparative study between smeared and embedded crack models for finite element analysis of reinforced concrete beams. **Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures**, 2010.

GEISSLE, G.; NETZKER, C.; KALISKE, M. Discrete crack path prediction by an adaptive cohesive crack model. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 77, n. 18, p. 3541–3557, 2010.

GUPTA, A. K.; AKBAR, H. Cracking in reinforced concrete analysis. **Journal of structural Engineering**, 1984.

HARIRI-ARDEBILI, M. A.; SEYED-KOLBADI, S. M. Seismic cracking and instability of concrete dams: Smeared crack approach. **Engineering Failure Analysis**, v. 52, p. 45–60, 2015.

- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Education, 2010.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773–781, nov. 1976.
- HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. [s.l.] TU Delft, Delft University of Technology, 1991.
- HU, Y. et al. Simulation of hydraulic fracturing in rock mass using a smeared crack model. **Computers and Structures**, v. 137, p. 72–77, 2014.
- HUESPE, A. E. et al. Strong Discontinuity Approach in Dynamic Fracture. **Mecánica Computacional**, v. 25, p. 1997–2018, 2006.
- HUESPE, A. E. et al. A finite thickness band method for ductile fracture analysis. **International Journal of Plasticity**, v. 25, n. 12, p. 2349–2365, 2009.
- HUESPE, A.; OLIVER, J. Crack models with embedded discontinuities. In: HOFSTETTER, G.; MESCHKE, G. (Eds.). **Numerical modeling of concrete cracking**. 1. ed. Springer Science & Business Media, 2011. p. 99–159.
- JIRÁSEK, M. Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, n. 31-32, p. 4133–4145, 1998.
- JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 188, n. 1-3, p. 307–330, 2000.
- JIRÁSEK, M.; BELYTSCHKO, T. Computational resolution of strong discontinuities. **Fifth World Congress on Computational Mechanics**, p. 7–12, 2002.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Rotating crack model with transition to scalar damage. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, p. 277–284, 1998.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model: I. basic formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 6, p. 1269–1290, 2001a.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model. Part II. Combination with smeared cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 6, p. 1291–1305, 2001b.
- JOHNSON, C.; SCOTT, R. A finite element method for problems in perfect plasticity using discontinuous trial functions. In: WUNDERLICH, W.; STEIN, E.; BATHE, K.-J. (Eds.). **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**. Berlin: Springer, 1981. p. 307-324.

- JUÁREZ-LUNA, G.; AYALA, G. Improvement of some features of finite elements with embedded discontinuities. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 118, p. 31–48, 2014.
- KANNINEN, M. .; POPELAR, C. **Advanced Fracture Mechanics**. New York: Oxford University, 1985.
- KLISINSKI, M.; RUNESSON, K.; STURE, S. Finite element with inner softening band. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 117, n. 3, p. 575–587, 1991.
- KUMAR, S.; BARAI, S. V. **Concrete fracture models and applications**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011.
- LEE, J. S.; CHOI, I. Y.; CHO, H. N. Modeling and detection of damage using smeared crack model. **Engineering Structures**, v. 26, n. 2, p. 267–278, 2004.
- LENS, L. N.; BITTENCOURT, E.; D’AVILA, V. M. R. Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, n. 14, p. 2281–2297, 2009.
- LINDER, C.; ARMERO, F. Finite elements with embedded branching. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 4, p. 280–293, 2009.
- LOTFI, H. R.; SHING ’, P. B. Embedded Representation of Fracture in Concrete With Mixed Finite Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, n. July 1994, p. 1307–1325, 1995
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1–4, p. 289–314, 1996.
- NEEDLEMAN, A. A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, n. 3, p. 525–531, 1987.
- OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 2, p. 461–474, 1989.
- OLIVER, J. et al. On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. **Fifht World Congress on Computational Mechanics**, p. 15, 2002a.
- OLIVER, J. et al. From continuum mechanics to fracture mechanics: The strong discontinuity approach. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n. 2, p. 113–136, 2002b.
- OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; SAMANIEGO, E. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 56, n. 14, p. 2135–2161, 2003.

OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; SÁNCHEZ, P. J. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 37-40, p. 4732–4752, 2006.

ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 61, n. 2, p. 189–214, 1987.

PETERSSON, P. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Lund, Sweden: University of Lund, 1981.

PLANAS, J. et al. Generalizations and specializations of cohesive crack models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 14, p. 1759–1776, 2003.

PLANAS, J.; ELICES, M.; G, J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n. 2, p. 137–163, 2002.

PONTHOT, J. . **Traitement unifié de la Mécanique des Milieux Continus Solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis**. Tese (Doutorado) - Faculte dès Sciences Appliquees, Université de Liège, Liège, 1995.

ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. Tese (Doutorado) - Technische Hogeschool Delft, Delft University of Thechnology, Delft, 1988.

SANCHO, J. M. et al. An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, n. 1-2, p. 75–86, 2007.

SAOUMA, V. E. **Lecture Notes in: Fracture Mechanics**. [s.l.] University of Colorado, Boulder, 2000.

SIMO, J. C.; OLIVER, J.; ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. **Computational Mechanics**, v. 12, n. 5, p. 277–296, 1993.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. D. E. S. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp, 2003.

SPENCER, B. **Embedded Crack elements for analysis of reinforced concrete**. Boulder, Colorado: Ph.D. Thesis Proposal, 2000.

SUIDAN, M.; SCHNOBRICH, W. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. **Journal of The Structural Division**, v. 99, n. ST10, p. 2109–2122, 1973.

WELLS, G. N. **Discontinuous modelling of strain localisation and failure**. Delft: Delft University of Technology, 2001.

XU, X. P.; NEEDLEMAN, A. Continuum Modelling of Interfacial Decohesion. **Solid State Phenomena**, v. 35-36, p. 287–302, 1993.

YUAN, H.; LI, X. Effects of the cohesive law on ductile crack propagation simulation by using cohesive zone models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 126, p. 1–11, 2014.

ZHANG, Y. et al. Strong discontinuity embedded approach with standard SOS formulation: Element formulation, energy-based crack-tracking strategy, and validations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 287, p. 335–366, 2015.

ANEXOS

ANEXO A - TENSÕES PRINCIPAIS E DEFINIÇÃO DA MATRIZ P

A1- TENSÕES PRINCIPAIS EM ELEMENTOS FINITOS

O texto a seguir está baseado em Hibbeler (2010). Inicialmente, considera-se um elemento sujeito às tensões normais de tração e compressão e tangenciais, conforme figura A1a). Cujas representação matricial dessas tensões é apresentada na equação (A.1)

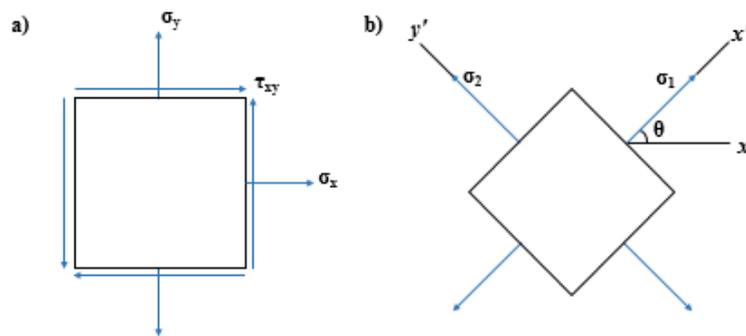


Figura A1: Elemento infinitesimal a) tensões normais e de corte b) tensões principais

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Quando o elemento é girado de um ângulo θ (figura A1b), em relação a posição inicial, de tal forma que as tensões tangenciais sejam nulas, obtêm-se as máximas e mínimas tensões normais, ou seja, as tensões principais.

Para obter essas tensões é necessário transformar as tensões dos eixos cartesianos globais (x,y) para os eixos cartesianos locais (x',y') , conforme equações

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \quad (\text{A.2})$$

sendo \mathbf{R} a matriz de rotação.

Desenvolvendo a equação (A.2) obtém-se

$$\sigma_{1\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{2\theta} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.4})$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (\text{A.5})$$

Derivando a equação (A.3) e igualando a zero, obtém-se o ângulo para o qual a tensão principal é máxima

$$\theta = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \right], \quad (\text{A.6})$$

portanto, o ângulo de abertura de fissura α é definido como

$$\alpha = \theta + 90^\circ \quad (\text{A.7})$$

A2- DEFINIÇÃO DA MATRIZ P

A matriz P é responsável por selecionar quais tensões são transmitidas através da fissura, ou seja, a tensão normal a abertura da fissura e a tensão tangencial a abertura da fissura. Partindo do ponto que através da análise de elementos finitos calculam-se as tensões em relação aos eixos (x,y) globais da estrutura, é necessário rotacionar essas tensões para estejam nos eixos locais (x',y') da fissura.

A partir das equações (A.3) e (A.5), a matriz P fica

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

ANEXO B – DEDUÇÃO DO PRINCÍPIO VARIACIONAL EMPREGADO

O princípio variacional de Hu-Washizu foi utilizado para incorporar descontinuidades no campo de deslocamentos. Neste, os campos de deslocamento, \mathbf{u} , deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e tensão, $\boldsymbol{\sigma}$, são independentes entre si. Levando em conta a descontinuidade de deslocamentos o princípio assume a forma apresentada na equação (A.9).

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_{S_i} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{b}} dV, \quad (\text{A.9})$$

em que os deslocamentos, as deformações e as tensões são interpolados conforme as equações (A.10) a (A.12).

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}_N + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c, \quad (\text{A.10})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \mathbf{d}_n + \mathbf{G} \mathbf{e}, \quad (\text{A.11})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{S} \mathbf{s}, \quad (\text{A.12})$$

Substituindo as equações (A.10) a (A.12), em (A.9) e levando em conta que $\delta(\mathbf{N} \mathbf{d}_N) = \mathbf{B} \mathbf{d}_N$ e $\delta(\mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) = \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \delta \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{d}_N^T + \mathbf{G}^T \mathbf{e}^T) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{s}^T [\nabla (\mathbf{N} \mathbf{d}_N + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) - \mathbf{B} \mathbf{d}_N - \mathbf{G} \mathbf{e}] dV = \\ & \delta \int_V (\mathbf{N}^T \mathbf{d}_N^T + \mathbf{N}_c^T \mathbf{d}_c^T) \hat{\mathbf{b}} dV + \delta \int_{S_i} (\mathbf{N}^T \mathbf{d}_N^T + \mathbf{N}_c^T \mathbf{d}_c^T) \hat{\mathbf{t}} dV \\ \\ & \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{s}^T [\nabla (\mathbf{N} \mathbf{d}_N) + \nabla (\mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) - \mathbf{B} \mathbf{d}_N - \mathbf{G} \mathbf{e}] dV \\ & = \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{b}} dV + \delta \mathbf{d}_N^T \int_{S_i} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dS + \delta \mathbf{d}_c^T \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{t}} dS \\ \\ & \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{s}^T [\mathbf{B} \mathbf{d}_N + \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{B} \mathbf{d}_N - \mathbf{G} \mathbf{e}] dV \\ & = \delta \mathbf{d}_N^T \left(\int_V \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dS \right) + \delta \mathbf{d}_c^T \left(\int_V \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{t}} dS \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T [\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G} \mathbf{e}] dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} \mathbf{s} dV - \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{s} dV \\ = \delta \mathbf{d}_N^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c \end{aligned}$$

Em que

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dS$$

e

$$\mathbf{f}_c = \int_V \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \hat{\mathbf{t}} dS$$

Por fim, obtêm-se o Princípio Variacional de Hu-Washizu adaptado para descontinuidades internas, conforme equação (A.13).

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{d}_N^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{S} \mathbf{s}] dV + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G} \mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} \mathbf{s} dV \\ = \delta \mathbf{d}_N^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$