

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE SUAVIZAÇÃO DE RESULTADOS PARA
ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS**

por

Otávio Augusto Alves da Silveira

Dissertação para a obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2007.

**IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE SUAVIZAÇÃO DE RESULTADOS PARA
ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS**

por

Otávio Augusto Alves da Silveira

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 21 de dezembro de 2007.

Aos meus bons amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Rogério José Marczak, pela confiança, apoio em todos os momentos e tolerância na realização deste trabalho. Aos professores Jun Fonseca e Ignácio Iturrioz, exemplos como professor e pessoa. Agradeço especialmente a esses três professores por serem responsáveis pela maior parte da minha formação como engenheiro.

Aos meus grandes amigos de graduação Daniel Thomazi, Carlos Uhlmann, Luciano Lopes e Daniel Gerhardt. Aos colegas de mestrado Leandro Corso, Gustavo Mezzomo e demais colegas do GMAp.

À grande Tais Barbosa pelas cobranças e incentivo durante todo o tempo do mestrado. Ao verdadeiro amigo Felipe Faleiro pelas conversas gerais, discussões e grande apoio. Aos amigos Claudio Dida, Leandro Minozzo, Diego Canabarro e também aos amigos de banda Melão Todt, Luciano Preza e Pedro Petracco.

Aos meus pais Moacir e Neiva pela minha educação e apoio durante toda a vida, aos meus irmãos André e KK pela confiança, à minha, sempre presente, vó Eva e aos meus outros avós.

À minha amada, Débora Nunes, pelo incentivo, carinho e paciência na parte final dessa jornada.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo ensino público, gratuito e de qualidade, ao PROMEC e aos órgãos de fomento à pesquisa, CNPQ e CAPES, pelo apoio financeiro. E a todos mais que eu não tenha citado nesta lista de agradecimentos, mas que de uma forma ou de outra contribuíram não apenas para a minha dissertação, mas também para eu ser quem eu sou.

RESUMO

O presente trabalho desenvolve o estudo de implementação de uma técnica de suavização de resultados para elementos de contorno descontínuos para elasticidade bidimensional. Além disso, propõe-se uma nova metodologia para o cálculo da componente tangencial de tensão nesses mesmos elementos.

A utilização de elementos descontínuos no método dos elementos de contorno (MEC) fornece resultados descontínuos para as variáveis do problema de um elemento para outro. A definição do valor de uma variável na interface entre dois elementos ou mesmo nos extremos de um segmento de contorno se torna um problema. Uma técnica capaz de obter resultados contínuos (suavização) é implementada para elementos lineares e quadráticos. A metodologia é desenvolvida a partir da recuperação de valores nos nós geométricos entre elementos, a qual se baseia em aproximações por mínimos quadrados dos valores originais nos nós físicos. Essas aproximações são realizadas a cada grupo de dois elementos (*patches*) e, dessa maneira, o valor de qualquer variável (deslocamentos ou tensões) no nó geométrico compartilhado pelo grupo pode ser recuperado. Novas soluções com o mesmo grau de interpolação das soluções originais são obtidas em cada elemento a partir desses valores recuperados e, conseqüentemente, uma solução contínua é obtida.

A obtenção de resultados não contínuos e de menor precisão para a componente tangencial de tensão, a qual é normalmente pós-processada no MEC, é comum a elementos contínuos e descontínuos. Desse modo, uma nova proposta de cálculo dessa componente é desenvolvida para elementos descontínuos lineares e quadráticos. A utilização da lei de Hooke na sua forma padrão utiliza funções com graus de interpolação diferentes, pois a componente tangencial de deformação é obtida a partir da derivada das funções de interpolação de deslocamento. Assim, a técnica se baseia na utilização de um número menor de pontos com convergência mais elevada na utilização da lei de Hooke.

A eficiência e capacidade das ferramentas propostas no trabalho são verificadas pela resolução de problemas estáticos de elasticidade com elementos lineares e quadráticos, para diferentes geometrias e condições de contorno.

ABSTRACT

This work presents a study on the implementation of a technique to obtain smoothed results for discontinuous boundary elements in two-dimensional elasticity. A new methodology for the evaluation of the tangential component of stress in these elements is also proposed.

The use of discontinuous elements in the boundary element method (BEM) generates discontinuous inter-element results for the variables of the problem. Then the recovery of the value of a variable along the interface between two elements becomes cumbersome. A technique to obtain continuous (smoothed) results is implemented for linear and quadratic elements. The methodology is developed for the recovery of values in the geometric nodes between elements, which is based on least-square approximations of the original values in the physical nodes. These approximations are made for each patch of two elements, and then the value of any variable (displacements or stress) in the geometric node shared in this patch can be recovered. New solutions with the same degree of interpolation of the original solutions are obtained in each element from these recovered values and therefore a continuous solution is obtained.

The evaluation of discontinuous and consequently less accurate results for the tangential component of stress is a common post-processing step in BEM, for both continuous and discontinuous elements. Thus, a new proposal for calculating this component is developed for linear and quadratic discontinuous elements. The conventional application of the Hooke's law uses functions with different degrees of interpolation, as the tangential component of strain is obtained from the derivative of the displacement interpolation functions. Therefore, the proposed technique is based on the use of a smaller number of sample points with higher accuracy.

The performance and capabilities of the devised tool are verified by the solution of two-dimensional elasticity static problems using linear and quadratic boundary elements, for various geometry and boundary conditions.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE ELASTICIDADE LINEAR	5
2.1. ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)	8
2.2. ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)	9
3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	11
3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL BÁSICA E ELASTICIDADE	11
3.2. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO	13
3.3. CÁLCULO DAS VARIÁVEIS EM PONTOS INTERNOS	17
3.4. ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS	17
3.4.1. ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO	19
3.4.2. ELEMENTO QUADRÁTICO DESCONTÍNUO	20
4. PROPOSTA DE TÉCNICA DE SUAUIZAÇÃO DE RESULTADOS PARA ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS	24
4.1. RECUPERAÇÃO SUPERCONVERGENTE SOBRE PATCHES EM ELEMENTOS FINITOS (SPR)	24
4.2. FORMULAÇÃO DA PROPOSTA PARA SUAUIZAÇÃO	27
5. PROPOSTA DE TÉCNICA PARA CÁLCULO DA COMPONENTE TANGENCIAL DE TENSÃO SOBRE O CONTORNO	31
5.1. MODELO PADRÃO DE CÁLCULO DAS TENSÕES NO CONTORNO	31
5.2. FORMULAÇÃO DA PROPOSTA PARA CÁLCULO DA COMPONENTE TANGENCIAL DE TENSÃO	33
6. RESULTADOS NUMÉRICOS	38
6.1. PLACA QUADRADA COM FURO CIRCULAR SOB TRAÇÃO UNIFORME	38
6.2. DOMÍNIO EM FORMA DE L	45
6.3. CILINDRO COM PRESSÃO INTERNA	48
6.4. PLACA COM ENTALHE SOB TRAÇÃO UNIFORME – TESTE COM RECUO IGUAL A ZERO	50
7. COSIDERAÇÕES FINAIS	53
7.1 CONCLUSÕES	53
7.2 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
APÊNDICE A – [Soluções fundamentais de elasticidade bidimensional]	60

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres romanos

a, b	Deslocamento dos nós dos extremos no elemento descontínuo
A	Vetor de condições de contorno conhecidas no MEC
b_i	Força de corpo na direção i
b	Vetor de forças de corpo
\mathbf{c}^i	Matriz de coeficientes que depende da geometria do contorno
c_{lk}^i	Coefficiente que depende da geometria do contorno
e_l	Base canônica do sistema de coordenadas cartesiano global
E	Módulo de elasticidade
F	Vetor de variáveis conhecidas (condições de contorno)
G	Módulo de cisalhamento
G	Matrizes resultante da sobreposição de \mathbf{G}^{ij}
\mathbf{G}^{ij}	Matriz resultante da integração da solução fundamental de deslocamento sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i
H	Matrizes resultante da sobreposição de \mathbf{H}^{ij}
\mathbf{H}^{ij}	Matriz resultante da integração da solução fundamental de força de superfície sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i adicionada de \mathbf{c}^i , no caso singular
$\hat{\mathbf{H}}^{ij}$	Matriz resultante da integração da solução fundamental de força de superfície sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i
J	Jacobiano da transformação
l	Número de pontos de integração utilizados por quadratura
n	Vetor normal
n_i	Cosseno diretor do vetor normal n com relação ao eixo x_i
p_i	Força de superfície na direção i
\bar{p}	Força de superfície prescrita
p_{lk}^*	Solução fundamental de força de superfície
P	Vetor de forças de superfície
P	Vetor de forças de superfície

Q	Matriz de correção da posição dos nós físicos
u_i	Deslocamento na direção i
\bar{u}	Deslocamento prescrito
u_{lk}^*	Solução fundamental de deslocamento
u	Vetor de deslocamentos
U	Vetor de deslocamentos
w_k	Coefficiente-peso utilizado na integração por quadratura para o ponto k
x_i	Sistema de coordenadas cartesiano global
X	Vetor de variáveis desconhecidas (incógnitas)

Caracteres gregos

ε_{ij}	Deformação na direção j perpendicular ao eixo i
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker
Δ_i	Função delta de Dirac
Γ	Contorno do problema
Γ_1	Parcela do contorno sobre a qual são prescritos os deslocamentos
Γ_2	Parcela do contorno sobre a qual são prescritas as tensões
Γ_j	Contorno de um elemento j
Γ_e	Contorno do elemento
λ	Coefficiente de Lamé
σ_{rr}	Tensão radial
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão tangencial
σ_{ij}	Tensão na direção j perpendicular ao eixo i
μ	Coefficiente de Lamé
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Espaço normalizado
Φ	Funções de interpolação originais
$\bar{\Phi}$	Funções de interpolação para nós deslocados
Ω	Domínio do problema

Siglas

NE	Número de elementos de contorno
EPT	Estado plano de tensões
EPD	Estado plano de deformações
MDF	Método das diferenças finitas
MEC	Método dos elementos de contorno
MEF	Método dos elementos finitos
MRP	Método dos resíduos ponderados
SPR	Superconvergent patch recovery

Sub-índices e sobre-escritos

i, j, k, l	Índices variam de 1 a 3
i, j	Índices variam de 1 a NE
i	Referente ao ponto i do domínio

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Notação para tensões e deslocamentos.	6
Figura 2.2 – a) Estado plano de tensões (EPT) e b) estado plano de deformações (EPD).....	9
Figura 3.1 – Exemplo de malha com elementos de contorno lineares.	14
Figura 3.2 – Transformação de coordenadas.	15
Figura 3.3 – a) Canto com elementos contínuos com duas normais. Soluções para modelagem de cantos no MEC: b) Elemento de transição, c) Elementos descontínuos, d) Nó duplo.....	18
Figura 3.4 – Elemento descontínuo linear e funções de interpolação modificadas.	20
Figura 3.5 – Elemento descontínuo quadrático e funções de interpolação modificadas.....	23
Figura 4.1 – Recuperação superconvergente para elementos finitos lineares em 1D (Fonte: Zienkiewicz e Zhu, 1992c).....	26
Figura 4.2 – Recuperação superconvergente para elementos finitos quadráticos em 1D (Fonte: Zienkiewicz e Zhu, 1992c).....	26
Figura 4.3 – Resultados originais. (a) Elementos lineares, (b) elementos quadráticos.....	27
Figura 4.4 – Exemplos de patches para MEC. (a) Elementos lineares, (b) elementos quadráticos.	28
Figura 4.5 – Recuperação em elementos descontínuos lineares.	30
Figura 4.6 – Recuperação em elementos descontínuos lineares quadráticos.....	30
Figura 5.1 – Sistemas de coordenadas no contorno.	32
Figura 5.2 – Placa quadrada com furo circular sob tração.	35
Figura 5.3 – Cálculo da componente tangencial de tensão para elemento descontínuo linear. a) Cálculo padrão utilizando dois pontos para a soma de duas funções lineares, b) nova proposta utilizando somente o ponto central.....	36
Figura 5.4 – Cálculo da componente tangencial de tensão para elemento descontínuo quadrático. a) Cálculo padrão utilizando três pontos para a soma de duas funções quadráticas, b) nova proposta utilizando somente dois pontos.	37
Figura 6.1 – Placa quadrada com furo circular sob tensão.....	38
Figura 6.2 – Diferentes malhas para elementos lineares.....	39
Figura 6.3 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos lineares, malha1).....	40
Figura 6.4 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos lineares, malha2).....	40
Figura 6.5 – Recuperação da tensão radial (elementos lineares, malha1).....	41
Figura 6.6 – Recuperação da tensão radial (elementos lineares, malha2).....	42
Figura 6.7 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos quadráticos, malha1).....	43

Figura 6.8 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos quadráticos, malha2).....	43
Figura 6.9 – Recuperação da tensão radial (elementos quadráticos, malha1).....	44
Figura 6.10 – Recuperação da tensão radial (elementos quadráticos, malha2).....	44
Figura 6.11 – Domínio em forma de L.....	45
Figura 6.12 – Recuperação da tensão radial na aresta BC (malha 1).....	46
Figura 6.13 – Recuperação da tensão radial na aresta BC (malha 2).....	47
Figura 6.14 – Cilindro com pressão interna.	48
Figura 6.15 – Recuperação da tensão circunferencial na aresta AB.	49
Figura 6.16 – Recuperação da tensão radial na aresta AB.	50
Figura 6.17 – Placa com entalhe semicircular sob tração.	51
Figura 6.18 – Placa com entalhe, elementos lineares.....	52
Figura 6.19 – Placa com entalhe, elementos quadráticos.....	52
Figura A.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_1), (b) componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_2).	61

INDÍCE DE TABELAS

Tabela 6.1 – Resultados para tensão radial em $r = 2.5$ (domínio em forma de L).....	47
--	----

1. INTRODUÇÃO

A resolução de um problema de engenharia, e mais especificamente, dos que se inserem dentro da mecânica do contínuo e da mecânica dos sólidos, pode-se resumir como a busca de uma solução para uma determinada equação diferencial. A forma de busca dessa solução está sujeita ao tipo de problema e sua complexidade, podendo-se buscar soluções exatas ou aproximadas, analíticas ou numéricas.

A utilização de métodos analíticos para a resolução de problemas práticos de engenharia se mostra extremamente complicada e morosa, mesmo com a utilização de hipóteses e simplificações das condições reais. Além disso, pode-se dizer que, em geral, estas simplificações afastam-se demasiadamente do problema original.

Por outro lado, os métodos numéricos oferecem, cada vez mais, a possibilidade de busca de soluções complexas, permitindo encontrar soluções aproximadas para inúmeras variantes do problema em tempo satisfatório. Isto se deve principalmente ao auxílio computacional na realização de seus cálculos. Entre os métodos numéricos mais conhecidos pode-se citar o método das diferenças finitas (MDF), método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

O MDF se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas utilizando expansões locais para as variáveis, geralmente séries de Taylor truncadas das derivadas. No caso da Mecânica dos Sólidos, este método não é frequentemente utilizado quando comparado aos outros dois.

O MEF é o método numérico mais utilizado principalmente pelo fato de dividir o domínio em uma série de elementos de geometria simples, os quais têm um aspecto físico bem associado a uma determinada parte da estrutura real. Entre outras características desse método, pode-se citar a robustez, simplicidade de formulação e o fato de gerar matrizes de rigidez em banda, as quais, aliadas a técnicas de resolução especiais, reduzem muito o tempo de processamento. Entretanto, o MEF possui desvantagem na resolução de problemas com domínio infinito e também em regiões de concentração de tensões, como na mecânica da fratura.

O MEC consiste, basicamente, na transformação de parte da equação diferencial que governa o problema em uma equação integral. O contorno do problema é então discretizado em elementos de superfície e seu domínio em células, quando existirem forças de corpo. A partir desta discretização, suas integrais no contorno são aproximadas por integrações efetuadas em cada elemento e, da mesma forma, para suas integrais no domínio em relação às células. Tais integrais, geralmente obtidas numericamente, geram coeficientes de influência entre os diversos

elementos e/ou células que formam um sistema de equações que relaciona potenciais (deslocamentos) e fluxos (tensões) em todos os elementos que aproximam o contorno.

As raízes matemáticas para o MEC foram estabelecidas ainda no final do século XIX, mas apenas no final da década de 1960 o método passou a receber maior atenção da comunidade científica. Parte disso devido a sua formulação puramente matemática e parte pelo gigantesco desenvolvimento do MEF, o qual atraiu a atenção de pesquisadores de diferentes áreas por sua grande abrangência.

Após incorporar algumas características do MEF, o MEC tomou impulso e consolidou-se como uma alternativa viável para solução de problemas de engenharia, principalmente em situações onde o MEF não se comporta adequadamente. A redução de uma dimensão do problema, em problemas lineares, é a principal característica desse método, o que diminui drasticamente a quantidade de dados necessários para a sua resolução computacional. Entretanto, geralmente o método resulta matrizes cheias e não simétricas, impedindo ou dificultando o uso de estratégias de solução já desenvolvidas para o MEF.

Vale ressaltar que o MEC tem um ótimo desempenho na resolução de problemas lineares dentro da mecânica estrutural, obtendo resultados melhores que o MEF para uma discretização equivalente do domínio. Para problemas não lineares, o MEC ainda não tem desenvolvimento suficiente comparado a outros métodos, bem como em filosofias adaptativas. Ainda, vale dizer, o MEC tem um bom desempenho em problemas de domínio infinito e problemas com concentração de tensões.

A relaxação de condições de continuidade em métodos baseados em discretização tem ganhado impulso nos últimos anos. No MEC, através de elementos descontínuos e no MEF com formulações de Galerkin descontínuas. Essas abordagens simplificam muito a implementação computacional dos métodos, e pode aumentar a sua eficiência na solução de problemas não-lineares ou contendo descontinuidades. No MEC, entre os fatos que levam a utilização deste tipo de elemento pode-se citar que apesar desses terem soluções descontínuas de um elemento para o outro, eles possuem continuidade C^1 em todo o comprimento, e tal condição é necessária para o cálculo de diversas classes de integrais singulares. Além disso, tais elementos evitam o problema do nó duplo e ainda são eficientes na solução de problemas em cantos, singularidades e problemas de trincas.

O emprego de elementos polinomiais com continuidades C^0 , ou seja, que satisfaz apenas a continuidade nas variáveis de estado e não nas suas derivadas (como por exemplo, deformações), se tornou padrão no MEC durante algum tempo. Porém, com esse impulso na utilização de elementos descontínuos, diversos novos estudos podem ser propostos.

A utilização de elementos descontínuos provê, a priori, resultados não contínuos mesmo nas variáveis de estado. A definição do valor de uma variável na interface entre dois elementos ou mesmo nos extremos de um segmento (superfície) com uma determinada condição de contorno se torna um problema com elementos descontínuos. Poder-se-ia propor a recuperação destes resultados por extrapolação das funções de interpolação do elemento ou mesmo a média das extrapolações entre elementos, porém esses métodos são muitas vezes inadequados. A fim de obter resultados melhor definidos e contínuos na interface entre elementos, para elementos de contorno descontínuos, é proposta neste trabalho uma formulação para suavização de resultados baseada em mínimos quadrados. Esta formulação tem como base a técnica SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) desenvolvida por Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b, 1992c), para o MEF, que também será brevemente revista.

Por fim, um fato que é comum a elementos contínuos e descontínuos é a obtenção de resultados não contínuos e de menor precisão para a componente tangencial de tensão (em coordenadas locais), a qual é normalmente pós-processada em problemas de engenharia. Desse modo, uma nova formulação para o cálculo dessa tensão é sugerida neste trabalho.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo principal desenvolver e implementar uma técnica de suavização de resultados em elementos de contorno descontínuos para problemas de elasticidade plana bidimensionais utilizando um programa desenvolvido em MATLAB.

Como objetivo secundário, pretende-se desenvolver uma nova proposta de cálculo da componente tangencial de tensão para elementos descontínuos. Em procedimentos padrões obtêm-se tal componente através da Lei de Hooke, utilizando a derivada de uma variável de estado. Assim, um procedimento semelhante acrescentado de algumas modificações é descrito.

Desse modo, fez-se necessário o estudo dos fundamentos teóricos que envolvem a mecânica dos sólidos, o método dos elementos de contorno e a recuperação de valores em métodos numéricos. Nesse contexto, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- Realizar um estudo dos fundamentos de mecânica dos sólidos, elementos de contorno e recuperação de valores;
- Alterar o programa básico de elementos de contorno a fim de ter como base de trabalho os segmentos (linhas, arcos e círculos) a serem recuperados;
- Avaliar os procedimentos de cálculo de tensões no contorno;

- Avaliar, desenvolver e implementar procedimentos de suavização/recuperação de valores;
- Desenvolver e implementar uma nova proposta de cálculo da componente tangencial de tensão através de testes e análise de resultados;
- Analisar e testar as técnicas desenvolvidas em alguns problemas clássicos, comprovando a eficiência da metodologia proposta.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Em relação à organização e para um melhor entendimento deste trabalho apresenta-se aqui uma breve descrição de cada capítulo.

No capítulo 1 é feita uma introdução situando os métodos numéricos, principalmente o método dos elementos de contorno, no contexto atual da engenharia. Além disso, são descritos os objetivos deste trabalho bem como esta breve descrição.

O capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos de elasticidade linear. Descreve os estados de tensões e deformações de um corpo, bem como as relações constitutivas que relacionam esses dois estados. Ao final do capítulo são apresentadas as equações de elasticidade para o estado plano de tensões (EPT) e estado plano de deformações (EPD).

No capítulo 3, é feita uma revisão dos conceitos básicos mais importantes do método dos elementos de contorno, descrevendo esse para problemas de elasticidade plana e, ao final, os elementos descontínuos utilizados no trabalho.

O capítulo 4 se concentra na área de suavização e recuperação de resultados, apresentando um método de recuperação para o MEF e o alvo principal deste trabalho, ou seja, uma proposta de técnica de suavização de resultados para elementos de contorno descontínuos no MEC.

No capítulo 5 é apresentada uma nova formulação para o cálculo da componente tangencial de tensão em elementos de contorno descontínuos para elasticidade bidimensional. Nos capítulos seguintes são mostrados diversos resultados numéricos e as considerações finais, incluindo, conclusões e sugestões para a continuidade de pesquisas nessa área.

No APÊNDICE A, é mostrada uma breve descrição das soluções fundamentais para elasticidade bidimensional em elementos de contorno.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE ELASTICIDADE LINEAR

A resolução de qualquer problema mecânico que envolva elasticidade necessita da solução das equações de equilíbrio, seja analiticamente ou numericamente. O método dos elementos de contorno para elasticidade busca uma solução numérica aproximada para um problema estrutural, e a compreensão dos fundamentos teóricos básicos de elasticidade é fundamental para o entendimento do método.

Dessa forma, são apresentadas neste capítulo as equações básicas da elasticidade linear infinitesimal isotrópica, partindo dos estados de tensão e deformação para as relações constitutivas. Além disso, conforme mencionado anteriormente, este trabalho será restrito à elasticidade bidimensional, utilizando as hipóteses de estado plano de deformações ou estado plano de tensões que também serão brevemente descritas neste capítulo.

Estudos mais completos sobre a teoria da elasticidade podem ser encontrados em Borelli e Chong, 1987, e Atkin e Fox, 1980, que foram utilizados como base para este capítulo.

Estado de tensões

Podemos começar definindo o estado de tensões em um ponto em termos das componentes de tensão (figura 2.1). Em princípio, temos 9 diferentes componentes de tensão que podem ser agrupadas no tensor tensão, isto é

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

entretanto essas componentes não são todas independentes mas são relacionadas pelas equações de equilíbrio.

O equilíbrio das forças nas três direções x_1 , x_2 e x_3 produzem as conhecidas equações de equilíbrio para forças que necessitam ser satisfeitas em todo o domínio, isto é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde b_i são as componentes das forças de corpo.

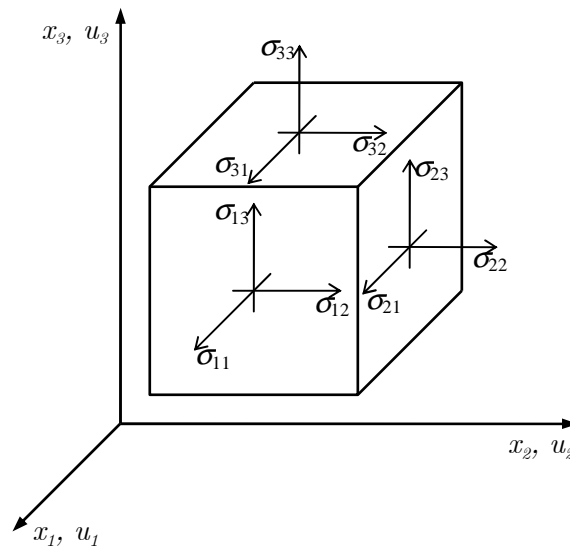


Figura 2.1 – Notação para tensões e deslocamentos.

O grupo de equações (2.2) pode ser escrito de uma forma mais compacta, utilizando notação indicial, simplesmente como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

onde $i=1, 2, 3$ e $j=1, 2, 3$.

Quando se realiza um corte fictício no corpo, as tensões podem ser projetadas em um elemento diferencial de contorno e produzem forças de superfície, também conhecidas como vetor tração que são denotadas por p_i de tal forma que

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{sobre } \Gamma \quad (2.4)$$

onde $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$ e n_1, n_2 e n_3 são as componentes do vetor normal n com respeito aos eixos x_1, x_2 e x_3 .

Essas forças de superfície são assumidas como sendo dadas em uma parte Γ_2 do contorno e são chamadas de condições de contorno naturais do problema. Assim,

$$p_1 = \bar{p}_1; \quad p_2 = \bar{p}_2; \quad p_3 = \bar{p}_3 \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (2.5)$$

Essas condições implicam que as forças de superfície aplicadas \bar{p}_i devem estar em equilíbrio com as componentes força de superfície obtidas a partir das tensões internas no contorno [Boresi e Chong, 1987], isto é

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (2.6)$$

Estado de deformações

As variações dos campos de deslocamentos, que tem componentes u_1 , u_2 e u_3 em todos os pontos do corpo, produzem as deformações infinitesimais que para o caso linear podem ser escritas em notação indicial como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

onde $i=1, 2, 3$ e $j=1, 2, 3$.

Algumas vezes as deformações são definidas pelo tensor de deformações, isto é

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$; $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$; $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$.

É mais simples aplicar as condições de contorno em termos dos deslocamentos do que em termos das deformações [Atkin e Fox, 1980]. Assim em Γ_1 as seguintes condições de contorno essenciais podem ser definidas

$$u_1 = \bar{u}_1; \quad u_2 = \bar{u}_2; \quad u_3 = \bar{u}_3 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (2.9)$$

onde \bar{u}_i são valores prescritos e a superfície total do contorno é dada por $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

Relações Constitutivas

Os estados de tensão e deformação em um corpo estão relacionados através de equações conhecidas como relações constitutivas. Para um material com comportamento elástico linear isotrópico podem-se definir as constantes λ e μ , conhecidas como constantes de Lamé. Dessa forma, as relações tensão-deformação podem ser escritas como [Atkin e Fox, 1980]

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.10)$$

onde o símbolo δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\equiv 1$ para $i=j$ e $\equiv 0$ para $i \neq j$). Além disso, ε_{kk} é conhecido como deformação volumétrica, isto é

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.11)$$

A relação inversa da expressão (2.10) pode ser escrita como

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.12)$$

onde $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$.

As constantes de Lamé podem ser expressas em termos do módulo de cisalhamento G , módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν pelas seguintes fórmulas,

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.13)$$

2.1. ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

Pode-se considerar que um corpo está sob um estado plano de tensões quando as seguintes hipóteses são satisfeitas: (i) o corpo é fino, isto é, a espessura é pequena quando comparada as outras duas dimensões, as quais formam um plano; (ii) todas as cargas são consideradas como atuando no plano médio da chapa (plano x_1x_2), ou então, apresentando intensidade constante ao longo da espessura da chapa [Dym e Shames, 1973]. Logo, as tensões fora do plano são nulas, e definimos o estado plano de tensões no plano x_3 como uma distribuição de tensões onde:

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (2.14)$$

e σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} são funções de x_1 e x_2 somente, ou seja,

$$\sigma_{11}(x_1, x_2); \quad \sigma_{22}(x_1, x_2); \quad \sigma_{12}(x_1, x_2)$$

Uma forma alternativa para a declaração (2.14) é escrever as componentes de deslocamento em função de x_1 e x_2 somente, isto é

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (2.15)$$

porém deve ser lembrado que $u_3 \neq 0$ e a componente de deformação ϵ_{33} pode ser determinada em função das tensões σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} .

Dessa forma, as relações constitutivas, em termos do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, podem ser escritas assim

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2G \epsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.16)$$

As relações podem ser invertidas para a obtenção das deformações em termos dos deslocamentos e assim, o valor de ϵ_{33} pode ser obtido posteriormente pela relação

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \quad (2.17)$$

Imagens exemplificando as hipóteses de EPT e EPD podem ser visualizadas nas figuras 2.2a e 2.2b.

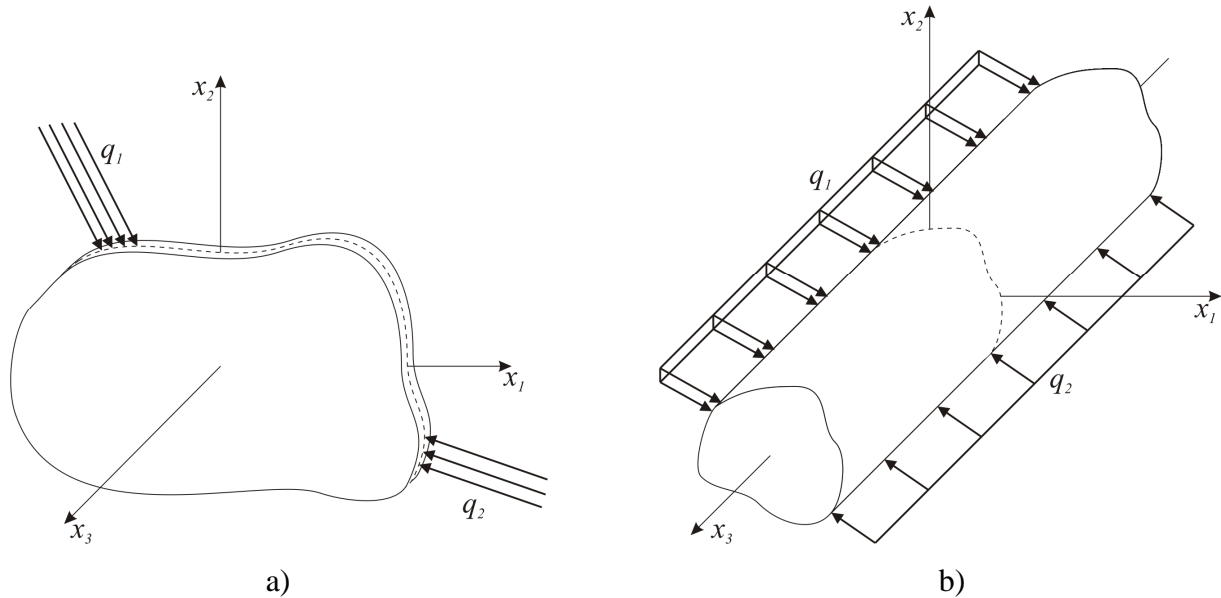


Figura 2.2 – a) Estado plano de tensões (EPT) e b) estado plano de deformações (EPD).

2.2. ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)

Esta forma de análise normalmente representa o comportamento de longas estruturas como, por exemplo, túneis e tubulações. As hipóteses básicas que devem ser consideradas são: (i) a componente de deslocamento na direção do eixo principal da estrutura deve ter valor zero nas duas extremidades da estrutura, por estarem restringidas ao movimento normal devido ao fato da espessura ser grande comparada as dimensões representativas nas direções x_1 e x_2 ; (ii) as forças de corpo e de superfície não tem componente na direção x_3 e são independentes de x_3 .

Neste caso os deslocamentos u_1 e u_2 , no plano, são independentes de x_3 , e u_3 é identicamente igual a zero, assim

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = 0 \quad (2.18)$$

resultando nas seguintes deformações iguais a zero

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \quad (2.19)$$

e as restantes, ε_{11} , ε_{22} e ε_{12} , são independentes de x_3 .

As relações constitutivas, para EPD, em termos do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, podem ser escritas dessa forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} \right) \\
\sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

As relações podem ser invertidas para a obtenção das deformações em termos dos deslocamentos, e o valor de σ_{33} , se requerido, pode ser obtido posteriormente pela relação

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{2.21}$$

É importante observar que se pode transformar as equações (2.16) para estado plano de tensões nas equações (2.20) para estado plano de deformações simplesmente repondo os valores de E e ν por valores equivalentes E' e ν' , de tal forma:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.22}$$

onde o valor de G continua o mesmo.

Essa relação é muito importante, pois em elementos de contorno trabalha-se com EPD, pelo fato da solução fundamental ser conhecida para esse tipo de problema, e assim problemas em EPT podem ser resolvidos utilizando a relação inversa a (2.22), isto é

$$E' = (1-\nu^2)E; \quad \nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \tag{2.23}$$

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno (MEC) vem se firmando como uma poderosa alternativa, principalmente em casos onde se requer melhor precisão frente a outros métodos numéricos, como em análises de concentração de tensões e domínios infinitos. Além disso, uma das características mais importantes do método é o fato de requerer apenas a discretização do contorno (superfície) e não do domínio (volume), facilitando assim, a geração de malha e o remalhamento em técnicas adaptativas e de otimização.

A fim de dar base ao foco principal deste trabalho, este capítulo apresenta uma breve revisão do MEC. Primeiramente, parte-se das equações de equilíbrio de elasticidade até chegar a identidade Somigliana. Após, apresenta-se a formulação para elementos de contorno para resolver o problema de valores no contorno associado à elasticidade bidimensional. Nas seções seguintes, o cálculo das variáveis para pontos internos e os elementos utilizados neste trabalho são apresentados.

3.1. EQUAÇÃO INTEGRAL BÁSICA E ELASTICIDADE

As formas integrais das equações de contorno necessárias para o método podem ser deduzidas de diversas maneiras. Por exemplo, a aplicação da terceira identidade de Green, princípios fundamentais como o trabalho virtual, os teoremas de reciprocidade de Betti e Castigliano e ainda considerações de resíduos ponderados fornecem resultados semelhantes. Porém é vantajosa a utilização de uma forma do método dos resíduos ponderados (MRP) devido a sua generalidade, pois permite a extensão do método para solucionar problemas mais complexos como algum tipo de não-linearidade e ainda permite o relacionamento do método dos elementos de contorno com outras técnicas numéricas [Brebbia e Dominguez, 1992].

Pode-se começar considerando que se deseja minimizar os erros envolvidos em uma aproximação numérica das equações governantes de elasticidade, ou seja, as equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

que normalmente deve satisfazer as seguinte condições de contorno:

(i) Condições essenciais ou deslocamentos

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (3.2)$$

(ii) Condições naturais ou forças de superfície

$$p_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{p}_k \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (3.3)$$

A fim de minimizar os erros da aproximação pode-se ponderar cada uma das equações (3.1) em relação a funções peso do tipo deslocamento u_k^* , ortogonalizando o produto das duas, isto é,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k \right) u_k^* d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Integrando por partes duas vezes e agrupando os termos correspondentes chega-se a forma adjunta da equação (3.1), assim,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \quad (3.5)$$

Nota-se que os dois termos no lado direito da equação são integrais sobre o contorno. Considerando que o contorno pode ser dividido nas duas partes Γ_1 e Γ_2 , e aplicando as condições de contorno (3.2) e (3.3), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (3.6)$$

Integrando duas vezes por partes novamente a primeira integral em (3.6), para tentar retornar a equação (3.4), se obtém uma equação ligeiramente diferente pelo fato de ter-se imposto as condições de contorno. Dessa forma, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k \right) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.7)$$

Esta expressão é uma declaração geral que pode ser utilizada para obter as equações integrais no contorno. Tendo esta expressão geral, pode-se reescrever estas equações, utilizando como função peso uma solução fundamental (APÊNDICE A) para uma carga pontual $b_l = \Delta^i$ ao longo da direção do vetor unitário e_l , isto é

$$\frac{\partial \sigma_{lj}^*}{\partial x_j} + \Delta^i e_l = 0 \quad (3.8)$$

Reescrevendo a equação (3.6) para cada direção, utilizando a solução fundamental e as propriedades da função Delta de Dirac, chega-se a seguinte expressão

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.9)$$

Essa equação é a conhecida Identidade Somigliana. A partir dessa equação, o valor do deslocamento em qualquer ponto interno i pode ser determinado em termos dos valores no contorno de u_k e p_k , das forças de corpo no domínio e das soluções fundamentais u_{ik}^* e p_{ik}^* , de deslocamento e força de superfície respectivamente.

A Identidade de Somigliana fornece resultados em quaisquer pontos internos a partir dos valores no contorno, desse modo, para calcular o valor dos deslocamentos em pontos internos precisa-se da solução do problema de valores no contorno. Além disso, pode-se avaliar a expressão na superfície do corpo, pois a equação (3.9) é válida em todo o domínio do corpo, incluindo o contorno. Tendo esta expressão avaliada em diversos pontos do contorno obtém-se um sistema de equações que, quando resolvido, fornece os valores no contorno.

Entretanto, quando a expressão (3.9) é avaliada no contorno, surgem algumas singularidades que devem ser avaliadas através de um processo de limite, o qual resulta em [Brebbia e Dominguez, 1992]

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (3.10)$$

onde $c_{ik}^i = \delta_{ik}/2$ quando o contorno é suave em i , ou seja, quando não se trata de um canto. Quando a superfície não é suave, o termo c_{ik} apresenta valores diferentes, dependentes do ângulo do canto. Mas é importante lembrar que o contorno é sempre suave em elementos descontínuos, os quais são utilizados neste trabalho [Brebbia e Dominguez, 1992].

A equação (3.10) permite a resolução de problemas de valores de contorno para elasticidade. Dependendo do tipo de condições de contorno que estão disponíveis pode-se ter uma equação integral do primeiro tipo (deslocamentos conhecidos), segundo tipo (forças de superfície conhecidas) ou mista (combinação de ambas).

3.2 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

A fim de resolver a equação integral numericamente, em elementos de contorno, o contorno Γ é dividido em uma série de NE elementos de contorno, que têm os seus valores de força de superfície e deslocamento escritos em função dos valores nodais. Dessa forma, para obter um sistema de equações lineares, para encontrar os valores no contorno, é preciso escrever a equação (3.10) para todos os pontos nodais e então aplicar as condições de contorno. Assim, uma solução aproximada é obtida para as variáveis não prescritas sobre Γ .

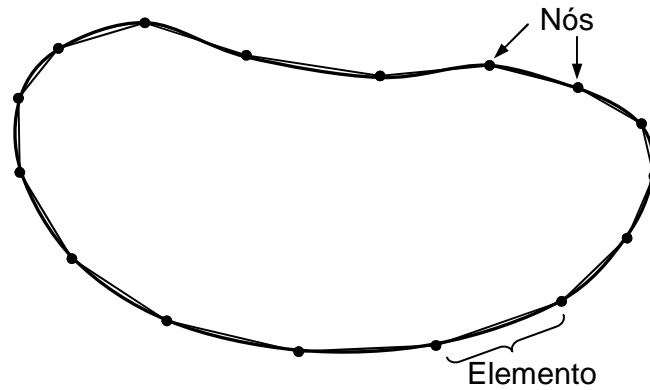


Figura 3.1 – Exemplo de malha com elementos de contorno lineares.

Pelo fato de estar-se trabalhando com um sistema discretizado é mais conveniente passar a trabalhar com matrizes em lugar da notação indicial, utilizada nas expressões anteriores. Pode-se começar definindo que as funções u e p são aproximadas em cada elemento j utilizando funções de interpolação, isto é:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad (3.11)$$

e

$$\mathbf{p} = \Phi \mathbf{p}^j \quad (3.12)$$

onde \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são os deslocamentos e forças de superfície nodais respectivamente, \mathbf{u} e \mathbf{p} são os deslocamentos e forças de superfície em qualquer ponto do contorno Γ_e do elemento e Φ são as funções de interpolação, que podem ou não ser iguais para forças de superfície e deslocamentos.

Desse modo, pode-se escrever os deslocamentos, forças de superfície e forças de corpo como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

e os coeficientes da solução fundamental podem ser escritos assim:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Considerando agora o contorno discretizado e desconsiderando as forças de corpo, pode-se escrever a seguinte equação para um ponto nodal:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (3.15)$$

Onde o somatório de $j=1$ até NE indica o somatório sobre todos os elementos do contorno e Γ_j é o contorno (superfície) de um elemento j . \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são os deslocamentos e forças de superfície nodais no elemento j .

A avaliação das integrais contidas na expressão (3.15) é geralmente realizada numericamente, especialmente se os elementos são curvos, o que dificulta ainda mais a integração analítica. Além disso, devido ao fato das funções Φ serem geralmente expressas em termos de um sistema local de coordenadas, $\xi = [-1, 1]$, enquanto as integrais são avaliadas no contorno Γ , dado em coordenadas globais, necessita-se de uma transformação de coordenadas pelo uso de um Jacobiano.

Para uma geometria curva como a mostrada na figura 3.2, a transformação $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ é simples e pode ser descrita como:

$$d\Gamma = \left\{ \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \right\} d\xi = Jd\xi \quad (3.16)$$

onde J é o Jacobiano.

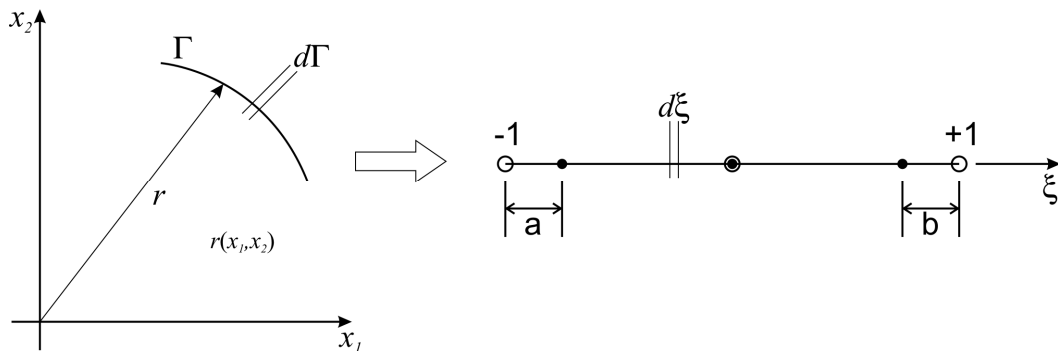


Figura 3.2 – Transformação de coordenadas.

Entretanto, para calcular o valor do Jacobiano pela expressão (3.16) é necessário conhecer a variação das coordenadas cartesianas x_1 e x_2 em relação à coordenada normalizada ξ . Isto pode ser realizado, definindo a forma geométrica do elemento pelas mesmas funções de interpolação usadas para deslocamentos e forças de superfície, isto é:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (3.17)$$

onde \mathbf{x}^j são os valores nodais das coordenadas sobre o elemento considerado. Desse modo a equação (3.15) pode ser reescrita como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi J d\xi \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi J d\xi \right\} \mathbf{p}^j \quad (3.18)$$

Como dito anteriormente, as integrais da equação (3.18) são geralmente avaliadas por um esquema numérico. A tradicional quadratura de Gauss [Stroud e Secrest, 1966] é normalmente empregada. Porém, quando o ponto a ser calculado está muito próximo ao ponto fonte, as singularidades presentes nas soluções fundamentais, que estão contidas nas integrais, devem ser analisadas à parte. Desse modo, quando o elemento a ser integrado contém o ponto fonte, em geral, uma técnica de integração diferente deve ser utilizada, pois a quadratura de Gauss não apresenta resultados satisfatórios para este tipo de integral.

O nível de singularidade varia conforme a solução fundamental utilizada. A solução fundamental de deslocamento u^* é fracamente singular e neste trabalho foi integrada utilizando a técnica proposta por Telles, 1987. Já a solução fundamental para força de superfície p^* é fortemente singular e a técnica de movimento de corpo rígido descrito por Brebbia e Dominguez, 1992, foi utilizada.

Utilizando a quadratura de Gauss, pode-se reescrever a expressão (3.18) como:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{p}^* \Phi)_k J \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi)_k J \right\} \mathbf{p}^j \quad (3.19)$$

onde l é o número de pontos de integração em cada elemento de contorno e w_k é o coeficiente-peso da integração numérica.

A fim de simplificar a notação, a equação (3.19) geralmente é escrita, para cada ponto fonte de colocação, na seguinte forma:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (3.20)$$

onde

$$\hat{\mathbf{H}}^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{p}^* \Phi)_k J \right\}; \quad \mathbf{G}^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi)_k J \right\} \quad (3.21)$$

Chamando

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{ij} &= \hat{\mathbf{H}}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \mathbf{H}^{ij} &= \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^i & \text{se } i = j \end{aligned} \quad (3.22)$$

desse modo, a equação (3.20) para o nó i se torna

$$\sum_{j=1}^{NE} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (3.23)$$

Escrevendo juntas as contribuições de cada ponto fonte, de forma matricial, tem-se um sistema global de equações:

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GP} \quad (3.24)$$

Os vetores \mathbf{U} e \mathbf{P} contêm os valores dos deslocamentos e forças de superfície antes da aplicação das condições de contorno. Após a aplicação dessas condições, pode-se rearranjar as colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} de forma que todas as variáveis desconhecidas fiquem no lado esquerdo em um novo vetor \mathbf{X} . Isso resulta no sistema de equações

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (3.25)$$

que pode ser facilmente resolvido, determinando os valores incógnitos no contorno.

3.3. CÁLCULO DAS VARIÁVEIS EM PONTOS INTERNOS

A identidade Somigliana (equação (3.9)) fornece o deslocamento em qualquer ponto do domínio em termos dos deslocamentos e forças de superfície sobre Γ . Baseando-se na forma apresentada na expressão (3.19), pode-se escrever para um ponto interno

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi)_k J \right\} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{p}^* \Phi)_k J \right\} \mathbf{u}^j \quad (3.26)$$

onde Γ_j é novamente o contorno corresponde ao elemento j , e i é agora um ponto interno.

Da mesma forma, podem-se obter as tensões derivando essa expressão e introduzindo as deformações correspondentes nas relações tensão-deformação [Brebbia et al., 1984].

3.4. ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS

As definições de elementos de contorno para problemas bidimensionais são consideravelmente simples quando comparadas a outros métodos. Este fato deve-se ao MEC requerer apenas a discretização do contorno, trabalhando assim com elementos com uma dimensão a menos que a do problema.

Existem diversos tipos de elementos de contorno, podendo-se dividir estes em contínuos ou descontínuos, ou seja, que apresentam continuidade na solução de um elemento para outro ou não. Além disso, as variáveis do problema, deslocamento e força de superfície, sobre cada elemento podem ser constantes, apresentar variação linear ou de maior ordem. Também é importante ressaltar que o comportamento de cada variável não necessariamente precisa ser da mesma ordem da outra.

A utilização de elementos de contorno descontínuos tem, por diversos fatos, se tornado uma prática mais comum nos últimos tempos. Um desses fatos é a fácil resolução do problema de cantos, onde se tem duas normais em um mesmo ponto, a dessa forma ocorre uma descontinuidade nas forças de superfície. Isso implica que se as forças de superfície nodais são desconhecidas, o número de equações neste nó é menor que o número de variáveis. A modelagem de cantos vivos no MEC tem ainda outras possíveis soluções (figura 3.3). Entre estas, utilizar um elemento bem pequeno no canto para fazer a transição entre as normais. Porém a utilização deste elemento pode gerar problemas numéricos devido à existência de equações com coeficientes muito semelhantes [Brebbia e Dominguez, 1992]. Outra solução é a utilização de um nó duplo nos elementos dos cantos. Apesar da popularidade, esta é uma técnica pouco geral, complexa de ser implementada e propensa a erros de integração. Também é vantajoso o uso de elementos descontínuos em situações em que alguma das variáveis tende a infinito no extremo de um elemento, como por exemplo, aplicações de mecânica da fratura.

Neste trabalho optou-se por se trabalhar com os elementos descontínuos linear e quadrático. Essa descontinuidade implica que os nós físicos e os nós geométricos dos extremos do elemento não estão necessariamente no mesmo lugar. Ou seja, o elemento descontínuo é formado por nós físicos e nós geométricos diferentes. Em relação a esse fato, os elementos linear e quadrático são semelhantes, ambos apresentam os nós dos extremos podendo estar em posições diferentes, sendo que as distâncias entre os nós físicos e geométricos são representadas por a e b na figura 3.2. A única diferença é que o elemento quadrático apresenta, além dos nós extremos, um nó central físico e geométrico ao mesmo tempo.

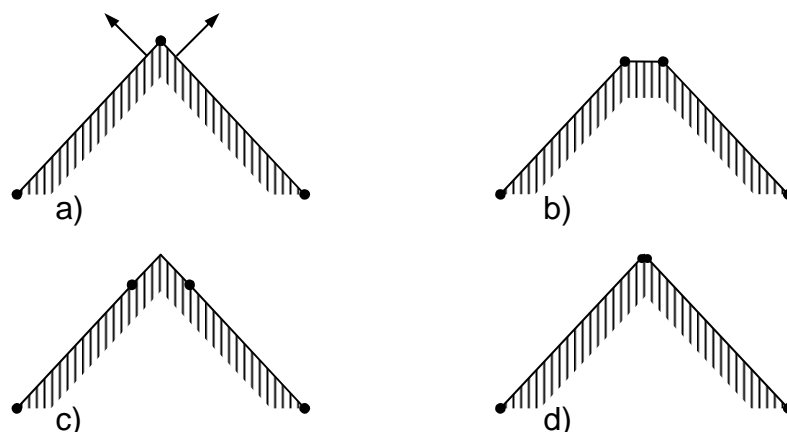


Figura 3.3 – a) Canto com elementos contínuos com duas normais. Soluções para modelagem de cantos no MEC: b) Elemento de transição, c) Elementos descontínuos, d) Nó duplo.

É importante lembrar que a utilização de elementos descontínuos faz com que as funções de interpolação utilizadas para os nós geométricos necessitem de uma correção para que sejam válidas para os nós físicos. A seguir as funções de interpolação para os dois tipos de elementos utilizados neste trabalho são apresentadas.

3.4.1. ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO

Neste elemento, os deslocamentos u_i e as forças de superfície p_i são representados por funções lineares em função dos seus valores nodais. Os valores de u_i e p_i em qualquer ponto no elemento podem ser definidos pelas seguintes equações:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi} \mathbf{u}^j \quad (3.27)$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi} \mathbf{p}^j \quad (3.28)$$

onde as funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 são dadas por

$$\phi_1 = 1/2(1 - \xi); \quad \phi_2 = 1/2(1 + \xi) \quad (3.29)$$

Se os dois nós deste elemento são deslocados (recuo) das suas posições iniciais pelas distâncias a e b respectivamente, como mostra a figura 3.4, a equação (3.27) pode ser particularizada para os nós deslocados.

$$\begin{Bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) \\ \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde $\xi_a = (2a/l) - 1$ e $\xi_b = 1 - (2b/l)$ são as coordenadas locais dos nós físicos deslocados.

Invertendo a equação anterior e substituindo-a em (3.27) pode-se obter o valor de \mathbf{u} em qualquer ponto sobre o elemento com nós físicos deslocados em termos dos valores nodais,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

onde \mathbf{Q} é a inversa da matriz presente na equação (3.30), isto é

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{l-a-b} \begin{bmatrix} l-b & 0 & -a & 0 \\ 0 & l-b & 0 & -a \\ -b & 0 & l-a & 0 \\ 0 & -b & 0 & l-a \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Multiplicando a matriz Φ por \mathbf{Q} obtêm-se as funções de interpolação modificadas para os nós deslocados, ou seja,

$$\bar{\Phi} = \Phi \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 & 0 & \bar{\phi}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_1 & 0 & \bar{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde as funções modificadas (figura 3.4) são dadas por

$$\bar{\phi}_1 = \frac{-1+b+\xi}{-2+a+b}; \quad \bar{\phi}_2 = \frac{-1+a+\xi}{-2+a+b} \quad (3.34)$$

As mesmas relações escritas para \mathbf{u} podem ser, a partir da expressão (3.28), reescritas para as forças de superfície \mathbf{p} .

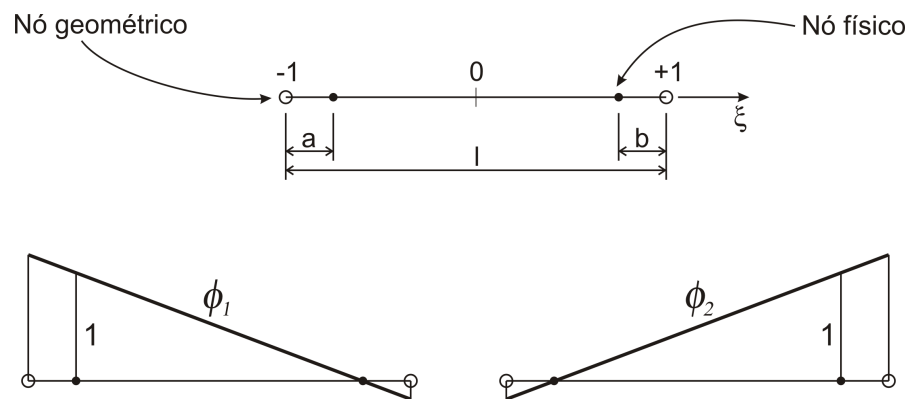


Figura 3.4 – Elemento descontínuo linear e funções de interpolação modificadas.

3.4.2. ELEMENTO QUADRÁTICO DESCONTÍNUO

No elemento quadrático, as variáveis são representadas por funções quadráticas em função dos seus valores nodais. Os seus valores em qualquer ponto no elemento podem ser definidos pelas seguintes equações:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{u}^j \quad (3.35)$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{p}^j \quad (3.36)$$

onde as funções de interpolação são

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1); \quad \phi_2 = (1-\xi)(1+\xi); \quad \phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (3.37)$$

Se novamente deslocam-se os dois nós extremos das suas posições iniciais pelas distâncias a e b (reco) respectivamente e mantivermos no nó central na sua posição de origem, como mostra a figura 3.5 (elemento pode ser curvo), qualquer uma das duas equações (3.35) ou (3.36) pode ser particularizada para os nós deslocados. Desse modo, para a equação (3.35) tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \\ u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) & 0 & \phi_3(\xi_a) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) & 0 & \phi_3(\xi_a) \\ \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) & 0 & \phi_3(\xi_b) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) & 0 & \phi_3(\xi_b) \\ \phi_1(\xi_c) & 0 & \phi_2(\xi_c) & 0 & \phi_3(\xi_c) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_c) & 0 & \phi_2(\xi_c) & 0 & \phi_3(\xi_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

onde $\xi_a = (2a/l) - 1$, $\xi_b = 0$ e $\xi_c = 1 - (2b/l)$ são as coordenadas locais dos nós físicos deslocados.

Invertendo a equação anterior e substituindo-a em (3.35) pode-se obter o valor de \mathbf{u} em qualquer ponto sobre o elemento com nós deslocados em termos dos valores nodais

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

onde \mathbf{Q} é a inversa da matriz presente na equação (3.38), ou seja,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{l(l-b)}{d1} & 0 & \frac{4a(b-l)}{d2} & 0 & \frac{la}{d3} & 0 \\ 0 & \frac{l(l-b)}{d1} & 0 & \frac{4a(b-l)}{d2} & 0 & \frac{la}{d3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{lb}{d1} & 0 & \frac{4b(a-l)}{d2} & 0 & \frac{l(l-a)}{d3} & 0 \\ 0 & \frac{lb}{d1} & 0 & \frac{4b(a-l)}{d2} & 0 & \frac{l(l-a)}{d3} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

sendo os denominadores definidos como:

$$\begin{aligned} d1 &= (a-l+b)(2a-l) \\ d2 &= (2a-l)(2b-l) \\ d3 &= (a-l+b)(2b-l) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da mesma forma do que para o elemento linear, multiplicando a matriz Φ por \mathbf{Q} obtêm-se as funções de interpolação modificadas para os nós deslocados, ou seja,

$$\bar{\Phi} = \Phi \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 & 0 & \bar{\phi}_2 & 0 & \bar{\phi}_3 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_1 & 0 & \bar{\phi}_2 & 0 & \bar{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde as funções modificadas (figura 3.5) são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1 &= \frac{\xi(-1+b+\xi)}{2+a^2-b+ab-3a} \\ \bar{\phi}_2 &= \frac{-\xi^2-\xi b+\xi a-a+ab+1-b}{-a+ab+1-b} \\ \bar{\phi}_3 &= \frac{-\xi(-1+a-\xi)}{2+b^2-a+ab-3b} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Lembrando que as mesmas relações escritas para \mathbf{u} podem ser, a partir da expressão (3.36), reescritas para as forças de superfície \mathbf{p} .

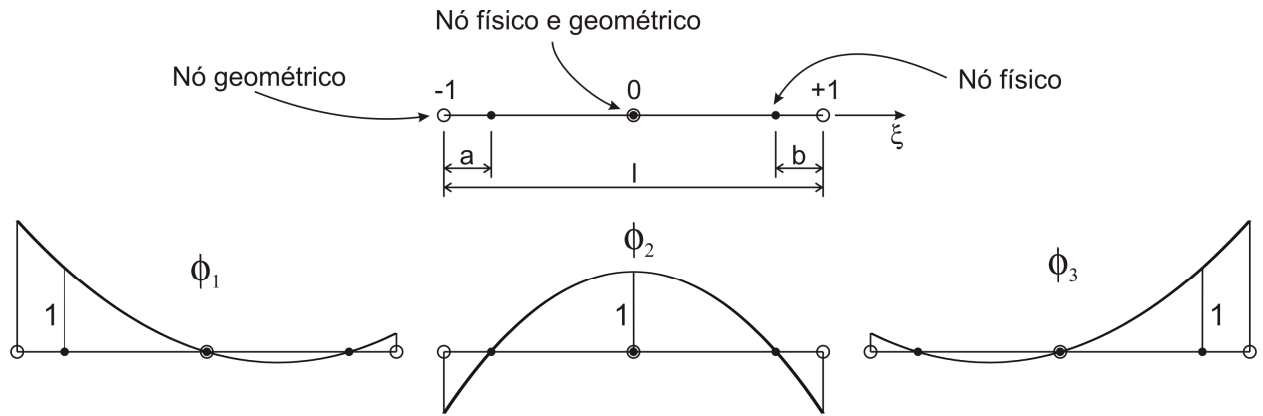


Figura 3.5 – Elemento descontínuo quadrático e funções de interpolação modificadas.

4. PROPOSTA DE TÉCNICA DE SUAVIZAÇÃO DE RESULTADOS PARA ELEMENTOS DE CONTORNO DESCONTÍNUOS

A utilização de elementos de contorno descontínuos para a resolução de problemas com singularidades devido à geometria ou condições de contorno tem se provado eficiente, além da utilização em outras aplicações como a análise por elementos de contorno multidomínio e acoplamento MEF-MEC [Xiaosong Zhang e Xiaoxian Zhang, 2002]. Entretanto, a utilização destes elementos não garante, a priori, continuidade nos resultados. Dessa maneira, o valor pontual entre elementos não está definido. Apesar da boa qualidade da solução no interior desses elementos, a solução apresenta caráter mais local, ou seja, a característica global de uma solução ao longo de uma seqüência de elementos é perdida pela descontinuidade e saltos existentes entre elementos.

No método dos elementos finitos, um problema semelhante ocorre quando as tensões são calculadas diretamente pela substituição dos resultados em deslocamentos nas equações pertinentes. Desse modo, cada elemento finito conectado a um nó, com um determinado campo de deslocamento neste ponto, proporciona um resultado diferente neste nó para tensão. Para resolver este problema, diversas técnicas podem ser empregadas num pós-processamento, obtendo resultados muito bons. Entre estas técnicas podemos citar a extrapolação a partir dos pontos de Barlow [Barlow, 1976], suavização L_2 global e local [Hinton e Campbell, 1974] e recuperação superconvergente baseada sobre *patches* – SPR [Zienkiewicz e Zhu, 1992], sendo esta última bem difundida e comprovadamente eficaz.

A fim de obter resultados contínuos e mais precisos na interface entre dois elementos seguidos, no MEC, para elementos descontínuos, é proposta neste trabalho uma formulação para suavização de resultados baseada em mínimos quadrados. Esta formulação tem como base a técnica SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) já citada, que é revista a seguir e, logo após, a proposta de técnica de suavização para o MEC é apresentada.

4.1. RECUPERAÇÃO SUPERCONVERGENTE SOBRE PATCHES EM ELEMENTOS FINITOS (SPR)

Primeiramente pode-se definir um *patch* como um grupo de elementos contíguos em volta de um ponto analisado (nó) onde se quer recuperar um valor. O objetivo desta recuperação é encontrar um campo de tensões contínuo, σ^* , que é mais precisa que as tensões obtidas pela

solução de elementos finitos, σ^h , e pode ser expresso em termos dos valores nodais $\bar{\sigma}^*$ e as funções base como:

$$\sigma^* = \mathbf{N}\bar{\sigma}^* \quad (4.1)$$

onde as funções base \mathbf{N} são as mesmas utilizadas na interpolação dos deslocamentos.

A partir disso é necessário determinar os valores nodais $\bar{\sigma}^*$, os quais pertencem a uma extensão polinomial σ_p^* com a mesma ordem completa p apresentada pelas funções base \mathbf{N}

$$\sigma_p^* = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (4.2)$$

que é válida sobre um *patch*. σ_p^* é qualquer das componentes de tensão (σ_x, σ_y , etc), \mathbf{P} contém termos de um polinômio e \mathbf{a} contém coordenadas generalizadas a serem determinadas.

Os parâmetros \mathbf{a} da expansão são obtidos por uma aproximação por mínimos quadrados de um grupo de valores de tensão em pontos superconvergentes existentes dentro do *patch* considerado. Assim minimiza-se a função

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m (\sigma_h(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i)\mathbf{a})^2 \quad (4.3)$$

em relação aos parâmetros \mathbf{a} , obtendo um sistema algébrico do tipo

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\mathbf{P}(x_i, y_i) \\ \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\sigma_h(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (4.5)$$

e m é o número de pontos utilizados na aproximação.

O *patch* é montado para cada extremo (ou cantos) dos elementos dentro da região a ser recuperada, e os valores calculados pela expressão (4.2) são usados para tais pontos diretamente.

A fim de usar sempre a mesma matriz \mathbf{A} para resolver a equação (4.4), utiliza-se um sistema de coordenadas local, normalizado, que evita também o mal-condicionamento da matriz \mathbf{A} , segundo Zienkiewicz et al. [1993]. Tal sistema de coordenadas normalizado, para problemas unidimensionais no MEF, é convenientemente escrito como

$$\bar{x} = -1 + 2 \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (4.6)$$

onde x_{\min} e x_{\max} são as coordenadas mínima e máxima dentro de um *patch*.

Os nós centrais ou internos de cada elemento podem ser associados a dois ou mais *patches* e então um valor médio é calculado. Os valores no contorno da região recuperada são calculados de maneira melhor pelo *patch* mais próximo [Zienkiewicz e Zhu, 1992a].

As posições detalhadas dos pontos superconvergentes para diversos elementos podem ser encontradas em Zienkiewicz e Zhu, 1992a. Mas para elementos unidimensionais e elementos quadriláteros Lagrangeanos essas posições são simplesmente os pontos de Gauss associados à cada coordenada.

Nas figuras 4.1 e 4.2 pode-se ver o método SPR para elementos finitos unidimensionais (lineares e quadráticos) e os valores recuperados de $\bar{\sigma}^*$.

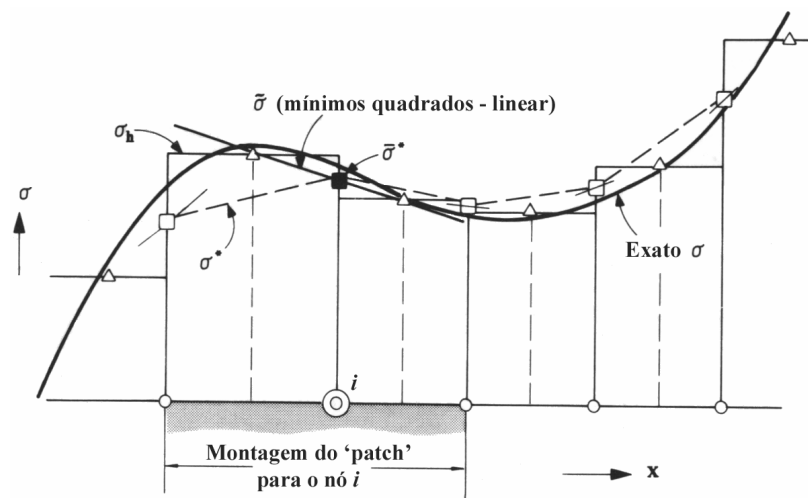


Figura 4.1 – Recuperação superconvergente para elementos finitos lineares em 1D (Fonte: Zienkiewicz e Zhu, 1992c).

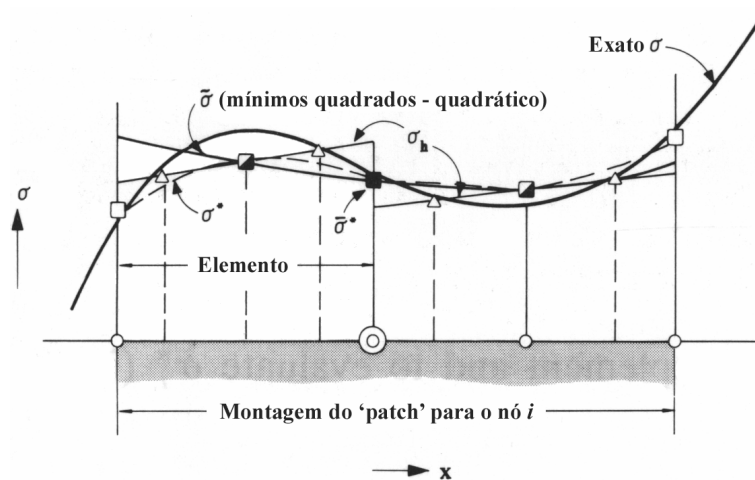


Figura 4.2 – Recuperação superconvergente para elementos finitos quadráticos em 1D (Fonte: Zienkiewicz e Zhu, 1992c).

4.2. FORMULAÇÃO DA PROPOSTA PARA SUAUIZAZÃO

Seguindo um modelo semelhante à recuperação superconvergente para elementos finitos, foi desenvolvida uma técnica de suavização para a recuperação de resultados nos nós geométricos de elementos descontínuos em problemas de elasticidade plana no MEC. Com o propósito de não alterar o código fonte original dos programas de elementos de contorno, a técnica foi desenvolvida incluindo somente uma etapa de pós-processamento de baixo custo computacional e boa efetividade. A proposta foi desenvolvida para elementos lineares e quadráticos e então aplicada e testada a problemas clássicos de elasticidade plana.

É sabido, que os campos de valores no contorno do problema, obtidos com a utilização de elementos descontínuos no MEC, não possui continuidade na interface entre elementos seguidos e pode apresentar baixa precisão nos contornos do elemento quando extrapolado. Pode-se visualizar na figura 4.3 um resultado típico de elementos descontínuos lineares e quadráticos para parte de um segmento em um problema de elasticidade plana.

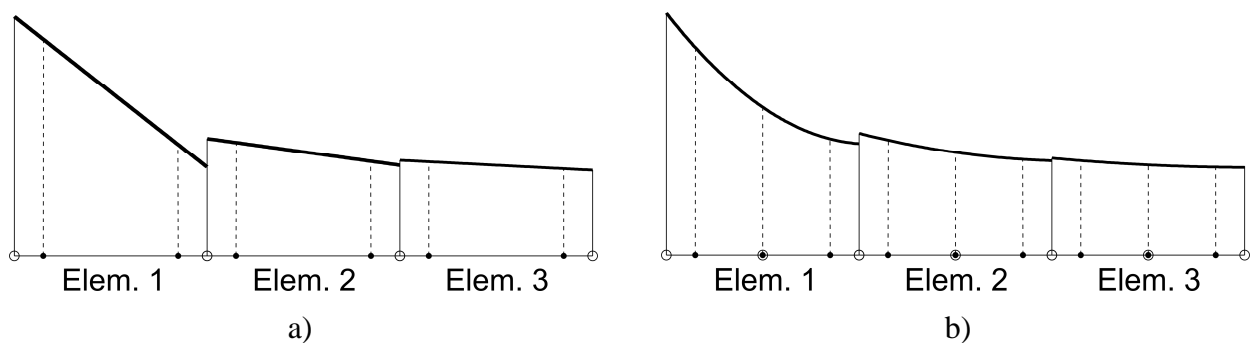


Figura 4.3 – Resultados originais. (a) Elementos lineares, (b) elementos quadráticos.

O objetivo da recuperação desses valores é encontrar um campo de resultados (tensões ou deslocamentos) contínuo em segmentos no contorno do problema definido por funções de interpolação \mathbf{N} e parâmetros nodais \bar{u}^* , tal que

$$u^* = \mathbf{N}\bar{u}^* \quad (4.7)$$

onde u^* não apresenta as discontinuidades ilustradas na figura 4.3. Na equação (4.7), as funções de interpolação \mathbf{N} possuem a mesma ordem de interpolação dos elementos, porém não modificadas para os nós físicos deslocados, ou seja, são as funções de interpolação geométricas.

Assim como na técnica SPR, defini-se *patch* como um grupo de elementos contíguos em volta de um ponto analisado (nó geométrico) onde se quer recuperar uma variável física. Nesta proposta de suavização, utilizou-se 2 elementos em cada *patch* e ilustrações desses para elementos de contorno descontínuos lineares e quadráticos podem ser vistos na figura 4.4.

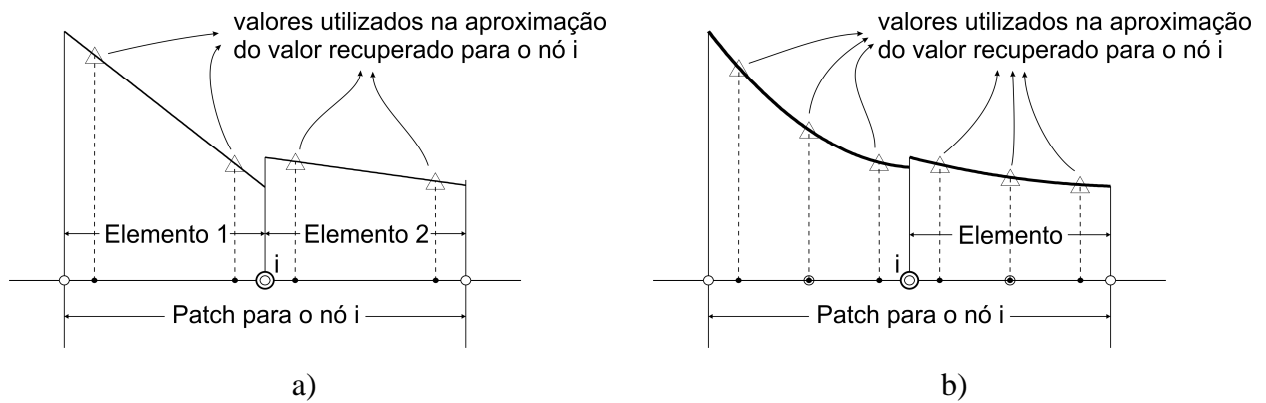


Figura 4.4 – Exemplos de patches para MEC. (a) Elementos lineares, (b) elementos quadráticos.

Nessa nova técnica, assume-se que os valores nodais recuperados \bar{u}^* pertencem a uma extensão polinomial u_p^* com ordem p , sendo esta, 1 (um) grau maior que a apresentada pelas funções base \mathbf{N} , que é válida sobre um *patch* cercado o nó geométrico considerado. Essa expansão polinomial pode ser escrita simplesmente como:

$$u_p^* = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (4.8)$$

onde u_p^* pode ser qualquer das componentes de tensão ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$) ou deslocamento (u_x, u_y), \mathbf{P} contém termos apropriados de um polinômio com ordem completa p (um grau maior que as funções de interpolação \mathbf{N}) e \mathbf{a} contém parâmetros generalizadas a serem determinados. Foi utilizado um polinômio para a recuperação dos valores com ordem maior que as funções de interpolação originais por semelhança à técnica SPR. Como descrito na seção anterior, na técnica SPR, recuperam-se os valores de tensão com polinômios da mesma ordem das funções de interpolação de deslocamento, os quais têm uma ordem maior.

Para elementos descontínuos lineares pode-se escrever

$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad x^2] \quad (4.9)$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \quad (4.10)$$

e para elementos descontínuos quadráticos

$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \quad (4.11)$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \quad (4.12)$$

Os parâmetros desconhecidos \mathbf{a} da expansão dada pela equação (4.8) são determinados por uma aproximação discreta por mínimos quadrados de um grupo de valores da variável

requerida nos nós físicos existentes dentro do *patch* considerado. Para tal, deve-se minimizar a função

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^m (u_h(x_i) - u_p^*(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (u_h(x_i) - \mathbf{P}(x_i)\mathbf{a})^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde x_i são as coordenadas locais dos pontos utilizados na aproximação (nós físicos) e m é o número total de pontos. Para elementos lineares m vale 4, ou seja, 2 nós físicos em cada elemento e para elementos quadráticos tem valor igual a 6, ou seja, 3 nós físicos por elemento.

A minimização da função $F(\mathbf{a})$ em relação aos parâmetros do vetor \mathbf{a} , deve satisfazer

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i)\mathbf{P}(x_i)\mathbf{a} = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i)u_h(x_i) \quad (4.14)$$

resultando num sistema de equações algébricas, que pode ser resolvido na forma matricial como

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i)\mathbf{P}(x_i) \quad (4.16)$$

e

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}^T(x_i)u_h(x_i) \quad (4.17)$$

O número de equações a ser resolvido em cada *patch* é pequeno e a recuperação só é feita para cada extremo dos elementos (nó geométrico não central) dentro do segmento a ser recuperado. Nota-se também que utilizando um sistema de coordenadas local normalizado, que pode ser escrito como

$$\bar{x} = -1 + 2 \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (4.18)$$

onde x_{\min} e x_{\max} são as coordenadas mínima e máxima dentro de um *patch*, o custo matemático se reduz muito e evita-se problemas de mal-condicionamento da matriz \mathbf{A} . O uso desse sistema de coordenadas faz com que a mesma matriz \mathbf{A} ocorra toda a vez que a razão entre os comprimentos dos dois elementos dentro de um *patch* for a mesma. Assim, quando o tamanho dos elementos, ou a razão de comprimentos for constante ao longo de um segmento no contorno, a mesma matriz \mathbf{A} aparecerá ao longo de todos *patches* nesse segmento. Além disso, essa matriz é independente da variável a ser recuperada, sendo a mesma para deslocamentos (u_x, u_y) ou tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$). Esse procedimento possui, dessa forma, custo baixíssimo.

Tendo os parâmetros \mathbf{a} determinados, o valor recuperado no nó geométrico central do *patch* é simplesmente calculado pela inserção das coordenadas apropriadas na expressão (4.8). O valor para o nó central em cada elemento quadrático é associado a dois *patches* e então um valor médio é calculado. Já os valores nos extremos do segmento recuperado são calculados pelo *patch* mais próximo.

Esquemas visuais da recuperação de valores podem ser vistos para elementos lineares e quadráticos nas figuras 4.5 e 4.6 respectivamente.

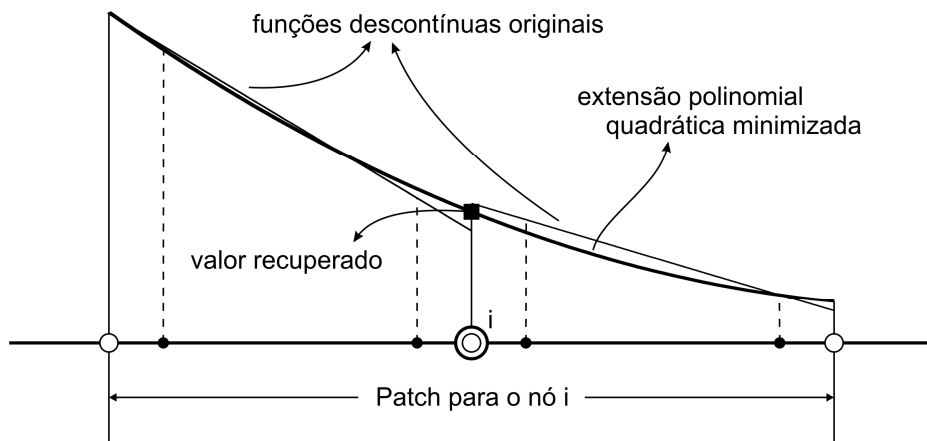


Figura 4.5 – Recuperação em elementos descontínuos lineares.

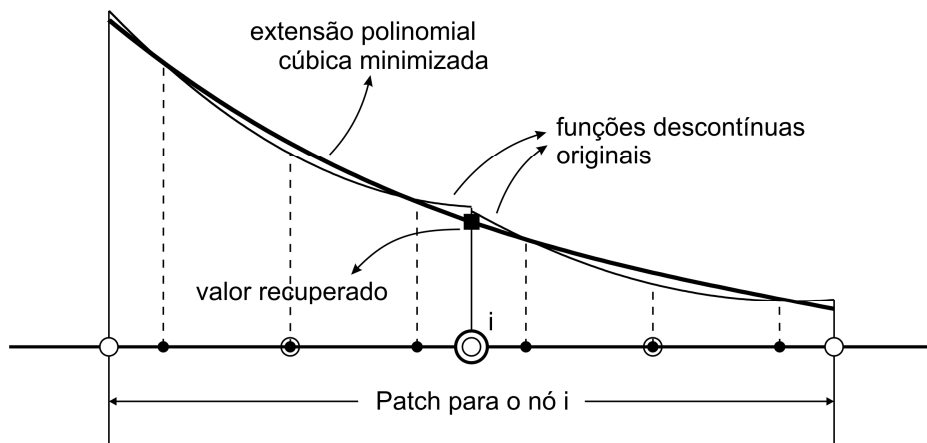


Figura 4.6 – Recuperação em elementos descontínuos lineares quadráticos.

5. PROPOSTA DE TÉCNICA PARA CÁLCULO DA COMPONENTE TANGENCIAL DE TENSÃO SOBRE O CONTORNO

Em problemas de elasticidade plana, o método dos elementos de contorno fornece uma aproximação dos deslocamentos e forças de superfície ao redor de todo o contorno do corpo. Entretanto, as componentes planas de tensão σ_{ij} não são conhecidas diretamente a partir da solução por elementos de contorno, mesmo sendo muito importantes em diversas aplicações de engenharia.

Em muitos programas que utilizam o MEC, a equação integral, que é capaz de fornecer o tensor de tensões em qualquer ponto, só é utilizada para pontos internos devido ao alto custo computacional. As componentes de tensão no contorno são calculadas, de acordo com lei de Hooke, pela combinação de forças de superfície e deformações no contorno, sendo que algumas componentes de deformações são calculadas pela diferenciação dos deslocamentos, isto é, pelas derivadas das funções de interpolação. Entretanto esta técnica não é robusta pelo fato do processo de diferenciação de quantidades obtidas numericamente ser mal condicionado [Guiggiani, 1994]. Embora seja uma técnica satisfatória para muitas aplicações, as componentes de tensão podem apresentar erros consideráveis quando malhas grosseiras são empregadas, ou quando as variáveis sobre o contorno estão sujeitas a algum tipo de descontinuidade. Além disso, desde que o algoritmo para as tensões no contorno pela lei de Hooke está ligado à representação local de forças de superfície e deslocamentos, ele não pode capturar precisamente o campo de tensões dentro do elemento [Guiggiani, 1994].

Com o intuito de obter valores mais confiáveis para as tensões no contorno, com um baixo custo computacional, é apresentada neste capítulo uma nova proposta de cálculo. Na seção seguinte é brevemente apresentado o modelo padrão de cálculo de tensões no contorno e na próxima é descrita a nova proposta. Exemplos numéricos são mostrados no capítulo seguinte.

5.1. MODELO PADRÃO DE CÁLCULO DAS TENSÕES NO CONTORNO

A partir das forças de superfície e deslocamentos, no sistema global de coordenadas (x_1, x_2) , é possível obter as componentes planas do tensor de tensões no contorno. Uma ilustração dos sistemas de coordenadas usados pode ser visto na figura 5.1.

As componentes normal (σ_{nn}) e cisalhante (σ_{nt}) das tensões sobre o contorno são iguais às forças de superfície no sistema local. Essas forças de superfície são facilmente obtidas pré-multiplicando as forças de superfície globais pela matriz de rotação \mathbf{R} :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Usando

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

temos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} t_{x_1} \\ t_{x_2} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde α é o ângulo entre o sistema de coordenadas global e o local (figura 5.1).

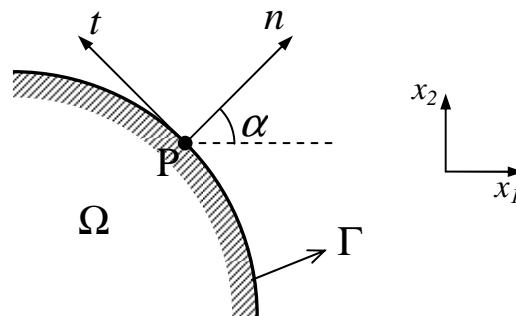


Figura 5.1 – Sistemas de coordenadas no contorno.

Como dito anteriormente, a componente tangencial (σ_{tt}), no sistema de coordenadas local, pode ser obtida pela lei de Hooke para estado plano de deformação por

$$\sigma_{tt} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma_{nn} + 2G \varepsilon_{tt}) \quad (5.4)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal e ε_{tt} é a deformação tangencial no sistema de coordenadas local. A componente tangencial para estado plano de tensão é aproximada pela equação (5.4), mas com as constantes de Lamé ajustadas conforme a seção 2.2.

A deformação tangencial é aproximada, utilizando a forma interpolada, por:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{du_t}{dx_2} = \frac{du_t}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_2} \quad (5.5)$$

O termo $\frac{du_t}{d\xi}$ será a derivada das funções de interpolação físicas, que podem ser obtidas multiplicando a matriz das funções de interpolação geométricas pela matriz de correção para nós

deslocados conforme mostrado nas seções 3.4.1 e 3.4.2. O termo $\frac{d\xi}{dx_2}$ é obtido através do Jacobiano:

$$\frac{d\xi}{dx_2} = \frac{1}{J} \quad (5.6)$$

Concluindo, quando se utiliza a expressão (5.4), na sua maneira padrão, faz-se a soma de duas funções que utilizam funções de interpolações com graus diferentes e esse processo torna-se menos confiável por utilizar a diferenciação numérica das funções de interpolação.

Uma alternativa, menos difundida, à utilização direta da lei de Hooke é a equação proposta por Balaš et al., 1989, em que:

$$\sigma_{ij} = \left[\left(n_i n_j + \frac{\nu}{1-\nu} t_i t_j \right) n_k + (n_i t_j + n_j t_i) t_k \right] p_k + \frac{2\mu}{1-\nu} t_i t_j t_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \quad (5.7)$$

onde p_k e u_k são respectivamente forças de superfície e deslocamentos no ponto analisado e n_i e t_i são respectivamente as componentes dos vetores normal e tangencial no sistema de coordenadas global. No entanto, essa equação não é analisada neste trabalho.

5.2. FORMULAÇÃO DA PROPOSTA PARA CÁLCULO DA COMPONENTE TANGENCIAL DE TENSÃO

A fim de obter uma proposta confiável para o cálculo da componente tangencial de tensão sem altos custos computacionais e sem alterar o código base do programa de elementos de contorno se propõe, neste trabalho, uma pequena mudança na utilização da expressão oriunda da lei de Hooke.

A utilização, na forma exata, de expressões que contenham derivadas de quantidades obtidas numericamente ou mesmo a utilização conjunta de funções de interpolações e suas derivadas se mostram inadequadas em diversas situações. Vale mencionar, que problemas desse tipo ocorrem no MEF, no cálculo de tensões em elementos de elasticidade bidimensional e no cálculo de deformações cisalhantes em elementos estruturais de placa/casca, e também, no acoplamento pressão/velocidade na mecânica dos fluidos. O mesmo ocorre com a expressão (5.4) em alguns casos de elasticidade plana no MEC.

No método dos elementos de contorno, com o uso padrão das equações da elasticidade plana, a deformação tangencial é obtida através da diferenciação das funções de interpolação sobre cada elemento e sabe-se que essa operação não necessariamente fornece bons resultados sobre toda a extensão do elemento. Desse modo, propõe-se utilizar no cálculo da componente

tangencial, valores em determinados pontos que melhor descrevam a deformação tangencial ao longo de cada elemento.

Em diversos casos matemáticos e de engenharia sabe-se da existência de pontos que representam a derivada numérica de determinada função de maneira mais precisa. Por exemplo, no método dos elementos finitos sabe-se da existência de pontos superconvergentes dentro de cada elemento, onde as funções que representam as tensões têm um valor mais preciso, sendo que as tensões são obtidas a partir das derivadas das funções de interpolação dos deslocamentos. Esses pontos são conhecidos como pontos de Barlow [Barlow, 1976].

Pelo fato de não haver estudos semelhantes com resultados concretos relacionando esses aspectos com o MEC, se propõe a utilização dos valores em pontos da quadratura de Gauss (dependentes do grau das funções de interpolação do elemento) para representar a deformação tangencial e componente normal de tensão, e conseqüentemente, a componente tangencial de tensão em coordenadas locais.

Para o elemento descontínuo linear, a deformação tangencial (ε_{tt}), que é obtida pela diferenciação de um deslocamento, é representada por uma função constante em cada elemento. Desse modo, é notório que o ponto central do elemento, ponto de Gauss para função linear ($\xi = 0$), representa bem a diferenciação da função obtida numericamente, ou seja, tem um valor mais próximo do real quando comparado a outros pontos no mesmo elemento, onde esse valor constante subestima ou superestima os valores de deformação. No entanto, a componente normal de tensão (σ_{nn}), para esse elemento, tem variação linear e vê-se, através de exemplos, que a utilização conjunta dessas duas funções pela lei de Hooke muitas vezes fornece resultados não satisfatórios. Assim propõe-se que se considere, para efeitos de cálculo da componente tangencial, somente os valores centrais da componente normal de tensão e da deformação tangencial.

Para um melhor entendimento dessa proposta, o modelo de uma placa quadrada com furo circular sob tração é analisado (figura 5.2). Devido à simetria do problema somente um quarto da placa é modelado, e os resultados para o segundo elemento da aresta inferior da placa são utilizados nos esquemas. As soluções das funções σ_{tt} , σ_{nn} e ε_{tt} (equação (5.4)), para esse elemento, são representadas graficamente juntas das respectivas soluções analíticas para placa infinita. Estes esquemas apresentando a maneira de cálculo padrão e essa nova proposta são mostrados para um elemento linear descontínuo respectivamente nas figuras 5.3a e 5.3b.

Para o elemento quadrático, onde, a priori, tem-se a componente normal de tensão e a deformação tangencial representadas por funções quadrática e linear respectivamente, viu-se que

os pontos de Gauss para uma quadratura quadrática ($\xi = -1/\sqrt{3}$ e $\xi = 1/\sqrt{3}$) são aqueles que melhor representam a deformação tangencial ao longo do elemento. Dessa maneira faz-se o cálculo da componente tangencial de tensão, através da lei de Hooke, utilizando os valores de tensão e deformação somente nesses dois pontos em vez de três pontos quaisquer como é esperado quando se utiliza uma função quadrática. Utilizando o mesmo modelo, de placa quadrada com furo circular sob tração, do caso linear, podem-se visualizar esquemas nas figuras 5.4a e 5.4b mostrando a maneira padrão de cálculo e a nova proposta para um elemento descontínuo quadrático.

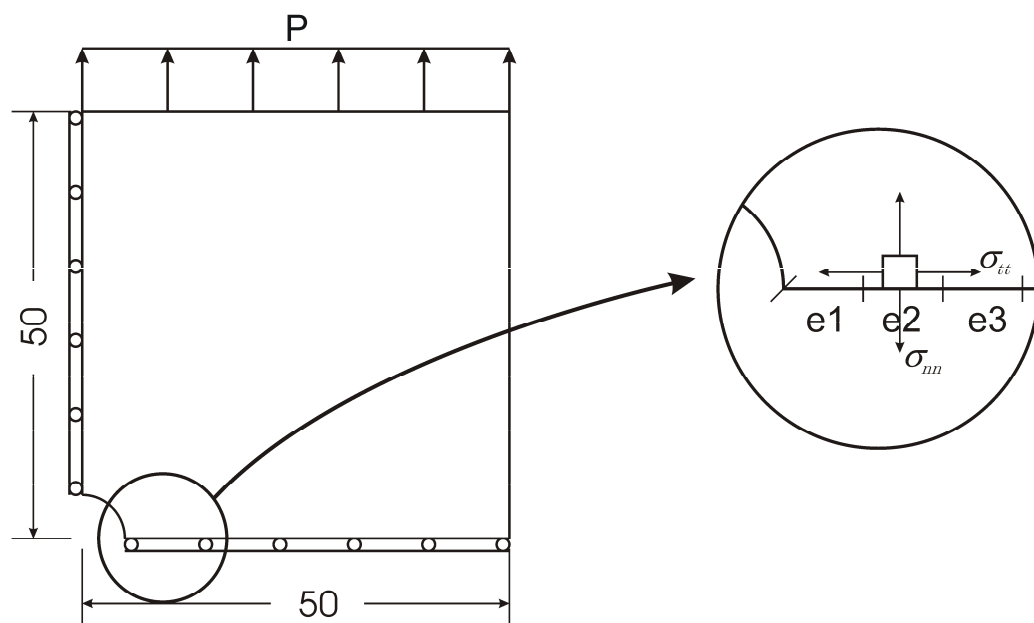


Figura 5.2 – Placa quadrada com furo circular sob tração.

Finalizando, pode-se dizer que, o cálculo da tensão tangencial é feito com um grau a menos que as outras tensões. Entretanto, por utilizar somente pontos que apresentam uma convergência mais elevada, pode-se confiar mais neste resultado do que no método padrão de cálculo como mostrarão os resultados numéricos no capítulo seguinte.

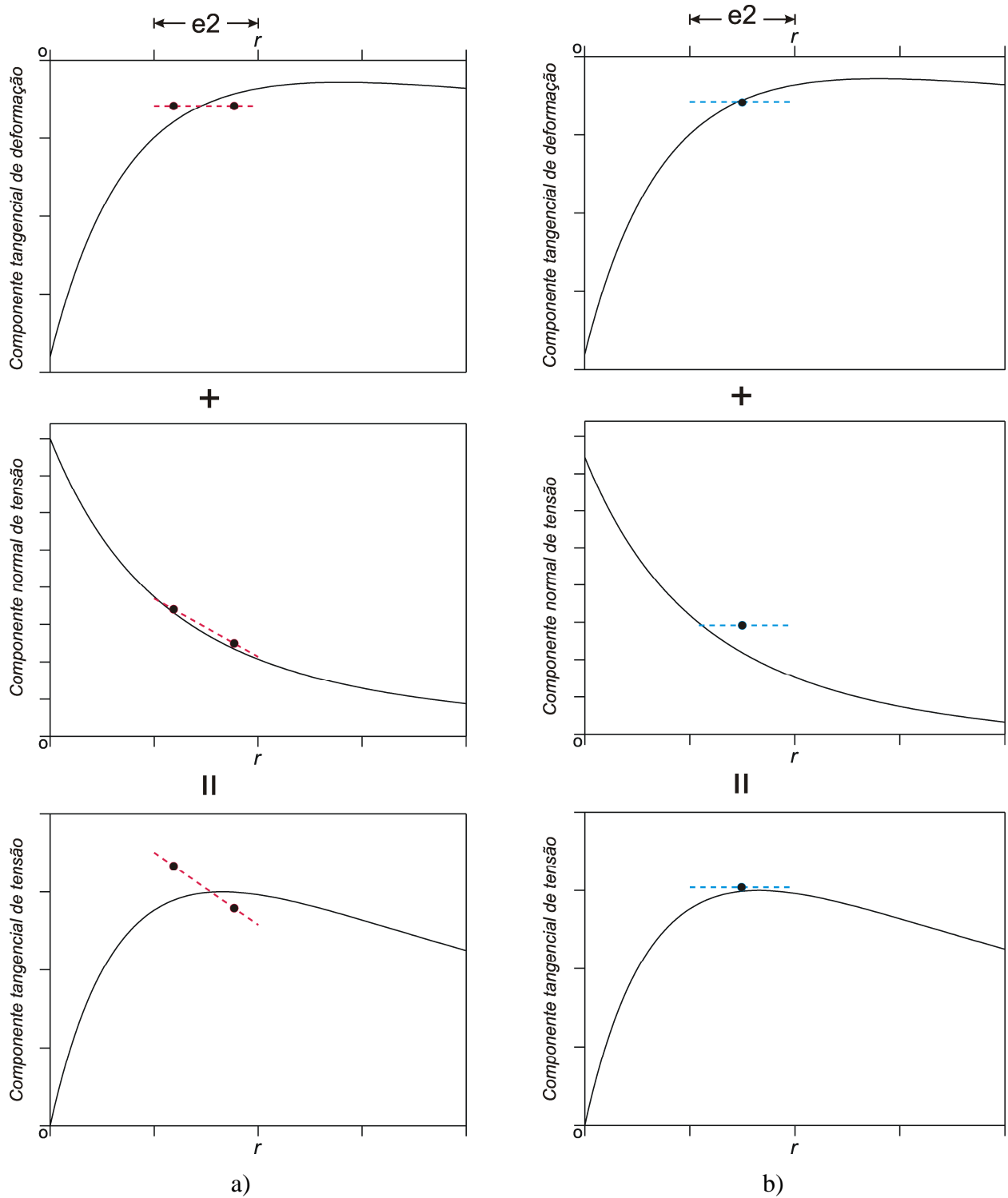


Figura 5.3 – Cálculo da componente tangencial de tensão para elemento descontínuo linear. a) Cálculo padrão utilizando dois pontos para a soma de duas funções lineares, b) nova proposta utilizando somente o ponto central.

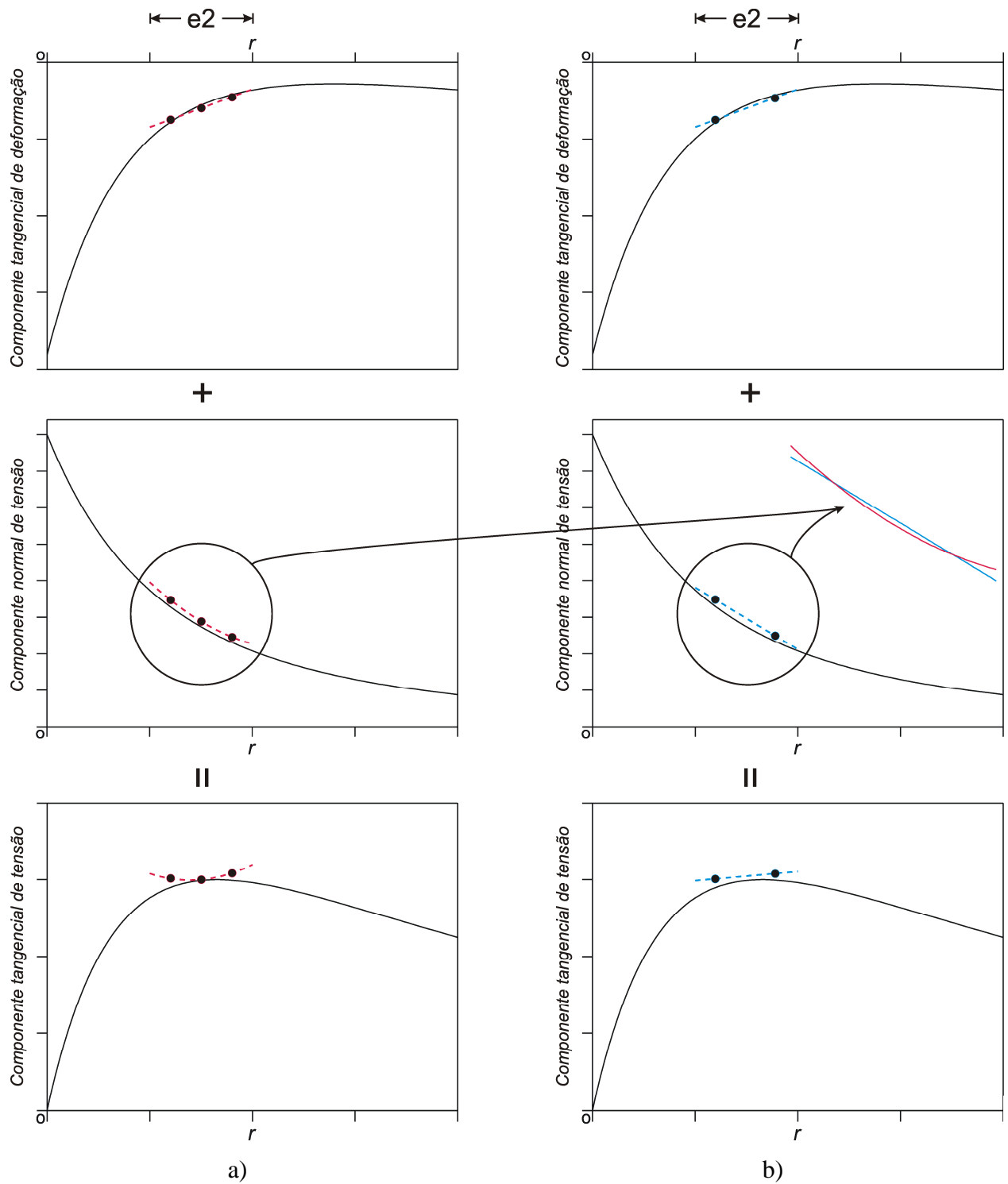


Figura 5.4 – Cálculo da componente tangencial de tensão para elemento descontínuo quadrático.

a) Cálculo padrão utilizando três pontos para a soma de duas funções quadráticas, b) nova proposta utilizando somente dois pontos.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta alguns resultados obtidos com as propostas de suavização de resultados e cálculo da componente tangencial de tensão a fim de avaliar o desempenho das propostas bem como validar os procedimentos. Essas metodologias foram implementadas a um código de elementos de contorno bidimensional desenvolvido em MATLAB 7.0. O número de pontos de integração utilizados é igual a dezesseis em todos os casos analisados. Além disso, o recuo dos nós físicos (a e b , na figura 3.2) é igual para os dois extremos de cada elemento. As dimensões, propriedades dos materiais e outras quantidades estão indicadas sem unidades, porém foram definidas de forma a representar qualquer sistema de unidades compatível.

6.1. PLACA QUADRADA COM FURO CIRCULAR SOB TRAÇÃO UNIFORME

Este exemplo tem sido muito utilizado em análises por elementos de contorno e adaptatividade de malha por apresentar concentrações de tensões; pelo mesmo motivo é utilizado neste trabalho. A placa quadrada tem as seguintes dimensões: comprimento da lateral $L = 100$, raio do furo central $R = 5$. As propriedades materiais são módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Dada a simetria do problema, somente um quarto da placa, como pode ser visto na figura 6.1, é modelado. A tração uniforme tem valor $P = 1$. Um recuo de 15% do comprimento do elemento foi utilizado para o deslocamento dos nós físicos neste caso.

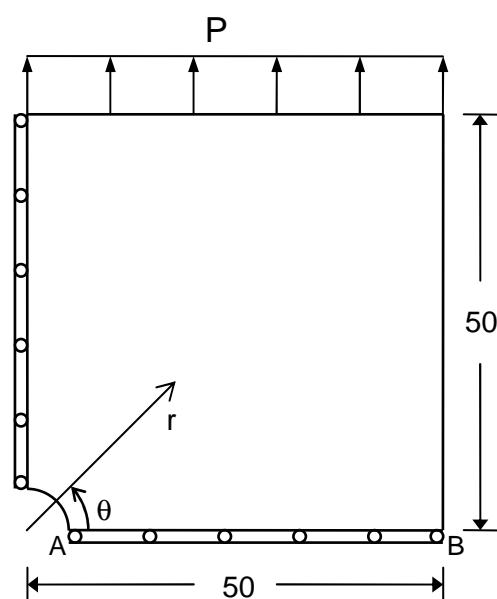


Figura 6.1 – Placa quadrada com furo circular sob tensão.

Utilizaram-se elementos lineares e quadráticos com duas diferentes discretizações para cada tipo de elemento. As malhas apresentam-se com elementos de tamanho fixo ao longo da mesma, com exceção do furo central. Nas malhas mais grosseiras (malha 1), utilizaram-se elementos com tamanho 2.5 e quatro elementos no quarto de círculo. Já nas discretizações mais refinadas (malha 2), foram utilizados elementos com tamanho 1.25 e oito elementos no quarto de círculo. Na figura 6.2, podem ser vistas as diferentes discretizações próximas ao furo central para elementos lineares. As únicas diferenças para as malhas com elementos quadráticos são a inclusão dos nós centrais e a utilização de elementos curvos no furo central.

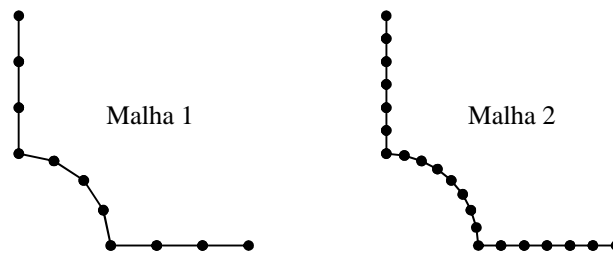


Figura 6.2 – Diferentes malhas para elementos lineares.

As figuras a seguir mostram os diversos resultados obtidos pelas propostas já descritas ao longo da aresta inferior da placa (aresta AB). Para uma placa infinita, sob as mesmas condições, as tensões normais nas direções circunferencial e radial ao longo da aresta AB são respectivamente [Timoshenko, 1980]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2} \left(2 + \frac{R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \quad (6.1)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{3P}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4} \right) \quad (6.2)$$

onde r é a distância a partir do centro do furo, R é o raio do furo e P é a tração uniforme. A fim de se realizar uma comparação qualitativa, os valores obtidos com as novas propostas (com suavização) são comparados com resultados típicos de elementos de contorno descontínuos (sem suavização) e com as respectivas soluções analíticas.

Os gráficos representados nas figuras 6.3 e 6.4 mostram a recuperação da tensão circunferencial ao longo dos primeiros elementos descontínuos lineares próximos ao ponto A para as diferentes malhas. Nota-se que o valor recuperado na interface entre elementos é consideravelmente diferente do valor médio que pode ser obtido pela extrapolação dos resultados descontínuos. Além disso, ressalta-se que nenhuma das respostas converge exatamente para a solução analítica da equação (6.1) pelo fato da placa não ser infinita. Isso pode ser bem

observado no ponto inicial da figura 6.4, onde a resposta recuperada converge para um valor maior que 3.

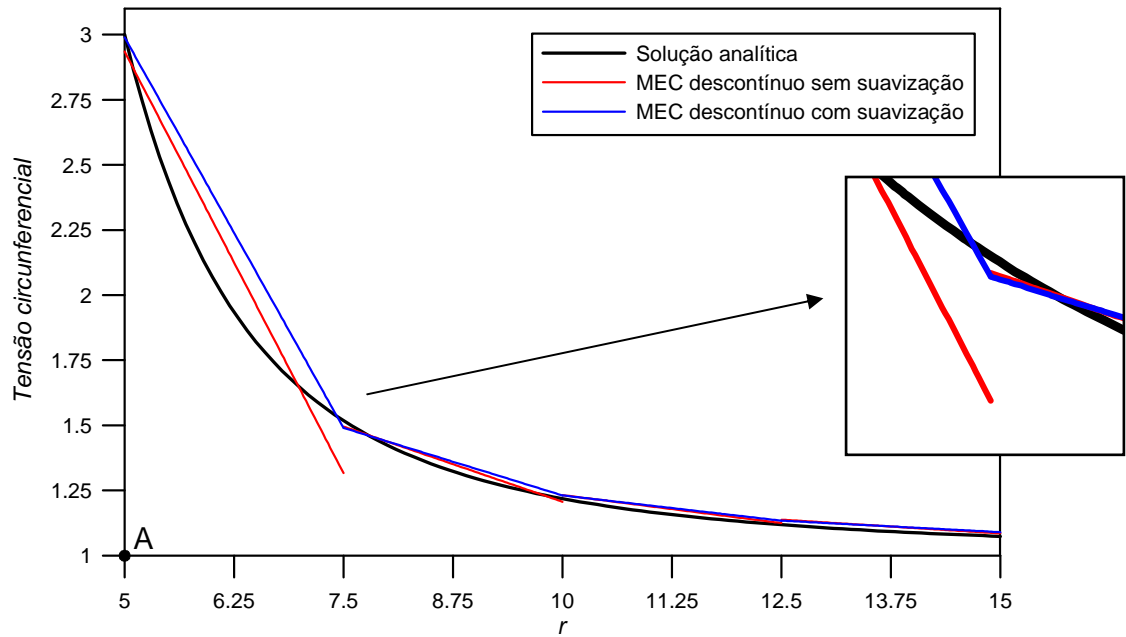


Figura 6.3 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos lineares, malha1).

Comparando as repostas para as diferentes discretizações, vê-se que as soluções recuperada e padrão se aproximam quando de um refino na malha. Assim como, a solução recuperada apresenta forma mais semelhante à solução analítica.

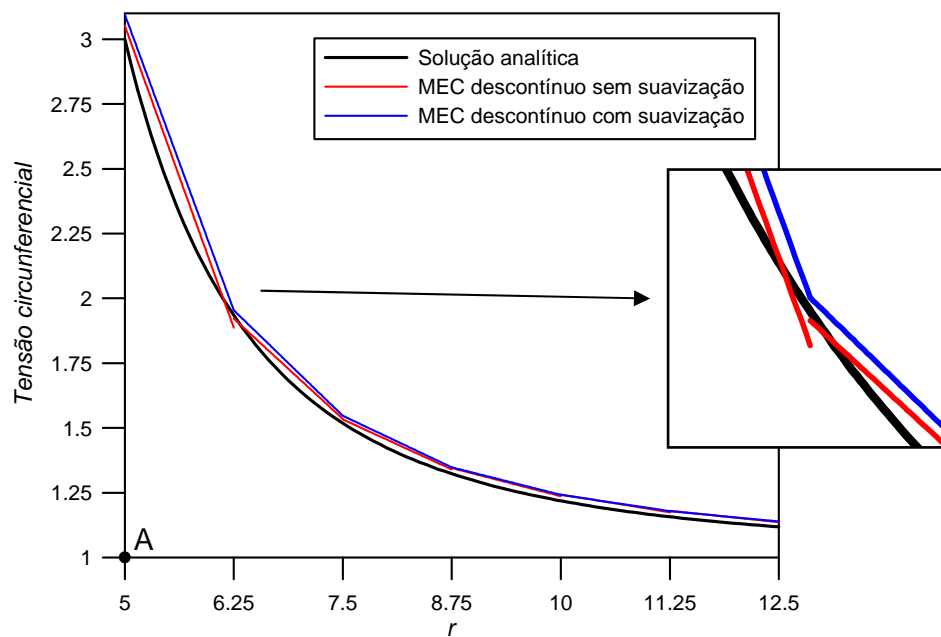


Figura 6.4 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos lineares, malha2).

No problema em questão, a tensão normal na direção radial (coordenadas globais) é a componente tangencial de tensão em coordenadas locais para a aresta analisada. Dessa forma, têm-se quatro soluções para comparação além da solução analítica em cada gráfico, que são:

1. MEC descontínuo sem suavização – resultado típico obtido com elementos descontínuos para a componente tangencial de tensão (item 5.1);
2. MEC descontínuo com suavização – resultado obtido através da proposta de suavização dos resultados da solução anterior;
3. MEC descontínuo modificado sem suavização – resultado obtido com elementos descontínuos através da nova proposta de cálculo da componente tangencial de tensão (item 5.2);
4. MEC descontínuo modificado com suavização – resultado obtido através da proposta de suavização dos resultados da solução anterior.

Os gráficos apresentados pelas figuras 6.5 e 6.6 apresentam a recuperação da tensão radial ao longo do início da aresta AB para a solução com elementos lineares para as duas discretizações.

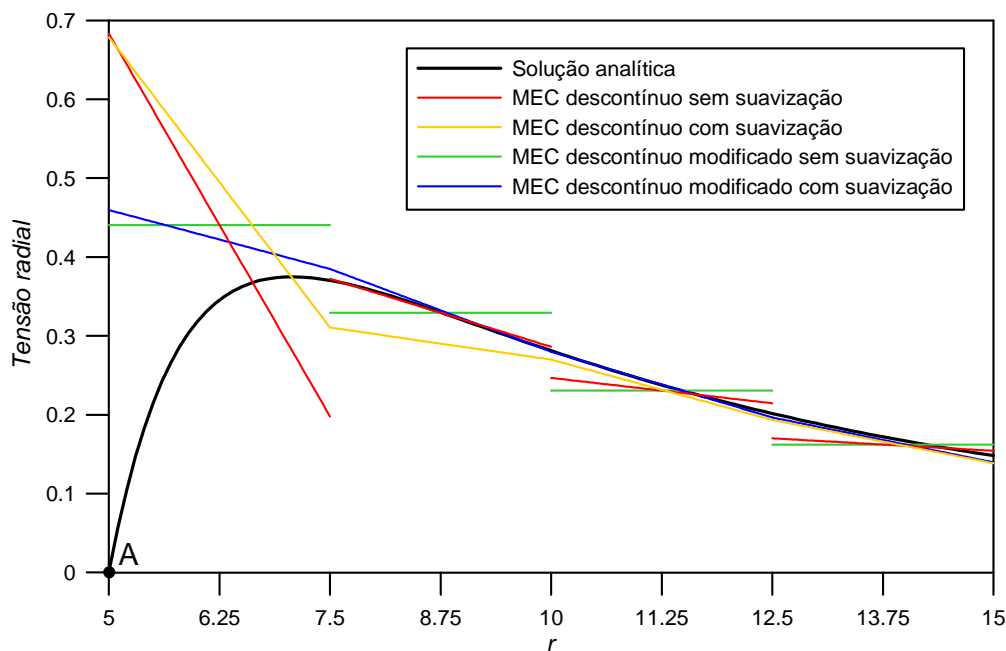


Figura 6.5 – Recuperação da tensão radial (elementos lineares, malha1).

Nota-se a partir da figura 6.5 que a resposta que mais se aproxima qualitativamente da solução analítica é a recuperada a partir do cálculo de tensão tangencial proposto. Além disso,

vê-se que a solução tangencial modificada sem suavização é simplesmente o valor médio em cada elemento descontínuo linear.

Observando as repostas para as diferentes malhas, no caso radial, vê-se que tanto a solução tangencial típica como a respectiva solução com suavização não tendem a convergir – qualitativamente – para a solução analítica próximas ao furo central, enquanto as soluções modificadas tendem a convergir, mesmo que lentamente. Isso se deve a diferença de sinais entre os elevados gradientes das tensões normal e tangencial próximas ao furo central e a diferenciação do deslocamento, ocorrendo assim, a soma de duas funções com graus de interpolação diferentes.

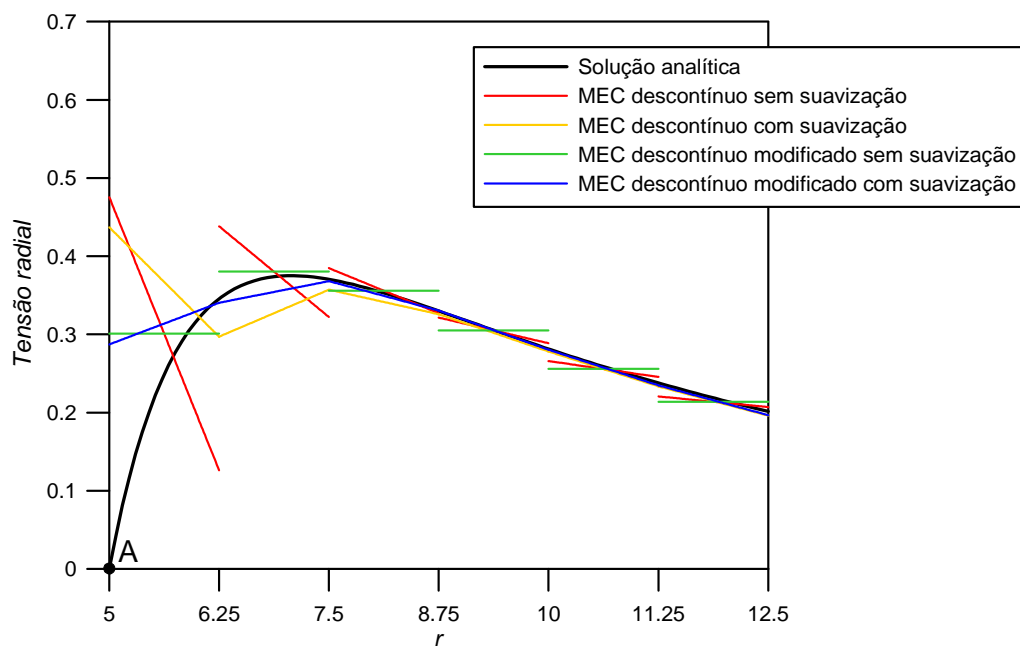


Figura 6.6 – Recuperação da tensão radial (elementos lineares, malha2).

Verificando agora, as análises com elementos descontínuos quadráticos, pode-se ver, nas figuras 6.7 e 6.8, a recuperação da tensão circunferencial na aresta AB próxima ao furo central para as diferentes malhas.

Vê-se nessas figuras que as soluções com suavização podem representar adequadamente os valores no contorno, pois essas apresentam forma semelhante a solução analítica, com valores apropriados entre elementos. Nota-se também, que os valores recuperados nos nós geométricos entre elementos estão abaixo das extrapolações dos resultados descontínuos, ou seja, são consideravelmente diferentes dos valores médios.

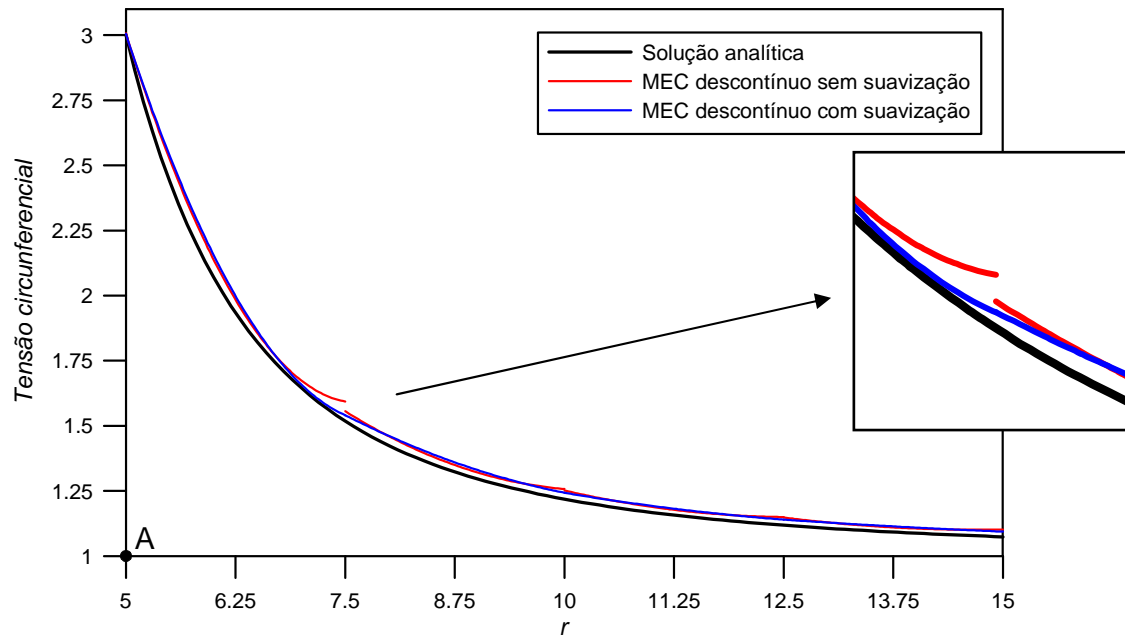


Figura 6.7 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos quadráticos, malha1).

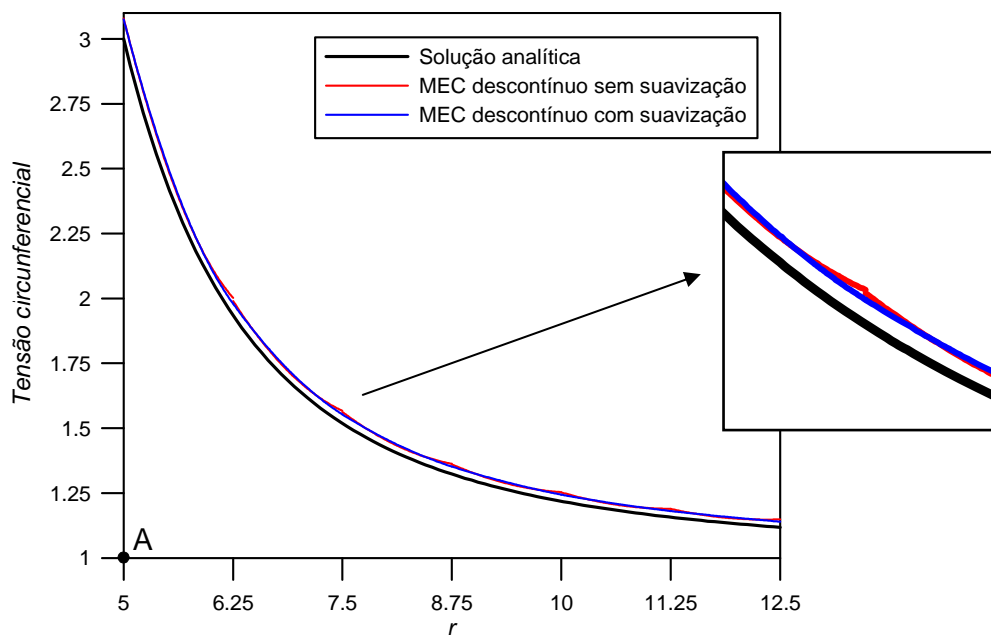


Figura 6.8 – Recuperação da tensão circunferencial (elementos quadráticos, malha2).

Os gráficos representados pelas figuras 6.9 e 6.10 apresentam a recuperação da tensão normal na direção radial ao longo do início da aresta AB para a solução com elementos quadráticos para as duas discretizações. Assim, como nas figuras 6.5 e 6.6, esses gráficos apresentam quatro soluções além da solução analítica.

Nota-se a partir desses gráficos grande diferença entre as duas soluções sem suavização para o cálculo da tensão tangencial, porém a diferença já não é tão grande para as soluções recuperadas, quando comparadas às soluções com elementos lineares. Vê-se ainda, que o

resultado recuperado a partir da nova proposta (modificado com suavização) se aproxima mais rapidamente da solução analítica no ponto inicial do eixo das ordenadas. Por fim, pode-se reparar que ambas as soluções suavizadas se aproximam uma da outra quando afastadas do furo central e com uma discretização adequada.

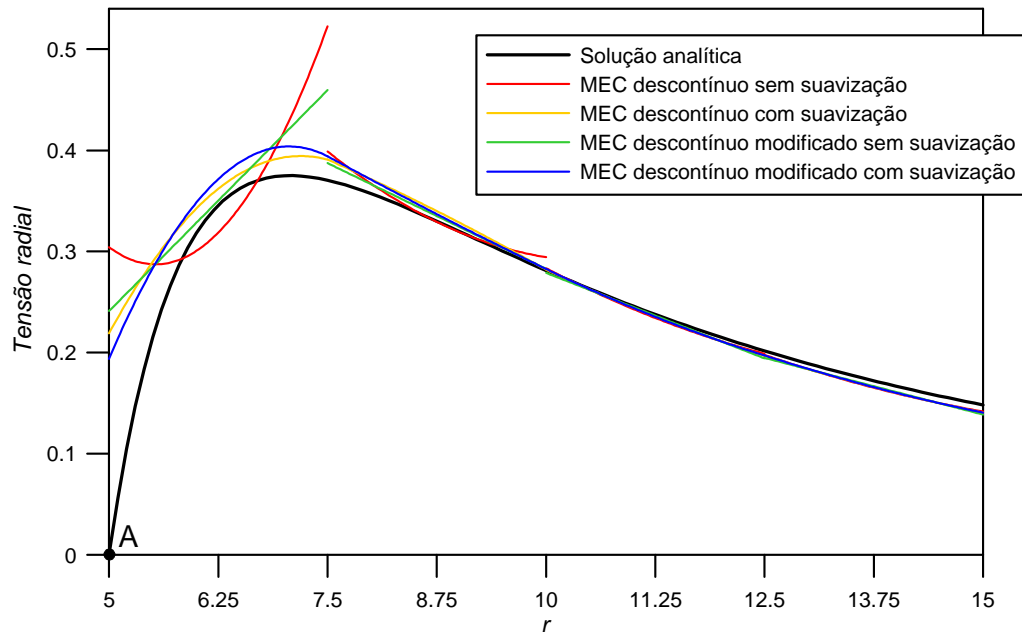


Figura 6.9 – Recuperação da tensão radial (elementos quadráticos, malha1).

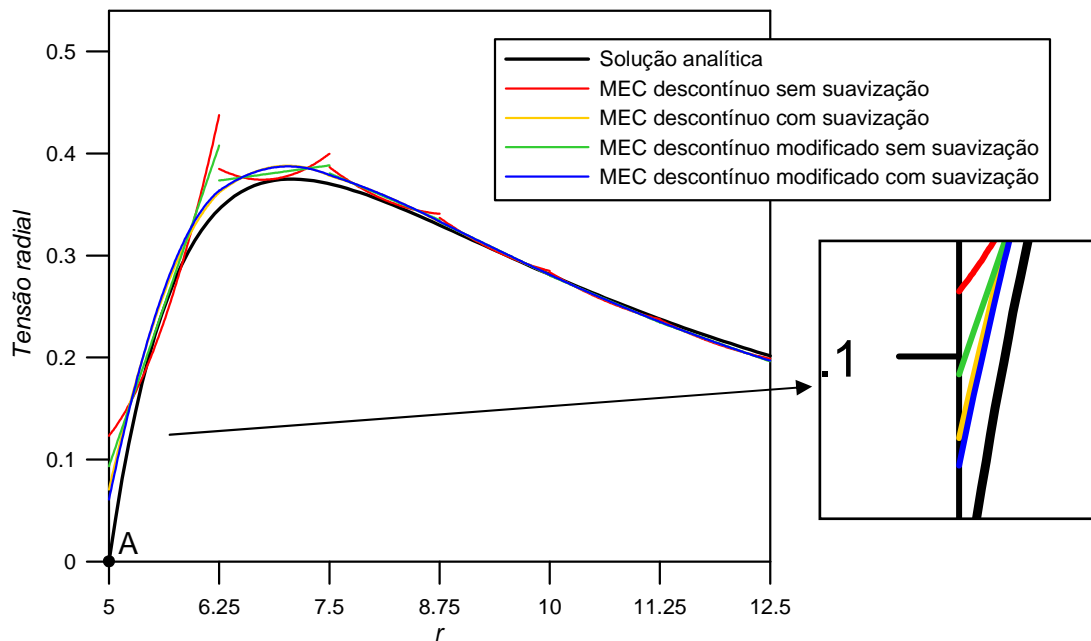


Figura 6.10 – Recuperação da tensão radial (elementos quadráticos, malha2).

6.2. DOMÍNIO EM FORMA DE L

A figura 6.11 mostra a geometria e condições de contorno de uma chapa em forma de L. Este problema é um teste típico para procedimentos de adaptatividade tanto no MEF quanto no MEC por apresentar elevados gradientes de tensão [Zienkiewicz e Zhu, 1992b; Zhao e Wang, 1999; Gago et al., 1983]. Além disso, foi utilizado como exemplo numérico para demonstrar a precisão de um método de pós-processamento para calcular tensões entre elementos [Zhi Ye Zhao, 1996].

Devido à existência de um canto de reentrada na geometria, a tensão normal na direção radial tem valor infinito próximo a esse canto. De acordo com M. Guiggiani, 1990, o campo de deslocamentos próximo ao canto interno B se comporta de maneira similar a Kr^α , onde K é o fator de concentração de tensões, r é a distância a partir do canto e α é o fator de singularidade. No entanto, em uma solução pelo MEC só há singularidade na derivada do deslocamento próximo ao canto B, e assim todas as variáveis no contorno são finitas. Além disso, pelo fato de não haver forças de superfície nas arestas internas do canto ABC, a componente tangencial de tensão é obtida somente a partir da deformação tangencial. Desse modo, a tensão radial se apresenta de forma igual tanto para a maneira padrão de cálculo quanto para a nova proposta apresentada neste trabalho.

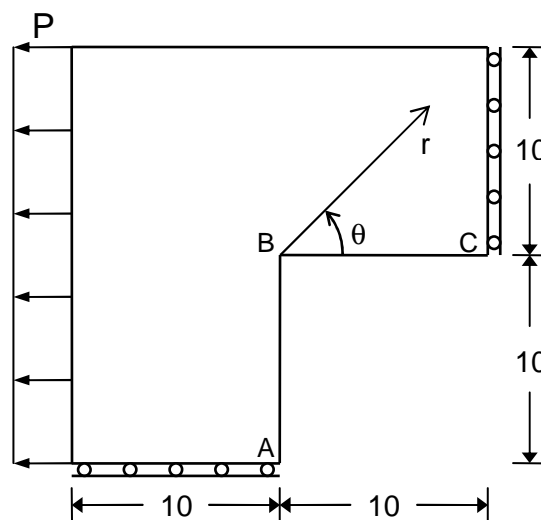


Figura 6.11 – Domínio em forma de L.

A aresta BC do canto de reentrada foi utilizado para análise do método de suavização de resultados proposto neste trabalho. Foi analisado o cálculo da tensão na direção radial e a recuperação desses valores utilizando uma malha com 32 (malha 1) e outra com 64 (malha 2) elementos, tendo 4 e 8 elementos na aresta BC em cada malha, respectivamente. A propósito de

comparação, foi utilizado um modelo refinado (malha 3), considerado como solução mais precisa, com um total de 268 elementos, sendo 54 deles na aresta analisada. As três análises foram efetuadas com elementos quadráticos. As propriedades materiais empregadas são módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. O carregamento foi definido com valor $P = 1$ e admitiu-se a condição de estado plano de tensões. Um recuo de 10% do comprimento do elemento foi utilizado para o deslocamento dos nós físicos.

A averiguação dos resultados mostra que a resposta típica através de elementos descontínuos e a resposta com suavização são quase idênticas quando longe do canto. Desse modo, as figuras 6.12 e 6.13 apresentam os resultados para tensão radial somente até a metade da aresta BC.

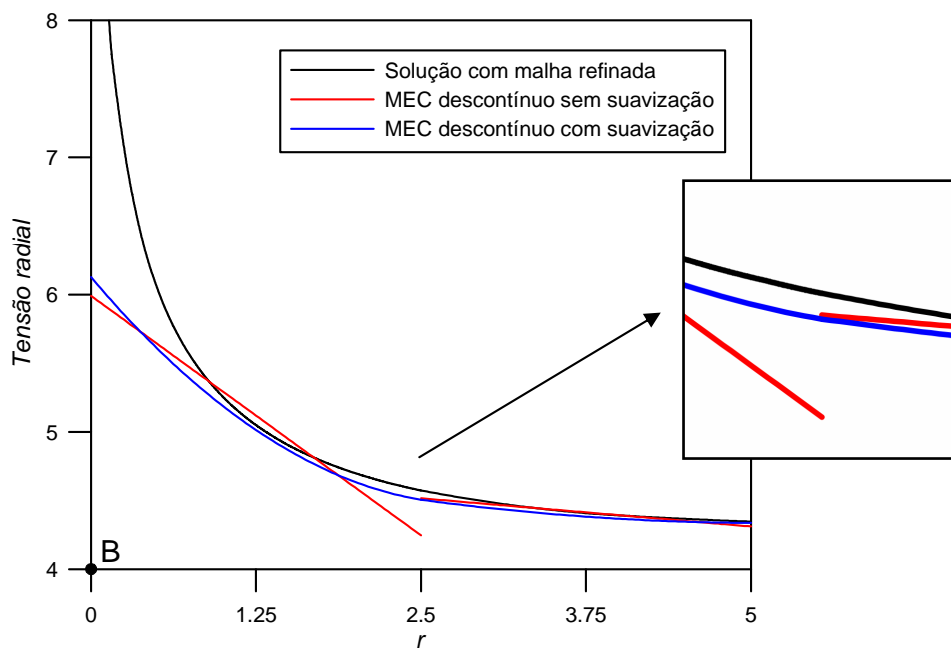


Figura 6.12 – Recuperação da tensão radial na aresta BC (malha 1).

Observa-se pela figura 6.12 que a resposta recuperada já apresenta um resultado satisfatório a partir da metade do primeiro elemento, tendo erros menores que 1.5%. No entanto, a solução típica apresenta erros ainda consideráveis nesse mesmo elemento.

A fim de observar a influência da discretização da malha no cálculo e recuperação de tensões, a figura 6.13 mostra os resultados para a tensão radial até a metade da aresta BC para a malha com o dobro do número de elementos (malha 2). A resposta recuperada para essa malha e a solução com malha refinada (malha3) apresentam boa concordância, exceto para distâncias menores que 0.45 a partir do canto B. Vê-se também, que a tensão recuperada no primeiro nó

geométrico entre elementos ($r = 1.25$) apresenta valor tanto mais preciso que a extrapolação a partir do primeiro elemento ou que a média das extrapolações.

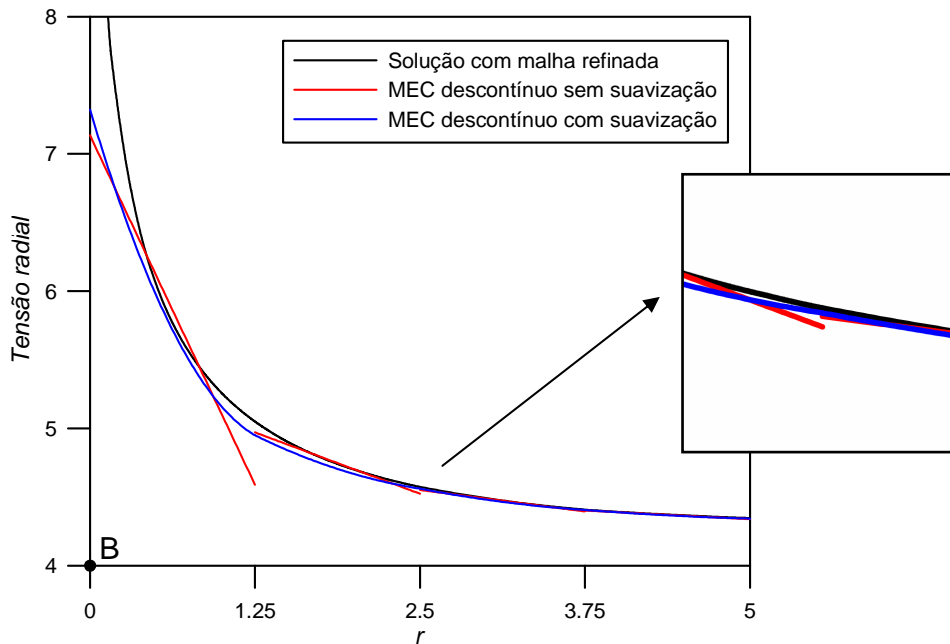


Figura 6.13 – Recuperação da tensão radial na aresta BC (malha 2).

Os erros relativos para a tensão na direção radial à distância igual a 2.5 do canto B, para diversas maneiras de calcular a tensão entre dois elementos, são comparados na tabela 6.1. O erro relativo é calculado como:

$$Erro = \left| \frac{\sigma_{malha1,2} - \sigma_{malha3}}{\sigma_{malha3}} \right| \times 100 \quad (6.3)$$

onde σ pode ser a tensão original extrapolada, a média das tensões extrapoladas ou a solução recuperada.

Malha	Método	Erro
Malha 1	extrapolação à esquerda	7.149 %
	extrapolação à direita	1.268 %
	média das extrapolações	4.198 %
	solução recuperada	1.487 %
Malha 2	extrapolação à esquerda	1.093 %
	extrapolação à direita	0.481 %
	média das extrapolações	0.787 %
	solução recuperada	0.284 %

Tabela 6.1 – Resultados para tensão radial em $r = 2.5$ (domínio em forma de L).

Nota-se, pela observação da tabela anterior, que o erro relativo da solução recuperada diminui e assim torna-se o menor quando do refino da malha, mostrando que a solução recuperada converge para a solução mais acurada. Além disso, percebe-se que a média das soluções extrapoladas não se apresenta como uma maneira adequada no cálculo dos valores de contorno na interface entre elementos.

6.3. CILINDRO COM PRESSÃO INTERNA

Nesta análise, um problema clássico do MEC é revisto, utilizando as novas técnicas apresentadas neste trabalho. O problema se trata de um cilindro com pressão interna, onde somente um quarto do cilindro é modelado devido à simetria do problema. A geometria e condições de contorno podem ser vistas na figura 6.14.

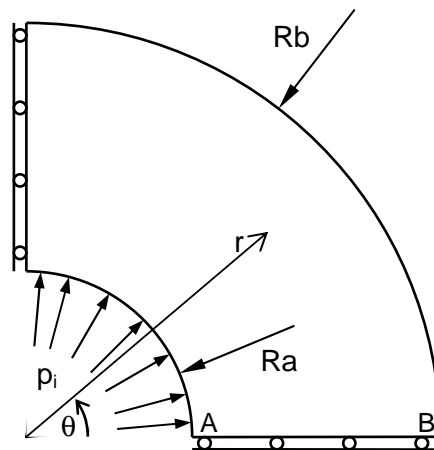


Figura 6.14 – Cilindro com pressão interna.

As medidas para o raio interno (Ra) e externo (Rb) são respectivamente 10 e 25. As propriedades materiais empregadas são módulo de elasticidade $E = 200 \times 10^9$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$. O carregamento foi definido com valor para a pressão interna $p_i = 1000$ e admitiu-se a condição de estado plano de tensões. Um recuo de 10% do comprimento do elemento foi utilizado para o deslocamento dos nós físicos.

Para fins de análise dos resultados utilizou-se a solução analítica da elasticidade [Timoshenko e Goodier, 1980]. Nessa solução, os valores para as tensões nas direções circunferencial e radial, em coordenadas polares, são respectivamente dados por:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{Ra^2 p_i}{Rb^2 - Ra^2} \left(1 + \frac{Rb^2}{r^2} \right) \quad (6.4)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{Ra^2 p_i}{Rb^2 - Ra^2} \left(1 - \frac{Rb^2}{r^2} \right) \quad (6.5)$$

A fim de avaliar a capacidade das novas técnicas em malhas grosseiras, um modelo utilizando poucos elementos quadráticos foi analisado neste problema. Não foram realizadas análises com elementos lineares pela dificuldade desses em representar geometrias circulares com poucos elementos. A malha de elementos de contorno utilizada neste exemplo apresenta 2 elementos em cada segmento de contorno reto, 4 elementos no semi-círculo interno e 10 elementos no semi-círculo externo.

Os resultados com e sem suavização para a tensão circunferencial na aresta inferior podem ser vistos na figura 6.15, juntamente com a solução analítica. Nota-se a partir do gráfico representado nesta figura que as soluções típica e suavizada são bem semelhantes, desde que não há grandes saltos nos valores entre elementos. O resultado é satisfatório apesar do número de elementos.

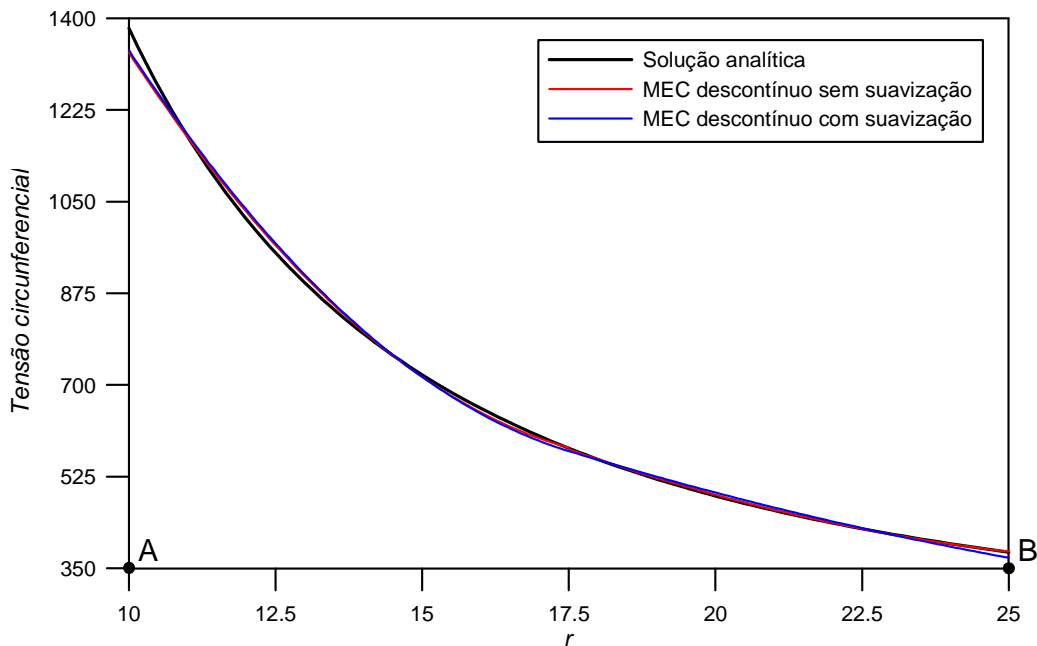


Figura 6.15 – Recuperação da tensão circunferencial na aresta AB.

Na figura 6.16 pode-se visualizar os diversos resultados para tensão radial na mesma aresta analisada anteriormente. Assim como no primeiro exemplo numérico deste capítulo, existem quatro soluções para a componente tangencial de tensão (coordenadas locais) neste exemplo.

Pode-se observar que a solução típica sem suavização apresenta concavidade contrária à solução analítica, afastando-se desta nos extremos do elemento. Esse problema é, em parte,

corrigido pela nova técnica de cálculo. Nota-se também, a partir da figura 6.15, que a solução que mais se aproxima da solução analítica é a solução recuperada a partir da proposta modificada de cálculo da componente tangencial de tensão.

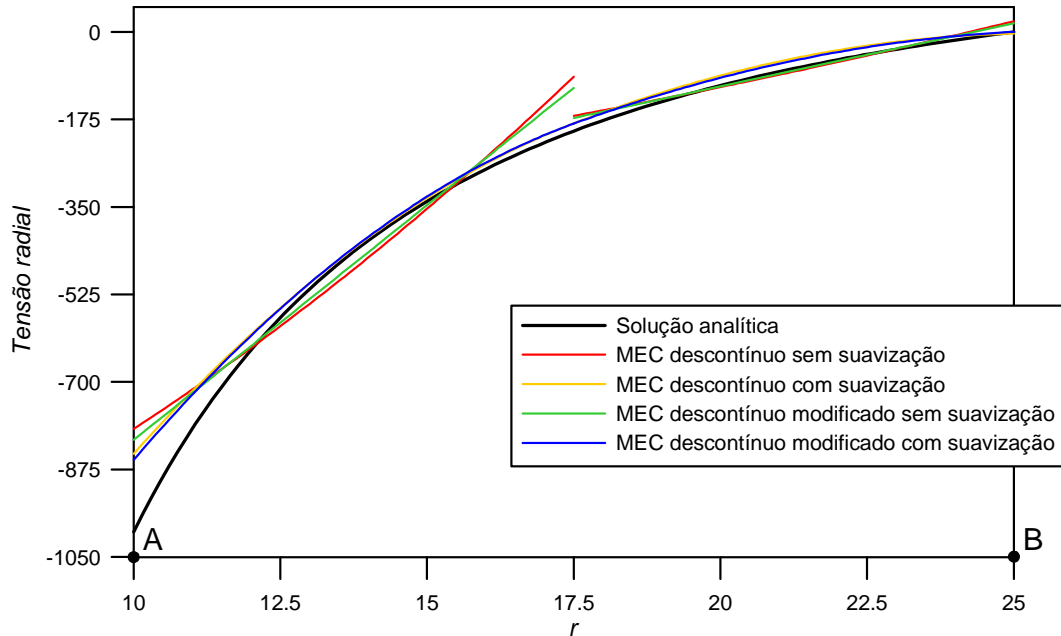


Figura 6.16 – Recuperação da tensão radial na aresta AB.

6.4. PLACA COM ENTALHE SOB TRAÇÃO UNIFORME – TESTE COM RECUO IGUAL A ZERO

Neste último exemplo realiza-se a verificação dos resultados sem suavização de uma análise com recuo igual a 0% (zero) comparados à solução pelo método de suavização de um modelo com recuo igual a 10%. A definição de recuo igual a zero no programa utilizado neste trabalho resulta em elementos descontínuos, porém com nós físicos não deslocados, ou seja, tem-se dois nós físicos na mesma posição.

O modelo em estudo é uma placa com entalhes semicirculares (*notched plate*). Dada a simetria do problema, somente um quarto da geometria é analisada, a qual pode ser vista na figura 6.17 junto às condições de contorno. O raio tem dimensão $R = 5$, enquanto a tração tem valor uniforme $P = 1$. Considerou-se o modelo em estado plano de tensões, e as propriedades materiais empregadas são módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Um modelo semelhante a este foi analisado por M. Guiggiani, 1990, em elementos de contorno, e o mesmo caso foi estudado em diversos trabalhos de elementos finitos por se tratar de um caso com concentrações de tensões próximas aos entalhes.

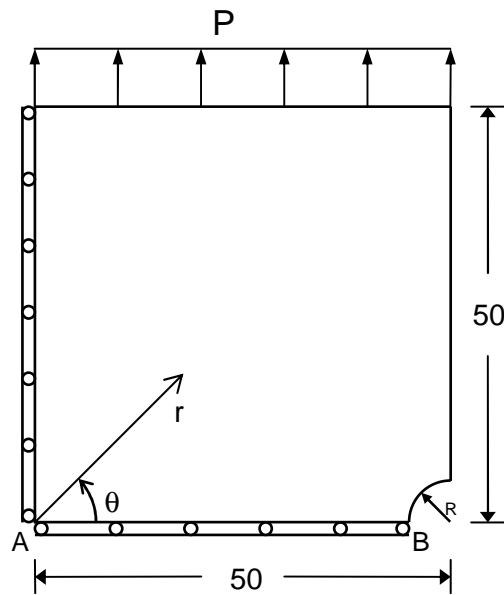


Figura 6.17 – Placa com entalhe semicircular sob tração.

Os resultados obtidos para a tensão normal circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}$) na aresta AB foram representados graficamente para comparação dos resultados. Foram realizadas cinco análises ao todo. As duas primeiras com 82 elementos lineares, sendo uma com recuo igual a zero, mais duas com 41 elementos quadráticos, também sendo uma com recuo igual a zero. A propósito de comparação, foi realizada a última análise com um modelo refinado, considerada como solução mais precisa, com um total de 160 elementos quadráticos, sendo 36 deles na aresta analisada.

Para as análises com elementos lineares, os resultados próximos ao canto B podem ser visualizados na figura 6.18. Nota-se a partir do gráfico representado nesta figura que as soluções com suavização (recuo = 10%) e sem suavização (recuo = 0%) estão muito próximas. Além disso, vê-se claramente que a solução recuperada se aproxima um pouco mais da solução com malha refinada no primeiro nó após o canto ($r = 42.5$).

Na figura 6.19 pode-se visualizar resultados para as análises com elementos quadráticos semelhantes aos anteriores. É possível notar a partir deste gráfico que as duas soluções numéricas apresentam resultados muito semelhantes, entretanto, pode-se dizer que o resultado recuperado é mais suave de um elemento pra outro.

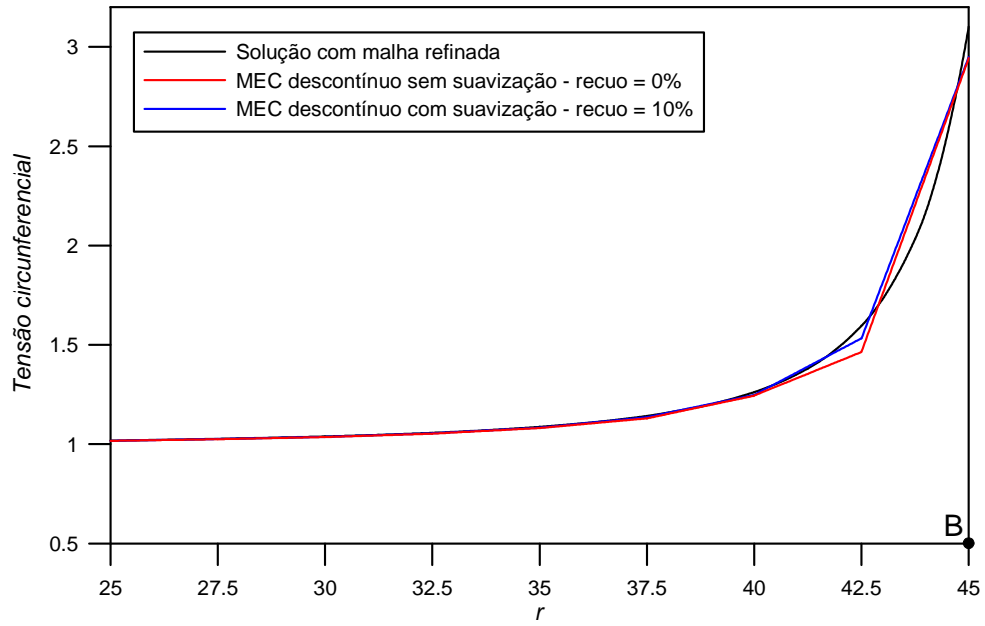


Figura 6.18 – Placa com entalhe, elementos lineares.

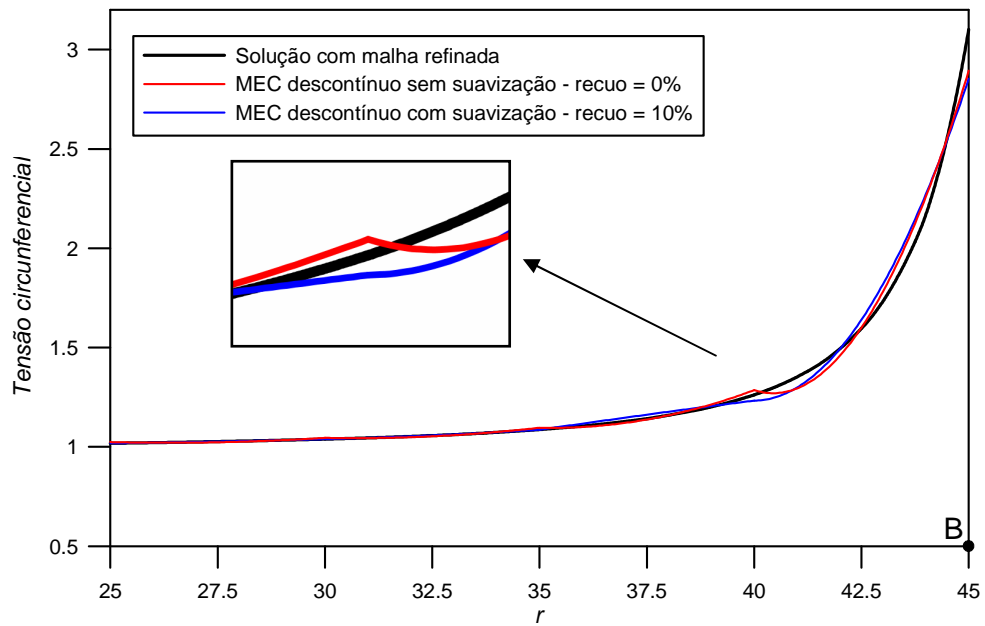


Figura 6.19 – Placa com entalhe, elementos quadráticos.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

Este trabalho possui dois objetivos maiores: o primeiro, e principal, consiste em desenvolver e implementar uma técnica de suavização de resultados em elementos de contorno descontínuos para problemas de elasticidade plana. O segundo objetivo consiste em desenvolver uma nova proposta de cálculo da componente tangencial de tensão para esses mesmos elementos. Os dois objetivos foram cumpridos.

A fim de alcançar esses objetivos, este trabalho expôs um estudo básico dos fundamentos teóricos que envolvem a mecânica dos sólidos, o método dos elementos de contorno e a recuperação de variáveis em métodos numéricos. Em paralelo a esse estudo, alterou-se a entrada de um programa básico de elementos de contorno para que este trabalhasse com os segmentos a serem recuperados. Com base nesse estudo e nessas modificações, desenvolveu-se e implementou-se as novas propostas de suavização/recuperação de resultados e cálculo da componente tangencial de tensão. Por fim, alguns testes utilizando modelos bidimensionais clássicos foram realizados para comprovar a eficiência e qualidade das novas propostas.

Por diversos motivos já descritos neste trabalho, a utilização de elementos de contorno descontínuos tem se tornado mais comum. Porém, a utilização destes elementos implica soluções não contínuas nas interfaces entre elementos seguidos nas quais os valores nestes pontos não está definido, a aparência visual da solução não é agradável, e o resultado, com um todo, tem caráter local. Desse modo, foi desenvolvido um método de recuperação dos valores da solução nos nós geométricos entre elemento, para elementos descontínuos lineares e quadráticos, obtendo-se uma solução suavizada. A proposta, apresentada no capítulo 4, se baseia em uma aproximação por mínimos quadrados, utilizando os valores nos nós físicos presentes nos elementos vizinhos ao nó geométrico a ser recuperado. Dessa forma, uma nova solução contínua e com a mesma ordem de interpolação original do elemento é obtida.

Nos diversos resultados apresentados no capítulo anterior obtiveram-se resultados satisfatórios, com valores mais precisos na interface entre elementos quando comparados às extrapolações das soluções descontínuas originais (ver tabela 6.1). Além disso, as soluções suavizadas convergem mais rapidamente para as soluções analíticas, como pode ser visto de forma explícita nas diversas recuperações da componente tangencial de tensão.

Os gráficos apresentados, principalmente nos exemplos das seções 6.1 e 6.4, mostram que a técnica proposta realiza a recuperação de forma eficiente para os dois tipos de elementos

descontínuos. Entretanto, é interessante ressaltar que, pelo fato do primeiro elemento ter interpolação linear e recuperar valores apenas nos seus extremos, pode haver perda da qualidade dos resultados no interior do elemento, ou seja, o valor interpolado pela solução típica de elementos descontínuos no MEC no interior do elemento (região central) pode ser mais preciso que o valor interpolado pelo resultado suavizado no mesmo local.

As diferentes malhas utilizadas nos exemplos numéricos das seções 6.1 e 6.2 indicam que os valores recuperados e que a solução suavizada se tornam mais precisos com o refino da malha. Nota-se também, que os novos resultados convergem para a solução analítica com mais rapidez, em relação à solução descontínua. Além disso, observa-se que os bons resultados obtidos com essa proposta são mais visíveis quando as soluções dos problemas possuem elevados gradientes e/ou a malha ainda é grosseira para representar uma determinada solução. Por essas características, prevê-se que o uso desta recuperação em procedimentos adaptativos pode ser de grande valia.

A componente tangencial de tensão, a qual é pós-processada a partir dos valores de força de superfície obtidos com o código básico de elementos de contorno, tem os seus valores recuperados, a partir da suavização, com êxito superior ao visto para as outras componentes de tensão, obtidas diretamente a partir das forças de superfície originais. Isso pode ser bem visualizado nos exemplos das seções 6.1 e 6.2, os quais apresentam diferentes condições de contorno nos locais onde esses valores são recuperados.

Outro aspecto interessante dessa proposta é o baixo número de equações a ser resolvido em cada seqüência de recuperação. Conseqüentemente o custo computacional da metodologia proposta é baixo. Também, o uso do sistema de coordenadas normalizado evita problemas de mal-condicionamento e faz com que a mesma matriz \mathbf{A} ocorra toda a vez que a razão entre os comprimentos dos dois elementos dentro de um *patch* for a mesma. Além disso, essa matriz é independente da variável a ser recuperada, sendo a mesma para qualquer deslocamento ou tensão.

A implementação da proposta de suavização é simples após algumas modificações que fazem com que o código básico de elementos de contorno trabalhe a partir de segmentos (linhas, arcos, círculos). Também, pode-se implementar a proposta sem alteração do código base, desde que faça-se um pós-processamento adequado dos resultados originais.

A dependência de outros fatores nos resultados obtidos com a proposta de suavização ainda deve ser mais estudada. A precisão dos resultados originais, que servem como amostras para a aproximação por mínimos quadrados, depende de alguns fatores como os métodos de integração das matrizes e pontos de integração. Além disso, a variação do recuo utilizado para

deslocar os nós físicos em elementos descontínuos altera a solução original do MEC e a localização dos pontos utilizados na aproximação. Por fim, uma alta variação no comprimento entre os dois elementos presentes em um mesmo *patch* pode alterar significativamente os resultados. Dessa forma, a influência de todos esses fatores deve ser estudada mais profundamente.

Em relação ao objetivo secundário, desenvolveu-se uma nova proposta de cálculo da componente tangencial de tensão para elementos descontínuos que se baseia em um uso diferente da lei de Hooke, a qual é normalmente utilizada para o cálculo dessa componente de tensão. Nessa nova proposta, a utilização de menos pontos na soma numérica de duas funções parece apresentar melhores resultados, desde que, esses novos pontos apresentem convergência maior que os pontos originais. Pela observação dos resultados obtidos nos exemplos, pode-se concluir que essa técnica apresentou melhores resultados comparados à técnica padrão.

O número de exemplos aqui apresentados ainda pode ser insuficiente para provar a efetividade dessa proposta. Entretanto, deve-se notar que os dois exemplos iniciais apresentam diferentes tipos de condições de contorno no segmento onde foram utilizadas as novas propostas. Por esse fato, que tem ligação direta no cálculo da componente tangencial de tensão, pelo bom resultado apresentado no exemplo da seção 6.1 e pela nova proposta obter resultado idêntico à maneira padrão de cálculo no exemplo da seção 6.2, prevê-se que a nova proposta pode obter resultados iguais ou superiores em diversos outros casos.

A maneira padrão de cálculo da componente tangencial de tensão apresenta funções com concavidade (sinal da derivada) invertida em relação às soluções analíticas nos exemplos das seções 6.1 e 6.2. Esse problema é, em parte, resolvido desde que as novas funções apresentam polinômios com um grau menor. A partir desse fato, as soluções recuperadas a partir das respostas obtidas com essa nova proposta são as melhores entre as quatro respostas presentes nos gráficos das figuras 6.5, 6.6, 6.9 e 6.10.

A implementação dessa nova proposta não altera o código básico de elementos de contorno, ou seja, as forças de superfície e deslocamentos são obtidos da mesma maneira, porém, uma pequena e fácil modificação é feita no pós-processamento dos resultados. Por fim, a alteração provocada no custo computacional total é desprezível quando comparada a outras etapas de processamento.

7.2 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

- Implementação de recursos que possibilitem a análise e recuperação de geometrias mais complexas, incluindo linhas poligonais, *splines* e NURBS. A utilização desses recursos diferenciados facilita a utilização das propostas aqui apresentadas em programas de otimização e programas que utilizem geometrias importadas;
- Estudar a variação do recuo e tamanho do elemento, assim como outros fatores que podem influenciar a qualidade dos resultados da técnica de suavização proposta. Sabe-se que a utilização de valores muito pequenos para o recuo dos nós físicos pode causar problemas numéricos de mal-condicionamento e cálculo de integrais singulares, assim como a utilização de valores muito altos diminui a qualidade dos resultados. Desse modo, deve-se buscar um valor ideal para esta variável de estudo;
- Formalização analítica ou numérica (com testes em várias posições) da relação entre pontos ótimos para cálculo de derivadas em polinômios (pontos de Barlow) e a proposta de cálculo de tensão tangencial apresentada;
- Capacitação do código para análise de problemas multidomínio e não-linearidades. O estudo de ferramentas capazes de resolver adequadamente problemas não-lineares e multidomínio dos tipos MEC-MEC e MEC-MEF é uma realidade. Logo, as propostas apresentadas neste trabalho devem ser inseridas neste contexto;
- Extensão das propostas apresentadas para outros elementos, como elementos de alta ordem utilizados em problemas com altos gradientes de tensão e técnicas adaptativas no MEC [Zhang e Zhang, 2004]. Além disso, a extensão para problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atkin, R. J. e Fox, N., “**Introduction to the Theory of Elasticity**”, Longman, 1^a ed., 1980.

Balaš, J., Sládek, J. e Sládek, V., “**Stress Analysis by Boundary Element Methods**”, Elsevier, 1989.

Barlow, J., “Optimal Stress Locations in Finite Element Models”, **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 10, pp. 243-251, 1976.

Boresi, A. P. e Chong, K. P., “**Elasticity in Engineering Mechanics**”, Elsevier, New York, 1987.

Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., “**Boundary Element Techniques**”, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

Brebbia, C.A. e Dominguez, J., “**Boundary Elements, An Introductory Course**”, McGraw-Hill, Boston Switzerland, 1992.

Dym, C.L. e Shames, I.H., “**Solid Mechanics , A VARIATIONAL APPROACH**”, McGraw-Hill, 1973.

Gago, J.P. de S.R., Kelly, D.W., Zienkiewicz, O.C., “A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II – Adaptive Mesh Refinement”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 19, pp. 1621-1656, 1983.

Guiggiani, M., “Error Indicators for Adaptive Mesh Refinement in the Boundary Element Method – A New Approach”, **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 29, pp. 1247-1269, 1990.

Guiggiani, M., “Hypersingular Formulation for Boundary Stress Evaluation”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13, pp. 169-179, 1994.

Hinton, E., Campbell, J.S., “Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method”, **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 8, pp. 461-480, 1971.

Mackerle, J., “Error Analysis, Adaptive Techniques and Finite and Boundary Elements – A Bibliography (1992 – 1993)”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 17, pp. 231-246, 1994.

Maple, “**User’s Guide version 9.5**”. The Maplesoft, Waterloo Maple Inc, 2004.

MATLAB, “**User’s Guide version 7**”, The MathWorks, Inc, 2004.

Stroud, A. H., Secrest, D., “**Gaussian Quadrature Formulas**”, Prentice-Hall, 1966.

Telles, J.C.F., “A Self-Adaptative Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Elements Integrals”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, pp. 959-973, 1987.

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., “**Teoria da Elasticidade**”, Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1980.

Zhang, Xiaosong, Zhang, Xiaoxian, “Coupling FEM and Discontinuous BEM for Elastostatics and Fluid–structure Interaction”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 26, pp. 719-725, 2002.

Zhang, Xiaosong, Zhang, Xiaoxian, “Exact Integration in the Boundary Element Method for Two-dimensional Elastostatic Problems”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 27, pp. 987-997, 2003.

Zhang, Xiaosong, Zhang, Xiaoxian, “Exact Integrations of Two-dimensional High-order Discontinuous Boundary Elements of Elastostatics Problems”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 28, pp. 725-732, 2004.

Zhao, Z.Y., “Interelement Stress Evaluation by Boundary Elements”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 39, pp. 2399-2415, 1996.

Zhao, Z.Y., Wang, X., “Error Estimation and h Adaptive Boundary Elements”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 23, pp. 793-803, 1999.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., “The Superconvergent Patch Recovery And *A Posteriori* Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique”, **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., “The Superconvergent Patch Recovery And *A Posteriori* Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity”, **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, vol. 33, pp. 1365-1382, 1992.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., “The Superconvergent Patch Recovery (SPR) And Adaptive Finite Element Refinement”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 101, pp. 207-224, 1992.

Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., Wu, J., “Superconvergent Patch Recovery Techniques – Some Further Tests”, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol. 9, pp. 251-258, 1993.

APÊNDICE A – [Soluções fundamentais de elasticidade bidimensional]

Soluções fundamentais são necessárias na formulação do MEC. Elas geralmente representam a solução de um corpo infinito carregado com uma força concentrada unitária. Estas soluções de forças de superfície e deslocamentos para problemas elásticos com as mesmas propriedades do material que o corpo em consideração são chamadas de soluções fundamentais de Kelvin. Aplicando uma carga unitária em um corpo infinito elástico e calculando os deslocamentos e forças de superfície resultantes desse carregamento, obtém-se estas soluções. As soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são [Brebbia et al, 1984]:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right]$$

para deslocamento e

$$p_{lk}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu) \delta_{lk} + 2r_{,k} r_{,l} \right) - (1-2\nu) (r_{,l} r_{,k} - r_{,k} r_{,l}) \right]$$

para força de superfície. Onde p_{lk}^* e u_{lk}^* representam as forças de superfície e deslocamentos na direção k devido a uma força unitária na direção l ; r é a distância entre o ponto fonte e o ponto calculado; ν é o coeficiente de Poisson e G é módulo de cisalhamento. A Figura A.1 ilustra o ponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) e o ponto que se obtêm os resultados de força de superfície e deslocamento (ponto campo) e seus respectivos eixos.

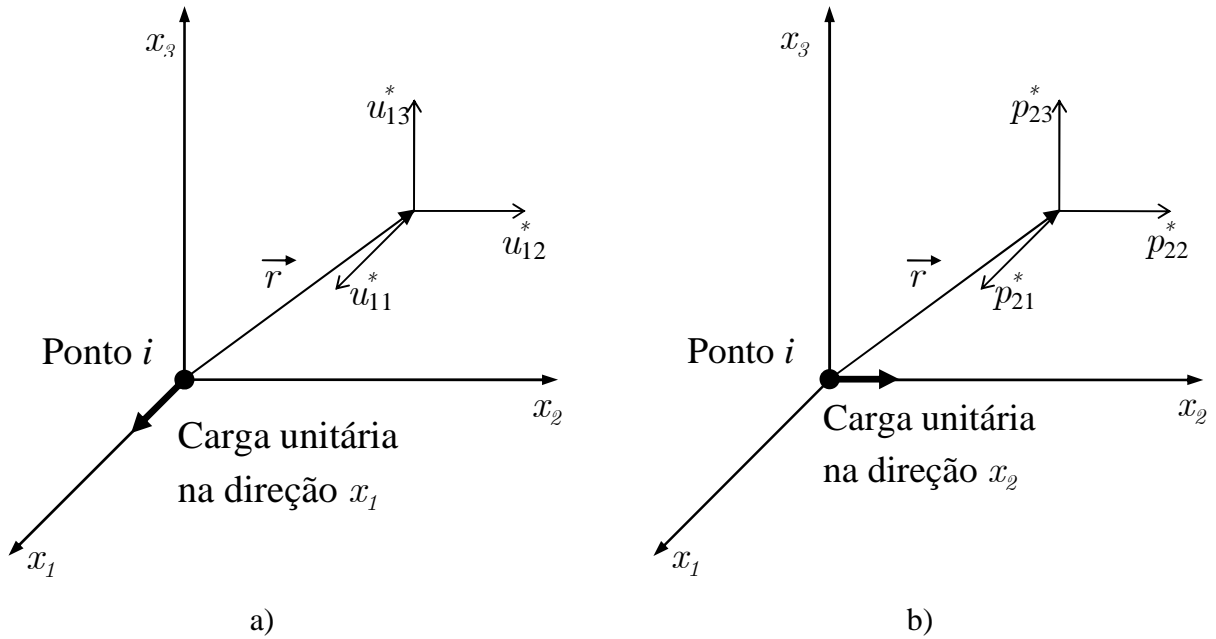


Figura A.1 - (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_1), (b) componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção x_2).