

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA
DETERMINAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA CÁLCULOS
NEUTRÔNICOS

por

Claudio Zen Petersen

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2008

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA
DETERMINAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA CÁLCULOS
NEUTRÔNICOS

por

Claudio Zen Petersen

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômeno de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros

Aprovada por:

Prof. Dr. Roberto David Martinez Garcia

Prof. Dr. Luis Paulo Luna de Oliveira

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona

Prof. Dr. Cynthia Feijó Segatto

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

PORTO ALEGRE, 29 DE JANEIRO DE 2008.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Carlos e Luiza, pelo total incentivo, apoio e confiança que depositaram em mim.

Agradeço aos professores Marco Tullio e Ricardo pelos inúmeros auxílios, sugestões e confiança que depositaram em mim.

Agradeço aos meus amigos de verdade, que estiveram presentes em vários momentos desta trajetória.

Agradeço a CNEN pelo suporte financeiro.

Agradeço a UFRGS, em especial ao PROMEC, pela possibilidade de cursar o mestrado de maneira gratuita e de qualidade.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos que de alguma forma auxiliaram-me, dá maneira mais simples a mais complexa, para conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, usamos a transformada de Laplace para desenvolver expressões para as condições de contorno tipo albedo para uma e duas regiões refletoras. Nós apresentamos a aplicação da condição de contorno tipo albedo de maneira não convencional. Na prática, os meios multiplicativos dos reatores nucleares são normalmente circundados por materiais refletoras, usados para reduzir a fuga de nêutrons. No intuito de retirar a região refletora dos cálculos, introduzimos um coeficiente de reflexão ou parâmetro albedo. Usamos este parâmetro para resolver numericamente a equação da difusão monoenergética e as equações da difusão multigrupo com dois grupos de energia, tanto com fonte fixa quanto com fonte de fissão, pelo método de diferenças finitas. Para os casos de fonte fixa, encontramos os fluxos de nêutrons sem albedo e comparamos com albedo para uma região e duas regiões e verificamos a precisão e a redução no tempo computacional. Já para os casos de fonte de fissão (problema de autovalor), encontramos, sem o parâmetro albedo, os fluxos de nêutrons, os fatores de multiplicação efetivos (K_{eff}), e a potência gerada por região. Comparamos os resultados com albedo para uma região e duas regiões e verificamos a precisão e redução no tempo computacional. A extensão para mais regiões torna-se possível seguindo os passos aqui utilizados, ainda que haja, em contrapartida, um esforço algébrico crescente com o aumento de regiões.

ABSTRACT

In this dissertation we use the Laplace transform to derive expressions for non-standard albedo boundary conditions for one and two non-multiplying regions at the ends of one-dimensional domains. In practice, the fuel regions of reactor cores are surrounded by reflector regions that reduce neutron leakage. In order to exclude the reflector regions from the calculations, we introduce a reflection coefficient or albedo. We use the present albedo boundary conditions to solve numerically slab-geometry monoenergetic and multigroup diffusion equations using the conventional finite difference method. Numerical results are generated for fixed source and eigenvalue diffusion problems in slab geometry.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	TEORIA DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS	4
2.1	A LEI DE FICK.....	4
2.2	MODELO MONOENERGÉTICO	6
2.2.1	FLUXO DE NÊUTRONS	6
2.2.2	A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA COM FONTE FIXA 8	
2.2.3	A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR).....	11
2.3	MODELO MULTIGRUPO DE ENERGIA.....	12
2.3.1	EQUAÇÃO MULTIGRUPO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS	13
2.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS DA DIFUSÃO	20
3	CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO.....	22
3.1	UMA REGIÃO REFLETORA.....	22
3.2	DUAS REGIÕES REFLETORAS	26
3.3	DESCRIÇÃO DO MÉTODO CLÁSSICO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO DE DIFUSÃO COM FONTE FIXA	31
3.3.1	VALORES DOS ALBEDOS α_{dir} e α_{esq}	37
3.4	DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)	39
3.4.1	VALORES DE α_{dir} e α_{esq}	43
3.5	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS MONOENERGÉTICOS.....	44
3.5.1	PROBLEMA MODELO Nº 1: FONTE FIXA	44
3.5.2	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O PROBLEMA MODELO Nº 2: FONTE DE FISSÃO 46	
4	CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA PROBLEMAS MULTIGRUPO 50	
4.1	UMA REGIÃO REFLETORA COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA.....	50
4.2	DUAS REGIÕES REFLETORAS COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA.....	56
4.3	DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MULTIGRUPO COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA COM FONTE FIXA.....	65

4.4	DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MULTIGRUPO COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)	68
4.4.1	VALORES DOS ALBEDOS.....	70
4.5	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA.....	71
4.5.1	PROBLEMA - MODELO Nº 3: FONTE FIXA.....	71
4.5.2	PROBLEMA-MODELO Nº 4: FONTE DE FISSÃO.....	74
5	CONCLUSÃO.....	79
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80

LISTA DE SÍMBOLOS

1. CARACTERES ROMANOS

A :	matriz simétrica tridiagonal.	
<i>d</i> :	distância extrapolada	[cm].
<i>D</i> :	coeficiente de difusão	[cm].
<i>D_g</i> :	coeficiente de difusão do grupo <i>g</i>	[cm].
<i>D_b</i> :	coeficiente de difusão na região do revestimento.	[cm].
<i>D_R</i> :	coeficiente de difusão na região refletora.	[cm].
<i>F</i> :	número de colisões de intensidade <i>I</i> de um nêutron que atinge um alvo	[cm ³ /seg].
F :	matriz diagonal.	
<i>h_i</i> :	largura da malha para a nodo <i>i</i> .	
<i>h_{i+1}</i> :	largura da malha para a nodo <i>i + 1</i> .	
<i>I</i> :	intensidade do feixe de nêutrons	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>J</i> :	densidade de corrente	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>Jⁱⁿ</i> :	densidade de corrente parcial total incidente.	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>J_b</i> :	densidade de corrente na região do revestimento	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>J_i</i> :	densidade de corrente para o nodo <i>i</i>	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>J_R</i> :	densidade de corrente na região refletora.	[Nêutrons/cm ² seg].
<i>k_{eff}</i> :	fator de multiplicidade efetivo.	
<i>k</i> :	inverso do comprimento de difusão de nêutrons	[<i>cm</i> ⁻¹].
<i>k_b</i> :	inverso do comprimento de difusão de nêutrons na região do revestimento	[<i>cm</i> ⁻¹].
<i>k_R</i> :	inverso do comprimento de difusão de nêutrons na região refletora	[<i>cm</i> ⁻¹].
M :	matriz simétrica tridiagonal.	

N :	densidade atômica.	$[cm^{-3}]$.
P_n :	potência nominal do reator	[MW].
S :	densidade da fonte de nêutrons	[Nêutrons/cm ³ seg].
S_{ext} :	densidade da fonte de nêutrons externa	[Nêutrons/cm ³ seg].
S_g :	densidade da fonte de nêutrons para o grupo g	[Nêutrons/cm ³ seg].
S_i :	densidade da fonte de nêutrons para o nodo i	[Nêutrons/cm ³ seg].
v :	velocidade do nêutron	[cm/s]

2. CARACTERES GREGOS

α_{dir} :	parâmetro albedo à direita do domínio multiplicativo.	
α_{esq} :	parâmetro albedo à esquerda do domínio multiplicativo.	
∇ :	operador matemático gradiente.	
∇^2 :	operador matemático laplaciano.	
λ_{tr} :	livre caminho médio do meio	[cm].
α_{dir} :	albedo para a região refletora à direita.	
ν :	número médio de nêutrons emitidos por fissão.	
σ_t :	seção de choque microscópica total	$[cm^2]$.
$\nu \Sigma_f$:	produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão	$[cm^{-1}]$.
$\nu \Sigma_{fg}$:	produto do número médio de nêutrons emitidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo g	$[cm^{-1}]$.
Σ_a :	seção de choque macroscópica de absorção	$[cm^{-1}]$.
Σ_{ai} :	seção de choque macroscópica de absorção para o nodo i	$[cm^{-1}]$.
Σ_{ag} :	seção de choque macroscópica de absorção do grupo g	$[cm^{-1}]$.
$\Sigma_{a,b}$:	seção de choque macroscópica de absorção na região do revestimento	$[cm^{-1}]$.

$\Sigma_{a,R}$:	seção de choque macroscópica de absorção na região refletora	$[cm^{-1}]$.
Σ_R :	seção de choque macroscópica de remoção	$[cm^{-1}]$.
Σ_{Rg} :	seção de choque macroscópica de remoção do grupo g	$[cm^{-1}]$.
Σ_s :	seção de choque macroscópica de espalhamento	$[cm^{-1}]$.
Σ_{sg} :	seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g	$[cm^{-1}]$.
$\Sigma_{sg'}$:	seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g	$[cm^{-1}]$.
Σ_t :	seção de choque macroscópica total	$[cm^{-1}]$.
Σ_{tg} :	seção de choque macroscópica total do grupo g	$[cm^{-1}]$.
Σ_{tr} :	seção de choque macroscópica de transporte	$[cm^{-1}]$.
μ_0 :	média do cosseno do ângulo de espalhamento.	
ϕ :	fluxo de nêutrons	$[Nêutrons/cm^2seg]$.
ϕ_b :	fluxo de nêutrons na região do revestimento	$[Nêutrons/cm^2seg]$.
ϕ_C :	fluxo de nêutrons na região multiplicativa	$[Nêutrons/cm^2seg]$.
ϕ_R :	fluxo de nêutrons na região refletora	$[Nêutrons/cm^2seg]$.
ϕ_i :	fluxo de nêutrons no nodo i	$[Nêutrons/cm^2seg]$.
χ_g :	espectro integrado de fissão do grupo g .	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Fluxo e corrente de nêutrons.	5
Figura 2.2: Feixes de nêutrons incidindo num alvo.	7
Figura 2.3: Volume de controle do balanço de nêutrons.	9
Figura 2.4: Esquema multigrupo de energia.	12
Figura 2.5: Variação de energia sem upscattering para um grupo de energia g	13
Figura 2.6: Caracterização dos grupos de energia para um reator térmico.	18
Figura 2.7: Distância extrapolada a partir da superfície.	20
Figura 3.1: Domínio unidimensional homogêneo com uma região refletora.	22
Figura 3.2: Domínio unidimensional homogêneo com duas regiões refletoras.	26
Figura 3.3: Domínio unidimensional homogêneo com fonte fixa de nêutrons e com duas regiões refletoras.	31
Figura 3.4: Grade de discretização espacial.	31
Figura 3.5: Duas malhas contíguas no interior do domínio.	32
Figura 3.6: Primeira malha em $x = 0$ cm.	34
Figura 3.7: Última malha em $x = X$	35
Figura 3.8. Domínio heterogêneo para o problema modelo Nº 1.	44
Figura 3.9: Fluxo de nêutrons para o problema modelo monoenergético com fonte fixa.	46
Figura 3.10: Fluxo Escalar de Nêutrons para o problema modelo monoenergético com fonte de fissão.	49
Figura 4.1: Domínio Heterogêneo para o problema com dois Grupos de Energia com fonte fixa, $l_b = 2,857$ cm e $l_r = 80$ cm.	71
Figura 4.2: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido ($g=1$) para o Problema-Modelo Nº 3.	73
Figura 4.3: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico ($g=2$) para o Problema-Modelo Nº 3.	74
Figura 4.4: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido ($g=1$).	77
Figura 4.5: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico ($g=2$).	78

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Fluxo de Nêutrons sem albedo e com albedo para 1 região	45
Tabela 2: Fluxo de nêutrons sem albedo e com albedo para 2 regiões.	45
Tabela 3: Tempo Computacional para o problema-modelo N° 1.....	45
Tabela 4: Fluxo escalar de nêutrons calculado sem albedo e com albedo para 1 região.....	47
Tabela 5: Fluxo escalar de nêutrons calculado sem albedo e com albedo para 2 regiões.	48
Tabela 6: Distribuição de Potência do Reator por Região e Fator de Multiplicação Efetivo (k_{eff}).	48
Tabela 7: Tempo Computacional para o problema-modelo N° 2.....	48
Tabela 8: Fluxo de Nêutrons gerado sem albedo e com albedo para 1 região para os dois Grupos de Energia.	72
Tabela 9: Fluxo de Nêutrons gerado sem albedo e com albedo para 2 regiões para os dois Grupos de Energia.	73
Tabela 10: Tempo Computacional para o problema-modelo N° 3.....	73
Tabela 11: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido de energia, sem albedo, com albedo para 1 região e com albedo para 2 Regiões.	76
Tabela 12: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico de energia, sem albedo, com albedo para 1 região e com albedo para 2 Regiões.	76
Tabela 13: Potência por Região e k_{eff}	76
Tabela 14: : Tempo Computacional para o problema-modelo N° 4.....	77

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, temos por objetivo aplicar a transformada de Laplace para determinar condições de contorno especiais através das quais é possível excluir as regiões não-multiplicativas nos extremos de um domínio, como por exemplo, o revestimento estrutural e o refletor, dos cálculos explícitos de um reator nuclear, introduzindo um coeficiente de reflexão ou parâmetro albedo.

Albedo é um termo de origem latina, significando “alvura”; foi usado pela primeira vez em Astronomia pelo cientista francês Lambert [Pannekoek, 1961] para estimativa do poder refletor difuso das superfícies dos planetas para a luz solar. Neste trabalho, estendemos o conceito de albedo para a situação da reflexão de nêutrons, de grande relevância em física de reatores nucleares térmicos, como os que temos no Estado do Rio de Janeiro: Angra 1, Angra 2 e, futuramente, Angra 3.

O uso de diferentes tipos de energia elétrica tem crescido nos últimos anos. Existe uma alta probabilidade de a energia nuclear ser o principal caminho escolhido pelas nações, visto que está em conformidade com as metas do Protocolo de Kyoto para emissão de dióxido de carbono (CO_2). A maior vantagem da energia gerada a partir da energia nuclear é a não emissão de (CO_2) para a atmosfera.

Em reatores nucleares térmicos de potência, há um balanço entre o número de nêutrons produzido pela fissão e o número perdido, seja por absorção, por espalhamento ou por fuga pelo contorno. Um dos problemas cruciais no projeto de um reator nuclear é o cálculo do tamanho e composição do sistema requerido para manter esse balanço. Cálculos de condições necessárias para a criticalidade são executados utilizando a teoria do transporte de nêutrons ou a teoria simplificada da difusão de nêutrons. A teoria da difusão e a teoria de transporte de nêutrons envolvem o cálculo global de reatores nucleares a partir de problemas de autovalor, que fornecem o fator de multiplicação efetivo K_{eff} , definido como o autovalor dominante, e a distribuição do fluxo de nêutrons, definido como a autofunção correspondente, durante o tempo de vida do núcleo. Assim, o problema de encontrar o fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons consiste em se resolver problemas de autovalor, usando-se a independência temporal nas equações dos modelos matemáticos da teoria de transporte e da teoria da difusão.

Como a fissão nuclear não ocorre em regiões não multiplicativas de um reator nuclear, como por exemplo, no moderador, no refletor e no revestimento estrutural, podemos aumentar a eficiência dos cálculos globais de reatores nucleares pela eliminação do cálculo numérico explícito no interior da região não-multiplicativa. Neste trabalho, nós desenvolveremos condições de contorno tipo albedo para duas regiões não multiplicativas, isto é, sistema revestimento-refletor em torno dos núcleos de reatores nucleares térmicos para um e dois grupos de energia, utilizando as formulações monoenergéticas e multigrupo da teoria da difusão de nêutrons.

Várias técnicas tem sido utilizadas para modelar a distribuição de nêutrons. A aproximação classicamente utilizada é a teoria da difusão multigrupo. Em razão da complexidade ou até da impossibilidade do tratamento analítico completo da equação da difusão utilizada para modelar a distribuição de nêutrons em reatores nucleares, métodos numéricos são desenvolvidos e aplicados à equação da difusão para uma dada geometria convexa. Esses métodos numéricos discretizam as variáveis espaciais e usam vários esquemas diretos e iterativos para resolver o sistema de equações algébricas resultante. Neste trabalho, utilizaremos o método de diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo.

No que diz respeito aos reatores nucleares, ao longo do tempo, vários métodos numéricos vêm sendo desenvolvidos, contribuindo com os seus refinamentos e sofisticação, para um bom controle da operação das unidades geradoras de potência nuclear. Dentro destes, podemos destacar os métodos nodais desenvolvidos por Barros e Larsen [1990]. Neste trabalho, desenvolvemos condições de contorno tipo albedo com o objetivo de reduzir o tempo computacional retirando a região não-multiplicativa dos cálculos da distribuição de nêutrons segundo o modelo de difusão, de maneira supostamente precisa e eficiente.

O modelo de difusão monoenergético considera que no interior do reator nuclear a distribuição de nêutrons tem uma energia fixa, com uma fonte fixa de nêutrons ou com uma fonte de fissão de nêutrons. Neste último caso, estamos diante de um problema de criticalidade, que consiste em encontrar o valor do K_{eff} . Claramente, é esperado que o valor do K_{eff} seja igual a unidade, para termos a produção e perda de nêutrons em equilíbrio. Neste caso, estamos diante de um reator em estado crítico. Se $K_{\text{eff}} < 1$, estamos diante de um reator subcrítico, onde a perda é superior à produção. Se $K_{\text{eff}} > 1$ estamos diante de um reator supercrítico; aqui a produção é maior que a perda de nêutrons. O modelo monoenergético de aproximação não é convencionalmente usado em cálculos globais realísticos. Porém, no que diz respeito à física e matemática, os cálculos podem ser entendidos com maior facilidade, o que torna o caso monoenergético mais simples para seu estudo.

No caso multigrupo, no mínimo dois grupos de energia devem ser utilizados, especialmente naqueles que envolvem o cálculo da criticalidade em reatores térmicos. O primeiro grupo é necessário para descrever os nêutrons rápidos. O segundo grupo inclui os nêutrons térmicos, que têm baixa energia, devido às colisões elásticas e inelásticas após emergirem da fissão. Aqui, também podemos ter o caso de uma fonte fixa de nêutrons localizada no interior do domínio. Estamos interessados, neste trabalho, em reatores térmicos que são reatores que utilizam como combustível a fissão nuclear dos átomos de U_{92}^{235} e utilizam como moderador a água em alta pressão. Por isso, são chamados de reatores do tipo PWR (Pressurized water reactor).

Em cálculos realísticos de reatores nucleares, muitas regiões não-uniformes são consideradas como, por exemplo, combustível, revestimento estrutural, moderador, resfriante, elementos de controle, etc., descartando assim métodos analíticos em favor de métodos numéricos para a resolução da equação da difusão. Espera-se desta solução precisão e celeridade, no sentido que as condições de contorno tipo albedo venham aperfeiçoar a eficiência do método numérico de diferenças finitas, eliminando as regiões não-multiplicativas dos cálculos. Tanto para o modelo de difusão monoenergética quanto para o modelo de difusão multigrupo são desenvolvidas expressões para o parâmetro albedo para uma e duas regiões refletoras. Este parâmetro é introduzido no método de diferenças finitas e comparado à eficiência de sua utilização.

A teoria da difusão de nêutrons tem uma importante contribuição na teoria de reatores, visto que permite calcular tanto a distribuição de nêutrons quanto a compreensão de muitos parâmetros nucleares. Assim, um estudo mais detalhado de sua teoria é algo imprescindível para o entendimento do comportamento dos processos físicos que governam um reator nuclear .

CAPÍTULO 2

2 TEORIA DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS

2.1 A LEI DE FICK

A teoria da difusão está fundamentada na lei de Fick, a qual foi originalmente usada para descrever a difusão química. É mostrado em química que se a concentração de um soluto é maior em uma determinada região de uma solução, o soluto sofre difusão da região de maior concentração para a de menor concentração. Além disso, a taxa do fluxo do soluto é proporcional ao gradiente da concentração do soluto em sentido oposto. Esta é a forma original da lei de Fick [Lamarsh, 1983].

O comportamento de nêutrons assemelha-se muito ao de um soluto em uma solução. [Lamarsh, 1983]. Então, se a densidade de nêutrons é maior em uma parte do reator do que em outra, existe um fluxo de nêutrons na direção de menor densidade de nêutrons. Por exemplo, supõe que o fluxo de nêutrons varia ao longo da direção x conforme a Fig. 2.1. Então a lei de Fick é escrita como

$$J_x = -D \frac{d\phi}{dx} \quad (2.1)$$

Nesta expressão, J_x é igual ao número líquido de nêutrons que passa por unidade de tempo através de uma área unitária perpendicular ao eixo x , e tem a mesma unidade do fluxo ϕ , [nêutrons/cm²seg]. O parâmetro D é chamado de coeficiente de difusão e é definido como

$$D = (3\Sigma_{tr})^{-1} = \left[3 \left(\Sigma_t - \bar{\mu}_0 \Sigma_s \right) \right]^{-1} \quad (2.2)$$

onde Σ_{tr} é a seção de choque macroscópica de transporte, Σ_t é a seção de choque macroscópica total, Σ_s é a seção de choque macroscópica de espalhamento e $\bar{\mu}_0$ é a média do cosseno do ângulo de espalhamento.

A Eq. (2.1) mostra que se existe um gradiente negativo na direção de x , há um fluxo de nêutrons no sentido de x positivo conforme mostra a Fig. 2.1. Considerando que os nêutrons

passam através do plano no ponto $x = 0$, esses nêutrons passam através do plano da esquerda para a direita como resultado de colisões no lado esquerdo do plano. Analogamente esses nêutrons passam através do plano da direita para a esquerda como resultado de colisões no lado direito do plano. Entretanto, como o fluxo é muito maior para valores negativos de x , concluímos que há mais colisões por $\text{cm}^3 \cdot \text{seg}$ no lado esquerdo do que no lado direito. Mais nêutrons são por isso espalhados da esquerda para a direita, e como resultado há um fluxo de nêutrons no sentido positivo de x . É importante ressaltar que os nêutrons não escoam simplesmente da região de maior concentração para a de menor concentração, há simplesmente um maior espalhamento numa direção do que em outra [Lamarsh, 1983].

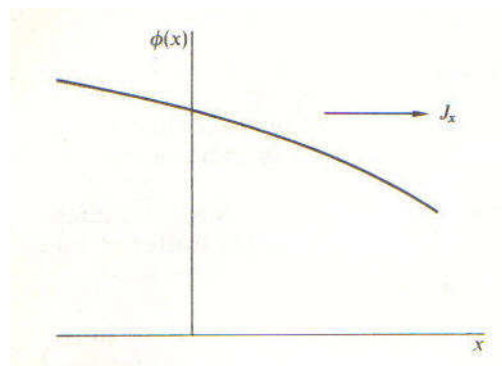


Figura 2.1: Fluxo e corrente de nêutrons.

O fluxo é geralmente função das três variáveis espaciais, e neste caso, pela lei de Fick tem-se

$$\mathbf{J} = -D \text{grad} \phi = -D \nabla \phi \quad . \quad (2.3)$$

Aqui, \mathbf{J} é conhecido como o vetor densidade de corrente de nêutrons, e ∇ é o operador matemático gradiente.

2.2 MODELO MONOENERGÉTICO

Neste modelo é assumido que todos os nêutrons podem ser caracterizados por uma única energia cinética, simplificando assim o estudo matemático do fenômeno da difusão. Não se esperam neste modelo resultados muito precisos, mas este modelo de difusão pode ser utilizado para uma análise preliminar dos cálculos globais de reatores nucleares, por exemplo.

2.2.1 FLUXO DE NÊUTRONS

Quando um feixe de nêutrons de intensidade I atinge um alvo, o número de colisões por $\text{cm}^3 \cdot \text{seg}$ é obtido por

$$F = \sum_t I \quad (2.4)$$

onde \sum_t é a seção de choque macroscópica total. O termo macroscópica surge do fato que \sum_t está relacionado com a probabilidade de colisão de um nêutron com os núcleos dos átomos constituintes de uma certa região macroscópica de um determinado material [Zweifel, 1978]. Entretanto, a seção de choque microscópica está relacionada com a probabilidade de interação de um nêutron com um determinado núcleo do átomo constituinte de um material [Lamarsh, 1983]. Definindo \sum_t por

$$\sum_t \equiv N\sigma_t \quad (2.5)$$

Aqui N é a densidade atômica e tem unidade $[\text{cm}^{-3}]$ e σ_t é a seção de choque microscópica total e tem unidade de $[\text{cm}^2]$, logo \sum_t tem unidade de $[\text{cm}^{-1}]$.

Seja um experimento do tipo mostrado na Fig. 2.2, na qual um pequeno alvo é atingido simultaneamente por alguns feixes de nêutrons. A intensidade dos feixes são diferentes, mas será assumido que os nêutrons para todos os feixes têm a mesma energia. Isto mostra o fato que a interação de nêutrons com o núcleo é independente do ângulo na qual os nêutrons colidem com o núcleo atômico [Lamarsh, 1983]. A interação total é claramente

$$F = \sum_t (I_A + I_B + I_C + \dots) \quad (2.6)$$

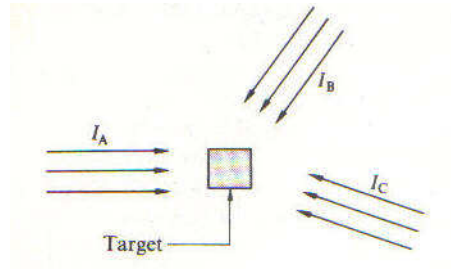


Figura 2.2: Feixes de nêutrons incidindo num alvo.

Target = alvo.

Assumindo que os nêutrons são monoenergéticos, e então podem ser escritos como

$$F = \sum_i (n_A + n_B + n_C + \dots) v \quad (2.7)$$

aqui, n_A, n_B , etc. são as densidades dos nêutrons dos vários feixes e v é a velocidade do nêutron.

Assim, $n_A + n_B + n_C + \dots$ é igual a n , a densidade total de nêutrons atingindo o alvo. Logo a Eq.

(2.7) torna-se

$$F = \sum_i n v \quad (2.8)$$

A quantidade $n v$ na Eq. (2.8) é definida como fluxo escalar de nêutrons. Neste caso, para nêutrons monoenergéticos, é dada pelo símbolo ϕ , então

$$\phi = n v \quad (2.9)$$

A unidade do fluxo de nêutrons é [nêutrons/cm²seg]. Em termos do fluxo, a densidade de colisão aparece como

$$F = \sum_i \phi \quad (2.10)$$

Estendendo estes resultados, para que se inclua os nêutrons rápidos e térmicos, defini-se $n(E)$ como a densidade de nêutrons por unidade de energia, $n(E)dE$ é o número de nêutrons por cm³ com energia entre E e $E + dE$. Da Eq. (2.8), a taxa de interação para estes nêutrons é

$$dF = \Sigma_t(E)n(E)dE v(E) \quad (2.11)$$

onde a dependência de energia de todos os parâmetros é explicitamente notada. A taxa de interação total é obtida pela integral

$$F = \int_0^{\infty} \Sigma_t(E)n(E)v(E)dE = \int_0^{\infty} \Sigma_t(E)\phi(E)dE \quad (2.12)$$

onde

$$\phi(E) = n(E)v(E) \quad (2.13)$$

que é chamado de fluxo escalar dependente de energia ou fluxo por unidade de energia. O limite de integração nas integrais na Eq. (2.12) são escritos de 0 a ∞ para indicar que a integração carrega a energia de todos os nêutrons [Lamarsh, 1983].

A Eq. (2.12) refere-se à taxa de interação total. Em particular pode-se encontrar expressões similares para o número de colisões de espalhamento por cm^3/seg , isto é,

$$F_s = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E)\phi(E)dE \quad (2.14)$$

e para o número de nêutrons absorvidos por cm^3/seg

$$F_a = \int_0^{\infty} \Sigma_a(E)\phi(E)dE \quad (2.15)$$

2.2.2 A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA COM FONTE FIXA

Considere um volume arbitrário V de área de superfície S localizado no interior de um meio material onde existe uma fonte fixa de nêutrons, conforme Fig. 2.3. Examina-se esse volume de controle cuidadosamente para modelar matematicamente como a população de

nêutrons varia no interior desse volume. O número total de nêutrons em V no tempo t pode ser obtido pela integração do volume, representado como

$$\int_V d^3r N(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.16)$$

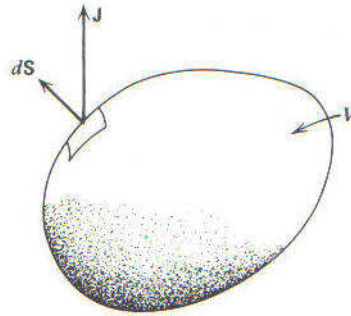


Figura 2.3: Volume de controle do balanço de nêutrons.

Portanto a taxa de mudança do número de nêutrons em V deve ser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_V d^3r N(\mathbf{r}, t) \right] &= \int_V d^3r \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \text{Produção em } V - \text{Absorção em } V \\ &\quad - \text{Taxa de fuga pelo contorno do volume } V \end{aligned} \quad . \quad (2.17)$$

Para modelagem matemática, precisa-se escrever expressões matemáticas para obter todos esses termos. Definindo-se uma densidade de fonte fixa de nêutrons $S(\mathbf{r}, t)$, então

$$\mathbf{Produção} = \int_V d^3r S(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.18)$$

A taxa da densidade de absorção em algum ponto em V é $\Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t)$, a taxa total de nêutrons perdidos por absorção em V é

$$\mathbf{Absorção} = \int_V d^3r \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.19)$$

Se $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de corrente de nêutrons, então a taxa de nêutrons que passam através de um elemento de superfície $d\mathbf{S}$ no ponto \mathbf{r}_s é $\mathbf{J}(\mathbf{r}_s, t) \cdot d\mathbf{S}$. Portanto, a taxa total de fuga ou escape pela superfície de contorno do volume V é

$$\mathbf{Fuga} = \int_S d\mathbf{S} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.20)$$

Antes de se substituir todas essas expressões em (2.17) é conveniente converter a Eq. (2.20) em integral de volume. Para isto se utiliza o Teorema de Gauss para escrever

$$\mathbf{Fuga} = \int_S d\mathbf{S} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.21)$$

Substituindo-se as equações (2.18), (2.19) e (2.21) na Eq. (2.17), encontra-se

$$\int_V d^3r \left[\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - S + \Sigma_a \phi + \nabla \cdot \mathbf{J} \right] = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Isto implica que o integrando é nulo, já que o volume de controle V é arbitrário, logo se escreve

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} - \Sigma_a \phi + S \quad . \quad (2.23)$$

Substituindo a lei de Fick na Eq. (2.23) chega-se a

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (2.24)$$

que é a equação da difusão monoenergética de nêutrons com fonte fixa. Considerando-se o meio material onde ocorre a difusão dos nêutrons como homogêneo e uniforme, tem-se que D e Σ_a não dependem da posição. Assim a equação da difusão monoenergética com fonte fixa pode ser simplificada como

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial t} - D \nabla^2 \phi + \sum_a \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad . \quad (2.25)$$

Aqui ∇^2 é o operador matemático Laplaciano.

Modelando-se em um processo difusivo estacionário a Eq. (2.25) torna-se

$$-D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + \sum_a \phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \quad . \quad (2.26)$$

2.2.3 A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)

Os núcleos emitem, num processo de fissão, um número médio de ν nêutrons por fissão nuclear. Destes ν nêutrons, alguns são absorvidos no meio material não combustível do reator, alguns são absorvidos por captura no próprio combustível e alguns escapam pelo contorno do reator. Todos esses processos são assumidos neste modelo que ocorrem com uma única energia [Duderstadt e Hamilton 1970]. Depois de todas essas perdas serem contabilizadas, ainda deve existir um nêutron para causar uma nova fissão; caso contrário não será possível manter uma reação em cadeia sustentável [Zweifel, 1978]. Deseja-se manter a distribuição de nêutrons em um reator na ausência de fontes externas, mas devido a uma fonte de fissão [Zweifel, 1978]. Esta fonte é dada pelo produto da taxa de fissão $\sum_f \phi(\mathbf{r})$ pelo número de nêutrons emitidos por fissão, então se pode escrever o termo fonte como

$$S(\mathbf{r}) = \text{Fonte de fissão} = \nu_c \sum_f \phi(\mathbf{r}) \quad . \quad (2.27)$$

Aqui \sum_f é a seção de choque macroscópica de fissão e ν_c é o número médio de nêutrons que devem ser liberados por fissão para garantir o balanço de partículas. Substituindo a expressão (2.27) no termo fonte da Eq. (2.26) fica-se com

$$-D \nabla^2 \phi + \sum_a \phi(\mathbf{r}) = \nu_c \sum_f (\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad . \quad (2.28)$$

Este problema escrito em função do fator de multiplicação efetivo k_{eff} é um problema de autovalor que aparece como

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) = \frac{\nu}{k_{eff}} \Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

onde

$$k_{eff} = \frac{\nu}{\nu_c} \quad (2.30)$$

Se $\nu_c = \nu$ o reator está em estado crítico e $k_{eff} = 1$, se $\nu_c < \nu$ o reator é dito supercrítico e $k_{eff} > 1$, se $\nu_c > \nu$ o reator é dito subcrítico e $k_{eff} < 1$.

2.3 MODELO MULTIGRUPO DE ENERGIA

A principal limitação do modelo monoenergético é assumir que todos os nêutrons possuem a mesma energia cinética, por isso este modelo simplificado também recebe a denominação de modelo a uma velocidade. Os nêutrons em um reator possuem energias que variam de 10Mev para menos do que 0,01eV; portanto há aproximadamente umas nove ordens de magnitude de variação na gama de energia dos nêutrons [Duderstadt e Hamilton 1976]. Assim, para cálculos globais em física de reatores nós precisamos de um tratamento mais realístico da dependência da energia. O modelo multigrupo de energia engloba a dependência de energia do nêutron no modelo matemático utilizado, no nosso caso o modelo de difusão. Discretizando a energia em G grupos de energia, como ilustra a Fig. 2.4.

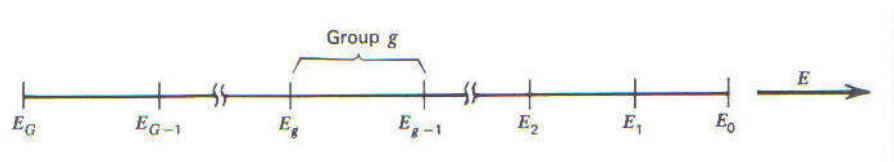


Figura 2.4: Esquema multigrupo de energia.

Group g = grupo g.

Na figura os índices estão ordenados de forma decrescente, pois correspondem fisicamente ao fato que usualmente os nêutrons perdem energia no processo migratório. Para se

escrever as equações para o fluxo escalar $\phi_g(\mathbf{r}, t)$, toma-se um conjunto de equações da difusão para descrever os nêutrons em cada grupo de energia. As equações são acopladas pelo fluxo de nêutrons dos grupos anteriores, pois utiliza-se a hipótese nesta dissertação que não há espalhamento para grupos de maior energia (upscattering).

2.3.1 EQUAÇÃO MULTIGRUPO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS

Aplicando o conceito de balanço de nêutrons para um dado grupo de energia, na qual nêutrons podem entrar ou sair deste grupo temos uma maneira de chegar às equações multigrupo. Considere um típico grupo de energia g , conforme Fig. 2.5.

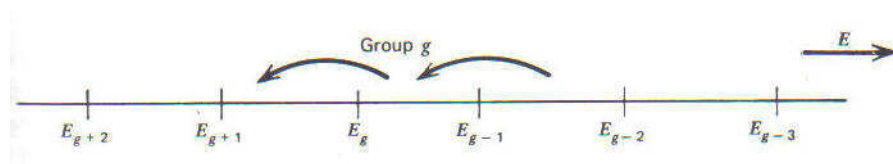


Figura 2.5: Variação de energia sem upscattering para um grupo de energia g .
Group g = grupo g

Portanto, fica-se com o seguinte balanço

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de variação do} \\ \text{fluxo de nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{l} \text{Perda devido à} \\ \text{fuga} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Perda devido à} \\ \text{absorção no grupo } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Fonte de} \\ \text{nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para fora do} \\ \text{grupo } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para dentro do} \\ \text{grupo } g \end{array} \right]. \quad (2.31)$$

Devido à colisão de espalhamento, a energia do nêutron pode mudar e, portanto, ou ele é removido do grupo g , ou espalhado dentro do mesmo grupo de energia g . A probabilidade de um nêutron sofrer espalhamento de um grupo g' para um grupo g está relacionada com a seção de choque macroscópica de espalhamento Σ_{sg} [Duderstadt e Hamilton 1976]. Portanto a seção de choque macroscópica de espalhamento no grupo g é dada por

$$\Sigma_{sg} = \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{sgg'} \quad . \quad (2.32)$$

Definindo-se a seção de choque macroscópica de absorção do grupo g como Σ_{ag} e o termo de fonte de nêutrons no grupo g como S_g [Duderstadt e Hamilton 1976]. Ademais, defini-se o coeficiente de difusão do grupo g como D_g . Combinando-se estas definições, analogamente como se fez para o caso a uma velocidade, encontra-se uma representação matemática para a relação de balanço (2.31) para o grupo g

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g - \Sigma_{ag} \phi_g + S_g - \Sigma_{sg} \phi_g + \sum_{g' \neq g}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} \quad , \quad g = 1, 2, \dots, G \quad . \quad (2.33)$$

Pode-se separar o termo fonte em dois: um devido às fissões e outro devido a uma fonte externa, então se escreve

$$S_g = \chi_g \sum_{g' \neq g}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g^{ext} \quad (2.34)$$

onde χ_g é a probabilidade que um nêutron gerado em uma fissão esteja com energia no grupo g , enquanto Σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g e ν_g é o número médio de nêutrons produzidos por fissão ocorrida no grupo g [Duderstadt e Hamilton 1976].

Sabendo que cada grupo de energia possui uma energia $E_g < E < E_{g-1}$, portanto o modelo matemático pode ser descrito pela equação da difusão dependente de energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla D \nabla \phi + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, E, t) &= \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ &+ \chi(E) \int_0^{\infty} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad . \quad (2.35) \\ &+ S_{ext}(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned}$$

Para eliminar a variável energia, integra-se a Eq. (2.35) no intervalo de energia $E_g < E < E_{g-1}$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi - \nabla \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D \nabla \phi + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t \phi \\ = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S(R, E, t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Primeiro defini-se o fluxo de nêutrons no grupo g como

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.37)$$

Definindo a seção de choque macroscópica total para o grupo g como

$$\Sigma_{tg} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.38)$$

o coeficiente de difusão para o grupo g como

$$D_g \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t)} \quad (2.39)$$

e a velocidade do nêutron referente ao grupo g como

$$\frac{1}{v_g} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.40)$$

Para o termo de espalhamento reescreve-se a integral como

$$\begin{aligned}
& \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\
& = \sum_{g=1}^G \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

então se define a seção de choque de espalhamento do grupo g para o grupo g como

$$\Sigma_{sg} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \tag{2.42}$$

Um procedimento similar segue para o termo de fonte de fissão, que pode ser reescrito como

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S_f(\mathbf{r}, E, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \left[\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \right] \tag{2.43}$$

Assim, defini-se o produto do número médio de nêutrons que causam fissão no grupo g pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo g por

$$\nu_g \Sigma_{fg} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \tag{2.44}$$

Além disso, defini-se

$$\chi_g \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \tag{2.45}$$

Substituindo-se estas definições formais na Eq. (2.36), chega-se às equações da difusão multigrupo

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{tg} \phi_g(\mathbf{r}, t) = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_g \quad (2.46)$$

, $g = 1, 2, \dots, G$

Nota-se que se um nêutron com energia incidente E tem energia muito maior que a energia de um nêutron térmico (tipicamente de 0.1 eV), sua energia não aumentará ao sofrer uma colisão de espalhamento. Portanto, para esses nêutrons rápidos pode-se considerar que

$$\Sigma_{sg'g} = 0 \quad , \quad \text{para} \quad g' \gg g \quad . \quad (2.47)$$

Simplificando o termo de espalhamento fica-se com

$$\sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \Sigma_{sgg} \phi_g \quad . \quad (2.48)$$

Aqui Σ_{sgg} caracteriza a probabilidade que um nêutron pode sofrer uma colisão de espalhamento e perder uma quantidade pequena de energia tal que ainda permaneça no mesmo grupo [Duderstadt e Hamilton, 1976]. É habitual transferir este termo para o lado esquerdo na equação da difusão multigrupo e definir a seção de choque macroscópica de remoção como

$$\Sigma_{Rg} \equiv \Sigma_{tg} - \Sigma_{sgg} \quad (2.49)$$

a qual está relacionado com a probabilidade que um nêutron seja removido do grupo g por uma colisão. [Duderstadt e Hamilton 1976].

2.3.1.1 EQUAÇÃO MULTIGRUPO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS COM FONTE FIXA

Aqui se assume que o fluxo de nêutrons independe do tempo, substituindo as expressões (2.48) e (2.49) em (2.46) e negligenciando os termos de fissão, chega-se às equações

$$-\nabla D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{Rg} \phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + S_g \quad , \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (2.50)$$

que são as equações multigrupo de energia da difusão de nêutrons com fonte fixa.

2.3.1.2 EQUAÇÃO MULTIGRUPO DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)

Ignorando a dependência do tempo e a presença de fonte externa, chega-se ao problema de autovalor para as equações multigrupo da difusão

$$-\nabla D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{Rg} \phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'} \phi_{g'} + \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} \quad , \quad g = 1, 2, \dots, G \quad . \quad (2.51)$$

2.3.1.3 EQUAÇÕES DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS A DOIS GRUPOS DE ENERGIA (PROBLEMA DE AUTOVALOR)

Em cálculos globais de reatores nucleares térmicos, é convencional usar apenas dois grupos de energia. Este é o caso dos reatores tipo PWR, que são reatores térmicos a água pressurizada [Duderdt e Hamilton, 1976]. São os utilizados em Angra 1, Angra 2 e, futuramente, Angra 3, no Estado do Rio de Janeiro. A estrutura dos grupos pode ser vista conforme a Fig. 2.6 abaixo

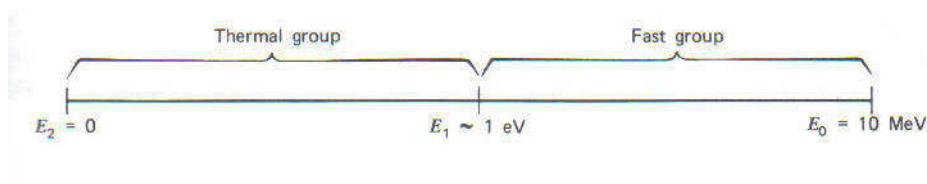


Figura 2.6: Caracterização dos grupos de energia para um reator térmico.

Thermal group = grupo térmico

Fast group = grupo rápido

Fica claro que o upscattering fora do grupo térmico pode ser ignorado, devido à alta diferença de energia para o grupo rápido. Então se pode identificar

$$\phi_1(r, t) = \int_{E_1}^{E_0} dE \phi(r, E, t) \equiv \text{fluxo rápido} \quad (2.52)$$

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) = \int_{E_2}^{E_1} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \text{fluxo térmico} \quad . \quad (2.53)$$

Pode-se simplificar o grupo de constantes para este modelo. Considera-se primeiramente a fissão, que ocorre essencialmente no grupo térmico, gerando nêutrons do grupo rápido. Portanto, pode-se escrever

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} dE \chi(E) = 1 \quad , \quad \chi_2 = \int_{E_2}^{E_1} dE \chi(E) = 0 \quad . \quad (2.54)$$

Assim, a fonte de fissão apenas aparecerá na equação do grupo rápido

$$S_{f_1} = \nu_1 \sum_{f_1} \phi_1 + \nu_2 \sum_{f_2} \phi_2 \quad (\text{rápido}) \quad (2.55)$$

$$S_{f_2} = 0 \quad (\text{térmico}) \quad . \quad (2.56)$$

Não há upscattering para fora do grupo térmico, então a seção de choque macroscópica de espalhamento torna-se

$$\int_{E_2=0}^{E_1-1eV} dE \Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') \quad , \quad E_2 \leq E' \leq E_1 \quad . \quad (2.57)$$

Portanto, encontra-se que

$$\Sigma_{s_{22}} = \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') = \frac{1}{\phi_2} \int_{E_2}^{E_1} dE' \Sigma_s(E') \phi(\mathbf{r}, E') = \Sigma_{s_2} \quad . \quad (2.58)$$

A seção de choque de remoção para o grupo térmico é escrita como

$$\Sigma_{R_2} = \Sigma_{t_2} - \Sigma_{s_{22}} = \Sigma_{t_2} - \Sigma_{s_2} = \Sigma_{d_2} \quad . \quad (2.59)$$

Considerando a teoria da difusão a dois grupos de energia para o cálculo da criticalidade, ou seja, na ausência de fonte externa, fica-se com as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 -\nabla D_1 \nabla \phi_1 + \sum_{R_1} \phi_1 &= \frac{1}{k_{eff}} \left(\nu_1 \sum_{f_1} \phi_1 + \nu_2 \sum_{f_2} \phi_2 \right) \\
 -\nabla D_2 \nabla \phi_2 + \sum_{a_2} \phi_2 &= \sum_{s_{12}} \phi_1
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

2.3.1.4 EQUAÇÕES DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS A DOIS GRUPOS DE ENERGIA COM FONTE FIXA

É um caso particular da Eq. 2.50, fazendo $g=1$ e $g=2$ fica-se com a equação da difusão de nêutrons a dois grupos de energia com fonte fixa

$$\begin{aligned}
 -\nabla D_1 \nabla \phi_1 + \sum_{R_1} \phi_1 &= S_1 \quad , \\
 -\nabla D_2 \nabla \phi_2 + \sum_{a_2} \phi_2 &= \sum_{s_{12}} \phi_1 + S_2
 \end{aligned}
 \tag{2.61}$$

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO CLÁSSICAS DA DIFUSÃO

O fluxo de nêutrons pode ser encontrado pela solução da equação da difusão. Por isso, para resolvê-la é preciso especificar condições de contorno à qual a solução deve satisfazer. Algumas delas são determinadas pelo próprio significado físico do fluxo, ou seja, o fluxo não pode ser negativo nem imaginário, deve ser uma função real não-negativa [Lamarsh, 1983].

Em cálculos globais de reatores nucleares, em geral o fluxo calculado pela equação da difusão é assumido desaparecer em uma pequena distância a partir do contorno. Por isso, o fluxo determinado pela equação da difusão é próximo ao valor do fluxo exato no interior do meio material. Isto está ilustrado na Fig 2.7.

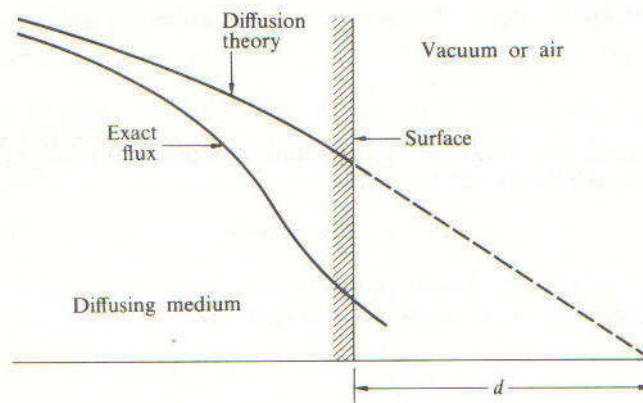


Figura 2.7: Distância extrapolada a partir da superfície.

O parâmetro d é conhecido como distância extrapolada, e é dado pela seguinte fórmula

$$d = 0,71\lambda_{tr} \quad (2.62)$$

onde λ_{tr} é o livre caminho médio do meio, dado por

$$\lambda_{tr} = 3D \quad (2.63)$$

logo

$$d = 2,13D \quad (2.64)$$

Aqui D é o coeficiente de difusão e vale em muitos casos menos que 1 cm [Lamarsh, 1983]. Nota-se que d é pequeno comparado as dimensões de um reator. Por isso, quando resolve-se a equação da difusão, assumi-se que o fluxo desaparece no contorno do sistema.

É necessário também especificar condições de contorno na interface entre dois meios diferentes no interior do núcleo de um reator, tais como a interface entre o núcleo e o refletor. O fluxo e a corrente de nêutrons devem ser contínuos através do contorno, por isso na interface entre duas regiões contíguas A e B a seguinte relação deve ser satisfeita

$$\begin{aligned} \phi_A &= \phi_B \\ (J_A)_n &= (J_B)_n \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde ϕ_A e ϕ_B são, respectivamente, o fluxo na região A e B avaliados na interface, e $(J_A)_n = (J_B)_n$ são as componentes normais da corrente de nêutrons avaliadas na interface. As Eqs. (2.65) são conhecidas como condições de continuidade na interface.

CAPÍTULO 3

3 CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO

3.1 UMA REGIÃO REFLETORA

Considere um domínio unidimensional conforme ilustrado na Fig. 3.1.

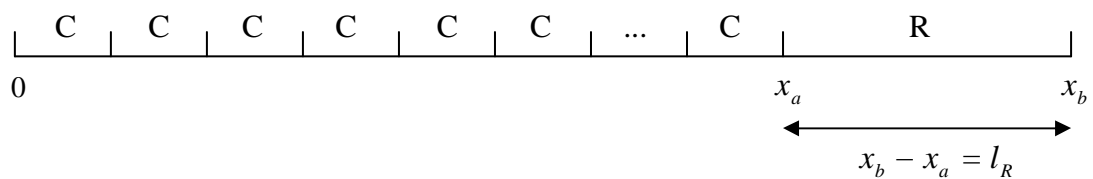


Figura 3.1: Domínio unidimensional homogêneo com uma região refletora.

Neste domínio, existem materiais com fonte de nêutrons (C): $0 \leq x \leq x_a$, e uma região refletora (R): $x_a \leq x \leq x_b$ com comprimento $l_R = x_b - x_a$.

A equação da continuidade independente do tempo monoenergética em geometria unidimensional no interior da região refletora pode ser escrita como:

$$\frac{d J_R(x)}{dx} + \sum_{a,R} \phi_R(x) = 0 \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (3.1.a)$$

e pela Lei de Fick

$$J_R(x) = -D_R \frac{d \phi_R(x)}{dx} \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (3.1.b)$$

com a seguinte condição de contorno

$$\phi_R(x_b) = 0 \quad (3.1.c)$$

Aqui, $J_R(x)$ é a corrente de nêutrons que pode ser interpretada como o número de nêutrons que passa por unidade de tempo em uma área perpendicular à direção x [Stacey, 2001]. $\Sigma_{a,R}$ é a seção de choque macroscópica de absorção da região refletora. É uma medida que está relacionada com a probabilidade do número de nêutrons que é absorvido na região do refletor [Stacey, 2001]. $\phi_R(x)$ é o fluxo escalar no interior da região refletora. D_R é o coeficiente de difusão na região refletora [Stacey, 2001].

Os meios multiplicativos dos reatores são normalmente circundados por materiais refletores usados para reduzir a fuga de nêutrons. Nosso objetivo é retirar a região refletora dos cálculos globais introduzindo um coeficiente de reflexão ou parâmetro albedo. Queremos encontrar o albedo α_{dir} para a região refletora de espessura l_R localizada à direita do domínio multiplicativo C representado na Fig. 3.1.

O parâmetro albedo é definido como

$$J_R(x_a) = \alpha_{dir} \phi(x_a) \quad . \quad (3.2)$$

Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace nas equações (3.1.a) e (3.1.b). O resultado é

$$s \bar{J}_R(s) - J_R(0) + \Sigma_{a,R} \bar{\phi}_R(s) = 0 \quad (3.3.a)$$

onde $\bar{J}_R(s)$ é a corrente transformada e pela definição

$$\bar{J}_R(s) = -D_R \left(s \bar{\phi}_R(s) - \phi_R(0) \right) \quad . \quad (3.3.b)$$

Reescrevendo as Eqs. (3.3.a) e (3.3.b), tem-se

$$s \bar{J}_R(s) + \Sigma_{a,R} \bar{\phi}_R(s) = J_R(0) \quad (3.4.a)$$

e

$$\bar{J}_R(s) + s D_R \bar{\phi}_R(s) = D_R \phi_R(0) \quad . \quad (3.4.b)$$

Aqui $x = 0$ é um ponto local e corresponde a $x = x_a$ na Fig. 3.1. Portanto, reescrevendo as Eqs. (3.4.a) e (3.4.b) como

$$s \bar{J}_R(s) + \sum_{a,R} \bar{\phi}_R(s) = J_R(x_a) \quad (3.5.a)$$

e

$$\bar{J}_R(s) + s D_R \bar{\phi}_R(s) = D_R \phi_R(x_a) \quad (3.5.b)$$

Resolvendo o sistema linear representado nas Eqs. (3.5.a) e (3.5.b) pelo método de Kramer, obtém-se a seguinte expressão para $\bar{\phi}_R(s)$:

$$\bar{\phi}_R(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & J_R(x_a) \\ 1 & D_R \phi_R(x_a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{a,R} \\ 1 & s D_R \end{vmatrix}} \quad (3.6)$$

o que resulta em

$$\bar{\phi}_R(s) = \frac{s \phi_R(x_a) - \frac{J(x_a)}{D_R}}{s^2 - k_R^2} \quad (3.7)$$

Aqui se define $k_R = \sqrt{\frac{\sum_{a,R}}{D_R}}$ como o inverso do comprimento de difusão de nêutrons na região refletora.

A Eq. (3.7) pode ser reescrita por frações parciais como:

$$\bar{\phi}_R(s) = \frac{A}{s - k_R} + \frac{B}{s + k_R} \quad (3.8)$$

onde A e B são determinados algebricamente, gerando os seguintes resultados:

$$A = \frac{\phi_R(x_a)}{2} - \frac{J_R(x_a)}{2\sqrt{D_R \sum_{a,R}}} \quad (3.9.a)$$

e

$$B = \frac{\phi_R(x_a)}{2} + \frac{J_R(x_a)}{2\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}}} \quad . \quad (3.9.b)$$

Agora, substituindo as expressões (3.9.a) e (3.9.b) em (3.8) e aplicando a transformada de Laplace Inversa na equação resultante, obtém-se

$$\phi_R(x) = \frac{\phi_R(x_a)\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} - J_R(x_a)}{2\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}}} e^{k_R x} + \frac{\phi_R(x_a)\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} + J_R(x_a)}{2\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}}} e^{-k_R x} \quad (3.10)$$

que é válida para todo x pertencente ao intervalo $[x_a; x_b]$.

Fazendo $x = x_a = 0$, o que resulta em $x = x_b = l_R$, e usando a condição de contorno à direita, $\phi_R(x_b) = 0$ resulta em

$$\left(\phi_R(0)\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} - J_R(0)\right)e^{k_R l_R} + \left(\phi_R(0)\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} + J_R(0)\right)e^{-k_R l_R} = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Isolando $J_R(x_a)$ na Eq. (3.11) obtém-se

$$J_R(0) = \left(\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \coth(k_R l_R)\right)\phi_R(0) \quad (3.12)$$

que, pela definição da Eq. (3.2), implica a expressão do albedo à direita (α_{dir}) para uma região refletora. Portanto, escreve-se

$$\alpha_{dir} = \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \coth(k_R l_R) \quad . \quad (3.13)$$

Quando a região do refletor é muito maior que a região do combustível, podemos considerar que $l_R \rightarrow \infty$, então $\coth(k_R l_R) \rightarrow 1$, o que implica

$$J_R(0) = \left(\sqrt{D_R \Sigma_{a,R}}\right)\phi_R(0) \quad (3.14)$$

que, segundo a Eq. (3.2), leva à expressão do albedo à direita (α_{dir}) para uma região refletora muito espessa:

$$\alpha_{dir} = \sqrt{D_R \sum_{a,R}} \quad (3.15)$$

observando o translado $x_a = 0$.

3.2 DUAS REGIÕES REFLETORAS

Seja agora um domínio unidimensional conforme representado na Fig. 3.2.

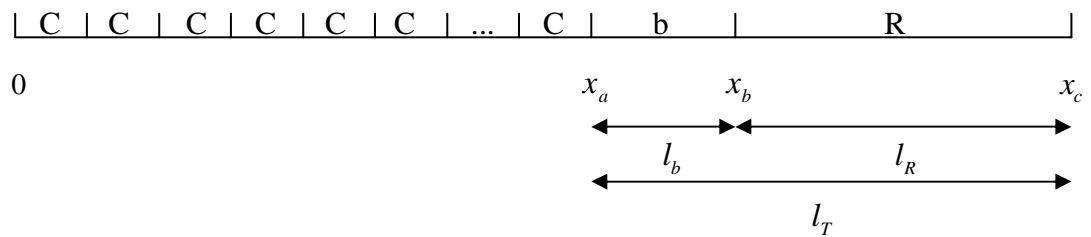


Figura 3.2: Domínio unidimensional homogêneo com duas regiões refletoras.

A Fig. 3.2 ilustra as regiões de combustível (C): $0 \leq x \leq x_a$ e duas regiões refletoras: uma região de revestimento estrutural (“baffle”) (b): $x_a \leq x \leq x_b$ e uma região com refletor (R): $x_b \leq x \leq x_c$, com as seguintes dimensões $l_b = x_b - x_a$, $l_R = x_c - x_b$ e $l_T = l_R + l_b$.

Neste caso estamos decompondo o meio não-multiplicativo em duas regiões, como, por exemplo, “baffle” e refletor.

As equações monoenergéticas da difusão independentes do tempo em geometria unidimensional cartesiana no interior da região não-multiplicativa podem ser escritas como

a) para a região do “baffle”:

$$\frac{d J_b(x)}{dx} + \sum_{a,b} \phi_b(x) = 0 \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (3.16.a)$$

e

$$J_b(x) = -D_b \frac{d}{dx} \phi_b(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (3.16.b)$$

b) para a região do refletor:

$$\frac{d J_R(x)}{dx} + \sum_{a,R} \phi_R(x) = 0 \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (3.17.a)$$

e

$$J_R(x) = -D_R \frac{d}{dx} \phi_R(x) \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (3.17.b)$$

com a seguinte condição de contorno

$$\phi_R(x_c) = 0 \quad . \quad (3.18)$$

Aqui, utilizou-se as seguintes definições:

$J_b(x)$ é a corrente de nêutrons na região do “baffle”.

$J_R(x)$ é a corrente de nêutrons na região do refletor.

$\sum_{a,b}$ é a seção de choque macroscópica de absorção na região do “baffle”.

$\sum_{a,R}$ é a seção de choque macroscópica de absorção na região do refletor.

$\phi_b(x)$ é o fluxo escalar de nêutrons no interior da região do “baffle”.

$\phi_R(x)$ é o fluxo escalar de nêutrons no interior da região do refletor.

D_b é o coeficiente de difusão na região do “baffle”.

D_R é o coeficiente de difusão na região do refletor.

Deseja-se determinar o albedo α_{dir} para a região não-multiplicativa de espessura $l_T = x_c - x_a$ localizada à direita do domínio multiplicativo C representado na Fig. 3.2, $0 \leq x \leq x_a$.

Defini-se o albedo como

$$J(x_a) = \alpha_{dir} \phi(x_a) \quad . \quad (3.19)$$

Aplicando a transformada de Laplace no interior do domínio do “baffle”, isto é, $x_a \leq x \leq x_b$, nas Eqs. (3.16.a) e (3.16.b), fica-se com

$$s \bar{J}_b(s) + \sum_{a,b} \bar{\phi}_b(s) = J_b(x_a) \quad (3.20.a)$$

e

$$\bar{J}_b(s) + s D_b \bar{\phi}_b(s) = D_b \phi_b(x_a) \quad (3.20.b)$$

cuja solução pelo método de Kramer resulta em

$$\bar{\phi}_b(s) = \frac{s \phi_b(x_a) - \frac{J_b(x_a)}{D_b}}{s^2 - k_b^2} \quad (3.21.a)$$

e

$$\bar{J}_b(s) = \frac{s J_b(x_a) - \sum_{a,b} \phi_b(x_a)}{s^2 - k_b^2} \quad (3.21.b)$$

onde $k_b = \sqrt{\frac{\sum_{a,b}}{D_b}}$.

Aplicando a transformada de Laplace inversa nas Eqs. (3.21.a) e (3.21.b) obtém-se

$$\phi_b(x) = \frac{\phi_b(x_a) \sqrt{D_b \sum_{a,b}} - J_b(x_a)}{2 \sqrt{D_b \sum_{a,b}}} e^{k_b x} + \frac{\phi_b(x_a) \sqrt{D_b \sum_{a,b}} + J_b(x_a)}{2 \sqrt{D_b \sum_{a,b}}} e^{-k_b x} \quad (3.22.a)$$

e

$$J_b(x) = \frac{J_b(x_a) - \sqrt{D_b \sum_{a,b}} \phi_b(x_a)}{2} e^{k_b x} + \frac{J_b(x_a) + \sqrt{D_b \sum_{a,b}} \phi_b(x_a)}{2} e^{-k_b x}. \quad (3.22.b)$$

Aqui as Eqs. (3.22.a) e (3.22.b) são válidas para a região do “baffle”, i.e., são válidas para $x_a \leq x \leq x_b$.

Fazendo $x = x_a = 0$, o que resulta em $x = x_b = l_b$, e substituindo na Eq. (3.22.a) obtém-se

$$\phi_b(x_b) = \frac{\phi_b(0)}{2} e^{k_b l_b} + \frac{\phi_b(0)}{2} e^{-k_b l_b} - \frac{J_b(0)}{2\sqrt{D_b \Sigma_{a,b}}} e^{k_b l_b} + \frac{J_b(0)}{2\sqrt{D_b \Sigma_{a,b}}} e^{-k_b l_b} \quad (3.23)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\phi_b(x_b) = \phi_b(0) \cosh(k_b l_b) - \frac{J_b(0)}{\sqrt{D_b \Sigma_{a,b}}} \sinh(k_b l_b) \quad . \quad (3.24.a)$$

Agora substituindo $x = x_b = l_b$ na Eq. (3.22.b) escreve-se

$$J_b(x_b) = J_b(0) \cosh(k_b l_b) - \phi_b(0) \sqrt{D_b \Sigma_{a,b}} \sinh(k_b l_b) \quad . \quad (3.24.b)$$

Aplicando agora a transformada de Laplace na região do refletor, isto é, $x_b \leq x \leq x_c$, nas Eqs. (3.17.a) e (3.17.b) fica-se com

$$s \bar{J}_R(s) + \Sigma_{a,R} \bar{\phi}_R(s) = J_R(x_b) \quad (3.25.a)$$

e

$$\bar{J}_R(s) + s D_R \bar{\phi}_R(s) = D_R \phi_R(x_b) \quad (3.25.b)$$

cuja solução é

$$\bar{\phi}_R(s) = \frac{s \phi_R(x_b) - \frac{J_R(x_b)}{D_R}}{s^2 - k_R^2} \quad (3.26.a)$$

e

$$\bar{J}_R(s) = \frac{s J_R(x_b) - \Sigma_{a,R} \phi_R(x_b)}{s^2 - k_R^2} \quad (3.26.b)$$

onde $k_R = \sqrt{\frac{\Sigma_{a,R}}{D_R}}$.

Aplicando a transformada inversa de Laplace na Eq. (3.26.a), obtém-se

$$\phi_R(x) = \frac{\phi_R(x_b)\sqrt{D_R \sum_{a,R}} - J_R(x_b)}{2\sqrt{D_R \sum_{a,R}}} e^{k_R x} + \frac{\phi_R(x_b)\sqrt{D_R \sum_{a,R}} + J_R(x_b)}{2\sqrt{D_R \sum_{a,R}}} e^{-k_R x} . \quad (3.27.a)$$

Fazendo $x = x_b = 0$, o que resulta em $x = x_c = l_R$, substituindo na Eq. (3.27.a) e utilizando a condição de contorno (3.18), implica que

$$\phi_R(l_R) = 0 \quad (3.28)$$

o que resulta na expressão

$$J_R(0) = \alpha_{dir}^{old} \phi_R(0) \quad (3.29)$$

onde

$$\alpha_{dir}^{old} = \sqrt{D_R \sum_{a,R}} \coth(k_R l_R) . \quad (3.30)$$

Porém, vamos substituir $J_b(x_b)$ e $\phi_b(x_b)$ dados nas Eqs. (3.24.a) e (3.24.b), respectivamente na Eq. (3.29), colocando em evidência os termos de $J_b(x_a)$ e $\phi_b(x_a)$, e usando a continuidade do fluxo e corrente o resultado é

$$J(x_a) \left(\cosh(k_b l_b) + \frac{\alpha_{dir}^{old}}{\sqrt{D_b \sum_{a,b}}} \sinh(k_b l_b) \right) = \left(\sqrt{D_b \sum_{a,b}} \sinh(k_b l_b) + \alpha_{dir}^{old} \cosh(k_b l_b) \right) \phi(x_a) . \quad (3.31)$$

Portanto, ao se definir $J_b(x_a) = \alpha_{dir}^{new} \phi_b(x_a)$, obtém-se o novo albedo à direita a partir da Eq. (3.31), onde α_{dir}^{old} é dado pela Eq. (3.30), dado por

$$\alpha_{dir}^{new} = \sqrt{D_b \sum_{a,b}} \frac{\sqrt{D_b \sum_{a,b}} \sinh(k_b l_b) \sinh(k_R l_R) + \sqrt{D_R \sum_{a,R}} \cosh(k_b l_b) \cosh(k_R l_R)}{\sqrt{D_b \sum_{a,b}} \cosh(k_b l_b) \sinh(k_R l_R) + \sqrt{D_R \sum_{a,R}} \sinh(k_b l_b) \cosh(k_R l_R)} . \quad (3.32)$$

3.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO CLÁSSICO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO DE DIFUSÃO COM FONTE FIXA

Considere um domínio unidimensional conforme representado na Fig. 3.3.

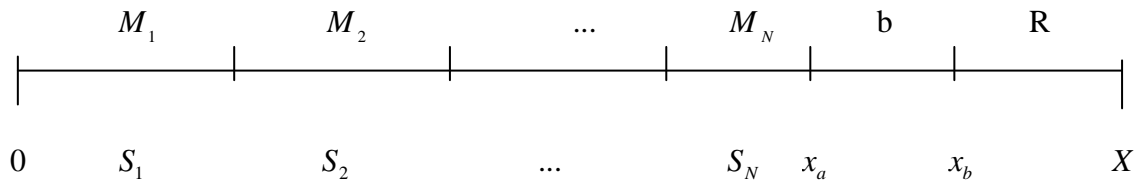


Figura 3.3: Domínio unidimensional homogêneo com fonte fixa de nêutrons e com duas regiões refletoras.

As N regiões materiais M_i com fonte fixa (S_i): $0 \leq x \leq x_a$, $i = 1 : N$, duas regiões refletoras: uma região de “baffle” (b): $x_a \leq x \leq x_b$ e uma região com refletor (R): $x_b \leq x \leq X$.

A equação monoenergética da difusão independente do tempo em geometria unidimensional no interior do domínio $0 \leq x \leq X$ de cada uma das $N + 2$ regiões contidas pode ser escrita como

$$\frac{d J(x)}{dx} + \Sigma_a(x) \phi(x) = S(x) \quad (3.33)$$

e

$$J(x) = -D(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \quad , \quad (3.34)$$

onde os parâmetros D e Σ_a e a fonte fixa S dependem da localização no domínio e são funções constantes por partes.

Considere a grade de discretização espacial representada na Fig. 3.4.

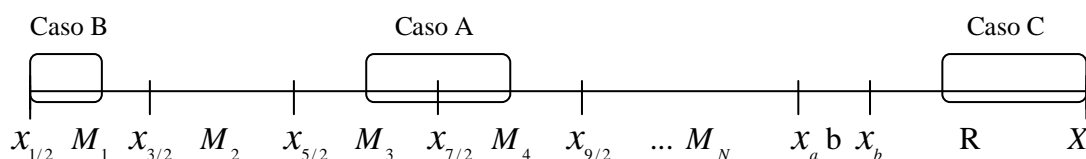


Figura 3.4: Grade de discretização espacial.

Os três casos de interesse são

Caso A: duas malhas contíguas no interior do domínio;

Caso B: metade da primeira malha à esquerda em $x = 0$;

Caso C: metade da última à direita em $x = X$.

Observa-se que os quadriláteros correspondem aos limites das células fictícias que se usa para determinação das equações aproximadas pelo método de diferenças finitas.

CASO A:

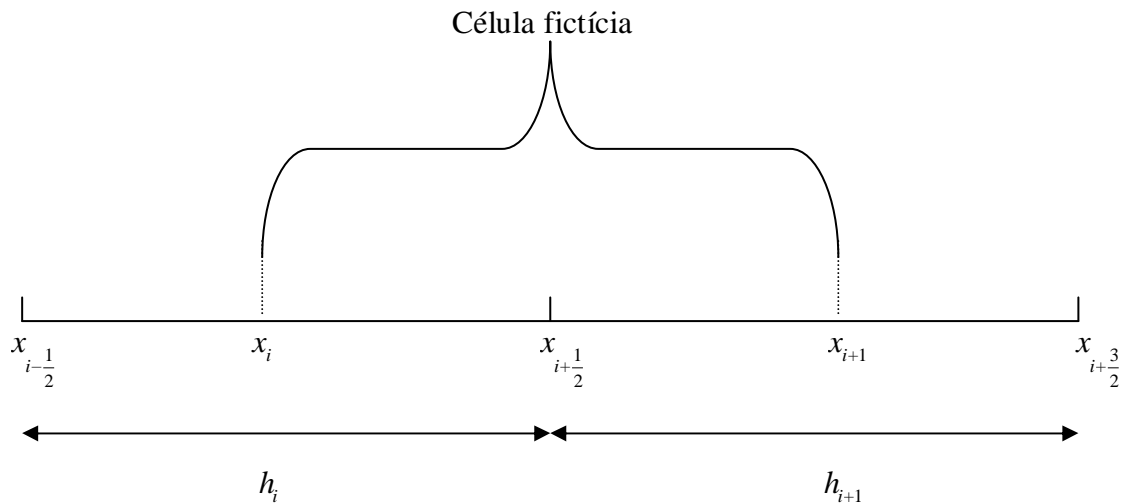


Figura 3.5: Duas malhas contíguas no interior do domínio.

Integrando a Eq. (3.33) no interior do domínio conforme Fig. 3.5 tem-se:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} J(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_a(x) \phi(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) dx \quad (3.35)$$

o que resulta em

$$J(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1/2}} + \sum_{ai} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \phi(x) dx + \sum_{a(i+1)} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \phi(x) dx = S_i \frac{h_i}{2} + S_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2} \quad (3.36)$$

Considerando $\phi(x)$ constante no interior da célula fictícia e igual ao $\phi_{i+1/2}$ tem-se:

$$J_{i+1} - J_i + \frac{\sum_{ai} h_i}{2} \phi_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\sum_{a(i+1)} h_{i+1}}{2} \phi_{i+\frac{1}{2}} = S_i \frac{h_i}{2} + S_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2} \quad (3.37)$$

que pode ser reescrita como

$$2J_{i+1} - 2J_i + \sum_{ai} h_i \phi_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{a(i+1)} h_{i+1} \phi_{i+\frac{1}{2}} = S_i h_i + S_{i+1} h_{i+1} \quad (3.38)$$

Usando a lei Fick dada pela Eq. (3.34) e aproximando a derivada primeira pela fórmula centrada de três pontos, escreve-se

$$J_{i+1} = -D_{i+1} \frac{\phi_{i+\frac{3}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}} \quad (3.39)$$

e

$$J_i = -D_i \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \quad (3.40)$$

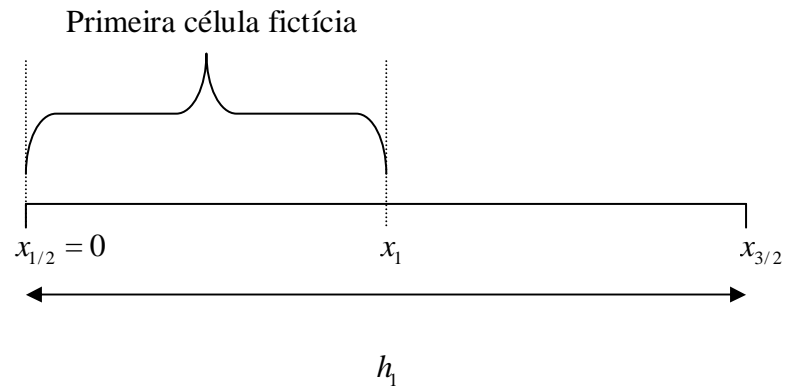
Substituindo as Eqs. (3.39) e (3.40) em (3.38) fica-se com:

$$-2D_{i+1} \left(\frac{\phi_{i+\frac{3}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}} \right) + 2D_i \left(\frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} \right) + \sum_{ai} h_i \phi_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{a(i+1)} h_{i+1} \phi_{i+\frac{1}{2}} = S_i h_i + S_{i+1} h_{i+1} \quad (3.41)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(-\frac{2D_i}{h_i} \right) \phi_{i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_i}{h_i} + \sum_{ai} h_i + \sum_{a(i+1)} h_{i+1} \right) \phi_{i+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{2D_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \phi_{i+\frac{3}{2}} = S_i h_i + S_{i+1} h_{i+1} \quad (3.42)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para malhas interiores, isto é, para $i=1, \dots, I-1$, onde I é o número total de malhas contidas na grade de discretização espacial do domínio.

CASO B:Figura 3.6: Primeira malha em $x = 0$ cm.

Integrando as Eq. (3.33) no interior da primeira célula fictícia conforme Fig. 3.6 tem-se:

$$\int_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} \frac{d}{dx} J(x) dx + \int_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} \Sigma_a(x) \phi(x) dx = \int_{\frac{x_1}{2}}^{x_1} S(x) dx \quad (3.43)$$

o que resulta em

$$J_1 - J_{\frac{1}{2}} + \Sigma_{a1} \phi_{\frac{1}{2}} \frac{h_1}{2} = \frac{S_1 h_1}{2} \quad (3.44)$$

que é equivalente à

$$2J_1 - 2J_{\frac{1}{2}} + \Sigma_{a1} \phi_{\frac{1}{2}} h_1 = S_1 h_1 \quad (3.45)$$

Usando a lei de Fick e aproximando a derivada primeira pela fórmula centrada de três pontos tem-se:

$$J_1 = -D_1 \frac{\phi_{\frac{3}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}}}{h_1} \quad (3.46)$$

e pela definição de albedo a esquerda tem-se

$$J_{\frac{1}{2}} = -\alpha_{esq} \phi_{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.47)$$

Substituindo as Eqs. (3.46) e (3.47) em (3.45) temo-se:

$$-2D_1 \left(\frac{\phi_{\frac{3}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}}}{h_1} \right) + 2\alpha_{esq} \phi_{\frac{1}{2}} + \sum_{a1} h_1 \phi_{\frac{1}{2}} = S_1 h_1 \quad (3.48)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{2D_1}{h_i} + 2\alpha_{esq} + \sum_{a1} h_1 \right) \phi_{\frac{1}{2}} + \left(-2 \frac{D_1}{h_1} \right) \phi_{\frac{3}{2}} = S_1 h_1 \quad . \quad (3.49)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a primeira malha à esquerda da grade de discretização espacial.

CASO C:

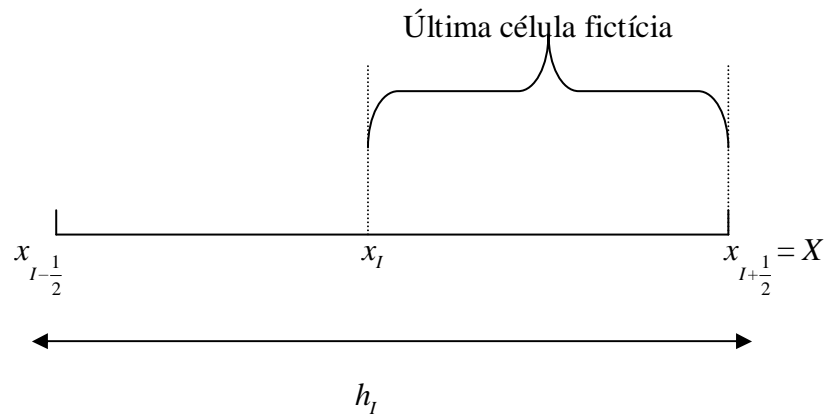


Figura 3.7: Última malha em $x = X$.

Integrando a Eq. (3.33) no interior da última célula fictícia tem-se:

$$\int_{x_I}^{x_{I+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dx} J(x) dx + \int_{x_I}^{x_{I+\frac{1}{2}}} \sum_a(x) \phi(x) dx = \int_{x_I}^{x_{I+\frac{1}{2}}} S(x) dx \quad (3.50)$$

que resulta em

$$J_{I+\frac{1}{2}} - J_I + \sum_{al} \phi_{I+\frac{1}{2}} \frac{h_I}{2} = S_I \frac{h_I}{2} \quad . \quad (3.51)$$

Usando a lei de Fick com aproximação da derivada primeira pela fórmula centrada de três pontos tem-se:

$$J_I = -D_I \frac{\phi_{I+\frac{1}{2}} - \phi_{I-\frac{1}{2}}}{h_I} \quad (3.52)$$

e ademais, usando condição de contorno especial tipo albedo à direita escreve-se

$$J_{I+\frac{1}{2}} = \alpha_{dir} \phi_{I+\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.53)$$

Substituindo as Eqs. (3.52) e (3.53) em (3.51), obtém-se

$$2\alpha_{dir} \phi_{I+\frac{1}{2}} + 2D_I \frac{\phi_{I+\frac{1}{2}} - \phi_{I-\frac{1}{2}}}{h_I} + \sum_{al} h_I \phi_{I+\frac{1}{2}} = S_I h_I \quad (3.54)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(-\frac{2D_I}{h_I} \right) \phi_{I-\frac{1}{2}} + \left(2\alpha_{dir} + \frac{2D_I}{h_I} + \sum_{al} h_I \right) \phi_{I+\frac{1}{2}} = S_I h_I \quad . \quad (3.55)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita.

Portanto, aproxima-se as equações diferenciais (3.33) e (3.34) por um conjunto de equações lineares e algébricas dadas pelas Eqs. (3.42), (3.49) e (3.55), que na forma matricial aparece como

$$A\phi = S \quad (3.56)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica tridiagonal de dimensão $(I+1) \times (I+1)$, ϕ e \mathbf{S} são vetores coluna de dimensão $(I+1)$. Este sistema de equações lineares e algébricas foi resolvido pelo método direto de eliminação de Gauss com substituição recuada para matrizes simétricas, e teve como solução o fluxo escalar de nêutrons nos pontos de grade $x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{I+1/2}$.

3.3.1 VALORES DOS ALBEDOS α_{dir} e α_{esq}

Os valores de α_{dir} e α_{esq} representam as condições de contorno tratadas das três maneiras que descrevemos a seguir:

3.3.1.1 FLUXO ESCALAR NULO NO CONTORNO

Admiti-se que o fluxo seja nulo no contorno, onde se faz impor que o fluxo no contorno seja zero, mas se atribui ao parâmetro associado a esta condição valores tão grandes quanto possíveis, que de maneira inversamente proporcional force o fluxo a tender a zero. Assim, na aritmética computacional finita, escreve-se

$$\alpha_{dir} \rightarrow \infty \cong 10^{30}$$

e

$$\alpha_{esq} \rightarrow \infty \cong 10^{30}.$$

3.3.1.2 FLUXO ESCALAR REFLEXIVO NO CONTORNO

$$\alpha_{dir} = 0$$

e

$$\alpha_{esq} = 0$$

pois implicam que as derivadas primeiras se anulam nos contornos.

3.3.1.3 CONDIÇÃO DE CONTORNO ESPECIAL DO TIPO ALBEDO

Aqui a condição de contorno representa o parâmetro albedo calculado anteriormente na seção 3.1, descrito pelas Eqs. (3.13) e (3.32). De acordo com a Eq. (3.13), para uma região refletora tem-se

$$\alpha_{dir} = \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \coth(k_R l_R)$$

e de acordo com a Eq. (3.32) para duas regiões refletoras, obteve-se

$$\alpha_{dir} = \frac{\sqrt{D_b \Sigma_{a,b}} \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \sinh(k_b l_b) \sinh(k_R l_R) + \sqrt{D_b \Sigma_{a,b}} \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \cosh(k_b l_b) \cosh(k_R l_R)}{\sqrt{D_b \Sigma_{a,b}} \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \cosh(k_b l_b) \sinh(k_R l_R) + \sqrt{D_b \Sigma_{a,b}} \sqrt{D_R \Sigma_{a,R}} \sinh(k_b l_b) \cosh(k_R l_R)}$$

3.3.1.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO VÁCUO

Aqui se admite que nenhum nêutron que saia através da superfície do contorno retorne ao domínio, uma vez que no exterior admitimos que seja vácuo.

No contorno externo, as condições de contorno apropriadas são encontradas pela equação P_1 para a corrente parcial incidente conhecida [Weston, 2001], J^{in} por exemplo, para o lado direito do contorno em X :

$$J_-^{in} = \phi(X) + 2D(X) \frac{d\phi(X)}{dx} \quad . \quad (3.57)$$

Quando o meio difusivo está envolvido por vácuo ou região não reflexiva, $J_-^{in} = 0$ e a Eq. (3.57) pode ser reescrita como

$$D(X) \frac{d\phi(X)}{dx} = -\frac{1}{2} \phi(X) \quad . \quad (3.58)$$

Usando a lei de Fick em (3.58) tem-se

$$J(X) = \frac{1}{2} \phi(X) \quad (3.59)$$

e pela definição de albedo tem-se que

$$\alpha_{dir} = 0,5 \quad .$$

Analogamente para o lado esquerdo, obtém-se

$$\alpha_{esq} = 0,5 \quad .$$

3.4 DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MONOENERGÉTICO COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)

Considerando a mesma Fig. 3.3, seja o problema de autovalor dado pela equação monoenergética e unidimensional da difusão de nêutrons

$$-\frac{d}{dx} D \frac{d}{dx} \phi(x) + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi(x) \quad , \quad 0 < x < X \quad (3.60)$$

que pode ser conveniente reescrita como

$$\frac{d J(x)}{dx} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \phi(x) \quad (3.61)$$

e

$$J(x) = -D(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \quad . \quad (3.62)$$

Analogamente ao caso monoenergético a fonte fixa, que foi descrito na seção 3.3 considera-se três casos de interesse:

Caso A: duas malhas contíguas no interior do domínio;

Caso B: metade da primeira malha em $x = 0$;

Caso C: metade da última malha em $x = X$.

CASO A:

Integrando as Eqs. (3.61) e (3.62) no interior da célula fictícia $[x_i; x_{i+1}]$ e seguindo os mesmos passos descritos na seção 3.3 para este caso A, obtém-se a equação de diferença

$$\left(-\frac{2D_i}{h_i}\right)\phi_{i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_i}{h_i} + \sum_{a_i} h_i + \sum_{a_{(i+1)}} h_{i+1}\right)\phi_{i+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{2D_{i+1}}{h_{i+1}}\right)\phi_{i+\frac{3}{2}} = \frac{1}{k_{eff}}(h_i\nu \sum f_i + h_{i+1}\nu \sum f_{i+1})\phi_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

que é a equação da difusão discretizada para as malhas interiores, isto é, para $i = 1, \dots, I-1$.

CASO B:

Analogamente ao caso B descrito na seção 3.3, integra-se as equações (3.61) e (3.62) no interior da metade da primeira malha e se obtém o seguinte resultado:

$$\left(\frac{2D_1}{h_1} + 2\alpha_{esq} + \sum_{a_1} h_1\right)\phi_{1/2} + \left(-2\frac{D_1}{h_1}\right)\phi_{3/2} = \frac{1}{k_{eff}}h_1\nu \sum_{f_1} \phi_{1/2} \quad , \quad (3.64)$$

que é a equação da difusão discretizada para a primeira malha à esquerda.

CASO C:

Seguindo os mesmos passos descritos para este caso C na seção 3.3 fica-se com

$$\left(-\frac{2D_I}{h_I}\right)\phi_{I-\frac{1}{2}} + \left(2\alpha_{dir} + \frac{2D_I}{h_I} + \sum_{a_I} h_I\right)\phi_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k_{eff}}h_I\nu \sum_{f_I} \phi_{I+\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.65)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita. Com o conjunto de equações lineares e algébricas descritas pelas Eqs. (3.63), (3.64) e (3.65) e geradas pelo método de diferenças finitas, pode-se representar o problema de autovalor (3.60) como

$$\mathbf{M}\phi = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F}\phi \quad (3.66)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz simétrica e tridiagonal de dimensão $(I + 1) \times (I + 1)$, \mathbf{F} é uma matriz diagonal de dimensão $(I + 1)$, ϕ é um vetor coluna também de dimensão $(I + 1)$. O algoritmo de solução deste problema de autovalor está baseado no convencional método iterativo de potência, acoplado com o método direto de eliminação de Gauss para matrizes simétricas com substituição recuada para cada estimativa da fonte no esquema iterativo de potência [Duderstadt e Hamilton, 1976]. Assim, primeiramente faz-se as seguintes estimativas iniciais

$$\mathbf{F}\phi \cong \mathbf{S}^{(0)} \quad , \quad k \cong k^{(0)} \quad . \quad (3.67)$$

Com estas estimativas iniciais calcula-se o fluxo $\phi^{(1)}$ a partir da equação abaixo

$$\mathbf{M}\phi^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}} \mathbf{S}^{(0)} \quad . \quad (3.68)$$

Com uma solução não nula para $\phi^{(1)}$ calcula-se a nova fonte de fissão como

$$\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{F}\phi^{(1)} \quad . \quad (3.69)$$

Com esta nova estimativa de fonte gera-se o novo fluxo $\phi^{(2)}$, e assim, recursivamente, pode-se generalizar o cálculo do fluxo, dado que a estimativa $\mathbf{S}^{(n)}$ e $k^{(n)}$ são conhecidas, como

$$\mathbf{M}\phi^{(n+1)} = \frac{1}{k^{(n)}} \mathbf{S}^{(n)} \quad (3.70)$$

e, com isto, calcula-se a nova fonte como

$$\mathbf{S}^{(n+1)} = \mathbf{F}\phi^{(n+1)} \quad . \quad (3.71)$$

Para estimar o k_{eff} no esquema iterativo do método da potência, considera-se primeiramente que à medida que n cresce, $\phi^{(n+1)}$ convergirá para satisfazer à verdadeira autofunção

$$\mathbf{M}\phi^{(n+1)} \cong \frac{1}{k^{(n+1)}} \mathbf{F}\phi^{(n+1)} \quad . \quad (3.72)$$

Integrando a Eq. (3.72), obtém-se uma estimativa para $k^{(n+1)}$ como

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int \mathbf{F}\phi^{(n+1)} dx}{\int \mathbf{M}\phi^{(n+1)} dx} \quad . \quad (3.73)$$

O termo $\mathbf{F}\phi^{(n+1)}$ está definido na Eq. (3.71) e o termo $\mathbf{M}\phi^{(n+1)}$ é dado pela Eq. (3.70) e com isto se pode reescrever a Eq. (3.73) como

$$k^{(n+1)} \cong \frac{\int \mathbf{S}^{(n+1)} dx}{\frac{1}{k^{(n)}} \int \mathbf{S}^{(n)} dx} \quad . \quad (3.74)$$

Com esta expressão, pode-se calcular a nova estimativa $k^{(n+1)}$ a partir de estimativas anteriores para $\phi^{(n+1)}$ e $k^{(n)}$. Portanto, é considerado as Eqs. (3.70), (3.71) e (3.74) como básicas para o método iterativo de potência para convergência do k_{eff} e do ϕ . À medida que o número de iterações aumenta, espera-se a convergência de ϕ para a autofunção fundamental da Eq. (3.66), que corresponde ao autovalor dominante k_{eff} . Na prática estas iterações continuam até que os seguintes critérios de convergência

$$\left| \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n)}} \right| < \varepsilon_1 \text{ e } \left| \frac{\mathbf{S}^{(n)} - \mathbf{S}^{(n-1)}}{\mathbf{S}^{(n)}} \right| < \varepsilon_2 \quad (3.75)$$

sejam satisfeitos com números de convergência positivos e em geral com $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

A magnitude do fluxo escalar ϕ de um reator nuclear é determinada pela potência na qual o sistema é operado. Para encontrar a intensidade de ϕ , é necessário fazer um cálculo separado da potência do reator. Em particular, é esperado que haja $\sum_f \phi(x)$ fissões por cm^3 no ponto x , onde \sum_f é a seção de choque macroscópica de fissão. Sendo a energia liberada E de aproximadamente 200MeV por fissão, ou seja, $E = 3.2 \times 10^{-11}$ joules. Então a potência total por unidade de área na placa, em $watts/cm^2$, é

$$P = 3.2 \times 10^{-11} \int_{x=0}^{x=X} \sum_f(x) \phi(x) dx \quad (3.76)$$

ou equivalentemente em $Mwatts/cm^2$

$$P = 3.2 \times 10^{-17} \int_{x=0}^{x=X} \sum_f(x) \phi(x) dx \quad (3.77)$$

Assim, podemos normalizar o fluxo escalar convergido da seguinte forma

$$\phi(x) = \frac{\phi^{\text{convergido}}(x)}{P} P_{\text{nominal}} \quad (3.78)$$

Aqui $\phi^{\text{convergido}}$ é o fluxo convergido pelo método da potência, P é dada pela Eq. (3.77) e P_{nominal} é a potência que a central de energia do reator irá gerar.

3.4.1 VALORES DE α_{dir} e α_{esq}

Os valores são os mesmos para os casos de fonte fixa, dados pela prescrição completa na Seção 3.3.1.

3.5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS MONOENERGÉTICOS

3.5.1 PROBLEMA MODELO Nº 1: FONTE FIXA

Utilizou-se como exemplo um problema com 5 regiões, conforme ilustrados na Fig. 3.8.

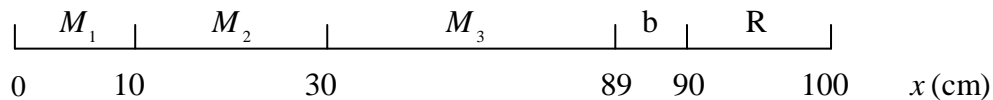


Figura 3.8. Domínio heterogêneo para o problema modelo Nº 1.

O domínio é constituído das regiões materiais (M_1): $0 \leq x \leq 10$ cm, (M_2): $10 \text{ cm} \leq x \leq 30 \text{ cm}$, (M_3): $30 \text{ cm} \leq x \leq 89 \text{ cm}$, de uma região de revestimento estrutural “baffle” (b): $89 \text{ cm} \leq x \leq 90 \text{ cm}$ e de uma região refletora (R): $90 \text{ cm} \leq x \leq 100 \text{ cm}$.

Para este problema, utilizou-se as seguintes condições de contorno:

- a) Reflexiva em $x = 0$ cm, o que implica em $\alpha_{esq} = 0$.
- b) Fluxo nulo em $x = 100$ cm, o que implica em $\alpha_{dir} = 10^{30}$.

Foram considerados neste problema os seguintes parâmetros nucleares para as regiões:

Região 1: $S = 1$, $D = 1$, $\Sigma_a = 0.9$

Região 2: $S = 0$, $D = 1.2$, $\Sigma_a = 0.5$

Região 3: $S = 0$, $D = 0.9$, $\Sigma_a = 0.7$

Região 4: $S = 0$, $D = 0.8$, $\Sigma_a = 0.6$

Região 5: $S = 0$, $D = 1.4$, $\Sigma_a = 0.9$

Aqui S tem unidade de [Nêutrons/cm³seg], D[cm] e Σ_a [cm⁻¹].

A equação da difusão monoenergética com fonte fixa foi resolvida de três maneiras :

- 1) Usando o método de diferenças finitas com 1000 malhas e uma distribuição por região da seguinte forma: 100 malhas para a primeira região, 200 para a segunda região, 590 para a terceira região, 10 para a quarta região e 100 malhas para a última região;

- 2) Usando o método de diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para uma região refletora, isto é, com o “baffle” (b) explícito e a região refletora (R) implícita pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima com 4 regiões;
- 3) Usando diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para duas regiões refletoras; isto é, o albedo substituindo as regiões (b) e (R), ou seja, as mesmas condições acima para 3 regiões.

O fluxo foi calculado em quatro pontos, $x = 0$ cm, $x = 10$ cm, $x = 30$ cm e $x = 89$ cm.

Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 1, 2 e 3 e ilustrados na Fig. 3.9.

Tabela 1: Fluxo de Nêutrons sem albedo e com albedo para 1 região

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas com regiões (b) e (R) explícitas	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas com Albedo para 1 Região (R)	Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito
x=0 cm	1,111033	1,111033	0
x=10 cm	6,118467E-01	6,118467E-01	0
x=30 cm	1,49789E-06	1,497885E-06	0
x=89 cm	3,94797E-29	3,921040E-29	0,682198181

Tabela 2: Fluxo de nêutrons sem albedo e com albedo para 2 regiões.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas com regiões (b) e (R) explícitas	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas com Albedo para 2 Regiões (b) e (R)	Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito
x=0 cm	1,111033	1,111033	0
x=10 cm	6,118467E-01	6,118467E-01	0
x=30 cm	1,49789E-06	1,497885E-06	0
x=89 cm	3,94797E-29	3,949810E-29	0,046530207

Tabela 3: Tempo Computacional para o problema-modelo Nº 1.

Tempo Computacional			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	Fluxo de Nêutrons Albedo de 1 Região	Fluxo de Nêutrons Albedo de 2 Regiões
Tempo (s)	7,625000E-02	5,625000E-02	4,687500E-02
Ganho computacional em relação ao cálculo explícito (%)		26,229508	38,524590

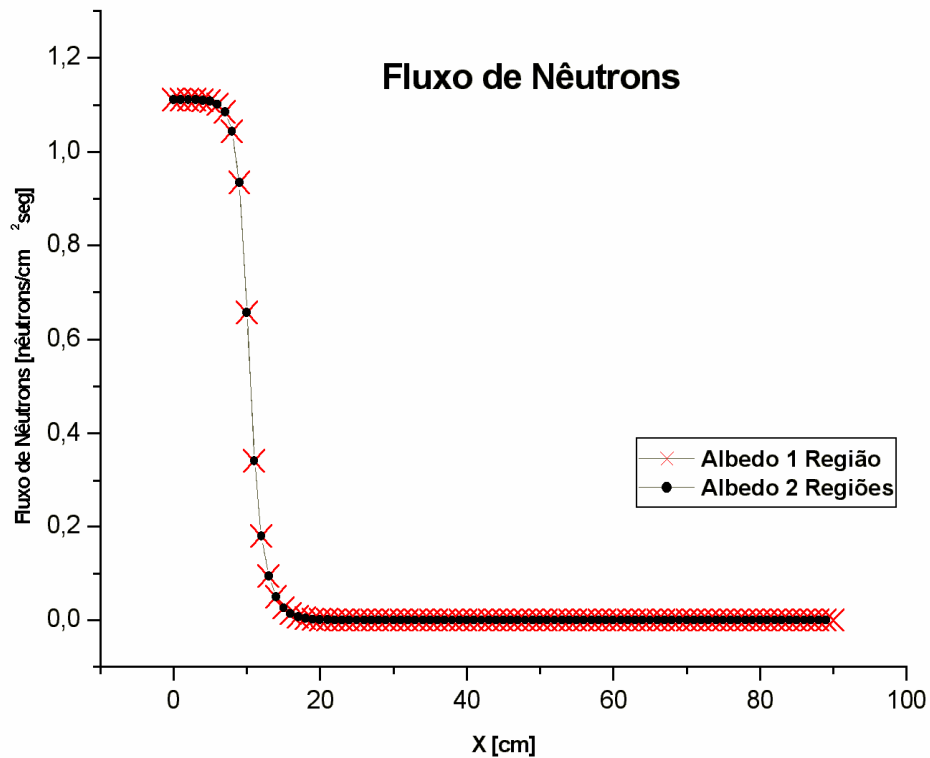


Figura 3.9: Fluxo de nêutrons para o problema modelo monoenergético com fonte fixa.

O gráfico mostra o decaimento dos nêutrons em direção ao fluxo nulo a partir da primeira região, este comportamento é esperado, visto que o termo fonte torna-se nulo nas regiões subseqüentes a primeira.

3.5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O PROBLEMA MODELO Nº 2: FONTE DE FISSÃO

Considerou-se neste caso o mesmo domínio anterior com as mesmas condições de contorno e com os seguintes parâmetros nucleares:

$$\text{Região 1: } D = 1 \quad , \quad \Sigma_a = 0.9 \quad , \quad \nu \Sigma_f = 0.473$$

$$\text{Região 2: } D = 1.2 \quad , \quad \Sigma_a = 0.5 \quad , \quad \nu \Sigma_f = 0.5203$$

$$\text{Região 3: } D = 0.9 \quad , \quad \Sigma_a = 0.7 \quad , \quad \nu \Sigma_f = 0.42572$$

Região 4: $D = 0.8$, $\Sigma_a = 0.6$, $\nu\Sigma_f = 0$

Região 5: $D = 1.4$, $\Sigma_a = 0.9$, $\nu\Sigma_f = 0$

Aqui D tem unidade de [cm], Σ_a [cm^{-1}] e $\nu\Sigma_f$ [cm^{-1}].

Este problema-modelo de autovalor foi resolvido de três maneiras, analogamente ao caso anterior:

- 1) Usando o método de diferenças finitas com 1000 malhas e uma distribuição por região da seguinte forma: 100 malhas para a primeira região, 200 para a segunda região, 590 para a terceira região, 10 para a quarta região e 100 malhas para a última região;
- 2) Usando o método de diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para uma região refletora, isto é, com o “baffle” (b) explícito e a região refletora (R) implícita pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima com 4 regiões;
- 3) Usando diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para duas regiões refletoras; isto é, o albedo substituindo as regiões (b) e (R), ou seja, as mesmas condições acima para 3 regiões.

O fluxo escalar de nêutrons foi calculado em quatro pontos: $x = 0$ cm , $x = 10$ cm , $x = 30$ cm e $x = 89$ cm para uma potência prescrita do reator de 200 *Mwatts* . O critério de convergência para o fluxo e para o Keff foram respectivamente de 10^{-4} e 10^{-5} no desvio relativo.

Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 4, 5 6 e 7 e ilustrado na Fig. 3.10.

Tabela 4: Fluxo escalar de nêutrons calculado sem albedo e com albedo para 1 região.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]				
	X = 0 cm	X = 10 cm	X = 30 cm	X = 89 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	5,223368E+14	1,793206E+17	2,312941E+17	5,987739E+10
Fluxo de Nêutrons com Albedo de 1 Região	5,223369E+14	1,793206E+17	2,312941E+17	5,988513E+10
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,000019	0,000000	0,000000	0,012926

Tabela 5: Fluxo escalar de nêutrons calculado sem albedo e com albedo para 2 regiões.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]				
	X = 0 cm	X = 10 cm	X = 30 cm	X = 89 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	5,223368E+14	1,793206E+17	2,312941E+17	5,987739E+10
Fluxo de Nêutrons com Albedo de 2 Regiões	5,223369E+14	1,793206E+17	2,312941E+17	6,005773E+10
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,000019	0,000000	0,000000	0,301182

Tabela 6: Distribuição de Potência do Reator por Região e Fator de Multiplicação Efetivo (k_{eff}).

Potência por Região (MWT)						
	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 5	Keff
Potência Diferenças Finitas	4,020791	190,075400	5,904141	0,000000	0,000000	9,999334E-01
Potência Albedo 1 Região	4,020790	190,075400	5,904142	0,000000	–	9,999337E-01
Potência Albedo 2 regiões	4,020790	190,075400	5,904142	–	–	9,999337E-01

Tabela 7: Tempo Computacional para o problema-modelo N° 2.

Tempo Computacional			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	Fluxo de Nêutrons Albedo de 1 Região	Fluxo de Nêutrons Albedo de 2 Regiões
Tempo (s)	4,687500E-02	2,125000E-02	1,562500E-02
Ganho computacional em relação ao cálculo explícito (%)		54,666667	66,666667

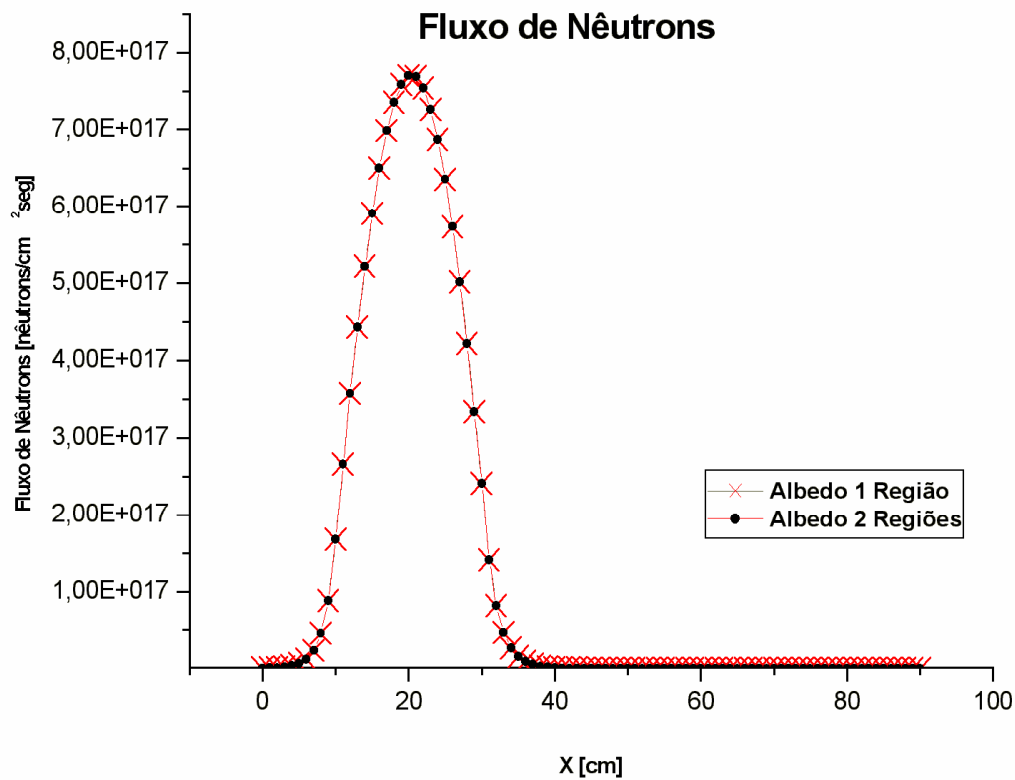


Figura 3.10: Fluxo Escalar de Nêutrons para o problema modelo monoenergético com fonte de fissão.

O gráfico mostra que o fluxo de nêutrons apresenta um máximo na região onde $\nu \Sigma_f$ é maior, mostrando que a potência máxima do reator é gerada na segunda região combustível para este problema-modelo.

Para resolver numericamente este problema foi utilizada a linguagem de programação Fortran 90. Os resultados numéricos foram gerados num microcomputador AMD Sempron com velocidade do processador de 1,60GHz e memória RAM de 480 MB.

CAPÍTULO 4

4 CONDIÇÕES DE CONTORNO TIPO ALBEDO PARA PROBLEMAS MULTIGRUPO

4.1 UMA REGIÃO REFLETORA COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

Considere um domínio unidimensional conforme o ilustrado na Fig. 3.1 na página 23. A equação da difusão independente do tempo com dois grupos de energia em geometria unidimensional cartesiana no interior da região refletora pode ser escrita para o grupo rápido como

$$\frac{d J_{1,R}(x)}{dx} + \sum_{R1,R} \phi_{1,R}(x) = 0 \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.1.a)$$

e pela Lei de Fick

$$J_{1,R}(x) = -D_{1,R} \frac{d}{dx} \phi_{1,R}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.1.b)$$

e para o grupo térmico, tem-se

$$\frac{d J_{2,R}(x)}{dx} + \sum_{a2,R} \phi_{2,R}(x) = \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \phi_{1,R}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.1.c)$$

e pela Lei de Fick

$$J_{2,R}(x) = -D_{2,R} \frac{d}{dx} \phi_{2,R}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.1.d)$$

com condições de contorno

$$\phi_{1,R}(x_b) = 0 \quad (4.2.a)$$

e

$$\phi_{2,R}(x_b) = 0 \quad (4.2.b)$$

$J_{g,R}(x)$ é a corrente de nêutrons do grupo $g=1:2$ na região refletora que pode ser interpretada como o número de nêutrons que passa por unidade de tempo em uma área unitária perpendicular à direção x [Stacey, 2001]. $\Sigma_{R1,R}$ é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo 1 da região refletora. É uma medida que está relacionada com a probabilidade do número de nêutrons que é removido da região do refletor por absorção e espalhamento [Stacey, 2001]. $\Sigma_{S1 \rightarrow 2,R}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo 1 para o grupo 2 na região refletora (down scattering). $\Sigma_{a2,R}$ é a seção de choque macroscópica de absorção do grupo 2 na região refletora. $\phi_{g,R}(x)$ é o fluxo escalar de nêutrons do grupo $g=1:2$ no interior da região refletora. $D_{g,R}$ é o coeficiente de difusão do grupo $g=1:2$ na região refletora.

Deseja-se aqui determinar o albedo para a região refletora de espessura l_R localizada à direita do domínio multiplicativo C representado na Fig. 3.1, na página 23.

Defini-se o albedo neste caso como uma matriz 2×2 , pois o nosso modelo apresenta 2 grupos de energia:

$$\begin{pmatrix} J_1(x_a) \\ J_2(x_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x_a) \\ \phi_2(x_a) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

o que resulta em

$$J_1(x_a) = \alpha_{11} \phi_1(x_a) \quad (4.3.a)$$

$$J_2(x_a) = -\alpha_{21} \phi_1(x_a) + \alpha_{22} \phi_2(x_a) \quad (4.3.b)$$

onde $\alpha_{12} = 0$, pois não consideramos up scattering.

Primeiramente, aplica-se a transformada de Laplace nas Eqs. (4.1.a), (4.1.b), (4.1.c) e (4.1.d). O resultado é

$$s \bar{J}_{1,R}(s) - J_{1,R}(0) + \Sigma_{R1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = 0 \quad (4.4.a)$$

$$\bar{J}_{1,R}(s) = -D_{1,R} \left(s \bar{\phi}_{1,R}(s) - \phi_{1,R}(0) \right) \quad (4.4.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,R}(s) - J_{2,R}(0) + \sum_{a2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) \quad (4.4.c)$$

$$\bar{J}_{2,R}(s) = -D_{2,R} \left(s \bar{\phi}_{2,R}(s) - \phi_{2,R}(0) \right) \quad (4.4.d)$$

Ou equivalentemente

$$s \bar{J}_{1,R}(s) + \sum_{R1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = J_{1,R}(0) \quad (4.5.a)$$

$$\bar{J}_{1,R}(s) + s D_{1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = D_{1,R} \phi_{1,R}(0) \quad (4.5.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,R}(s) + \sum_{a2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = J_{2,R}(0) + \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) \quad (4.5.c)$$

$$\bar{J}_{2,R}(s) + s D_{2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = D_{2,R} \phi_{2,R}(0) \quad (4.5.d)$$

Aqui $x = 0$ é um ponto local e corresponde a $x = x_a$ conforme figura 3.1, na página 23.

Portanto, reescreve-se as Eqs. (4.5.a), (4.5.b), (4.5.c) e (4.5.d) como

$$s \bar{J}_{1,R}(s) + \sum_{R1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = J_{1,R}(x_a) \quad (4.6.a)$$

$$\bar{J}_{1,R}(s) + s D_{1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = D_{1,R} \phi_{1,R}(x_a) \quad (4.6.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,R}(s) + \sum_{a2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = J_{2,R}(x_a) + \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) \quad (4.6.c)$$

$$\bar{J}_{2,R}(s) + s D_{2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = D_{2,R} \phi_{2,R}(x_a) \quad (4.6.d)$$

Resolvendo o sistema linear representado nas Eqs. (4.6.a) e (4.6.b) pelo método de Kramer,

obtém-se a seguinte expressão para $\bar{\phi}_{1,R}(s)$:

$$\bar{\phi}_{1,R}(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & J_{1,R}(x_a) \\ 1 & D_{1,R} \phi_{1,R}(x_a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{R1,R} \\ 1 & s D_{1,R} \end{vmatrix}} \quad (4.7)$$

o que resulta em

$$\bar{\phi}_{1,R}(s) = \frac{s\phi_{1,R}(x_a) - \frac{J_{1,R}(x_a)}{D_{1,R}}}{s^2 - k_{1,R}^2} \quad (4.8)$$

Aqui definimos $k_{1,R} = \sqrt{\frac{\Sigma_{R1,R}}{D_{1,R}}}$ como o inverso do comprimento de difusão de nêutrons rápidos na região refletora.

A Eq. (4.8) pode ser decomposta por frações parciais como:

$$\bar{\phi}_{1,R}(s) = \frac{A}{s - k_{1,R}} + \frac{B}{s + k_{1,R}} \quad (4.9)$$

onde A e B são determinados algebricamente, gerando os seguintes resultados:

$$A = \frac{\phi_{1,R}(x_a)}{2} - \frac{J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}}} \quad (4.10.a)$$

e

$$B = \frac{\phi_{1,R}(x_a)}{2} + \frac{J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}}} \quad (4.10.b)$$

Agora, substituindo as expressões (4.10.a) e (4.10.b) em (4.9) e aplicando a transformada de Laplace inversa na equação resultante, obtém-se

$$\phi_{1,R}(x) = \frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}}} e^{k_{1,R}x} + \frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}}} e^{-k_{1,R}x} \quad (4.11)$$

que é válida para todo x pertencente ao intervalo $[x_a; x_b]$.

Fazendo $x = x_a = 0$, o que resulta em $x = x_b = l_R$, e usando a condição de contorno à direita, $\phi_{1,R}(x_b) = 0$, fica-se com

$$\left(\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)\right)e^{k_{1,R}l_R} + \left(\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\Sigma_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)\right)e^{-k_{1,R}l_R} = 0 \quad (4.12)$$

Isolando $J_{1,R}(x_a)$ na Eq. (4.12) resulta em

$$J_{1,R}(x_a) = \left(\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \right) \phi_{1,R}(x_a) \quad (4.13)$$

que, pela definição da Eq. (4.3.a), implica na expressão do albedo à direita α_{11} para uma região refletora. Portanto, escreve-se

$$\alpha_{11} = \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \quad (4.14)$$

Quando a região do refletor é muito grande, pode-se aproximar que $l_R \rightarrow \infty$, então $\coth(k_{1,R} l_R) \rightarrow 1$, o que implica

$$J_{1,R}(x_a) = \left(\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \right) \phi_{1,R}(x_a) \quad (4.15)$$

que, segundo a Eq. (4.3.a), acarreta na expressão do albedo α_{11} para uma região refletora muito espessa, isto é

$$\alpha_{11} = \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \quad (4.16)$$

Agora resolve-se o sistema formado pelas Eqs. (4.6.c) e (4.6.d). Substituindo a expressão do $\bar{\phi}_{1,R}$ na Eq. (4.6.c) fica-se com o seguinte sistema para resolver

$$s \bar{J}_{2,R}(s) + \sum_{a2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = J_{2,R}(x_a) + \sum_{s1 \rightarrow 2,R} \left[\left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2 \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s - k_{1,R})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2 \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s + k_{1,R})} \right) \right] \quad (4.17.a)$$

$$\bar{J}_{2,R}(s) + s D_{2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = D_{2,R} \phi_{2,R}(x_a) \quad (4.17.b)$$

Resolvendo o sistema linear representado nas Eqs. (4.17.a) e (4.17.b) pelo método de Kramer, obtém-se a seguinte expressão para $\bar{\phi}_{2,R}(s)$:

$$\bar{\phi}_{2,R}(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & J_{2,R}(x_a) + \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \left[\left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s - k_{1,R})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s + k_{1,R})} \right) \right] \\ 1 & D_{2,R} \phi_{2,R}(x_a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{a2,R} \\ 1 & s D_{2,R} \end{vmatrix}} \quad (4.18)$$

o que resulta em

$$\bar{\phi}_{2,R}(s) = \frac{s D_{2,R} \phi_{2,R}(x_a) - J_{2,R}(x_a)}{s^2 D_{2,R} - \sum_{a2,R}} - \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R} \left[\left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s - k_{1,R})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s + k_{1,R})} \right) \right]}{s^2 D_{2,R} - \sum_{a2,R}} \quad (4.19)$$

que pode ser reescrita como

$$\bar{\phi}_{2,R}(s) = \frac{s \phi_{2,R}(x_a) - \frac{J_{2,R}(x_a)}{D_{2,R}}}{s^2 - k_{2,R}^2} - \frac{\frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{D_{2,R}} \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s - k_{1,R})} \right)}{s^2 - k_{2,R}^2} - \frac{\frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{D_{2,R}} \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a) \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} (s + k_{1,R})} \right)}{s^2 - k_{2,R}^2}}, \quad (4.20)$$

$$\text{onde } k_{2,R} = \sqrt{\frac{\sum_{a2,R}}{D_{2,R}}}.$$

Analogamente como feito anteriormente, aplicando a transformada de Laplace inversa, fazendo $x = x_a = 0$, o que resulta em $x = x_b = l_R$, usando a condição de contorno à direita, $\phi_{2,R}(x_b) = 0$ e isolando $J_{2,R}(x_a)$, fica-se com

$$J_{2,R}(x_a) = \phi_{2,R}(x_a) \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \coth(k_{2,R} l_R) - \phi_{1,R}(x_a) \left[\frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{k_{1,R} + k_{2,R}} \right] \quad (4.21)$$

Aqui se utiliza o fato que $J_{1,R}(x_a) = \left(\sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \right) \phi_{1,R}(x_a)$. Pela definição da Eq. (4.3.b) implica que as expressões dos albedos α_{21} e α_{22} para uma região refletora são

$$\alpha_{21} = \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{k_{1,R} + k_{2,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \quad (4.22)$$

e

$$\alpha_{22} = \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \coth(k_{2,R} l_R) \quad (4.23)$$

Quando a região do refletor é muito maior que a região do combustível, pode-se aproximar que $l_R \rightarrow \infty$, então $\coth(k_{2,R} l_R) \rightarrow 1$ e $\coth(k_{1,R} l_R) \rightarrow 1$, o que implica

$$\alpha_{21} = \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{k_{1,R} + k_{2,R}} \quad (4.24.a)$$

$$\alpha_{22} = \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \quad (4.24.b)$$

4.2 DUAS REGIÕES REFLETORAS COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

Seja agora um domínio unidimensional conforme representado na Fig. 3.2.

Neste caso, decompõe-se o meio homogêneo não-multiplicativo em duas regiões, como por exemplo “baffle” e refletor.

As equações da difusão independentes do tempo com dois grupos de energia em geometria unidimensional cartesiana no interior da região não-multiplicativa podem ser escritas como

a) para o grupo rápido na região do “baffle”:

$$\frac{d J_{1,b}(x)}{dx} + \sum_{R1,b} \phi_{1,b}(x) = 0 \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.25.a)$$

$$J_{1,b}(x) = -D_{1,b} \frac{d}{dx} \phi_{1,b}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.25.b)$$

c) e para grupo térmico na região do “baffle”:

$$\frac{d J_{2,b}(x)}{dx} + \sum_{a2,b} \phi_{2,b}(x) = \sum_{S1 \rightarrow 2,b} \phi_{1,b}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.25.c)$$

$$J_{2,b}(x) = -D_{2,b} \frac{d}{dx} \phi_{2,b}(x) \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (4.25.d)$$

d) para o rápido na região do refletor:

$$\frac{d J_{1,R}(x)}{dx} + \sum_{R1,R} \phi_{1,R}(x) = 0 \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (4.26.a)$$

$$J_{1,R}(x) = -D_{1,R} \frac{d}{dx} \phi_{1,R}(x) \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (4.26.b)$$

d) para o grupo térmico na região do refletor

$$\frac{d J_{2,R}(x)}{dx} + \sum_{a2,R} \phi_{2,R}(x) = \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \phi_{1,R}(x) \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (4.26.c)$$

$$J_{2,R}(x) = -D_{2,R} \frac{d}{dx} \phi_{2,R}(x) \quad x_b \leq x \leq x_c \quad (4.26.d)$$

Com condições de contorno

$$\phi_{1,R}(x_c) = 0 \quad (4.27.a)$$

e

$$\phi_{2,R}(x_c) = 0 \quad (4.27.b)$$

Deseja-se aqui é determinar o albedo para a região refletora de espessura l_T localizada à direita do domínio multiplicativo C representado na Fig. 3.2, na página 27.

Defini-se o albedo neste caso como uma matriz 2x2, pois o nosso modelo apresenta 2 grupos de energia:

$$\begin{pmatrix} J_1(x_a) \\ J_2(x_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x_a) \\ \phi_2(x_a) \end{pmatrix}$$

o que resulta em

$$J_1(x_a) = \alpha_{11}\phi_1(x_a) \quad (4.28.a)$$

$$J_2(x_a) = -\alpha_{21}\phi_1(x_a) + \alpha_{22}\phi_2(x_a) \quad (4.28.b)$$

onde $\alpha_{12} = 0$ pois não se considera up scattering.

Aplicando a transformada de Laplace no interior do domínio do “baffle”, isto é. $x_a \leq x \leq x_b$, nas Eqs. (4.25.a), (4.25.b), (4.25.c) e (4.25.d) fica-se com

$$s \bar{J}_{1,b}(s) - J_{1,b}(0) + \sum_{R1,b} \bar{\phi}_{1,b}(s) = 0 \quad (4.29.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) = -D_{1,b} \left(s \bar{\phi}_{1,b}(s) - \phi_{1,b}(0) \right) \quad (4.29.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,b}(s) - J_{2,b}(0) + \sum_{a2,b} \bar{\phi}_{2,b}(s) = \sum_{S1 \rightarrow 2,b} \bar{\phi}_{1,b}(s) \quad (4.29.c)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) = -D_{2,b} \left(s \bar{\phi}_{2,b}(s) - \phi_{2,b}(0) \right) \quad (4.29.d)$$

ou equivalentemente

$$s \bar{J}_{1,b}(s) + \sum_{R1,b} \bar{\phi}_{1,b}(s) = J_{1,b}(0) \quad (4.30.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) + s D_{1,b} \bar{\phi}_{1,b}(s) = D_{1,b} \phi_{1,b}(0) \quad (4.30.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,b}(s) + \sum_{a2,b} \bar{\phi}_{2,b}(s) = J_{2,b}(0) + \sum_{S1 \rightarrow 2,b} \bar{\phi}_{1,b}(s) \quad (4.30.c)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) + sD_{2,b}\bar{\phi}_{2,b}(s) = D_{2,b}\phi_{2,b}(0) \quad . \quad (4.30.d)$$

Aqui $x=0$ é um ponto local e corresponde a $x=x_a$, conforme a Fig. 3.2, na página 27.

Portanto, reescreve-se as Eqs. (4.30.a), (4.30.b), (4.30.c) e (4.30.d) como

$$s\bar{J}_{1,b}(s) + \sum_{R1,b}\bar{\phi}_{1,b}(s) = J_{1,b}(x_a) \quad (4.31.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) + sD_{1,b}\bar{\phi}_{1,b}(s) = D_{1,b}\phi_{1,b}(x_a) \quad (4.31.b)$$

e

$$s\bar{J}_{2,b}(s) + \sum_{a2,b}\bar{\phi}_{2,b}(s) = J_{2,b}(x_a) + \sum_{S1 \rightarrow 2,b}\bar{\phi}_{1,b}(s) \quad (4.31.c)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) + sD_{2,b}\bar{\phi}_{2,b}(s) = D_{2,b}\phi_{2,b}(x_a) \quad . \quad (4.31.d)$$

Resolvendo o sistema linear representado pelas Eqs. (4.31.a) e (4.31.b) pelo método de Kramer,

obtem-se as seguintes expressões para $\bar{\phi}_{1,b}(s)$ e para $\bar{J}_{1,b}(s)$

$$\bar{\phi}_{1,b}(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & J_{1,b}(x_a) \\ 1 & D_{1,b}\phi_{1,b}(x_a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{R1,b} \\ 1 & sD_{1,b} \end{vmatrix}} \quad (4.32.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) = \frac{\begin{vmatrix} J_{1,b}(x_a) & \sum_{R1,b} \\ D_{1,b}\phi_{1,b}(x_a) & sD_{1,b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{R1,b} \\ 1 & sD_{1,b} \end{vmatrix}} \quad . \quad (4.32.b)$$

o que resulta em

$$\bar{\phi}_{1,b}(s) = \frac{s\phi_{1,b}(x_a) - \frac{J_{1,b}(x_a)}{D_{1,b}}}{s^2 - k_{1,b}^2} \quad (4.33.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) = \frac{-\sum_{R1,b}\phi_{1,b}(x_a) + sJ_{1,b}(x_a)}{s^2 - k_{1,b}^2} \quad . \quad (4.33.b)$$

As Eqs. (4.33.a) e (4.33.b) podem ser decompostas em frações parciais como:

$$\bar{\phi}_{1,b}(s) = \frac{A}{s - k_{1,b}} + \frac{B}{s + k_{1,b}} \quad (4.34.a)$$

$$\bar{J}_{1,b}(s) = \frac{C}{s - k_{1,b}} + \frac{D}{s + k_{1,b}} \quad (4.34.b)$$

onde $k_{1,b} = \sqrt{\frac{\sum_{a1,b}}{D_{1,b}}}$ e A, B, C e D são determinados algebricamente, gerando os seguintes resultados:

$$A = \frac{\phi_{1,b}(x_a)}{2} - \frac{J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}}} \quad (4.35.a)$$

$$B = \frac{\phi_{1,b}(x_a)}{2} + \frac{J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}}} \quad (4.35.b)$$

$$C = + \frac{J_{1,b}(x_a)}{2} - \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \phi_{1,b}(x_a)}{2} \quad (4.35.c)$$

$$D = \frac{J_{1,b}(x_a)}{2} + \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \phi_{1,b}(x_a)}{2} \quad (4.35.d)$$

Agora, substituindo as expressões (4.35.a) e (4.35.b) em (4.34.a) e (4.35.c) e (4.35.d) em (4.34.b), aplicando a transformada de Laplace inversa nas equações resultantes, obtém-se

$$\phi_{1,b}(x) = \frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}}} e^{k_{1,b}x} + \frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}}} e^{-k_{1,b}x} \quad (4.36.a)$$

$$J_{1,b}(x) = \frac{J_{1,b}(x_a) - \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \phi_{1,b}(x_a)}{2} e^{k_{1,b}x} + \frac{J_{1,b}(x_a) + \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \phi_{1,b}(x_a)}{2} e^{-k_{1,b}x} \quad (4.36.b)$$

Substituindo a expressão do $\bar{\phi}_{1,b}(s)$ na Eq. (4.31.c) fica-se com o seguinte sistema para resolver

$$s \bar{J}_{2,b}(s) + \sum_{a2,b} \bar{\phi}_{2,b}(s) = J_{2,b}(x_a) + \sum_{s1 \rightarrow 2,b} \left[\left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s - k_{1,b})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s + k_{1,b})} \right) \right] \quad (4.37.a)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) + s D_{2,b} \bar{\phi}_{2,b}(s) = D_{2,b} \phi_{2,b}(x_a) \quad (4.37.b)$$

Resolvendo o sistema linear representado pelas Eqs. (4.37.a) e (4.37b) utilizando o método de Kramer, obtém-se as seguintes expressões para $\bar{\phi}_{2,b}(s)$ e $\bar{J}_{2,b}(s)$:

$$\bar{\phi}_{2,b}(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & J_{2,b}(x_a) + \sum_{s1 \rightarrow 2,b} \left[\left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s - k_{1,b})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s + k_{1,b})} \right) \right] \\ 1 & D_{2,b} \phi_{2,b}(x_a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{a2,b} \\ 1 & s D_{2,b} \end{vmatrix}} \quad (4.38)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) = \frac{\begin{vmatrix} J_{2,b}(x_a) + \sum_{s1 \rightarrow 2,b} \left[\left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s - k_{1,b})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s + k_{1,b})} \right) \right] & \sum_{a2,b} \\ D_{2,b} \phi_{2,b}(x_a) & s D_{2,b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & \sum_{a2,b} \\ 1 & s D_{2,b} \end{vmatrix}} \quad (4.39)$$

O que resulta em

$$\bar{\phi}_{2,b}(s) = \frac{s D_{2,b} \phi_{2,b}(x_a) - J_{2,b}(x_a)}{s^2 D_{2,b} - \sum_{a2,b}} - \frac{\sum_{s1 \rightarrow 2,b} \left[\left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s - k_{1,b})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s + k_{1,b})} \right) \right]}{s^2 D_{2,b} - \sum_{a2,b}} \quad (4.40.a)$$

$$\bar{J}_{2,b}(s) = \frac{-\sum_{a2,b} D_{2,b} \phi_{2,b}(x_a) + s D_{2,b} J_{2,b}(x_a)}{s^2 D_{2,b} - \sum_{a2,b}} + \frac{s D_{2,b} \sum_{s1 \rightarrow 2,b} \left[\left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s - k_{1,b})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (s + k_{1,b})} \right) \right]}{s^2 D_{2,b} - \sum_{a2,b}} \quad (4.40.b)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace nas Eqs. (4.40.a) e (4.40.b), fazendo $x = x_a = 0$, o que resulta em $x = x_b = l_b$, e substituindo nas respectivas equações escreve-se

$$\begin{aligned} \phi_{2,b}(x) = & \frac{J_{2,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}}} \left(-e^{k_{2,b} l_b} + e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \frac{\phi_{2,b}(x_a)}{2} \left(e^{k_{2,b} l_b} + e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \\ & \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b}}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b} \sum_{a2,b}}} \left[\left(\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} - J_{1,b}(x_a) \right) e^{k_{1,b} l_b} + \left(\phi_{1,b}(x_a) \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} + J_{1,b}(x_a) \right) e^{-k_{1,b} l_b} \right] + \quad (4.41.a) \\ & \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b}}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \left(\sqrt{\sum_{a2,b} D_{2,b}} \right) k_{1,b}} \left[\left(-2J_{1,b}(x_a) \right) e^{k_{2,b} l_b} + \left(2J_{1,b}(x_a) \right) e^{-k_{2,b} l_b} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J_{2,b}(x) = & \frac{J_{2,b}(x_a)}{2} \left(e^{k_{2,b} l_b} - e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \frac{\phi_{2,b}(x_a) \sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}}}{2} \left(e^{k_{2,b} l_b} + e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \\ & \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b} J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (k_{2,b} - k_{1,b})} \left(e^{k_{2,b} l_b} - e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b} \phi_{1,b}(x_a)}{2(k_{2,b} - k_{1,b})} \left(e^{k_{2,b} l_b} + e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \quad (4.41.b) \\ & \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b} J_{1,b}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} (k_{2,b} + k_{1,b})} \left(e^{k_{2,b} l_b} - e^{-k_{2,b} l_b} \right) + \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b} \phi_{1,b}(x_a)}{2(k_{2,b} + k_{1,b})} \left(e^{k_{2,b} l_b} + e^{-k_{2,b} l_b} \right) \end{aligned}$$

$$\text{onde } k_{2,b} = \sqrt{\frac{\sum_{a2,b}}{D_{2,b}}}.$$

Aplicando agora a transformada de Laplace na região do refletor, isto é, $x_b \leq x \leq x_c$, nas Eqs. (4.26.a), (4.26.b), (4.26.c) e (4.26.d) ficamos com

$$s \bar{J}_{1,R}(s) + \sum_{R1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = J_{1,R}(x_a) \quad (4.42.a)$$

$$\bar{J}_{1,R}(s) + s D_{1,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) = D_{1,R} \phi_{1,R}(x_a) \quad (4.42.b)$$

e

$$s \bar{J}_{2,R}(s) + \sum_{a2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = J_{2,R}(x_a) + \sum_{S1 \rightarrow 2,R} \bar{\phi}_{1,R}(s) \quad (4.42.c)$$

$$\bar{J}_{2,R}(s) + s D_{2,R} \bar{\phi}_{2,R}(s) = D_{2,R} \phi_{2,R}(x_a) \quad (4.42.d)$$

cuja solução é

$$\phi_{2,R}^-(s) = \frac{s\phi_{2,R}(x_a) - \frac{J_{2,R}(x_a)}{D_{2,R}}}{s^2 - k_{2,R}^2} - \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R} \left[\left(\frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}}(s - k_{1,R})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}}(s + k_{1,R})} \right) \right]}{s^2 - k_{2,R}^2} \quad (4.43.a)$$

e

$$J_{2,R}^-(s) = \frac{-\sum_{a2,R}\phi_{2,R}(x_a) + sJ_{2,R}(x_a)}{s^2 - k_{2,R}^2} + \frac{s\sum_{S1 \rightarrow 2,R} \left[\left(\frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}}(s - k_{1,R})} \right) + \left(\frac{\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}}(s + k_{1,R})} \right) \right]}{s^2 - k_{2,R}^2} \quad (4.43.b)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na Eq. (4.43.a), obtém-se

$$\phi_{2,R}(x) = \frac{J_{2,R}(x_a)}{2\sqrt{D_{2,R}\sum_{a2,R}}} \left(-e^{k_{2,R}x} + e^{-k_{2,R}x} \right) + \frac{\phi_{2,R}(x_a)}{2} \left(e^{k_{2,R}x} + e^{-k_{2,R}x} \right) + \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}\sum_{a2,R}}} \left[\left(\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} - J_{1,R}(x_a) \right) e^{k_{1,R}x} + \left(\phi_{1,R}(x_a)\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} + J_{1,R}(x_a) \right) e^{-k_{1,R}x} \right] + \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{2\sqrt{D_{1,R}\sum_{R1,R}} \left(\sqrt{\sum_{a2,R} D_{2,R}} \right) k_{1,R}} \left[\left(-2J_{1,R}(x_a) \right) e^{k_{2,R}x} + \left(2J_{1,R}(x_a) \right) e^{-k_{2,R}x} \right] \quad (4.44)$$

Fazendo $x = x_b = 0$, o que resulta em $x = x_c = l_R$, substituindo na Eq. (4.44) e utilizando a condição de contorno (4.27.b), implica que

$$\phi_{2,R}(l_R) = 0 \quad (4.45)$$

Sabe-se como resultado que

$$J_1(x_b) = \alpha_{11}^{old} \phi_1(x_b) \quad (4.46.a)$$

$$J_2(x_b) = -\alpha_{21}^{old} \phi_1(x_b) + \alpha_{22}^{old} \phi_2(x_b) \quad (4.46.b)$$

Porém, substituindo $J_1(x_b)$ e $\phi_1(x_b)$ dados pelas Eqs. (4.36.a) e (4.36.b)

respectivamente na Eq. (4.46.a), onde $\alpha_{11}^{old} = \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R)$, fica-se com

$$J_{1,b}(x_a) = \left(\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \sinh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \cosh(k_{1,b} l_b)}{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \cosh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \sinh(k_{1,b} l_b)} \right) \phi_{1,b}(x_a). \quad (4.47)$$

Portanto, definindo $J_{1,b}(x_a) = \alpha_{11}^{new} \phi_{1,b}(x_a)$, obtém-se o novo albedo α_{11}^{new} a partir da Eq. (4.47) como

$$\alpha_{11}^{new} = \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \sinh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \cosh(k_{1,b} l_b)}{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \cosh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \sinh(k_{1,b} l_b)}. \quad (4.48)$$

Quando a região do refletor tem dimensões muito grandes, faz-se $l_r \rightarrow \infty$, o que implica em $\coth(k_{1,R} l_R) \rightarrow 1$, assim se pode reescrever a Eq. (4.48) como

$$\alpha_{11}^{new} = \sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \sinh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \cosh(k_{1,b} l_b)}{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \cosh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \sinh(k_{1,b} l_b)} \quad (4.49)$$

Analogamente, substituindo $J_2(x_b)$, $\phi_1(x_b)$ e $\phi_2(x_b)$ dados pelas Eqs. (4.41.b), (4.36.a) e (4.41.a) respectivamente na Eq. (4.46.b), e definindo

$$J_2(x_a) = -\alpha_{21}^{new} \phi_1(x_a) + \alpha_{22}^{new} \phi_2(x_a) \quad (4.50)$$

onde

$$\alpha_{21}^{old} = \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,R}}{k_{1,R}^2 + k_{2,R}^2}$$

e

$$\alpha_{22}^{old} = \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \coth(k_{2,R} l_R)$$

obtém-se as novas expressões do albedo a partir da Eq. (4.50) como

$$\begin{aligned}
\alpha_{21}^{new} = & \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b}^2}{(k_{2,b}^2 - k_{1,b}^2)} \frac{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}}}{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b} \cosh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \sinh(k_{2,b} l_b)}} - \\
& \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}} \sinh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \cosh(k_{1,b} l_b)}{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b} \cosh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \coth(k_{1,R} l_R) \sinh(k_{1,b} l_b)}} \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b}^2}{(k_{2,b}^2 - k_{1,b}^2)} \times \\
& \left(\frac{\sqrt{D_{2,b} \sum_{R1,b}}}{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b} \cosh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,r} \sum_{a2,r}} \sinh(k_{1,b} l_b)}} - \frac{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}}}{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b} \cosh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,r} \sum_{a2,r}} \sinh(k_{1,b} l_b)}} \right) + \\
& \frac{\sum_{S1 \rightarrow 2,b}^2}{(k_{2,R}^2 - k_{1,R}^2)} \frac{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b}}}{\sqrt{D_{1,b} \sum_{R1,b} \cosh(k_{1,b} l_b) + \sqrt{D_{1,R} \sum_{R1,R}} \sinh(k_{1,b} l_b)}} \times \\
& \frac{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}} D_{2,b} (k_{2,R} - k_{1,R})}{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b} \cosh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \sinh(k_{2,b} l_b)}}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

e

$$\alpha_{22}^{new} = \sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}} \frac{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b}} \sinh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \coth(k_{2,R} l_R) \cosh(k_{2,b} l_b)}{\sqrt{D_{2,b} \sum_{a2,b} \cosh(k_{2,b} l_b) + \sqrt{D_{2,R} \sum_{a2,R}} \coth(k_{2,R} l_R) \sinh(k_{2,b} l_b)}} \tag{4.52}$$

4.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MULTIGRUPO COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA COM FONTE FIXA

Analogamente ao caso monoenergético considera-se um domínio unidimensional conforme a Fig. 3.3, na página 32. Considerando a equação da difusão independente do tempo multigrupo com dois grupos de energia em geometria unidimensional no interior do domínio $0 \leq x \leq X$ conforme descrito na Eq. (2.61), pode-se reescrevê-la na seguinte forma

a) para o grupo rápido de energia

$$\frac{d J_1(x)}{dx} + \sum_{R_1} \phi_1(x) = S_1(x) \tag{4.53}$$

e

$$J_1(x) = -D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \quad . \quad (4.54)$$

b) para o grupo térmico de energia

$$\frac{d J_2(x)}{dx} + \sum_{a_2} \phi_2(x) = \sum_{s_{12}} \phi_1(x) + S_2(x) \quad (4.55)$$

e

$$J_2(x) = -D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \quad . \quad (4.56)$$

Para o grupo $g=1$ tem-se a equação semelhante ao caso monoenergético, exceto que ao invés de \sum_a agora tem-se \sum_{R_i} e para $g=2$ tem-se a equação semelhante ao caso monoenergético, exceto pelo acréscimo de um termo $\sum_{s_{12}} \phi_2(x)$ na fonte do problema.

Resolvendo e seguindo os mesmos passos como no caso monoenergético, descritos na seção 3.3, encontra-se as equações discretizadas para os três casos de interesse:

Caso A: duas malhas contíguas no interior do domínio;

Caso B: metade da primeira malha à esquerda em $x = 0$;

Caso C: metade da última à direita em $x = X$.

Assim para o grupo rápido ($g=1$) fica-se com as 3 seguintes equações discretizadas:

$$\left(-\frac{2D_{1,i}}{h_i} \right) \phi_{1,i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{1,i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_{1,i}}{h_i} + \sum_{R_i} h_i + \sum_{R_{i+1}} h_{i+1} \right) \phi_{1,i+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{2D_{1,i+1}}{h_{i+1}} \right) \phi_{1,i+\frac{3}{2}} = S_{1,i} h_i + S_{1,i+1} h_{i+1} \quad (4.57)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para malhas interiores, isto é, para $i = 1, \dots, I-1$.

$$\left(\frac{2D_{1,1}}{h_1} + 2\alpha_{esq} + \sum_{R_{1,1}} h_1 \right) \phi_{1,\frac{1}{2}} + \left(-2\frac{D_{1,1}}{h_1} \right) \phi_{1,\frac{3}{2}} = S_{1,1} h_1 \quad (4.58)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a primeira malha a esquerda.

$$\left(-\frac{2D_{1,I}}{h_I} \right) \phi_{1,I-\frac{1}{2}} + \left(2\alpha_{dir} + \frac{2D_{1,I}}{h_I} + \sum_{R_{1,I}} h_I \right) \phi_{1,I+\frac{1}{2}} = S_{1,I} h_I \quad (4.59)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita.

Para o grupo térmico (g=2) fica-se com

$$\left(-\frac{2D_{2,i}}{h_i}\right)\phi_{2,i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{2,i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_{2,i}}{h_i} + \sum_{a_{2i}} h_i + \sum_{a_{2i+1}} h_{i+1}\right)\phi_{2,i+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{2D_{2,i+1}}{h_{i+1}}\right)\phi_{2,i+\frac{3}{2}} = S_{2,i}h_i + S_{2,i+1}h_{i+1} + \phi_{1,i+\frac{1}{2}}\left(\sum_{s_{12i}} h_i + \sum_{s_{12i+1}} h_{i+1}\right) \quad (4.60)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para malhas interiores, isto é, para $i = 1, \dots, I-1$.

$$\left(\frac{2D_{2,1}}{h_1} + 2\alpha_{esq} + \sum_{a_{21}} h_1\right)\phi_{2,\frac{1}{2}} + \left(-2\frac{D_{2,1}}{h_1}\right)\phi_{2,\frac{3}{2}} = S_{2,1}h_1 + \left(\sum_{s_{121}} h_1 + 2\alpha_{esq}\right)\phi_{1,\frac{1}{2}} \quad (4.61)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a primeira malha à esquerda.

$$\left(-\frac{2D_{2,I}}{h_I}\right)\phi_{2,I-\frac{1}{2}} + \left(2\alpha_{dir} + \frac{2D_{2,I}}{h_I} + \sum_{a_{2I}} h_I\right)\phi_{2,I+\frac{1}{2}} = S_{2,I}h_I + \left(\sum_{s_{12I}} h_I + 2\alpha_{dir}\right)\phi_{1,I+\frac{1}{2}} \quad (4.62)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita.

Com as equações algébricas (4.57) a (4.62) tem-se um sistema de equações lineares e algébricas que foi resolvido pelo método direto de eliminação de Gauss com substituição recuada e teve-se com solução o fluxo de nêutrons tanto para o grupo rápido quanto para o grupo térmico de energia.

4.3.1) VALORES DOS ALBEDOS

Os valores dos albedos seguem analogamente as condições de contorno tratadas na Seção 3.3.1.

4.3.1.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO ESPECIAL DO TIPO ALBEDO

Aqui a condição de contorno representa o parâmetro albedo calculado anteriormente nas Seções 4.1 e 4.2, descrito pelas Eqs. (4.14), (4.22) e (4.23) para uma região refletora e pelas Eqs. (4.48), (4.51) e (4.52) para duas regiões refletoras.

4.4 DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS PARA O PROBLEMA MULTIGRUPO COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA COM FONTE DE FISSÃO (PROBLEMA DE AUTOVALOR)

Considerando a equação da difusão independente do tempo multigrupo com dois grupos de energia em geometria unidimensional no interior do domínio $0 \leq x \leq X$ conforme descrito na Eq. 2.60, pode-se reescrevê-la como

a) para o grupo rápido de energia

$$\frac{d J_1(x)}{dx} + \sum_{R_1} \phi_1(x) = \frac{1}{k_{eff}} \left(\nu_1 \sum_{f_1} \phi_1 + \nu_2 \sum_{f_2} \phi_2 \right) \quad (4.63)$$

e

$$J_1(x) = -D_1 \frac{d}{dx} \phi_1(x) \quad . \quad (4.64)$$

b) para o grupo térmico de energia

$$\frac{d J_2(x)}{dx} + \sum_{a_2} \phi_2(x) = \sum_{s_{12}} \phi_1(x) \quad (4.65)$$

e

$$J_2(x) = -D_2 \frac{d}{dx} \phi_2(x) \quad . \quad (4.66)$$

Analogamente ao caso multigrupo com fonte fixa, considera-se três casos de interesse:

Caso A: duas malhas contíguas no interior do domínio;

Caso B: metade da primeira malha à esquerda em $x = 0$;

Caso C: metade da última à direita em $x = X$.

Assim, para o grupo rápido ($g=1$) fica-se com

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2D_{1,i}}{h_i} \right) \phi_{1,i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{1,i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_{1,i}}{h_i} + \sum_{R_i} h_i + \sum_{R_{i+1}} h_{i+1} \right) \phi_{1,i+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{2D_{1,i+1}}{h_{i+1}} \right) \phi_{1,i+\frac{3}{2}} = \\ & \frac{1}{k_{eff}} \left((h_i \nu_{1,i} \sum f_{1,i} + h_{i+1} \nu_{1,i+1} \sum f_{1,i+1}) \phi_{1,i+\frac{1}{2}} + (h_i \nu_{2,i} \sum f_{2,i} + h_{i+1} \nu_{2,i+1} \sum f_{2,i+1}) \phi_{2,i+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

que é a equação da difusão discretizada para malhas interiores, isto é, para $i = 1, \dots, I-1$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2D_{1,1}}{h_1} + 2\alpha_{esq} + \sum_{R_{1,1}} h_1 \right) \phi_{1,\frac{1}{2}} + \left(-2\frac{D_{1,1}}{h_1} \right) \phi_{1,\frac{3}{2}} = \\ & \frac{1}{k_{eff}} \left((h_1 \nu_{1,1} \sum f_{1,1}) \phi_{1,\frac{1}{2}} + (h_1 \nu_{2,1} \sum f_{2,1}) \phi_{2,\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a primeira malha à esquerda.

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2D_{1,I}}{h_I} \right) \phi_{1,I-\frac{1}{2}} + \left(2\alpha_{dir} + \frac{2D_{1,I}}{h_I} + \sum_{R_{1,I}} h_I \right) \phi_{1,I+\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{k_{eff}} (h_I \nu_{1,I} \sum f_{1,I}) \phi_{1,I+\frac{1}{2}} + (h_I \nu_{2,I} \sum f_{2,I}) \phi_{2,I+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

que é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita.

Para o grupo térmico ($g=2$) fica-se com

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2D_{2,i}}{h_i} \right) \phi_{2,i-\frac{1}{2}} + \left(2\frac{D_{2,i+1}}{h_{i+1}} + 2\frac{D_{2,i}}{h_i} + \sum_{a_2,i} h_i + \sum_{a_2,i+1} h_{i+1} \right) \phi_{2,i+\frac{1}{2}} + \\ & \left(-\frac{2D_{2,i+1}}{h_{i+1}} \right) \phi_{2,i+\frac{3}{2}} = \left(\sum_{s_{12,i}} h_i + \sum_{s_{12,i+1}} h_{i+1} \right) \phi_{1,i+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para malhas interiores, isto é, para $i = 1, \dots, I - 1$.

$$\left(\frac{2D_{2,i}}{h_i} + 2\alpha_{esq} + \sum_{a_2,i} h_i \right) \phi_{2,i-\frac{1}{2}} + \phi_{2,i+\frac{1}{2}} + \left(-2 \frac{D_{2,i}}{h_i} \right) \phi_{1,i-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s_{12,i}} h_i + 2\alpha_{esq} \right) \phi_{1,i-\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.71)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a primeira malha à esquerda.

$$\left(\frac{2D_{2,i}}{h_i} + 2\alpha_{dir} + \sum_{a_2,i} h_i \right) \phi_{2,i+\frac{1}{2}} + \left(-2 \frac{D_{2,i}}{h_i} \right) \phi_{2,i-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s_{12,i}} h_i + 2\alpha_{dir} \right) \phi_{1,i+\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.72)$$

Esta é a equação da difusão discretizada para a última malha à direita.

Com o conjunto de equações lineares e algébricas descritos pelas Eqs. (4.67) a (4.72) gerados pelo método de diferenças finitas, pode-se resolver o problema de autovalor pelo método da potência conforme descrito na seção 3.4 e fornecer os valores para o fator de multiplicação efetivo k_{eff} e o perfil do fluxo convergido pela potência do reator.

4.4.1 VALORES DOS ALBEDOS

Os valores dos albedos seguem analogamente as condições de contorno tratadas na Seção 3.3.1.

4.4.1.1 CONDIÇÃO DE CONTORNO ESPECIAL DO TIPO ALBEDO

Aqui a condição de contorno representa o parâmetro albedo calculado anteriormente nas Seções 4.1 e 4.2, descrito pelas Eqs. (4.14), (4.22) e (4.23) para uma região refletora e pelas Eqs. (4.48), (4.51) e (4.52) para duas regiões refletoras.

4.5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS COM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

4.5.1 PROBLEMA - MODELO Nº 3: FONTE FIXA

Para este problema modelo foi considerado um domínio heterogêneo com 6 regiões conforme a Fig. 4.1.

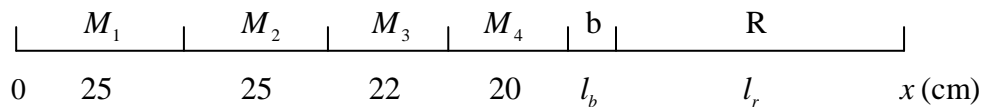


Figura 4.1: Domínio Heterogêneo para o problema com dois Grupos de Energia com fonte fixa, $l_b = 2,857$ cm e $l_r = 80$ cm.

Com regiões materiais (M_1): $0 \leq x \leq 25$ cm, (M_2): 25 cm $\leq x \leq 50$ cm, (M_3): 50 cm $\leq x \leq 72$ cm, (M_4): $72 \leq x \leq 92$ cm, uma região de revestimento (b): 92 cm $\leq x \leq 94,857$ cm e uma região refletora (R), no caso a água: $94,857$ cm $\leq x \leq 174,857$ cm.

Para este problema utilizamos as seguintes condições de contorno:

- a) Reflexiva em $x = 0$ cm.
- b) Fluxo Nulo em $x = 174,857$ cm.

Estamos considerando neste problema os seguintes dados nucleares para as regiões:

R1: $S_1 = 1; S_2 = 0; D_1 = 1,438; D_2 = 0,3976; \Sigma_{R1} = 0,02935; \Sigma_{a2} = 0,10490; \Sigma_{S_{12}} = 0,01563$

R2: $S_1 = 0; S_2 = 0; D_1 = 1,438; D_2 = 0,3825; \Sigma_{R1} = 0,02660; \Sigma_{a2} = 0,07862; \Sigma_{S_{12}} = 0,1738$

R3: $S_1 = 0; S_2 = 0; D_1 = 1,409; D_2 = 0,4051; \Sigma_{R1} = 0,02661; \Sigma_{a2} = 0,10630; \Sigma_{S_{12}} = 0,01583$

R4: $S_1 = 0; S_2 = 0; D_1 = 1,466; D_2 = 0,3858; \Sigma_{R1} = 0,02615; \Sigma_{a2} = 0,111; \Sigma_{S_{12}} = 0,01559$

R5: $S_1 = 0; S_2 = 0; D_1 = 1,049; D_2 = 0,333493; \Sigma_{R1} = 0,004634; \Sigma_{a2} = 0,151881; \Sigma_{S_{12}} = 0,001012$

R6: $S_1 = 0; S_2 = 0; D_1 = 1,87142; D_2 = 0,283409; \Sigma_{R1} = 0,035411; \Sigma_{a2} = 0,031579; \Sigma_{S_{12}} = 0,034340$

Resolveu-s a equação da difusão com dois grupos de energia com fonte fixa de três maneiras:

- 1) Usando o método de diferenças finitas com 1748 malhas e uma distribuição por região da seguinte forma: 250 malhas para a primeira região, 250 para a segunda região, 220 para a terceira região, 200 para a quarta região, 28 para a quinta região e 800 malhas para a última região;
- 2) Usando o método de diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para uma região refletora; isto é, com “baffle” explícito e refletor implícito pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima para 5 regiões;
- 3) Usando diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para duas regiões refletoras; isto é, com “baffle” e refletor implícitos pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima para 4 regiões.

O fluxo escalar de nêutrons foi calculado em cinco pontos do domínio: $x = 0 \text{ cm}$, $x = 25 \text{ cm}$, $x = 50 \text{ cm}$, $x = 72 \text{ cm}$ e $x = 92 \text{ cm}$.

Os resultados obtidos estão exibidos nas Tabelas 8, 9 e 10 e ilustrados nas Fig.s 4.2 e 4.3.

Tabela 8: Fluxo de Nêutrons gerado sem albedo e com albedo para 1 região para os dois Grupos de Energia.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]					
	X= 0 cm	X = 25 cm	X = 50 cm	X = 72 cm	X= 92 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=1)	1,142694E+01	5,433184E+00	5,462490E-06	3,102981E-11	1,001387E-15
Fluxo de Nêutrons com Albedo 1 de Região (g=1)	1,142694E+01	5,433184E+00	5,462490E-06	3,102981E-11	1,007084E-15
Desvio Relativo percentual em relação ao cálculo explícito	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,568911
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=2)	1,690794E+00	9,531522E-01	1,218791E-06	5,164326E-12	8,849103E-17
Fluxo de Nêutrons com Albedo de 1 Região (g=2)	1,690794E+00	9,531522E-01	1,218791E-06	5,164326E-12	8,788203E-17
Desvio Relativo percentual em relação ao cálculo explícito	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,688205

Tabela 9: Fluxo de Nêutrons gerado sem albedo e com albedo para 2 regiões para os dois Grupos de Energia.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm ² seg]					
	X= 0 cm	X = 25 cm	X = 50 cm	X = 72 cm	X= 92 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=1)	1,142694E+01	5,433184E+00	5,462490E-06	3,102981E-11	1,001387E-15
Fluxo de Nêutrons com Albedo de 2 Regiões (g=1)	1,142694E+01	5,433184E+00	5,462490E-06	3,102981E-11	1,006588E-15
Desvio Relativo percentual em relação ao cálculo explícito	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,519380
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=2)	1,690794E+00	9,531522E-01	1,218791E-06	5,164326E-12	8,849103E-17
Fluxo de Nêutrons com Albedo de 2 Regiões (g=2)	1,690794E+00	9,531522E-01	1,218791E-06	5,164326E-12	8,768203E-17
Desvio Relativo percentual em relação ao cálculo explícito	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,914217

Tabela 10: Tempo Computacional para o problema-modelo N° 3.

Tempo Computacional			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	Fluxo de Nêutrons com Albedo de 1 Região	Fluxo de Nêutrons com Albedo de 2 Regiões
Tempo (s)	3,125000E-02	2,125000E-02	1,562500E-02
Ganho computacional em relação ao cálculo explícito (%)		32,000000	50,000000

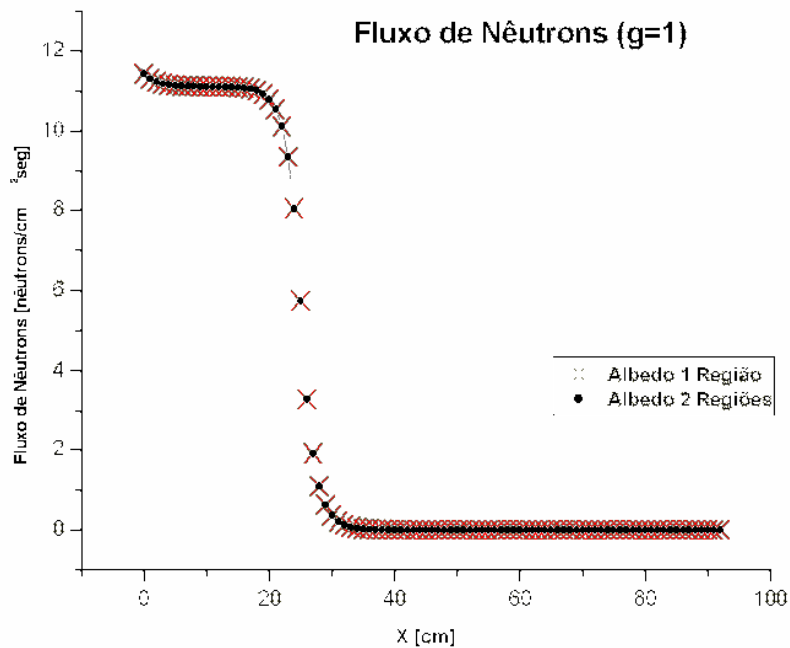


Figura 4.2: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido (g=1) para o Problema-Modelo N° 3.

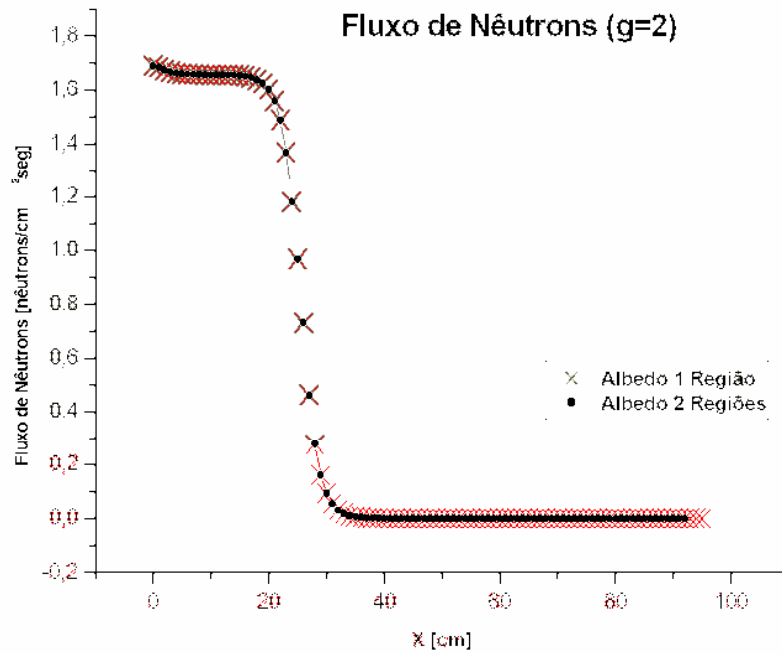


Figura 4.3: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico ($g=2$) para o Problema-Modelo N° 3.

Tanto para os nêutrons rápidos ($g=1$) quanto para os nêutrons térmicos ($g=2$), tem-se um comportamento análogo do fluxo de nêutrons: torna-se máximo na primeira região devido ao aumento da absorção e nulidade do termo fonte nas regiões subseqüentes a primeira.

4.5.2 PROBLEMA-MODELO N° 4: FONTE DE FISSÃO

Para este problema modelo foi considerado um domínio heterogêneo análogo ao caso anterior com as mesmas distribuições com 6 regiões conforme a Fig. 4.1.

Utilizou-se neste problema os seguintes parâmetros nucleares para as regiões:

$$\mathbf{R1:} \quad D_1 = 1,438; D_2 = 0,3976; \Sigma_{R1} = 0,02935; \Sigma_{a2} = 0,10490; \Sigma_{S_{12}} = 0,01563 \\ \nu \Sigma_{f1} = 0,0083501; \nu \Sigma_{f2} = 0,155618$$

$$\mathbf{R2:} \quad D_1 = 1,438; D_2 = 0,3825; \Sigma_{R1} = 0,02660; \Sigma_{a2} = 0,07862; \Sigma_{S_{12}} = 0,01738 \\ \nu \Sigma_{f1} = 0,0083501; \nu \Sigma_{f2} = 0,155618$$

$$\mathbf{R3:} \quad D_1 = 1,409; D_2 = 0,4051; \Sigma_{R1} = 0,02661; \Sigma_{a2} = 0,10630; \Sigma_{S_{12}} = 0,01583$$

$$\nu \Sigma_{f1} = 0,0105; \nu \Sigma_{f2} = 0,22218$$

$$\mathbf{R4:} \quad D_1 = 1,466; D_2 = 0,3858; \Sigma_{R1} = 0,02615; \Sigma_{a2} = 0,111; \Sigma_{S_{12}} = 0,01559$$

$$\nu \Sigma_{f1} = 0,0080640; \nu \Sigma_{f2} = 0,199381$$

$$\mathbf{R5:} \quad D_1 = 1,049; D_2 = 0,333493; \Sigma_{R1} = 0,004634; \Sigma_{a2} = 0,151881; \Sigma_{S_{12}} = 0,001012$$

$$\nu \Sigma_{f1} = 0; \nu \Sigma_{f2} = 0$$

$$\mathbf{R6:} \quad D_1 = 1,87142; D_2 = 0,283409; \Sigma_{R1} = 0,035411; \Sigma_{a2} = 0,031579; \Sigma_{S_{12}} = 0,034340$$

$$\nu \Sigma_{f1} = 0; \nu \Sigma_{f2} = 0$$

Analogamente ao caso anterior, foi resolvida a equação da difusão com dois grupos de energia com fonte de fissão de três maneiras:

- 1) Usando o método de diferenças finitas com 1748 malhas e uma distribuição por região da seguinte forma: 250 malhas para a primeira região, 250 para a segunda região, 220 para a terceira região, 200 para a quarta região, 28 para a quinta região e 800 malhas para a última região;
- 2) Usando o método de diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para uma região refletora; isto é, com “baffle” explícito e refletor implícito pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima para 5 regiões;
- 3) Usando diferenças finitas com condições de contorno tipo albedo para resolver numericamente este problema para duas regiões refletoras; isto é, com “baffle” e refletor implícitos pelo albedo, ou seja, as mesmas condições acima para 4 regiões.

O fluxo de nêutrons foi calculado em cinco pontos do domínio: $x = 0 \text{ cm}$, $x = 25 \text{ cm}$, $x = 50 \text{ cm}$, $x = 72 \text{ cm}$ e $x = 92 \text{ cm}$ para uma potência prescrita do reator de 200 MWT. O critério de convergência para o fluxo e para o k_{eff} foram respectivamente de 10^{-4} e 10^{-5} no desvio relativo.

Os resultados estão dados nas Tabelas 11, 12, 13 e 14 e ilustrados nas Figs. 4.4 e 4.5.

Tabela 11: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido de energia, sem albedo, com albedo para 1 região e com albedo para 2 Regiões.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]					
	X= 0 cm	X = 25 cm	X = 50 cm	X = 72 cm	X= 92 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=1)	1,043374E+14	8,444018E+16	1,635675E+18	9,573301E+17	1,750701E+16
Fluxo de Nêutrons Albedo 1 Região (g=1)	1,043131E+14	8,442124E+16	1,635346E+18	9,572398E+17	1,764890E+16
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,023290	0,022430	0,020114	0,009432	0,810475
Fluxo de Nêutrons Albedo 2 Regiões (g=1)	1,042678E+14	8,438297E+16	1,634609E+18	9,570281E+17	1,773688E+16
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,066707	0,067752	0,065172	0,031546	1,313017

Tabela 12: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico de energia, sem albedo, com albedo para 1 região e com albedo para 2 Regiões.

Fluxo de Nêutrons [Nêutrons/cm²seg]					
	X= 0 cm	X = 25 cm	X = 50 cm	X = 72 cm	X= 92 cm
Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas (g=2)	4,771184E+12	4,781230E+15	8,733574E+16	4,159283E+16	4,252688E+14
Fluxo de Nêutrons Albedo 1 Região (g=2)	4,770100E+12	4,780186E+15	8,731865E+16	4,158912E+16	4,262688E+14
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,022720	0,021835	0,019568	0,008920	0,235145
Fluxo de Nêutrons Albedo 2 Regiões (g=2)	4,767740E+12	4,777731E+15	8,727408E+16	4,157735E+16	4,282688E+14
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,072183	0,073182	0,070601	0,037218	0,705436

Tabela 13: Potência por Região e k_{eff} .

Potência por Região [MWT]								
	R1	R2	R3	R4	R5	R6	Keff	Tempo (s)
Potência Diferenças Finitas	0,759797	41,299690	145,096800	12,84142	0	0	9,991050E-01	7,687500E-02
Potência Albedo 1 Região	0,759626	41,291030	145,071100	12,87562	0	–	9,991060E-01	4,687500E-02
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,022519	0,020969	0,017712	0,266326	–	–	0,000100	39,024390
Potência Albedo 2 regiões	0,759283	41,272220	145,012400	12,95612	–	–	9,991080E-01	3,125000E-02
Desvio Relativo Percentual em relação ao cálculo explícito	0,067663	0,066514	0,058168	0,893203	–	–	0,000300	59,349593

Tabela 14: : Tempo Computacional para o problema-modelo N° 4.

Tempo Computacional			
	Fluxo de Nêutrons Diferenças Finitas	Fluxo de Nêutrons com Albedo de 1 Região	Fluxo de Nêutrons com Albedo de 2 Regiões
Tempo (s)	7,687500E-02	4,687500E-02	3,125000E-02
Ganho computacional em relação ao cálculo explícito (%)		39,024390	59,349593

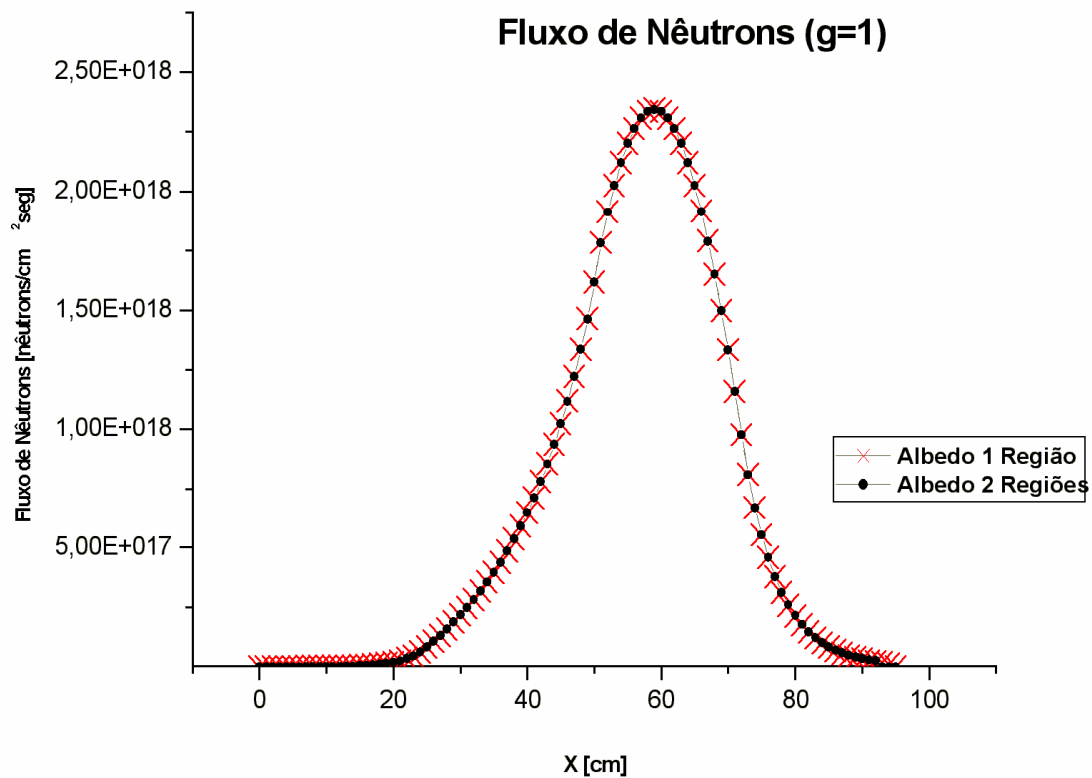


Figura 4.4: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Rápido (g=1).

O gráfico mostra o fluxo de nêutrons para o grupo rápido (g=1) atingindo um máximo na terceira região, o que implica uma potência máxima gerada nesta região combustível para este problema proposto.

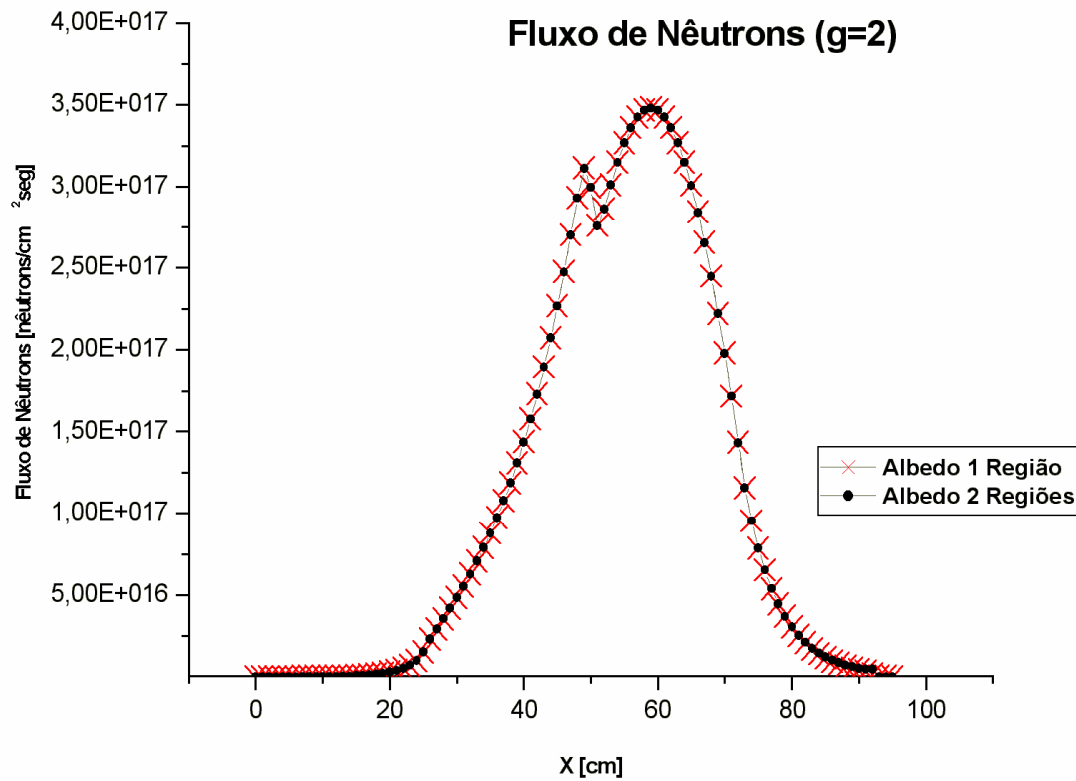


Figura 4.5: Fluxo de Nêutrons para o Grupo Térmico (g=2).

O gráfico para o grupo térmico (g=2) tem comportamento análogo ao grupo rápido, a não ser pelo fato de uma pequena oscilação em torno do ponto $x=50$ cm. Esta oscilação se explica devido a um aumento na seção de choque macroscópica de fissão da região 2 para a região 3. Ou seja, ao mesmo tempo que se teve uma perda de nêutrons pela absorção teve-se um ganho mais significativo de nêutrons devido a fissão.

CAPÍTULO 5

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram aplicadas técnicas de transformada de Laplace para determinação de expressões para condições de contorno especiais tipo albedo para uma e duas regiões não-multiplicativas para implementação visando à solução numérica de problemas de difusão monoenergético e multigrupo para dois grupos de energia.

Embora nosso trabalho tenha se restringido a desenvolver o parâmetro albedo para uma e duas regiões refletoras, sua extensão para mais regiões torna-se possível seguindo os passos aqui utilizados, ainda que haja, em contrapartida, um esforço algébrico crescente com o aumento de regiões.

As condições de contorno tipo albedo desenvolvidas foram facilmente aplicadas ao método de diferenças finitas e teve boa precisão nos resultados gerados, o que nos faz acreditar que sua implementação possa abranger uma gama maior de métodos numéricos, como por exemplo os métodos nodais que são tradicionalmente aplicados em cálculos globais de reatores nucleares com modelo de difusão.

Além da facilidade de aplicação e boa precisão, as condições de contorno tipo albedo, apresentadas neste trabalho, mostraram-se eficientes pela diminuição no tempo computacional, tanto para uma, como para duas regiões refletoras. O método de diferenças finitas utilizado para resolver numericamente a equação da difusão monoenergética e multigrupo a dois grupos de energia unidimensional mostrou-se um método extremamente rápido; mesmo assim a implementação das condições de contorno tipo albedo reduziram este tempo de execução computacional, o que nos permite inferir que o ganho de eficiência computacional para problemas multidimensionais será mais significativo.

Observamos que há sempre um ganho maior de eficiência quando aplicamos albedo em cálculos de fonte fixa, quando comparados com cálculos de autovalor. Acreditamos que isso se deve a utilização do método da potência para problemas de autovalor, devido ao método iterativo que acarreta um maior esforço computacional.

Como sugestão para trabalhos futuros, sugerimos a aplicação das condições de contorno tipo albedo aqui apresentadas para uma e duas regiões refletoras para problemas bidimensionais e tridimensionais com modelo de difusão de nêutrons para cálculos globais de reatores nucleares, bem como a utilização de aceleradores de convergência para problemas de autovalor, como por exemplo Chebischef.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves Filho, H., Barros, R. C., 2002, “On the Efficiency of Approximate S_N albedo Boundary Conditions for Monoenergetic X, Y-Geometry Criticality Calculations”, **Proceedings of the PHYSOR**, Seoul, Korea; CD-ROM.

Barros, R. C., 1990, “**An Spectral Nodal Method for the Solution of Discrete Ordinates Problems in one and two Dimensional Cartesian Geometry**”, Ph.D. dissertation, University of Michigan, Michigan, USA.

Barros, R. C., Larsen E.W., 1990, “Spectral Nodal Method”, **Nuclear Reactor Theory**, Volume 104, Page 199.

Barros, R. C., Alves Filho, H., 2007, “Progress in the formulation of the approximate albedo boundary conditions for one-speed X,Y-geometry discrete ordinates and diffusion eigenvalue problems”, **Progress in Nuclear Energy**, Volume 49, Issue 2, Pages 161-171.

Bell, G. I. and Glasstone, S., 1970, “**Nuclear Reactor Theory**”, Van Nostrand Reinhold, New York.

Burden, R.L. 1985, “**Numerical Analysis**”, Prindle, Weber & Schmidt, Boston.

Couto, N., Barros, R. C., 2004, “Condições de Contorno Tipo albedo Aplicado ao Método Numérico Espectro-Nodal Constante para Problemas de Difusão a Uma Velocidade e Duas Dimensões”, CDROM - **Iberian Latin American Congress on Computational Methods for Engineering**, 14 páginas.

Duderstadt, J., Hamilton, J., 1976, “**Nuclear Reactor Analysis**”, John Wiley & Sons, New York.

Greenspan, H., 1968, “**Computing Methods in Reactor Physics**”, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Lamarsh, J., 1983, "**Introduction to Nuclear Engineering**", Addison-Wesley, Publishing Company.

Lemos, R. S., 2005, "**Solução Analítica das Equações Difusivas da Teoria Geral da Perturbação pelo Método da transformada de Laplace**", tese, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Pannekoek, A., 1961, "**A History of Astronomy**", Dover Publications, Inc., New York.

Zweifel, P. F., 1973, "**Reactor Physics**", R. R. Donnelley & Sons Company, McGraw-Hill.

Weston M. Stacey, 2001, "**Nuclear Reactor Physics**", John Wiley & Sons, New York.