



ENSINANDO ELEMENTOS DA GEOMETRIA ATRAVÉS DA CONSTRUÇÃO DO CUBO

Carla Regina Picinini –carlapicinini@hotmail.com – UFRGS - Pólo Uab Camargo
Prof.^a Dr.^a Fernanda Wanderer – fernandawanderer@gmail.com – UFRGS

Resumo: Este trabalho tem por objetivo geral analisar as potencialidades do uso de mídias digitais nas aulas de Matemática para o ensino da geometria. E por objetivos específicos promover uma boa aprendizagem, desenvolver a criatividade para resolver situações envolvendo a geometria e aprender a manipular um software. Os referenciais teóricos usados foram os estudos de Boyer(2003), Roque e Pitombeira (2013), Gravina et al. (2012) e D’Ambrósio (1988), além dos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais da área da Matemática (BRASIL,2007) e os Referenciais Curriculares: Lições do Rio Grande, Matemática e suas tecnologias (RIO GRANDE DO SUL, 2009). A parte empírica da investigação envolveu alunos do 8º ano de uma escola de rede pública municipal situada no interior de Ibirapuitã-RS. A análise dos dados mostraram que os alunos aprendem melhor usando materiais concretos, objetos manipuláveis e quando praticam construções realizadas em um software de geometria dinâmica como o GeoGebra.

Palavras-chave: Geogebra; Elementos básicos; Geometria.

1 Introdução

Acredito que o ensino da geometria seja de extrema importância, principalmente, nos primeiros quatro anos de escolaridade, pois desenvolve na criança o raciocínio visual e lógico, permitindo que ela tenha uma base consistente que a ajudará a entender melhor a geometria em seu cotidiano e durante o seu aprendizado nos ensinos fundamental, médio e superior. Em minha prática como educadora percebo que existem várias dificuldades na aprendizagem em relação ao ensino da geometria. E isso é presenciado de forma mais clara na resolução dos exercícios propostos, no raciocínio do aluno ao resolver problemas e quando é questionado fazendo-o falar sobre o assunto que está aprendendo. Percebo, ainda, que o aluno, muitas vezes, aprende o que é necessário para o momento e após esquece o que aprendeu como se esse conhecimento não fosse novamente usado ou complementasse outro conteúdo.

Dessa maneira vejo em minhas aulas, algumas vezes, que o aluno não compreendeu adequadamente a linguagem simbólica, as propriedades e as características da Geometria Euclidiana que é uma área importante para a Educação Matemática. É possível evidenciar, ainda, na sala de aula, que as dificuldades de aprendizagem dos alunos não estão somente no ensino da geometria e sim no ensino da álgebra, da trigonometria, da aritmética, da leitura e da compreensão de dados e também na interpretação dos problemas. Todavia, por que desenvolver o estudo sobre o ensino e aprendizado da geometria? Onde são encontrados e quais objetos podem ser exemplos de geometria na sala de aula? Porque entender as noções básicas (ponto, reta e plano) da geometria desenhando um sólido geométrico?

Desta maneira, vejo como uma boa idéia usar métodos de ensino que fazem com que o aluno olhe ao seu redor e perceba traços da matemática em seu cotidiano. Neste trabalho será necessário fazer com que os alunos percebam o que há na sala de aula que tenha relação com os elementos básicos da geometria, sendo que eles deverão escolher o material que irão planificar e mostrar traços da geometria que este objeto possui.

Tendo, ainda, como base as perguntas acima, busco neste trabalho, também, respondê-las através da análise de uma experiência pedagógica realizada com alunos de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de Ibirapuitã - RS. Essa experiência foi constituída por dois momentos. O primeiro envolveu explorações com os sólidos geométricos em sala de aula. As atividades realizadas foram à análise dos sólidos geométricos existentes na sala de aula, a escolha de um deles para ser explorado com maior atenção: o cubo, a planificação desse material usando lápis, borracha, papéis, régua e esquadros enfatizando as definições e o uso do ponto, das retas, dos segmentos de retas e das figuras geométricas presentes na planificação do cubo. O segundo momento envolveu o uso do GeoGebra, no qual foram feitos os debates sobre a construção, as características do sólido, os erros e acertos em relação à montagem, identificação das faces, arestas e vértices, o uso das noções básicas e a planificação do sólido no GeoGebra.

Pensei em usar neste trabalho um software matemático como exemplo de geometria dinâmica, que ajudaria na construção das planificações e deixaria mais claro aos alunos como deveriam usar os pontos, as retas, os segmentos de reta e a colocação destes no plano. Conforme o site oficial¹ do GeoGebra, ele é um software de

¹www.geogebra.org

matemática multiplataforma que dá a todos a oportunidade de experimentar as percepções extraordinárias que a matemática torna possível. Além de ser um programa que permite estudar Geometria e Álgebra, este software é de fácil manuseio e é possível baixá-lo gratuitamente nos computadores da escola. E, para os alunos, esta tecnologia, significa a criação de uma conexão entre a geometria e a álgebra de um modo inovador e visual proporcionando aos alunos verem, tocarem e experimentarem a matemática de forma diferenciada.

O objetivo geral da pesquisa aqui relatada é analisar as potencialidades do uso de mídias digitais nas aulas de Matemática para o ensino da Geometria. Como objetivos específicos, o estudo buscou: 1) promover uma boa aprendizagem, com a utilização adequada da linguagem simbólica matemática, 2) desenvolver a criatividade do aluno ao buscar as informações necessárias na sala de aula para resolver situações envolvendo Geometria e 3) aprender a manipular um software matemático. O intuito deste trabalho não é somente identificar e analisar os problemas no aprendizado e sim construir uma proposta diferenciada para ensinar Geometria, fazendo alterações e adaptando o que for necessário na seqüência proposta para próximas aplicações com diferentes alunos.

Este artigo está dividido em 4 seções. A primeira consiste nesta Introdução. A segunda seção apresenta o referencial teórico que sustenta-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental), no Referencial Curricular Lições do Rio Grande : Matemática e suas tecnologias, incluindo ainda o uso das mídias digitais sustentadas pelo livro Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para a formação do professor de Matemática por Gravina et al. (2012) e a Etnomatemática de D'Ambrósio (1988). A seção 3 é feita através de um breve relato sobre a História da Geometria utilizando estudiosos e pensadores matemáticos cujas produções foram escritas nos livros *Tópicos de História da Matemática* de Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira (2013) e *A História da Matemática* de Carl B. Boyer (2003). Optei por esta seção, devido ao meu grande interesse pela História da Matemática e suas diversas áreas e com isso mostrar ao aluno a importância de saber o que aconteceu durante a evolução dos estudos matemáticos, contando a eles um pouco de quais foram os estudiosos envolvidos para que hoje estivéssemos aprendendo sobre geometria, o porquê eles estão aprendendo geometria e perceber traços da geometria de antigamente em relação a que estamos estudando hoje.

A seção 4 é relatada a seqüência aplicada com os alunos do 8º ano, enfatizando as falas e escritas destes alunos nomeados como A, B, C e D. Descreverei também a turma de 8º ano na qual foi aplicado este plano de aula e farei uma breve análise da escola e dos materiais usados. Nesta seção falarei sobre o uso do software GeoGebra durante a aplicação do plano, parametrizando as construções feitas pelos alunos e suas opiniões em relação ao uso deste software.

As considerações finais apresentam reflexões sobre a aplicação deste plano de ensino elaborado com o 8º ano, se as questões que nortearam esta pesquisa tiveram a resposta adequada para satisfazer o trabalho, o que pode ser modificado ou melhorado, a experiência com esta aplicação com os alunos, as dificuldades enfrentadas, o que pode ser melhorado para as próximas seqüências com outros alunos e o que pode tornar a aula ainda mais atrativa.

2 O ensino da geometria com base em documentos oficiais e livros envolvendo a Matemática e suas Tecnologias

Os documentos oficiais PCNs, Brasil (2007) destacam a importância do estudo dos conceitos geométricos como parte importante no currículo de Matemática. A partir destes estudos os alunos desenvolvem um pensamento compreensivo, descritivo e representativo do mundo em que o estudante vive. Nestes documentos oficiais por Brasil (2007) são relatados ainda a relação entre o aluno e o saber matemático, ou seja, as necessidades diárias fazem com que o aluno desenvolva habilidades que lhes permita exercer e estabelecer relações com a atividade matemática. Este documento explica que estabelecer relações é essencial para que o aluno compreenda os conteúdos matemáticos claramente, pois, alguns são abordados de forma isolada, deixando de ser uma ferramenta adequada para resolver problemas e para o aprendizado de novos conteúdos. Nestes documentos é ressaltada também a importância sobre o tema ensino da geometria.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 2007, p.51)

O documento oficial Referencial Curricular: *Lições do Rio Grande* (2009) menciona também que é necessário trabalhar a geometria como parte essencial do nosso cotidiano, pois, para desenvolver o pensamento lógico-matemático são necessárias habilidades como comparar, classificar, ordenar, corresponder e estabelecer relações entre fatos para tomar posse da própria matemática expressada através da fala, da escrita e das representações. Para isso é estabelecido um fato importante, bem como o trecho abaixo citado:

As vivências e o reconhecimento dos procedimentos da geometria possibilitam o desenvolvimento de habilidades de síntese e análise. O domínio do vocabulário geométrico proporciona a ampliação da comunicação e compreensão das situações relacionadas ao espaço.(...) O desenvolvimento do pensamento geométrico propicia entender o mundo e adquirir formas de apreciar a natureza e a arte em todas as suas manifestações, na medida em que as estruturas geométricas permeiam o universo natural e estético. (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p. 38)

Em relação à resolução de problemas, os documentos oficiais parâmetros curriculares nacionais destacam alguns fatores importantes de como está sendo abordada tradicionalmente nas aulas e de como realmente deveria ser. Os problemas hoje não estão tendo um verdadeiro desenvolvimento durante o ensino, pois tal prática consiste em ensinar um conceito e fazer com que os alunos apliquem este em um problema que lhes foi ensinado. Ao contrário do que seria o verdadeiro significado desta resolução de problemas, ou seja, como um eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem matemática. A seguir estão dois dos princípios importantes destacados em relação à resolução de problemas que devem ser considerados:

- A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que torna sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular; (BRASIL, 2007, p. 41)

A partir das citações mencionadas, pode-se dizer que a resolução de problemas possibilita aos estudantes por em prática conhecimentos e desenvolver habilidades para organizar as informações que estão ao seu alcance. Isso se faz presente, por exemplo, na

interpretação da leitura do problema ou na retirada dos dados de um determinado ambiente. Dessa maneira o aluno tem oportunidade de ampliar seus estudos acerca de conceitos e aprendizados matemáticos ampliando a visão que tem dos problemas propostos e de como resolvê-los.

Acredito que o aluno deve ser estimulado a questionar a resposta que encontrou, estando ela certa ou errada, a transformar um problema dado em outros tantos, a formular com suas próprias palavras um novo problema e suas possíveis respostas, a analisar e criar novas formas de pensamento e novas formas de resolução, bem como, usar a tecnologia a seu favor como uma nova maneira de pensar. Cabe, neste momento, ao professor mediar este processo de aprendizagem de seus alunos organizando ações pedagógicas tanto nos momentos individuais quanto nos trabalhos em grupo. No documento oficial Referencial Curricular, Rio Grande do Sul (2009) tem-se que o professor, como mediador, deve encorajar seus alunos, fazendo-os ler, investigar, resolver problemas, questionar, criar e comparar, perguntar e discutir suas idéias, comunicar seus pensamentos, descobertas e conclusões através da escrita de textos, da análise de desenhos, esquemas e símbolos.

Vejo a utilização de alguns recursos tecnológicos nas suas diferentes formas e uso como agentes transformadores ativos na sociedade. Conforme Rio Grande do Sul (2009), é percebido que a escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizado dos estudantes são influenciados pelas tecnologias da informática. E, Brasil (2007) aborda o uso destes recursos tecnológicos como significativas contribuições para se repensar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, estão entre elas:

- Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (BRASIL, 2007, p.44)

Brasil (2007) ainda aborda que mesmo os computadores não estando disponíveis em todas as instituições de ensino, podem com o tempo serem usados nas aulas de matemática com várias finalidades:

- Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e de aprendizagem;
- Como auxiliar no processo de construção de conhecimento;

- Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- Como ferramenta para realizar determinadas atividades - uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc. (p. 44)

Fica claro que o uso destes recursos são ótimos aliados para o desenvolvimento cognitivo dos alunos possibilitando a realização de atividades que se adaptam aos mais variados tipos de aprendizado possibilitando ao aluno aprender com seus erros. Dessa maneira, torna-se óbvio que todo material coletado com dados significativos e todo o processo de aprendizado permitem ao professor e aos alunos um ensino e aprendizagem contínua e produtiva, incluindo a tecnologia a favor do ensino, se tornando uma ferramenta de grande ajuda durante as aulas.

Acredito também que o uso da geometria dinâmica proporciona ao aluno, na sala de aula, mais liberdade e vontade de aprender. A tecnologia desperta no educando o interesse pelas novas descobertas, a vontade de criar, de interagir mais com o mundo moderno e o aluno passa a se apropriar melhor do conhecimento através de uma prática de ensino diferenciada.

Através do site oficial do GeoGebra pude ver conceitos referentes ao aluno, ao professor e a escola. O aluno gosta de aprender com o GeoGebra, pois o software torna a matemática mais tangível, ou seja, que se pode perceber usando o tato. Outro conceito do site foi em relação ao professor que acha o software um bom aliado para sua aula, pois ele permite que o professor continue a ensinar usando possibilidades diferentes e servindo como uma ferramenta muito importante no processo educador.

Durante o curso de pós graduação tive acesso a materiais de grande importância em relação às mídias digitais na escola. Estes materiais falam que o propósito do curso é detalhar uma das novas possibilidades de ensinar geometria durante o decorrer do curso através do uso de uma geometria dinâmica.

Neste livro, os autores colaboradores, Gravina et al.(2012) falam brevemente do software e das suas características, tanto para o decorrer do curso, quanto para a sua utilização em sala de aula.

Dentre os diferentes softwares de geometria dinâmica que temos à nossa disposição, escolhemos o GeoGebra (disponível em www.geogebra.org). Duas são as justificativas para essa escolha: é um software com consistente e interessante menu para se trabalhar com a geometria euclidiana; é “software livre”, o que significa que tem desenvolvimento compartilhado na comunidade de pessoas que têm interesse no assunto e, assim sendo, o seu uso é livre e não depende de aquisição de licença. Isso é muito bom, porque assim o software

GeoGebra pode ser, de imediato, instalado em computadores pessoais e nos computadores dos laboratórios das escolas. (GRAVINA; BARRETO; DIAS; MEIER, 2012, Cap. 3, p. 37)

Os autores pensaram em organizar o livro pensando nos professores de matemática que não tem familiaridade com a geometria dinâmica e seu posterior uso, tentando facilitar, desta maneira, seu entendimento e uso adequado. No capítulo 3, eles ainda falam sobre o uso deste programa de computador e como ele funciona.

Os programas de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra, são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. São ambientes que concretizam a geometria euclidiana plana, e diferente daquilo que obtemos com lápis e papel e régua e compasso, pois com o mouse podemos manipular as figuras que estão na tela do computador, ao aplicar movimento em pontos que estão na construção.

O processo de construção das figuras é feito mediante o uso de menus em linguagem natural de geometria [...]. (GRAVINA; BARRETO; DIAS; MEIER, 2012, Cap. 3, p. 38)

Acredito que o uso dos computadores ajudam a desenvolver o pensamento matemático, fazendo com que os alunos vivenciem situações de aprendizagem que envolvendo a pesquisa, investigação e exploração. Dessa maneira, assim como na aplicação do plano de aula envolvia uma geometria dinâmica, proporcionando aos alunos uma proposta diferente, desconhecida e inovadora para as aulas de matemática.

Cabe ao professor, o importante papel de utilizar a tecnologia a favor da complementação do seu material pedagógico. É necessário fazer com que o aluno se motive mais com as atividades que acontecem na sala de aula e que não haja rejeições desta tecnologia durante o ensino, pois o aluno deve estar motivado a trabalhar com algo diferente.

Como professora, penso que é meu dever acompanhar e mediar às atividades de perto, questionando o aluno, para saber se ele está entendendo o que está praticando com o uso do material concreto e com os computadores. A tecnologia quando utilizada de maneira correta torna-se útil ao ensino/aprendizado colaborando com o professor, para isso temos uma citação que fala que o professor não é dispensável mesmo com o uso da tecnologia.

[...] o uso do computador como meio institucional não torna dispensável o professor, antes, pode liberá-lo de algumas tarefas e reservar um espaço maior para o contato interativo entre ele e o aluno, necessário a um ensino que valorize a aprendizagem da descoberta. O computador não é o fim em si

mesmo, mas um meio, um recurso instrumental a mais, cuja eficácia dependerá da capacidade daqueles que o utilizam. (D'AMBRÓSIO, 1988, p.88)

Concluo esta seção, afirmando que o bom uso de um software matemático durante a prática pedagógica torna a aprendizagem bem mais produtiva. Ressalto ainda a importância da utilização destas tecnologias na escola como uma ferramenta essencial para o aprendizado dos conteúdos matemáticos e como um auxílio relevante ao professor que deseja desenvolver o pensamento matemático em seus alunos de forma significativa.

3 Breve relato sobre a História da Geometria Euclidiana

Para os escritores do livro *Tópicos de História da Matemática*, Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira (2013), a matemática teria se desenvolvido a partir de problemas:

A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O papel da história da Matemática pode ser o de exibir estes problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. Para além da reprodução estéril de anedotas que visam a “motivar” o interesse dos estudantes, é possível reinventar o ambiente “problemático” no qual os conceitos foram criados. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2013, p. 9)

Os autores Roque e Pitombeira (2013) associam a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência. Eles afirmam que:

Quando lemos sobre a origem da contagem, o exemplo que encontramos com mais frequência é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, ao invés de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas, escritas na argila, e estas marcas estariam na origem dos números. Mas esta versão não é segura. As fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas. (p.17)

Segundo os autores acima citados, o que acontece ainda na matemática escolar de hoje são exemplos baseados nos babilônios e nos egípcios que são, às vezes, bem artificiais e simplificados em relação às situações reais propostas para exercitar ou verificar as habilidades de cálculos dos escribas. Para isso, os autores afirmam que:

A “geometria” dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes, para o que utilizavam algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2013, p. 53)

O livro *A História da Matemática* de Carl B. Boyer (2003), um clássico na área da História de Matemática, destaca que os matemáticos do século vinte desempenhavam uma atividade intelectual de difícil definição e ampla sofisticação. Ao analisar a evolução da história da matemática foi-se percebendo que seu surgimento possivelmente não tenha sido pela descoberta de um indivíduo ou de uma determinada tribo e sim que tenha surgido gradualmente no decorrer dos anos e conforme as necessidades de contar e se aperfeiçoar. Assim como o surgimento dos números é imprecisa, também é o surgimento da geometria:

Se a história do surgimento dos números nos parece imprecisa, a aplicação deles na geometria também o é: Heródoto dizia que geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. Já Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lares é que tinha conduzido ao estudo da geometria.
(BOYER, 2003, p. 2)

Outro grande estudioso da geometria seria Tales de Mileto, relatado Roque e Pitombeira (2013):

A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra. A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides. (p.66)

Conforme Boyer (2003), foi somente com a morte de Alexandre O Grande e com as disputas entre os generais do exército grego que Ptolomeu I, em 306 a.C., criou em Alexandria uma escola e chamou um grupo de sábios professores. Entre eles estava Euclides de Alexandria, autor de *Os elementos*, que é dividido em treze livros, sendo que os primeiros seis abordam a Geometria Elementar, três tratam da teoria dos números, o livro X é sobre os incomensuráveis e os três últimos livros são sobre a geometria no espaço.

Os autores Roque e Pitombeira (2013), falam sobre os estudos de Euclides de Alexandria:

Com Euclides, a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais,

que não envolvem somente procedimentos de medida. Os Elementos de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incommensuráveis. (p.69)

Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga também contribuíram para a geometria e Apolônio ficou conhecido também pelos antigos como “o Grande Geômetra” pelas suas contribuições para a geometria conhecida hoje como analítica. Ainda sobre Arquimedes:

Arquimedes, um dos mais conhecidos matemáticos gregos, chegou a defender um método que permitisse entender certas realidades matemáticas usando a mecânica, ainda que este método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente. Sabemos hoje que alguns dos resultados demonstrados dessa maneira por Arquimedes eram obtidos de modo puramente mecânico. Haveria, portanto, uma distinção entre métodos de descoberta, que poderiam ser mecânicos, e métodos de demonstração, que deveriam ser *puramente geométricos*. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2013, p. 105)

E sobre os estudos de Apolônio:

Na verdade, a busca de novos métodos de construção, inspirados no paradigma euclidiano serviu de motivação para os trabalhos de Apolônio, desenvolvidos na virada do século III para o século II a.E.C. Acredita-se que ele tenha começado a redigir seu livro mais conhecido, o *Cônicas*, por volta do ano 200 a.E.C. Nesta obra, Apolônio define as seções cônicas do modo mais geral possível, como seções de cones, usando métodos muito característicos dos *Elementos* de Euclides. [...] Seus resultados parecem exprimir a tentativa de estender e tornar rigorosos os métodos antigos empregados no estudo de cônicas, desenvolvidos por Euclides (em sua obra sobre as cônicas) e Arquimedes. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2013, p.106)

Boyer (2003) ressalta em seu livro que a queda de Constantinopla, em 1453, foi uma importante data para a História da Matemática. O autor afirma ainda que por essa ocasião refugiados que escaparam para a Itália levaram manuscritos preciosos de antigos tratados gregos, e assim puseram o mundo europeu ocidental em contato com obras da antiguidade.

A geometria na primeira metade do século dezesseis dependera excessivamente das propriedades elementares ensinadas por Euclides. Werner tinha uma exceção a essa regra, mas poucos dentre os demais tinham conhecido realmente a geometria de Arquimedes, Apolônio e Paus. A Renascença poderia perfeitamente ter desenvolvido a geometria pura na direção sugerida pela arte e pela perspectiva, mas não foi dada atenção a essa

possibilidade até quase exatamente a mesma época em que foi criada a geometria algébrica. (BOYER, 2003, p. 10)

O autor afirma ainda em seu livro que:

Através dos esforços de Monge e Carnot houve alguns sintomas de reavivamento da geometria pura durante o período da Revolução Francesa, mas a redescoberta quase explosiva da geometria como um ramo vivo da matemática veio principalmente no início do século dezenove. (BOYER, 2003, p.17)

Acredito que muitos foram os estudos em relação à geometria antes e depois da Era de Cristo, e muitos estudiosos matemáticos deixaram suas importantes contribuições. Devido à importância dos estudos e aos livros de *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, essa área da Matemática ficou conhecida como Geometria Euclidiana. Segundo Roque e Pitombeira (2013) somente no ano de 2009, no Brasil, que os Elementos de Euclides tiveram sua primeira edição completa traduzidos para a língua portuguesa quando Irineu Bicudo os traduziu direto do grego.

4 Seqüência didática avaliando a turma, a escola e a proposta pedagógica

Nesta seção falarei sobre a seqüência aplicada com os alunos do 8º ano de uma escola de rede pública municipal, a turma e os materiais usados na prática centrada na geometria dinâmica. Sobre a turma de 8º ano posso dizer que é uma turma composta por três meninos e uma menina. Acredito que por ser uma turma interiorana e por serem somente quatro alunos esta é uma turma dedicada, na qual os alunos são esforçados, bem críticos, conversam bastante entre eles e são bem divertidos. Não tem muito acesso a informática. Nomeei os alunos pelas primeiras quatro letras do alfabeto A, B, C e D, a fim de preservá-los.

Sobre a escola posso dizer que é situada no interior do município de Ibirapuitã. Escola da rede pública municipal, abrangendo a Educação Infantil até o 9º ano do Ensino Fundamental. Em 2015, possui em torno de 54 alunos, funcionando nos turnos manhã e tarde. O material necessário para a execução deste trabalho estava disponível na escola, sendo que foram usadas réguas, papéis e dois notebooks para o uso do software.

Quando propus a realização deste trabalho com a turma de alunos do 8º ano, a reação deles foi de grande entusiasmo e de um desafio, pois, eles não haviam até então trabalhado com um software e manuseiam muito pouco os computadores no dia-a-dia.

Primeiramente foi necessário que os pais assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (em anexo A) permitindo que seus filhos fizessem parte da pesquisa.

A primeira atividade proposta foi à busca dos sólidos geométricos dentro da sala de aula, que tipo de figura seria trabalhada na hora da planificação e como definir os conceitos básicos da geometria através da construção de um sólido. Os alunos reuniram alguns sólidos e escolheram estudar e planificar o cubo sendo que a justificativa deles seria por ser mais fácil de montar. A seguir estão os sólidos que eles encontraram e montaram na sala de aula.

Figura1 – Encontrando sólidos na sala de aula



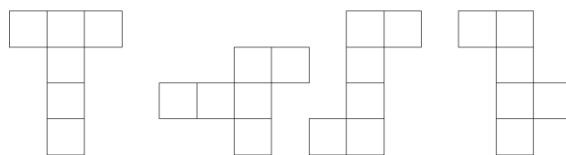
Fonte: dados da pesquisa

O primeiro cubo foi montado pela aluna B a partir do jogo encaixando as peças do jogo até formar um cubo colorido. Quando questionei a aluna de como seria esse cubo ela respondeu que o cubo era composto por todos os lados iguais e que estes lados eram quadrados. O aluno A encontrou uma caixa de jogos da memória e verificou que poderia ser um cubo, mas ele ficou um pouco em dúvida em relação as medidas dos lados desta caixa e complementou *“professora eu não to usando a régua para medir os lados, mas eu acho que pode ser um cubo porque os lados são parecidos”*, o aluno C e o aluno D encontraram no material dourado exemplos de cubos, ou seja, o cubo pronto, outro eles montaram com as barras de cem unidades e de dez unidades e ainda o cubo que representa uma unidade. Quando questionei os alunos C e D qual o motivo da escolha do material dourado para confeccionarem os cubos eles responderam que era mais prático, pois eles já sabiam que tinha o *“cubinho”* e o *“cubão”* e que para formar outro cubo eles poderiam usar as placas de cem unidades e as barras de dez unidades de maneiras diferentes que também obteriam outro cubo com a mesma característica do *“cubão”* do material dourado.

Após esse momento de descobertas na sala de aula pedi aos alunos que escolhessem cores diferentes de cartolina para iniciarmos a planificação do cubo escolhido por eles. Cada aluno escolheu uma entre onze planificações possíveis do cubo que disponibilizei como exemplo para que eles desenhassem no papel. As imagens

escolhidas pelos alunos foram às seguintes: a primeira foi escolhida pelo aluno A, a segunda pela aluna B, a terceira pelo aluno C e a quarta pelo aluno D.

Figura 2 – Planificações do cubo escolhidas



Fonte: A autora

A partir da escolha e da separação dos materiais (as cartolinas coloridas, as régua, os lápis e as borrachas, plástico adesivo transparente para encapar a planificação) os alunos iniciaram a planificação dos sólidos. Durante o início da planificação do cubo fui questionando os alunos o que eles poderiam usar como apoio para definir o tamanho de cada cubo. O aluno A fez a seguinte colocação: *“professora eu vou usar 10 cm da régua, então cada lado tem que ter dez né? Daí eu vou marcar de dez em dez para depois eu riscar e fazer os quadrados.”*

A aluna B iniciou seu desenho com a régua torta, mas ela achou que ia dar certa modelagem da planificação, então a deixei para ver qual seria sua reação na montagem do cubo. Ela ainda questionou com o colega do lado: *“mesmo estando um pouco torta essa reta, eu vou colocar oito cm bem certos em cada lado e no fim vai dar certo igual”*. O aluno C fez a planificação usando como desenho um retângulo de lados 28 centímetros e 21 centímetros e após ele foi dividindo os lados com pontos de sete em sete centímetros, fez retas para ligar estes pontos e depois marcou os quadrados que iria usar e recortou inutilizando os outros e me falou que tinha visto na outra escola alguma coisa sobre os sólidos geométricos. Ele falou ainda do que lembrava: *“professora eu lembro que a outra prô de lá falava nos vértices da figura e tinha mais coisas que eu não lembro o que são, mas os vértices eu lembro que são os cantos quando eu montar.”* O aluno D pediu minha ajuda para aprender usar os esquadros pois ele tinha visto um desenhista usar na Televisão e fazer desenhos retos e queria aproveitar o uso fazendo o desenho do sólido.

Conforme os desenhos iam evoluindo eu ia questionando-os sobre o uso do ponto, da reta, da semi-reta, segmento de reta e do plano. *“Aluno A em que sentido você*

usou ponto no desenho?”. Ele respondeu: “para mim serve para marcar o tamanho do lado de cada quadrado. Então faço quatro pontos com dez centímetros entre eles para formar um quadrado, daí depois é só ligar eles e pronto e assim fazer mais cinco quadrados e ir formando outros quadrados que está pronta a planificação cubo ”. “Aluna B você já demarcou os pontos e fez retas para auxiliar teu desenho, agora você pretende usar o que para continuar a planificação?”, ela me respondeu “vou usar várias retas menores para ligar estes pontos professora”, para que os colegas e ela entendessem o que fosse essa reta menor complementei o comentário da aluna falando que ela usaria um segmento de reta, pois ela tinha dois pontos distintos e ela precisaria “ligar esses pontos”, no caso ela usaria um segmento de reta, dando um significado ao que ela tinha falado sobre a reta menor. Perguntei ao aluno C por que ele havia feito um retângulo e depois ele recortou a planificação do jeito daquela que havia escolhido? O aluno respondeu que se encontrava melhor desenhando desse jeito e que na cabeça dele era melhor para ele não se perder e que daria bem certo porque ele tinha cuidado na hora de riscar. O aluno D usou os esquadros e a régua então perguntei a ele o que era melhor usar para o desenho e ele respondeu “professora eu achei legal os esquadros, mas dá mais trabalho e me perco as vezes na hora de movimentar eles, pois esqueço de mover os dois e daí fica torto, gosto mais de usar a régua para marcar os pontos para definir quantos centímetros meu quadrado vai ter ou uso um só esquadro para riscar.”

Abaixo seguem algumas imagens dos alunos durante a planificação dos seus sólidos.

Figura 3: Alunos A, B, C e D durante as planificações



Fonte: dados da pesquisa

Após o momento do desenho da planificação dos sólidos e dos questionamentos fiz mais algumas perguntas para saber se eles haviam entendido e prestado atenção no conteúdo abordado, o que eles haviam achado da atividade. As perguntas foram do tipo: a) qual figura você escolheu para planificar? b) Olhando para o sólido planificado vamos saber quantas faces, arestas e vértices possuem este sólido? c) você encontrou dificuldades ao desenhar e montar o sólido? d) você usou que materiais para planificar o sólido? e) você usou quais os conceitos do ponto, retas, semi-retas para fazer o desenho

no plano? f) quantas planificações diferentes vocês fazer para formar um cubo? Um destes questionários de perguntas estará no anexo B deste trabalho.

Com a montagem das planificações os alunos foram percebendo seus erros e acertos na hora de planificar. O Aluno A, que desenhou na figura azul, percebeu que algo havia dado errado na hora de montar seu sólido e falou: *“acho que meu sólido não fechou certo porque risquei torto algum lado, e na hora de recortar também não devo ter recortado bem certo, alguns vértices se encaixaram certo mas outros não e as arestas nem todas encaixaram certas, medi com a régua professora e uns lados tem dez cm e outros quase dez cm cada, acho que por isso não fechou, daí tentei concertar com a tesoura e deu nisso”*; A aluna B, desenhando na figura rosa, também não conseguiu que seu cubo ficasse exatamente correto e que os vértices e arestas fechassem em todos os lados. Ela disse que: *“eu achei que mesmo riscando torto eu ia conseguir fechar o cubo pois tinha cuidado os lados do quadrado e todos tinham ficado iguais, mas na hora que montei ficou umas frestas e eu não gostei que deu errado e vou tentar fazer em casa um bem reto para dar certo e fechar bem.”* O aluno C, desenhando a figura verde, disse que achava melhor fazer um retângulo e depois fazer a planificação inserida nele. Questionei o aluno em relação a sua montagem se havia dado certo e ele respondeu que: *“te falei professora que desenhando a figura do retângulo eu não ia me perder quando eu fosse recortar a figura que eu escolhi, eu também aproveitei a margem da cartolina para que o desenho ficasse reto, e daí não ia ter problema para montar, olha aí profe encaixou tudo certo, os vértices, e as arestas também e as faces ficaram todas do mesmo tamanho, viu prô eu demorei mas ficou bom né?”*. O aluno D, da figura bordô, também não teve problemas ao encaixar seu sólido geométrico, mas eu o ajudei no início para que ele aprendesse a manipular os esquadros que ele usou para iniciar o trabalho, pedi ainda que ele relatasse aos colegas como foi usar outro material para o desenho. Ele fez também a colocação dele ao falar para os colegas sobre o sólido que havia feito: *“olhem colegas, eu usei os esquadros, mas não achei fácil, se a professora não tivesse me ajudado no começo eu ia usar só a régua, porque os esquadros são ruins às vezes a gente meche um e esquece o outro, daí os riscos ficam tortos mas eu usei a régua também e cuidei para não ficar nada torto e deu certo na hora de montar, ficou um cubo perfeito.”*

Figura 4: Os cubos montados



Fonte: dados da pesquisa

Com planificações e montagens feitas, os alunos analisaram os acertos e erros e comentaram o que havia ocorrido de errado e deram opiniões. A partir da minha mediação, definimos juntamente conceitos sobre a geometria básica e sobre o cubo e, dessa forma, pude encerrar a aula desta manhã achando-a produtiva. Para o segundo momento deste trabalho, foi necessário o uso de computadores para realizar o desenho da planificação no software GeoGebra. Os alunos chegaram empolgados na aula, pois encaram o uso do GeoGebra como um desafio.

Como eu já vinha anteriormente falando sobre o uso do computador nas aulas de matemática eles estavam ansiosos para descobrir como isso seria possível. Primeiro passo para esse momento, foi pensar em trabalhar em duplas, já que na escola só havia dois notebooks. A proposta para cada dupla foi que elas escolhessem uma das planificações feitas para fazer no GeoGebra. Após uma breve introdução de como trabalhar no software, os requisitos propostos e que eles deveriam cumprir na construção eram: o uso de pontos, o uso de retas, de segmentos de retas e por fim delimitar a figura por um polígono. Cada dupla ainda deveria escrever o protocolo de construção da construção feita no software.

As duplas, escolhidas pelos próprios alunos, ficaram dupla AC e dupla BD. A dupla AC escolheu a planificação que o aluno A havia feito com material concreto. Questionei a dupla AC porque escolher a primeira figura e como eles começariam a construção? A dupla AC respondeu: *“nós achamos fácil de fazer esse desenho no papel professora. Por isso achamos que será fácil de fazer no GeoGebra também. A gente pensou que primeiro podemos construir duas retas horizontais e duas retas verticais. Nós vamos fazer de 2 centímetros o lado de cada quadrado, então os pares ordenados vão ser pares. E a gente já viu que pra fazer a reta temos que fazer os pontos, senão não da certo profe”*. Questionei a dupla AC como eles fariam para formar os quadrados depois que as retas horizontais e verticais e os pontos estivessem prontos. A dupla AC

então falou que iriam usar as retas menores como a Colega B tinha feito, mas que eles teriam que colocar os pontos certos para ficar que nem a planificação que eu tinha sugerido a eles. Complementei o que eles sugeriram então como segmentos de reta e não retas menores e que para finalizar a construção eles podiam usar o botão de polígono e fazer uma área colorida para definir a planificação do cubo.

Essa dupla AC se destacou bem na planificação do cubo no GeoGebra, eles fizeram poucas perguntas porque entenderam e prestaram atenção no conceito básico que eu havia explicado anteriormente a eles. Abaixo segue o arquivo que os alunos da dupla fizeram no software e no anexo C estará o protocolo da construção da dupla AC.

Figura 5 – Construção da dupla AC



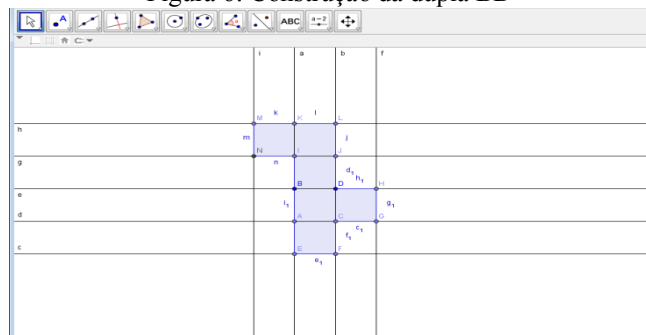
Fonte: dados da pesquisa

A dupla BD escolheu a planificação feita pelo aluno D e justificaram a escolha pelo êxito que o aluno D teve ao construir o cubo exatamente correto no material concreto usando os esquadros e a régua. Questionei também a dupla BD, de como eles estavam pensando em começar a construir o cubo no GeoGebra. A dupla pensou um pouco, mexeu por alguns minutos no software para entendê-lo, viu como fazer retas a partir de dois pontos, rascunharam em um papel algumas possibilidades e começaram a trabalhar com os pontos e retas. A resposta da dupla em relação a minha pergunta foi a seguinte: *“professora nós vamos começar com os pontos A, B, C e D, aí nós vamos fazer as retas que passam nesses pontos, e os pontos também tem coordenadas pares porque a distancia entre os pontos são de 2 centímetros que nem a outra dupla fez. Daí a gente vai fazendo retas e colocando os pontos profe e assim vai fechando os quadrados. Depois pra fica de outra cor o que a gente fez pra ser o cubo a gente vai usar aquele botão que tu falou profe do polígono e vai marcando todos os pontos e vamos deixar a planificação do cubo azul. Daí ta pronto o cubo professora.”*

A dupla BD estudou o software, teve uma boa compreensão, usou a figura um pouco mais difícil, fez vários raciocínios sobre a construção e por fim usando retas e

pontos conseguindo finalizar com êxito a planificação. Abaixo está o arquivo que a dupla elaborou com o uso do software e no anexo D está o protocolo de construção da dupla BD.

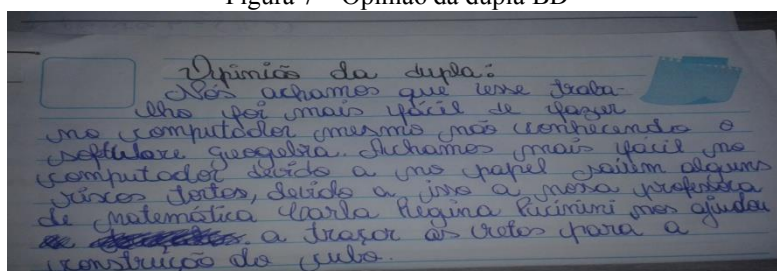
Figura 6: Construção da dupla BD



Fonte: dados da pesquisa

Concluindo a análise deste segundo momento, lembrando que os alunos não tinham conhecimento sobre o uso de um software matemático, cabe ressaltar uma das perguntas que fiz as duplas sobre o que eles haviam achado em relação ao uso do software e do material concreto. A resposta escolhida para por neste trabalho foi a da dupla BD, cuja aluna integrante da dupla mencionou a dificuldade que teve em fazer as retas certas para que o cubo ficasse adequado e certo e gostou de fazer o cubo no GeoGebra porque se sentiu segura em relação ao método aplicado para a construção e de como estava ficando a planificação .

Figura 7 – Opinião da dupla BD



Fonte: dados da pesquisa

Concluindo a análise destes primeiro e segundo momentos, posso dizer que achei uma boa experiência, vi que os alunos gostaram bastante da atividade proposta e até pediram que as próximas atividades sejam semelhantes a esta que fizeram. Pediram também para que tenha o uso de algum tipo de geometria dinâmica. Percebi que os alunos interagiram bastante, compreenderam o significado do conteúdo abordado, construíram um sólido e aprenderam os conceitos básicos da geometria da forma esperada e ainda manipularam um software pela primeira vez.

6 Considerações Finais

Este artigo buscou evidenciar o uso do material concreto e da tecnologia no processo de construção do cubo visando aprender os conceitos de geometria básica. Foi possível perceber que nesta prática realizada na sala de aula, os alunos buscaram se dedicar durante as construções, compreendendo os conceitos matemáticos, se apropriando do verdadeiro significado e desenvolvendo nos alunos a necessidade de superar o desafio de não conhecer o software matemático que seria trabalhado.

Os alunos, tanto individual quanto em duplas, realizaram as tarefas propostas de maneira entusiasmada e compreensiva, questionando, sugerindo novas idéias, buscando formas diferentes, obtendo erros e acertos, questionando os erros e formando nova percepção de acerto, participando ativamente da aula e dos debates e estabelecendo relações durante o uso do GeoGebra.

Entretanto, o desafio enfrentado durante este trabalho, era desenvolver o estudo sobre o ensino e o aprendizado da geometria de forma significativa, buscando na sala de aula materiais concretos que pudessem servir como exemplo para a sequência didática proposta para o momento. Ainda, seria importante entender o porquê estudar os conceitos básicos da geometria construindo a planificação do cubo.

Conforme o andamento da aula, os alunos foram se envolvendo e participando ativamente das atividades propostas, criando um ambiente de saber matemático interativo entre eles. Cabe salientar que os alunos tinham conhecimento, mesmo que pouco, dos conceitos da geometria básica, o que facilitou em partes o trabalho. Os resultados desta experiência didática mostram que os alunos gostam de desafios e de serem desafiados, o que os motivou a tentar, experimentar, errar, refazer, acertar e aprender.

Finalizo este trabalho, com entusiasmo, pensando em melhorar as aulas com tecnologias sempre que possível. Destacando ainda, que o uso de exemplos diários desenvolve no aluno uma visão geométrica diferente da vista somente no papel, pois durante a criação e desenvolvimento o aluno desenvolve os hábitos de pensar matemática. Cabe ainda, ressaltar, que a geometria dinâmica é fundamental para o processo desta atividade, pois permite que o aluno simule formas, movimentos, aperfeiçoe o que está sendo construído e crie novas formas de construção.

Referências Bibliográficas

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2ªed., 2007.

RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias/Secretaria do Estado da Educação. Porto Alegre: SE/DP, 2009.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT, 2013.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: tradução Elza F. Gomide: 2ª Ed., Edgar Blucher, 2003.

GRAVINA, Maria A.; BARRETO, Marina M.; DIAS, Mariangela T.; MEIER, Melissa. Geometria dinâmica na escola, em GRAVINA, Maria A.; BURIGO, Elisabete Z.; BASSO, Marcus V.A.; GARCIA, Vera C.V. (ORGS), Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de matemática. Porto Alegre. Cap. 3, p. 37-60.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. Etnomatemática. São Paulo: Ática, 1988.

<https://www.geogebra.org/>. Acesso em 01 de julho de 2015.

<https://moodle.ufrgs.br/course/view.php?id=32215>. Acesso durante este trabalho.