

UFRGS

I. F.

O Tensor Dielétrico Efetivo
para Plasmas Imersos em
Campos Magnéticos com Gradientes
Perpendiculares

Rudi Gaelzer

1995

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**O TENSOR DIELÉTRICO EFETIVO PARA PLASMAS IMERSOS EM
CAMPOS MAGNÉTICOS COM GRADIENTES PERPENDICULARES[†]**

Rudi Gaelzer

Tese realizada sob a orientação dos Drs. Luiz Fernando Ziebell e Ruth de Souza Schneider, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

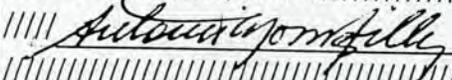
Porto Alegre,
novembro de 1995.

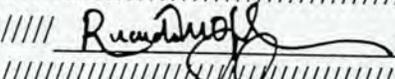
[†]Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

TESE DE DOUTORADO

Rudi Gaelzer

Às 10 h 03 min. do dia quatorze de novembro de mil novecentos e noventa e cinco, reuniu-se no Anfiteatro do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Campus do Vale, a Comissão Julgadora integrada pelos Professores, Dr. Luiz Fernando Ziebell (IFUFRGS - Presidente), Dr. Antônio Montes (INPE - São José dos Campos) Dr. Ricardo M. O. Galvão (USP - SP), Dr. Darcy Dillenburg (IFUFRGS) e Dr. Claudio Scherer (IFUFRGS), para dar início a defesa da Tese de Doutorado de Rudi Gaelzer prevista no Regimento do Curso de Pós-Graduação em Física, art. 52 letra b. O Senhor Presidente da Comissão Julgadora, Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, dá por instalados os trabalhos e convida o candidato a fazer uma apresentação em forma de Seminário de sua Tese intitulada "O Tensor Dielétrico Efetivo para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares". A seguir, o candidato respondeu as perguntas formuladas pela Comissão Julgadora. Logo após o término da argüição, o Presidente da Comissão Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, convidou os membros da Comissão Julgadora a dirigirem-se à sala 203 para que lá se reunissem para atribuição, por escrito, dos conceitos referentes a Tese de Doutorado. Continuando, o Sr. Presidente divulgou os seguintes conceitos atribuídos pela Comissão Julgadora: Dr. Antônio Montes "A", Dr. Ricardo M. O. Galvão "A", Dr. Darcy Dillenburg "A" e Dr. Claudio Scherer "A". A sessão foi encerrada às 12 h 25 min. e, para constar, eu Daniel Pires Moreira da Silva Secretário do Curso de Pós-Graduação em Física do IFUFRGS, lavrei a presente ata que será assinada por mim e pelos membros da Comissão Julgadora.

 (Dr. Antônio Montes - INPE)

 (Dr. Ricardo M. O. Galvão - USP-SP)

 (Dr. Darcy Dillenburg - IFUFRGS)

 (Dr. Claudio Scherer - IFUFRGS)

 (Dr. Luiz Fernando Ziebell - IFUFRGS)

Presidente da Comissão Julgadora

Para Ewelín e Tamiris

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus orientadores Luiz Fernando Ziebell e Ruth de Souza Schneider pela atenção, paciência e sabedoria que manifestaram ao longo desta jornada.

Aos camaradas que ao longo destes anos passaram pela M201 e redondezas: Bila, Hércules, Giba, Lúcio, Rogério, Rosalvo, Marinês, Arlei, Gabriel, Ayala, Cid, Nísia, Gugu, Schelp, Glaucius, Ileana e a tantos outros. Pela amizade e por ruidosas discussões sobre tudo, principalmente sobre ...

Aos colegas e professores do Grupo de Física de Plasmas, também pela amizade e pelas frutíferas discussões.

Por fim, gostaria de registrar também um agradecimento a Richard L. Mace (University of Natal, South Africa) pela concessão de sua ótima rotina para calcular a função de Fried & Conte.

RESUMO

Investiga-se a absorção de ondas eletromagnéticas por plasmas imersos em campos magnéticos retilíneos e inomogêneos na direção perpendicular. O formalismo empregado está dentro do limite de validade do método WKB e se baseia no conceito de tensor dielétrico efetivo, o qual é definido através de correções realizadas em um tensor dielétrico derivado a partir de uma aproximação de ondas planas, de tal forma que a equação de conservação de energia para um plasma fracamente inomogêneo seja automaticamente satisfeita. O tensor dielétrico efetivo obtido por meio deste procedimento descreve corretamente os processos de transferência de energia entre ondas e partículas em um plasma inomogêneo, o que não acontece com o tensor dielétrico obtido diretamente da aproximação de ondas planas, sem incluir as correções. Para isolar o efeito do gradiente do campo, calcula-se o tensor dielétrico em uma situação particular onde a função distribuição de equilíbrio pode ser escrita em termos das mesmas constantes de movimento existentes para um plasma homogêneo. Mostra-se que o tensor efetivo obedece às relações recíprocas de Onsager e que somente as partículas que estão em ressonância com as ondas eletromagnéticas contribuem para a sua parte anti-Hermiteana, ligada à absorção destas ondas. Comparando com outros trabalhos que surgiram na literatura recente, mostra-se que os resultados destes trabalhos podem ser reproduzidos a partir do tensor dielétrico não corrigido, cuja parte anti-Hermiteana possui a contribuição de partículas não-ressonantes. Conclui-se, portanto, que os processos de troca de energia entre as ondas e o plasma não são adequadamente descritos nestes trabalhos. Como aplicação numérica, o tensor dielétrico efetivo é empregado na solução da relação de dispersão de modo a se obter a absorção de ondas que se propagam nos modos ordinário e extraordinário em frequências próximas à frequência de cíclotron eletrônica. Em particular, calcula-se a absorção local e a profundidade óptica do modo ordinário para dois conjuntos de parâmetros físicos, correspondentes a tokamaks de grande e pequena razões de aspecto. Observa-se que uma região de absorção negativa surge em frequências próximas à frequência de cíclotron para valores suficientemente altos do gradiente do campo.

ABSTRACT

We investigate absorption of electromagnetic waves by plasmas in ambient magnetic fields with perpendicular gradients. The basic formalism is within the range of validity of the WKB method, and is based on the concept of effective dielectric tensor, defined by the corrections done on a dielectric tensor derived from a plane wave approximation, in such a way that the energy conservation equation for an inhomogeneous plasma is automatically satisfied. The effective dielectric tensor derived from this procedure correctly describes the energy exchange processes between waves and particles in an inhomogeneous plasma. This is not the case for the dielectric tensor derived from the plane wave approximation, without including the corrections. In order to isolate the effect of the field gradients, we calculate the dielectric tensor for a particular situation where the equilibrium distribution function depends only on the same constants of motion that appear in the homogeneous case. We show that the effective dielectric tensor obeys the Onsager reciprocity relations and that only the particles that resonate with the waves contribute to its anti-Hermitian part, which is related to the absorption of the waves. Comparing with other works in the recent literature, we show that the results of these works can be reproduced from the non-corrected dielectric tensor, whose anti-Hermitian part has contributions from non-resonant particles. We conclude therefore that the energy exchange processes between wave and plasma are not correctly described in these works. As a numerical example, we employ the effective dielectric tensor to solve the dispersion relation in order to calculate the absorption of ordinary and extraordinary waves in frequencies close to the electron cyclotron frequency. Particularly, we obtain the local absorption and the optical depth of the ordinary mode for physical parameters corresponding respectively to tokamaks with large and small aspect ratio. We find that a region of negative absorption arises near the cyclotron frequency for sufficiently high magnetic field gradients.

ÍNDICE

I	Introdução	1
I.1	Plasma Homogêneo	4
I.2	Plasma Inomogêneo	5
I.2.1	Aproximação WKB	6
I.2.2	Aproximação Localmente Homogênea	7
I.2.3	Aproximação Localmente Inomogênea	8
I.2.4	Tratamentos com Equação da Onda	12
I.3	Objetivos e Estrutura da Tese	15
II	A Transformação BGI e o Tensor Dielétrico Efetivo	17
II.1	O Sistema Vlasov-Maxwell de Equações	18
II.2	Aproximação Linear do Sistema Vlasov-Maxwell	20
II.3	A Densidade de Corrente e o Tensor $\vec{\sigma}^0$	22
II.4	A Transformação BGI e o Tensor Dielétrico Efetivo	24
III	O Tensor Dielétrico Efetivo para Plasmas com Gradientes Perpendiculares do Campo Magnético	32
III.1	Trajetórias das Partículas do Plasma em um Campo Magnético Inomogêneo	33
III.2	O Tensor $\vec{\epsilon}^0$ para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares	41
III.3	O Tensor Dielétrico Efetivo para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares	47
III.4	Relações de Simetria dos Tensores $\vec{\epsilon}^0$ e $\vec{\epsilon}$	52
IV	Tensor Dielétrico Efetivo para Distribuições Modelo	60
IV.1	O Tensor Dielétrico Efetivo para Distribuição Maxwelliana	61
IV.1.1	Aproximação Fracamente Relativística	62
IV.1.2	Aproximação Não Relativística	68

IV.2	A Função de Dispersão de Plasma Inomogêneo	69
IV.2.1	Aproximação Fracamente Relativística	69
IV.2.2	Aproximação Não Relativística	77
IV.3	A Parte Anti-Hermiteana de $\vec{\epsilon}$ e Comparação com Outros Trabalhos	78
IV.3.1	A Parte Anti-Hermiteana de $\vec{\epsilon}$	78
IV.3.2	Comparação com Outros Trabalhos Surgidos na Literatura	81
IV.4	Tensor Dielétrico Efetivo para Distribuições de Não-Equilíbrio	89
V	Análise Numérica e Discussão dos Resultados	95
V.1	Metodologia Empregada na Análise Numérica	96
V.2	Análise do Modo Ordinário	100
V.3	Análise do Modo Extraordinário	118
	Sumário e Conclusões	123
A	A Condição de Ressonância para Plasmas com Gradientes Perpendiculares do Campo	133
A.1	Propagação Coplanar à Direção da Inomogeneidade	134
A.2	Regime Fracamente Relativístico	135
A.3	Regime Não Relativístico	135
B	Funções de Dispersão de Plasma	136
B.1	A Função de Fried & Conte $Z(z)$	136
B.2	Funções de Dispersão para Plasmas Fracamente Relativísticos	137
	Referências Bibliográficas	141

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A investigação do comportamento de plasmas inomogêneos e da sua interação com ondas eletromagnéticas constitui uma das áreas de pesquisa mais importantes na física dos plasmas. Uma concepção da sua real importância pode ser atingida se for considerado o fato de que, tanto em ambientes naturais quanto artificiais, o plasma via de regra se apresenta em um estado de não uniformidade, sendo um plasma homogêneo uma exceção extremamente rara.

Uma onda eletromagnética, ao se propagar no interior de um plasma interage com este, sendo em geral absorvida ou amplificada. Ao se propagar em um plasma inomogêneo, porém, diversos outros fenômenos podem ocorrer. A inomogeneidade, além de modificar a taxa na qual a onda é absorvida ou amplificada, em relação à taxa na qual os mesmos fenômenos ocorrem em um plasma homogêneo, força ainda a onda a se refratar, isto é, obriga a frente de onda a mudar constantemente de direção de propagação ao longo da sua trajetória. Neste caminho, se certas condições se cumprirem, outras características da onda poderão se alterar; a onda pode mudar, parcial ou totalmente, de polarização, pode ser parcialmente refletida ou ainda ser transmitida através de uma região não propagante. Qualquer um ou todos estes efeitos podem se tornar importantes, dependendo das condições físicas do plasma e do grau de inomogeneidade em que este se encontra.

Uma tal riqueza de fenômenos possíveis torna o estudo destes sistemas físicos necessariamente difícil e, como conseqüência, um plasma inomogêneo configura-se como um ambiente de difícil controle durante um experimento. Esta dificuldade incentivou o surgimento de uma área de pesquisa sistemática em física dos plasmas, principalmente após o início, em meados dos anos cinqüenta, da construção de máquinas de confinamento de plasma, onde o controle da fusão termonuclear para a geração de energia era o principal objetivo. Um plasma confinado em um volume finito é necessariamente inomogêneo, e desta forma diversos fatores desestabilizantes rapidamente começaram a surgir, tais como a difusão das partículas do plasma para as paredes do recipiente e a amplificação de modos de oscilações macroscópicas e microscópicas devidos a instabilidades. Estes fatores limitam drasticamente o tempo de

confinamento do plasma, o que motivou o início de estudos sistemáticos objetivando a compreensão e a supressão destes fatores desestabilizantes.

Na mesma época, com o avanço da tecnologia de foguetes, principiou-se o estudo da ionosfera terrestre. Posteriormente, com o advento dos satélites lançados em órbita, descobriu-se a existência dos cinturões de Van Allen e de outras regiões a maiores altitudes na magnetosfera. Todos estes sistemas físicos estão em forma de um plasma inomogêneo com diferentes características entre si. Ao se constatar que estes ambientes não são estacionários, e sim altamente dinâmicos, capazes de gerar e amplificar uma grande variedade de ondas, principiou-se então o estudo sistemático dos plasmas da ionosfera e magnetosfera, sendo o Ano Geofísico Internacional (1957-58) o evento que impulsionou a exploração do espaço circunvizinho.

Apesar de ser, portanto, uma área tradicional de pesquisa, os plasmas inomogêneos continuam apresentando desafios novos, com a contínua construção de novas máquinas de confinamento ou com a descoberta de novos ambientes físicos em magnetosferas planetárias ou no vento solar por parte de sondas espaciais, com instrumentos de medição cada vez mais sofisticados. No lado teórico, a complexidade matemática inerente ao tratamento do problema, que dificulta a obtenção de soluções definitivas, e a variedade de sistemas físicos inomogêneos, motivaram o surgimento de diversos métodos distintos, com diferentes graus de sofisticação, aplicáveis somente a sistemas físicos específicos.

Esta tese pretende estudar a interação de ondas eletromagnéticas com um sistema físico em forma de plasma com características bem definidas. O formalismo adotado baseia-se em um método recente que foi desenvolvido dentro do âmbito de validade da aproximação WKB. As ondas em questão, por exemplo, serão supostas de pequena amplitude, de tal forma que se possa linearizar as equações que descrevem o comportamento do plasma frente a estas perturbações. Além disso, o plasma será considerado fracamente inomogêneo, de modo que a aproximação WKB possa ser aplicada. Antes, porém, de se explicitar os objetivos e a estrutura desta tese, considerou-se necessário realizar uma breve revisão do estado da arte, destinada a situar o método aqui adotado dentro do contexto de algumas das técnicas mais utilizadas atualmente na pesquisa em plasmas inomogêneos.

Considerando então ondas eletromagnéticas de pequena amplitude que se propagam em um plasma fracamente inomogêneo, ondas estas que induzem uma resposta no plasma sob a forma de uma corrente, a forma mais geral de relacionar a intensidade da perturbação, no caso o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, à resposta do meio, no caso a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, é através da relação constitutiva

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (\text{I.1})$$

A expressão (I.1) relaciona o campo elétrico da onda que se propaga pelo plasma com a densidade de corrente induzida pela perturbação de uma forma linear, causal e não local através do tensor de condutividade $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$. A integração espacial está vinculada à integração temporal através de uma relação causal. Se o meio for infinito a integração em \mathbf{r}' tem como limite o raio $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq c(t - t')$ ¹. O tensor de condutividade, portanto, descreve quantitativamente a resposta do plasma à perturbação.

A densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ está também relacionada com a intensidade do campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e com o vetor indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ através das equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.2.a})$$

$$c \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.2.b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.2.c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{I.2.d})$$

onde foi adotado o sistema gaussiano de unidades e as densidades de corrente (\mathbf{J}) e carga (ρ) contêm os efeitos da polarização (\mathbf{P}) e da magnetização (\mathbf{M}) do meio através das relações

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{livres}} - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\text{livres}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}, \end{aligned}$$

sendo ρ_{livres} e $\mathbf{J}_{\text{livres}}$ as densidades de carga e corrente das partículas livres, respectivamente. Em um plasma ideal, $\rho \approx \rho_{\text{livres}}$ e $\mathbf{J} \approx \mathbf{J}_{\text{livres}}$.

A partir das equações de Maxwell, obtém-se a equação da onda simplesmente tomando o rotacional de (I.2.a) e inserindo no resultado a equação (I.2.b):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

A equação da onda consiste em uma outra relação entre campo elétrico e densidade de corrente e possui uma interpretação complementar à relação (I.1), isto é, ela descreve a modificação induzida pelo meio no campo eletromagnético, uma vez que \mathbf{J} faz o papel de fonte na equação (I.3).

Uma vez conhecido o tensor de condutividade $\vec{\sigma}$ para o meio a partir de um determinado modelo para o plasma, as equações (I.3) e (I.1) descrevem completamente a propagação da onda pelo plasma. Entretanto, a equação resultante é uma equação íntegro-diferencial cuja solução analítica é extremamente difícil, existindo somente soluções particulares em situações simples. O procedimento usual consiste então em analisar o sistema em estudo para verificar se

¹Ou, de forma equivalente, o campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$ é nulo para $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > c(t - t')$.

o plasma pode ser considerado como meio homogêneo ou se deve ser considerado inhomogêneo. Os tratamentos em cada caso podem ser completamente diferentes entre si, conforme será visto nas seções seguintes.

I.1 Plasma Homogêneo

O problema se simplifica bastante se o meio em estudo for homogêneo e estacionário. A hipótese de homogeneidade significa que a resposta do plasma em um ponto \mathbf{r} à perturbação que ocorre em outro ponto \mathbf{r}' , depende somente da posição relativa entre estes dois pontos, $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, e não depende das características do meio no ponto \mathbf{r} . Já a hipótese de estacionariedade do meio pressupõe que os parâmetros físicos do plasma (densidade, temperatura, campo magnético ambiente, *etc*) são constantes no tempo, e a dependência temporal da condutividade no instante t se deve somente à memória do meio às perturbações em tempos anteriores t' ; isto é, a dependência é dada por $(t - t')$. Como o modelo de plasma adotado nesta tese é por hipótese estacionário, a dependência temporal do correspondente tensor de condutividade será sempre desta forma. Conseqüentemente, o tensor condutividade e a relação (I.1) podem ser escritos da seguinte maneira

$$\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad (\text{I.4.a})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t \vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \, dt' \quad (\text{I.4.b})$$

O tratamento usual para um plasma homogêneo consiste na aplicação da transformação de Fourier sobre o sistema de equações (I.3) e (I.4), obtendo-se então a relação de dispersão, a qual determina os modos normais de oscilação do sistema.

Dada uma função $A(\mathbf{r}, t)$ tal que $A(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \pm\infty$, define-se a transformação de Fourier espaço-temporal aplicada a $A(\mathbf{r}, t)$:

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{I.5.a})$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k A(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \, , \quad (\text{I.5.b})$$

onde $A(\mathbf{k}, \omega)$ é chamada de transformada de Fourier de $A(\mathbf{r}, t)$.

Aplicando então a transformação (I.5.a) nas equações (I.3) e (I.4) obtemos a equação da onda no espaço de Fourier

$$k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i4\pi \frac{\omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{I.6})$$

e, graças à dependência espaço-temporal do tensor condutividade em um meio homogêneo, equação (I.4), pode-se usar o teorema da convolução das transformações de Fourier [84] para

se obter a seguinte relação entre corrente e campo no espaço de Fourier

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) . \quad (\text{I.7})$$

Pode-se então substituir a densidade de corrente em (I.6) por (I.7), obtendo-se o seguinte sistema de equações para $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$:

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) \equiv \left[k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right] E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0 , \quad (\text{I.8})$$

onde introduzimos a definição do *tensor dielétrico*:

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{1}} + i \frac{4\pi}{\omega} \vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) . \quad (\text{I.9})$$

O sistema de equações (I.8) somente possui solução não trivial se

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) \equiv \det(\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)) = 0 . \quad (\text{I.10})$$

A equação (I.10) é denominada de *equação* ou *relação de dispersão*. Ela determina os modos normais de oscilação em um plasma homogêneo, bem como o coeficiente de absorção das ondas.

Esta é, em essência, a descrição do tratamento usual que se aplica ao problema de propagação e absorção de ondas em plasmas homogêneos.

I.2 Plasma Inomogêneo

Em um meio inomogêneo, por outro lado, não é possível escrever o tensor condutividade na forma (I.4.a), pois este não depende somente da posição relativa $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, mas também do ponto onde se observa a perturbação. Assim, não é possível, em princípio, aplicar o teorema da convolução para se obter uma relação do tipo (I.7), a partir da qual se deriva uma relação de dispersão que determina os modos normais de oscilação. Além disso, refração e absorção de ondas não são os únicos fenômenos possíveis em um plasma inomogêneo. Quando uma onda se propaga em um dos possíveis modos normais, devido à inomogeneidade do meio ela pode eventualmente se aproximar de um corte ou ressonância e, neste caso, fenômenos de reflexão, transmissão e conversão de modos podem ocorrer [102].

Para se tratar o problema da propagação e absorção de ondas em plasmas inomogêneos faz-se uso de um número grande de diferentes métodos e aproximações. Não se fará aqui uma revisão abrangente e detalhada dos métodos mais utilizados. Ao invés disso, será realizada uma breve descrição semiquantitativa destes métodos, reunindo-os arbitrariamente em grupos com metodologias afins.

I.2.1 Aproximação WKB

A aproximação WKB, devida a Wentzel, Kramers e Brillouin, é uma solução aproximada da equação da onda (I.3), freqüentemente utilizada em física dos plasmas e em outras áreas para o estudo de meios não uniformes. O método WKB consiste em uma aproximação de onda única e não descreve fenômenos mais complexos como reflexão de ondas e conversão de modos, os quais ocorrem em ressonâncias e cortes.

Em essência, o método utiliza a aproximação eikonal

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)e^{i\psi(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{I.11.a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)e^{i\psi(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{I.11.b})$$

na equação da onda ou nas equações de Maxwell, supondo que a variação da função eikonal $\psi(\mathbf{r}, t)$ no espaço é muito maior que a variação do envoltório do campo $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ ou $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{r}, t) \right| \gg \frac{1}{|\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)|} \left| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}(\mathbf{r}, t) \right|; \quad i = 1, 2, 3.$$

Como a variação em $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ ou $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ é devida à inhomogeneidade do meio, o qual possui a escala característica L de variação das quantidades macroscópicas, as condições usuais para a validade da aproximação WKB são as seguintes:

- o comprimento de onda da radiação (λ) deve ser pequeno em comparação com L ;
- a parte imaginária do vetor de onda (ou a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico) deve ser pequena se comparada com a parte real do vetor de onda (ou com a parte Hermiteana do tensor dielétrico).

Colocando de uma forma quantitativa, estas condições ficam

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_r|} \equiv 2\pi \left| \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, t) \right|^{-1} \ll L = \frac{|\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)|}{|\partial |\mathbf{a}| / \partial \mathbf{r}|} \approx \frac{|\vec{\epsilon}|}{|\partial |\vec{\epsilon}| / \partial \mathbf{r}|} \quad (\text{I.12.a})$$

$$|\mathbf{k}_i| (|\vec{\epsilon}^{\text{aH}}|) \ll |\mathbf{k}_r| (|\vec{\epsilon}^{\text{H}}|), \quad (\text{I.12.b})$$

onde $\vec{\epsilon}^{\text{H}}$ e $\vec{\epsilon}^{\text{aH}}$ são, respectivamente, as partes Hermiteana e anti-Hermiteana de $\vec{\epsilon}$, definidas por

$$\epsilon_{ij}^{\text{H}} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}^*) ; \quad \epsilon_{ij}^{\text{aH}} = \frac{1}{2i} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) .$$

As relações (I.12.a,b) são, portanto, as condições básicas para a validade do método WKB. Dentro do intervalo de validade deste método, diversas aproximações distintas podem ser feitas. Uma aproximação que é amiúde utilizada e que faz uso das condições (I.12.a,b) de uma forma implícita, isto é, supõe *a priori* que estas condições são obedecidas sem necessariamente utilizá-las, é a *aproximação localmente homogênea*. Por outro lado, existem outros

trabalhos que fazem uso explícito destas condições para guiar o desenvolvimento de seu formalismo básico. Este tipo de aproximação é aqui denominado de *aproximação localmente inomogênea*.² Estas duas aproximações serão agora rapidamente abordadas.

I.2.2 Aproximação Localmente Homogênea

Este método supõe que, sendo válidas as condições (I.12.a,b), o plasma pode ser tratado, em cada ponto do espaço, como se fosse homogêneo, e a inomogeneidade é considerada somente na dependência espacial implícita dos parâmetros físicos tais como densidade, temperatura, campo magnético, *etc.*

Neste caso, o procedimento usual consiste em calcular os elementos do tensor dielétrico (I.9) e utilizá-los em seguida na obtenção dos modos normais de oscilação do plasma através da relação de dispersão (I.10). Como os parâmetros físicos utilizados no cálculo de $\vec{\epsilon}$ são dependentes de posição, resulta que a relação de dispersão fornece como resultado

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega; \mathbf{r}) \quad \text{ou} \quad \omega = \omega(\mathbf{k}; \mathbf{r}) .$$

A dependência espacial paramétrica de \mathbf{k} ou ω é previamente determinada pela relação de dispersão $\Lambda(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}) = 0$, mas a sua evolução temporal, bem como da posição da frente de onda, é habitualmente obtida através dos sistemas de equações diferenciais da óptica geométrica, cujo formalismo específico para a física de plasmas foi desenvolvido por *Bernstein* [6], *Friedland & Bernstein* [33], *Bernstein & Friedland* [7] e *Bravo-Ortega & Glasser* [15]. O sistema de equações é o seguinte

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = - \left. \frac{\partial \Lambda / \partial \mathbf{k}}{\partial \Lambda / \partial \omega} \right|_{\Lambda(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r})=0} \quad (\text{I.13.a})$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \left. \frac{\partial \Lambda / \partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda / \partial \omega} \right|_{\Lambda(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r})=0} , \quad (\text{I.13.b})$$

onde \mathbf{v}_g é a velocidade de grupo do pacote de onda. Este formalismo emprega o conceito de raio e o sistema de equações (I.13.a,b) descreve a evolução temporal da posição e do vetor de onda ao longo da trajetória do raio, que representa a frente de onda da perturbação. Conhecendo-se esta trajetória, pode-se calcular a absorção ou amplificação da onda em um plasma inomogêneo. Se o campo elétrico é dado aproximadamente por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \propto \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} ,$$

então a intensidade da radiação ($I \propto |E|^2$) ao longo do raio varia de acordo com a equação

²Esta classificação é arbitrária e não necessariamente é seguida na literatura.

de transferência radiativa [5, 10],

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{I}{N_r^2} \right) + \alpha(s) \left(\frac{I}{N_r^2} \right) = 0^\dagger, \quad (\text{I.14})$$

onde s é a coordenada espacial que parametriza a trajetória do raio, $\alpha(s)$ é o coeficiente de absorção,

$$\alpha(s) = -2\mathbf{k}_i(s) \cdot \frac{\partial \Lambda_r / \partial \mathbf{k}_r}{|\partial \Lambda_r / \partial \mathbf{k}_r|} = 2\mathbf{k}_i(s) \cdot \frac{\mathbf{v}_g}{v_g} \quad (\text{I.15})$$

e N_r é o índice de refração do raio,

$$N_r = \frac{k_r c}{\omega} \left| \frac{\text{sen } \theta}{\cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta} [\cos(\theta - \beta)]} \right|^{\frac{1}{2}}; \quad \tan \beta = \frac{1}{k_r} \frac{\partial k_r}{\partial \theta}.$$

Na expressão acima, o ângulo θ é definido por $\cos \theta = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) / k B_0$, sendo B_0 o campo magnético ambiente. A solução da equação (I.14) é

$$\frac{I(s)}{N_r(s)} = \frac{I(s_0)}{N_r(s_0)} \exp \left(- \int_{s_0}^s ds' \alpha(s') \right) = \frac{I(s_0)}{N_r(s_0)} \exp \left(-2 \int_{s_0}^s ds' \mathbf{k}_i(s') \cdot \frac{\mathbf{v}_g(s')}{v_g(s')} \right). \quad (\text{I.16})$$

As equações (I.9, I.10), em conjunto com as equações (I.13.a,b, I.14, I.16), são frequentemente utilizadas no estudo da propagação e absorção (amplificação) de ondas em plasmas espaciais e de laboratório [1, 6, 7, 15, 28–30, 33, 34, 39–42, 44, 47, 48, 55, 69, 89, 107].

I.2.3 Aproximação Localmente Inomogênea

Esta aproximação consiste em um tratamento mais aprimorado do problema de propagação e absorção de ondas em plasmas não uniformes do que a aproximação localmente homogênea.

Os diferentes métodos desenvolvidos com esse fim incluem a dependência explícita dos parâmetros físicos macroscópicos (densidade, temperatura, campo magnético) com a posição, permitindo uma descrição mais acurada dos efeitos das inomogeneidades, prevendo, entre outros fenômenos, uma nova classe de instabilidades, chamadas de *instabilidades de deriva*, a qual é devida exclusivamente aos gradientes macroscópicos. Inomogeneidades no campo magnético afetam também a ressonância onda-partícula em frequências próximas à frequência de ciclotron, e este efeito não consiste simplesmente em um alargamento no espectro de ressonância, como se esperaria a partir de um tratamento localmente homogêneo [10]. Tratamentos explicitamente inomogêneos levam em conta, desde o princípio, o fato de que um plasma inomogêneo é um sistema que não está em equilíbrio termodinâmico e que, por conseguinte, possui fontes de energia livre que são sustentadas pelo agente externo que

[†]Foi desprezada aqui a emissividade espontânea do plasma.

mantém a inomogeneidade. Parte desta energia livre pode ser transferida, por conseqüência, a algum modo interno de oscilação gerando instabilidades, mesmo que o equilíbrio metaestável deste sistema seja descrito por distribuições isotrópicas e monotonicamente decrescentes no espaço de *momenta*, como por exemplo a distribuição de Maxwell-Boltzmann, a qual é sempre estável em um plasma homogêneo [25]. Tal fato já está bem estabelecido no caso das instabilidades macroscópicas, particularmente para as instabilidades MHD [32, 62] e para as instabilidades de deriva [80, 81].

Contudo, métodos localmente inomogêneos são construídos dentro do espectro de validade da aproximação WKB (I.12) e, portanto, continuam sendo descrições de onda única, não sendo possível descrever desta forma efeitos de conversão de modos e de reflexão, o que exige cuidados quando se tenta aplicar o método em frequências próximas às ressonâncias.

Existem, entretanto, algumas vantagens. Os métodos localmente inomogêneos são consideravelmente mais simples do que formulações que tentam resolver a equação da onda completa. O uso da aproximação eikonal (I.11) permite que sejam construídas relações de dispersão formalmente idênticas às utilizadas na aproximação localmente homogênea. Desta forma se obtém os modos normais de oscilação de um plasma inomogêneo e conseqüentemente a potência absorvida, com um grau de complexidade numérica em geral menor que nos tratamentos de equação da onda.

Entre os métodos mais utilizados está o devido a *Mikhaïlovskii* [79–83, 91]. Este método, conforme será visto quantitativamente no capítulo II, emprega a solução formal da equação de Vlasov obtida através do método das características. As características da equação de Vlasov linearizada são as trajetórias não perturbadas das partículas do plasma e a solução formal é expressa na forma de uma integral de caminho onde a variável de integração, no caso o tempo, é calculada ao longo das características, isto é, as trajetórias não perturbadas. Aqui o caráter fracamente inomogêneo se manifesta em duas oportunidades: ao se representar os campo $E(\mathbf{r}, t)$ e $B(\mathbf{r}, t)$ na forma de ondas planas, e ao se expandir a função distribuição de equilíbrio $F_{\alpha 0}$ em torno de um ponto arbitrário no espaço de configuração. Estas duas providências tornam possível a integração analítica da equação de Vlasov e a solução assim obtida pode ser então utilizada na obtenção da densidade de corrente e do tensor dielétrico (I.7, I.9).

Em um plasma inomogêneo, entretanto, expandir o campo eletromagnético na forma de uma superposição de ondas planas não é suficiente para que se possa obter a forma do tensor de condutividade na espaço de Fourier, já que o teorema da convolução não pode ser trivialmente utilizado na forma mais geral para a relação (I.1). Como conseqüência, o tensor dielétrico obtido por *Mikhaïlovskii* não apresenta algumas propriedades fundamentais: o tensor $\vec{\epsilon}$ não

obedece às relações de reciprocidade de Onsager e a sua parte anti-Hermiteana, ligada à absorção de ondas, apresenta contribuições de termos não ressonantes, isto é, termos que não são devidos à ressonância onda-partícula, que é o único mecanismo de troca de energia entre ondas e partículas na aproximação linear [8, 18, 19].

Outro método que tem sido bastante utilizado atualmente é a teoria girocinética para frequências arbitrárias de *Chen & Tsai* [24, 106]. O método consiste basicamente em transformar a equação de Vlasov linearizada a partir do espaço de fase (\mathbf{r}, \mathbf{p}) para o espaço de fase do centro-guia (\mathbf{R}, \mathbf{V}) , onde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} / \Omega \quad (\text{I.17.a})$$

$$\mathbf{V} = (\epsilon, \mu, \alpha) . \quad (\text{I.17.b})$$

A equação (I.17.a) determina a posição do centro-guia da partícula no campo magnético, onde $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$; $\epsilon = v^2/2 + q\Phi_0(\mathbf{r})/m$ é a energia total da partícula por unidade de massa, sendo $\Phi_0(\mathbf{r})$ o potencial elétrico; $\mu = v_{\perp}^2/2B_0$ é o *momentum* magnético da partícula; α é o ângulo de fase da rotação da partícula ao redor de \mathbf{B}_0 . As quantidades ϵ e μ são invariantes adiabáticos nesta aproximação de inhomogeneidade fraca. A seguir, é feito um ordenamento dos termos perturbados de acordo com o parâmetro $\lambda = \rho/L \ll 1$, onde $\rho = v_{\perp}^2/\Omega$ é o raio de Larmor da partícula, e a equação de Vlasov linearizada é expandida até a ordem $\mathcal{O}(\lambda)$. Os termos resultantes são expandidos em séries de Fourier do ângulo α , restando então uma equação diferencial que foi promediada sobre o ângulo de giro α . Como todos os termos da expansão em α são mantidos, a equação resultante é válida para frequências arbitrárias, e não somente para baixas frequências.

A equação promediada é finalmente resolvida utilizando-se a aproximação WKB, resultando por fim relações de dispersão que descrevem o comportamento dos modos normais de oscilação, as quais são, portanto, equivalentes às relações de dispersão obtidas nos limites homogêneo ou localmente homogêneo.

Em uma série de publicações recentes, *Lashmore-Davies et alli* [17, 63–65, 76] utilizam o método girocinético de *Chen & Tsai* para estudar diversos aspectos relacionados com absorção e propagação de ondas em plasmas não uniformes de tokamaks. Semelhante ao caso de *Chen & Tsai*, a equação diferencial promediada em α é resolvida empregando uma aproximação de onda plana [63]. Devido a isso, os problemas já citados no caso dos trabalhos de *Mikhaïlovskii* ressurgem aqui, sendo o mais perceptível a contribuição de termos não ressonantes na absorção das ondas. Esta contribuição foi denominada de “fluxo de potência cinética” (*kinetic power flow*) por *Lashmore-Davies et alli* e se caracteriza por possuir um comportamento reversível ao se cruzar a frequência de ciclotron.

Esta coincidência se deve ao fato de que ambos os métodos são essencialmente os mesmos, e será mostrado mais adiante neste trabalho que o formalismo de Mikhaïlovskiï reproduz resultados fundamentais dos trabalhos de Lashmore-Davies *et alli*, derivados a partir do método girocinético, o qual é consideravelmente mais complexo e trabalhoso que o primeiro.

Finalmente, será agora introduzido o método adotado nesta tese e que é devido a *Beskin, Gurevich & Istomin* [8, 18, 50, 51]. Este método, doravante denominado método BGI,³ consiste basicamente em uma transformação do tipo Fourier a ser aplicada ao tensor dielétrico obtido em um formalismo localmente inomogêneo onde se fez uso do método WKB, isto é, a aproximação eikonal (I.11) para o campo eletromagnético.

A forma desta transformação, denominada também de *transformação BGI*, é derivada a partir de uma expansão realizada na equação da onda (I.3), onde o campo $E(\mathbf{r}, \omega)$ é suposto ser da forma eikonal (I.11). A expansão é feita baseada em um ordenamento que mantém invariante o teorema de conservação de energia,

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\omega}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{aH}} \cdot \mathbf{E}^* . \quad (\text{I.18})$$

Como consequência, o tensor que resulta no lado direito de (I.18) não mais é o tensor resultante da expansão em ondas planas, representado por $\overleftrightarrow{\epsilon}^0$, mas é um tensor dielétrico efetivo, cuja forma, na ordem mais baixa da expansão, é

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{\epsilon}^0 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\epsilon}^0}{\partial k_j \partial x_j} ,$$

sendo daqui por diante adotada a convenção de soma implícita sobre índices repetidos. Este é o tensor dielétrico correto a ser incluído na relação de dispersão para que se obtenham os modos normais de oscilação em um plasma inomogêneo, dentro do limite de validade do método WKB. A transformação BGI será discutida com mais detalhes na seção II.4.

Esta transformação resolve os problemas que surgiram com as formulações anteriores. Suas principais virtudes são que o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}$ apresenta a simetria de Onsager e a sua parte anti-Hermiteana apresenta somente a contribuição de partículas ressonantes. Isto significa que a absorção de ondas se torna corretamente descrita utilizando-se o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}$ na formulação localmente inomogênea. Além disso, mostrar-se-á que o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}$ corresponde à verdadeira transformada de Fourier do tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ na variável rápida $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Por conseguinte, é o tensor que deve ser utilizado na obtenção da equação da onda (I.3) a partir da transformação inversa de Fourier de $\overleftrightarrow{\epsilon}$.

Aplicações recentes deste método para o caso de inomogeneidades em densidade e temperatura, mas com campo magnético homogêneo, foram realizadas recentemente por *Caldela F^o*

³Ou formalismo BGI.

et alli [18–20] e por *Cavalcanti et alli* [21, 23]. Já esta tese considera o caso em que o campo magnético é inhomogêneo enquanto que os demais parâmetros físicos podem ser considerados uniformes [35–38]. Este caso particular apresenta uma diferença fundamental em relação ao anterior: a própria condição de ressonância onda-partícula é modificada devido ao gradiente de $B_0(\mathbf{r})$, e esta modificação se manifesta de forma mais intensa em frequências próximas à frequência de ciclotron, ao contrário do que se observa no caso de campo homogêneo, onde os maiores efeitos da inhomogeneidade se manifestam em frequências relativamente distantes da frequência de ciclotron [18–21, 23].

I.2.4 Tratamentos com Equação da Onda

Diversos trabalhos recentes têm se empenhado em resolver o problema da propagação e da absorção de ondas em plasmas inhomogêneos utilizando a equação da onda na sua forma diferencial (I.3), obtendo uma relação entre $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a partir da relação constitutiva geral (I.1), seja utilizando aproximações que fornecem a desejada relação de uma forma local,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.19})$$

onde $\widehat{\mathbf{D}}$ é um operador diferencial aplicado a $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, seja de uma forma não local, onde a relação entre $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é estabelecida através de uma integração no espaço, somando as contribuições de todo o sistema ao ponto de observação. Neste último caso a equação da onda resulta ser uma equação íntegro-diferencial, e por isso sempre se buscou construir modelos que resultassem em relações na forma (I.19). Entretanto, o desenvolvimento dos recursos computacionais tem possibilitado o surgimento de trabalhos que exploram os aspectos não locais na equação da onda [98].

Uma revisão detalhada e completa dos diversos métodos que têm sido utilizados nestes últimos anos foge do escopo da presente tese e portanto não será realizada. Far-se-á, ao invés disso, uma descrição genérica e superficial de alguns métodos que serão arbitrariamente classificados de acordo com características comuns, sendo fornecidas algumas referências que, como já foi ressaltado, estão longe de ser completas.

Obtenção dos Coeficientes de Conversão de Modos a Partir de Equações Modelo

Neste caso, por *coeficientes de conversão de modos* quer-se referir aos diversos coeficientes de transmissão, reflexão e também de conversão de modos, os quais estão envolvidos quando determinado modo de propagação se aproxima de uma ressonância ou de um corte. O exemplo usual neste caso é o da onda extraordinária lenta que ao se aproximar da frequência híbrida superior pode ter parte de sua energia refletida, parte convertida em uma onda de

Bernstein e parte tunelada através da região evanescente entre as frequências híbrida superior e de corte, ressurgindo na forma de uma onda extraordinária rápida e possivelmente na forma de uma onda ordinária. Cada um dos respectivos coeficientes descrevem a fração da energia incidente que é transferida para cada processo citado acima.

Uma das formas de se estudar quantitativamente os processos físicos que ocorrem próximos à ressonância é através de equações diferenciais modelo, as quais simplificam as dependências espaciais dos diversos coeficientes envolvidos, mantendo somente os fenômenos de interesse, isto é, ressonâncias, cortes e eventualmente absorção de Landau ou de ciclotron. Este é o caso da equação de tunelamento, a qual, na sua forma usual, reproduz de forma simplificada a ressonância híbrida superior e a região evanescente que se segue até a frequência de corte. Exemplos deste tipo de tratamento podem ser obtidos nas referências [70, 86, 102, 104, 105, 108].

Obtenção da Potência Absorvida e da Relação Constitutiva

Os trabalhos neste grupo se dedicam exclusivamente à obtenção de expressões para o cálculo da relação constitutiva entre $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, relação (I.1). Estes trabalhos se detiveram ou no caso de inomogeneidade predominantemente na direção paralela a B_0 [53], ou no estudo da propagação de ondas de íon-Bernstein em frequências próximas às ressonâncias de íon-ciclotron ou híbrida inferior [13], ou na obtenção do operador tensorial $\hat{\mathbf{D}}$ que relaciona \mathbf{E} com \mathbf{J} em diversas geometrias [16, 75].

Já os trabalhos de *McVey et alli* [77] e de *Brambilla & Krücken* [14] se detiveram no cálculo da potência absorvida (P_{abs}) por um plasma inomogêneo a partir de primeiros princípios. A potência absorvida no ponto \mathbf{r} , $P_{abs}(\mathbf{r})$, é definida como a taxa média de variação da energia das partículas que passam pelo ponto \mathbf{r} . Esta variação deve ser igual à taxa média de trabalho realizado pelo campo eletromagnético da onda nas partículas. A taxa de trabalho instantâneo que o campo realiza sobre uma dada partícula é

$$q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (I.20)$$

onde q é a carga elétrica e \mathbf{v} é a velocidade da partícula no ponto (\mathbf{r}, t) . Então a taxa média de trabalho sobre todas as partículas é dada pela média estatística de (I.20), utilizando como peso a função de distribuição das partículas no ponto (\mathbf{r}, \mathbf{v}) do espaço de fase e no instante t , realizando-se simultaneamente a média temporal:

$$P_{abs}(\mathbf{r}, t) = \int d^3v \langle q\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{v}' f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle_t \quad ,$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota a média temporal, realizada sobre o período de giro das partículas.

O principal resultado obtido foi que P_{abs} em um meio inhomogêneo difere da expressão usual $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ pela relação

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = P_{abs} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{cin} , \quad (\text{I.21})$$

onde \mathbf{S}_{cin} corresponde ao fluxo cinético devido ao movimento coerente das partículas no campo da onda. Este é um termo reversível, o qual deve ser adicionado ao fluxo de Poynting usual na equação de conservação de energia e que, portanto, não corresponde à verdadeira absorção de energia pelas partículas, a qual é um processo irreversível. No decorrer desta tese haverá oportunidade para se discutir novamente as conclusões destes dois últimos trabalhos.

Soluções da Equação da Onda

A seguir serão citados alguns trabalhos recentes que resolvem numericamente a equação da onda tanto na sua forma local, utilizando o operador diferencial (I.19), quanto na sua forma não local (I.1). Os trabalhos citados possuem como principal objeto em estudo o plasma de tokamaks, o qual apresenta, próximo ao centro do toróide, uma inhomogeneidade predominantemente perpendicular a \mathbf{B}_0 , tanto no campo quanto na densidade e temperatura [49, 52, 54, 61, 67, 73, 85, 98].

Além destas referências, serão também ressaltados os trabalhos de *Antonsen & Manheimer* [4], *Maroli et alli* [74, 90] e de *Zvonkov & Timofeev* [114], os quais resolveram numericamente a equação da onda com o intuito de comparar seus resultados com a aproximação WKB. Resumidamente, as principais conclusões foram:

- para o modo ordinário, o coeficiente de absorção obtido a partir do modelo WKB está em excelente concordância com a absorção prevista a partir da equação da onda e o coeficiente de reflexão é desprezível quando a onda cruza a região ressonante,⁴ mesmo em casos onde a aproximação WKB não é mais formalmente válida, ou seja, quando as condições (I.12) não são satisfeitas [4, 74, 114];
- já para o modo extraordinário a análise é mais complicada, pois reflexões fortes na ressonância, juntamente com conversões para onda de Bernstein, estão facilmente envolvidas. As principais conclusões obtidas por *Petrillo et alli* [90] são que a teoria WKB somente é uma boa aproximação quando a densidade do plasma é suficientemente baixa. Caso contrário, existe um valor limite para a densidade a partir do qual os resultados da aproximação WKB e da equação da onda divergem rapidamente (ver figura 1 de *Petrillo et alli* [90]).

⁴Isto é, em torno da frequência de ciclotron.

I.3 Objetivos e Estrutura da Tese

Uma vez situado o formalismo a ser adotado nesta tese frente aos diversos métodos empregados nos últimos anos, pretende-se agora utilizá-lo no estudo da absorção e propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma imerso em um campo magnético ambiente cujo módulo apresenta gradientes na sua direção perpendicular.

Este tipo de sistema físico tem sido freqüentemente empregado como modelo para o plasma situado no centro do toro de um tokamak, pois nesta posição o gradiente do campo magnético é predominantemente perpendicular e os gradientes da densidade e da temperatura são pequenos. Em plasmas espaciais, diversos ambientes contêm campos magnéticos com gradientes perpendiculares, principalmente aqueles situados na região do equador magnético e na cauda magnética das magnetosferas planetárias. A região central de grandes laços coronais que se projetam pela cromosfera e coroa solares também são ambientes onde este modelo pode ser aplicado. Diversos outros sistemas naturais ou artificiais podem ser reproduzidos satisfatoriamente com este modelo e, portanto, o domínio dos possíveis fenômenos de absorção ou propagação de ondas em plasmas com gradientes perpendiculares do campo pode ser extremamente útil para a compreensão da física envolvida nestes sistemas.

Seguindo o formalismo da aproximação localmente inomogênea exposto acima, o tratamento feito nesta tese principia no capítulo II com a solução formal da equação de Vlasov linearizada. Esta solução propicia o cálculo da densidade de corrente perturbada no plasma e, após representar-se os campos eletromagnéticos em termos de suas integrais de Fourier, pode-se identificar então o tensor dielétrico para um meio inomogêneo obtido a partir de uma aproximação de ondas planas, aqui representado por $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$.

Uma vez obtido o tensor $\vec{\epsilon}^0$, válido para um sistema físico geral, o modelo a ser adotado no restante da tese será explicitado no capítulo III, para o qual será então derivada a forma correspondente do tensor $\vec{\epsilon}^0$. Neste modelo, enquanto que o campo magnético possui gradientes perpendiculares, serão discutidas as condições para que se possa considerar os demais parâmetros físicos do plasma, tais como a densidade e a temperatura, uniformes. Em sendo obtido o tensor $\vec{\epsilon}^0$ para o sistema físico em questão, será aplicada em seguida a transformação BGI, de onde resultará finalmente o tensor dielétrico efetivo. Na parte final do capítulo III, os dois tensores serão por fim comparados sob o critério das relações recíprocas de Onsager, para que se possa decidir qual dentre ambos apresenta a simetria correta. Mostrar-se-á então que, enquanto o tensor dielétrico efetivo satisfaz as mencionadas relações, o tensor $\vec{\epsilon}^0$ falha neste teste, o que mostra que este último não é a forma correta do tensor dielétrico no espaço de Fourier, papel este desempenhado pelo tensor dielétrico efetivo.

No capítulo IV, a expressão obtida para o tensor efetivo, válida para qualquer função distribuição de equilíbrio, será particularizada para certas distribuições específicas, sendo enfatizada a distribuição de Maxwell-Boltzmann. As expressões assim obtidas para os componentes do tensor dielétrico efetivo serão então escritas em termos de uma nova função especial, para a qual serão derivadas fórmulas que contêm funções de dispersão usuais em física de plasmas. Este resultado permitirá então demonstrar que a parte anti-Hermiteana do tensor efetivo contém a contribuição exclusiva da fração de partículas do plasma que estão em ressonância com a onda. Mostrar-se-á também que trabalhos alternativos que surgiram recentemente na literatura podem ser reproduzidas a partir do tensor $\vec{\epsilon}^0$ e que, portanto, além de não respeitarem as relações recíprocas de Onsager, possuem ainda a contribuição de partículas não ressonantes na sua parte anti-Hermiteana.

No capítulo V será feita uma análise numérica dos resultados analíticos obtidos no capítulo anterior. Serão analisadas ondas que se propagam nos modos ordinário e extraordinário, com uma priorização no primeiro modo, inclusive apresentando resultados de um modelo que se destina a reproduzir de forma simplificada a absorção de ondas em um tokamak. Resultados obtidos para dois conjuntos de parâmetros físicos correspondentes a tokamaks de grande e pequeno portes serão mostrados e discutidos.

Por fim, será feito um sumário dos desenvolvimentos e dos resultados obtidos ao longo desta tese, sendo apresentadas as conclusões.

CAPÍTULO II

A TRANSFORMAÇÃO BGI E O TENSOR DIELÉTRICO EFETIVO

Neste capítulo serão inicialmente obtidas as soluções formais do sistema de equações de Vlasov-Maxwell linearizado: as soluções do sistema em ordem zero, correspondente à solução de equilíbrio, e em primeira ordem, correspondente ao caso perturbado.

Utilizando uma representação para o campo eletromagnético na forma de uma integral de Fourier (I.5), será obtida uma forma para a densidade de corrente em termos de um tensor, dependente de posição, e que possui a dimensão da condutividade elétrica. Quando o plasma é homogêneo, este tensor, representado por $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, é igual à transformada de Fourier do tensor de condutividade no espaço de configuração (I.4.a), e a equação da onda (I.3) recai na forma usual para o caso de meios homogêneos (I.8). Neste caso, a representação integral (I.5) é equivalente a uma representação para $E(\mathbf{r}, t)$ na forma de uma onda plana

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} . \quad (\text{II.1})$$

Em um meio inhomogêneo, entretanto, o campo não pode ser representado na forma de ondas planas, e a equação da onda não pode ser trivialmente escrita na forma de um sistema de equações algébricas como a equação (I.8). Trabalhos anteriores que aproximaram o campo na forma de ondas planas obtiveram tensores dielétricos¹ que apresentaram uma série de características fisicamente inaceitáveis, conforme foi discutido na seção I.2.3. Isto se deve ao fato de que existem dois processos envolvidos na variação da amplitude da onda em um meio inhomogêneo. Além da verdadeira troca de energia entre ondas e partículas devida à ressonância, existe também a variação devida à mudança na velocidade de propagação da onda, geralmente a velocidade de grupo, ocasionando a refração da onda, a qual passa por regiões de diferentes valores dos parâmetros físicos. Na equação de conservação de energia, estes dois efeitos aparecem no termo $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, o qual resulta ser igual à soma da potência absorvida P_{abs} , que corresponde a um processo irreversível, mais um termo reversível correspondente a um fluxo de energia cinética $\nabla \cdot \mathbf{S}_{cin}$, como já foi mostrado na equação (I.21).

¹Definidos em função de $\vec{\sigma}^0$ através de (I.9).

O tensor obtido a partir de uma aproximação de ondas planas, representado aqui por $\vec{\epsilon}^0$, necessita portanto ser corrigido de forma a manter na sua parte anti-Hermiteana, ligada à absorção de ondas, somente o mecanismo de troca de energia na forma da ressonância onda-partícula. Esta tarefa é desempenhada pela transformação BGI, a qual consiste em uma transformação aplicada sobre $\vec{\epsilon}^0$ com o intuito de manter somente a contribuição ressonante na parte anti-Hermiteana de um novo tensor chamado de *tensor dielétrico efetivo*. A parte não ressonante contribui, como resultado da transformação, somente na parte Hermiteana do tensor efetivo, a qual está ligada aos fenômenos de propagação da onda.

A estrutura deste capítulo será a seguinte: na seção II.1 a equação de Vlasov será introduzida e o seu significado físico será brevemente discutido; na seção II.2 o sistema Vlasov-Maxwell de equações será linearizado e formalmente resolvido nas duas primeiras ordens de perturbação, e sua solução será utilizada na seção II.3 para se obter o tensor $\vec{\sigma}^0$. Finalmente na seção II.4 a transformação BGI será introduzida e o conceito de tensor dielétrico efetivo será discutido.

II.1 O Sistema Vlasov-Maxwell de Equações

Considerando-se um plasma composto por diversas populações distintas de elétrons e íons, supõe-se que a estatística do sistema possa ser descrita pela função de distribuição $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, onde $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d^3r d^3p$ é igual à probabilidade de se encontrar uma partícula da espécie α , em um determinado instante de tempo t , no elemento de volume $d^3r d^3p$ ao redor do ponto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) do espaço de fase da partícula. A função $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é também chamada de função distribuição de uma partícula. A sua dinâmica é regida pela equação de Boltzmann

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{C}(f_{\alpha\beta}) \quad , \quad (\text{II.2})$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_\alpha$, sendo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \sqrt{1 + p^2/m_\alpha^2 c^2}$ o fator de Lorentz, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é a força média macroscópica à qual o sistema está submetido e $\mathcal{C}(f_{\alpha\beta})$ é um operador integral que leva em conta as colisões, isto é, as correlações existentes entre as partículas de espécies α e β . Este operador é definido em termos da função distribuição de duas partículas $f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$, onde

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)d^3r d^3r' d^3p d^3p'$$

é a probabilidade de se encontrar, no instante t , a partícula α no elemento $d^3r d^3p$ ao redor do ponto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) e a partícula β dentro de $d^3r' d^3p'$ ao redor de $(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$, em seus respectivos espaços de fase. A equação que determina $f_{\alpha\beta}$ tem a mesma forma que (II.2) mas o termo do lado direito depende agora da função distribuição de três partículas $f_{\alpha\beta\gamma}$. Obtém-se então

uma cadeia de equações interdependentes. A equação para $f_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ depende de $f_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}$ ($n = 1, \dots, N$), sendo N o número total de partículas do sistema. Este sistema acoplado de equações estabelece uma hierarquia nas distribuições, sendo cada uma dependente da distribuição de ordem mais alta. Esta hierarquia é denominada *hierarquia BBGKY* [56–58].

Uma forma conveniente de expressar as distribuições de duas ou mais partículas é em termos das funções de correlação. A função $f_{\alpha\beta}$, por exemplo, fica escrita

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_{\beta}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) ,$$

sendo $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$ a função de correlação entre as partículas α e β . Correspondentemente existem as funções $g_{\alpha\beta\gamma}, \dots, g_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}$. Supõe-se então ser possível estabelecer um ordenamento para as funções de correlação $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma}, \dots$ em termos do parâmetro de plasma g ,

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} ; \lambda_D = \left(\frac{T}{8\pi n_0 e^2} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

onde λ_D é o comprimento de Debye, T é a temperatura do plasma em unidades de energia, n_0 é a densidade de partículas e e o valor absoluto da carga do elétron. O parâmetro g é proporcional à razão entre a distância de maior aproximação entre duas partículas no plasma e a distância média entre as partículas. Está também relacionado à razão entre a energia potencial média de uma partícula no plasma e a sua energia cinética. A chamada *aproximação de plasma* ocorre quando $g \ll 1$, e costuma-se dizer então que o número de partículas na esfera de Debye é grande. Na aproximação de plasma, o seguinte ordenamento é suposto válido

$$f_{\alpha} \sim \mathcal{O}(1) ; g_{\alpha\beta} \sim \mathcal{O}(g) ; g_{\alpha\beta\gamma} \sim \mathcal{O}(g^2) ; \dots g_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \sim \mathcal{O}(g^{n-1}) ; \dots$$

Nas situações que interessam a este trabalho, basicamente plasmas termonucleares e espaciais (magnetosferas planetárias, coroa solar), o parâmetro g é da ordem $g \approx 10^{-7}$ (plasmas termonucleares) e $g \lesssim 10^{-4}$ (plasmas espaciais). Neste caso o plasma é basicamente não colisional. Além disto, este trabalho está interessado em estudar as oscilações de alta frequência, em comparação com a frequência média de colisões entre as partículas $\nu_{\alpha\beta}$ [12]

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{4\pi q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 n_{\beta}}{m_{\alpha}^{1/2} T_{\alpha}^{3/2}} \ln \Lambda^{(\alpha,\beta)} ,$$

onde $\ln \Lambda^{(\alpha,\beta)}$ é o logaritmo de Coulomb. Como a relaxação de um plasma em direção ao estado de equilíbrio termodinâmico é devida às colisões binárias entre as partículas, e como o tempo característico de relaxação é inversamente proporcional a $\max(\nu_{\alpha\beta})$, então a evolução temporal da função distribuição devida à perturbação também será não colisional se

$$\omega \gg 2\pi \max(\nu_{\alpha\beta}) .$$

Nos plasmas de interesse, a razão $\omega/2\pi \max(\nu_{\alpha\beta})$ é da ordem de $\sim 6 \times 10^6$ para plasmas termo-nucleares e $\gtrsim 2 \times 10^4$ para plasmas espaciais. Do ponto de vista da evolução da perturbação, portanto, o plasma também pode ser considerado não colisional.

A escolha usual para cortar a cadeia de equações, portanto, consiste em desprezar todos os termos de ordem igual e maior que g , isto é, supor $\mathcal{C}(f_{\alpha\beta}) \approx 0$ em (II.2). Em um plasma a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é a força de Lorentz. Além disso, escrevendo as densidades de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ em termos das funções distribuição,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.3.a})$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) , \quad (\text{II.3.b})$$

onde \sum_{α} representa a soma sobre todas as espécies de partículas, pode-se escrever a equação de Boltzmann não colisional juntamente com as equações de Maxwell como um sistema íntegro-diferencial acoplado de equações, denominado de *sistema Vlasov-Maxwell de equações*,

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + q_{\alpha} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (\text{II.4.a})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.4.b})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.4.c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.4.d})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (\text{II.4.e})$$

onde a equação (II.4.a) é a chamada *equação de Vlasov*.

II.2 Aproximação Linear do Sistema Vlasov-Maxwell

O sistema Vlasov-Maxwell é um sistema não linear de equações, devido ao acoplamento existente entre os campos e f_{α} em (II.4.a), e não possui ainda solução exata. Supondo então que a perturbação é de pequena amplitude, expande-se as variáveis f_{α} e \mathbf{B} em um termo de equilíbrio mais um termo perturbado da seguinte maneira

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.5.a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) , \quad (\text{II.5.b})$$

onde se supõe que $|f_{\alpha 1}| \ll f_{\alpha 0}$ e $|\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_0|$. Inserindo as expansões (II.5) em (II.4) e desprezando o termo não linear que resulta,

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{p}} ,$$

o sistema Vlasov-Maxwell resulta linearizado. Na ausência de perturbações ($f_{\alpha 1} = B_1 = E = 0$), o sistema que descreve o equilíbrio do plasma é dado por

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \frac{q_\alpha}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0 \quad (\text{II.6.a})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int d^3p \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.6.b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.6.c})$$

É importante comentar que foi implicitamente suposto que $E_0(\mathbf{r}) \approx 0$ em (II.6). Para que esta suposição seja válida é necessário e suficiente que o plasma seja neutro tanto globalmente quanto localmente.

A forma da função distribuição de equilíbrio é obtida a partir da solução de (II.6.a), a qual é dada pelo método das características [9]. Sendo t um parâmetro ao longo da curva no espaço de fase que consiste na solução de (II.6.a), as suas características são definidas pelas equações

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \frac{\mathbf{p}_\alpha}{\gamma m_\alpha} \quad (\text{II.7.a})$$

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \frac{q_\alpha}{\gamma m_\alpha c} [\mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_\alpha)] \quad (\text{II.7.b})$$

As equações (II.7) são formalmente iguais às equações de movimento de uma partícula da espécie α sob a ação do campo $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Neste caso, o parâmetro t pode ser identificado como o tempo e as equações características passarão a ser referidas como equações de movimento. Já a distribuição de equilíbrio satisfaz a equação

$$\frac{df_{\alpha 0}}{dt}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = 0 \quad ,$$

e portanto $f_{\alpha 0}$ é constante ao longo da curva característica, e deve ser função das constantes de movimento obtidas a partir das equações (II.7). Orientando o sistema de coordenadas de modo a colocar $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ ao longo do eixo x_3 , $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = B_0(\mathbf{r})\hat{e}_3$, sendo \hat{e}_3 o vetor unitário na direção de x_3 , é fácil mostrar que as constantes de movimento são:

$$\begin{aligned} p_\perp^2 &= p_1^2 + p_2^2; \quad p_3 = p_\parallel \\ P_{1\alpha} &= p_1 - \frac{q_\alpha}{c} \int^{x_2} dx'_2 B_0(\mathbf{r}') \\ P_{2\alpha} &= p_2 + \frac{q_\alpha}{c} \int^{x_1} dx'_1 B_0(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

e, portanto,

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel, P_{1\alpha}, P_{2\alpha}) \quad ,$$

como pode ser facilmente verificado em (II.6.a).

Já para as componentes perturbadas resulta o seguinte sistema de equações, onde o sub-crito "1" foi eliminado,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \right] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -q_\alpha \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.8.a})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.8.b})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int d^3 p \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.8.c})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3 p f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{II.8.d})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{II.8.e})$$

A equação (II.8.a) também pode ser resolvida através do método das características. Novamente as equações características serão dadas pelas equações de movimento (II.7), mas agora a função distribuição será determinada por

$$\frac{df_\alpha}{dt}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = -q_\alpha \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}'}(\mathbf{r}', \mathbf{p}'),$$

onde $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p}' = \mathbf{p}(t)$ são as curvas características da solução. A solução para f_α é obtida então integrando-se formalmente a equação acima no intervalo $t' \in (-\infty, t]$, supondo $\mathbf{p}'(t' = t) = \mathbf{p}$ e $\mathbf{r}'(t' = t) = \mathbf{r}$:

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -q_\alpha \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'(t')}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}'(t')}, \quad (\text{II.9})$$

onde foi levado em conta o fato de que $f_{\alpha 0}$ é função das constantes de movimento. Em (II.9) colocou-se o limite inferior em $t \rightarrow -\infty$ para se eliminar os efeitos transientes, $f_\alpha(\mathbf{r}'(t \rightarrow -\infty), \mathbf{p}'(t \rightarrow -\infty), t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$, restando somente o estado assintótico. Obviamente, "estado assintótico" aqui ainda supõe um intervalo de tempo pequeno comparado com o tempo médio de colisões entre as partículas.

II.3 A Densidade de Corrente e o Tensor $\overleftrightarrow{\sigma}^0$

Na seção anterior foi obtida a solução formal da equação de Vlasov linearizada, e com ela é possível escrever a densidade de corrente e de carga no plasma em função dos campos e da distribuição de equilíbrio através das expressões (II.3.a,b). Entretanto, ao invés de substituir a função de distribuição $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ nesta forma, os campos serão antes escritos em termos das integrais de Fourier (I.5.b) e, em seguida, será aplicada a transformação de Fourier temporal

(I.5.a) em $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Desta forma obtém-se

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) = \frac{-q_\alpha}{(2\pi)^4} \int \int \int d^3k d\omega' dt e^{i(\omega-\omega')t} \\ \times \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega') + \frac{\mathbf{v}'(t')}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega') \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}'(t')} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'(t') - \omega'(t'-t)]} .$$

Como o plasma é por hipótese estacionário, a dependência temporal das variáveis dinâmicas das partículas é dada por

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'(t' - t); \mathbf{r}'(0) = \mathbf{r} \\ \mathbf{p}'(t') = \mathbf{p}'(t' - t); \mathbf{p}'(0) = \mathbf{p} ,$$

conforme já foi discutido na seção I.1. Neste caso, define-se uma nova variável $\tau = t' - t$ e as integrais em t e ω' são diretamente calculáveis através da identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') .$$

Obtém-se então a seguinte expressão para a densidade de corrente a partir de (II.3.a)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int d^3p \mathbf{v} \\ \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathbf{v}'(\tau)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}'(\tau)} e^{i\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\tau) - \mathbf{r}] - \omega\tau\}} .$$

Aplicando a transformação de Fourier espaço-temporal em (II.8.b) escreve-se finalmente a densidade de corrente em termos do tensor $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, o qual *não* é a transformada de Fourier do tensor de condutividade $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) , \quad (\text{II.10})$$

sendo

$$\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \mathbf{v} \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \vec{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{v}'\mathbf{k}}{\omega} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}'} e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega\tau]} . \quad (\text{II.11})$$

Somente em um meio homogêneo $\vec{\sigma}^0(\mathbf{k}, \omega)$ corresponde realmente à transformada de Fourier da condutividade. O tensor $\vec{\epsilon}^0$ é diretamente definido a partir de (II.11) através da relação (I.9)

$$\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{1}} + i \frac{4\pi}{\omega} \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) . \quad (\text{II.12})$$

O tensor (II.12) foi, portanto, obtido a partir de uma aproximação de ondas planas feita nos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . É sobre este tensor que a transformação BGI deverá ser aplicada, conforme será visto na seção seguinte. O tensor $\vec{\epsilon}^0$ será também utilizado nos capítulos seguintes para se mostrar que não descreve corretamente a troca de energia entre o plasma e a onda.

II.4 A Transformação BGI e o Tensor Dielétrico Efetivo

A afirmação de que ondas planas não constituem uma solução fisicamente aceitável da equação da onda (I.3)

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)] + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \frac{4\pi\omega}{c^2} \int \int d^3k d^3r' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (\text{II.13})$$

se baseia no fato de que soluções do tipo (II.1), embora ainda reduzam (II.13) a uma equação algébrica formalmente igual a (I.8), tendo $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ no lugar de $\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$, são válidas apenas localmente, no sentido de que (II.1) não pode representar a forma da mesma onda por todo o sistema. Isto se deve ao fato de que a frente da onda plana se torna rapidamente distorcida devido às inhomogeneidades do plasma. Uma forma mais correta para aproximar a solução de (II.13) seria

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

o que já corresponde a uma aproximação eikonal semelhante a (I.11). Esta representação para o campo elétrico se distingue de (II.1) através da dependência espacial que a sua amplitude $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ passa a apresentar. Além disso, mesmo se (II.1) pudesse ser considerada como solução local da equação da onda, pode-se verificar facilmente que $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ continua não sendo a transformada de Fourier de $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$.

Como já foi mencionado, a amplitude da onda em um meio não uniforme varia devido a dois mecanismos, a troca de energia através da ressonância e a variação da velocidade de grupo da onda. Portanto, é necessário conseguir uma forma de separar estes dois efeitos em $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Nos últimos anos têm surgido diversos trabalhos, os quais argumentam que a equação da onda apenas não fornece o critério para que se possa realizar tal separação. Para conseguir tal intento é necessário recorrer a argumentos de conservação de energia [8, 14, 77]. Como já foi citado nas seções I.2.3 e I.2.4, os trabalhos básicos neste sentido foram desenvolvidos em um formalismo construído a partir de primeiros princípios por *McVey et alli* (1985) [77] e *Brambilla & Krücken* (1988) [14] e em um formalismo WKB por *Beskin et alli* [8, 50, 51]. O primeiro formalismo, embora mais geral, é de difícil aplicação para se resolver a equação da onda. O formalismo BGI, por outro lado, embora esteja limitado pela validade do método WKB, é mais prático, no sentido de que fornece os modos normais de oscilação do plasma da mesma maneira que em um tratamento localmente homogêneo.

No restante desta seção, a transformação BGI será obtida e discutida, mas não serão reproduzidos todos os detalhes dos cálculos envolvidos. Estes detalhes já estão explícitos em *Beskin et alli* (1987) [8] e em *Caldela* (1990) [18]. O enfoque aqui será um pouco distinto.

Inicialmente será procurada a forma da transformada de Fourier do tensor de condutivi-

dade $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ a partir do tensor $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. A relação entre estes tensores é dada pela densidade de corrente, a qual é definida em (I.1) e em (II.10)

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 r' \vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int d^3 k d^3 r' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} .$$

Esta identidade é satisfeita quando

$$\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} . \quad (\text{II.14})$$

Como se está interessado em plasmas fracamente inomogêneos, é interessante escrever $\vec{\sigma}$ de uma forma conveniente que se reduza assintoticamente ao caso homogêneo, onde $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Por isso, na condutividade do meio fracamente inomogêneo será também distinguida em $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a variável $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, chamada de *variável rápida*, significando que o tensor varia rapidamente em função desta variável e, adicionalmente, a condutividade será função também da *variável lenta*, a qual caracteriza a existência da inomogeneidade. A forma escolhida para a variável lenta é a forma simétrica $(\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$, a qual é freqüentemente utilizada [6, 7] e é aqui conveniente. Dessa forma, a relação (II.14) fica

$$\vec{\sigma}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}''}{2}, \omega\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}', \mathbf{k}', \omega) e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} . \quad (\text{II.15})$$

Definindo agora as variáveis $\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ e $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$ obtém-se

$$\vec{\sigma}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega) e^{i\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\eta}} . \quad (\text{II.16})$$

Fica claro agora que quando se fazia referência à “transformada de Fourier do tensor $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ ”, estava-se referindo à transformada na *variável rápida* $\boldsymbol{\eta}$. Neste caso, a transformada de (II.16) fica, finalmente,

$$\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int d^3 k' d^3 \eta \vec{\sigma}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}} . \quad (\text{II.17})$$

A transformação do lado direito de (II.17) é a chamada *transformação BGI*. Esta transformação, cuja dedução é extremamente simples, é a forma correta de se obter a transformada de Fourier do tensor de condutividade a partir do tensor $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ definido em (II.10) e (II.11).

Esta transformação é semelhante à transformação de Weyl utilizada em estatística quântica para se definir a função distribuição de Wigner [93]. Entretanto, o sentido físico de ambas as transformações não é o mesmo, pois em estatística quântica define-se a partir dela uma função distribuição, enquanto que nesta tese a transformação é utilizada para definir um tensor condutividade.

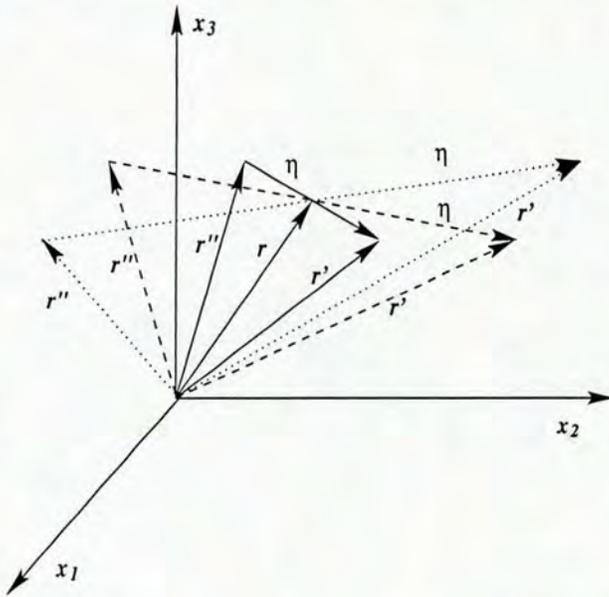


Figura II.1: Representação gráfica da transformação BGI. Os vetores r' e r'' (ou η) variam sempre de modo a manter o vetor r constante.

A figura II.1 é uma representação gráfica da integração em η contida na transformação BGI (II.17). Os vetores r' e r'' devem variar, ao longo da integração em η , sempre de modo a manter o vetor $r = (r' + r'')/2$ constante.

O tensor dielétrico (I.9) é escrito em termos do tensor $\vec{\epsilon}^0$, definido por (II.12),

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int d^3k' d^3\eta \vec{\epsilon}^0(\mathbf{r} + \eta/2, \mathbf{k}', \omega) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \eta} . \quad (\text{II.18})$$

A expressão (II.18) corresponde à fórmula (21) de *Beskin et alli* (1987) [8], e desempenha um papel fundamental nesta tese.

Alguns autores preferem escrever o tensor dielétrico no espaço de configuração na forma

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) = \vec{\epsilon}^s(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \mathbf{r}', \omega) .$$

Neste caso, a relação entre $\vec{\epsilon}^s$ e $\vec{\epsilon}(\eta, \mathbf{r})$ fica simplesmente

$$\vec{\epsilon}^s(\eta, \mathbf{r} + \eta/2, \omega) = \vec{\epsilon}(\eta, \mathbf{r}, \omega) .$$

Esta forma, entretanto, não é adequada para se aplicar a transformação de Fourier. Além disso, substituindo em (II.15) $\vec{\sigma}(\eta, \mathbf{r}, \omega)$ por $\vec{\sigma}^s(\eta, \mathbf{r}', \omega)$, obtém-se

$$\vec{\sigma}^s(\eta, \mathbf{r}', \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}', \mathbf{k}', \omega) e^{i\mathbf{k}' \cdot \eta} .$$

Aplicando agora a transformação de Fourier na variável rápida, resulta

$$\vec{\sigma}^s(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \omega) = \vec{\sigma}^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}', \omega) .$$

Pode-se observar, portanto, que esta última forma para o tensor dielétrico (ou condutividade) no espaço de configuração não é adequada pois mantém os erros contidos no tensor $\vec{\sigma}^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \omega)$.

A forma integral da transformação BGI pode ser reduzida à forma diferencial através de uma expansão em série de Taylor de $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega)$ no primeiro argumento, em torno do ponto \mathbf{r}

$$\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)^n \vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) .$$

Inserindo em (II.18), pode-se reescrever o integrando da seguinte maneira,

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \int d^3 k' \frac{\partial^n \vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}', \omega)}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2} \dots \partial x_{l_n}} \int d^3 \eta (\eta_{l_1} \eta_{l_2} \dots \eta_{l_n}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}} ,$$

onde $\eta_{l_i} \partial / \partial x_{l_i}$ possui a soma em $l_i = 1, 2, 3$ ($i = 1, \dots, n$) implícita. Como o termo $\eta_{l_1} \dots \eta_{l_n}$ pode ser escrito na forma $\eta_1^{p_1} \eta_2^{p_2} \eta_3^{p_3}$, sendo $p_1 + p_2 + p_3 = n$, a integração em $\boldsymbol{\eta}$ pode ser realizada, resultando

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{2} \right)^n \int d^3 k' \sum_{\substack{p_i \\ \{p_1+p_2+p_3=n\}}} \frac{\partial^n \vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}', \omega)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} \frac{\partial^n \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{\partial k_1^{p_1} \partial k_2^{p_2} \partial k_3^{p_3}} ,$$

e finalmente

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right)^n \vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) , \quad (\text{II.19})$$

a qual é a fórmula (20) de *Beskin et alli* (1987) corrigida.

Agora a equação da onda na forma (II.13) será resolvida dentro do limite de validade da aproximação WKB. Será feita uma expansão especial no lado direito de (II.13) de tal forma que seja possível construir uma equação de conservação de energia, a qual se reduz assintoticamente à respectiva equação para o caso homogêneo. Com base neste critério é que surgem, para cada ordem na expansão, os termos iniciais da transformação BGI na forma diferencial (II.19). Esta expansão será feita supondo-se que o campo elétrico possa ser escrito na forma eikonal (I.11.a). Portanto este é um tratamento de onda de modo único, pois efeitos de reflexão e conversão de modos não são incluídos.

Considerando então a equação da onda (II.13), escreve-se a densidade de corrente (II.10) com o campo elétrico dado pelo Ansatz eikonal, equação (I.11), específico para um meio não uniforme mas estacionário

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \int d^3 k d^3 r' \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^0(\mathbf{r}', \omega) e^{i[\psi(\mathbf{r}') + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})]} . \quad (\text{II.20})$$

Como o meio é por hipótese fracamente inhomogêneo, supõe-se que as seguintes quantidades adimensionais sejam muito pequenas

$$\mu = \frac{1}{kL} \ll 1; \quad L^{-1} \approx \frac{1}{|\vec{\sigma}^0|} \left| \frac{\partial \vec{\sigma}^0}{\partial \mathbf{r}} \right| \quad (\text{II.21.a})$$

$$p = \frac{|\mathbf{k}_i|}{|\mathbf{k}_r|} \approx \frac{|\vec{\epsilon}^{\text{aH}}|}{|\vec{\epsilon}^{\text{H}}|} \ll 1; \quad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}^{\text{H}} + i \vec{\epsilon}^{\text{aH}} , \quad (\text{II.21.b})$$

ou seja, as condições de validade do método WKB, expressões (I.12), são satisfeitas. Formalmente supõe-se que $\mu \approx p$. A hipótese básica é que na integração sobre a variável \mathbf{k} em (II.20) a contribuição principal vem de valores de \mathbf{k} próximos a

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{r}) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}) . \quad (\text{II.22})$$

É conveniente então expandir $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ em série de Taylor ao redor de \mathbf{k}_0

$$\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_0} \right]^n \vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} .$$

Introduzindo esta expansão em (II.20), as integrações em \mathbf{k} e \mathbf{r}' podem ser realizadas, resultando [18]

$$J_i(\mathbf{r}, \omega) = e^{i\psi(\mathbf{r})} \left[\sigma_{ij}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}_0) E_j^0(\mathbf{r}) - i \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial k_{0l}} \frac{\partial E_j^0}{\partial x_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^0}{\partial k_{0l} \partial k_{0m}} \left(\frac{\partial^2 E_j^0}{\partial x_l \partial x_m} + i E_j^0 \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l} \right) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \sigma_{ij}^0}{\partial k_{0l} \partial k_{0m} \partial k_{0n}} \left(i \frac{\partial^3 E_j^0}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial E_j^0}{\partial x_m} \frac{\partial k_{0l}}{\partial x_n} + \frac{\partial E_j^0}{\partial x_l} \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_n} + \frac{\partial E_j^0}{\partial x_n} \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l} + E_j^0 \frac{\partial^2 k_{0m}}{\partial x_n \partial x_l} \right) \right], \quad (\text{II.23})$$

onde $i = 1, 2, 3$ e se utiliza a convenção de soma implícita sobre índices duplicados. O lado esquerdo de (II.13), por outro lado, fica igual a

$$e^{i\psi(\mathbf{r})} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} E_i^0 + k_{0i} k_{0j} E_j^0 - k_0^2 E_i^0 \right) + i \left(2k_{0j} \frac{\partial E_i^0}{\partial x_j} + E_i^0 \frac{\partial k_{0j}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j^0}{\partial x_j} k_{0i} - \frac{\partial E_j^0}{\partial x_i} k_{0j} - E_j^0 \frac{\partial k_{0j}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial^2 E_i^0}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 E_j^0}{\partial x_j \partial x_i} \right) \right]. \quad (\text{II.24})$$

Separando $\vec{\sigma}^0$ nas suas partes Hermiteana e anti-Hermiteana

$$\vec{\sigma}^0 = \vec{\sigma}^{0H} + i \vec{\sigma}^{0aH} \sim \mathcal{O}(p) + i \mathcal{O}(1) ,$$

o ordenamento estabelecido por *Beskin et alli* (1987) para obter aproximações sucessivas à equação (II.13) determina que o primeiro termo da aproximação é composto somente por termos de ordem $\mu^0 = p^0 = 1$, resultando, após substituir $\vec{\sigma}^0$ por $\vec{\varepsilon}^0$ através de (II.12)

$$\left(k_{0i} k_{0j} - k_0^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}^0 \right) E_j^0 = 0 ,$$

a qual é idêntica ao sistema de equações (I.8), válido em plasmas homogêneos. Este sistema define o valor de $\mathbf{k}_0(\mathbf{r})$ a partir de $\vec{\varepsilon}^0$.

O termo seguinte na aproximação origina-se da soma dos três primeiros termos em (II.23) e de termos de ordem $\mathcal{O}(p)$ em (II.24). Fazendo isso, multiplicando escalarmente a expressão resultante por E^{0*} , e somando com o complexo conjugado, resulta a equação de conservação

de energia, após algumas manipulações [8, 18, 99]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (S_P + S_{cin}) &= -\frac{\omega}{8\pi} E^{0*} \cdot \left(\vec{\epsilon}^{0aH} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}^{0H}}{\partial \mathbf{r} \cdot \partial \mathbf{k}} \right) \cdot E^0 \quad (II.25) \\ S_P &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \left[|E|^2 \mathbf{k}_0 - \frac{(\mathbf{k}_0 \cdot E^{0*}) E^0 + (\mathbf{k}_0 \cdot E^0) E^{0*}}{2} \right] \\ S_{cin} &= -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_0} (E^{0*} \cdot \vec{\epsilon}^{0H} \cdot E^0) . \end{aligned}$$

No lado esquerdo de (II.25) encontra-se a divergência de um fluxo de energia, onde se pode identificar S_P como o fluxo de Poynting usual, denotando o fluxo de energia eletromagnética, enquanto que S_{cin} denota a primeira contribuição ao fluxo cinético de energia devido ao movimento coerente das partículas com as ondas. No lado direito de (II.25) encontra-se o termo que denota a dissipação irreversível de energia. Este termo é função da parte anti-Hermiteana não do tensor $\vec{\epsilon}^0$, mas do tensor dielétrico efetivo. Devido à ordem da expansão, estão contemplados em (II.25), em ambos os lados, os primeiros termos da expansão (II.19). Termos de ordens superiores nas expansões de (II.23) e (II.24) conterão outros fatores da expansão do tensor dielétrico efetivo [8].

Tanto o termo do lado direito de (II.25) quanto S_{cin} são oriundos da expansão de $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ multiplicada escalarmente por $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. Fisicamente isto significa que foi possível separar em $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ a contribuição do fluxo reversível de energia cinética da dissipação irreversível de energia das ondas pelo plasma na equação de conservação de energia. O termo que falta na equação (II.25), $\partial W / \partial t$, sendo $W = (E^2 + B^2) / 8\pi$ [99], é identicamente nulo, já que o meio é estacionário. A necessidade desta separação tem sido bastante enfatizada na literatura dos últimos anos² e é o critério utilizado para se definir o tensor dielétrico efetivo (II.18, II.19).

Realizando uma expansão até a primeira ordem em p na equação (II.25), pode-se mostrar que esta é equivalente à relação

$$\left(k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \right) E_i^{0*} E_j^0 = 0 ,$$

onde agora $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + i\mathbf{k}_i$, de onde segue a relação de dispersão (I.10) [8]. Portanto, o tensor dielétrico efetivo é o tensor que deve ser utilizado na relação de dispersão para se obter os modos normais de oscilação e o coeficiente de absorção de ondas em um plasma inhomogêneo na aproximação de pequena inhomogeneidade e absorção fraca.

Uma última forma para $\vec{\epsilon}$ ou $\vec{\sigma}$ pode ser obtida introduzindo-se (II.11) em (II.17):

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int \int d^3 k' d^3 \eta \int d^3 p \int_{-\infty}^0 d\tau v_i$$

²Ver seções I.2.3 e I.2.4.

$$\begin{aligned} & \times \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{p}, \tau)}{\omega} \right) \delta_{jl} + \frac{v'_j(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{p}, \tau) k'_l}{\omega} \right] \\ & \times \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p'_l}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\lambda} + \omega \tau)} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}} , \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{p}, \tau)$. Como as integrações comutam, pode-se integrar primeiramente em \mathbf{k}' e após em $\boldsymbol{\eta}$. Na segunda integração faz-se uso da seguinte propriedade da função delta de Dirac:

$$\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^*)}{\left| \det \left(\delta_{mn} - \frac{\partial \lambda_n}{\partial \eta_m} \right) \right|} ,$$

onde $\boldsymbol{\eta}^*$ é a solução da equação

$$\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}^*/2, \mathbf{p}, \tau) .$$

Obtém-se então a seguinte forma para $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ em função de $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3 p \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{v_i e^{-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}^* + \omega \tau)}}{\left| \det \left(\delta_{mn} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_m} \right) \right|} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta_{jl} + \frac{k_l v'_j}{\omega} \right. \\ \left. + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial}{\partial y_l} v'_j - \frac{i \delta_{jl}}{2\omega} \frac{\partial}{\partial y_q} v'_q \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p'_l}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{r}+\boldsymbol{\eta}^*/2} \quad (\text{II.26}) \end{aligned}$$

A expressão (II.26) corresponde à fórmula (22) de *Beskin et alli* (1987) [8].

Trabalhos recentes desenvolvidos empregando o conceito de tensor dielétrico efetivo no estudo da absorção de ondas em plasmas com inomogeneidades de densidade e temperatura, e com campo magnético uniforme, corrigiram o tensor $\vec{\epsilon}^0$ utilizando apenas os dois primeiros termos da expansão (II.19). Estes termos foram suficientes para garantir que o tensor dielétrico apresentasse propriedades físicas corretas, tais como simetria de Onsager e apenas contribuições ressonantes na sua parte anti-Hermiteana [18–21, 23]. A razão física para isto está no fato de que para inomogeneidades em temperatura e densidade o procedimento consistiu em expandir a função distribuição $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \bar{X}_{1\alpha})$ na constante de movimento

$$\bar{X}_{1\alpha} = \frac{P_{2\alpha}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} = x_1 + \frac{p_2}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}}$$

em torno do ponto x_1 até a primeira ordem, resultando

$$f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \bar{X}_{1\alpha}) \simeq f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x_1) + \frac{p_2}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x_1}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x_1) .$$

Devido à característica perturbativa do efeito da inomogeneidade na absorção das ondas, foi então suficiente corrigir o tensor $\vec{\epsilon}^0$ até a primeira ordem, isto é, somando somente os dois primeiros termos de (II.19).

A presente tese, entretanto, depara-se com a situação complementar, ou seja, a inhomogeneidade está presente somente no campo magnético, permanecendo a densidade e a temperatura constantes. A situação aqui é bastante distinta, pois uma inhomogeneidade no campo magnético altera a forma da condição de ressonância onda-partícula, e este não é meramente um efeito perturbativo na absorção das ondas. Por este motivo será necessário empregar a expansão completa de $\vec{\epsilon}^0$, mais especificamente, será empregada a transformação integral (II.18). Isto será necessário para que se obtenha um tensor dielétrico efetivo que contemple as propriedades físicas desejadas. Correções parciais até determinada ordem sempre manteriam termos espúrios que somente seriam eliminados adicionando-se o próximo termo na expansão, e assim por diante.

Nos próximos capítulos o modelo adotado nesta tese será introduzido e os desenvolvimentos feitos neste capítulo serão utilizados e discutidos.

CAPÍTULO III

O TENSOR DIELÉTRICO EFETIVO PARA PLASMAS COM GRADIENTES PERPENDICULARES DO CAMPO MAGNÉTICO

Será agora considerado um plasma homogêneo imerso em um campo magnético retilíneo e inhomogêneo na direção perpendicular ao campo. Aplicando o formalismo básico desenvolvido nas seções II.2, II.3 e II.4, serão derivados os tensores $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ e também o tensor dielétrico efetivo $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, os quais dependerão da função distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}$ escrita em termos das constantes de movimento.

Será mostrado que, enquanto o tensor $\vec{\epsilon}^0$ não obedece às relações recíprocas de Onsager, o tensor dielétrico efetivo, obtido a partir de $\vec{\epsilon}^0$ através da transformação BGI, apresenta a simetria correta. Portanto, é o tensor efetivo, e não o tensor $\vec{\epsilon}^0$, que deve ser utilizado como o coeficiente de transporte que relaciona o campo eletromagnético com a densidade de corrente.

A estrutura do capítulo será a seguinte. Na seção III.1 as trajetórias das partículas carregadas imersas em um campo magnético com gradiente perpendicular serão derivadas a partir de um método perturbativo que evita secularidades nas soluções. As trajetórias perturbadas obtidas, juntamente com duas outras formas aproximadas, serão comparadas com a solução numérica do sistema de equações de movimento para verificar a acuidade das aproximações feitas. Na seção III.2 as trajetórias aproximadas das partículas serão utilizadas na derivação do tensor $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Neste tensor será então aplicada a transformação BGI, na seção III.3, de modo que o tensor dielétrico efetivo para um plasma homogêneo imerso em um campo magnético com gradientes perpendiculares seja obtido. E finalmente, na seção III.4, as expressões obtidas para os tensores $\vec{\epsilon}^0$ e $\vec{\epsilon}$ serão comparadas do ponto de vista das relações recíprocas de Onsager. Será mostrado que enquanto o tensor $\vec{\epsilon}^0$ não satisfaz a mencionada simetria, o tensor dielétrico efetivo a satisfaz, o que o torna apto, por conseguinte, a representar o coeficiente de transporte correto para um plasma com campo magnético inhomogêneo.

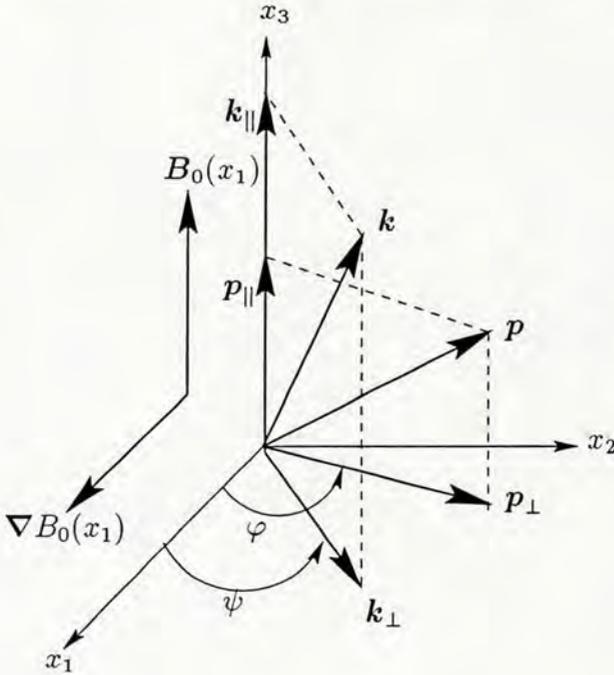


Figura III.1: Sistema de coordenadas utilizado

III.1 Trajetórias das Partículas do Plasma em um Campo Magnético Inomogêneo

Nesta seção, as trajetórias das partículas carregadas em um campo magnético ambiente inomogêneo serão derivadas. Estas trajetórias são fundamentais para que se possa obter a função distribuição perturbada $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ a partir da integral de caminho (II.9), como já foi discutido na seção II.2.

O modelo físico considerado aqui consiste em um plasma, com valores de densidade e temperatura uniformes, imerso em um campo magnético inomogêneo. O campo magnético é retilíneo, mas o seu valor absoluto possui um gradiente na direção perpendicular. Neste ambiente físico consideram-se então ondas eletromagnéticas que se propagam em direções arbitrárias em relação a B_0 . O sistema em questão está representado na figura III.1, onde o campo magnético $B_0(\mathbf{r})$ foi orientado na direção x_3 e o gradiente de $B_0(\mathbf{r})$ foi orientado na direção x_1 , sem perda de generalidade. A onda eletromagnética que se propaga neste meio está representada pelo seu vetor de onda \mathbf{k} , o qual possui componentes paralelo ($k_{||}$) e perpendicular (k_{\perp}) em relação a B_0 , e o componente k_{\perp} está orientado no plano $x_1 - x_2$ com um ângulo azimutal ψ em relação a x_1 . Uma dada partícula do plasma, por outro lado, possui um *momentum* \mathbf{p} , o qual também têm seus componentes paralelo ($p_{||}$) e perpendicular (p_{\perp}), estando o último orientado com um ângulo azimutal φ em relação a x_1 .

De acordo com o formalismo desenvolvido na seção II.2, é necessário agora resolver o sistema de equações (II.7) e encontrar as suas constantes de movimento, para se obter tanto a

função distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ quanto a função distribuição perturbada $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Para se resolver o sistema (II.7), entretanto, é necessário conhecer a dependência explícita de B_0 em x_1 . Nesta tese será suposto que o gradiente de $B_0(x_1)$ é pequeno, de tal forma que se possa fazer uma expansão em série de potências até primeira ordem no parâmetro pequeno k_B

$$B_0(x_1) = B_0(0)(1 + k_B x_1) \hat{e}_3 \tag{III.1}$$

$$k_B = \frac{1}{B_0(x_1)} \left. \frac{dB_0(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0} .$$

Portanto, uma partícula arbitrária da espécie α que se encontra no ponto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) do seu espaço de fase no instante t evolui, neste espaço de fase, para o ponto $(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ no instante t' , de acordo com a solução do sistema não linear e acoplado de equações de movimento

$$\frac{d\mathbf{r}'_{\alpha}}{dt'} = \frac{1}{\gamma(p'_{\alpha})} \frac{\mathbf{p}'_{\alpha}}{m_{\alpha}} \tag{III.2.a}$$

$$\frac{dp'_{\alpha 1}}{dt'} = \frac{\Omega_{\alpha}(x'_{\alpha 1})}{\gamma(p'_{\alpha})} p'_{\alpha 2} \tag{III.2.b}$$

$$\frac{dp'_{\alpha 2}}{dt'} = -\frac{\Omega_{\alpha}(x'_{\alpha 1})}{\gamma(p'_{\alpha})} p'_{\alpha 1} \tag{III.2.c}$$

$$\frac{dp'_{\alpha 3}}{dt'} = 0 , \tag{III.2.d}$$

onde $\gamma(p'_{\alpha}) = \sqrt{1 + p'^2_{\alpha} / m_{\alpha}^2 c^2}$, $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}'_{\alpha}(t')$, $\mathbf{p}'_{\alpha} = \mathbf{p}'_{\alpha}(t')$ e as condições iniciais são $\mathbf{r}'_{\alpha}(t' = t) = \mathbf{r}$ e $\mathbf{p}'_{\alpha}(t' = t) = \mathbf{p}$. O sistema de equações (III.2) está escrito em termos dos componentes de \mathbf{r}'_{α} e \mathbf{p}'_{α} definidos na figura III.1 e $\Omega_{\alpha}(x'_{\alpha 1})$ é o valor da frequência de ciclotron da partícula α no ponto $\mathbf{r}'_{\alpha}(t')$

$$\Omega_{\alpha}(x'_{\alpha 1}) = \frac{q_{\alpha} B_0(x'_{\alpha 1})}{m_{\alpha} c} \approx \frac{q_{\alpha} B_0(x_1)}{m_{\alpha} c} [1 + k_B(x'_{\alpha 1} - x_1)] = \Omega_{\alpha}(x_1) [1 + k_B(x'_{\alpha 1} - x_1)] , \tag{III.3}$$

onde $B_0(x_1)$ está definido em (III.1).

Para esta geometria, as constantes de movimento relevantes são facilmente obtidas a partir de (III.2) e são as seguintes

$$p'_{\alpha 3} = p_{\parallel}$$

$$(p'_{\alpha 1})^2 + (p'_{\alpha 2})^2 = p_1^2 + p_2^2 = p_{\perp}^2$$

$$P_{2\alpha} = p_2 + \frac{q_{\alpha}}{c} \int^{x_1} dx'_1 B_0(x'_1) \approx p_2 + \frac{q_{\alpha}}{c} B_0(0) x_1 + k_B \frac{q_{\alpha}}{c} B_0(0) \frac{x_1^2}{2} ,$$

e neste caso a função $f_{\alpha 0}$ deve ser escrita em termos das constantes de movimento

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, P_{2\alpha}) .$$

O sistema (III.2) é não linear devido ao acoplamento entre a posição $x'_{\alpha 1}$ e o *momentum* da partícula p'_α . O sistema de duas equações de primeira ordem acopladas (III.2.b) e (III.2.c) pode ser reduzido a uma única equação diferencial não linear de segunda ordem para um dos componentes de p'_α através de algumas manipulações:

$$\frac{d^2 p'_1}{dt'^2} - \frac{1}{\gamma m_\alpha} \frac{1}{\Omega_\alpha(x'_1)} \frac{d\Omega_\alpha}{dx'_1}(x'_1) p'_1 \frac{dp'_1}{dt'} + \frac{\Omega_\alpha^2(x'_1)}{\gamma^2} p'_1 = 0.$$

O sub-índice “ α ” será omitido no que se segue. Utilizando-se a expansão (III.3) para $\Omega_\alpha(x'_1)$, aproximam-se as seguintes expressões até a primeira ordem em k_B

$$\frac{1}{\Omega_\alpha(x'_1)} \frac{d\Omega_\alpha}{dx'_1}(x'_1) \approx k_B ; \quad \Omega_\alpha^2(x'_1) \approx \Omega_\alpha^2(x_1) [1 + 2k_B(x'_1 - x_1)] ,$$

e neste caso a equação fica

$$\frac{d^2 p'_1}{dt'^2} - \frac{k_B}{\gamma m_\alpha} p'_1 \frac{dp'_1}{dt'} + \frac{\Omega_\alpha^2(x_1)}{\gamma^2} [1 + 2k_B(x'_1 - x_1)] p'_1 = 0 \quad (\text{III.4})$$

a qual continua sendo não linear. Entretanto, como o campo é fracamente inomogêneo, supõe-se que uma expansão perturbativa possa representar uma solução aproximada à equação (III.4). Contudo, esta expansão deve ser feita de forma a evitar secularidades não físicas na solução perturbada, as quais são devidas ao fato de que a frequência da oscilação governada pela equação não linear (III.4) não é Ω_α , como seria no caso homogêneo, mas contém uma correção devida à inomogeneidade. Portanto, é necessário realizar uma expansão perturbativa também em $\Omega_\alpha(x_1)$. Realizando então a expansão perturbativa nas variáveis dependentes r' e p' , e também em $\Omega_\alpha(x_1)$, utilizando k_B como parâmetro da expansão, obtém-se [71]

$$r'(t') \cong r'_0(t') + k_B r'_1(t') + k_B^2 r'_2(t') + \dots \quad (\text{III.5.a})$$

$$p'(t') \cong p'_0(t') + k_B p'_1(t') + k_B^2 p'_2(t') + \dots \quad (\text{III.5.b})$$

$$\Omega_\alpha(x_1) \cong \Omega_{\alpha 0}(x_1) + k_B \Omega_{\alpha 1}(x_1) + k_B^2 \Omega_{\alpha 2}(x_1) + \dots \quad (\text{III.5.c})$$

Introduzindo as expansões (III.5) em (III.4) e desprezando termos da ordem ou menores que k_B^2 , obtém-se, dentre outras, as seguintes equações diferenciais lineares

$$\frac{d^2 p'_{10}}{dt'^2} + \frac{\Omega_{\alpha 0}^2}{\gamma^2} = 0 \quad (\text{III.6.a})$$

$$\frac{d^2 p'_{11}}{dt'^2} + \frac{\Omega_{\alpha 1}^2}{\gamma^2} = \left[\frac{1}{\gamma m_\alpha} \frac{dp'_{10}}{dt'} - 2 \frac{\Omega_{\alpha 0} \Omega_{\alpha 1}}{\gamma^2} - 2 \frac{\Omega_{\alpha 0}^2}{\gamma^2} (x'_{10} - x_1) \right] p'_{10}(t') , \quad (\text{III.6.b})$$

onde (III.6.a) é a equação diferencial correspondente ao caso não perturbado, com a diferença que a frequência de oscilação agora é $\Omega_{\alpha 0}(x_1)$, definida por (III.5.c), e não Ω_α , como seria no caso de um plasma homogêneo. O valor de $\Omega_{\alpha 1}$ será determinado de forma a evitar a secularidade que surge na solução de (III.6.b), a qual descreve o movimento perturbado. Como

o sistema original de equações (III.2.b,c) foi primeiramente transformado em uma equação de segunda ordem (III.4) e depois expandido perturbativamente, é necessário determinar as condições iniciais para $\mathbf{r}'_0(t')$, $\mathbf{r}'_1(t')$, $\mathbf{p}'_0(t')$, $\mathbf{p}'_1(t')$, $d\mathbf{p}'_0/dt'$ e $d\mathbf{p}'_1/dt'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t' = t) &= \mathbf{r}'_0(t' = t) + k_B \mathbf{r}'_1(t' = t) = \mathbf{r} \\ \mathbf{p}'(t' = t) &= \mathbf{p}'_0(t' = t) + k_B \mathbf{p}'_1(t' = t) = \mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}'_{10}}{dt'}(t' = t) + k_B \frac{d\mathbf{p}'_{11}}{dt'}(t' = t) &= \frac{\Omega_\alpha(x_1)}{\gamma} p_2 = \frac{\Omega_{\alpha 0}(x_1)}{\gamma} p_2 + k_B \frac{\Omega_{\alpha 1}}{\gamma} p_2, \end{aligned}$$

resultando

$$\mathbf{r}'_0(t' = t) = \mathbf{r}; \mathbf{r}'_1(t' = t) = 0 \quad (\text{III.7.a})$$

$$\mathbf{p}'_0(t' = t) = \mathbf{p}; \mathbf{p}'_1(t' = t) = 0 \quad (\text{III.7.b})$$

$$\frac{dp'_{10}}{dt'}(t' = t) = \frac{\Omega_{\alpha 0}(x_1)}{\gamma} p_2 = \frac{\Omega_{\alpha 0}(x_1)}{\gamma} p_\perp \sin \varphi; \frac{dp'_{11}}{dt'}(t' = t) = \frac{\Omega_{\alpha 1}}{\gamma} p_\perp \sin \varphi. \quad (\text{III.7.c})$$

A solução geral de (III.6.b) é

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= A \sin \omega_\alpha \tau + B \cos \omega_\alpha \tau - \frac{p_\perp^2}{2m_\alpha \Omega_{\alpha 0}} \sin 2(\varphi - \omega_\alpha \tau) + \\ &\quad \frac{p_\perp}{\gamma} \left(\Omega_{\alpha 1} + \frac{p_\perp \sin \varphi}{m_\alpha} \right) \left[\tau \sin(\varphi - \omega_\alpha \tau) - \frac{\gamma}{2\Omega_{\alpha 0}} \cos(\varphi - \omega_\alpha \tau) \right], \end{aligned}$$

onde A e B são constantes a ser determinadas a partir das condições iniciais do movimento, $\omega_\alpha(x_1) = \Omega_{\alpha 0}(x_1)/\gamma$ e $\tau = t' - t$. O último termo de $p'_{11}(\tau)$ é um termo secular, e portanto deve ser anulado, determinando assim o valor de $\Omega_{\alpha 1}$:

$$\Omega_{\alpha 1} = -\frac{p_\perp \sin \varphi}{m_\alpha}.$$

Desta forma, o valor de $\Omega_{\alpha 0}$ é determinado por (III.5.c):

$$\Omega_{\alpha 0}(x_1) = \Omega_\alpha(x_1) + k_B \frac{p_2}{m_\alpha} = \Omega_\alpha(x_1) + k_B \frac{p_\perp \sin \varphi}{m_\alpha}, \quad (\text{III.8})$$

isto é, a frequência de oscilação de uma partícula em um campo inhomogêneo é igual à frequência do caso homogêneo mais uma correção proporcional à condição inicial do *momentum* da partícula na direção x_2 . Esta correção dará origem a um termo adicional na condição de ressonância onda-partícula e desempenhará, portanto, um papel importante na absorção de ondas eletromagnéticas, como será visto posteriormente.

Resolvendo então o sistema (III.6) com as condições iniciais (III.7) obtém-se as seguintes trajetórias, válidas até a primeira ordem na expansão perturbativa em termos de k_B [58]

$$p'_1(\tau) = p_\perp \cos(\varphi - \omega_\alpha \tau) + \frac{k_B p_\perp^2}{2m_\alpha \Omega_\alpha} [2 \cos \varphi \sin(\varphi - \omega_\alpha \tau) - \sin(2\varphi - 2\omega_\alpha \tau)] \quad (\text{III.9.a})$$

$$p'_2(\tau) = p_{\perp} \sin(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) + \frac{k_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} [1 - 2 \cos \varphi \cos(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) + \cos(2\varphi - 2\omega_{\alpha}\tau)] \quad (\text{III.9.b})$$

$$p'_3 = p_{\parallel} \quad (\text{III.9.c})$$

$$x'_1(\tau) = x_1 + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha 0}} [\sin \varphi - \sin(\varphi - \omega_{\alpha}\tau)] + \frac{k_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2\Omega_{\alpha}^2} \left[2 \cos \varphi \cos(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi - 2\omega_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2} \cos 2\varphi - 1 \right] \quad (\text{III.9.d})$$

$$x'_2(\tau) = x_2 + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha 0}} [\cos(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) - \cos \varphi] + \frac{k_B p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2\Omega_{\alpha}} \tau + \frac{k_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2\Omega_{\alpha}^2} \left[2 \cos \varphi \sin(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \omega_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \quad (\text{III.9.e})$$

$$x'_3(\tau) = x_3 + \frac{p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} \tau, \quad (\text{III.9.f})$$

Os termos $x'_1(\tau)$, $x'_2(\tau)$, $p'_1(\tau)$ e $p'_2(\tau)$ são compostos por um termo de ordem zero em k_B mais um termo perturbado, o qual é sempre limitado, com exceção de $x'_2(\tau)$, que ainda possui um termo secular

$$\frac{k_B p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2\Omega_{\alpha 0}} \tau.$$

Ao contrário dos termos seculares que foram eliminados com a definição de $\Omega_{\alpha 1}$, este termo possui sentido físico, pois corresponde à deriva macroscópica $B_0(\mathbf{r}) \times \nabla B_0(\mathbf{r})$ das partículas através do campo B_0 , e deve ser mantido. Este termo também será incluído na condição de ressonância, afetando a absorção de ondas pelo plasma. Concomitantemente, os termos de ordem zero são escritos em termos da frequência $\omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha 0}/\gamma$, a qual contém uma correção à frequência de oscilação do caso homogêneo. Esta correção tem um efeito não linear no comportamento dos termos de ordem zero, uma vez que aparece em argumentos de funções seno e cosseno; conseqüentemente, estes termos não podem ser expandidos perturbativamente, sob pena de gerar a divergência secular que se buscou evitar,

$$\sin(\varphi - \Omega_{\alpha 0}\tau/\gamma) \approx \sin(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau/\gamma) - \frac{k_B p_{\perp}^2}{\gamma m_{\alpha}} \tau \cos(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau/\gamma) + \mathcal{O}(k_B^2 \tau^2).$$

Portanto, esta correção não linear nas trajetórias das partículas também deverá ser mantida. Isto equivale a dizer que, embora a inomogeneidade seja fraca, e o campo magnético possa ser expandido somente até a primeira ordem, as trajetórias das partículas devem conter contribuições em todas as ordens em k_B mesmo em um tratamento perturbativo.

As trajetórias (III.9) são soluções auto-consistentes, isto é, elas obedecem simultaneamente a todas as condições impostas ao sistema de equações de movimento (III.2):

- as posições são obtidas a partir dos *momenta* e *vice-versa*, de acordo com (III.2);
- as trajetórias obedecem às condições iniciais (III.7);

- as trajetórias obedecem, até a ordem $\mathcal{O}(k_B)$, às constantes de movimento

$$\begin{aligned}
 p'_3(\tau) &= p_{\parallel} \\
 p_1'^2(\tau) + p_2'^2(\tau) &= p_{\perp}^2 \\
 p'_2(\tau) + \frac{q_{\alpha}}{c} B_0(0) \left[x'_1(\tau) + \frac{k_B}{2} x_1'^2(\tau) \right] &= P_{2\alpha} \ ,
 \end{aligned}$$

como pode ser facilmente verificado; portanto, consistem em uma boa aproximação para a solução do sistema (III.2).

Entretanto, estas trajetórias são excessivamente complexas para serem utilizadas na integral de caminho (II.9) que conduz a $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Por isso é necessário aproximar ainda mais a solução das equações de movimento, de forma que a nova solução seja ainda representativa da trajetória real, mas factível para fins de integração em (II.9). Isto pode ser feito notando-se que os termos de ordem zero e um em (III.9) são da ordem de grandeza do raio de Larmor, isto é,

$$\left| \frac{p'_{10}(\tau)}{p'_{11}(\tau)} \right| \sim \left| \frac{p'_{20}(\tau)}{p'_{21}(\tau)} \right| \sim \left| \frac{x'_{10}(\tau)}{x'_{11}(\tau)} \right| \sim \left| \frac{x'_{20}(\tau)}{x'_{21}(\tau) - v_d \tau} \right| \sim \mathcal{O}(r_{L\alpha}) \ ,$$

onde v_d é a velocidade de deriva líquida da partícula ao longo de x_2 ,

$$v_d = \frac{k_B p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \ ,$$

e $r_{L\alpha} = p_{\perp} / \gamma m_{\alpha} \Omega_{\alpha}(0)$ é o raio de Larmor da partícula α . Neste caso, a aproximação a ser adotada consiste em desprezar os termos perturbados em (III.9) quando $k_B r_{L\alpha} \ll 1$, isto é, quando o raio de Larmor das partículas for muito menor que a distância de variação de B_0 . As trajetórias ficam então

$$p'_1(\tau) = p_{\perp} \cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) \tag{III.10.a}$$

$$p'_2(\tau) = p_{\perp} \sin(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) \tag{III.10.b}$$

$$p'_3(\tau) = p_{\parallel} \tag{III.10.c}$$

$$x'_1(\tau) = x_1 + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}(0)} [\sin \varphi - \sin(\varphi - \omega_{\alpha} \tau)] \tag{III.10.d}$$

$$x'_2(\tau) = x_2 + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}(0)} [\cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \cos \varphi] + \frac{k_B p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}(0)} \tau \tag{III.10.e}$$

$$x'_3(\tau) = x_3 + \frac{p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} \tau \ . \tag{III.10.f}$$

Deve-se notar que as trajetórias (III.10) ainda contêm a correção na frequência de ciclotron, expressão (III.8), a qual deve ser necessariamente mantida.

Pode-se corroborar o uso das trajetórias (III.10) também através da computação do erro relativo das trajetórias aproximadas pelo método perturbativo em relação à solução numérica

de (III.2). As variáveis deste sistema de equações serão adimensionalizadas através das definições:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{r_{L\alpha}} ; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}'}{p_{\perp}} ; t = \Omega_{\alpha}(0)\tau ,$$

sendo $r_{L\alpha} = p_{\perp}/\gamma m_{\alpha}\Omega_{\alpha}(0)$ o raio de Larmor da partícula α . Escrito em termos destas variáveis, o sistema (III.2) fica

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \tag{III.11.a}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{1}{\gamma}[1 + k_{BR}x_1(t)]p_2 \tag{III.11.b}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{1}{\gamma}[1 + k_{BR}x_1(t)]p_1 \tag{III.11.c}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = 0 , \tag{III.12}$$

submetido às condições iniciais

$$\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}/r_{L\alpha} ; \mathbf{p}(t = 0) = \hat{e}_1 \cos \psi + \hat{e}_2 \sin \varphi .$$

O sistema de equações (III.11) foi resolvido numericamente utilizando-se o método de Runge-Kutta de 5ª ordem com passo variável [92], e o erro relativo das aproximações perturbativas é calculado com a equação

$$Err = \frac{|\mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{a_i}(t)|}{|\mathbf{r}_n^{(c)}(t)|} ,$$

onde $\mathbf{r}_n(t)$ representa a solução numérica de (III.11), $\mathbf{r}_n^{(c)}$ é o vetor posição da partícula no referencial do centro-guia,

$$\begin{aligned} x_1^{(c)}(t) &= x_1(t) - x_1 - \sin \varphi \\ x_2^{(c)}(t) &= x_2(t) - x_2 + \cos \varphi - \frac{v_d}{\Omega_{\alpha} r_L} t , \end{aligned}$$

e \mathbf{r}_{a_i} ($i=1,2,3$) denota as três aproximações perturbativas utilizadas:

a_1 : trajetórias (III.9), em termos das variáveis adimensionais;

a_2 : trajetórias (III.10);

a_3 : trajetórias (III.10), porém sem a correção na frequência de ciclotron, isto é, $\omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha}/\gamma$.

A figura III.2 mostra o erro relativo obtido para quatro conjuntos distintos de dados. Em todos os casos o valor de p_{\parallel} foi colocado $p_{\parallel} = 0$ e de v_{\perp}/c foi determinado em $v_{\perp}/c = 0,1$ para fins de cálculo de $\gamma = (1 + p_{\perp}^2/m_{\alpha}^2 c^2)^{1/2} \approx (1 + v_{\perp}^2/c^2)^{1/2}$, e a tolerância permitida às rotinas numéricas para o ajuste automático do passo da iteração foi de 10^{-5} . Esta aproximação não

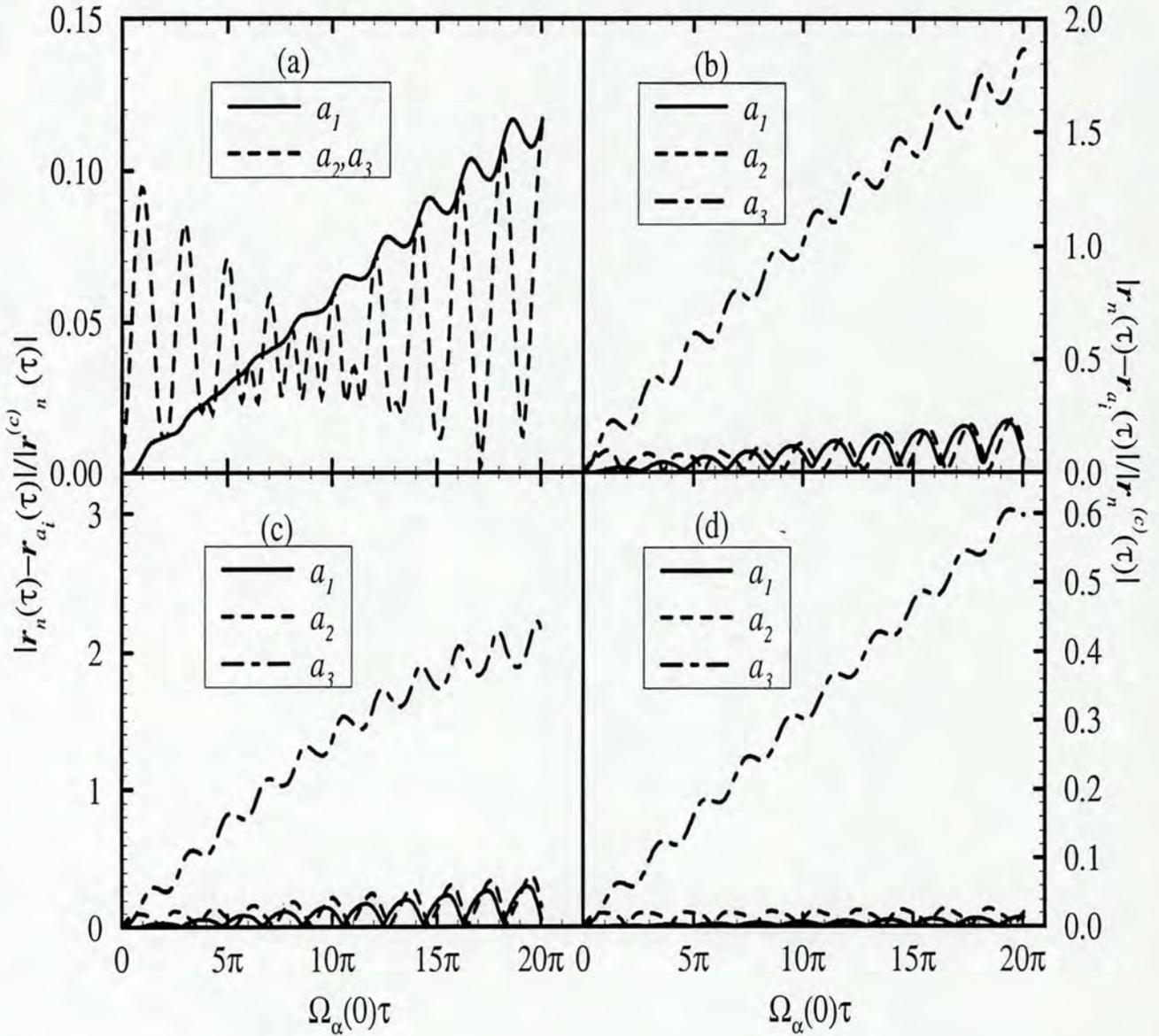


Figura III.2: Erro relativo das aproximações a_i , ($i = 1, 2, 3$), para as trajetórias das partículas em campo inhomôgeneo. Os parâmetros da figura (a) são: $k_{BR_L} = 0,05$, $\varphi = 0$; (b): $k_{BR_L} = 0,05$, $\varphi = \pi/4$; (c): $k_{BR_L} = 0,05$, $\varphi = \pi/2$; (d): $k_{BR_L} = 0,01$, $\varphi = \pi/2$.

consiste em uma limitação importante para a análise. As figuras III.2a-c foram obtidas para $k_{BR_L} = 0.05$ e para os seguintes valores iniciais de φ : (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/4$ e (c) $\varphi = \pi/2$. Na figura III.2a as aproximações a_2 e a_3 são idênticas devido a (III.8) e pode-se notar que o erro relativo é da ordem de 10% em um intervalo de tempo correspondente a 10 revoluções em torno do centro-guia. Nas figuras III.2b,c, percebe-se de imediato que a aproximação a_3 diverge rapidamente de a_1 e a_2 , enquanto que estas últimas permanecem muito próximas entre si durante todo o período de tempo considerado. O erro relativo de a_3 chega a 220% para $\varphi = \pi/2$, enquanto que o erro de a_1 e a_2 chega somente a cerca de 40%, e cresce muito

mais lentamente que o erro para a_3 .

As aproximações a_1 e a_2 são tão melhores quão menor for $k_{BR}L$. A figura III.2d mostra o erro relativo para o caso $k_{BR}L = 0.01$ e $\varphi = \pi/2$. Nota-se que o erro de a_3 novamente cresce rapidamente com o tempo, chegando a 60% em 10 revoluções, enquanto que os erros de a_1 e a_2 não passam de 2% e aparentam ser constantes.

Em resumo, as órbitas (III.10) são consideradas satisfatórias para representar a solução de (III.2), pois elas são na prática indistinguíveis da aproximação a_1 , mais exata e coerente, e não apresentam as secularidades da aproximação a_3 . Estas órbitas serão em seguida utilizadas no cálculo da integral de caminho (II.9).

III.2 O Tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0$ para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares

Nesta seção as órbitas (III.10) serão empregadas no cálculo de (II.9) para que se possa finalmente obter a expressão para o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, sobre o qual será então realizada a transformação BGI, resultando, ao final deste processo, o tensor dielétrico efetivo.

Antes de seguir adiante com o procedimento, contudo, algumas considerações acerca do modelo do plasma adotado nesta tese serão feitas. Como já foi ressaltado em várias oportunidades, o principal objetivo deste trabalho consiste em verificar os efeitos da inomogeneidade do campo magnético na absorção de ondas eletromagnéticas. Para que se possa então isolar os efeitos destes gradientes, somente o caso particular de funções distribuição uniformes será estudado, isto é, serão empregadas funções distribuição da forma

$$F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, P_{2\alpha}) = f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \quad (III.13)$$

Este caso particular de distribuição aparentemente viola as condições de equilíbrio do sistema sob estudo. Mais especificamente, a equação (II.6.b), escrita em termos das variáveis definidas pelo referencial especificado na figura III.1, prevê a existência de uma densidade de corrente macroscópica que flui através do campo magnético na direção x_2

$$-\frac{dB_0}{dx_1}(x_1) = \frac{4\pi}{c} J_2(x_1) = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p v_2 F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, P_{2\alpha}(x_1, p_2)) ,$$

enquanto uma distribuição do tipo (III.13), por ser par em p_2 , não contribui para $J_2(x_1)$. Esta distribuição pode ser considerada válida, contudo, se o sistema de coordenadas em uso for colocado no referencial de repouso, na direção x_2 , daquela espécie e/ou população de partículas responsável pela maior contribuição a $\overleftrightarrow{\epsilon}^0$. Por exemplo, coloca-se o referencial em repouso com os eletrons, quando se estiver interessado em estudar ondas de elétron-ciclotron.

Fica tacitamente suposto que as demais espécies de partículas, cujas distribuições dependem de $P_{2\alpha}(x_1, p_2)$ e que carregam a corrente $J_2(x_1)$ neste referencial, não contribuem significativamente no cálculo de $\vec{\epsilon}^0$. Esta aproximação impede que se possa utilizar os próximos resultados no estudo de ondas híbridas ou em plasmas de elétron-pósitron.

Sem se considerar os problemas peculiares ocasionados pela inhomogeneidade do campo, este trabalho pode então ser considerado como complementar aos trabalhos de *Caldela et alli* [18–20] e *Cavalcanti et alli* [21, 23], os quais consideraram o caso de plasmas não uniformes imersos em campos magnéticos homogêneos. Nestes casos, todas as espécies possuíam distribuições da classe $F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, P_{2\alpha})$. As trajetórias não perturbadas das partículas eram idênticas ao caso homogêneo (expressões III.10 com $k_B = 0$), e a função distribuição era expandida na variável

$$\bar{X}_{1\alpha} = \frac{P_{2\alpha}}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} = x_1 + \frac{p_2}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} .$$

em torno do ponto x_1 ,

$$F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \bar{X}_{1\alpha}) \approx f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x_1) + \frac{p_2}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x_1}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x_1) .$$

Desta forma o tensor $\vec{\epsilon}^0$ era obtido a partir de (II.11) e (II.12) e em seguida a transformação BGI era aplicada. Devido à natureza da inhomogeneidade, bastava empregar os dois primeiros termos de (II.19) para se obter um tensor dielétrico efetivo com as propriedades requeridas.

No caso abordado por esta tese, como já foi mencionado, é necessário aplicar todas as ordens da transformação BGI nas formas (II.19) ou (II.18) na obtenção do tensor efetivo. Este fato já ficou exemplificado na forma das trajetórias das partículas (III.10), as quais contêm correções em todas as ordens, mesmo quando o campo é fracamente inhomogêneo.

Considerando então o caso especial representado pelas distribuições da classe (III.13), o tensor $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ é obtido a partir de (II.11) e (II.12), e pode ser representado da seguinte forma

$$\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{1}} - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \mathbf{v} \mathcal{I}_{\tau}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \quad (\text{III.14.a})$$

$$\mathcal{I}_{\tau}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^0 d\tau \mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega, \tau) e^{i\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\tau) - \mathbf{r}] - \omega\tau\}} \quad (\text{III.14.b})$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega, \tau) = \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(\tau)}{\omega} \right) \vec{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{v}'(\tau) \mathbf{k}}{\omega} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel})}{\partial \mathbf{p}'(\tau)} . \quad (\text{III.14.c})$$

Escrevendo o gradiente de $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel})$ em termos das derivadas dos argumentos

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel})}{\partial \mathbf{p}'(\tau)} = \frac{\mathbf{p}_{\perp}'(\tau)}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} ,$$

sendo $\mathbf{p}'(\tau) = \mathbf{p}_{\perp}'(\tau) + p_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_3$, a função $\mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega, \tau)$ pode ser escrita como

$$\mathcal{Q}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \omega, \tau) = \frac{\mathbf{p}_{\perp}'(\tau)}{p_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) + \hat{\mathbf{e}}_3 \left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}'(\tau)}{\omega} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \right] ,$$

onde

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega}\right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}$$

e as expressões para o *momentum* das partículas não perturbadas (III.10.a,b) podem ser diretamente substituídas. Quanto às expressões para a posição das partículas, estas são substituídas no exponenciando de (III.14.b), resultando

$$\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\tau) - \mathbf{r}] - \omega \tau = b_{\alpha} [\sin(\varphi - \psi) - \sin(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau)] + \left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} + \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi - \omega \right) \tau,$$

sendo

$$b_{\alpha} = \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} = k_{\perp} r_{L\alpha} \quad \text{e} \quad \Omega_{\alpha} \equiv \Omega_{\alpha}(0) = \frac{q_{\alpha} B_0(0)}{m_{\alpha} c}.$$

Os componentes do tensor $\bar{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ podem agora ser calculados individualmente fazendo-se uso das expressões recém obtidas. Serão apresentados os detalhes apenas da dedução do componente $\epsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, sendo os restantes mostrados na sua forma final.

Para calcular o componente $\epsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ as expressões (III.14) ficam

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) &= -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3 p v_1 \mathcal{I}_{\tau 2}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \\ \mathcal{I}_{\tau 2}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p'_{\perp}(\tau)}{p_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) e^{i\{\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\tau) - \mathbf{r}] - \omega \tau\}}. \end{aligned}$$

Escrevendo o componente ϵ_{12}^0 por extenso,

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) &= -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\perp}}{\gamma} \cos \varphi \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) e^{i b_{\alpha} \sin(\varphi - \psi)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \sin(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) e^{-i b_{\alpha} \sin(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau)} \exp \left[i \left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} + \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi - \omega \right) \tau \right], \end{aligned}$$

pode-se colocar todo o integrando da integração em τ na forma de uma exponencial somando e diminuindo o ângulo ψ no argumento da função seno,

$$\sin(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) = \sin(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau) \cos \psi + \cos(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau) \sin \psi.$$

Fazendo uso das seguintes identidades, obtidas a partir da geratriz das funções de Bessel [2]

$$e^{\pm i x \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{\pm i n \theta} \quad (\text{III.15.a})$$

$$\sin \theta e^{\pm i x \sin \theta} = \mp i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) e^{\pm i n \theta} \quad (\text{III.15.b})$$

$$\cos \theta e^{\pm i x \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{x} J_n(x) e^{\pm i n \theta}, \quad (\text{III.15.c})$$

onde $J_n(x)$ é a função de Bessel de ordem n e $J'_n(x)$ é a sua derivada, coloca-se então ϵ_{12}^0 na seguinte forma

$$\epsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p \frac{p_{\perp}}{\gamma} \cos \varphi \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) (\Pi_{n\alpha})_2 e^{ib_{\alpha} \text{sen}(\varphi-\psi)} e^{-in(\varphi-\psi)} \times \gamma \int_0^{\infty} d\tau e^{i\mathcal{D}_{n\alpha}\tau} \quad (\text{III.16})$$

sendo definidos o componente 2 do vetor $\Pi_{n\alpha}$,

$$(\Pi_{n\alpha})_2 = \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \text{sen } \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \text{cos } \psi$$

e a quantidade $\mathcal{D}_{n\alpha}$,

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = \gamma\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - n\Omega_{\alpha}(1 + k_B x_1) - n \frac{k_B p_{\perp}}{m_{\alpha}} \text{sen } \varphi - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \text{sen } \psi \quad (\text{III.17})$$

Para se chegar à forma da integração em τ apresentada em (III.16), fez-se uso, em primeiro lugar, da condição subjacente de desaparecimento da perturbação para $\tau \rightarrow -\infty$, a qual foi explicitamente utilizada na dedução de (II.9). Esta condição se cumpre se for suposto que a frequência da perturbação possui uma parte imaginária positiva e arbitrariamente pequena. Neste caso a integral em τ pode ser manipulada da seguinte maneira

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\mathcal{D}_{n\alpha}\tau/\gamma} = \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{(\omega_i - i\mathcal{D}_{n\alpha})\tau/\gamma} = \frac{i\gamma}{\mathcal{D}_{n\alpha}} = \gamma \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\mathcal{D}_{n\alpha}\tau} \quad (\text{III.18})$$

e em seguida basta fazer $\tau \rightarrow -\tau$ para se chegar à forma apresentada em (III.16). O procedimento usual neste ponto consiste em realizar a integração em τ e apresentar o resultado na forma de um denominador ressonante. A equação $\mathcal{D}_{n\alpha} = 0$ determina o *momentum* que uma determinada partícula deve ter para entrar em ressonância com a onda, de forma a ocorrer transferência de energia entre ambos. Esta equação é usualmente referida como *Condição de ressonância*. Contudo, a forma integral apresentada por (III.16) é ideal para aplicar-se a transformação BGI, e por isso os elementos do tensor $\bar{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ serão apresentados nesta forma.

Como a função distribuição $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel})$ não depende de $p_2 = p_{\perp} \text{sen } \varphi$, a integração em φ pode ser realizada. Para tanto, escreve-se o denominador ressonante na forma

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = D_{n\alpha} - n \frac{k_B p_{\perp}}{m_{\alpha}} \text{sen } \varphi \quad ,$$

sendo

$$D_{n\alpha} = \gamma\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - n\Omega_{\alpha}(1 + k_B x_1) - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \text{sen } \psi \quad , \quad (\text{III.19})$$

resultando a seguinte integral em φ :

$$\mathcal{I}_{\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi e^{ib_{\alpha} \text{sen}(\varphi-\psi)} e^{-in(\varphi-\psi)} e^{-i\Phi_{n\alpha}\tau \text{sen } \varphi} \quad ,$$

onde

$$\phi_{n\alpha} = n \frac{k_B p_{\perp}}{m_{\alpha}} .$$

Realizando algumas manipulações, chega-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\varphi} = & \cos \psi \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi - \psi) e^{i(b_{\alpha} - \phi_{n\alpha} \tau \cos \psi) \sin(\varphi - \psi)} e^{-i\phi_{n\alpha} \tau \sin \psi \cos(\varphi - \psi)} e^{-in(\varphi - \psi)} \\ & - \sin \psi \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi - \psi) e^{i(b_{\alpha} - \phi_{n\alpha} \tau \cos \psi) \sin(\varphi - \psi)} e^{-i\phi_{n\alpha} \tau \sin \psi \cos(\varphi - \psi)} e^{-in(\varphi - \psi)} . \end{aligned}$$

Definindo agora as quantidades $\bar{\sigma}_{n\alpha}(\tau)$ e $\theta_{n\alpha}(\tau)$ tais que

$$\begin{cases} b_{\alpha} - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau = \bar{\sigma}_{n\alpha}(\tau) \cos \theta_{n\alpha}(\tau) \\ \phi_{n\alpha} \sin \psi \tau = \bar{\sigma}_{n\alpha}(\tau) \sin \theta_{n\alpha}(\tau) , \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{n\alpha}^2(\tau) &= (b_{\alpha} - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau)^2 + (\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau)^2 \\ \tan \theta_{n\alpha}(\tau) &= \frac{\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau}{b_{\alpha} - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau} , \end{aligned}$$

e escrevendo \mathcal{I}_{φ} em termos destas quantidades,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\varphi} = & \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) e^{-in\theta_{n\alpha}} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha}) e^{i\bar{\sigma}_{n\alpha} \sin(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} e^{-in(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} \\ & - \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) e^{-in\theta_{n\alpha}} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha}) e^{i\bar{\sigma}_{n\alpha} \sin(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} e^{-in(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} , \end{aligned}$$

faz-se uso novamente de (III.15) de modo a obter as expansões

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\varphi} = & e^{-in\theta_{n\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\cos(\psi + \theta_{n\alpha}) \frac{m}{\bar{\sigma}_{n\alpha}} J_m(\bar{\sigma}_{n\alpha}) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i(n-m)(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} \right. \\ & \left. + i \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) J'_m(\bar{\sigma}_{n\alpha}) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i(n-m)(\varphi - \psi - \theta_{n\alpha})} \right] . \end{aligned}$$

As integrações em φ selecionam somente os valores de $m = n$, resultando por fim

$$\mathcal{I}_{\varphi} = 2\pi e^{-in\theta_{n\alpha}} (\Xi_{n\alpha})_1^* ,$$

onde $(\Xi_{n\alpha})_1^*$ é o complexo conjugado do componente 1 do vetor $\Xi_{n\alpha}$,

$$(\Xi_{n\alpha})_1 = \frac{n}{\bar{\sigma}_{n\alpha}} J_n(\bar{\sigma}_{n\alpha}) \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) - i J'_n(\bar{\sigma}_{n\alpha}) \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) .$$

Introduzindo então \mathcal{I}_{φ} em (III.16), obtém-se finalmente $\varepsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$

$$\varepsilon_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p \int_0^{\infty} d\tau p_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) (\Xi_{n\alpha})_1^* (\Pi_{n\alpha})_2 e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau} . \quad (\text{III.20})$$

O cálculo dos outros componentes de $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ segue as mesmas linhas, com exceção dos componentes ϵ_{13}^0 , ϵ_{23}^0 e ϵ_{33}^0 . Para ϵ_{13}^0 , por exemplo, obtém-se a partir de (III.14) a expressão

$$\begin{aligned} \epsilon_{13}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = & -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{\gamma} \cos \varphi e^{ib_{\alpha} \sin(\varphi - \psi)} \\ & \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{\gamma \omega m_{\alpha}} L f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \cos(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau) \right] e^{-ib_{\alpha} \sin(\varphi - \psi - \omega_{\alpha} \tau)} \\ & \times \exp \left[i \left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} + \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi - \omega \right) \tau \right], \end{aligned}$$

onde

$$L \equiv \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}.$$

Utilizando novamente as expansões (III.15) chega-se a

$$\begin{aligned} \epsilon_{13}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = & -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p p_{\perp} \cos \varphi \left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} L f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \frac{n}{b_{\alpha}} \right) J_n(b_{\alpha}) \\ & \times e^{ib_{\alpha} \sin(\varphi - \psi)} e^{-in(\varphi - \psi)} \int_0^{\infty} d\tau e^{iD_{n\alpha} \tau}. \end{aligned}$$

Realizando algumas manipulações com o termo entre parênteses acima, obtém-se a seguinte identidade:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{n}{b_{\alpha}} L f_{\alpha 0} = \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha 0} - \frac{L f_{\alpha 0}}{\gamma \omega} \mathcal{D}_{n\alpha} - \frac{L f_{\alpha 0}}{\gamma \omega} \left(n k_B P_{2\alpha} + \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi \right). \quad (\text{III.21})$$

Como o último termo é de ordem $\mathcal{O}(k_B)$, ele pode ser desprezado de forma consistente com as aproximações até aqui feitas. Já o segundo termo não contribui para ϵ_{13}^0 , como pode ser demonstrado integrando-se em τ de modo a obter o denominador ressonante (III.17), o qual cancela com o mesmo termo no numerador. Integrando então em φ , resultam as seguintes combinações de funções de Bessel, as quais são os únicos fatores que dependem da série em n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2(b_{\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b_{\alpha}) J'_n(b_{\alpha}) = 0,$$

e, portanto, a contribuição do segundo termo de (III.21) a ϵ_{13}^0 resulta identicamente nulo.

Realizando então a integração em φ no primeiro termo de (III.21), chega-se a $\epsilon_{13}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$

$$\epsilon_{13}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p \int_0^{\infty} d\tau p_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) (\Xi_{n\alpha})_1^* (\Pi_{n\alpha})_3 e^{-in\theta_{n\alpha}} e^{iD_{n\alpha} \tau},$$

sendo $(\Pi_{n\alpha})_3$ o componente 3 do vetor $\Pi_{n\alpha}$

$$(\Pi_{n\alpha})_3 = (p_{\parallel}/p_{\perp}) J_n(b_{\alpha}).$$

O cálculo de ϵ_{23}^0 e ϵ_{33}^0 envolve as mesmas manipulações exigidas para o componente ϵ_{13}^0 . Abstendo-se de apresentar os detalhes do cálculo dos demais componentes de $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$,

resulta finalmente

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{1} - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p \int_0^{\infty} d\tau p_{\perp} \mathcal{L}f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \Xi_{n\alpha}^* \Pi_{n\alpha} e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau} \\ - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} Lf_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_{n\alpha} &= \left[\frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \cos \psi - i J'_n(b_{\alpha}) \sin \psi \right] \hat{e}_1 \\ &+ \left[\frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \sin \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \cos \psi \right] \hat{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(b_{\alpha}) \hat{e}_3 \\ \Xi_{n\alpha} &= \left[\frac{n}{\bar{b}_{n\alpha}} J_n(\bar{b}_{n\alpha}) \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) - i J'_n(\bar{b}_{n\alpha}) \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) \right] \hat{e}_1 \\ &+ \left[\frac{n}{\bar{b}_{n\alpha}} J_n(\bar{b}_{n\alpha}) \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) + i J'_n(\bar{b}_{n\alpha}) \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) \right] \hat{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(\bar{b}_{n\alpha}) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e o termo da diádica $\hat{e}_3 \hat{e}_3$ surge do segundo termo de (III.21) fazendo-se uso da identidade [2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(b_{\alpha}) = 1 .$$

A simetria do tensor (III.22) será discutida na seção III.4. Este tensor é a forma básica sobre a qual a transformação BGI deve ser aplicada de forma a se obter o tensor dielétrico efetivo. Esta transformação será realizada na seção seguinte.

III.3 O Tensor Dielétrico Efetivo para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares

A transformação BGI na forma integral (II.18) será agora aplicada ao tensor $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, expressão (III.22), obtido para um plasma magnetizado uniforme com gradientes perpendiculares no campo magnético, com o intuito de se obter o tensor dielétrico efetivo.

Como tem sido salientado ao longo desta tese, a necessidade de se aplicar a transformação BGI sobre $\vec{\varepsilon}^0$ reside em vários aspectos, que resultam fenomenologicamente distintos entre $\vec{\varepsilon}^0$ e o tensor efetivo, obtido após aplicar-se a transformação BGI. Um dos aspectos mais importantes consiste na desobediência, por parte de $\vec{\varepsilon}^0$, das relações recíprocas de Onsager, desobediência esta que é corrigida com a transformação BGI.

A forma que as relações recíprocas de Onsager assumem no tensor dielétrico e a comparação entre os tensores $\vec{\varepsilon}^0$ e $\vec{\varepsilon}$ será realizada na seção III.4. Também nesta seção será balizada, através da análise de um caso particular de $\vec{\varepsilon}^0$, a necessidade de se usar a transformação BGI em todas as ordens de k_B , na forma integral (II.18), ao invés da forma simplificada que

consistiria em tomar somente os dois primeiros termos da forma diferencial (II.19), como foi feito em outros trabalhos [18–21, 23].

Para exemplificar o uso da transformação BGI será novamente utilizado o componente ε_{12}^0 . Representando o tensor dielétrico efetivo por $\vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, obtém-se de (II.18)

$$\varepsilon_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int d^3k' d^3\eta \varepsilon_{12}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}} .$$

Ao se examinar a dependência em \mathbf{r} de $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$, dado por (III.22), observa-se que este somente depende de x_1 na exponencial

$$e^{iD_{n\alpha}(x_1)\tau} = \exp[i(D_{n\alpha}(0) - nk_B\Omega_\alpha x_1)\tau] ,$$

onde $D_{n\alpha}(x_1)$ é dado por (III.19). Neste caso a integração em $\boldsymbol{\eta}$ pode ser facilmente realizada

$$\begin{aligned} e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} \int d^3\eta e^{-ink_B\Omega_\alpha(x_1 + \eta_1/2)\tau} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}} &= \\ &= e^{iD_{n\alpha}(x_1)\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_i e^{i(k'_i - k_i)\eta_i} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 e^{i(k'_1 - k_1 - nk_B\Omega_\alpha\tau/2)\eta_1} \\ &= (2\pi)^3 e^{iD_{n\alpha}(x_1)\tau} \delta(k'_2 - k_2) \delta(k'_3 - k_3) \delta(k'_1 - k_1 - nk_B\Omega_\alpha\tau/2) . \end{aligned}$$

Portanto, a transformação a ser aplicada em (III.22) consiste em fazer

$$k_1 \longrightarrow k_1 + nk_B\Omega_\alpha\tau/2 , \tag{III.23}$$

com o que os ingredientes de ε_{12}^0 se tornam

$$\begin{aligned} k_\perp &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \longrightarrow \sqrt{(k_\perp \cos \psi + nk_B\Omega_\alpha\tau/2)^2 + k_\perp^2 \sin^2 \psi} \equiv k_\perp \xi_{n\alpha}^+ \\ b_\alpha &\longrightarrow b_\alpha \xi_{n\alpha}^+ \\ \cos \psi &= \frac{k_1}{k_\perp} \longrightarrow \frac{1}{\xi_{n\alpha}^+} (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau) \\ \sin \psi &= \frac{k_2}{k_\perp} \longrightarrow \frac{\sin \psi}{\xi_{n\alpha}^+} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n\alpha}^2 &= (b_\alpha - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau)^2 + (\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau)^2 \longrightarrow \left[b_\alpha \xi_{n\alpha}^+ - \frac{\phi_{n\alpha}}{\xi_{n\alpha}^+} (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau) \tau \right]^2 \\ &\quad + \left(\frac{\phi_{n\alpha}}{\xi_{n\alpha}^+} \sin \psi \tau \right)^2 \\ &= \frac{b_\alpha^2}{\xi_{n\alpha}^+{}^2} [(1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2)^2 + 4\mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \sin^2 \psi \tau^2] \\ &= \frac{b_\alpha^2}{\xi_{n\alpha}^+{}^2} \xi_{n\alpha}^+{}^2 \xi_{n\alpha}^-{}^2 = b_\alpha^2 \xi_{n\alpha}^-{}^2 \\ \tan \theta_{n\alpha}(\tau) &= \frac{\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau}{b_\alpha - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau} \longrightarrow \frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} \sin \psi \tau}{\xi_{n\alpha}^+{}^2 - 2\mathfrak{E}_{n\alpha} (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau) \tau} = \frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} \sin \psi \tau}{1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2} \\ \cos \theta_{n\alpha}(\tau) &= \frac{b_\alpha - \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau}{\bar{\varepsilon}_{n\alpha}(\tau)} \longrightarrow \frac{1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \theta_{n\alpha}(\tau) &= \frac{\phi_{n\alpha} \text{sen } \psi \tau}{b_{n\alpha}(\tau)} \rightarrow \frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} \text{sen } \psi \tau}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} \\
 \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) &\rightarrow \frac{(\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau)(1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2)}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} - \frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} \text{sen}^2 \psi \tau}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} \\
 &= \frac{(\cos \psi - \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \xi_{n\alpha}^+{}^2}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} = \frac{1}{\xi_{n\alpha}^-} (\cos \psi - \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \\
 \text{sen}(\psi + \theta_{n\alpha}) &\rightarrow \frac{(1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2) \text{sen } \psi}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} + \frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \text{sen } \psi \tau}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} \\
 &= \frac{\text{sen } \psi \xi_{n\alpha}^+{}^2}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} = \frac{\text{sen } \psi}{\xi_{n\alpha}^-} ,
 \end{aligned}$$

onde foram definidas as seguintes quantidades

$$\mathfrak{E}_{n\alpha} = \frac{n k_B}{2 k_{\perp}} \Omega_{\alpha} ; \xi_{n\alpha}^{\pm} = \sqrt{(\cos \psi \pm \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau)^2 + \text{sen}^2 \psi} ; \frac{\phi_{n\alpha}}{b_{\alpha}} = 2\mathfrak{E}_{n\alpha} .$$

Desta maneira, os termos em ε_{12}^0 podem ser escritos simultaneamente como componentes de um único vetor $\Pi_{n\alpha}^{\pm}$

$$(\Xi_{n\alpha})_1^* \rightarrow (\Pi_{n\alpha}^-)_1 ; (\Pi_{n\alpha})_2 \rightarrow (\Pi_{n\alpha}^+)_2 ,$$

o qual será definido posteriormente em (III.24). Realizando então a transformação (III.23) em todos os componentes do tensor $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, definido em (III.22), obtém-se a seguinte forma para o tensor dielétrico efetivo

$$\begin{aligned}
 \vec{\varepsilon} = \vec{1} - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 p p_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+ e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau} \\
 - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} L f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \quad (\text{III.24})
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Pi_{n\alpha}^{\pm} &= \frac{1}{\xi_{n\alpha}^{\pm}} \left[\frac{n}{b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}} J_n(b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}) (\cos \psi \pm \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \mp i J'_n(b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}) \text{sen } \psi \right] \hat{e}_1 \\
 &+ \frac{1}{\xi_{n\alpha}^{\pm}} \left[\frac{n}{b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}} J_n(b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}) \text{sen } \psi \pm i J'_n(b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}) (\cos \psi \pm \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \right] \hat{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(b_{\alpha} \xi_{n\alpha}^{\pm}) \hat{e}_3 \\
 \mathcal{L} &= \left(1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \\
 L &= \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \\
 D_{n\alpha} &= \gamma \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - n \Omega_{\alpha} (1 + k_B x_1) - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2 m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \text{sen } \psi \\
 \theta_{n\alpha}(\tau) &= \arctan \left[\frac{2\mathfrak{E}_{n\alpha} \text{sen } \psi \tau}{1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2} \right] \\
 \xi_{n\alpha}^{\pm} &= \sqrt{(\cos \psi \pm \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau)^2 + \text{sen}^2 \psi} \\
 b_{\alpha} &= \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} ; \mathfrak{E}_{n\alpha} = \frac{n k_B}{2 k_{\perp}} \Omega_{\alpha} .
 \end{aligned}$$

O tensor $\vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ satisfaz plenamente as relações recíprocas de Onsager, conforme será mostrado na seção III.4, e portanto esta é a forma a ser empregada como o coeficiente de transporte que relaciona o campo elétrico com a densidade de corrente no plasma.

A forma apresentada por (III.24), todavia, é demasiado complexa e dificulta sobremaneira qualquer aplicação prática com uma função distribuição mais realística. Nesta forma não é possível escrever os componentes de $\vec{\varepsilon}$ em termos de funções conhecidas tais como as funções de dispersão de Fried & Conte ou de Shkarofsky, cujas propriedades analíticas já são bem conhecidas. Para que $\vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ se torne mais útil, é necessário escrever (III.24) de outra forma, equivalente porém exequível.

Inicialmente, a integração em \mathbf{p} será escrita em termos da variável adimensional $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m_\alpha c$. Esta transformação permite uma notação um pouco mais compacta, pois os ingredientes de (III.24) ficam dados por

$$p_\perp \mathcal{L} = u_\perp \left[\left(1 - \frac{N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial u_\perp} + \frac{N_{\parallel} u_\perp}{\gamma} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right] ; p_{\parallel} L = u_{\parallel} \left(\frac{u_{\parallel}}{u_\perp} \frac{\partial}{\partial u_\perp} - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right)$$

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = \gamma \omega - k_{\parallel} u_{\parallel} c - n \Omega_\alpha (1 + k_B x_1) - \frac{k_B k_{\parallel} u_\perp^2 c^2}{2 \Omega_\alpha} \text{sen } \psi$$

$$b_\alpha = N_\perp u_\perp / Y_\alpha ; Y_\alpha = \Omega_\alpha / \omega ; \gamma = \sqrt{1 + u^2} .$$

Define-se agora a função distribuição $f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_{\parallel})$ através da relação

$$f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_{\parallel}) d^3 p = (m_\alpha c)^3 f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_{\parallel}) \Big|_{\mathbf{p}=m_\alpha c \mathbf{u}} d^3 u$$

$$\Rightarrow n_\alpha f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_{\parallel}) \equiv (m_\alpha c)^3 f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_{\parallel}) \Big|_{\mathbf{p}=m_\alpha c \mathbf{u}} ,$$

onde n_α é a densidade da espécie α . Utilizando agora a seguinte identidade das funções de Bessel

$$J_{s_n |n|}(z) = (s_n)^{|n|} J_{|n|}(z) ,$$

onde $s_n \equiv \text{sgn}(n)$, observa-se que, como na diádica $\Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+$ as funções de Bessel aparecem sempre aos pares, pode-se escrever $\Pi_{n\alpha}^\pm$ na forma equivalente

$$\Pi_{n\alpha}^\pm = \frac{1}{\xi_{n\alpha}^\pm} \left[\frac{n}{b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm} J_{|n|}(b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm) (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \mp i J'_{|n|}(b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm) \text{sen } \psi \right] \hat{e}_1$$

$$+ \frac{1}{\xi_{n\alpha}^\pm} \left[\frac{n}{b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm} J_{|n|}(b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm) \text{sen } \psi \pm i J'_{|n|}(b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm) (\cos \psi + \mathfrak{E}_{n\alpha} \tau) \right] \hat{e}_2 + \frac{u_{\parallel}}{u_\perp} J_{|n|}(b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm) \hat{e}_3 .$$

Já a função $e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)}$ pode ser reescrita assim

$$e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} = (\cos \theta_{n\alpha} - i s_n \text{sen } \theta_{n\alpha})^{|n|} = \left(\frac{1 - \mathfrak{E}_{n\alpha}^2 \tau^2 - i 2 s_n \mathfrak{E}_{n\alpha} \text{sen } \psi \tau}{\xi_{n\alpha}^+ \xi_{n\alpha}^-} \right)^{|n|} .$$

Definindo agora as variáveis

$$t \equiv \omega \tau ; \mathcal{K}_n \equiv \frac{b_\alpha \mathfrak{E}_{n\alpha}}{\omega} = \frac{n}{2} N_B u_\perp ; N_B \equiv \frac{k_B c}{\omega}$$

e as funções

$$F_{n\alpha}(t) = b_\alpha^2 - \mathcal{K}_n^2 t^2 - i 2 s_n b_\alpha \sin \psi \mathcal{K}_n t$$

$$W_{n\alpha}^\pm(t) = b_\alpha \xi_{n\alpha}^\pm(\tau = t/\omega) = \sqrt{b_\alpha^2 \pm 2 b_\alpha \cos \psi \mathcal{K}_n t + \mathcal{K}_n^2 t^2} ,$$

resulta

$$e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} = \left[\frac{F_{n\alpha}(t)}{W_{n\alpha}^+ W_{n\alpha}^-} \right]^{|n|} .$$

A simplificação desejada é obtida então ao se calcular o produto $F_{n\alpha}^{1/2}(t) \Pi_{n\alpha}^\pm$. Para o componente 1, por exemplo, fazendo uso da relação de recorrência [2]

$$J_n(z) = \frac{n}{z} J_n'(z) - J_{n+1}(z) ,$$

obtém-se

$$F_{n\alpha}^{1/2}(t) (\Pi_{n\alpha}^\pm)_1 = F_{n\alpha}^{1/2}(t) \left[(\pm)n \frac{J_{|n|}(W_{n\alpha}^\pm)}{(W_{n\alpha}^\pm)^2} (\mathcal{K}_n t \pm b_\alpha \cos \psi - i s_n b_\alpha \sin \psi) \pm i \frac{J_{|n|+1}(W_{n\alpha}^\pm)}{W_{n\alpha}^\pm} b_\alpha \sin \psi \right] .$$

Mas

$$\frac{F_{n\alpha}^{1/2}(t)}{(W_{n\alpha}^\pm)^2} (\mathcal{K}_n t \pm b_\alpha \cos \psi - i s_n b_\alpha \sin \psi) = i \left[\frac{\mathcal{K}_n t \mp b_\alpha \cos \psi + i s_n b_\alpha \sin \psi}{\mathcal{K}_n t \pm b_\alpha \cos \psi + i s_n b_\alpha \sin \psi} \right]^{\frac{1}{2}} \equiv G_{n\alpha}^\pm(t) .$$

Procedendo desta maneira para os outros componentes do vetor $\Pi_{n\alpha}^\pm$ e coletando as definições feitas anteriormente, obtém-se então a forma desejada para o tensor dielétrico efetivo

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} = \vec{1} - i \sum_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \int d^3 u u_\perp \mathcal{L} f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_\parallel) e^{i D_{n\alpha} t} [F_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+}{(W_{n\alpha}^- W_{n\alpha}^+)^{|n|}} \\ - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \sum_\alpha X_\alpha \int d^3 u \frac{u_\parallel}{\gamma} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_\parallel) , \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

cujos ingredientes serão novamente explicitados

$$\begin{aligned} \Pi_{n\alpha}^\pm = \pm \left[n J_{|n|}(W_{n\alpha}^\pm) G_{n\alpha}^\pm(t) + i \frac{J_{|n|+1}(W_{n\alpha}^\pm)}{W_{n\alpha}^\pm} F_{n\alpha}^{1/2}(t) b_\alpha \sin \psi \right] \hat{e}_1 \\ + i \left[|n| J_{|n|}(W_{n\alpha}^\pm) G_{n\alpha}^\pm(t) \mp \frac{J_{|n|+1}(W_{n\alpha}^\pm)}{W_{n\alpha}^\pm} F_{n\alpha}^{1/2}(t) (b_\alpha \cos \psi \pm \mathcal{K}_n t) \right] \hat{e}_2 \\ + \frac{u_\parallel}{u_\perp} J_{|n|}(W_{n\alpha}^\pm) F_{n\alpha}^{1/2}(t) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$F_{n\alpha}(t) = b_\alpha^2 - \mathcal{K}_n^2 t^2 - i 2 s_n b_\alpha \sin \psi \mathcal{K}_n t$$

$$W_{n\alpha}^\pm(t) = \sqrt{b_\alpha^2 \pm 2 b_\alpha \cos \psi \mathcal{K}_n t + \mathcal{K}_n^2 t^2}$$

$$G_{n\alpha}^{\pm}(t) = i \sqrt{\frac{\mathcal{K}_n t \mp b_{\alpha} \cos \psi + i s_n b_{\alpha} \sin \psi}{\mathcal{K}_n t \pm b_{\alpha} \cos \psi + i s_n b_{\alpha} \sin \psi}}; \quad \begin{cases} G_{n\alpha}^{+} G_{n\alpha}^{-} = -1 \\ F_{n\alpha}^{1/2} G_{n\alpha}^{\pm} = -(\mathcal{K}_n t \mp b_{\alpha} \cos \psi + i s_n b_{\alpha} \sin \psi) \end{cases}$$

$$D_{n\alpha} = \gamma - N_{\parallel} u_{\parallel} - n Y_{\alpha} (1 + k_B x_1) - N_B \frac{N_{\perp} u_{\perp}^2}{2 Y_{\alpha}} \sin \psi$$

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + \frac{N_{\parallel} u_{\perp}}{\gamma} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}}; \quad L = \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}}$$

$$X_{\alpha} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}; \quad Y_{\alpha} = \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega}; \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m_{\alpha} c}; \quad N = \frac{\mathbf{k}c}{\omega}; \quad b_{\alpha} = \frac{N_{\perp} u_{\perp}}{Y_{\alpha}}; \quad \mathcal{K}_n = \frac{n}{2} N_B u_{\perp}$$

$$N_B = \frac{k_B c}{\omega}; \quad \gamma(u) = \sqrt{1 + u^2}; \quad \omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}.$$

Esta forma para o tensor dielétrico efetivo é tão ou mais complexa quanto a forma anterior (III.24). Entretanto, como será visto no próximo capítulo, a forma apresentada em (III.25) permite, após introduzido um determinado modelo para a função distribuição $f_{\alpha 0}$, escrever os componentes do tensor $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ em termos de funções de dispersão de plasma tradicionais, como as funções de Fried & Conte e de Shkarofskii.

É interessante também mencionar que os efeitos de inhomogeneidade contidos em (III.24) ou em (III.25) são efeitos de raio de Larmor finito, isto é, somente se manifestam em plasmas térmicos, desaparecendo quando a temperatura do plasma cai a zero. Isto pode ser verificado simplesmente incluindo-se a distribuição de plasma frio, $f_{\alpha 0} \propto \delta(\mathbf{u})$, em (III.24) ou (III.25). Basta um rápido algebrismo para verificar que estas expressões para o tensor dielétrico reduzem-se às formas bem conhecidas de plasma frio [58].

III.4 Relações de Simetria dos Tensores $\vec{\epsilon}^0$ e $\vec{\epsilon}$

Nesta seção as propriedades de simetria dos tensores $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (III.22), e $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (III.24) ou (III.25), serão testadas e comparadas. Mais especificamente, será verificado se os mencionados tensores satisfazem as relações recíprocas de Onsager.

Em 1931, Lars Onsager [87, 88] mostrou que uma classe geral de relações recíprocas entre coeficientes de transporte macroscópicos, ligados a fenômenos irreversíveis e dissipativos, pode ser derivada a partir do princípio de reversão temporal das equações cinéticas microscópicas.

Os fenômenos de transporte de interesse podem ser descritos por relações fenomenológicas do tipo

$$\mathfrak{J}(t) = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t) \rangle = -\mathbb{L} \cdot \mathfrak{X}(t), \quad (III.26)$$

onde \mathfrak{J} representa “fluxos” generalizados, representados pela taxa temporal de variação da flutuação da variável de estado $\mathbf{A}(t)$ em torno do valor de equilíbrio \mathbf{A}_0 , $\langle \mathbf{a}(t) \rangle = \langle \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_0 \rangle$. Estes “fluxos” podem corresponder a transportes de partículas, radiação, tráfego de veículos,

etc, e são gerados por perturbações que agem sobre o sistema e que o tiram do equilíbrio, criando, por exemplo, gradientes de densidade, temperatura, potencial elétrico, *etc*, os quais são chamados genericamente de “forças” e estão representados em (III.26) por $\mathfrak{X}(t)$. As “forças” e os “fluxos” estão ligados pelos coeficientes de transporte \mathbb{L} , os quais devem obedecer as relações recíprocas de Onsager.

Estas relações são uma consequência direta da invariância das equações cinéticas microscópicas frente à operação de reversão temporal,

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t, \quad p \rightarrow -p, \quad B \rightarrow -B, \quad (III.27)$$

onde B representa o campo magnético e/ou outra grandeza física com simetria ímpar frente à reversão temporal, como a velocidade angular. A dedução das relações de Onsager se baseia na teoria geral de flutuações dependentes do tempo (ver *Reichl, 1980* [93]) e na hipótese que as flutuações espontâneas de um sistema estatístico em torno de seu estado de equilíbrio decaem, na aproximação linear e de acordo com alguma média estatística, seguindo a mesma lei que governa o decaimento de perturbações macroscópicas no sistema. Isto é, dada uma perturbação externa de pequena amplitude que remove o sistema de seu equilíbrio, a oscilação resultante da variável de estado ($\Delta A(t)$) decai seguindo uma lei linear (macroscópica)

$$\frac{d}{dt} \Delta A(t) = -M \cdot \Delta A(t),$$

onde M é a chamada matriz de regressão. O passo dado por Onsager foi supor então que o decaimento das flutuações espontâneas do sistema em torno do seu equilíbrio, $\langle \mathbf{a}(t) \rangle$, é regido pela mesma lei de regressão linear existente para as perturbações macroscópicas,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}(t) \rangle = -M \cdot \langle \mathbf{a}(t) \rangle.$$

Desta forma, definindo a *matriz de Onsager*

$$\mathbb{L} = M \cdot \mathbb{S}^{-1},$$

onde \mathbb{L} aparece em (III.26) e

$$\mathbb{S} = - \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{A} \partial \mathbf{A}} \right|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}_0},$$

sendo S a entropia do sistema, Onsager conseguiu mostrar que a matriz \mathbb{L} deve satisfazer a seguinte relação de reciprocidade frente à operação de reversão temporal [46, 60, 87, 88, 93]

$$\mathbb{L}(B) = \epsilon \cdot \mathbb{L}^T(-B) \cdot \epsilon^T \quad (III.28)$$

onde \mathbb{L}^T denota a transposta da matriz \mathbb{L} e $\epsilon_{ij} = \pm 1$ é um fator que depende da paridade da variável de estado frente à operação de reversão temporal.

Em física de plasmas, o que se quer é a forma de (III.28) para o tensor dielétrico no espaço de Fourier (I.9). Este tensor é definido a partir do tensor de condutividade (I.7), mas também pode ser considerado como o coeficiente de transporte que relaciona o vetor deslocamento elétrico $D(\mathbf{r}, t)$,

$$D(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' J(\mathbf{r}, t') ,$$

com o campo elétrico $E(\mathbf{r}, t)$ através da relação

$$D(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot E(\mathbf{r}', t') .$$

Em um meio homogêneo a relação acima pode ser escrita no espaço de Fourier da mesma forma que a relação entre $J(\mathbf{r}, t)$ e $E(\mathbf{r}, t)$:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \cdot E(\mathbf{k}, \omega) .$$

Neste caso, em um meio magnetizado a correspondente simetria de Onsager (III.28) passa a ser [68, 101]

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega; B_0) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{k}, \omega; -B_0) . \tag{III.29}$$

A relação (III.29), entretanto, somente é estritamente válida para meios em equilíbrio termodinâmico ou para tensores dielétricos obtidos a partir de funções distribuição pares em $p_{||}$, como é o caso da distribuição de Maxwell-Boltzmann. Como os processos de interesse ocorrem em intervalos temporais muito menores que o tempo médio de colisões, a equação de Vlasov permite a existência de estados estacionários metaestáveis que não correspondem ao equilíbrio termodinâmico, e este fato se reflete em anisotropias na função distribuição, tais como inversões de população ou dispersões de velocidades distintas em duas direções mutuamente perpendiculares. Da mesma forma, meios inhomogêneos se caracterizam por gradientes de densidade, temperatura e/ou campo magnético, os quais geram correntes de equilíbrio no sistema. Estas correntes se refletem na distribuição de equilíbrio das partículas, a qual é, devido a isso, geralmente anisotrópica.

Por conseguinte, no estudo da evolução de perturbações em meios que não estão em equilíbrio termodinâmico as relações recíprocas de Onsager na forma (III.28) não são necessariamente válidas, sendo necessária uma generalização de (III.28) para perturbações em meios que estão fora do equilíbrio termodinâmico, como é o presente caso de plasmas inhomogêneos.

Este problema foi abordado recentemente por *Dufty & Rubí (1987)* [27] e por *Krommes & Hu (1993)* [60], onde a mencionada generalização das relações recíprocas de Onsager é discutida.

Resumidamente, estes autores consideram a lei de regressão para a correlação dependente do tempo da variável de estado

$$\mathfrak{C}(\tau) = \langle \mathbf{a}(t)\mathbf{a}^T(t') \rangle ; \tau = t - t' .$$

Para $\tau = 0$ e para flutuações em torno do equilíbrio termodinâmico, a correlação $\mathfrak{C}(0)$ é proporcional à inversa de \mathbb{S} [93]

$$\mathfrak{C}(0) = \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^T \rangle = k_B \mathbb{S}^{-1} ,$$

sendo k_B a constante de Boltzmann. A lei de regressão neste caso fica

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{C}(\tau) = -\mathbb{M} \cdot \mathfrak{C}(\tau) .$$

A definição de $\mathfrak{C}(\tau)$ é dada em termos da função distribuição de equilíbrio $\rho(\Gamma)$, onde $\Gamma = \{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ é um ponto no espaço de fase do sistema, através da média estatística

$$\mathfrak{C}(\tau) = \langle \mathbf{a}(t)\mathbf{a}^T(t') \rangle = \int d\Gamma \rho(\Gamma) \mathbf{a}(t)\mathbf{a}^T(t') .$$

Definindo agora a correlação medida no estado de reversão temporal,

$$\bar{\mathfrak{C}}(\tau) = \int d\Gamma \bar{\rho}(\Gamma) \mathbf{a}(t)\mathbf{a}^T(t') ,$$

onde $\bar{\rho}(\Gamma)$ corresponde à distribuição $\rho(\Gamma)$ no estado de reversão temporal¹, *Dufty & Rubí* (1987 [27, 60] obtiveram a seguinte relação entre $\mathfrak{C}(\tau)$ e $\bar{\mathfrak{C}}(\tau)$:

$$\mathfrak{C}(\tau; B) = \epsilon \cdot \bar{\mathfrak{C}}^T(\tau; -B) \cdot \epsilon^T . \tag{III.30}$$

Para flutuações em torno do equilíbrio termodinâmico, $\bar{\rho}(\Gamma) = \rho(\Gamma)$, e a relação (III.30) se reduz ao caso usual [93]

$$\mathfrak{C}(\tau; B) = \epsilon \cdot \mathfrak{C}^T(\tau; -B) \cdot \epsilon^T ,$$

o qual leva às relações de reciprocidade conhecidas (III.28). A razão para que (III.30) não seja necessariamente igual à relação acima, válida para sistemas em equilíbrio termodinâmico, está no fato de que, em sistemas fora do equilíbrio, existem correntes estacionárias que são sustentadas ou pelas condições de contorno do sistema ou por forças externas, e embora a dinâmica das partículas do sistema seja reversível temporalmente, as condições de contorno ou as forças externas não necessariamente o são. Como consequência, é possível que a função distribuição $\rho(\Gamma)$ se modifique no processo de reversão temporal, $\bar{\rho}(\Gamma) \neq \rho(\Gamma)$.

¹Em um sistema fora do equilíbrio termodinâmico $\bar{\rho}(\Gamma)$ não necessariamente é igual a $\rho(\Gamma)$.

Com base na relação (III.30), *Dufty & Rubí (1987)* [27, 60] foram então capazes de deduzir uma relação de reciprocidade de Onsager generalizada,

$$\mathbb{L}(B) = \epsilon \cdot \bar{\mathbb{L}}^T(-B) \cdot \epsilon^T, \tag{III.31}$$

sendo $\bar{\mathbb{L}}$ a matriz de Onsager para um sistema no estado de reversão temporal.

No caso de um plasma inhomogêneo e não colisional, é fácil ver que a equação de Vlasov (II.4.a) é invariante frente à reversão temporal, e portanto $f_\alpha(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, -t; -B_0)$ também é solução de (II.4.a). A solução da equação de Vlasov linearizada no estado de reversão temporal é dada então a partir de (II.9)

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, -t; -B_0) &= -q_\alpha \int_t^{-\infty} dt' \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel, -P_{2\alpha})}{\partial(-\mathbf{p}')} \\ &= -q_\alpha \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel, -P_{2\alpha})}{\partial \mathbf{p}'}. \end{aligned}$$

Como as equações de Maxwell também são invariantes frente à reversão temporal, é fácil ver que $\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}$. Desta forma, a generalização de (III.29) para plasmas fora do equilíbrio termodinâmico é dada por

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega; B_0, f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel, P_{2\alpha})) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{k}, \omega; -B_0, f_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel, -P_{2\alpha})) , \tag{III.32}$$

onde a dependência de ϵ_{ij} com a função distribuição está implicitamente dada de uma forma funcional, visto que o tensor dielétrico possui integrações de $f_{\alpha 0}$ no espaço de momenta. Como foi explicado acima, esta dependência funcional deve ser incluída porque as condições de contorno ou as forças externas ao sistema não são necessariamente reversíveis temporalmente, e por isso a função distribuição pode ser modificada no processo de reversão temporal, levando o sistema a um outro estado.

As relações recíprocas (III.32) são válidas *mesmo para plasmas homogêneos*. Por exemplo, para

$$f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel) \propto e^{-\beta(p_\parallel - p_{\parallel 0})} ; \beta = \text{cte.}$$

tem-se que

$$f_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel) \propto e^{\beta(p_\parallel + p_{\parallel 0})} \neq f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel) ,$$

e, portanto, é a relação (III.32), e não (III.29), que representa a simetria de Onsager correta.

Para examinar agora a falta de simetria do tensor $\bar{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (III.22), basta tomar os componentes ϵ_{12}^0 e ϵ_{21}^0 . Fazendo $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, $B_0 \rightarrow -B_0$ e $f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel) \rightarrow f_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel)$ em (III.20), obtém-se

$$\psi \rightarrow \psi \pm \pi ; \Omega_\alpha \rightarrow -\Omega_\alpha ; \bar{\sigma}_{n\alpha} \rightarrow -\bar{\sigma}_{n\alpha}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \left(1 + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega}\right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} = \bar{\mathcal{L}} \\ D_{n\alpha} &\rightarrow \gamma \omega + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + n \Omega_{\alpha} (1 + k_B x_1) - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}}{2 m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi = \bar{D}_{n\alpha} \\ (\Pi_{n\alpha})_2 &\rightarrow \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(-b_{\alpha}) \sin \psi - i J'_n(-b_{\alpha}) \cos \psi = (-)^n (\Pi_{n\alpha})_2 \\ (\Xi_{n\alpha})_1^* &\rightarrow \frac{n}{\bar{b}_{n\alpha}} J_n(-\bar{b}_{n\alpha}) \cos(\psi + \theta_{n\alpha}) - i J'_n(-\bar{b}_{n\alpha}) \sin(\psi + \theta_{n\alpha}) = (-)^n (\Xi_{n\alpha})_1^*\end{aligned}$$

onde foi feito uso das identidades $J_n(-z) = (-)^n J_n(z)$ e $J'_n(-z) = (-)^{n+1} J'_n(z)$. Então

$$\varepsilon_{12}^0(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 p \bar{\mathcal{L}} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, -p_{\parallel}) (\Xi_{n\alpha})_1^* (\Pi_{n\alpha})_2 e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{i\bar{D}_{n\alpha}\tau}.$$

Redefinindo agora a variável $p_{\parallel} \rightarrow -p_{\parallel}$ e o índice $n \rightarrow -n$, tem-se

$$\begin{aligned}\bar{D}_{n\alpha} &\rightarrow D_{n\alpha}; (\Pi_{n\alpha})_2 \rightarrow (-)^{n+1} (\Pi_{n\alpha})_2^*; \phi_{n\alpha} \rightarrow -\phi_{n\alpha}; \bar{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L} \\ \bar{b}_{n\alpha} &\rightarrow (b_{\alpha} + \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau)^2 + (\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau)^2 = \tilde{b}_{n\alpha} \\ \tan \theta_{n\alpha}(\tau) &\rightarrow -\frac{\phi_{n\alpha} \sin \psi \tau}{b_{\alpha} + \phi_{n\alpha} \cos \psi \tau} = -\tan \tilde{\theta}_{n\alpha}(\tau) \\ (\Xi_{n\alpha})_1^* &\rightarrow \frac{(-n)(-)^n}{\tilde{b}_{n\alpha}} J_n(\tilde{b}_{n\alpha}) \cos(\psi - \tilde{\theta}_{n\alpha}) + i(-)^n J'_n(\tilde{b}_{n\alpha}) \sin(\psi - \tilde{\theta}_{n\alpha}) = (-)^{n+1} (\tilde{\Xi}_{n\alpha})_1\end{aligned}$$

onde se utilizou agora a identidade $J_{-n}(z) = (-)^n J_n(z)$. Segue então que

$$\varepsilon_{12}^0(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 p \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) (\Pi_{n\alpha})_2^* (\tilde{\Xi}_{n\alpha})_1 e^{-in\tilde{\theta}_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau}.$$

Pode-se observar claramente que a expressão acima obtida para $\varepsilon_{12}^0(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega)$ é diferente de $\varepsilon_{21}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, obtido a partir de (III.22)

$$\varepsilon_{21}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 p \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) (\Xi_{n\alpha})_2^* (\Pi_{n\alpha})_1 e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau},$$

e portanto não satisfaz as relações recíprocas de Onsager (III.32). Os demais componentes fora da diagonal de $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ também não satisfazem (III.32), e por isso este tensor não é o coeficiente de transporte correto a ser utilizado. No capítulo IV serão mostrados alguns exemplos de aplicações que recentemente surgiram na literatura, e que utilizaram o tensor $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ para formas particulares de $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel})$.

A evidente falta de simetria em $\vec{\varepsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ está corrigida no tensor dielétrico efetivo. Para verificar a simetria de Onsager será utilizada a forma dada por (III.24). Fazendo então $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, $B_0 \rightarrow -B_0$ e $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \rightarrow f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, -p_{\parallel})$, tem-se que

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha} &\rightarrow -\Omega_{\alpha}; \mathfrak{E}_{n\alpha} \rightarrow -\mathfrak{E}_{n\alpha}; \psi \rightarrow \psi \pm \pi \\ D_{n\alpha} &\rightarrow \gamma \omega + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + n \Omega_{\alpha} (1 + k_B x_1) - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}}{2 m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \sin \psi = \bar{D}_{n\alpha} \\ \mathcal{L} &\rightarrow \left(1 + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega}\right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} = \bar{\mathcal{L}} \\ \Pi_{n\alpha}^{\pm} &\rightarrow (-)^n \Pi_{n\alpha}^{\pm}\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega) = & \vec{1} - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3p p_{\perp} \bar{\mathcal{L}} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, -p_{\parallel}) \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{-} \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{+} e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{i\bar{D}_{n\alpha}\tau} \\ & - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} L f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, -p_{\parallel}) . \end{aligned}$$

Realizando novamente a inversão da variável $p_{\parallel} \rightarrow -p_{\parallel}$ e do índice $n \rightarrow -n$, chega-se às expressões

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{n\alpha} & \rightarrow -\mathfrak{E}_{n\alpha} ; \theta_{n\alpha}(\tau) \rightarrow -\theta_{n\alpha}(\tau) ; \bar{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L} ; L \rightarrow -L \\ \xi_{n\alpha}^{\pm} & \rightarrow \sqrt{(\cos \psi \mp \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau)^2 + \text{sen}^2 \psi} = \xi_{n\alpha}^{\mp} \\ \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{\pm} & \rightarrow \frac{1}{\xi_{n\alpha}^{\mp}} \left[\frac{n(-)^{n+1}}{b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp}} J_n(b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp})(\cos \psi \mp \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau) \pm (-)^{n+1} i J'_n(b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp}) \text{sen} \psi \right] \hat{e}_1 \\ & + \frac{1}{\xi_{n\alpha}^{\mp}} \left[\frac{n(-)^{n+1}}{b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp}} J_n(b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp}) \text{sen} \psi \mp i J'_n(b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp})(\cos \psi \mp \mathfrak{E}_{n\alpha}\tau) \right] \hat{e}_2 \\ & + (-)^{n+1} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(b_{\alpha}\xi_{n\alpha}^{\mp}) \hat{e}_3 = (-)^{n+1} \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{\mp} , \end{aligned}$$

obtendo-se por fim

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega) = & \vec{1} - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3p p_{\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{+} \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{-} e^{-in\theta_{n\alpha}(\tau)} e^{iD_{n\alpha}\tau} \\ & - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} L f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) . \end{aligned}$$

Pode-se ver então que é obtida a seguinte simetria:

$$\vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{\varepsilon}^T(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, \omega) ,$$

a qual é exatamente a simetria de Onsager (III.32). Portanto, é o tensor dielétrico efetivo, dado por (III.24) ou (III.25), e não o tensor $\vec{\varepsilon}^0$, que representa o coeficiente de transporte correto para um plasma imerso em um campo magnético com gradientes perpendiculares.

A necessidade de incluir as correções em todas as ordens para se obter um tensor dielétrico efetivo que satisfaça as relações de Onsager pode ser demonstrada com um exemplo simples. Tomando os componentes ε_{12}^0 e ε_{21}^0 em (III.22) para o caso $\psi = 0$, resulta,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^0 & = \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3p p_{\perp} (\mathcal{L} f_{\alpha 0}) \frac{n J_n(b_{\alpha} - \phi_{n\alpha}\tau) J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha} - \phi_{n\alpha}\tau} e^{iD_{n\alpha}\tau} \\ \varepsilon_{21}^0 & = \frac{4\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3p p_{\perp} (\mathcal{L} f_{\alpha 0}) \frac{n J_n(b_{\alpha}) J'_n(b_{\alpha} - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_{\alpha}} e^{iD_{n\alpha}\tau} , \end{aligned}$$

expressões estas que mostram uma evidente falta de simetria. Em uma tentativa de derivar os componentes do tensor dielétrico efetivo, aplica-se então os dois primeiros termos da expansão (II.19):

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^0}{\partial x_1 \partial k_{\perp}} = \varepsilon_{12}^0 + \frac{i p_{\perp}}{2 m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^0}{\partial x_1 \partial b_{\alpha}} .$$

Inspecionando as expressões acima para ε_{12}^0 e ε_{21}^0 , percebe-se que os termos relevantes para as derivações em x_1 e b_α são

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12}^0 &\propto \frac{nJ_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} J'_n(b_\alpha) e^{-in\Omega_\alpha(1+k_Bx_1)\tau} \\ \varepsilon_{21}^0 &\propto \frac{nJ_n(b_\alpha)}{b_\alpha} J'_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau) e^{-in\Omega_\alpha(1+k_Bx_1)\tau}.\end{aligned}$$

Aplicando então as derivações sobre estes termos e fazendo uso da seguinte propriedade das funções de Bessel,

$$J''_n(x) = \left(\frac{n^2}{x^2} - 1\right) J_n(x) - \frac{J'_n(x)}{x},$$

resulta

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &\propto \frac{nJ_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} J'_n(b_\alpha) + \frac{\phi_{n\alpha}\tau}{2} \left[-\frac{nJ_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} J'_n(b_\alpha) \left(\frac{1}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} + \frac{1}{b_\alpha}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{nJ_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} J_n(b_\alpha) \left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} - 1\right) + \frac{nJ'_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} J'_n(b_\alpha) \right] \\ \varepsilon_{21} &\propto \frac{nJ_n(b_\alpha)}{b_\alpha} J'_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau) + \frac{\phi_{n\alpha}\tau}{2} \left[-\frac{nJ_n(b_\alpha)}{b_\alpha} J'_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau) \left(\frac{1}{b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau} + \frac{1}{b_\alpha}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{nJ_n(b_\alpha)}{b_\alpha} J_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau) \left(\frac{n^2}{(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau)^2} - 1\right) + \frac{nJ'_n(b_\alpha)}{b_\alpha} b_\alpha J'_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha}\tau) \right].\end{aligned}$$

Percebe-se facilmente que estes componentes continuam sem apresentar a simetria de Onsager. A adição de outros termos de (II.19) não altera esta situação, a não ser que se some os infinitos termos desta expansão, o que foi realizado para se obter (III.24) ou (III.25). No próximo capítulo serão derivadas expressões para (III.25) fazendo-se uso de formas particulares da função distribuição.

CAPÍTULO IV

TENSOR DIELÉTRICO EFETIVO PARA DISTRIBUIÇÕES MODELO

A forma geral para o tensor dielétrico efetivo, obtida no capítulo III, será agora aplicada para alguns modelos específicos de funções distribuição, os quais são freqüentemente encontrados na literatura.

A computação com estas funções distribuição modelo possibilitará escrever os componentes do tensor dielétrico efetivo em termos de uma nova função de dispersão de plasma, introduzida neste trabalho e denominada *função de dispersão de plasma inomogêneo*. Serão discutidas algumas propriedades analíticas desta nova função a partir de expressões obtidas, para alguns casos limite, em termos de funções de dispersão usuais na física de plasmas, tais como as funções de Fried & Conte e de Shkarofsky.

A estrutura do capítulo é a seguinte. Na seção IV.1 será derivado o tensor dielétrico para uma função distribuição Maxwelliana, tanto no regime fracamente relativístico quanto no regime não relativístico, e os resultados obtidos serão organizados em termos da função de dispersão de plasma inomogêneo, a qual será definida em ambos os regimes citados. Na seção IV.2 algumas propriedades analíticas das funções de dispersão de plasma inomogêneo, para ambos os regimes de velocidades, serão abordadas. Em particular, ênfase será colocada na representação destas novas funções em termos de funções de dispersão usuais em física de plasmas, a função de Fried & Conte no regime não relativístico e as funções de Dnestrovskiĭ e de Shkarofsky no regime fracamente relativístico. Na seção IV.3 os resultados das seções anteriores serão utilizados para se obter a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico efetivo. Será mostrado que esta parte anti-Hermiteana possui contribuições somente das partículas ressonantes, como seria de se esperar fisicamente, ao contrário da parte anti-Hermiteana do tensor intermediário $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, a qual possui contribuições também de partículas não ressonantes. Em seguida, serão discutidas duas abordagens alternativas ao problema sob estudo nesta tese, isto é, absorção de ondas em plasmas com campos inomogêneos. Mostrar-se-á que seus resultados podem ser consistentemente derivados usando o $\vec{\epsilon}^0$ e portanto possuem

contribuições espúrias às suas partes anti-Hermiteanas. Finalmente, na seção IV.4 será derivado o tensor dielétrico efetivo para distribuições modelo que apresentam características fora do equilíbrio termodinâmico e que portanto podem dar origem a instabilidades, mesmo em plasma homogêneos. Estes resultados são o primeiro passo para se estudar os efeitos das inhomogeneidades do campo magnético nas instabilidades cinéticas usuais.

IV.1 O Tensor Dielétrico Efetivo para Distribuição Maxwelliana

O tensor dielétrico efetivo $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, na sua forma geral dada por (III.25), será agora particularizado para o caso de uma função distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann,

$$f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = \left(\frac{\mu_{\alpha}}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2}, \tag{IV.1}$$

sendo $\mu_{\alpha} = m_{\alpha} c^2 / T_{\alpha}$; T_{α} , doravante chamada de “temperatura”, mede a dispersão de velocidades das partículas da espécie α , e possui aqui a dimensão de energia. Mais especificamente, T_{α} será dada em kiloelétron-volts (keV). Aplicando-se à distribuição (IV.1) os operadores \mathcal{L} e L definidos em (III.25), obtém-se

$$\mathcal{L} f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = -\mu_{\alpha} f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}); L f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = 0. \tag{IV.2}$$

O procedimento para o cálculo dos componentes de $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ será então o seguinte. Isolando de (III.25) somente as integrações em t e u ,

$$\vec{\mathcal{I}}_n = \int_0^{\infty} dt \int d^3u u_{\perp} (\mathcal{L} f_{\alpha 0}) e^{iD_{n\alpha} t} [F_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+}{(W_{n\alpha}^- W_{n\alpha}^+)^{|n|}},$$

observa-se que nas quantidades $F_{n\alpha}(t)$, $W_{n\alpha}^{\pm}(t)$ e $G_{n\alpha}^{\pm}(t)$ pode-se facilmente isolar u_{\perp} ,

$$F_{n\alpha}(t) = u_{\perp}^2 (\beta_{\alpha}^2 - \mathfrak{K}_n^2 t^2 - i2s_n \beta_{\alpha} \sin \psi \mathfrak{K}_n t) \equiv u_{\perp}^2 H_{n\alpha}(t)$$

$$W_{n\alpha}^{\pm}(t) = u_{\perp} \sqrt{\beta_{\alpha}^2 \pm 2\beta_{\alpha} \cos \psi \mathfrak{K}_n t + \mathfrak{K}_n^2 t^2} \equiv u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm}(t)$$

$$G_{n\alpha}^{\pm}(t) = i \sqrt{\frac{\mathfrak{K}_n t \mp \beta_{\alpha} \cos \psi + i s_n \beta_{\alpha} \sin \psi}{\mathfrak{K}_n t \pm \beta_{\alpha} \cos \psi + i s_n \beta_{\alpha} \sin \psi}}; \begin{cases} G_{n\alpha}^+ G_{n\alpha}^- = -1 \\ H_{n\alpha}^{1/2} G_{n\alpha}^{\pm} = -(\mathfrak{K}_n t \mp \beta_{\alpha} \cos \psi + i s_n \beta_{\alpha} \sin \psi) \end{cases},$$

onde foram definidas as novas quantidades

$$\beta_{\alpha} = \frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}}; \mathfrak{K}_n = \frac{n}{2} N_B;$$

o vetor $\Pi_{n\alpha}^{\pm}$ fica então escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Pi_{n\alpha}^{\pm} = & \pm \left[n J_{|n|}(u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm}) G_{n\alpha}^{\pm}(t) + i u_{\perp} \frac{J_{|n|+1}(u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm})}{Q_{n\alpha}^{\pm}} H_{n\alpha}^{1/2}(t) \beta_{\alpha} \sin \psi \right] \hat{e}_1 \\ & + i \left[|n| J_{|n|}(u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm}) G_{n\alpha}^{\pm}(t) \mp u_{\perp} \frac{J_{|n|+1}(u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm})}{Q_{n\alpha}^{\pm}} H_{n\alpha}^{1/2}(t) (\beta_{\alpha} \cos \psi \pm \mathfrak{K}_n t) \right] \hat{e}_2 \\ & + u_{\parallel} J_{|n|}(u_{\perp} Q_{n\alpha}^{\pm}) H_{n\alpha}^{1/2}(t) \hat{e}_3. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Desta forma escreve-se $\vec{\mathcal{I}}_n$ em termos da integral em u , onde a forma explícita (III.19) foi introduzida,

$$\vec{\mathcal{I}}_n = \int_0^\infty dt e^{-inY_\alpha(x_1)t} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{(Q_{n\alpha}^+ Q_{n\alpha}^-)^{|n|}} \vec{\mathcal{I}}_u \quad (\text{IV.4.a})$$

$$\vec{\mathcal{I}}_u = \int \frac{d^3u}{u_\perp} \mathcal{L}f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_\parallel) \exp \left[i \left(\gamma - N_\parallel u_\parallel - N_B \frac{N_\perp u_\perp^2}{2Y_\alpha} \sin \psi \right) t \right] \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^- \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^+, \quad (\text{IV.4.b})$$

sendo $Y_\alpha(x_1) = Y_\alpha(1 + k_B x_1)$.

Substituindo em (IV.4.b) a função distribuição (IV.1) e as suas derivadas (IV.2), pode-se realizar facilmente as integrações em u . Definindo então os vetores auxiliares

$$\zeta^\pm(t) = \pm n G_{n\alpha}^\pm(t) \hat{e}_1 + i |n| G_{n\alpha}^\pm(t) \hat{e}_2 \quad (\text{IV.5.a})$$

$$\vartheta^\pm(t) = \pm i H_{n\alpha}^{1/2}(t) [\beta_\alpha \sin \psi \hat{e}_1 - (\beta_\alpha \cos \psi \pm \mathfrak{R}_n t) \hat{e}_2], \quad (\text{IV.5.b})$$

pode-se calcular mais de um elemento de $\vec{\mathcal{I}}_u$ simultaneamente, conforme se verá nas subseções a seguir.

A partir deste ponto é conveniente escolher o regime de velocidades a ser utilizado. Quando se investiga a dispersão de ondas cujas frequências são da ordem da frequência de ciclotron iônica, comumente faz-se a aproximação não relativística. Já para a frequência de ciclotron eletrônica, a manutenção de efeitos relativísticos é essencial para se discutir corretamente a absorção de ondas eletromagnéticas [10, 110]. Nesta tese serão abordados os regimes não relativístico e fracamente relativístico. O regime completamente relativístico para o tipo de sistema físico aqui abordado ainda não foi analisado.

IV.1.1 Aproximação Fracamente Relativística

Nesta subseção será feita a aproximação de plasma fracamente relativístico, isto é, será suposto que a temperatura T_α é suficientemente baixa para que se possa aproximar o fator de Lorentz por uma expansão até a segunda ordem

$$\gamma \approx 1 + u^2/2 = 1 + u_\perp^2/2 + u_\parallel^2/2,$$

sendo desprezados todos os termos proporcionais ou superiores a u^3 . Usualmente considera-se o plasma fracamente relativístico quando $T_\alpha \lesssim 10$ keV. A expansão realizada no fator γ afeta aqui somente a quantidade $D_{n\alpha}$,

$$D_{n\alpha} \approx \left(1 + \frac{u_\perp^2}{2} + \frac{u_\parallel^2}{2} \right) - N_\parallel u_\parallel - n Y_\alpha (1 + k_B x_1) - N_B \frac{N_\perp u_\perp^2}{2Y_\alpha} \sin \psi, \quad (\text{IV.6})$$

ficando os demais ingredientes de (III.25) inalterados. Assim, introduzindo a quantidade (IV.6) em (IV.4.a,b) e rearranjando os termos, pode-se escrever

$$\vec{\mathcal{I}}_n = \int_0^\infty dt e^{i[1-nY_\alpha(x_1)]t} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{|n|-1}}{(Q_{n\alpha}^+ Q_{n\alpha}^-)^{|n|}} \vec{\mathcal{I}}_u \quad (\text{IV.7.a})$$

$$\vec{\mathcal{I}}_u = \int \frac{d^3u}{u_\perp} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(u_\perp^2, u_\parallel) e^{i(u_\parallel^2 - 2N_\parallel u_\parallel)t/2} e^{i\sigma_\alpha u_\perp^2 t/2} \Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+, \quad (\text{IV.7.b})$$

sendo $\sigma_\alpha = 1 - N_B N_\perp \sin \psi / Y_\alpha$. Introduzindo em (IV.7.b) as formas explícitas de (IV.1, IV.2 e IV.3) e rearranjando os termos de acordo com a definição dos vetores auxiliares (IV.5.a,b), calcula-se mais de um componente de $\vec{\mathcal{I}}_u$ simultaneamente. Por exemplo, para os componentes ($i, j = 1, 2$), a função $(\mathcal{I}_u)_{ij}$ fica escrita:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_u)_{ij} = & -2\pi\mu_\alpha \left(\frac{\mu_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{I}_\parallel^{(0)} \left[\zeta_i^- \zeta_j^+ \int_0^\infty du_\perp u_\perp e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) \right. \\ & + \frac{\vartheta_i^- \vartheta_j^+}{Q_{n\alpha}^- Q_{n\alpha}^+} \int_0^\infty du_\perp u_\perp^3 e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) \\ & + \zeta_i^- \frac{\vartheta_j^+}{Q_{n\alpha}^+} \int_0^\infty du_\perp u_\perp^2 e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) \\ & \left. + \frac{\vartheta_i^-}{Q_{n\alpha}^-} \zeta_j^+ \int_0^\infty du_\perp u_\perp^2 e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) \right], \end{aligned}$$

onde $\lambda_\alpha = \mu_\alpha - i\sigma_\alpha t$ e onde foi definida a seguinte integral, a qual pode ser facilmente encontrada nas tabelas usuais [45],

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\parallel^{(p)} \equiv & \int_{-\infty}^\infty du_\parallel u_\parallel^p e^{-\mu_\alpha u_\parallel^2/2} e^{i(u_\parallel^2 - 2N_\parallel u_\parallel)t/2} = \\ & \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-N_\parallel^2 t^2/2(\mu_\alpha - it)} \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} [1 + (-)^r] (r-1)!! \left(\frac{-iN_\parallel t}{\mu_\alpha - it}\right)^{p-r} (\mu_\alpha - it)^{-(r+1)/2}, \quad (\text{IV.8}) \end{aligned}$$

onde se define $(-1)!! = 1$. Define-se agora as seguintes integrais em u_\perp ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{11} \equiv & \int_0^\infty du_\perp u_\perp e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) = \\ & \frac{e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2)/\lambda_\alpha}}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \quad (\text{IV.9.a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12}^\pm \equiv & \int_0^\infty du_\perp u_\perp^2 e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|}(u_\perp Q_{n\alpha}^\mp) J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^\pm) = \\ & \frac{e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2)/\lambda_\alpha}}{(\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t)^2} \left[Q_{n\alpha}^\pm I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) - Q_{n\alpha}^\mp I_{|n|+1} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right] \quad (\text{IV.9.b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{13} \equiv & \int_0^\infty du_\perp u_\perp^3 e^{-\lambda_\alpha u_\perp^2/2} J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^+) J_{|n|+1}(u_\perp Q_{n\alpha}^-) = \\ & 2 \frac{e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2)/\lambda_\alpha}}{(\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t)^2} \left[\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right. \\ & \left. - \left(|n| + \frac{\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) I_{|n|+1} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right], \quad (\text{IV.9.c}) \end{aligned}$$

onde $I_n(z)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo [2] e

$$R_{n\alpha}(t) = Q_{n\alpha}^+ Q_{n\alpha}^- = \sqrt{\beta_\alpha^4 - 2\beta_\alpha^2 \cos 2\psi \mathfrak{K}_n^2 t^2 + \mathfrak{K}_n^4 t^4}.$$

Utilizando as definições (IV.9.a-c), a função $(\mathcal{I}_u)_{ij}$, $(i, j = 1, 2)$, fica escrita

$$(\mathcal{I}_u)_{ij}(t) = -2\pi\mu_\alpha \left(\frac{\mu_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{I}_\parallel^{(0)} \left(\zeta_i^- \zeta_j^+ \mathcal{I}_{\perp 11} + \frac{\vartheta_i^- \vartheta_j^+}{R_{n\alpha}(t)} \mathcal{I}_{\perp 13} + \zeta_i^- \frac{\vartheta_j^+}{Q_{n\alpha}^+} \mathcal{I}_{\perp 12} + \frac{\vartheta_i^-}{Q_{n\alpha}^-} \zeta_j^+ \mathcal{I}_{\perp 12} \right),$$

a qual, após inseridas as expressões explícitas de (IV.8) e (IV.9), resulta igual a

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_u)_{ij}(t) = & -\mu_\alpha^{\frac{5}{2}} \frac{e^{-N_\parallel^2 t^2 / 2(\mu_\alpha - it)} e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2) / \lambda_\alpha}}{(\mu_\alpha - it)^{\frac{3}{2}} \mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \\ & \times \left\{ \left(\zeta_i^- \zeta_j^+ + \frac{2\vartheta_i^- \vartheta_j^+}{(\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t)^2} + \frac{\zeta_i^- \vartheta_j^+ + \vartheta_i^- \zeta_j^+}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right. \\ & - \left[\frac{2\vartheta_i^- \vartheta_j^+}{(\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t) R_{n\alpha}} \left(|n| + \frac{\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) + \frac{\zeta_i^- \vartheta_j^+}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \frac{Q_{n\alpha}^-}{Q_{n\alpha}^+} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\vartheta_i^- \zeta_j^+}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \frac{Q_{n\alpha}^+}{Q_{n\alpha}^-} \right] I_{|n|+1} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Os elementos $(\mathcal{I}_u)_{i3}$ e $(\mathcal{I}_u)_{3i}$, $(i = 1, 2)$, também podem ser calculados simultaneamente. De (IV.7.b), (IV.8) e (IV.9) obtém-se

$$(\mathcal{I}_u)_{(i3)} = -2\pi\mu_\alpha \left(\frac{\mu_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} H_{n\alpha}^{\frac{1}{2}}(t) \mathcal{I}_\parallel^{(1)} \left(\zeta_i^\mp \mathcal{I}_{\perp 11} + \frac{\vartheta_i^\mp}{Q_{n\alpha}^\mp} \mathcal{I}_{\perp 12} \right),$$

sendo que no lado direito da expressão acima o sinal superior (inferior) se refere ao componente $(\mathcal{I}_u)_{i3}$ [$(\mathcal{I}_u)_{3i}$]. Obtém-se então

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_u)_{(i3)}(t) = & i\mu_\alpha^{\frac{5}{2}} N_\parallel t \frac{e^{-N_\parallel^2 t^2 / 2(\mu_\alpha - it)} e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2) / \lambda_\alpha}}{(\mu_\alpha - it)^{\frac{3}{2}} \mu_\alpha - it} \\ & \times H_{n\alpha}^{\frac{1}{2}}(t) \left[\left(\zeta_i^\mp + \frac{\vartheta_i^\mp}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) - \frac{\vartheta_i^\mp (Q_{n\alpha}^\pm / Q_{n\alpha}^\mp)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} I_{|n|+1} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

E, por fim, resta o elemento $(\mathcal{I}_u)_{33}$, o qual fica simplesmente

$$(\mathcal{I}_u)_{33}(t) = -\mu_\alpha^{\frac{5}{2}} H_{n\alpha}(t) \left(1 - \frac{N_\parallel^2 t^2}{\mu_\alpha - it} \right) \frac{e^{-N_\parallel^2 t^2 / 2(\mu_\alpha - it)} e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2) / \lambda_\alpha}}{(\mu_\alpha - it)^{\frac{3}{2}} \mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}(t)}{\mu_\alpha - i\sigma_\alpha t} \right). \quad (\text{IV.12})$$

Nas expressões (IV.10) e (IV.11) ocorrem diversos produtos das quantidades $\zeta^\pm(t)$, $\vartheta^\pm(t)$ e $Q_{n\alpha}^\pm(t)$. Realizando diversas manipulações algébricas, estes produtos podem ser escritos assim:

$$\begin{aligned} \zeta_1^- \zeta_1^+ &= n^2 \\ \vartheta_1^- \vartheta_2^+ &= H_{n\alpha}(t) \beta_\alpha^2 \sin^2 \psi \\ \zeta_2^- \zeta_2^+ &= n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_2^- \vartheta_2^+ &= H_{n\alpha}(t)(\beta_\alpha^2 \cos^2 \psi - \mathfrak{R}_n^2 t^2) \\
 \zeta_{(2)}^- \zeta_{(2)}^+ &= \pm i s_n n^2 \\
 \vartheta_{(2)}^- \vartheta_{(2)}^+ &= -H_{n\alpha}(t) \beta_\alpha \sin \psi (\beta_\alpha \cos \psi \pm \mathfrak{R}_n t) \\
 \zeta_1^- \vartheta_1^+ + \vartheta_1^- \zeta_1^+ &= -2|n| \beta_\alpha \sin \psi (\beta_\alpha \sin \psi - i s_n \mathfrak{R}_n t) \\
 \zeta_2^- \vartheta_2^+ + \vartheta_2^- \zeta_2^+ &= -2|n| (\beta_\alpha^2 \cos^2 \psi + i s_n \beta_\alpha \sin \psi \mathfrak{R}_n t + \mathfrak{R}_n^2 t^2) \\
 \zeta_{(2)}^- \vartheta_{(2)}^+ + \vartheta_{(2)}^- \zeta_{(2)}^+ &= \mp i n [\beta_\alpha^2 + \mathfrak{R}_n^2 t^2 \pm 2\beta_\alpha \cos \psi (\mathfrak{R}_n t + i s_n \beta_\alpha \sin \psi)] \\
 \zeta_1^- \vartheta_1^+ (Q_{n\alpha}^-)^2 + \vartheta_1^- \zeta_1^+ (Q_{n\alpha}^+)^2 &= -2|n| \beta_\alpha \sin \psi H_{n\alpha}(t) (\beta_\alpha \sin \psi + i s_n \mathfrak{R}_n t) \\
 \zeta_2^- \vartheta_2^+ (Q_{n\alpha}^-)^2 + \vartheta_2^- \zeta_2^+ (Q_{n\alpha}^+)^2 &= -2|n| H_{n\alpha}(t) (\beta_\alpha^2 \cos^2 \psi + i s_n \beta_\alpha \sin \psi \mathfrak{R}_n t - \mathfrak{R}_n^2 t^2) \\
 \zeta_{(2)}^- \vartheta_{(2)}^+ (Q_{n\alpha}^-)^2 + \vartheta_{(2)}^- \zeta_{(2)}^+ (Q_{n\alpha}^+)^2 &= \mp i n H_{n\alpha}(t) [\beta_\alpha^2 - \mathfrak{R}_n^2 t^2 \pm i 2s_n \beta_\alpha \sin \psi (\beta_\alpha \cos \psi \pm \mathfrak{R}_n t)] \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \zeta_1^\mp &= \pm n (\mathfrak{R}_n t \pm \beta_\alpha \cos \psi + i s_n \beta_\alpha \sin \psi) \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \vartheta_1^\mp &= \mp i H_{n\alpha}(t) \beta_\alpha \sin \psi \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \vartheta_1^\mp (Q_{n\alpha}^\pm)^2 &= \mp H_{n\alpha}(t) \beta_\alpha \sin \psi (\beta_\alpha^2 \pm 2\beta_\alpha \cos \psi \mathfrak{R}_n t + \mathfrak{R}_n^2 t^2) \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \zeta_2^\mp &= -i |n| (\mathfrak{R}_n t \pm \beta_\alpha \cos \psi + i s_n \beta_\alpha \sin \psi) \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \vartheta_2^\mp &= \pm i H_{n\alpha}(t) (\beta_\alpha \cos \psi \mp \mathfrak{R}_n t) \\
 H_{n\alpha}^{1/2}(t) \vartheta_2^\mp (Q_{n\alpha}^\pm)^2 &= \pm i H_{n\alpha}(t) (\beta_\alpha \cos \psi \mp \mathfrak{R}_n t) (\beta_\alpha^2 \pm 2\beta_\alpha \cos \psi \mathfrak{R}_n t + \mathfrak{R}_n^2 t^2)
 \end{aligned}$$

Inserindo as expressões acima nos componentes de \vec{T}_u dados por (IV.10, IV.11, IV.12), e realizando as simplificações possíveis, obtém-se finalmente os componentes do tensor dielétrico efetivo para um plasma maxwelliano através da fórmula

$$\vec{\epsilon}(x_1, \mathbf{k}, \omega) = \vec{1} - i \sum_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dt e^{i[1-nY_{\alpha}(x_1)]t} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[R_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \vec{T}_u .$$

Antes, porém, de se apresentar em detalhes a forma para $\vec{\epsilon}(x_1, \mathbf{k}, \omega)$, a variável da integração em t será novamente transformada através de

$$t \rightarrow \mu_{\alpha} t' .$$

Redefinindo então as quantidades

$$\begin{aligned}
 H_{n\alpha}(t) &\rightarrow \mu_{\alpha} (\nu_{\alpha}^2 - \chi_{n\alpha}^2 t'^2 - i 2s_n \nu_{\alpha} \sin \psi \chi_{n\alpha} t') \equiv \mu_{\alpha} H_{n\alpha}(t') \\
 R_{n\alpha}(t) &\rightarrow \mu_{\alpha} \sqrt{\nu_{\alpha}^4 - 2\nu_{\alpha}^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha}^2 t'^2 + \chi_{n\alpha}^4 t'^4} \equiv \mu_{\alpha} S_{n\alpha}(t') ,
 \end{aligned}$$

sendo $\nu_{\alpha} = \beta_{\alpha} / \mu_{\alpha}^{1/2}$, $\chi_{n\alpha} = \mu_{\alpha}^{1/2} \mathfrak{R}_n$ e $\delta_{n\alpha} = 1 - nY_{\alpha}(1 + k_B x_1)$, obtém-se finalmente o tensor dielétrico efetivo para uma distribuição Maxwelliana

$$\epsilon_{11} = 1 + i \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{i\mu_{\alpha} \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_{\alpha} N_{\parallel}^2 t'^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{1/2} (1-i\sigma_{\alpha} t)} e^{-(\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t'^2) / (1-i\sigma_{\alpha} t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}}$$

$$\times \left\{ \left[n^2 + \frac{2\nu_\alpha^2 \sin^2 \psi}{(1 - i\sigma_\alpha t)^2} H_{n\alpha}(t) - 2|n| \frac{\nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha \sin \psi - i s_n \chi_{n\alpha} t) \right] I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) - 2 \frac{\nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} \frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \left[\frac{\nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) - i n \chi_{n\alpha} t \right] I_{|n|+1} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \right\} \quad (\text{IV.13.a})$$

$$\varepsilon_{22} = 1 + i \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{3/2} (1-i\sigma_\alpha t)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-i\sigma_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \times \left\{ \left[n^2 + \frac{2H_{n\alpha}(t)}{(1-i\sigma_\alpha t)^2} (\nu_\alpha^2 \cos^2 \psi - \chi_{n\alpha}^2 t^2) - \frac{2|n|}{1-i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha^2 \cos^2 \psi + \chi_{n\alpha}^2 t^2 + i s_n \nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} t) \right] I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) - 2 \frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \left[\frac{(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)}{(1-i\sigma_\alpha t)^2} (\nu_\alpha^2 \cos^2 \psi - \chi_{n\alpha}^2 t^2) - \frac{i n \nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} \chi_{n\alpha} t \right] I_{|n|+1} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \right\} \quad (\text{IV.13.b})$$

$$\varepsilon_{33} = 1 + i \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{3/2} (1-i\sigma_\alpha t)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-i\sigma_\alpha t)} \times \left(1 - \frac{\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2}{1-it} \right) \left[\frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \right]^{|n|} I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \quad (\text{IV.13.c})$$

$$\varepsilon_{(21)}^{(12)} = i \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{3/2} (1-i\sigma_\alpha t)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-i\sigma_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \times \left\{ \frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \left[\frac{2\nu_\alpha \sin \psi}{(1-i\sigma_\alpha t)^2} (\nu_\alpha \cos \psi \pm \chi_{n\alpha} t) (\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) \pm i n \frac{(\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right] I_{|n|+1} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \pm \left[i s_n n^2 \mp \frac{2H_{n\alpha}(t)}{(1-i\sigma_\alpha t)^2} \nu_\alpha \sin \psi (\nu_\alpha \cos \psi \pm \chi_{n\alpha} t) - \frac{i n}{1 - i\sigma_\alpha t} [\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2 \pm i 2 s_n \nu_\alpha \cos \psi (\nu_\alpha \sin \psi - i s_n \chi_{n\alpha} t)] \right] I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \right\} \quad (\text{IV.13.d})$$

$$\varepsilon_{(31)}^{(13)} = \mp i N_\parallel \sum_\alpha \mu_\alpha^{3/2} X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{(it) e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{3/2} (1-i\sigma_\alpha t)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-i\sigma_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \times \left\{ \left[n(\chi_{n\alpha} t \pm \nu_\alpha e^{\pm i s_n \psi}) - i H_{n\alpha}(t) \frac{\nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} \right] I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) + i \frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \frac{\nu_\alpha \sin \psi}{1 - i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha^2 \pm 2\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} t + \chi_{n\alpha}^2 t^2) I_{|n|+1} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \right\} \quad (\text{IV.13.e})$$

$$\varepsilon_{(32)}^{(23)} = -N_\parallel \sum_\alpha \mu_\alpha^{3/2} X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{(it) e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t} e^{-\mu_\alpha N_\parallel^2 t^2 / 2(1-it)}}{(1-it)^{3/2} (1-i\sigma_\alpha t)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-i\sigma_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \times \left\{ \left[|n|(\chi_{n\alpha} t \pm \nu_\alpha e^{\pm i s_n \psi}) \mp \frac{H_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha \cos \psi \mp \chi_{n\alpha} t) \right] I_{|n|} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \pm \frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \frac{(\nu_\alpha \cos \psi \mp \chi_{n\alpha} t)}{1 - i\sigma_\alpha t} (\nu_\alpha^2 \pm 2\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} t + \chi_{n\alpha}^2 t^2) I_{|n|+1} \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \right\}, \quad (\text{IV.13.f})$$

onde abandonou-se o apóstrofo (') na variável t' . As quantidades envolvidas em (IV.13.a-f) são novamente explicitadas:

$$S_{n\alpha}(t) = \sqrt{\nu_\alpha^4 - 2\nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha}^2 t^2 + \chi_{n\alpha}^4 t^4}$$

$$\begin{aligned}
 H_{n\alpha}(t) &= \nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2 - i2s_n \nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} t \\
 \nu_\alpha &= \frac{N_\perp}{\mu_\alpha^{1/2} Y_\alpha} ; \chi_{n\alpha} = \frac{n}{2} \mu_\alpha^{1/2} N_B ; \sigma_\alpha = 1 - N_B \frac{N_\perp}{Y_\alpha} \sin \psi \\
 \delta_{n\alpha} &= 1 - n Y_\alpha (1 + k_B x_1) ; \mu_\alpha = \frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha} .
 \end{aligned}$$

As expressões (IV.13.a-f) ainda não são as mais adequadas por dois motivos. Primeiramente, as integrações em t são evidentemente complexas e a determinação de suas propriedades, tais como a região de analiticidade e a sua continuação analítica para outras regiões do plano complexo, não é trivial. O outro motivo consiste no seu uso prático, pois nesta forma os componentes do tensor efetivo deveriam ser calculados numericamente, através de alguma rotina de integração, o que envolveria o estudo do intervalo de convergência das integrações e iria fatalmente consumir um tempo de computação muito longo. Para minimizar ambos os problemas, busca-se exprimir os componentes do tensor efetivo em termos de funções de dispersão de plasma usuais, cujas propriedades analíticas já são bem conhecidas e para as quais pode-se desenvolver rotinas computacionais eficientes.

Com o propósito acima delineado, define-se então a aqui chamada *função de dispersão de plasma inhomogêneo* $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha})$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) &= -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1-i\sigma_\alpha t)} \\
 &\quad \times \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1-i\sigma_\alpha t} \right) \quad \text{(IV.14)}
 \end{aligned}$$

onde $z = \mu_\alpha \delta_{n\alpha}$ e $a = \mu_\alpha N_\parallel^2/2$. A forma de (IV.14) é suficientemente geral para que se possa escrever todos os componentes do tensor efetivo exclusivamente em termos de $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, resultando

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{1}} - \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n=-\infty}^\infty \vec{T}_{n\alpha} , \quad \text{(IV.15)}$$

onde o tensor $\vec{T}_{n\alpha}$ possui os seguintes componentes:

$$\begin{aligned}
 (T_{n\alpha})_{11} &= n^2 \mathcal{G}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} + 2n\nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{A}_{1,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{A}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \\
 &\quad + 2\nu_\alpha^2 \sin^2 \psi \left(\mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} \right. \\
 &\quad \left. - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} \right) \quad \text{(IV.16.a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_{n\alpha})_{22} &= n^2 \mathcal{G}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} - 2n\nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{A}_{1,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{A}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \\
 &\quad + 2\nu_\alpha^2 \cos^2 \psi \left(\mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} \right. \\
 &\quad \left. - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} \right) \\
 &\quad + 2\chi_{n\alpha}^2 \left(\mathcal{G}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|} + |n| \mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} \right. \\
 &\quad \left. - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} \right) \quad \text{(IV.16.b)}
 \end{aligned}$$

$$(T_{n\alpha})_{33} = \mathcal{G}_{0,\gamma_2,1,|n|,|n|} + \mu_\alpha N_{\parallel}^2 \mathcal{G}_{2,\gamma_2,1,|n|,|n|} \quad (\text{IV.16.c})$$

$$\begin{aligned} (T_{n\alpha})_{(21)}^{(12)} = & \pm i 2\nu_\alpha \text{sen } \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{G}_{1,\gamma_2,3,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} \right) \\ & \pm i n \left[|n| \mathcal{G}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} - \nu_\alpha^2 \left(\mathcal{G}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{G}_{0,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \right. \\ & \left. + \chi_{n\alpha}^2 \left(\mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \right] - 2n\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} \\ & - \nu_\alpha^2 \text{sen } 2\psi \left(\mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|} \right. \\ & \left. - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.16.d})$$

$$\begin{aligned} (T_{n\alpha})_{(31)}^{(13)} = & \pm i N_{\parallel} \mu_\alpha^{1/2} \left[n \left(\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} \pm i \nu_\alpha e^{\pm i s n \psi} \mathcal{G}_{1,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} \right) \right. \\ & \left. + \nu_\alpha \text{sen } \psi \left(\mathcal{G}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \right. \\ & \left. \pm i 2\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.16.e})$$

$$\begin{aligned} (T_{n\alpha})_{(32)}^{(23)} = & N_{\parallel} \mu_\alpha^{1/2} \left[|n| \left(\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} \pm i \nu_\alpha e^{\pm i s n \psi} \mathcal{G}_{1,\gamma_2,1,|n|-1,|n|} \right) \right. \\ & \left. + \nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{G}_{2,\gamma_2,2,|n|,|n|} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \right. \\ & \left. \mp i \nu_\alpha \cos \psi \left(\mathcal{G}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} - \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,\gamma_2,2,|n|,|n|+1} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{IV.16.f})$$

As expressões em (IV.15, IV.16.a-f) são válidas para ondas que se propagam em direções arbitrárias. Estes componentes devem ser inseridos na relação de dispersão (I.10), a qual também é dependente da direção de propagação da onda, inclusive no ângulo ψ , ao contrário do caso homogêneo, onde o sistema possui simetria azimutal e a relação de dispersão, por consequência, independe de ψ .

Algumas propriedades da função (IV.14) serão abordadas na seção IV.2.

IV.1.2 Aproximação Não Relativística

Esta aproximação consiste em tomar

$$\gamma = 1 ,$$

e por conseguinte o fator $D_{n\alpha}$ em (III.25) fica simplesmente

$$D_{n\alpha} = 1 - N_{\parallel} u_{\parallel} - n Y_\alpha(x_1) - N_B \frac{N_{\perp} u_{\perp}^2}{2 Y_\alpha} \text{sen } \psi .$$

Ao se calcular as integrações em $\vec{\mathcal{I}}_u$ (IV.4.b), estas ficam, ao invés de (IV.7.b), sendo dadas por

$$\vec{\mathcal{I}}_u(t) = \int \frac{d^3 u}{u_{\perp}} \mathcal{L} f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) e^{-N_{\parallel} u_{\parallel} t/2} e^{-i \eta_\alpha u_{\perp}^2 t/2} \Pi_{n\alpha}^- \Pi_{n\alpha}^+ ,$$

sendo $\eta_\alpha \equiv N_B N_{\perp} \text{sen } \psi / Y_\alpha = 1 - \sigma_\alpha$. É fácil perceber que os componentes de $\vec{\varepsilon}(x_1, \mathbf{k}, \omega)$ podem ser escritos da mesma maneira que em (IV.16.a-f), mas em termos da função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$

dada por

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \eta_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1+i\eta_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1+i\eta_\alpha t} \right). \quad (\text{IV.17})$$

A função (IV.17) pode ser obtida a partir de (IV.14) fazendo

$$it \rightarrow 0; \quad i\sigma_\alpha \rightarrow -i\eta_\alpha.$$

Algumas propriedades da função (IV.17) também serão abordadas na seção IV.2.

IV.2 A Função de Dispersão de Plasma Inomogêneo

Nesta seção algumas propriedades das funções de dispersão de plasma inomogêneo (IV.14) e (IV.17) serão abordadas. A ênfase será colocada na representação das funções $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ e $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$ em termos das funções de Shkarofsky, para o caso fracamente relativístico, e de Fried & Conte, para o caso não relativístico. Este procedimento, como já foi mencionado, é vantajoso principalmente porque habilita à determinação das propriedades analíticas das funções inomogêneas a partir de funções que já possuem tais propriedades, a continuação analítica, por exemplo, bem determinadas. À exemplo da seção anterior, nesta seção os regimes fracamente relativístico e não relativístico serão também tratados separadamente.

IV.2.1 Aproximação Fracamente Relativística

Nesta aproximação a dispersão de ondas em plasmas imersos em campos inomogêneos é regida pela função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha})$ dada por (IV.14) e que é aqui repetida, juntamente com uma forma equivalente

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1-i\sigma_\alpha t)} \times \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1-i\sigma_\alpha t} \right) \quad (\text{IV.18.a})$$

$$= -ie^{-a} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i(z-b)t}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} e^{a/(1-it)} e^{c/(1-i\sigma_\alpha t)} \times \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1-i\sigma_\alpha t} \right), \quad (\text{IV.18.b})$$

sendo $z = \mu_\alpha \delta_{n\alpha}$, $a = \mu_\alpha N_{\parallel}^2/2$, $a = a + \chi_{n\alpha}^2/\sigma_\alpha^2$, $b = a + \chi_{n\alpha}^2/\sigma_\alpha$ e $c = -(\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2/\sigma_\alpha^2)$. Será visto posteriormente na seção IV.3 e no apêndice A que o fator

$$z - b = \mu_\alpha \left[1 - nY_\alpha(x_1) - \frac{N_{\parallel}^2}{2} - \frac{n^2 N_B^2}{4\sigma_\alpha} \right]$$

em (IV.18.b) está intimamente ligado à condição de ressonância (A.1) e à parte anti-Hermitiana do tensor dielétrico efetivo.

A função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ será agora estudada em diversos casos especiais.

Limite de Plasma Homogêneo

Quando $k_B \rightarrow 0$, a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ deve se reduzir continuamente às funções de dispersão de plasma usuais. Neste limite, a expressão (IV.18.a) se reduz a

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = -i\nu_\alpha^{2(m-l)} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^{q+p}} e^{-\nu_\alpha^2/(1-it)} I_l \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1-it} \right) \quad (\text{IV.19.a})$$

$$= \nu_\alpha^{2(m-l)} \mathcal{F}_{q+p,r}(z, a, \nu_\alpha^2, l), \quad (\text{IV.19.b})$$

onde

$$\mathcal{H}_{l,m}(z, a, \lambda, j) = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^m e^{izt}}{(1-it)^l} e^{-at^2/(1-it)} e^{-\lambda/(1-it)} I_j \left(\frac{\lambda}{1-it} \right)$$

é a função de dispersão de plasma¹ definida na fórmula (62) de *Robinson* (1986) [95], válida para ondas com valores arbitrários do componente perpendicular do vetor de onda (k_\perp). Esta função é necessária para analisar a propagação e a absorção de ondas extraordinárias em frequências próximas a ressonâncias, tais como as ondas de Bernstein. O numerador do argumento da função de Bessel em (IV.19.a) foi obtido da raiz quadrada que define $S_{n\alpha}(t)$ no limite $k_B \rightarrow 0$. Neste limite, $S_{n\alpha}(t) \rightarrow \sqrt{\nu_\alpha^4}$, e a radiciação foi realizada de forma a se obter o limite idêntico ao argumento que seria obtido em um tratamento puramente homogêneo.

No limite fracamente relativístico, onde $\mu_\alpha \gg 1$ ($\gtrsim 100$), o estudo da propagação de ondas no modo ordinário ($|N_\perp| < 1$) ou no modo extraordinário, em frequências suficientemente distantes das ressonâncias, possibilita fazer a aproximação

$$|\nu_\alpha^2| \ll 1 \Rightarrow e^{-\nu_\alpha^2/(1-it)} I_l \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1-it} \right) \approx 1^\ddagger,$$

sendo que neste caso a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ dada em (IV.19) pode ser escrita em termos da função de Shkarofsky

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \nu_\alpha^{2(m-l)} \mathcal{F}_{q+p,r}(z, a),$$

onde

$$\mathcal{F}_{q,r}(z, a) = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt}}{(1-it)^q} e^{-at^2/(1-it)} \quad (\text{IV.20.a})$$

$$= -ie^{-a} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i(z-a)t}}{(1-it)^q} e^{a/(1-it)}. \quad (\text{IV.20.b})$$

¹Doravante se usará a abreviação "PDF".

[‡]A expansão completa desta função será apresentada em (IV.33).

Os componentes do tensor dielétrico, escritos em termos da PDF inhomogênea nos limites $k_B \rightarrow 0$ e $|\nu_\alpha^2| \ll 1$, isto é, em termos da função de Shkarofsky (IV.20), são idênticos aos resultados obtidos por diversos trabalhos existentes na literatura [3, 10, 94, 100, 109], entre outros.

A função $\mathcal{F}_q(z, a) \equiv \mathcal{F}_{q,0}(z, a)$ foi primeiramente obtida por *Shkarofsky* (1966) [100], e corresponde à PDF que inclui efeitos relativísticos na ordem mais baixa possível. Neste trabalho a aproximação realizada para o regime fracamente relativístico foi distinta da feita aqui. O intuito então era derivar uma aproximação ao tensor dielétrico obtido por *B. A. Trubnikov* em 1959 para uma distribuição Maxwelliana no regime totalmente relativístico². Ao tomar o limite assintótico das expressões de *Trubnikov* para $\mu_\alpha \gg 1$, *Shkarofsky* obteve, ao invés de (IV.20), a função

$$\mathcal{F}_q(\nu_\alpha n Y_\alpha, N_\parallel) = -i \int_0^\infty \frac{\exp\{\mu_\alpha - \mu_\alpha[(1-it)^2 + N_\parallel^2 t^2]^{1/2} - i\mu_\alpha n Y_\alpha t\}}{[(1-it)^2 + N_\parallel^2 t^2]^{7/2}} dt. \quad (IV.21)$$

Shkarofsky mostrou então que, realizando uma expansão de (IV.21) para as quantidades $N_\parallel^2 \ll \mu_\alpha^{-1}$ e $|\mu_\alpha N_\parallel(2\delta_{n\alpha} - N_\parallel^2)| \ll 1$, esta função recai na forma aqui utilizada em (IV.20). Isto significa que, em primeiro lugar, \mathcal{F}_q corresponde a uma aproximação em ordem mais alta do que \mathcal{F}_q e que, em segundo lugar, existe uma aparente contradição entre a derivação de *Shkarofsky* e a adotada nesta tese, válida para N_\parallel arbitrário. Contudo, *Maroli & Petrillo* (1981) [72], ao obterem \mathcal{F}_q a partir de \mathcal{F}_q através do método do ponto de sela, sem fazer restrições a N_\parallel , mostraram que tal contradição na verdade não existe.

Propagação Coplanar à Inhomogeneidade ($\psi = 0$)

Para o caso $\psi = 0$, a função $\mathcal{S}_{r,q,p,m,l}$ (IV.18) assume a seguinte forma

$$\mathcal{S}_{r,q,p,m,l} = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt}}{(1-it)^{q+p}} e^{-at^2/(1-it)} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1-it)} (\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2)^{m-l} I_l \left(\frac{\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1-it} \right),$$

onde novamente o critério para realizar a radiciação em $S_{n\alpha}(t)$ foi o limite de plasma homogêneo. Como o argumento da função de Bessel é dependente de t , e o seu valor absoluto cresce linearmente no limite $t \rightarrow \infty$, não é trivial realizar uma expansão de I_l em série de potências. Para que se possa escolher com segurança em que ponto se pode truncar a série, é necessário realizar uma análise cuidadosa acerca da convergência do integrando de $\mathcal{S}_{r,q,p,m,l}$. Neste ponto considerou-se mais vantajoso obter uma expressão formalmente exata para a PDF inhomogênea. Com este intuito, introduz-se aqui a seguinte representação integral para

²Para uma discussão atual e mais acessível da derivação de *Trubnikov*, ver *Swanson* (1989) [103], seção 4.7, ou *Bornatici et alli* (1983) [10].

a função de Bessel modificada (fórmula 9.6.18 de Abramowitz & Stegun, 1970 [2])

$$I_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!\pi} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{n-1/2} e^{\pm zy} \quad (\text{IV.22.a})$$

$$= \frac{z^n}{(2n-1)!!\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^{2n} \theta e^{\pm z \cos \theta} . \quad (\text{IV.22.b})$$

Obtém-se então para $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \frac{-i}{(2l-1)!!\pi} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} e^{-[a+\chi_{n\alpha}^2(1+y)]} \\ \times \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i[z-a-\chi_{n\alpha}^2(1+y)]t}}{(1-it)^{q+p+l}} e^{[a+\chi_{n\alpha}^2(1+y)-\nu_\alpha^2(1-y)]/(1-it)} (\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2)^m .$$

Expandindo o termo $(\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2)^m$ obtém-se

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \frac{-i}{(2l-1)!!\pi} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \nu_\alpha^{2(m-s)} \chi_{n\alpha}^{2s} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} e^{-\nu_\alpha^2(1-y)} \\ \times e^{-[a+\chi_{n\alpha}^2(1+y)-\nu_\alpha^2(1-y)]} \int_0^\infty dt \frac{(it)^{r+2s} e^{i[z-a-\chi_{n\alpha}^2(1+y)]t}}{(1-it)^{q+p+l}} e^{[a+\chi_{n\alpha}^2(1+y)-\nu_\alpha^2(1-y)]/(1-it)} .$$

Utilizando então (IV.18.b) pode-se identificar a função de Shkarofsky, resultando por fim

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{\chi_{n\alpha}^{2s} \nu_\alpha^{2(m-s)}}{\pi(2l-1)!!} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} e^{-\nu_\alpha^2(1-y)} \\ \times \mathcal{F}_{q+p+l, r+2s} \left(z - \nu_\alpha^2(1-y), a + \chi_{n\alpha}^2(1+y) - \nu_\alpha^2(1-y) \right), \quad (\text{IV.23})$$

a qual é a representação de $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ em termos da função de Shkarofsky, como se havia proposto.

Propagação no Plano Perpendicular à Inhomogeneidade ($\psi = \pi/2$)

Nesta direção a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ se reduz a

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1-i\sigma_\alpha t)} \frac{(\nu_\alpha - i s_n \chi_{n\alpha} t)^{2m}}{(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)^l} I_l \left(\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1-i\sigma_\alpha t} \right) .$$

Neste caso a função inhomogênea possui uma forma bem mais complicada que no caso $\psi = 0$.

Em primeiro lugar, será novamente utilizada a representação integral (IV.22.a) resultando

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \frac{-i}{(2l-1)!!\pi} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} \\ \times \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^{p+l}} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)(1+y)/(1-i\sigma_\alpha t)} (\nu_\alpha^2 - i s_n \chi_{n\alpha} t)^{2m}. \quad (\text{IV.24})$$

Agora a identificação de (IV.24) em termos de $\mathcal{F}_{q,r}$ não é nada trivial. Dada a seguinte identidade,

$$\frac{1}{1-i\sigma_\alpha t} = \frac{1}{1-it} \left(\frac{1}{\sigma_\alpha} + \frac{1-\sigma_\alpha^{-1}}{1-i\sigma_\alpha t} \right) ,$$

a terceira exponencial em (IV.24) fica escrita

$$\exp\left[-\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 - i\sigma_\alpha t}(1 + y)\right] = e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)(1+y)/\sigma_\alpha(1-it)} \exp\left[-\frac{(1 - \sigma_\alpha^{-1})(1 + y)(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)}{(1 - it)(1 - i\sigma_\alpha t)}\right].$$

Como o argumento da segunda exponencial na identidade acima permanece sempre finito, mesmo para $t \rightarrow \infty$, pode-se então expandir esta exponencial sem haver a necessidade de se examinar o intervalo efetivo em t onde a integração converge. Portanto,

$$\exp\left[-\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 - i\sigma_\alpha t}(1 + y)\right] = e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)(1+y)/\sigma_\alpha(1-it)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[(\sigma_\alpha^{-1} - 1) \frac{(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)(1 + y)}{(1 - it)(1 - i\sigma_\alpha t)} \right]^s. \quad (IV.25)$$

O raio de convergência desta expansão é infinito, mas o seu uso prático depende de uma convergência rápida, de forma que somente os primeiros termos necessitam ser mantidos. Esta convergência está vinculada ao termo

$$|1 - \sigma_\alpha^{-1}| = \left| \frac{N_B N_\perp}{Y_\alpha \sigma_\alpha} \right| < 1, \quad (IV.26)$$

e portanto é de se esperar que para ondas com frequências próximas a ressonâncias ($|N_\perp| \gg 1$) esta série tenha uma convergência lenta. Já para o quociente $1/(1 - i\sigma_\alpha t)^p$ pode-se fazer a expansão

$$\frac{1}{(1 - i\sigma_\alpha t)^p} = \frac{1}{\sigma_\alpha^p} \frac{1}{[(1 - it) - (1 - \sigma_\alpha^{-1})]^p} = \frac{1}{\sigma_\alpha^p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} \frac{(1 - \sigma_\alpha^{-1})^n}{(1 - it)^{p+n}}. \quad (IV.27)$$

Todavia, esta expansão está limitada pela condição (IV.26). Casos em que esta condição é violada não foram ainda considerados. Inserindo estas expansões em (IV.24) chega-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,t} = & \frac{-i}{(2l-1)!!\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^s}{s!} \binom{p+l+s+j-1}{j} \frac{(1 - \sigma_\alpha^{-1})^{s+j}}{\sigma_\alpha^{p+l+s}} \\ & \times \int_{-1}^1 dy (1 - y^2)^{l-1/2} (1 + y)^s e^{-\nu_\alpha^2(1+y)/\sigma_\alpha} e^{-\Phi_y} \\ & \times \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i(\Upsilon_y - \Phi_y)t}}{(1 - it)^{q+p+l+2s+j}} e^{\Phi_y/(1-it)} (\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)^s (\nu_\alpha - i s_n \chi_{n\alpha} t)^{2m}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_y &= a - (\nu_\alpha^2 - \chi_{n\alpha}^2)(1 + y)/\sigma_\alpha \\ \Upsilon_y &= z - \nu_\alpha^2(1 + y)/\sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Expandindo por fim as potências em s e $2m$ resulta a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,t}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = & \frac{1}{(2l-1)!!\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^s}{s!} \binom{p+l+s+j-1}{j} \frac{(1 - \sigma_\alpha^{-1})^{(s+j)}}{\sigma_\alpha^{(p+l+s)}} \\ & \times \sum_{k=0}^{2m} \sum_{h=0}^s \binom{2m}{k} \binom{s}{h} (-)^{(h+k)} \nu_\alpha^{2(m+s-h)-k} (s_n \chi_{n\alpha})^{2h+k} \\ & \times \int_{-1}^1 dy (1 - y^2)^{l-1/2} (1 + y)^s e^{-\nu_\alpha^2(1+y)/\sigma_\alpha} \mathcal{A}_{(q+p+l+2s+j),(r+k+2h)}(\Upsilon_y, \Phi_y). \quad (IV.28) \end{aligned}$$

Novamente foi possível exprimir a PDF inomogênea em termos da função de Shkarofsky. Porém, ao contrário do caso anterior, a forma obtida possui algumas restrições, além de ser visivelmente mais complicada por apresentar duas séries e duas expansões. Entretanto, como as duas séries possuem o mesmo fator de expansão $(1 - \sigma_\alpha^{-1})$, pode-se eliminar uma das séries através do reordenamento

$$\sum_{s,j=0}^{\infty} a_s b_j c_{sj} x^{s+j} = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^s a_j b_{s-j} c_{j(s-j)} \right] x^s. \quad (IV.29)$$

Desta forma, a expressão (IV.28) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = & \frac{1}{(2l-1)!!\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^s \frac{(-)^j}{j!} \binom{p+l+s-1}{s-j} \frac{(1-\sigma_\alpha^{-1})^s}{\sigma_\alpha^{p+l+j}} \\ & \times \sum_{k=0}^{2m} \sum_{h=0}^j \binom{2m}{k} \binom{j}{h} (-)^{h+k} \nu_\alpha^{2(m+j-h)-k} (s_n \chi_{n\alpha})^{2h+k} \\ & \times \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} (1+y)^j e^{-\nu_\alpha^2(1+y)/\sigma_\alpha} \mathcal{A}_{(q+p+l+s+j),(r+2h+k)}(\Upsilon_y, \Phi_y). \end{aligned} \quad (IV.30)$$

Propagação em Direções Arbitrárias

Quando o ângulo azimutal ψ é arbitrário, não se pode mais eliminar a radiação em $S_{n\alpha}(t)$, e outras providências se fazem necessárias. Para a função $I_l(z)$, pode-se separar os ingredientes de $S_{n\alpha}(t)$ lançando-se mão do teorema de adição de Gegenbauer (fórmula 9.1.80 de Abramowitz & Stegun, 1970 [2]), escrito aqui em termos das funções de Bessel modificadas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) = \\ 2^l (l-1)! \frac{(1 - i\sigma_\alpha t)^l}{(\nu_\alpha \chi_{n\alpha} t)^{2l}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k (l+k) C_k^{(l)}(\cos 2\psi) I_{l+k} \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) I_{l+k} \left(\frac{\chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 - i\sigma_\alpha t} \right), \end{aligned} \quad (IV.31)$$

onde $C_k^{(l)}$ é o polinômio de Gegenbauer

$$C_k^{(l)}(\cos 2\psi) = \sum_{m=0}^k \binom{l+m-1}{l-1} \binom{l+k-m-1}{l-1} \cos(2(k-2m)\psi); \quad C_k^{(l)}(1) = \binom{k+2l-1}{k}.$$

Escrita em termos da identidade (IV.31), a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ fica

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = -i \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \mathfrak{A}_k^l \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} [H_{n\alpha}(t)]^m \\ \times \left(\frac{1 - i\sigma_\alpha t}{\nu_\alpha^2 \chi_{n\alpha}^2 t^2} \right)^l \mathcal{H}_{l+k} \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1 - i\sigma_\alpha t} \right) \mathcal{H}_{l+k} \left(\frac{\chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 - i\sigma_\alpha t} \right), \end{aligned} \quad (IV.32)$$

sendo $\mathfrak{A}_k^l = 2^l (l-1)! (l+k) C_k^{(l)}(\cos 2\psi)$ e $\mathcal{H}_n(z) = e^{-z} I_n(z)$. Para a segunda função $\mathcal{H}_n(z)$ em (IV.32) será utilizada novamente a forma integral (IV.22). Já para a primeira, existem em

princípio duas alternativas. No estudo de ondas onde $|\nu_\alpha^2| > 1$ (ressonâncias), pode ser mais eficaz utilizar-se novamente a forma integral para $I_n(z)$, a qual possibilitaria uma expressão válida para qualquer valor do raio de Larmor. Entretanto, quando $|\nu_\alpha^2| < 1$, a função \mathcal{G} estaria escrita em termos de duas integrações, as quais deveriam ser realizadas numericamente. Neste caso resta a segunda alternativa, útil quando se pode fazer uma aproximação de pequeno raio de Larmor, que é expandir o seu argumento em série de potências. Esta expansão é fornecida pela fórmula (A6) de *Bornatici et alli* (1990) [11]

$$\mathcal{H}_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^s [2(n+s)]!}{(n+s)!(2n+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^s. \quad (IV.33)$$

Tomando estas providências, pode-se escrever a função \mathcal{G} da seguinte forma, ainda sem restrições,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha \chi_{n\alpha}) &= \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_k^l \mathfrak{B}_j^{l+k} \nu_\alpha^{2(j+k)} \chi_{n\alpha}^{2k}}{[2(l+k)-1]!! \pi} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l+k-1/2} \\ &\times \mathfrak{N}_{(r+2k),q,(p+l+2k+j),m}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}, \psi; y), \end{aligned} \quad (IV.34)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{r,q,p,m}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}, \psi; y) &= -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^p} e^{-\chi_{n\alpha}^2(1+y)t^2/(1-i\sigma_\alpha t)} [H_{n\alpha}(t)]^m \\ \mathfrak{A}_k^l &= 2^l (l-1)!(l+k) C_k^{(l)}(\cos 2\psi) \\ \mathfrak{B}_k^n &= \frac{(-)^k [2(n+k)]!}{2^{n+k} (n+k)!(2n+k)!k!}. \end{aligned}$$

A função $\mathfrak{N}_{r,q,p,m}$ é aqui tratada com os mesmos artifícios utilizados na obtenção de (IV.28), sendo restrita às mesmas condições. Fazendo isso, obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{r,q,p,m}(z, a, \sigma_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}, \psi; y) &= \sum_{s,v=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\delta=0}^{m-\lambda} \frac{1}{s!} \binom{p+s+v-1}{v} \binom{m}{\lambda} \binom{m-\lambda}{\delta} \frac{(1-\sigma_\alpha^{-1})^{(s+v)}}{\sigma_\alpha^{(p+s)}} \\ &\times (-2 \sin \psi)^\lambda \chi_{n\alpha}^{2(s+\delta)+\lambda} \nu_\alpha^{2(m-\delta)-\lambda} (1+y)^s \mathcal{F}_{(q+p+2s+v),(r+\lambda+2s+2\delta)}(z, a + \chi_{n\alpha}^2(1+y)/\sigma_\alpha). \end{aligned} \quad (IV.35)$$

Neste caso mais geral, a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ aparece escrita em termos de quatro séries de potências mais dois somatórios. Novamente estas quatro séries podem ser reduzidas pela metade através do artifício dado em (IV.29). Ao assim se proceder, e após reunir as expressões dadas em (IV.34, IV.35) em uma única fórmula, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l} &= \frac{\nu_\alpha^{2m}}{\pi \sigma_\alpha^{p+l}} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu_\alpha^2}{\sigma_\alpha}\right)^k \sum_{j=0}^k \frac{\mathfrak{A}_j^l \mathfrak{B}_{k-j}^{l+j}}{[2(l+j)-1]!!} \left(\frac{\chi_{n\alpha}^2}{\sigma_\alpha}\right)^j (1-y^2)^j \\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} (1-\sigma_\alpha^{-1})^s \sum_{v=0}^s \frac{(1+y)^v}{v!} \binom{p+l+k+j+s-1}{s-v} \left(\frac{\chi_{n\alpha}^2}{\sigma_\alpha}\right)^v \sum_{\lambda=0}^m \binom{m}{\lambda} \left(\frac{s_n \chi_{n\alpha}}{\nu_\alpha}\right)^\lambda (-2 \sin \psi)^\lambda \\ &\times \sum_{\delta=0}^{m-\lambda} \binom{m-\lambda}{\delta} \left(\frac{\chi_{n\alpha}}{\nu_\alpha}\right)^{2\delta} \mathcal{F}_{(q+p+l+k+s+j+v),(r+\lambda+2(j+v+\delta))}(z, a + \chi_{n\alpha}^2(1+y)/\sigma_\alpha), \end{aligned} \quad (IV.36)$$

onde

$$\mathfrak{A}_j^l \mathfrak{B}_{k-j}^{l+j} = \frac{(-)^{k-j} [2(l+k)]! (l-1)! (l+j)!}{2^k (l+k)! (2l+k+j)! (k-j)!} C_j^{(l)}(\cos 2\psi).$$

Portanto, as fórmulas (IV.23, IV.30 e IV.36) são as expressões obtidas para a função de dispersão de plasma inhomogêneo em termos da função de Shkarofsky para os ângulos azimutais de propagação $\psi = 0$, $\psi = \pi/2$ e $0 < \psi < \pi/2$, respectivamente, sendo que a única restrição imposta até aqui é a condição (IV.26).

Entretanto, as relações (B.13.a) e (B.14) mostram que $\mathcal{F}_{q'}(z, a)$ é singular quando $z - a = 0$ para $q' < 1$. Uma análise das expressões obtidas para a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, com o auxílio da relação (B.11), mostra que o menor valor que o índice q' assume em um plasma inhomogêneo como está aqui sendo tratado é

$$q' = q + p + l - r - 2m,$$

e uma checagem nos componentes do tensor dielétrico efetivo (IV.16) mostra que alguns dos seus componentes estão de fato escritos em termos da função \mathcal{G} de índices tais que a condição $q' < 1$ se cumpre. Este fato forçaria a adoção de controles adicionais nas rotinas destinadas a calcular a função \mathcal{G} , o que resultaria fatalmente em um acréscimo no tempo de computação. Para evitar este empecilho, buscou-se uma expressão alternativa à função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ de forma a evitar a ocorrência de $q' < 1$. Com este intuito, retoma-se a expressão (IV.32), desta vez para o caso geral $0 \leq \psi \leq \pi/2$, introduz-se novamente a expansão (IV.33) mas, ao invés de utilizar a representação integral dada por (IV.22), apela-se para outra representação equivalente dada pela fórmula (9.6.19) de Abramowitz & Stegun (1970) [2]

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta) e^{z \cos \theta}.$$

Obtém-se desta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l} &= \frac{-i}{\pi \chi_{n\alpha}^{2l}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-)^{k+l} \mathfrak{A}_k^l \mathfrak{B}_j^{l+k} \nu_\alpha^{2(k+j)} \int_0^\pi d\theta \cos[(l+k)\theta] \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{(it)^{r-2l} e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_\alpha t)^{p+k+j}} e^{-\chi_{n\alpha}^2 t^2 (1-\cos\theta)/(1-i\sigma_\alpha t)} [H_{n\alpha}(t)]^m. \end{aligned}$$

Introduzindo-se novamente as expansões (IV.25) e (IV.27), expandindo $[H_{n\alpha}(t)]^m$ e rearranjando as séries, chega-se à expressão alternativa para a função de dispersão de plasma inhomogêneo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,q,p,m,l} &= \frac{(l-1)! \nu_\alpha^{2m}}{\pi \chi_{n\alpha}^{2l} \sigma_\alpha^p} \\ &\times \int_0^\pi d\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[2(l+k)]!}{2^k (l+k)!} \left(\frac{\nu_\alpha^2}{\sigma_\alpha}\right)^k \sum_{j=0}^k \frac{(-)^{k-j} (l+j)}{(k-j)! (2l+k+j)!} C_j^{(l)}(\cos 2\psi) \cos[(l+j)\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \sigma_{\alpha}^{-1})^s \sum_{v=0}^s \binom{p+k+s-1}{s-v} \frac{(1 - \cos \theta)^v}{v!} \left(\frac{\chi_{n\alpha}^2}{\sigma} \right)^v \sum_{\lambda=0}^m \binom{m}{\lambda} (-2 \operatorname{sen} \psi)^{\lambda} \left(\frac{S_n \chi_{n\alpha}}{\nu_{\alpha}} \right)^{\lambda} \\ & \times \sum_{\delta=0}^{m-\lambda} \binom{m-\lambda}{\delta} \left(\frac{\chi_{n\alpha}}{\nu_{\alpha}} \right)^{2\delta} \mathcal{F}_{(q+p+k+s+v), (r+\lambda+2(v+\delta-l))} [z, a + \chi_{n\alpha}^2 (1 - \cos \theta) / \sigma_{\alpha}], \quad (\text{IV.37}) \end{aligned}$$

a qual substitui qualquer uma das expressões anteriores, (IV.23, IV.30, IV.36), desde que a condição (IV.26) se cumpra. O menor valor para o índice q' em (IV.37) é

$$q' = q + p + 2(l - m) - r,$$

o qual consegue evitar a ocorrência de $q' < 1$ para qualquer componente do tensor dielétrico efetivo (IV.15).

IV.2.2 Aproximação Não Relativística

Neste caso a dispersão das ondas é regida pela função (IV.17)

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \eta_{\alpha}, \nu_{\alpha}, \chi_{n\alpha}) = -i \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2}}{(1 + i\eta_{\alpha}t)^p} e^{-(\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1 + i\eta_{\alpha}t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right).$$

Para o caso não relativístico somente serão abordados os limites $k_B \rightarrow 0$ e $\psi = 0$, para se demonstrar a relação entre $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$ e a função de Fried & Conte (B.1). Os demais casos possuem desenvolvimentos semelhantes aos efetuados para a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$.

Limite de Plasma Homogêneo

No limite $k_B \rightarrow 0$ a função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$ se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \nu_{\alpha}) &= -i \nu_{\alpha}^{2(m-l)} \mathcal{H}_l(\nu_{\alpha}^2) \int_0^{\infty} dt (it)^r e^{izt} e^{-at^2} \\ &= \frac{-i \nu_{\alpha}^{2(m-l)}}{(2\sqrt{a})^{r+1}} \mathcal{H}_l(\nu_{\alpha}^2) \int_0^{\infty} dt (it)^r e^{i(z/2\sqrt{a})t} e^{-t^2/4}. \end{aligned}$$

Utilizando a definição da derivada de ordem n da função de Fried & Conte dada por (B.6) obtém-se

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \nu_{\alpha}) = -\frac{\nu_{\alpha}^{2(m-l)}}{(2\sqrt{a})^{r+1}} \mathcal{H}_l(\nu_{\alpha}^2) Z^{(r)} \left(\frac{z}{2\sqrt{a}} \right).$$

Portanto, no limite de plasma homogêneo a PDF inhomogênea recai na forma convencional, dada em termos da função de Fried & Conte.

Propagação Coplanar à Inhomogeneidade ($\psi = 0$)

Neste caso (IV.17) reduz-se a

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \nu_{\alpha}, \chi_{n\alpha}) = -i \int_0^{\infty} (it)^r e^{izt - at^2} e^{-(\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)} (\nu_{\alpha}^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2)^{m-l} I_l(\nu_{\alpha}^2 - \chi_{n\alpha}^2 t^2).$$

Utilizando a representação integral para $I_l(z)$ dada por (IV.22) e rearranjando os termos, obtém-se

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = \frac{-i\nu_\alpha^{2m}}{(2l-1)!!\pi} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(\chi_{n\alpha}/\nu_\alpha)^{2j}}{(2\mu_\alpha^{1/2})^{r+2j+1}} \times \int_{-1}^1 dy \frac{(1-y^2)^{l-1/2}}{[\mathfrak{Y}(y)]^{r+2j+1}} \int_0^\infty dt (it)^{r+2j} e^{i[z/2\mu_\alpha^{1/2}\mathfrak{Y}(y)]t} e^{-t^2/4},$$

onde $\mu_\alpha \mathfrak{Y}^2(y) = a + \chi_{n\alpha}^2(1+y)$. Utilizando novamente (B.6) resulta por fim

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}(z, a, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) = \frac{-\nu_\alpha^{2m}}{(2l-1)!!\pi} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(\chi_{n\alpha}/\nu_\alpha)^{2j}}{(2\mu_\alpha^{1/2})^{r+2j+1}} \times \int_{-1}^1 dy \frac{(1-y^2)^{l-1/2}}{\mathfrak{Y}(y)^{r+2j+1}} e^{-\nu_\alpha^2(1-y)Z^{(r+2j)}} \left(\frac{\mu_\alpha^{1/2}\delta_{n\alpha}}{2\mathfrak{Y}(y)} \right). \quad (\text{IV.38})$$

O caso $\psi > 0$ não será aqui discutido, pois o tratamento da função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$ para este caso é semelhante ao formalismo desenvolvido para a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, e por isso não introduz nenhuma informação essencialmente nova.

IV.3 A Parte Anti-Hermiteana de $\overleftrightarrow{\epsilon}$ e Comparação com Outros Trabalhos

Nesta seção a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico efetivo $\overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{aH}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ será analisada e se mostrará que a única contribuição a $\overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{aH}}$ vem das partículas ressonantes, de acordo com a condição de ressonância.

Em seguida, serão feitas comparações entre as simetrias apresentadas pelo tensor dielétrico efetivo, desenvolvido neste trabalho, com as simetrias apresentadas por outros tensores, desenvolvidos por outros trabalhos que surgiram na literatura recente, os quais também se candidatam como os tensores dielétricos a ser empregados no estudo da propagação e absorção de ondas de pequena amplitude em plasmas imersos em campos magnéticos inhomogêneos.

IV.3.1 A Parte Anti-Hermiteana de $\overleftrightarrow{\epsilon}$

As partes Hermiteana, $\overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, e anti-Hermiteana, $\overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{aH}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, do tensor dielétrico efetivo são definidas por

$$\overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{H}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} (\overleftrightarrow{\epsilon} + \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger) ; \quad \overleftrightarrow{\epsilon}^{\text{aH}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2i} (\overleftrightarrow{\epsilon} - \overleftrightarrow{\epsilon}^\dagger), \quad (\text{IV.39})$$

onde o símbolo (\dagger) tem o significado usual de transposta conjugada. A exemplo da simetria de Onsager, a qual foi abordada na seção III.4, a estrutura da parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico é uma propriedade fundamental no estudo da absorção de ondas em plasmas. Dentro

do âmbito do formalismo aqui denominado “localmente inomogêneo” (ver seção I.2.3), onde os modos de propagação são considerados não interagentes, isto é, não ocorrem conversões de modos e nem reflexões, e onde a amplitude do coeficiente de absorção é considerada pequena (de acordo com a condição II.21.b), o teorema de Poynting mostra que a potência da radiação absorvida está relacionada com a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico (ver equação II.25.a ou equação 15.12 de *Shafranov*, 1967 [99]).

Na teoria linear, o único mecanismo possível de troca de energia é a ressonância onda-partícula, a qual é determinada pela condição de ressonância (A.1), e a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico deve refletir este fato explicitamente, em contendo somente as contribuições das partículas que estão em ressonância com a onda. Uma dificuldade que existe, contudo, para o cálculo da parte anti-Hermiteana através da definição (IV.39), consiste na complexidade da forma geral obtida para $\vec{\epsilon}(x_1, \mathbf{k}, \omega)$, fórmula (III.25). O cálculo de $\vec{\epsilon}^{\text{aH}}$ nesta forma geral ainda não foi realizado, sendo possível até o presente momento realizá-lo somente para casos especiais, com formas particulares para $f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})$. Desta maneira, a parte anti-Hermiteana será obtida para o tensor dado por (IV.16). Na verdade, somente será mostrado o componente $\epsilon_{12}^{\text{aH}}$, sendo os demais componentes obtidos de forma equivalente. Inserindo então $\epsilon_{12}(x_1, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (IV.15, IV.16.d) na definição de $\epsilon_{12}^{\text{aH}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^{\text{aH}} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ i 2 \nu_{\alpha} \sin \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{G}_{1, \gamma_2, 3, |n|, |n|}'' - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{1, \gamma_2, 3, |n|, |n|+1}'' \right. \right. \\ & + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3, \gamma_2, 3, |n|, |n|+1}'' \left. \right) + i n \left[|n| \mathcal{G}_{0, \gamma_2, 1, |n|-1, |n|}'' \right. \\ & - \nu_{\alpha}^2 \left(\mathcal{G}_{0, \gamma_2, 2, |n|-1, |n|}'' - \mathcal{G}_{0, \gamma_2, 2, |n|, |n|+1}'' \right) \\ & \left. + \chi_{n\alpha}^2 \left(\mathcal{G}_{2, \gamma_2, 2, |n|-1, |n|}'' + \mathcal{G}_{2, \gamma_2, 2, |n|, |n|+1}'' \right) \right] \\ & - \nu_{\alpha}^2 \sin 2\psi \left(\mathcal{G}_{0, \gamma_2, 3, |n|, |n|}'' - |n| \mathcal{G}_{0, \gamma_2, 2, |n|-1, |n|}'' - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{0, \gamma_2, 3, |n|, |n|+1}'' \right. \\ & \left. + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2, \gamma_2, 3, |n|, |n|+1}'' \right) - 2 n \nu_{\alpha} \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1, \gamma_2, 2, |n|-1, |n|}'' \left. \right\}, \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

onde $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + i \mathcal{G}''$, sendo que a expressão (IV.40) vale tanto para a função $\mathcal{G}_{r, q, p, m, l}$, no regime relativístico, quanto para a função $\mathcal{G}_{r, p, m, l}^{\text{nr}}$, no regime não relativístico.

Percebe-se claramente em (IV.40) que $\epsilon_{12}^{\text{aH}}$ está vinculada com a parte imaginária da função \mathcal{G} , a qual é não nula somente quando existe a ressonância onda-partícula. Esta conexão pode ser demonstrada inspecionando-se as expressões (IV.23, IV.30, IV.36, IV.37 e IV.38). Percebe-se claramente que a parte imaginária da função \mathcal{G} depende somente da parte imaginária das funções $\mathcal{F}_{q, r}(z, a)$ ou $Z(z)$. No limite $\omega_i \rightarrow 0^+$, estas partes imaginárias são dadas por (B.10) e (B.11) para a função de Shkarofsky e por (B.4) para a função de Fried & Conte.

No regime fracamente relativístico, em todas as quatro expressões obtidas para a função

$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, a subtração $z - a$ é dada por

$$z - a = \mu_\alpha \left[1 - nY_\alpha(x_1) - \frac{N_\parallel^2}{2} - \frac{n^2 N_B^2}{4\sigma_\alpha} (1 + y) \right],$$

sendo que a variável y é integrada de -1 a 1 e a mínima contribuição é obtida em $y = 1$, resultando

$$z - a \geq \mu_\alpha \left(1 - nY_\alpha(x_1) - \frac{N_\parallel^2}{2} - \frac{n^2 N_B^2}{2\sigma_\alpha} \right) \equiv (z - a)_{\min}. \quad (\text{IV.41})$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que exista uma parte imaginária não nula para a função $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$ é $(z - a)_{\min} < 0$; este é justamente o vínculo dado por (A.5), que circunscreve a elipse de ressonância no espaço de *momenta*. Por outro lado, quando $(z - a)_{\min} \geq 0$, $\text{Im}[\mathcal{F}_{q,r}(z, a)] = 0$, e restam somente as partículas não ressonantes que não contribuem para $\varepsilon_{12}^{\text{aH}}(x_1, \mathbf{k}, \omega)$.

Para o regime não relativístico o argumento da função de Fried & Conte na expressão (IV.38) é

$$\frac{\mu_\alpha^{1/2} \delta_{n\alpha}}{\sqrt{2\mathcal{Q}}(y)} = \mu_\alpha^{1/2} \frac{2 - nY_\alpha(x_1)}{\sqrt{N_\parallel^2 + n^2 N_B^2 (1 + y)/2}}, \quad (\text{IV.42})$$

cuja máxima contribuição vem novamente de $y = 1$. Desta forma, o argumento da função $Z(z)$, a qual aparece na definição de $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$, também corresponde à condição de ressonância, a qual é dada para o caso não relativístico por (A.6) ou (A.7).

Assim fica demonstrado que somente as partículas ressonantes contribuem para a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico efetivo, enquanto que as partículas não ressonantes contribuem somente para a parte Hermiteana de $\vec{\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, que depende de \mathcal{G}' .

Para mostrar agora que o tensor $\vec{\varepsilon}^0(x_1, \mathbf{k}, \omega)$ não satisfaz a mesma propriedade, é suficiente utilizar-se um caso particular de (III.22). Considerando uma onda que se propaga no modo ordinário e na direção da inomogeneidade, isto é, $N_\parallel = \psi = 0$, basta calcular o componente ε_{33}^0 , o qual fica

$$\varepsilon_{33}^0 = 1 - i \frac{4\pi}{\omega} \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\tau \int d^3u \frac{p_\parallel^2}{p_\perp} \mathcal{L}f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel) J_n(b_\alpha) J_n(b_\alpha - \phi_{n\alpha} \tau) e^{iD_{n\alpha} \tau},$$

onde já se colocou $Lf_{\alpha 0} = 0$. Introduzindo a distribuição (IV.1) e transformando as integrações em \mathbf{p} para \mathbf{u} , obtém-se

$$\varepsilon_{33}^0 = 1 + i \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_\alpha \delta_{n\alpha} t}}{(1 - it)^{3/2}} e^{-2\chi_{n\alpha}^2 t^2 / (1 - it)} \mathcal{K}_{|n|} \left(\frac{\nu_\alpha^2 - 2\nu_\alpha \chi_{n\alpha} t}{1 - it} \right). \quad (\text{IV.43})$$

Utilizando a forma integral (IV.22) resulta a expressão geral para ε_{33}^0 :

$$\varepsilon_{33}^0 = 1 - \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{|n|} \frac{\nu_\alpha^{2(|n|-l)}}{(2|n|-1)!! \pi} (i2\nu_\alpha \chi_{n\alpha})^l \int_{-1}^1 dy (1 - y^2)^{|n|-1/2} e^{-\nu_\alpha^2 (1+y)} \times \mathcal{F}_{(|n|+1/2), l} [\mu_\alpha \delta_{n\alpha} - (\nu_\alpha^2 + i2\nu_\alpha \chi_{n\alpha})(1 + y), 2\chi_{n\alpha}^2 - (\nu_\alpha^2 + i2\nu_\alpha \chi_{n\alpha})(1 + y)]. \quad (\text{IV.44})$$

Calculando então a parte anti-Hermiteana de ε_{33}^0 , obtém-se finalmente

$$(\varepsilon_{33}^0)^{aH} = - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{|n|} \binom{|n|}{\ell} \frac{\nu_{\alpha}^{2(|n|-\ell)}}{(2|n|-1)!!\pi} (2\nu_{\alpha}\chi_{n\alpha})^{\ell} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{|n|-\frac{1}{2}} e^{-\nu_{\alpha}^2(1+y)} \times \left\{ [1 - (-)^{\ell}] (-)^{(\ell-1)/2} \mathcal{F}'_{(|n|+\frac{1}{2}),\ell} + [1 + (-)^{\ell}] (-)^{\ell/2} \mathcal{F}''_{(|n|+\frac{1}{2}),\ell} \right\}, \quad (IV.45)$$

onde novamente $\mathcal{F} = \mathcal{F}' + i\mathcal{F}''$. Percebe-se claramente que $(\varepsilon_{33}^0)^{aH}$ possui contribuições da parte real de \mathcal{F} , que está relacionada com as partículas não ressonantes. Entretanto, a relação entre a parte imaginária de \mathcal{F} e a condição de ressonância (A.1) não é claramente visível nesta forma, pois a expressão (B.10) somente é válida para $\mathcal{F}_q(z, a)$ quando ambos z e a forem reais, o que não ocorre no presente caso. Este ponto torna-se mais claro quando se utiliza uma aproximação para (IV.43) que consiste em expandir o argumento da função $\mathcal{H}_{|n|}$. Isto não será feito neste ponto, pois este problema está relacionado com o assunto da próxima subseção que consiste em comparações entre o formalismo desenvolvido nesta tese e o formalismo de outros trabalhos surgidos na literatura recente. A aproximação anunciada, portanto, será postergada e aparecerá na expressão (IV.53).

A mesma análise realizada nesta seção, acerca da parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico, e na seção III.4, a respeito da simetria de Onsager, será aplicada agora a resultados obtidos por outros trabalhos que surgiram recentemente na literatura.

IV.3.2 Comparação com Outros Trabalhos Surgidos na Literatura

Nesta subseção duas abordagens distintas sobre o mesmo problema tratado por esta tese serão rapidamente discutidas e analisadas sob o ponto de vista da obediência às relações de simetria de Onsager e da contribuição de partículas não ressonantes à parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico.

Abordagem A: Órbitas Não Perturbadas sem Correção na Frequência

O primeiro caso, o qual doravante será denominado *Abordagem A*, consiste no trabalho de *Mikhailovskii & Onishchenko* (1987) [82]. Neste trabalho, os autores resolvem a equação de Vlasov linearizada (II.9) para um caso onde tanto o campo magnético $B_0(\mathbf{r})$ quanto o plasma apresentam gradientes na direção perpendicular. As equações de movimento utilizadas nesta abordagem,

$$p'_1 = p_{\perp} \cos(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau/\gamma) \quad (IV.46.a)$$

$$p'_2 = p_{\perp} \sin(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau/\gamma) + \gamma m_{\alpha} V_d \quad (IV.46.b)$$

$$p'_3 = p_{\parallel} \quad (IV.46.c)$$

$$x'_1 = x_1 + \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} [\text{sen } \varphi - \text{sen}(\varphi - \Omega_\alpha \tau / \gamma)] \quad (\text{IV.46.d})$$

$$x'_2 = x_2 + \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} [\cos(\varphi - \Omega_\alpha \tau / \gamma) - \cos \varphi] + V_d \tau \quad (\text{IV.46.e})$$

$$x'_3 = x_3 + \frac{p_\parallel \tau}{\gamma m_\alpha}, \quad (\text{IV.46.f})$$

onde

$$V_d = \frac{k_B p_\perp}{2\gamma m_\alpha^2 \Omega_\alpha},$$

diferem de (III.10) principalmente por não apresentarem a correção na freqüência angular de oscilação da partícula (III.8). Além disso, $p'_2(\tau)$ não satisfaz a condição inicial $p'_2(\tau = 0) = p_2$.

O tratamento empregado por *Mikhaïlovskiï & Onishchenko* (1987) é formalmente igual ao utilizado nesta tese para a derivação do tensor $\vec{\epsilon}^0$, sendo as únicas diferenças essenciais os dois pontos mencionados acima. Uma diferença fundamental, entretanto, é que os autores se detêm no tensor $\vec{\epsilon}^0$ (isto é, no seu equivalente), e não procedem à transformação BGI. Outra diferença entre o tratamento dado à equação (II.9) nesta tese e na *Abordagem A*, a qual, porém, não altera a equivalência entre ambas as abordagens, é que, ao invés de trabalhar inicialmente com os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, *Mikhaïlovskiï & Onishchenko* (1987) preferem adotar os potenciais escalar e vetorial $\phi(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente. Desta forma, como é bem sabido,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

sendo adotado o calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$.

Adotando este procedimento, em conjunto com uma aproximação WKB idêntica a (I.11 e II.22), os autores foram capazes de obter um conjunto de coeficientes de transporte relacionando os potenciais com as densidades de carga ρ e de corrente \mathbf{J} , obtendo em seguida uma relação de dispersão para estes coeficientes. Cabe aqui ressaltar que esta relação de dispersão não é igual à apresentada nesta tese, equação (I.10), a qual foi derivada fazendo-se uso dos campos, e não dos potenciais. Entretanto, posteriormente os autores da *Abordagem A* obtêm a relação entre estes coeficientes e os componentes do tensor dielétrico, aqui representado por $\vec{\epsilon}^A(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, o qual é equivalente ao tensor $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, pois foram formalmente obtidos através do mesmo método.

Tendo sido bastante ressaltada a equivalência entre os tratamentos adotados nesta tese e na *Abordagem A*, não serão apresentados os resultados na sua forma original. Ao invés disso, as equações de movimento (IV.46) serão introduzidos em (II.11 e II.12) e o tensor $\vec{\epsilon}^A$ será deduzido utilizando-se o formalismo desenvolvido ao longo do capítulo II. A única

limitação a ser feita em relação aos resultados da *Abordagem A* consiste na suposição de que a função distribuição de equilíbrio pode depender somente de p_{\perp}^2 e p_{\parallel} , sem depender da terceira constante de movimento $P_{2\alpha}$. Esta limitação é novamente adotada para simplificar os resultados e ressaltar os efeitos que se considera mais importantes neste ponto. Agindo desta maneira, chega-se à seguinte expressão para o tensor $\vec{\epsilon}^A(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ [38]

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^A = & \delta_{ij} + X_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p p_{\perp} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \frac{\mathcal{L} f_{e0}}{\hat{D}_{ne}} \left[R_{ij}^R + i R_{ij}^I + \delta_{j2} \frac{k_B p_{\perp}}{2m_e \Omega_e} (R_{i3}^R + i R_{i3}^I) \right] \\ & - \delta_{i3} \delta_{j3} X_e \int d^3 p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} L f_{e0}, \end{aligned} \quad (IV.47)$$

onde se considerou somente a contribuição dos eletrons, e

$$\hat{D}_{ne} = \gamma - \frac{N_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e c} - n Y_e - \frac{k_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_e^2 \Omega_e} \sin \psi$$

é o denominador ressonante (III.17) sem o termo $n k_B p_{\perp} \sin \varphi / m_e$, o qual era devido justamente à correção na frequência angular de giro dos eletrons em torno de B_0 . As quantidades R_{ij}^R e R_{ij}^I são dadas por

$$\begin{aligned} R_{11}^R &= J_n'^2(b_e) + \cos^2 \psi \left[\frac{n^2}{b_e^2} J_n^2(b_e) - J_n'^2(b_e) \right] ; \quad R_{11}^I = 0 \\ R_{12}^R &= \left[\frac{n^2}{b_e^2} J_n^2(b_e) - J_n'^2(b_e) \right] \sin \psi \cos \psi ; \quad R_{12}^I = \frac{n}{b_e} J_n(b_e) J_n'(b_e) \\ R_{13}^R &= \frac{n}{b_e} J_n^2(b_e) \cos \psi ; \quad R_{13}^I = J_n(b_e) J_n'(b_e) \sin \psi \\ R_{22}^R &= \frac{n^2}{b_e^2} J_n^2(b_e) + \left[J_n'^2(b_e) - \frac{n^2}{b_e^2} J_n^2(b_e) \right] \cos^2 \psi ; \quad R_{22}^I = 0 \\ R_{23}^R &= \frac{n}{b_e} J_n^2(b_e) \sin \psi ; \quad R_{23}^I = -J_n(b_e) J_n'(b_e) \cos \psi \\ R_{33}^R &= J_n^2(b_e) ; \quad R_{33}^I = 0, \end{aligned}$$

sendo $R_{ij}^R = R_{ji}^R$ e $R_{ij}^I = -R_{ji}^I$.

A quantidade \hat{D}_{ne} apareceu em (IV.47) na forma de um denominador ressonante após calcular-se a integração em τ utilizando (III.18). Observa-se que os componentes ϵ_{12}^A e ϵ_{21}^A apresentam uma assimetria evidente e que não satisfazem a condição de Onsager (III.32). Portanto, o tensor $\vec{\epsilon}^A(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (IV.47) não é o coeficiente de transporte correto a ser empregado. Uma conseqüência imediata desta falta de simetria é o aparecimento de termos não ressonantes na parte anti-Hermiteana do tensor $\vec{\epsilon}^A$, os quais não correspondem à verdadeira absorção das ondas pelo plasma. Além disso, com a negligência da correção na frequência angular, equação (III.8), nas trajetórias (IV.46), os autores introduziram, na integração destas órbitas, secularidades que também não possuem sentido físico. A necessidade de se incluir esta correção nas órbitas não perturbadas foi também discutida na literatura [4, 63].

Outro ponto que merece destaque é que o denominador ressonante \hat{D}_{ne} somente difere do denominador para um plasma homogêneo no termo proporcional a $k_B \sin \psi$; portanto se a propagação da onda for em um ângulo $\psi = 0$, o denominador ressonante seria formalmente igual ao do caso homogêneo, ao contrário de $\mathcal{D}_{n\alpha}$ (III.17), o qual possui um termo adicional devido à inhomogeneidade, e que portanto possui um efeito distinto daquele obtido no caso homogêneo mesmo para $\psi = 0$.

Abordagem B: Órbitas Não Perturbadas com Correção na Freqüência, sem Emprego da Transformação BGI

Outra abordagem que surgiu na literatura recente em uma série de artigos é devida a *Lashmore-Davies et alli* [17, 63–65, 76], a qual é aqui denominada *Abordagem B*. O formalismo adotado nestes trabalhos é uma aplicação da teoria girocinética de *Chen & Tsai* [24, 106], a qual foi rapidamente discutida na subseção I.2.3. A teoria girocinética utiliza um formalismo bastante sofisticado que, embora aparentemente distinto do formalismo aqui empregado, é fundamentalmente o mesmo, pois consiste basicamente em uma expansão perturbativa da equação de Vlasov linearizada (II.8.a) sobre a qual é realizada em seguida uma média estatística sobre o ângulo de giro das partículas em torno do campo magnético. A maior parte dos trabalhos desenvolvidos na *Abordagem B* consistiu em uma aplicação da teoria girocinética, onde foi feita posteriormente uma expansão em ondas planas semelhante a (II.1), obtendo-se assim relações de dispersão como no caso de um plasma homogêneo [63–65, 76]. Já no artigo de *Cairns et alli* (1991) [17], a teoria girocinética foi utilizada para obter uma equação da onda.

Na *Abordagem B* foram utilizadas trajetórias não perturbadas semelhantes às utilizadas nesta tese (III.10), com a correção na freqüência de cíclotron (III.8) corretamente incluída. Contudo, a transformação BGI não foi realizada, e por isso a parte imaginária das relações de dispersão obtidas possui contribuições de termos não ressonantes. Será demonstrado agora que os resultados da *Abordagem B*, onde foi feito uso da teoria girocinética, podem ser obtidos a partir da inclusão do tensor auxiliar $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, derivado na seção III.2, na relação de dispersão (I.10), sendo feitas diversas aproximações. Desta forma se mostra que a absorção não ressonante obtida pela *Abordagem B* se deve às assimetrias inerentes ao tensor $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, como já foi longamente discutido.

Considerando a propagação de ondas eletromagnéticas na direção perpendicular ao campo magnético ($k_{\parallel} = 0$) e paralela ao gradiente do campo ($\psi = 0$), a relação de dispersão (I.10) se fatora em dois modos de propagação, o modo extraordinário e o modo ordinário. Para este

último modo, a relação de dispersão fica

$$N_{\perp}^2 = \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_{33}^0(x_1, k_{\perp}, \omega). \quad (\text{IV.48})$$

O componente $\varepsilon_{33}^0(x_1, k_{\perp}, \omega)$ é obtido de (III.14) na aproximação não relativística ($\gamma = 1$), considerando somente a contribuição dos elétrons e utilizando uma distribuição Maxwelliana

$$f_{e0}(V_{\perp}^2, V_{\parallel}) = \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} e^{-V^2},$$

onde $V = v/v_{Te}$, sendo $v_{Te} = \sqrt{2T_e/m_e}$. Desta forma resulta

$$L f_{e0} = 0; \quad \mathcal{L} f_{e0} = -\frac{2c}{v_{Te}} V_{\perp} f_{e0}$$

e o componente $\varepsilon_{33}^0(x_1, k_{\perp}, \omega)$ fica

$$\varepsilon_{33}^0(x_1, k_{\perp}, \omega) = 1 + i \frac{2\omega_{pe}^2}{\pi^{3/2}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3V V_{\parallel}^2 e^{-V^2} J_n(b_e) e^{ib_e \sin \varphi} e^{-in\varphi} e^{i[D_{ne}(x_1) - \phi_{ne} \sin \varphi]\tau}.$$

Truncando a série em n de forma a manter somente os harmônicos $n = 0, \pm 1$, aproximando a função de Bessel

$$J_n(b_e) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{b_e}{2}\right)^n,$$

e utilizando as identidades

$$\sin \varphi = \frac{V_2}{V_{\perp}}; \quad e^{-in\varphi} = \left(\frac{V_1}{V_{\perp}} - i \operatorname{sgn}(n) \frac{V_2}{V_{\perp}}\right)^{|n|},$$

resulta para $\varepsilon_{33}^0(x_1, k_{\perp}, \omega)$

$$\varepsilon_{33}^0 = 1 + i \frac{2\omega_{pe}^2}{\pi^{3/2}\omega} \left\{ \frac{i}{\omega} \int d^3V V_{\parallel}^2 e^{-V^2} e^{ib_e V_2} + \frac{b_e}{2} \left[\int_0^{\infty} d\tau \int d^3V V_{\parallel}^2 e^{-V^2} e^{ib_e V_2} (V_1 - iV_2) \times e^{i[D_{1e}(x_1) - f_1 V_2]\tau} - \int_0^{\infty} d\tau \int d^3V V_{\parallel}^2 e^{-V^2} e^{ib_e V_2} (V_1 + iV_2) e^{i[D_{-1e}(x_1) - f_{-1} V_2]\tau} \right] \right\},$$

sendo

$$b_e = \frac{k_{\perp} v_{Te}}{\Omega_e} = k_{\perp} r_{Le}; \quad f_n = \frac{n v_{Te}}{L_B}; \quad L_B = \frac{1}{k_B}.$$

Em ε_{33}^0 ocorrem então as seguintes integrações

$$\mathcal{I}_{V_{\pm}} = \int_0^{\infty} d\tau e^{iD_{(\pm 1)e}\tau} \int d^3V V_{\parallel}^2 (V_1 \mp iV_2) e^{-V^2} e^{i(b_e - f_{\pm 1}\tau)V_2},$$

sendo que as integrações em V são facilmente realizáveis, resultando

$$\mathcal{I}_{V_{\pm}} = \pm \frac{\pi^{3/2}}{4} \int_0^{\infty} d\tau (b_e - f_{\pm 1}\tau) e^{iD_{(\pm 1)e}\tau} e^{-(b_e - f_{\pm 1}\tau)^2/4}.$$

Fazendo agora algumas manipulações com o integrando acima e utilizando a definição (B.3) da função de Fried & Conte resulta finalmente

$$\mathcal{I}V_{\pm} = -\frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{L_B}{v_{Te}} e^{-b_e^2/4} [1 + \zeta_{\pm 1} Z(\zeta_{\pm 1} - ib_e/2)] \quad (\text{IV.49})$$

sendo

$$\zeta_{\pm 1} = \frac{D_{(\pm 1)e}(x_1)}{f_{\pm 1}} = \pm \frac{L_B}{v_{Te}} [\omega \mp \Omega_e(x_1)].$$

Introduzindo então (IV.49) em ε_{33}^0 , resulta a relação de dispersão

$$\frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} = 1 - X_e \left\{ 1 + i\omega \frac{b_e L_B}{2 v_{Te}} [\zeta_1 Z(\zeta_1 - ib_e/2) - \zeta_{-1} Z(\zeta_{-1} - ib_e/2)] \right\} e^{-b_e^2/4}, \quad (\text{IV.50})$$

a qual é igual à relação de dispersão (74) obtida por *Lashmore-Davies & Dendy* (1989) [63] para o caso $k_2 = 0$. Esta relação de dispersão possui a contribuição de termos não ressonantes na sua parte imaginária. Isto pode ser constatado supondo que $|\zeta_1| \gg b_e/2$, o que é válido para ω não muito próximo de $\Omega_e(x_1)$. Expandindo a função $Z(\zeta_{\pm 1} - ib_e/2)$ até a primeira ordem, utilizando a expressão (B.5) para a derivada da função $Z(z)$ e realizando a expansão perturbativa

$$k_{\perp} \approx k_0 + \delta k,$$

sendo $k_0^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{pe}^2$, a relação de dispersão de plasma frio, *Lashmore-Davies & Dendy* (1989) [63] obtiveram a seguinte expressão para a parte imaginária de δk :

$$\text{Im}(\delta k) = \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{\omega L_B}{v_{Te}} r_{Le} \left\{ \zeta_{-1} Z_r(\zeta_{-1}) - \zeta_1 Z_r(\zeta_1) + \frac{k_0 r_{Le}}{2} [\zeta_1^2 Z_i(\zeta_1) - \zeta_{-1}^2 Z_i(\zeta_{-1})] \right\}, \quad (\text{IV.51})$$

onde $Z_r(z)$ e $Z_i(z)$ são dadas por (B.4). O termo proporcional a $Z_i(\zeta_{\pm 1})$ corresponde à absorção usual, devida às partículas ressonantes. O fato de que (IV.51) possui a contribuição de um termo adicional, proporcional a $Z_r(\zeta_{\pm 1})$, mostra que a contribuição das partículas não ressonantes foi incluída em $\text{Im}(\delta k)$, o que não possui sentido físico, pois no regime linear o único mecanismo de troca de energia é a ressonância onda-partícula, que se processa somente com as partículas ressonantes. Este termo adicional foi denominado por *Lashmore-Davies et alii* de *fluxo cinético de potência* (“*kinetic power flow*”) e é sempre descartado do cálculo da profundidade óptica, a qual é igual ao coeficiente de absorção (I.15) integrado,

$$\tau_o = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \text{Im}(\delta k)(x_1),$$

pois a sua contribuição a τ_o é nula, sendo o fluxo cinético de potência um termo reversível e que se anula assintoticamente. Porém, o fluxo de potência possui um efeito não nulo sobre o coeficiente de absorção local.

No formalismo desenvolvido nesta tese, argumenta-se que o tensor correto a ser empregado é o tensor dielétrico efetivo, o qual não possui o problema de ter contribuições não ressonantes ao coeficiente de absorção, contribuições estas que são dificilmente justificáveis do ponto de vista físico.

Em outros trabalhos pertencentes à *Abordagem B* [64, 65], o mesmo formalismo é utilizado para estudar a absorção de ondas que se propagam obliquamente em um tokamak por ions minoritários, no regime não relativístico. Os resultados obtidos são equivalentes aos já discutidos, e os problemas que esta formulação apresenta, e que já foram ressaltados, são novamente obtidos. Não há, pois, necessidade de explicitar as equações obtidas nas referências [64, 65].

Recentemente uma generalização do formalismo adotado nesta abordagem para o regime fracamente relativístico foi apresentada por *McDonald et alli* (1994) [76]. Neste artigo os autores obtiveram uma equação para uma onda ordinária se propagando na direção da inhomogeneidade (ver equação 21 de *McDonald et alli*). É fácil mostrar que a equação obtida neste caso corresponde à transformação da relação de dispersão (IV.48) de equação algébrica para equação diferencial através da transformação usual [102]

$$ik_{\perp} \rightarrow d/dx_1. \quad (IV.52)$$

O componente ε_{33}^0 no caso relativístico já foi obtido em (IV.44) e a sua parte anti-Hermiteana foi mostrada em (IV.45). Os resultados de *McDonald et alli* (1994) [76], contudo, correspondem a algumas aproximações realizadas nestas expressões. Tomando a forma preliminar (IV.43), expande-se a função $\mathcal{H}_{|n|}$, retendo somente o primeiro termo. Truncando a seguir a série em n para $|n| > 1$, obtém-se

$$\varepsilon_{33}^0 = 1 - \mu_e X_e F_{\gamma_2}(\mu_e) - \mu_e X_e \sum_{s=\pm 1} \left[\frac{\nu_e^2}{2} \mathcal{F}_{\gamma_2}(\mu_e \delta_{se}, 2\xi_{se}^2) - i\nu_e \xi_{se} \mathcal{F}_{\gamma_2,1}(\mu_e \delta_{se}, 2\xi_{se}) \right], \quad (IV.53)$$

onde $F_q(z)$ é a função de Dnestrovskiï e está definida em (B.7). Como por hipótese $\mu_e \gg 1$, pode-se usar a forma assintótica para $F_{\gamma_2}(\mu_e)$ e $\mathcal{F}_{\gamma_2}(\mu_e \delta_{-1e}) \approx \mathcal{F}_{\gamma_2}(2\mu_e)$:

$$F_{\gamma_2}(\mu_e) \approx \frac{1}{\mu_e}; \quad \mathcal{F}_{\gamma_2}(2\mu_e) \approx \frac{1}{2\mu_e},$$

e neste caso o segundo termo acima pode ser desprezado frente ao primeiro. Realizando então estas aproximações, resulta por fim a seguinte relação de dispersão para o modo ordinário

$$1 - X_e - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \mathcal{F}_{\gamma_2}(\mu_e \delta_1, 2\chi_{1e}^2) \right] \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} + i \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{c}{\omega} \frac{\mu_e \Omega_e}{\omega L_B} \left[\frac{\partial}{\partial(\mu_e \delta_1)} \mathcal{F}_{\gamma_2}(\mu_e \delta_1, 2\chi_{1e}^2) \right] \frac{k_{\perp} c}{\omega} = 0.$$

Realizando então a transformação (IV.52) na relação de dispersão acima, obtém-se a equação da onda (21) de *McDonald et alli* (1994) [76].

Portanto, a equação da onda derivada por *McDonald et alli* padece dos mesmos problemas apresentados no regime não relativístico, ou seja, o coeficiente de absorção possui contribuições de partículas não ressonantes. Este fato pode ser visto calculando-se a parte anti-Hermiteana de (IV.53). De (IV.39) vem

$$(\varepsilon_{33}^0)^{\text{aH}} = -\mu_e X_e \sum_{s=\pm 1} \left[\frac{\nu_e}{2} \mathcal{F}'_{7/2}(\mu_e \delta_s, 2\chi_{1e}^2) - \nu_e \chi_{1e} \mathcal{F}'_{7/2}(\mu_e \delta_1, 2\chi_{1e}^2) \right].$$

Neste caso, como ambos os argumentos da função $\mathcal{F}_q(z, a)$ são reais, pode-se afirmar que $\text{Im}[\mathcal{F}_q(z, a)]$ é não nula somente quando

$$z - a = \mu_e \left(1 - nY_e(x_1) - \frac{N_B^2}{2} \right) < 0,$$

o qual é igual a (IV.41), configurando o seu vínculo com a condição de ressonância (A.1), e a contribuição de partículas não ressonantes se faz evidente no termo $\mathcal{F}'_{7/2}$.

Os exemplos escolhidos nas abordagens *A* e *B* constituem casos recentes de tratamentos ao problema da propagação e absorção de ondas em plasmas inomogêneos utilizando uma formulação basicamente idêntica à desenvolvida nesta tese ao longo dos capítulos II e III. Mostrou-se que os tensores dielétricos e/ou relações de dispersão e/ou equações da onda que ambas as abordagens lograram desenvolver são completamente equivalentes e podem ser plenamente derivados, de forma alternativa, com o mesmo ferramental aqui utilizado para derivar o tensor $\vec{\varepsilon}^0$. Ao contrário, porém, do que é aqui posteriormente executado, estas abordagens se detêm no tensor supracitado, e não empregam a transformação BGI para obter por fim o tensor dielétrico efetivo, o qual apresenta todas as propriedades de simetria fisicamente relevantes. Devido a isso, estas abordagens contêm todas as assimetrias apresentadas pelo tensor $\vec{\varepsilon}^0$, isto é, não respeitam as relações recíprocas de Onsager e possuem contribuições não ressonantes no coeficiente de absorção, contribuições essas que constituem o denominado fluxo cinético de potência e que não possuem uma interpretação física adequada. Além disso, o tensor $\vec{\varepsilon}^0$ não é a verdadeira transformada de Fourier do tensor dielétrico no espaço de configuração. O tensor efetivo, por outro lado, corrige estas anomalias e em consequência possui somente contribuições ressonantes à parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico ou no coeficiente de absorção, como seria de se esperar que ocorresse no regime linear.

A análise aqui desenvolvida para o caso de um plasma homogêneo imerso em um campo magnético inomogêneo complementa a análise para o caso de um plasma inomogêneo imerso em um campo homogêneo, onde também se fez uso da transformação BGI. Esta análise foi levada a cabo por *Caldela et alli* [18–20] e por *Cavalcanti et alli* [21, 23].

IV.4 Tensor Dielétrico Efetivo para Distribuições de Não-Equilíbrio

Nesta seção será calculado o tensor dielétrico para uma função distribuição que está fora do equilíbrio termodinâmico. Este tipo de distribuição pode dar origem a instabilidades, pois possui um excesso de energia cinética nas partículas, a qual pode ser transferida a um determinado modo normal de oscilação, amplificando-o. Este estudo é importante pois os plasmas que são observados em ambientes naturais, como magnetosferas, ionosferas, coroa solar, *etc*, ou em laboratório, como máquinas com espelhos magnéticos, geralmente possuem distribuições que apresentam algum aspecto de não-equilíbrio, resultando na amplificação de algum modo normal que pode ser observado. É de interesse aqui principiar o estudo dos efeitos que gradientes perpendiculares no campo magnético induzem nas instabilidades que já ocorreriam em plasmas homogêneos.

Para a função distribuição será utilizado um modelo longamente empregado em estudos teóricos de instabilidades que é a função de *Dory-Guest-Harris* (DGH) [26] com anisotropia nas temperaturas paralela e perpendicular

$$f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = A_{\ell_{\alpha}} u_{\perp}^{2\ell_{\alpha}} e^{-(\mu_{\perp\alpha} u_{\perp}^2 + \mu_{\parallel\alpha} u_{\parallel}^2)/2} \quad (\text{IV.54.a})$$

$$A_{\ell_{\alpha}} = \left(\frac{\mu_{\parallel\alpha}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_{\perp\alpha}}{2\pi} \frac{\mu_{\perp\alpha}^{\ell_{\alpha}}}{2^{\ell_{\alpha}} \ell_{\alpha}!}, \quad (\text{IV.54.b})$$

onde

$$\mu_{(\pm)\alpha} = \frac{m_{\alpha} c^2}{T_{(\pm)\alpha}}$$

e ℓ_{α} é um número inteiro. A função (IV.54) apresenta dois aspectos que são freqüentemente observados em plasmas espaciais e de laboratório que são:

1. inversão de população na direção perpendicular

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u_{\perp}} > 0;$$

a função $f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})$ é nula em $u_{\perp} = 0$ (para $\ell_{\alpha} \neq 0$) e possui o seu máximo em $u_{\perp} = \sqrt{2\ell_{\alpha}/\mu_{\perp\alpha}}$;

2. dispersão de velocidades distintas nas direções paralela ($\mu_{\parallel\alpha}$) e perpendicular ($\mu_{\perp\alpha}$) em relação à direção do campo magnético ambiente ($\mu_{\perp\alpha} \neq \mu_{\parallel\alpha}$).

Outro aspecto de não-equilíbrio amiúde observado é a presença de um feixe de partículas na direção paralela, significando que o plasma possui um componente com velocidade relativa em relação ao referencial adotado. Este feixe é costumeiramente modelado através de uma

Maxwelliana deslocada, isto é, se se introduzisse este aspecto em (IV.54.a), a distribuição teria a forma

$$f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) \propto e^{-\mu_{\parallel\alpha}(u_{\parallel}-u_{\alpha})^2/2},$$

onde $u_{\alpha} = v_{\alpha}/c$, sendo v_{α} a velocidade do feixe associado à espécie α . Entretanto, a introdução deste aspecto complicaria ainda mais os cálculos do tensor dielétrico. Além disso, os efeitos de um feixe podem ser obtidos calculando-se o tensor dielétrico inicialmente no referencial de repouso do plasma, isto é, em um referencial onde $u_{\alpha} = 0$, e em seguida aplicando uma transformação de Lorentz sobre o tensor dielétrico para o referencial de laboratório. Aplicações deste procedimento podem ser encontradas em *Gaelzer et alli* [34, 40] ou em *Melrose* (1973) [78].

O tensor dielétrico para a distribuição (IV.54) será calculado utilizando-se o ferramental empregado na seção IV.1. O regime de velocidades é fracamente relativístico, e neste caso os operadores \mathcal{L} e L aplicados em $f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})$ resultam

$$\mathcal{L}f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = \left[-\mu_{\perp\alpha}u_{\perp} + \frac{2\ell_{\alpha}}{u_{\perp}}(1 - N_{\parallel}u_{\parallel}) + (\mu_{\perp\alpha} - \mu_{\parallel\alpha})N_{\parallel}u_{\parallel}u_{\perp} \right] f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) \quad (\text{IV.55.a})$$

$$Lf_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = \left[2\ell_{\alpha}\frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}^2} - (\mu_{\perp\alpha} - \mu_{\parallel\alpha})u_{\parallel} \right] f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}), \quad (\text{IV.55.b})$$

e a quantidade $D_{n\alpha}$ é novamente dada pela expressão (IV.6). Tem-se então para $\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$:

$$\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - i \sum_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{\mathcal{I}}_n - \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \sum_{\alpha} X_{\alpha} \int d^3u u_{\parallel} Lf_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}). \quad (\text{IV.56})$$

Utilizando novamente a integral $\overleftrightarrow{\mathcal{I}}_u$ dada por (IV.7.b) pode-se calcular vários de seus componentes simultaneamente, a exemplo do que se fez na seção IV.1. Para os componentes $(i, j = 1, 2)$, a função $(\mathcal{I}_u)_{ij}$ fica então escrita

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_u)_{ij} = 2\pi A_{\ell_{\alpha}} \left[-\mu_{\perp\alpha} \mathcal{I}_{\parallel}^{(0)} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp}^{2\ell_{\alpha}+1} e^{-\lambda_{\alpha} u_{\perp}^2/2} (\Pi_{n\alpha}^-)_i (\Pi_{n\alpha}^+)_j \right. \\ \left. + 2\ell_{\alpha} (\mathcal{I}_{\parallel}^{(0)} - N_{\parallel} \mathcal{I}_{\parallel}^{(1)}) \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp}^{2\ell_{\alpha}-1} e^{-\lambda_{\alpha} u_{\perp}^2/2} (\Pi_{n\alpha}^-)_i (\Pi_{n\alpha}^+)_j \right. \\ \left. + \Delta_{\mu} N_{\parallel} \mathcal{I}_{\parallel}^{(1)} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp}^{2\ell_{\alpha}+1} e^{-\lambda_{\alpha} u_{\perp}^2/2} (\Pi_{n\alpha}^-)_i (\Pi_{n\alpha}^+)_j \right], \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}_{\parallel}^{(p)}$ é dada por (IV.8), com $\mu_{\alpha} \rightarrow \mu_{\parallel\alpha}$. Agora $\lambda_{\alpha} = \mu_{\perp\alpha} - i\sigma_{\alpha}t$ e $\Delta_{\mu} = \mu_{\perp\alpha} - \mu_{\parallel\alpha}$.

Introduzindo as expressões para $(\Pi_{n\alpha}^{\pm})_i$ dadas em (IV.3), e fazendo uso dos vetores auxiliares $\zeta^{\pm}(t)$ e $\vartheta^{\pm}(t)$ definidos em (IV.5), pode-se escrever $(\mathcal{I}_u)_{ij}$ em termos das seguintes integrais em u_{\perp} :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp}^{2p+1} e^{-\lambda_{\alpha} u_{\perp}^2/2} J_n(u_{\perp} Q_{n\alpha}^+) J_m(u_{\perp} Q_{n\alpha}^-) = \\ (-2)^p \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} e^{-(\lambda_{\alpha} + \eta) u_{\perp}^2/2} J_n(u_{\perp} Q_{n\alpha}^+) J_m(u_{\perp} Q_{n\alpha}^-) \Big|_{\eta=0}, \end{aligned}$$

onde p , n e m são inteiros positivos. Desta forma escreve-se $(\mathcal{I}_u)_{ij}$ em termos das derivadas das integrais \mathcal{I}_{11} , \mathcal{I}_{12}^\pm e \mathcal{I}_{13} , dadas por (IV.9), simplesmente substituindo λ_α por $\lambda_\alpha + \mathfrak{h}$. Usando estas integrais, resulta para $(\mathcal{I}_u)_{ij}$

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{I}_u)_{ij}}{(2\pi)^{3/2}} = & -(-2)^{\ell_\alpha} A_{\ell_\alpha} \frac{e^{-N_{\parallel}^2 t^2 / 2(\mu_{\parallel\alpha} - it)}}{(\mu_{\parallel\alpha} - it)^{1/2}} \left[\left(\mu_{\perp\alpha} + \frac{i\Delta_\mu N_{\parallel}^2 t}{\mu_{\parallel\alpha} - it} \right) \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha \left(1 + \frac{iN_{\parallel}^2 t}{\mu_{\parallel\alpha} - it} \right) \frac{\partial^{\ell_\alpha - 1}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha - 1}} \right] \\ & \times \left(\zeta_i^- \zeta_j^+ \mathcal{I}_{11} + \frac{\vartheta_i^- \vartheta_j^+}{Q_{n\alpha}^- Q_{n\alpha}^+} \mathcal{I}_{13} + \zeta_i^- \frac{\vartheta_j^+}{Q_{n\alpha}^+} \mathcal{I}_{12}^+ + \frac{\vartheta_i^-}{Q_{n\alpha}^-} \zeta_j^+ \mathcal{I}_{12}^- \right) \Big|_{\mathfrak{h}=0}. \end{aligned}$$

A expressão acima para $(\mathcal{I}_u)_{ij}$ será introduzida em $(\mathcal{I}_n)_{ij}$, dada por (IV.7.a). Antes, porém, será definida a nova variável

$$t = \mu_{\parallel\alpha} t',$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} [1 - nY_\alpha(x_1)]t & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha} \delta_{n\alpha} t' \\ \mu_{\parallel\alpha} - it & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha} (1 - it') \\ \mu_{\perp\alpha} - i\sigma_\alpha t + \mathfrak{h} & \rightarrow \mu_{\perp\alpha} [1 - i\sigma_\alpha r_T t' + \mathfrak{h}] \\ H_{n\alpha}(t) & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha} (\nu_\alpha^2 - i2s_n \nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} t' - \chi_{n\alpha}^2 t'^2) \equiv \mu_{\parallel\alpha} H_{n\alpha}(t') \\ R_{n\alpha}(t) & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha} \sqrt{\nu_\alpha^4 - 2\nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha}^2 t'^2 + \chi_{n\alpha}^4 t'^4} \equiv \mu_{\parallel\alpha} S_{n\alpha}(t') \\ Q_{n\alpha}^\pm(t) & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} \sqrt{\nu_\alpha^2 \pm 2\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} t' + \chi_{n\alpha}^2 t'^2} \equiv \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} Q_{n\alpha}^\pm(t') \\ \zeta^\pm(t) & \rightarrow \zeta^\pm(t') \\ \vartheta^\pm(t) & \rightarrow \mu_{\parallel\alpha} [\pm i H_{n\alpha}^{1/2}(t') \nu_\alpha \sin \psi \hat{e}_1 \mp i H_{n\alpha}^{1/2}(t') (\nu_\alpha \cos \psi \pm \chi_{n\alpha} t') \hat{e}_2] = \mu_{\parallel\alpha} \vartheta^\pm(t') \\ \frac{\mathfrak{h}}{\mu_{\perp\alpha}} & \rightarrow \mathfrak{h} \Rightarrow \frac{\partial^n}{\partial \mathfrak{h}^n} \rightarrow \frac{1}{\mu_{\perp\alpha}^n} \frac{\partial^n}{\partial \mathfrak{h}^n}, \end{aligned}$$

sendo agora

$$r_T = \frac{\mu_{\parallel\alpha}}{\mu_{\perp\alpha}} = \frac{T_{\perp\alpha}}{T_{\parallel\alpha}}; \quad \nu_\alpha = \frac{N_\perp}{\mu_{\parallel\alpha}^{1/2} Y_\alpha}; \quad \chi_{n\alpha} = \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} \mathfrak{K}_n.$$

Desta forma obtém-se

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_n)_{ij} = & \mu_{\perp\alpha} \frac{(-)^{\ell_\alpha + 1}}{\ell_\alpha!} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_{\parallel\alpha} \delta_{n\alpha} t}}{(1 - it)^{1/2}} e^{-\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2 / 2(1 - it)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n| - 1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \\ & \times \left[\left(1 + i(1 - r_T) \frac{N_{\parallel}^2 t}{1 - it} \right) \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha \left(1 + i \frac{N_{\parallel}^2 t}{1 - it} \right) \frac{\partial^{\ell_\alpha - 1}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha - 1}} \right] \\ & \times \left\langle \frac{e^{-r_T(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h})}}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \left\{ \left[\zeta_i^- \zeta_j^+ + \frac{2r_T^2 \vartheta_i^- \vartheta_j^+}{(1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h})^2} + r_T \frac{\zeta_i^- \vartheta_j^+ + \vartheta_i^- \zeta_j^+}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right] \right. \right. \\ & \times I_{|n|} \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) - \frac{r_T}{(1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}) S_{n\alpha}} \\ & \times \left[2\vartheta_i^- \vartheta_j^+ \left(|n| + r_T \frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) + \zeta_i^- \vartheta_j^+ (Q_{n\alpha}^-)^2 + \vartheta_i^- \zeta_j^+ (Q_{n\alpha}^+)^2 \right] \\ & \left. \left. \times I_{|n| + 1} \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) \right\} \right\rangle \Big|_{\mathfrak{h}=0}. \end{aligned} \tag{IV.57}$$

onde o apóstrofo (') foi novamente retirado.

Calcular-se-á agora os componentes $(\mathcal{I}_u)_{(i3)}^{(i3)}$ ($i = 1, 2$). De (IV.7.b, IV.3, IV.8 e IV.9) resulta

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I}_u)_{(i3)}^{(i3)} = & (2\pi)^{3/2} (-2)^{\ell_\alpha} A_{\ell_\alpha} N_{\parallel} \frac{e^{-N_{\parallel}^2 t^2 / 2(\mu_{\parallel\alpha} - it)}}{(\mu_{\parallel\alpha} - it)^{3/2}} \left\{ \left[i\mu_{\perp\alpha} t + \Delta_{\mu} \left(1 - \frac{N_{\parallel}^2 t^2}{\mu_{\parallel\alpha} - it} \right) \right] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha}} \right. \\
 & + \ell_\alpha \left[it + \left(1 - \frac{N_{\parallel}^2 t^2}{\mu_{\parallel\alpha} - it} \right) \right] \frac{\partial^{(\ell_\alpha - 1)}}{\partial \mathfrak{h}^{(\ell_\alpha - 1)}} \left. \right\} \frac{e^{-(\beta_\alpha^2 + \mathfrak{K}_n^2 t^2) / (\lambda_\alpha + \mathfrak{h})}}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \left\{ \zeta_i^{\mp} H_{n\alpha}^{1/2}(t) I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}}{\lambda_\alpha + \mathfrak{h}} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\vartheta_i^{\mp} H_{n\alpha}^{1/2}(t)}{(\lambda_\alpha + \mathfrak{h}) Q_{n\alpha}^{\mp}(t)} \left[Q_{n\alpha}^{\mp} I_{|n|} \left(\frac{R_{n\alpha}}{\lambda_\alpha + \mathfrak{h}} \right) - Q_{n\alpha}^{\pm} I_{|n|+1} \left(\frac{R_{n\alpha}}{\lambda_\alpha + \mathfrak{h}} \right) \right] \right\} \Big|_{\mathfrak{h}=0}.
 \end{aligned}$$

Introduzindo a expressão acima em $(\mathcal{I}_n)_{ij}$ e realizando a troca de variáveis $t \rightarrow t'$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I}_n)_{(i3)}^{(i3)} = & \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} \mu_{\perp\alpha} N_{\parallel} \frac{(-)^{\ell_\alpha}}{\ell_\alpha!} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_{\parallel\alpha} \delta_{n\alpha} t}}{(1-it)^{3/2}} e^{-\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2 / 2(1-it)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^{(|n|-1)}}{[S_{n\alpha}(t)]^{|n|}} \\
 & \times \left\{ \left[it + \frac{1-r_T}{\mu_{\parallel\alpha}} \left(1 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} \right) \right] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha \left[it + \frac{1}{\mu_{\parallel\alpha}} \left(1 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} \right) \right] \frac{\partial^{(\ell_\alpha - 1)}}{\partial \mathfrak{h}^{(\ell_\alpha - 1)}} \right\} \\
 & \times \left\{ \frac{e^{-r_T(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h})}}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \left[\left(\zeta_i^{\mp} H_{n\alpha}^{1/2}(t) + \frac{r_T \vartheta_i^{\mp} H_{n\alpha}^{1/2}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) I_{|n|} \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{r_T \vartheta_i^{\mp} H_{n\alpha}^{1/2}(t) (Q_{n\alpha}^{\pm})^2}{(1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}) S_{n\alpha}} I_{|n|+1} \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) \right] \right\} \Big|_{\mathfrak{h}=0}. \tag{IV.58}
 \end{aligned}$$

Por fim, o componente $(\mathcal{I}_n)_{33}$ fica igual a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I}_n)_{33} = & -\mu_{\perp\alpha} \frac{(-)^{\ell_\alpha}}{\ell_\alpha!} \int_0^\infty dt \frac{e^{i\mu_{\parallel\alpha} \delta_{n\alpha} t}}{(1-it)^{3/2}} e^{-\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2 / 2(1-it)} \left[\frac{H_{n\alpha}(t)}{S_{n\alpha}(t)} \right]^{|n|} \\
 & \times \left\{ \left[1 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} + i(1-r_T) \frac{N_{\parallel}^2 t}{1-it} \left(3 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} \right) \right] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \mathfrak{h}^{\ell_\alpha}} \right. \\
 & + \ell_\alpha \left[1 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} + i \frac{N_{\parallel}^2 t}{1-it} \left(3 - \frac{\mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 t^2}{1-it} \right) \right] \frac{\partial^{(\ell_\alpha - 1)}}{\partial \mathfrak{h}^{(\ell_\alpha - 1)}} \left. \right\} \\
 & \times \left[\frac{e^{-r_T(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h})}}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} I_{|n|} \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_\alpha t + \mathfrak{h}} \right) \right] \Big|_{\mathfrak{h}=0}. \tag{IV.59}
 \end{aligned}$$

Já o terceiro termo do lado direito de (IV.56), após substituição de (IV.55.b) e realização das integrações, resulta

$$\sum_{\alpha} X_{\alpha} \int d^3 u u_{\parallel} L f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}) = \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{\ell_{\alpha}! r_T} [\ell_{\alpha}(\ell_{\alpha} - 1)! - (1 - r_T)\ell_{\alpha}!] \equiv \varepsilon_{330}. \tag{IV.60}$$

Serão introduzidas agora algumas definições com o intuito de simplificar a notação. Defina-se inicialmente uma nova função de dispersão de plasma inhomogêneo a exemplo de (IV.18.a),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{r,q,p,m,l}^*(z, a, \sigma_{\alpha}, \nu_{\alpha}, \chi_{n\alpha}, r_T; \mathfrak{h}) = & -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-at^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1 - ir_T \sigma_{\alpha} t + \mathfrak{h})^p} e^{-r_T(\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2) / (1-ir_T \sigma_{\alpha} t + \mathfrak{h})} \\
 & \times \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{r_T S_{n\alpha}(t)}{1 - ir_T \sigma_{\alpha} t + \mathfrak{h}} \right), \tag{IV.61}
 \end{aligned}$$

a qual se reduz a (IV.18) quando $T_{\perp\alpha} = T_{\parallel\alpha}$ e $\eta = 0$. Define-se em seguida os seguintes operadores

$$\mathfrak{R}_{r',q'} \mathcal{S}_{r,q,p,m,l}^* \equiv \mathcal{S}_{(r+r'),(q+q'),p,m,l}^* \quad (\text{IV.62.a})$$

$$\mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(1)}(r_T) \equiv [1 + (1 - r_T)N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{1,1}] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \eta^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha (1 + N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{1,1}) \frac{\partial^{\ell_\alpha - 1}}{\partial \eta^{\ell_\alpha - 1}} \quad (\text{IV.62.b})$$

$$\mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(2)}(r_T) \equiv \left[\mathfrak{R}_{1,0} + \frac{1 - r_T}{\mu_{\parallel\alpha}} (1 + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{2,1}) \right] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \eta^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha \left[\mathfrak{R}_{1,0} + \frac{1}{\mu_{\parallel\alpha}} (1 + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{2,1}) \right] \frac{\partial^{\ell_\alpha - 1}}{\partial \eta^{\ell_\alpha - 1}} \quad (\text{IV.62.c})$$

$$\mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(3)}(r_T) \equiv [1 + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{2,1} + (1 - r_T)N_{\parallel}^2 (3\mathfrak{R}_{1,1} + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{3,2})] \frac{\partial^{\ell_\alpha}}{\partial \eta^{\ell_\alpha}} + \ell_\alpha [1 + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{2,1} + N_{\parallel}^2 (3\mathfrak{R}_{1,1} + \mu_{\parallel\alpha} N_{\parallel}^2 \mathfrak{R}_{3,2})] \frac{\partial^{\ell_\alpha - 1}}{\partial \eta^{\ell_\alpha - 1}}. \quad (\text{IV.62.d})$$

Os diversos produtos entre os vetores auxiliares $\zeta^\pm(t)$ e $\vartheta^\pm(t)$ continuam sendo dados pelas expressões escritas na seção IV.1, página 64. Desta forma, coletando os resultados escritos em (IV.57, IV.58, IV.59 e IV.60), juntamente com as definições (IV.62.a-d), o tensor dielétrico efetivo, dado por (IV.56), pode ser finalmente escrito como

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbb{1}} - \sum_{\alpha} \mu_{\perp\alpha} X_{\alpha} \frac{(-)^{\ell_\alpha}}{\ell_\alpha!} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}_{n\alpha} - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \epsilon_{330}, \quad (\text{IV.63})$$

onde os componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{T}}_{n\alpha}$ são dados por

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n\alpha})_{11} = & \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(1)} \left[n^2 \mathcal{S}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|}^* + 2nr_T \nu_{\alpha} \text{sen } \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{S}_{1,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* + \mathcal{S}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right. \\ & + 2r_T^2 \nu_{\alpha}^2 \text{sen}^2 \psi \left(\mathcal{S}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|}^* - \frac{|n|}{r_T} \mathcal{S}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* \right. \\ & \left. \left. - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{S}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{S}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* \right) \right] \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (\text{IV.64.a})$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n\alpha})_{22} = & \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(1)} \left[n^2 \mathcal{S}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|}^* - 2nr_T \nu_{\alpha} \text{sen } \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{S}_{1,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* - \mathcal{S}_{1,\gamma_2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right. \\ & + 2r_T^2 \nu_{\alpha}^2 \cos^2 \psi \left(\mathcal{S}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|}^* - \frac{|n|}{r_T} \mathcal{S}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{S}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* \right. \\ & \left. + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{S}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* \right) + 2r_T^2 \chi_{n\alpha}^2 \left(\mathcal{S}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|}^* + \frac{|n|}{r_T} \mathcal{S}_{2,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* \right. \\ & \left. \left. - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{S}_{2,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{S}_{4,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* \right) \right] \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (\text{IV.64.b})$$

$$(\mathcal{T}_{n\alpha})_{33} = \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(3)} \mathcal{S}_{0,\gamma_2,1,|n|,|n|}^* \Big|_{\eta=0} \quad (\text{IV.64.c})$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(12)} = & \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(1)} \left\{ \pm i 2r_T^2 \nu_{\alpha} \text{sen } \psi \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{S}_{1,\gamma_2,3,|n|,|n|}^* - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{S}_{1,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{S}_{3,\gamma_2,3,|n|,|n|+1}^* \right) \right. \\ & \left. \pm inr_T \left[\frac{|n|}{r_T} \mathcal{S}_{0,\gamma_2,1,|n|-1,|n|}^* - \nu_{\alpha}^2 \left(\mathcal{S}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* - \mathcal{S}_{0,\gamma_2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi_{n\alpha}^2 \left(\mathcal{S}_{2,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* + \mathcal{S}_{2,\gamma_2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right] - r_T^2 \nu_{\alpha}^2 \text{sen } 2\psi \left(\mathcal{S}_{0,\gamma_2,3,|n|,|n|}^* - \frac{|n|}{r_T} \mathcal{S}_{0,\gamma_2,2,|n|-1,|n|}^* \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. -\nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,1/2,3,|n|,|n|+1}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,1/2,3,|n|,|n|+1}^* \right) - 2nr_T\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,1/2,2,|n|-1,|n|}^* \right\} \Big|_{\eta=0} \quad (\text{IV.64.d})$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(13)}^{(31)} = & \pm i N_{\parallel} \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(2)} \left[n \left(\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,3/2,1,|n|-1,|n|}^* \pm i\nu_\alpha e^{\pm is_n \psi} \mathcal{G}_{0,3/2,1,|n|-1,|n|}^* \right) \right. \\ & + r_T \nu_\alpha \operatorname{sen} \psi \left(\mathcal{G}_{0,3/2,2,|n|,|n|}^* - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \right. \\ & \left. \left. \pm i2\nu_\alpha \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,3/2,2,|n|,|n|+1}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right] \Big|_{\eta=0} \quad (\text{IV.64.e}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(23)}^{(32)} = & N_{\parallel} \mu_{\parallel\alpha}^{1/2} \mathfrak{N}_{\ell_\alpha}^{(2)} \left[|n| \left(\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,3/2,1,|n|-1,|n|}^* \pm i\nu_\alpha e^{\pm is_n \psi} \mathcal{G}_{0,3/2,1,|n|-1,|n|}^* \right) \right. \\ & + r_T \nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \mp ir_T \nu_\alpha \cos \psi \left(\mathcal{G}_{0,3/2,2,|n|,|n|}^* - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \right. \\ & \left. \left. - \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \right) + r_T \chi_{n\alpha} \left(\mathcal{G}_{1,3/2,2,|n|,|n|}^* + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,3/2,2,|n|,|n|+1}^* \right) \right] \Big|_{\eta=0} . \quad (\text{IV.64.f}) \end{aligned}$$

Pode-se notar claramente que o tensor dielétrico efetivo derivado para a distribuição (IV.54) também possui somente contribuições de partículas ressonantes na sua parte anti-Hermitiana, a exemplo do que ocorre com a distribuição Maxwelliana.

CAPÍTULO V

ANÁLISE NUMÉRICA E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo está devotado a uma análise numérica das soluções da relação de dispersão obtida utilizando-se os componentes do tensor dielétrico efetivo derivado para uma distribuição Maxwelliana, componentes estes que podem ser vistos em (IV.15 e IV.16).

Esta aplicação numérica possui um caráter exclusivamente acadêmico. A sua ênfase será colocada essencialmente na comparação das soluções da relação de dispersão para um plasma imerso em um campo magnético inhomogêneo com os resultados obtidos na aproximação localmente homogênea e também com os resultados principais que podem ser obtidos fazendo uso das expressões derivadas nas abordagens alternativas comentadas na seção IV.3.

Não será aqui realizada uma aplicação numérica específica, como por exemplo o estudo da absorção de ondas de cíclotron em tokamaks ou em determinadas regiões da magnetosfera. Tais aplicações constituem *per se* problemas relativamente complicados, pois exigem a construção de um modelo físico suficientemente fidedigno, e freqüentemente se faz necessário acoplar um código numérico de traçado de raios (*ray-tracing*) sofisticado para que se possa determinar por quais regiões do plasma a frente de onda irá se deslocar, de modo a possibilitar o cálculo do coeficiente de absorção. Exemplos recentes de trabalhos que calculam a emissão de ondas de cíclotron nas regiões aurorais da magnetosfera terrestre fazendo uso de códigos de traçado de raios podem ser encontrados em *Gaelzer et alli* (1994) [42] e em *Cavalcanti et alli* (1995) [22].

Além disso, será estudado somente um intervalo de freqüências próximas à freqüência de cíclotron eletrônica ($|\Omega_e|$), sendo considerado apenas o regime de velocidades fracamente relativísticas. Como as regiões próximas às freqüências de cíclotron iônicas (Ω_i) não serão abordadas, permanece inexplorado o regime não relativístico de velocidades. Particularizando desta forma o intervalo de freqüências utilizado, resulta uma simplificação para a análise, pois para freqüências $\omega \approx |\Omega_e|$ o efeito dos íons pode ser desprezado e estes entram no modelo somente como um fundo neutralizador. Já para $\omega \approx \Omega_i$, o efeito dos elétrons nos componentes de $\vec{\epsilon}$ não pode ser desprezado, e desta forma aumenta o número de parâmetros físicos a serem determinados na análise numérica.

Desta forma, a estrutura do capítulo é a seguinte. Inicialmente, na seção V.1 será exposta a metodologia a ser utilizada neste capítulo para a análise das soluções da relação de dispersão. Em seguida, será realizada a análise propriamente dita dos dois modos de propagação que são sustentados pelo plasma quando a onda se desloca na direção perpendicular ao campo magnético e paralela à inhomogeneidade. Na seção V.2 será analisado o modo ordinário. Serão apresentados alguns resultados ainda inéditos, juntamente com análises que já foram divulgadas na literatura e que podem ser encontradas em *Gaelzer et alli* (1995) [38]. Após a análise do modo ordinário, será feita na seção V.3 uma breve análise dos resultados da relação de dispersão para o modo extraordinário.

V.1 Metodologia Empregada na Análise Numérica

Como já foi mencionado, o estudo realizado neste capítulo será essencialmente acadêmico, e portanto não se discorrerá profundamente sobre os modelos que usualmente são adotados em problemas específicos, tais como na absorção de ondas em determinada máquina (tokamak, stellarator, *etc*) ou em determinada região do espaço (magnetosfera, vento solar, cromosfera solar, *etc*). O intuito deste capítulo é ressaltar as diferenças que surgem quando se compara os resultados obtidos com o emprego da formulação desenvolvida nesta tese com os resultados de outros tratamentos, como a aproximação localmente homogênea ou as abordagens alternativas comentadas na seção IV.3.

Mesmo o estudo acadêmico, contudo, será restrito a algumas situações particulares. Uma investigação completa dos efeitos isolados de todos os parâmetros físicos existentes nos componentes de $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ demanda uma quantidade de espaço e de tempo de computação enorme, e todas as possibilidades não foram ainda exploradas. Para tanto seria necessário realizar uma varredura ampla nos parâmetros físicos associados à onda eletromagnética, como frequência e direção de propagação, em conjunto com uma varredura nos parâmetros físicos associados ao plasma, tais como a intensidade e o gradiente do campo magnético, além dos parâmetros que são inerentes a cada espécie e/ou população de partículas considerada, como temperatura, densidade, índice de cone-de-perda, velocidade do feixe, *etc*.

Para realizar esta análise, portanto, a metodologia a ser empregada consiste basicamente em resolver numericamente a relação de dispersão I.10, mantendo fixo todo o conjunto de parâmetros físicos utilizados com a exceção de um dos parâmetros, o qual atuará como variável independente. A solução da relação de dispersão, por sua vez, fornece duas variáveis dependentes, uma correspondente à sua parte real e outra à sua parte imaginária, e neste caso há mais de uma possibilidade de escolha para o par de variáveis dependentes. As escolhas

usualmente feitas são as seguintes.

1. *Formulação de frequência complexa.* Neste caso escolhe-se arbitrariamente a direção de propagação (ψ , $\theta = \tan^{-1}(k_{\perp}/k_{\parallel})$) e se opta por fornecer ou os valores da parte real da frequência (ω_r), caso onde a relação de dispersão fornece o módulo do vetor de onda (k) na sua parte real, ou *vice-versa*. Em ambos os casos, a relação de dispersão fornece também a taxa de absorção (ω_i) na sua parte imaginária.
2. *Formulação de vetor de onda complexo.* Aqui escolhe-se arbitrariamente a direção de propagação (ψ e θ) e se opta ou por fornecer o valor da frequência (ω), obtendo-se as partes real e imaginária do vetor de onda ($k = k_r + ik_i$), ou se fornece k_r , resultando então ω e k_i .
3. Determina-se arbitrariamente a frequência, o componente paralelo do vetor de onda (N_{\parallel}) e o ângulo azimutal (ψ), e a relação de dispersão fornece as partes real e imaginária do componente perpendicular do vetor de onda ($N_{\perp} = \text{Re}(N_{\perp}) + i\text{Im}(N_{\perp})$).

Dentre estas três possibilidades, a mais simples de ser implementada é a terceira, principalmente quando $\psi = 0$, pois neste caso o número de termos complexos nos argumentos da função de dispersão de plasma inhomogêneo (IV.18) é minimizado. Na prática, esta escolha somente é factível no caso de propagação predominantemente perpendicular, isto é, para $\pi/2 \geq \theta \gg 0$. A escolha feita neste capítulo, por conseguinte, é a terceira alternativa.

Após ter sido feita a escolha dos conjuntos de variáveis independentes e dependentes, necessita-se então resolver a relação de dispersão (I.10). Na sua forma mais geral, a relação de dispersão pode ser escrita explicitamente da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 & (N_{\perp} \cos \psi)^4 \varepsilon_{11} + (N_{\perp} \cos \psi)^3 \left[N_{\perp} \sin \psi (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + N_{\parallel} (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \right] + \\
 & (N_{\perp} \cos \psi)^2 \left[(N_{\perp} \sin \psi)^2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + N_{\parallel} N_{\perp} \sin \psi (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) + \right. \\
 & \quad \left. N_{\parallel}^2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{31} \right] + \\
 & N_{\perp} \cos \psi \left[(N_{\perp} \sin \psi)^3 (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + N_{\parallel} (N_{\perp} \sin \psi)^2 (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) + \right. \\
 & N_{\perp} \sin \psi \left(N_{\parallel}^2 \varepsilon_{12} + N_{\parallel}^2 \varepsilon_{21} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{21} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{32} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{31} \right) + \\
 & \quad \left. N_{\parallel}^3 (\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) + N_{\parallel} (\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} - \varepsilon_{13} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} \varepsilon_{32} - \varepsilon_{22} \varepsilon_{31}) \right] + \\
 & \quad (N_{\perp} \sin \psi)^4 \varepsilon_{22} + N_{\parallel} (N_{\perp} \sin \psi)^3 (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) + \\
 & (N_{\perp} \sin \psi)^2 \left[N_{\parallel}^2 (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} \right] + \\
 & N_{\perp} \sin \psi \left[N_{\parallel}^3 (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) - N_{\parallel} (\varepsilon_{11} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{32} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{31} - \varepsilon_{13} \varepsilon_{21}) \right] + \\
 & \quad N_{\parallel}^4 \varepsilon_{33} + N_{\parallel}^2 [\varepsilon_{13} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33}] + \\
 & \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32}) + \varepsilon_{12} (\varepsilon_{23} \varepsilon_{31} - \varepsilon_{21} \varepsilon_{33}) + \varepsilon_{13} (\varepsilon_{21} \varepsilon_{32} - \varepsilon_{22} \varepsilon_{31}) = 0. \quad (V.1)
 \end{aligned}$$

Os componentes de $\vec{\epsilon}$, por sua vez, também dependem de N_{\perp} , o qual aparece sempre na forma de potências e no argumento de exponenciais que compõem os integrandos que podem ser observados nas diversas formas para a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, dadas por (IV.23, IV.30, IV.36 e IV.37). Formalmente, portanto, a relação de dispersão é uma equação integral. A sua solução, entretanto, pode ser obtida numericamente utilizando-se um método iterativo, cujo algoritmo é bastante simples. A solução de (V.1) é obtida através de um código numérico que busca as raízes de funções complexas analíticas. Este método seleciona iterativamente diversos valores para N_{\perp} , os quais são inseridos nas definições dos componentes de $\vec{\epsilon}$ dadas por (IV.15 e IV.16), sendo as respectivas integrações realizadas também numericamente. O valor inicial para N_{\perp} é obtido através da solução da relação de dispersão para um plasma homogêneo, através do método descrito em *Gaelzer* (1991) [34]. A partir deste valor inicial o código numérico seleciona iterativamente valores de N_{\perp} de modo a convergir para a solução de (V.1). O método empregado para se obter numericamente a solução da relação de dispersão é o Método de Müller e as integrações em $\vec{\epsilon}$ são calculadas utilizando-se o Método de Gauss [92].

Expressões bem mais simples para (V.1) podem ser obtidas considerando-se o caso particular de propagação no plano perpendicular a B_0 ($N_{\parallel} = 0$). Neste caso, como se pode observar em (IV.16.e,f), os componentes ϵ_{13} , ϵ_{31} , ϵ_{23} e ϵ_{32} se anulam, desde que a função distribuição utilizada seja par em u_{\parallel} , como é o caso da Maxwelliana, e a relação de dispersão se reduz a duas equações que determinam dois modos distintos de propagação,

$$N_{\perp}^2 - \epsilon_{33}(x_1, \mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (\text{V.2.a})$$

$$(\epsilon_{11} - N_{\perp}^2 \sin^2 \psi) (\epsilon_{22} - N_{\perp}^2 \cos^2 \psi) - (\epsilon_{12} + N_{\perp}^2 \sin \psi \cos \psi) (\epsilon_{21} + N_{\perp}^2 \sin \psi \cos \psi) = 0 \quad (\text{V.2.b})$$

sendo que as polarizações destes modos são idênticas às do caso homogêneo, isto é, a equação (V.2.a) governa a propagação de uma onda no modo ordinário, cujo campo elétrico é dado por $\mathbf{E} = E_3 \hat{e}_3$, enquanto que a equação (V.2.b) governa a propagação no modo extraordinário, cujo campo elétrico é dado por $\mathbf{E} = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2$. Devido à simplificação obtida, os exemplos numéricos considerados nesta tese se restringem ao caso de propagação perpendicular ($N_{\parallel} = 0$).

Os componentes do tensor dielétrico, por sua vez, serão calculados na sua forma mais geral, dada por (IV.15 e IV.16), sendo a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ calculada através de (IV.23, IV.30, IV.36 ou IV.37), dependendo do ângulo azimutal (ψ) e da condição $q' < 1$. Como já foi mencionado, na sua forma mais geral a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ depende de N_{\perp} , o qual aparece no argumento de uma exponencial que por sua vez é parte de um integrando. É devido a isso que a relação de dispersão se torna uma função transcendental em N_{\perp} . Além disso, nesta

forma geral a função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, e por extensão os componentes de $\vec{\epsilon}$, é válida em todas as ordens do raio de Larmor, já que a exponencial em questão é dada por $\exp[-\nu_\alpha^2(1+y)]$, sendo

$$\nu_\alpha^2 = \frac{N_\perp^2}{\mu_\alpha Y_\alpha^2} = k_\perp^2 \frac{v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} = k_\perp^2 r_{L\alpha}^2,$$

onde $r_{L\alpha}$ é o raio de Larmor da espécie α . Deve-se ter sempre em mente, contudo, que a condição (IV.26) deve ser sempre respeitada, o que limita o valor máximo de $|N_\perp|$ para o qual as expressões obtidas são válidas.

Em diversas situações práticas, todavia, a aproximação de pequeno raio de Larmor é suficiente para garantir um resultado fidedigno. Em tal caso é sempre possível obter uma expressão para $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ válida para uma ordem arbitrária em potências de $r_{L\alpha}$. Tal expressão é obtida para o caso $\psi = 0$, por exemplo, expandindo a exponencial $\exp[-\nu_\alpha^2(1+y)]$ contida em (IV.23). Resulta daí

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{(-)^j \chi_{n\alpha}^{2(m-s)} \nu_\alpha^{2(j+s)}}{j! \pi(2l-1)!!} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} (1+y)^j \times \mathcal{F}_{q+p+l+j,r+2(m-s)}(z, a + \chi_{n\alpha}^2(1+y)).$$

Reordenando as somas de forma semelhante a (IV.29), obtém-se então uma série de potências de raio de Larmor:

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^j \binom{m}{s} \frac{(-)^{j-s} \chi_{n\alpha}^{2(m-s)} \Theta(m-s)}{(j-s)! \pi(2l-1)!!} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{l-1/2} (1+y)^{j-s} \times \mathcal{F}_{q+p+l+j-s,r+2(m-s)}(z, a + \chi_{n\alpha}^2(1+y)) \right] \nu_\alpha^{2j},$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Expansões semelhantes podem ser obtidas para as outras formas de $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$. Estas expansões são inseridas nas definições dos componentes de $\vec{\epsilon}$ os quais, por sua vez, entram no cálculo da relação de dispersão. Reordenando adequadamente os termos, pode-se então escrever a relação de dispersão na forma de uma série,

$$\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{r}, k_{\parallel}, \omega) \nu_\alpha^{2j} = 0,$$

a qual pode então ser truncada em determinada ordem do raio de Larmor e resolvida como um polinômio. Este método, aplicado para plasmas homogêneos, está descrito em *Gaelzer* (1991) [34]. Estas expansões, entretanto, demandariam uma quantidade muito grande de

álgebra, e por isso preferiu-se manter a forma original de $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ a expensas, certamente, de tempo computacional.

As análises realizadas para os modos ordinário e extraordinário são apresentadas nas seções seguintes.

V.2 Análise do Modo Ordinário

Nesta seção será apresentada uma análise numérica realizada sobre as soluções da relação de dispersão do modo ordinário, dada pela equação (V.2.a). Como já foi ressaltado, esta é formalmente uma equação integral, mas a sua solução numérica pode ser obtida através de um método iterativo que reúne códigos numéricos para o cálculo de raízes de funções e para integrações.

A análise para o modo ordinário se divide em duas partes. Inicialmente serão obtidos perfis de $N_O \equiv N_{\perp}$ (modo ordinário) em função da frequência ω para diversos valores de k_B , densidade, módulo do campo magnético, temperatura e ângulo azimutal. Em cada gráfico, onde serão apresentados perfis para diversos valores de k_B , por exemplo, os demais parâmetros físicos permanecerão constantes.

Inicialmente será considerado o efeito do parâmetro mais importante nesta teoria, ou seja, a derivada logarítmica do módulo do campo magnético, $k_B = d(\ln B_0)/dx_1$. A forma dos perfis independe, até onde se pôde constatar, dos valores tomados para os demais parâmetros físicos. Neste caso, estes valores serão escolhidos arbitrariamente sem prévia justificativa. Somente na segunda parte desta seção as razões para tais escolhas ficarão mais claras. Considerando então ondas que se propagam no modo ordinário em frequências próximas à frequência de ciclotron eletrônica, os parâmetros que necessitam ser valorizados são a temperatura (T_e), o ângulo azimutal (ψ) e a razão entre a frequência de plasma e o módulo da frequência de ciclotron eletrônicas ($\rho = \omega_{pe}/|\Omega_e| \propto n_e^{1/2}/B_0$). Através do parâmetro ρ , a quantidade X_e em (IV.16) fica definida em termos de Y_e , $X_e = \rho^2 Y_e^2$.

Na figura V.1 mostra-se a solução da equação (V.2.a) para diversos valores do parâmetro \widetilde{N}_B , sendo

$$\widetilde{N}_B = \frac{k_B c}{|\Omega_e|} = \frac{N_B}{|Y_e|}.$$

Os valores dos parâmetros físicos que permanecem constantes para todos os perfis apresentados nesta e nas próximas figuras serão mostrados nas respectivas legendas. Na figura V.1a mostra-se a parte imaginária do componente perpendicular do índice de refração, $\text{Im}(N_O)$, e na figura V.1b mostra-se a correspondente parte real, $\text{Re}(N_O)$. Os diversos perfis, mostrados com linhas de diferentes formatos e larguras, correspondem a diferentes valores do parâmetro

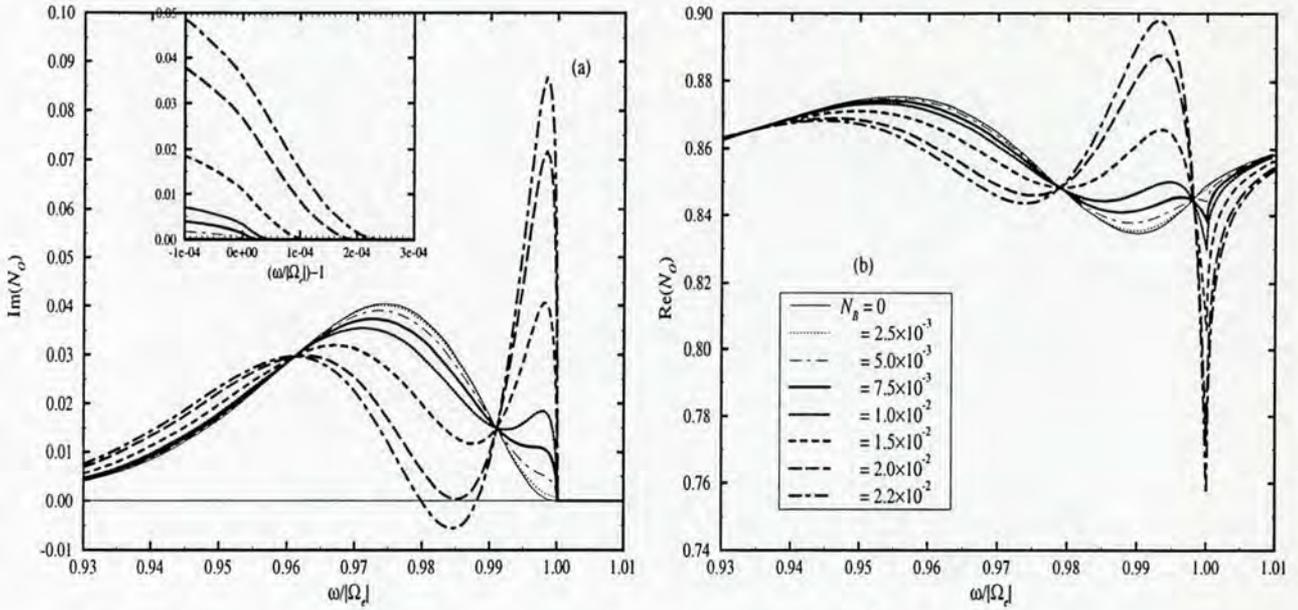


Figura V.1: (a) Parte imaginária de N_O , em função da frequência ($\omega/|\Omega_e|$) para diversos valores de \tilde{N}_B . Os demais parâmetros físicos utilizados são $T_e = 5$ keV, $\rho = 0,5$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$. (b) Parte real de N_O em função da frequência para os mesmos valores de parâmetros físicos.

\tilde{N}_B , valores estes que são mostrados na figura V.1b.

Na figura V.1a pode-se observar uma série de fenômenos. Por exemplo, observa-se que a existência do gradiente do campo ocasiona uma modificação no espectro de absorção do modo ordinário, a qual é mais significativa quanto mais próxima a frequência da onda se encontra de $|\Omega_e|$. A maior diferença ocorre de fato para $\omega/|\Omega_e| \gtrsim 0,97$. Este fenômeno ocorre de forma oposta ao que se observa em uma situação onde o plasma possui gradientes na direção x_1 em parâmetros tais como densidade e temperatura, enquanto que o campo magnético é homogêneo. Em tal situação o espectro de absorção é modificado em frequências não tão próximas à $|\Omega_e|$ quanto é aqui observado, ocorrendo as maiores diferenças para $\omega/|\Omega_e| \lesssim 0,98$ [18, 20, 21, 23]. De fato, a modificação obtida no presente caso é tão grande que impede que o valor de \tilde{N}_B aumente além do maior valor considerado ($\tilde{N}_B = 2,2 \times 10^{-2}$), sob pena de se infringir a hipótese inicial de absorção fraca ($k_i \ll k_r$), pois para valores maiores de \tilde{N}_B ocorreria um intervalo de frequências onde $\text{Im}(N_O) \approx \text{Re}(N_O)$.

A banda de absorção aparentemente termina, para todos os perfis, em $\omega = |\Omega_e|$, como seria no caso de um plasma homogêneo. Entretanto, uma ampliação em torno deste ponto revela que cada banda de absorção se encerra em valores distintos de frequência. Esta ampliação é apresentada no interior da figura V.1a. O valor da frequência que determina o final do espectro de absorção de ondas eletromagnéticas neste sistema é determinado a partir da condição para que $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$ não possua mais parte imaginária, isto é, para $(z - a)_{\min} = 0$,

$\widetilde{N}_B (\times 10^{-2})$	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,2
$(\omega_m/ \Omega_e) - 1 (\times 10^{-4})$	0,031	0,125	0,281	0,5	1,12	2	2,42

Tabela V.1: Valores de ω_m para os espectros de absorção do modo ordinário apresentados na figura V.1a.

em (IV.41). De forma equivalente, não ocorre mais absorção quando a elipse de ressonância, determinada por (A.5), desaparecer, o que acontece quando o lado direito de (A.5) for nulo. Ambas as condições são idênticas, e para $N_{||} = \psi = 0$ o valor da frequência máxima para ocorrer absorção é dado por

$$\frac{\omega_m}{|\Omega_e|} = \frac{|n|\widetilde{N}_B^2}{\sqrt{1 + 2\widetilde{N}_B^2} - 1}. \quad (V.3)$$

Os valores de ω_m para os espectros de absorção apresentados na figura V.1a são dados na tabela V.1. O fato de que os espectros, conforme são vistos na ampliação contida na figura V.1a, aparentemente não terminam exatamente sobre os pontos dados na tabela V.1 é devido à existência de dois fatores de amortecimento que atuam em conjunto no final do espectro de absorção. O primeiro é a redução do tamanho da superfície de ressonância, o que reduz gradativamente o intervalo de integração em (IV.23) que possui alguma contribuição imaginária de $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$. O outro fator é a função peso que o integrando de (IV.23) possui, $(1 - y^2)^{l-1/2}$, a qual se anula nos limites de integração. Ambos os fatores fazem com que a parte imaginária de N_O caia rapidamente à medida que $\omega \rightarrow \omega_m$.

Por fim, o fenômeno mais interessante que a figura V.1a apresenta é a aparente existência de uma banda de absorção negativa que ocorre quando $\widetilde{N}_B \gtrsim 2 \times 10^{-2}$ para o presente conjunto de parâmetros. Para que se possa afirmar que nesta região está realmente ocorrendo absorção negativa, é necessário mostrar que o valor da parte imaginária da frequência é positivo, em uma formulação onde a frequência é complexa e o vetor de onda é real, e que a velocidade de grupo nesta região não muda de sinal. Esta discussão será feita adiante durante a análise das figuras V.2a,b.

A figura V.1b, por sua vez, mostra que a parte real de N_O é bastante modificada com a existência do gradiente do campo, e esta modificação também é mais visível em frequências próximas a $|\Omega_e|$. Dois aspectos se salientam: uma mudança no sinal da derivada de $\text{Re}(N_O)$ em comparação ao caso homogêneo ($\widetilde{N}_B = 0$), em um intervalo de frequências aproximadamente igual ao que apresenta $\text{Im}(N_O) < 0$, e uma variação abrupta para $\omega \approx |\Omega_e|$, a qual se acentua à medida que \widetilde{N}_B cresce. O primeiro aspecto, em particular, é importante para a análise a ser feita acerca da região onde $\text{Im}(N_O) < 0$, pois o sinal da derivada de $\text{Re}(N_O)$ é um elemento importante para o cálculo da velocidade de grupo da onda.

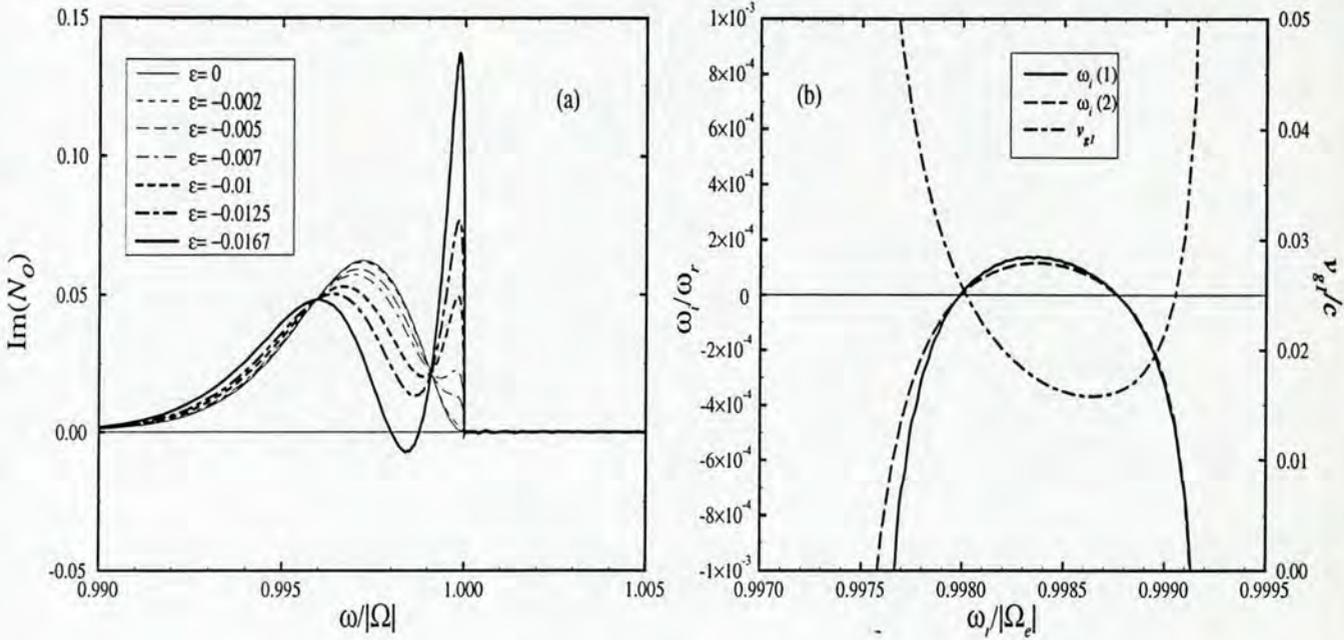


Figura V.2: (a) Parte imaginária de N_O versus $\omega/|\Omega_e|$ para diversos valores de ϵ ($= k_B$). Valores dos parâmetros físicos utilizados são: $B_O = 1,5 \times 10^4$ G, $T_e = 0,5$ keV, $n_e = 10^{13}$ cm^{-3} e $N_{\parallel} = \psi = 0$. (b) Gráfico de ω_i/ω_r versus $\omega_r/|\Omega_e|$ para os mesmos parâmetros da figura (a) e $\epsilon = -0,0167$. Curva ω_i (1) obtida utilizando (V.4) e curva ω_i (2) obtida utilizando (V.5). Também é mostrado o gráfico de v_{g1} versus $\omega_r/|\Omega_e|$ [38].

Perfis semelhantes para o espectro de absorção do modo ordinário para outros conjuntos de valores dos parâmetros físicos já foram divulgados anteriormente e podem ser encontrados em *Gaelzer et alli* (1993,1994,1995) [35, 36, 38].

Desta última referência aparecem aqui as figuras V.2a,b. No painel (a) observam-se novamente perfis de absorção para diversos valores de ϵ ($= k_B$), os quais são semelhantes aos perfis apresentados pela figura V.1a. Agora, nota-se a existência de uma região com $\text{Im}(N_O) < 0$ para $k_B = -0.0167$. Como já foi mencionado, para que se possa afirmar que este aspecto realmente representa uma absorção negativa é necessário mostrar que $\omega_i > 0$ e que $v_g > 0$. Esta última condição é necessária porque o coeficiente de absorção de uma onda eletromagnética no plasma é dado por (I.15), $\alpha = 2\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_g / v_g$, e portanto se ambos $\text{Im}(N_O) < 0$ e $v_g < 0$, resulta que $\alpha > 0$, o que significa que a absorção da onda continua sendo positiva.

Para investigar então a verdadeira natureza da região sob estudo, será assumida temporariamente uma formulação de frequência complexa, onde $\omega = \omega_r + i\omega_i$ e \mathbf{k} é inteiramente real. Ao invés, porém, de se obter expressões gerais como se tem obtido até então, contentar-se-á com uma aproximação que é freqüentemente feita e que é aqui válida. Supõe-se que ao se resolver a relação de dispersão (I.10), obtenha-se uma solução onde $|\omega_i| \ll \omega_r$. Neste caso

pode-se expandir a relação de dispersão em potências de ω_i até a primeira ordem, resultando,

$$\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \approx \Lambda_r(\mathbf{k}, \omega_r) + i\Lambda_i(\mathbf{k}, \omega_r) + i \left(\frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega_r}(\mathbf{k}, \omega_r) + i \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \omega_r}(\mathbf{k}, \omega_r) \right) \omega_i = 0.$$

Igualando-se então as partes real e imaginária, em separado, a zero, e desprezando $\omega_i \partial \Lambda_i / \partial \omega_r$ frente a Λ_r , resulta então

$$\begin{aligned} \Lambda_r(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega_r) &= 0 \\ \frac{\omega_i}{\omega_r} &= - \frac{\Lambda_i(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega_r)}{\omega_r \frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega_r}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega_r)}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação de dispersão (V.2.a) resulta

$$\frac{\partial \Lambda_r}{\partial \omega_r} = -2 \frac{N_{\perp}}{\omega_r} \left(1 + \omega_r \frac{\partial N_{\perp}}{\partial \omega_r} \right),$$

e portanto

$$\frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{\text{Im} [\varepsilon_{33}(x_1, k_{\perp}, \omega_r)]}{2N_{\perp} \left(1 + \omega_r \frac{\partial N_{\perp}}{\partial \omega_r} \right)}. \quad (\text{V.4})$$

Para que os resultados de ambas as formulações possam ser comparados, a taxa de absorção será estimada também através de uma fórmula alternativa,

$$\frac{\omega_i}{\omega_r} \approx -\text{Im}(N_O) \frac{v_{g1}}{c}, \quad (\text{V.5})$$

onde v_{g1} é a componente da velocidade de grupo na direção \hat{e}_1 . Esta componente será calculada através da definição da velocidade de grupo,

$$v_{g1} = \frac{\partial \omega_r}{\partial k_{\perp}} = \left(\frac{\partial k_{\perp}}{\partial \omega_r} \right)^{-1} = \frac{c}{N_{\perp} + \omega_r \frac{\partial N_{\perp}}{\partial \omega_r}}.$$

A figura V.2b mostra o valor de ω_i em função de ω_r para o caso $k_B = -0.0167$. É feita aqui uma ampliação em torno da região de interesse, isto é, onde $\omega_i > 0$. A mesma figura mostra também o valor de v_{g1} , ressaltando que a velocidade de grupo é sempre positiva na região de interesse. O valor positivo de v_{g1} nesta região é um dos efeitos do gradiente do campo, como já foi ressaltado na figura V.1b.

O fato de que ambos os cálculos para ω_i previram uma região onde $\omega_i > 0$ para o mesmo intervalo de frequências, e com aproximadamente a mesma magnitude, corrobora a afirmativa de que ocorre uma região de absorção negativa para valores suficientemente altos do gradiente do campo. Esta absorção negativa aumenta o nível de microturbulência nesta região, elevando em conseqüência a intensidade da onda. Tal elevação pressupõe a existência de um

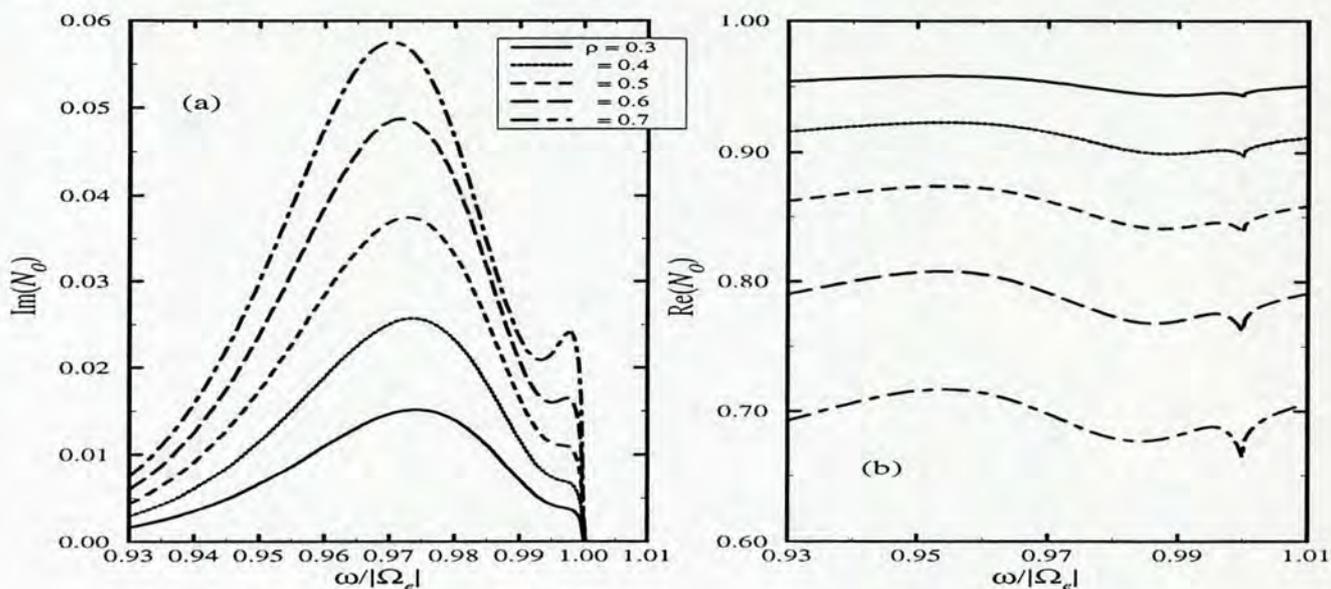


Figura V.3: (a) Parte imaginária de N_O para diversos valores de ρ . Os demais parâmetros do plasma são: $\tilde{N}_B = 7,5 \times 10^{-3}$, $T_e = 5$ keV e $N_{\parallel} = \psi = 0$. (b) Parte real de N_O correspondente ao painel (a).

excedente de energia livre no plasma, o qual possa ser transferido à onda através de algum mecanismo específico. Embora a distribuição de partículas aqui utilizada seja a Maxwelliana, esta distribuição somente representa um estado particular do sistema, aqui empregado para simplificar o estudo. O meio continua sendo não homogêneo, independente da adoção da Maxwelliana, e esta inhomogeneidade está explicitamente incluída no tensor dielétrico.

Como um plasma inhomogêneo não está em equilíbrio termodinâmico, é sempre possível que em alguma situação ocorra transferência de parte da energia contida no plasma para a onda. Esta argumentação torna-se mais clara quando se analisa a condição de ressonância (A.1). Na direção de propagação aqui considerada ($N_{\parallel} = \psi = 0$), a ressonância é ainda modificada pela inhomogeneidade através do termo adicional $nN_B u_2$. Isto significa que (A.1) é satisfeita por uma população de partículas distinta daquela que satisfaz a ressonância no caso homogêneo. Esta modificação pode ser considerada como uma anisotropia efetiva, e anisotropias na distribuição levam a instabilidades para determinados parâmetros físicos.

A variação das partes imaginária e real de N_O com o parâmetro ρ está ilustrada nas figuras V.3a,b. Observa-se que o espectro de absorção do modo ordinário tende a aumentar como um todo com a elevação de ρ , o que corresponde a um aumento na densidade eletrônica e/ou a um enfraquecimento do campo magnético. Este tipo de comportamento já é bem conhecido em plasmas homogêneos ou localmente homogêneos [31]. Já a correspondente parte real tende a diminuir com o aumento de ρ . O único aspecto interessante consiste em uma tendência de reforçar a banda de frequências mais próximas a $|\Omega_e|$ com o aumento de ρ . Não há nenhuma

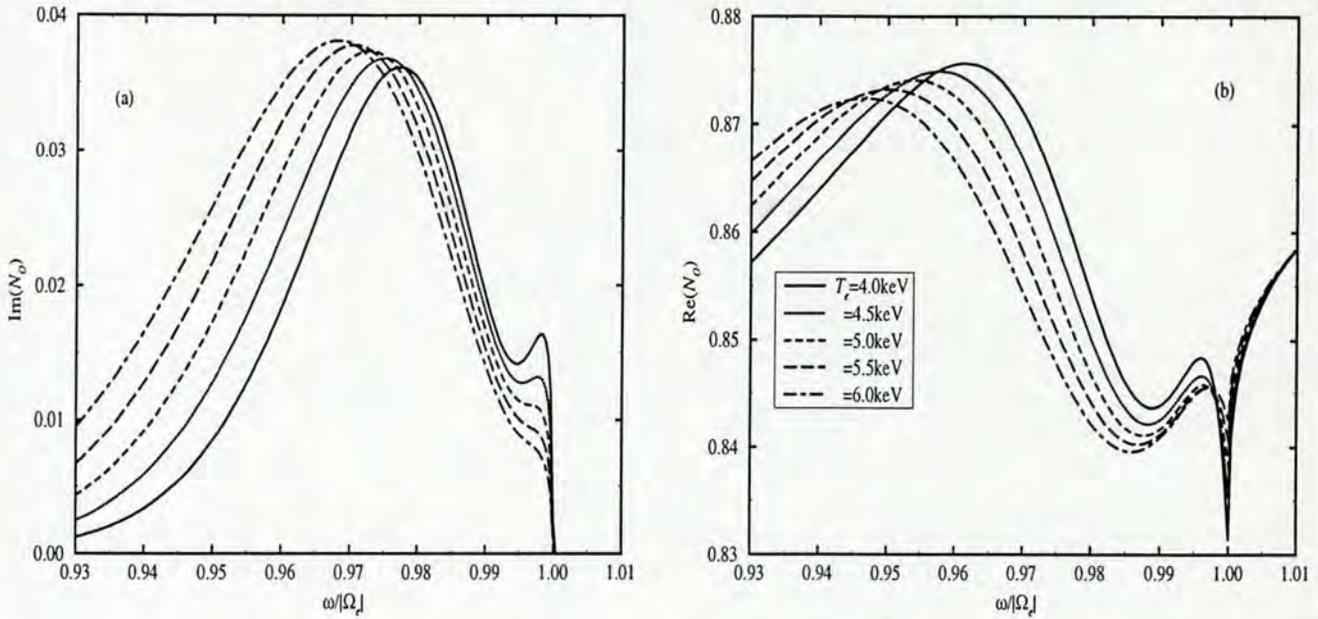


Figura V.4: (a) Parte imaginária de N_O para diversos valores da temperatura T_e . Os demais parâmetros do plasma são: $\tilde{N}_B = 7,5 \times 10^{-3}$, $\rho = 0,5$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$. (b) Parte real de N_O para diversos valores de T_e . Os demais parâmetro são idênticos aos do painel (a).

outra informação nova nesta figura.

Já quanto ao comportamento da absorção em relação à mudança na temperatura do plasma, observa-se um fenômeno interessante. Denominando-se a banda de frequências onde os efeitos da inhomogeneidade são dominantes, $0,99 \lesssim \omega/|\Omega_e| \leq \omega_m/|\Omega_e|$, de banda inhomogênea, observa-se que esta banda se comporta, com a variação na temperatura do plasma, de forma oposta ao restante do espectro. Um exemplo do comportamento da banda inhomogênea é mostrado na figura V.4. No painel (a) percebe-se que quando a temperatura do plasma diminui, a absorção na banda inhomogênea aumenta, ao contrário do que acontece no restante do espectro, onde a absorção diminui para as frequências mais baixas, e a sua largura diminui, ocasionando uma deriva do pico de absorção para frequências mais altas. Nesta banda de menor frequência o comportamento do espectro é predominantemente regulado por efeitos presentes já em plasmas homogêneos.

O fato da absorção na banda inhomogênea aumentar em vez de diminuir é em princípio contraditório, visto que com a redução na temperatura o raio de Larmor das partículas diminui, $r_L \propto v_{Te} \propto T_e^{1/2}$, e estas experimentam uma variação menor no valor do campo durante as suas órbitas. As relações (A.3) e (A.4) também mostram que, embora o alargamento no espectro de absorção devido aos efeitos da inhomogeneidade se torne mais importante no caso $N_{\parallel} = 0$ quando a temperatura diminui, ainda seria de se esperar que a absorção na banda inhomogênea diminuísse com a temperatura. Este aparente paradoxo se resolve quando

se leva em conta o fato de que a ressonância onda-partícula depende também da derivada da função distribuição, $\partial_{u_{\perp}} f_{e0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})$. A contribuição máxima desta derivada à ressonância ocorre no ponto $u_{\perp} = \mu_e^{-1/2}$ e, desta forma, utilizando a distribuição Maxwelliana (IV.1), o valor absoluto desta contribuição é proporcional a T_e^{-2} ; portanto, a contribuição deste fator para a ressonância aumenta com a redução na temperatura. Definindo agora a escala típica de variação, no espaço de *momenta*, da distribuição das partículas através da relação $\partial_{u_{\perp}} f_{e0} \approx \Delta f_{e0}/L_u$, então $L_u \propto T_e^2$. Por outro lado, quando a temperatura varia, o valor do *momentum* ressonante, u_r , o qual mede a largura da elipse de ressonância correspondente à maior absorção, também varia de forma proporcional a (A.3), isto é, $\Delta u_r \propto T_e^{1/2}$. Portanto, como estes dois fatores possuem efeitos opostos, a dependência combinada da absorção com a temperatura pode ser estimada por

$$\frac{\Delta u_r}{L_u} \propto T_e^{-3/2}.$$

Assim, quando a temperatura diminui, a contribuição da condição de ressonância à absorção também diminui, mas a variação da população no espaço de *momenta* ao longo da curva de ressonância aumenta, e o efeito conjunto é o de ressaltar a absorção das ondas.

Por fim, será agora analisada a variação no espectro de absorção devida à variação no ângulo azimutal ψ . Até então calculou-se o componente ε_{33} através da fórmula para a PDF inhomogênea para $\psi = 0$, fórmula (IV.23). Agora, entretanto, será necessário empregar as expressões mais complexas (IV.30) e (IV.36) as quais, além de somente serem válidas quando a condição (IV.26) for satisfeita, exigem em princípio um tempo de computação maior, pois dependem da convergência de uma série, para (IV.30), ou duas séries, para (IV.36), sendo que estas séries são ainda parte de uma função que é integrada. Este processo dispendioso de soma de uma ou duas séries mais uma integração compõe ainda apenas uma etapa do processo iterativo global envolvido no cálculo das raízes da relação de dispersão. Todas estas dificuldades se constituem em uma barreira que aparentemente inviabiliza qualquer aplicação prática do formulário desenvolvido no capítulo IV para o caso $\psi \neq 0$.

O fato é que estas expressões são totalmente gerais e não foi feita nenhuma tentativa de simplificá-las além das limitações intrínsecas de suas derivações. Contudo, intentar-se-á mostrar que para muitos casos de interesse prático estas expressões gerais são facilmente calculáveis em uma aplicação numérica, porque as séries envolvidas convergem rapidamente, de tal forma que somente um número pequeno de termos necessita ser incluído.

A expressão (IV.36) é a fórmula que apresenta a maior complexidade, uma vez que possui uma série de potências da quantidade $(1 - \sigma_{\alpha}^{-1})$ e outra série de potências de ν_{α}^2 . Esta última quantidade é o parâmetro usual de expansão em pequeno raio de Larmor, e tais expansões são

	k_B (cm ⁻¹)	μ_e	$ \Omega_e $ (Hz)	$ \nu_e^2 $	$ 1 - \sigma_e^{-1} $
Grande R_a	5×10^{-3}	10^2	6×10^{11}	$10^{-2} - 1$	$2,5 \times 10^{-4} - 2,5 \times 10^{-2}$
Pequena R_a	2×10^{-2}	10^3	2×10^{11}	$10^{-3} - 0,1$	$3 \times 10^{-3} - 0,4$

Tabela V.2: Parâmetros físicos assumidos para tokamaks de pequena e grande razões de aspecto. O componente perpendicular do vetor de onda ($|N_{\perp}^2|$) varia de 1 a 10^2 .

costumeiramente usadas em problemas de plasmas homogêneos. A velocidade de convergência desta série depende de se ter $|\nu_{\alpha}^2| \ll 1$. A outra quantidade,

$$1 - \sigma_{\alpha}^{-1} = \frac{-\widetilde{N}_B N_{\perp} \sin \psi}{1 - \widetilde{N}_B N_{\perp} \sin \psi}, \quad (\text{V.6})$$

está relacionada à inomogeneidade e o seu módulo pode ser ainda menor que $|\nu_{\alpha}^2|$ para situações típicas.

Como ilustração, serão comparados os valores destas quantidades para dois conjuntos de parâmetros físicos correspondendo a tokamaks de grande razão de aspecto (R_a) tais como o JET (*Joint European Torus*) e tokamaks de pequena razão de aspecto tais como o START (*Small Tight Aspect Ratio Tokamak*). Por *razão de aspecto* define-se a razão entre o raio do toro do tokamak (raio maior, R) e o raio da seção reta do toro (raio menor, a), $R_a = R/a$. Tipicamente, um tokamak de grande razão de aspecto tem um raio maior em torno de 2 m, enquanto que um tokamak de pequena R_a possui um raio maior de cerca de 0,5 m. Assumindo uma variação linear do campo magnético destes tokamaks na região da coluna de plasma, para estes dois casos o parâmetro de inomogeneidade pode ser considerado igual a $k_B = 5 \times 10^{-3}$ e $k_B = 2 \times 10^{-2}$, respectivamente para os casos de grande e pequena razões de aspecto. Outros parâmetros, tais como densidade e temperatura não são importantes para a análise atual, mas serão abordados na segunda parte desta seção. Para o caso de ondas de elétron-cíclotron, os efeitos devidos ao gradiente do campo deverão aparecer próximos da frequência de cíclotron eletrônica, e portanto será suposto que $|Y_e| \approx 1$ para fins de estimativas de ordens de magnitude. Assumindo também que o módulo de N_{\perp}^2 pode variar de 1 a 10^2 , o que permite que se considere desde ondas de cíclotron usuais até ondas de Bernstein, os valores das quantidades em questão para os dois conjuntos de parâmetros físicos adotados estão escritos na tabela V.2. Nesta tabela observa-se que tanto ν_e^2 quanto $(1 - \sigma_e^{-1})$ são muito pequenos para um intervalo grande de $|N_{\perp}^2|$. Como conseqüência, as expansões em série em (IV.30, IV.36 e IV.37) convergem rapidamente e é necessário somar apenas um ou dois termos. Somente quando $|N_{\perp}^2| \approx 10^2$, no caso de tokamaks com R_a grande, a quantidade $|\nu_e^2|$ pode se aproximar da unidade e a convergência se torna lenta. Contudo, esta situação não é criada necessariamente pelo efeito da inomogeneidade, estando presente também no caso homogêneo.

Entretanto, a convergência das séries pode se tornar lenta também se a inhomogeneidade aumentar muito, e se o fator $|\widetilde{N}_B N_\perp \sin \psi| \rightarrow 1/2$ em (V.6), ocorre uma violação da condição (IV.26) e o tratamento apresentado nesta tese não mais é válido. Felizmente esta situação não ocorre para os casos aqui considerados.

A conclusão é que expressões aparentemente intratáveis para a relação de dispersão inhomogênea podem ser manipuladas para aplicações numéricas de modo similar às funções de dispersão bem conhecidas utilizadas no tratamento de plasmas homogêneos.

Retornando então ao conjunto de parâmetros utilizados nas figuras anteriores, serão calculados os espectros de absorção para ψ entre 0° e 90° para três valores de \widetilde{N}_B , $\widetilde{N}_B = 5 \times 10^{-3}$, $\widetilde{N}_B = 7,5 \times 10^{-3}$ e $\widetilde{N}_B = 2,2 \times 10^{-2}$. Para os parâmetros empregados, as quantidades ν_e^2 e $(1 - \sigma_e^{-1})$ são, respectivamente, iguais a $|\nu_e^2| = 10^{-2}$ e $|(1 - \sigma_e^{-1})| = 5,03 \times 10^{-3}$ ($\widetilde{N}_B = 5 \times 10^{-3}$) e $|(1 - \sigma_e^{-1})| = 2,25 \times 10^{-2}$ ($\widetilde{N}_B = 2,2 \times 10^{-2}$), para $|Y_e| = |N_\perp| = 1$ e $\psi = 90^\circ$. Para valores tão pequenos, basta utilizar somente um termo nas séries em (IV.30 e IV.36). Os resultados da solução da relação de dispersão para $\psi \neq 0$ aparecem na figura V.5. Os painéis (a) e (b) representam $\text{Im}(N_O)$ e $\text{Re}(N_O)$ para $\widetilde{N}_B = 7,5 \times 10^{-3}$ e os painéis (c) e (d) correspondem aos gráficos de $\text{Im}(N_O)$ para $\widetilde{N}_B = 5 \times 10^{-3}$ e $\widetilde{N}_B = 2,2 \times 10^{-2}$. No painel (a) o aspecto mais interessante é a evolução do espectro, passando de um espectro puramente de absorção para $\psi = 0$ a um espectro que apresenta uma banda com absorção negativa para $\psi \gtrsim 35^\circ$. Pelo espaçamento entre os espectros, pode-se observar que a distância foi determinada pelo fator $\sin \psi$ contido em $(1 - \sigma_e^{-1})$. Além disso, ao contrário do que acontece na figura V.3a, a banda de absorção imediatamente anterior a Ω_e não aumenta com a variação de ψ , ao oposto do que acontecia com o aumento de \widetilde{N}_B . No painel (b) observa-se que a evolução da parte real não oferece grande novidade em relação ao que já se havia observado. No painel (c) observa-se que para valores menores de \widetilde{N}_B a banda de absorção negativa somente surge para valores maiores do ângulo azimutal. Neste caso, a banda surge para $\psi \gtrsim 40^\circ$, mas observou-se que mesmo para valores assintoticamente próximos a $\widetilde{N}_B = 0$ sempre ocorre uma banda com $\text{Im}(N_O) < 0$, para valores suficientemente altos de ψ , mesmo que esta banda seja infinitesimal. Por fim, no painel (d) observa-se uma situação onde já ocorria uma banda de emissão para $\psi = 0^\circ$. À medida que ψ cresce, o que sucede é que esta banda se alarga e se aprofunda até se saturar para $\psi \rightarrow 90^\circ$.

Fisicamente, interpreta-se o aumento nos efeitos da inhomogeneidade como sendo devido a um acoplamento entre o componente perpendicular de k (o qual possui agora um componente k_2) com a deriva macroscópica de partículas na direção \hat{e}_2 que é devida ao gradiente do campo na direção \hat{e}_1 . A energia cinética contida neste feixe de partículas é transferida, em condições propícias, à onda eletromagnética, cuja amplitude então aumenta. Instabilidades devidas

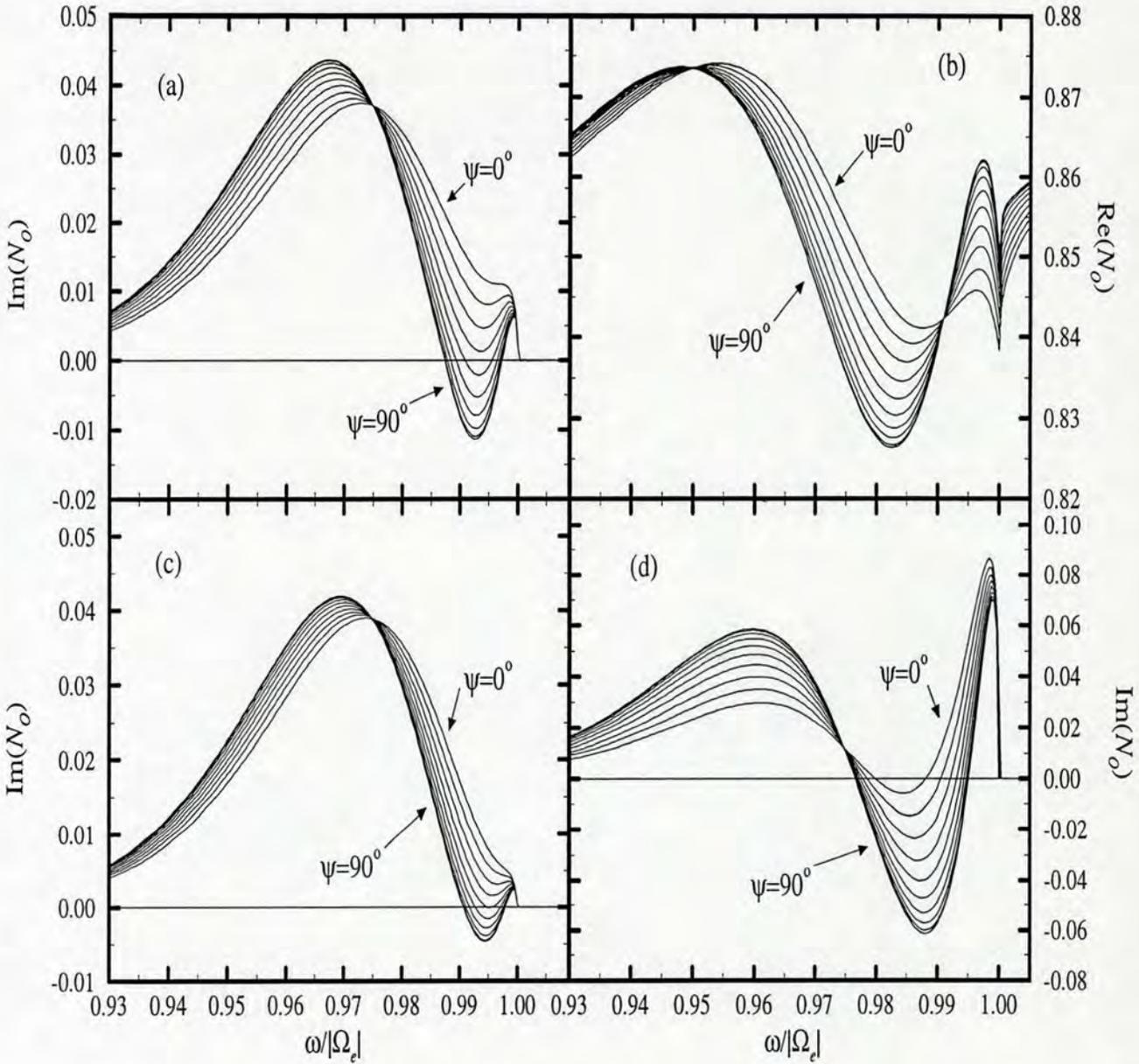


Figura V.5: (a) Parte imaginária de N_O para diversos valores do ângulo azimutal ψ . Os demais parâmetros físicos são: $\tilde{N}_B = 7,5 \times 10^{-3}$, $T_e = 5 \text{ keV}$, $\rho = 0,5$ e $N_{\parallel} = 0$. As curvas correspondem a um espaçamento no ângulo de $\Delta\psi = 10^\circ$. (b) Parte real de N_O correspondente aos mesmos parâmetros físicos do painel (a). (c) Parte imaginária de N_O para diversos valores de ψ e $\tilde{N}_B = 5 \times 10^{-3}$. Os demais parâmetros são idênticos aos do painel (a). (d) Parte imaginária de N_O para diversos valores de ψ e $\tilde{N}_B = 2,2 \times 10^{-2}$. Demais parâmetros idênticos aos dos outros painéis.

às derivas de partículas geradas por gradientes de densidade e/ou temperatura já são bem conhecidas na literatura (ver, por exemplo, *Mikhaïlovskii* (1983) [81]), e são ordinariamente

denominadas de *instabilidades de deriva* ou *instabilidades absolutas*. Estas instabilidades, no entanto, ocorrem em freqüências de oscilação próprias, denominadas de *freqüências de deriva*, as quais são usualmente muito menores que as freqüências de cíclotron, tanto eletrônica quanto iônica. Além disso, as derivas devidas aos gradientes de densidade e temperatura são apenas aparentes, não existindo um movimento real de partículas. No caso considerado nesta tese, por outro lado, existe uma deriva macroscópica de partículas, a qual se deve ao gradiente do campo, e os seus efeitos se fazem sentir também na condição de ressonância. O termo da condição de ressonância oriundo da deriva de partículas na direção \hat{e}_2 é o quinto termo de (A.1). Como este termo afeta a própria ressonância onda-partícula, ao contrário dos casos de derivas devidas a gradientes de temperatura e/ou densidade, os seus efeitos se fazem sentir em freqüências próximas às freqüências de cíclotron, como se observa nas figuras V.5a-d.

Para situar melhor os resultados obtidos da solução de (V.2.a), será considerado agora um modelo simplificado para o estudo da absorção das ondas de elétron-cíclotron, no modo ordinário, em um tokamak. Os resultados desta modelagem já foram divulgados na literatura e podem ser encontrados em *Gaelzer et alli* (1995) [38]. Serão consideradas somente ondas que se propagam perpendicularmente a B_0 e ao longo da linha equatorial do toro do tokamak ($N_{\parallel} = \psi = 0$). Efeitos de curvatura serão desprezados e desta forma será considerado um modelo de plasma finito e inomogêneo na direção x_1 mas infinito e homogêneo nas outras direções. Os perfis de densidade, temperatura e campo adotados são

$$\begin{aligned} n_e(x_1) &= n_e(0) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^p \\ T_e(x_1) &= T_e(0) \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^q \\ B_0(x_1) &= B_0(0) \left(1 - \frac{x_1}{R}\right), \end{aligned}$$

sendo p e q números reais, em princípio. De acordo com a definição prévia, $k_B = -R^{-1}$.

Inicialmente serão adotados parâmetros físicos característicos do JET, onde a densidade eletrônica central é $n_e(0) \approx 10^{14} \text{cm}^{-3}$, temperatura eletrônica central $T_e(0) \approx 5 \text{keV}$, campo magnético $B_0(0) \approx 3,4 \times 10^4 \text{G}$, $a = 120 \text{cm}$ e o raio maior R será variado de $R \gtrsim a$ até $R \rightarrow \infty$, isto é, de uma razão de aspecto pequena a muito grande, de forma a se estudar os efeitos de diferentes graus de inomogeneidade na absorção do modo ordinário. Adotando então perfis simples para a densidade e a temperatura, $p = 1$ e $q = 2$, lança-se uma onda com freqüência igual a $|\Omega_e(0)|$ a partir do ponto $x_1 = -a$. Resolvendo numericamente a equação (V.2.a), fazendo uso do componente 33 do tensor dielétrico efetivo, obtém-se os resultados da figura V.6, a qual apresenta as partes real e imaginária de N_O em função da posição para três valores de R , correspondendo às razões de aspecto $R_a = 2,58$, $R_a = 2$ e $R_a = 1,5$. Em cada caso o

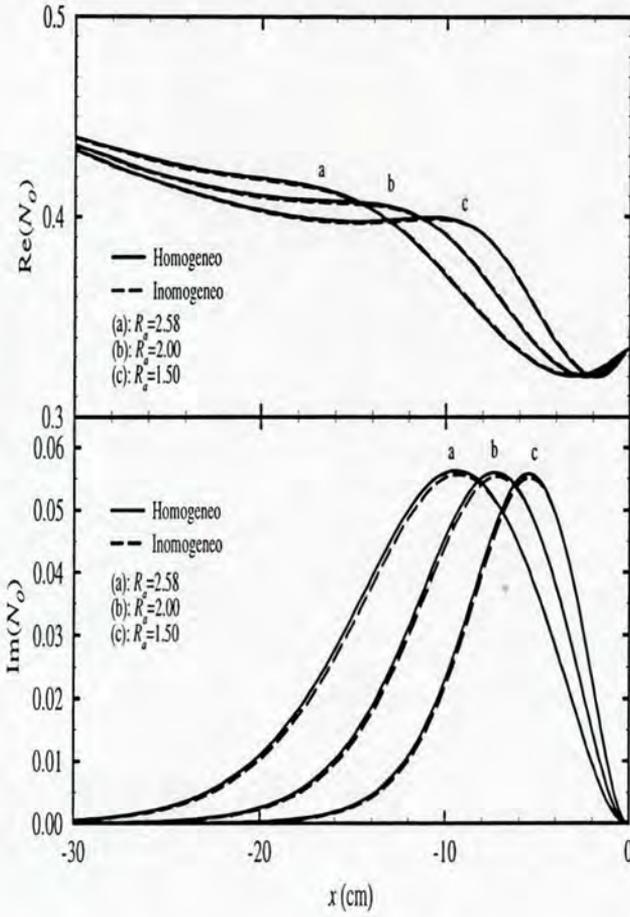


Figura V.6: Partes real e imaginária de N_0 versus posição na coluna de plasma para três valores da razão de aspecto e para $B_0(0) = 3,4 \times 10^4$ G, $T_e(0) = 5$ keV, $n_e(0) = 10^{14}$ cm $^{-3}$, $a = 120$ cm, $N_{||} = \psi = 0$ e para uma onda com frequência $\omega = |\Omega_e(0)|$ [38].

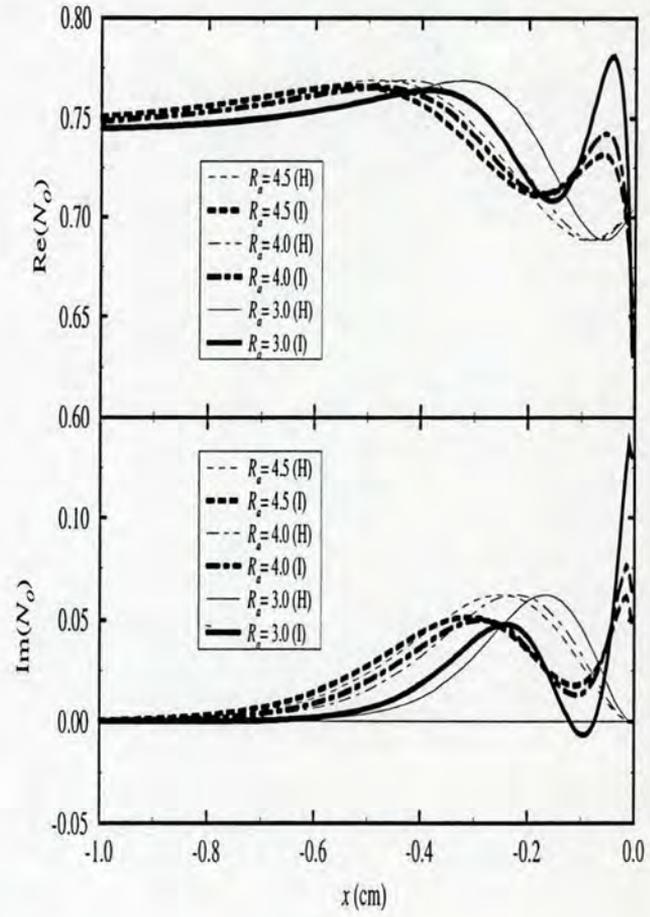


Figura V.7: Partes real e imaginária de N_0 versus posição na coluna de plasma para três valores de R_a e para $B_0(0) = 1,5 \times 10^4$ G, $T_e = 0,5$ keV, $n_e(0) = 10^{13}$ cm $^{-3}$, $a = 20$ cm, $N_{||} = \psi = 0$ e $\omega = |\Omega_e(0)|$. Curvas com o rótulo (H) correspondem à solução localmente homogênea e curvas com (I) são obtidas com o uso do tensor dielétrico efetivo [38].

resultado localmente homogêneo, obtido fazendo $k_B = 0$, é representado pela linha contínua enquanto que o resultado inhomogêneo aparece na linha tracejada. À medida que a razão de aspecto é reduzida, o espectro de absorção se move em direção à posição central da coluna de plasma, como era esperado. A comparação entre os casos homogêneo e inhomogêneo mostra que para o conjunto de parâmetros considerado o efeito da inhomogeneidade é praticamente irrelevante, mesmo na situação de maior inhomogeneidade, $R_a = 1,5$.

As razões para tal comportamento podem ser entendidas através da definição da função

de dispersão de plasma inhomogêneo, a qual, para ε_{33} e $N_{||} = \psi = 0$ assume a seguinte forma, a partir de (IV.16) e (IV.18a)

$$\mathcal{G}_{0,\gamma_2,1,|n|,|n|} = -i \int_0^\infty dt \frac{e^{izt}}{(1-it)^{3/2}} e^{-(\nu_e^2 + \chi_{ne}^2 t^2)/(1-it)} I_{|n|} \left(\frac{\nu_e^2 + \chi_{ne}^2 t^2}{1-it} \right). \quad (V.7)$$

Os fatores relacionados com a inhomogeneidade aparecem nos argumentos da exponencial e da função de Bessel. Usando a definição de χ_{ne} , estes argumentos podem ser escritos da seguinte maneira

$$\nu_e^2 \left(1 \pm \frac{\chi_{ne}^2 t^2}{\nu_e^2} \right) = \nu_e^2 \left(1 \pm \frac{n^2 \mu_e^2 Y_e^2 c^2 k_B^2 t^2}{4 N_{\perp}^2 \Omega_e^2} \right) \approx \nu_e^2 \left(1 \pm \frac{1,9 \times 10^{11} t^2}{R^2 B_0^2 T_e^2} \right), \quad (V.8)$$

sendo que R , B_0 e T_e continuam dados em centímetros, gauss e keV, respectivamente. Além disso, considerou-se $|Y_e| \approx |N_{\perp}^2| \approx 1$ e $n = 1$. Substituindo em (V.8) os parâmetros da figura V.6, obtém-se, para $R = 180\text{cm}$,

$$\nu_e^2 \left(1 \pm 4,57 \times 10^{-4} t^2 \right).$$

O integrando em (V.7) converge rapidamente, conforme se pode notar na figura V.8a, onde o intervalo efetivo de integração é $0 \leq t \lesssim 5$. Os parâmetros físicos desta figura foram escolhidos de forma a maximizar o efeito da inhomogeneidade no integrando de (V.7). Portanto, a expressão acima mostra que no intervalo de t onde o integrando é significativo, os argumentos da exponencial e da função de Bessel são muito próximos aos valores do caso homogêneo, e como consequência a teoria empregada não prevê efeitos relevantes, pelo menos para este modelo simplificado.

Entretanto, para valores menores de temperatura, raio maior e/ou campo magnético, os efeitos da inhomogeneidade podem se tornar significativos. Por exemplo, considerando agora um conjunto de parâmetros típico de tokamaks pequenos, como por exemplo o START ou o TBR II (*Tokamak Brasileiro II*), $B_0(0) = 1,5 \times 10^4\text{G}$, $T_e(0) = 0,5\text{ keV}$, $a = 20\text{ cm}$ e $n_e(0) = 10^{13}\text{cm}$, o argumento de (V.8) fica, utilizando $R = 100\text{ cm}$,

$$\nu_e^2 \left(1 \pm 0,34 t^2 \right).$$

Além disso, como se pode ver na figura V.8b, onde se mostra o integrando correspondente a um conjunto de parâmetros associados a um tokamak pequeno, o intervalo efetivo de integração cresceu, sendo estimado agora em $0 \leq t \lesssim 20$. Portanto, é fácil perceber que neste caso os termos inhomogêneos podem se tornar comparáveis aos termos homogêneos, modificando significativamente a absorção das ondas.

Como ilustração, calcula-se a absorção local do modo ordinário utilizando o conjunto de parâmetros de tokamak pequeno, para vários valores da razão de aspecto. As características e

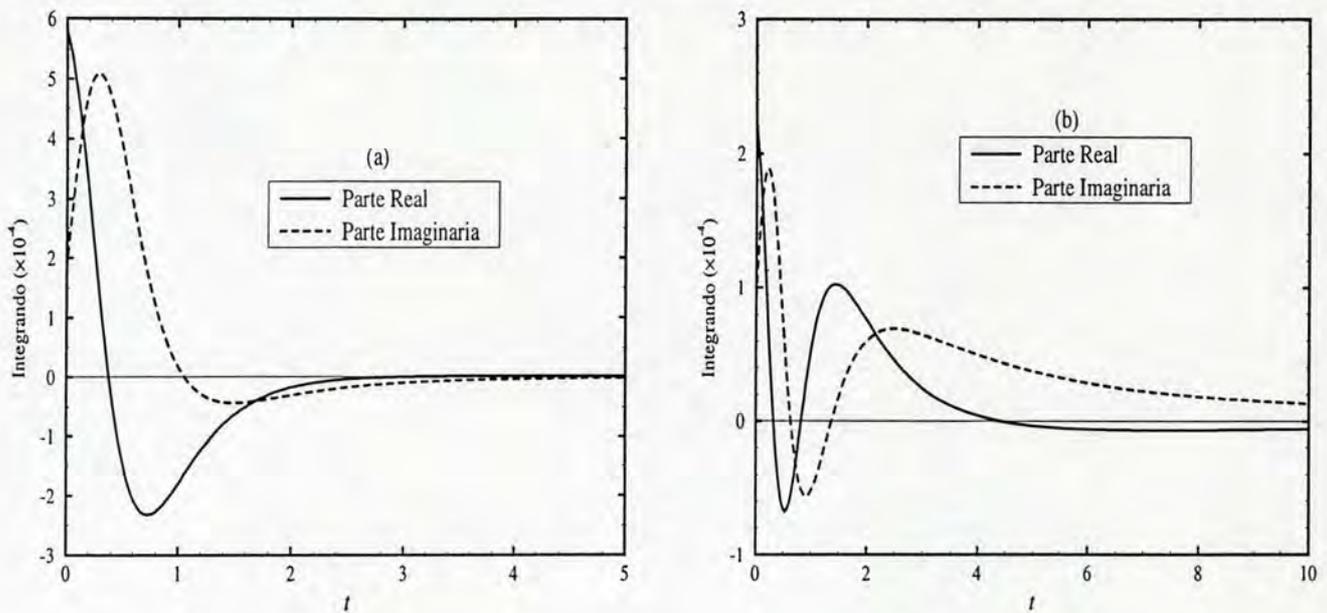


Figura V.8: (a) Partes real e imaginária do integrando de (V.7) em função de t , com a exceção do fator de fase $\exp(izt)$, para os parâmetros físicos da figura V.6 e $R = 120$ cm, $N_O = (0.36, 0.05)$, $x_1 = -5,5$ cm, $\omega/|\Omega_e| = 0,97$ e $\tilde{N}_B = -2,7852 \times 10^{-4}$. (b) Partes real e imaginária do mesmo integrando para os parâmetros da figura V.7 e $R = 60$ cm, $N_O = (0.6885, 0.137)$, $x_1 = -0,01$ cm, $\omega/|\Omega_e| = 0,9998$ e $\tilde{N}_B = -1,912 \times 10^{-3}$.

o ponto de injeção da onda ordinária para dentro da coluna de plasma são os mesmos do caso anterior, e os resultados aparecem na figura V.7. Para cada par de resultados correspondentes ao mesmo valor de R_a , a solução localmente homogênea é mostrada em uma linha fina rotulada (H) e a solução inhomogênea aparece na linha mais espessa, rotulada (I). Percebe-se claramente que para estes parâmetros físicos o valor local do coeficiente de absorção para o modo ordinário é substancialmente modificado em comparação com o resultado homogêneo. Além disso, torna a surgir, para valores suficientemente pequenos de R_a , uma banda de absorção negativa nas proximidades de $|\Omega_e(x_1 = 0)|$. Infelizmente a limitação básica do modelo, a qual exige que $\text{Im}(N_O) \ll \text{Re}(N_O)$, impede que se reduza ainda mais a razão de aspecto para $R_a < 3$, de modo que não foi possível explorar uma situação de tokamak de pequena razão de aspecto ($R_a < 2$), topologia esta que tem atraído muito interesse recentemente.

Serão investigados agora os efeitos da inhomogeneidade sobre o coeficiente de absorção integrado, isto é, sobre a profundidade óptica do plasma, a qual é dada por

$$\eta(x_1) = 1 - \exp\left[-2\frac{\omega}{c} \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \text{Im}(N_O)(x'_1)\right]. \quad (\text{V.9})$$

A profundidade óptica será calculada utilizando o coeficiente de absorção local obtido para o conjunto de parâmetros físicos correspondentes a um tokamak pequeno, onde os efeitos da

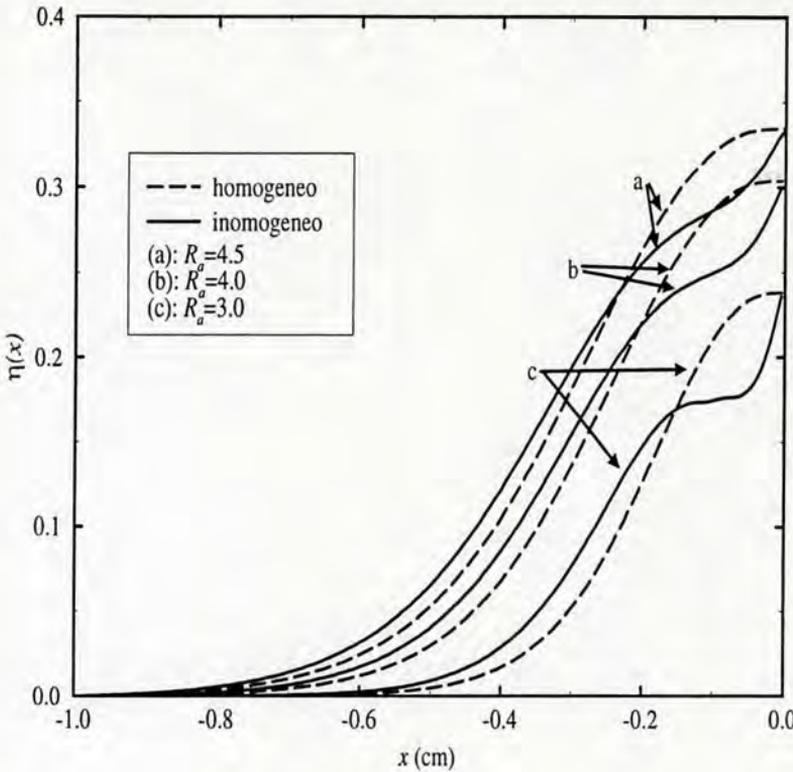


Figura V.9: Absorção integrada $\eta(x_1)$ para o modo ordinário versus posição na coluna de plasma, para os mesmos parâmetros físicos da figura V.7 [38].

inomogeneidade se fazem mais notáveis. Os resultados obtidos para os três valores da razão de aspecto utilizados na figura V.7 são mostrados na figura V.9. Nesta figura observa-se que a profundidade óptica total, $\eta(\infty)$, se mostra praticamente insensível à existência da inomogeneidade, mesmo para o caso de menor razão de aspecto. Os valores intermediários, contudo, $\eta(x_1)$, se mostram visivelmente distintos dos resultados da aproximação localmente homogênea, o que indica que os efeitos inomogêneos alteram o valor local de deposição da energia da onda. Esta alteração é consistentemente maior em posições mais próximas do centro da coluna de plasma, onde $\omega = |\Omega_e(0)|$.

Por fim, será feita agora uma comparação numérica entre os resultados obtidos com o uso do tensor dielétrico efetivo e os resultados que surgem resolvendo-se a relação de dispersão (V.2.a) a partir dos formalismos desenvolvidos nas abordagens A e B, discutidas na seção IV.3. Mais especificamente, os resultados da *Abordagem A* serão aqui obtidos utilizando-se o tensor $\vec{\epsilon}^A$, dado por (IV.47). Como nesta aplicação numérica a onda se propaga ao longo da inomogeneidade ($N_{||} = \psi = 0$), e somente se utiliza o componente ϵ_{33} , os resultados obtidos com esta abordagem são iguais aos resultados da aproximação localmente homogênea. Os resultados da *Abordagem A* somente seriam distintos desta aproximação se $\psi \neq 0$ e/ou se fossem utilizados os componentes ϵ_{i2} , ($i = 1, 2, 3$). Já para a *Abordagem B*, serão utilizadas duas expressões: a relação de dispersão (IV.50), a qual é válida para o regime não relativístico, e o componente ϵ_{33}^0 dado por (IV.53), válido para o regime fracamente relativístico.

Os resultados obtidos estão na figura V.10, para a qual foram utilizados três conjuntos

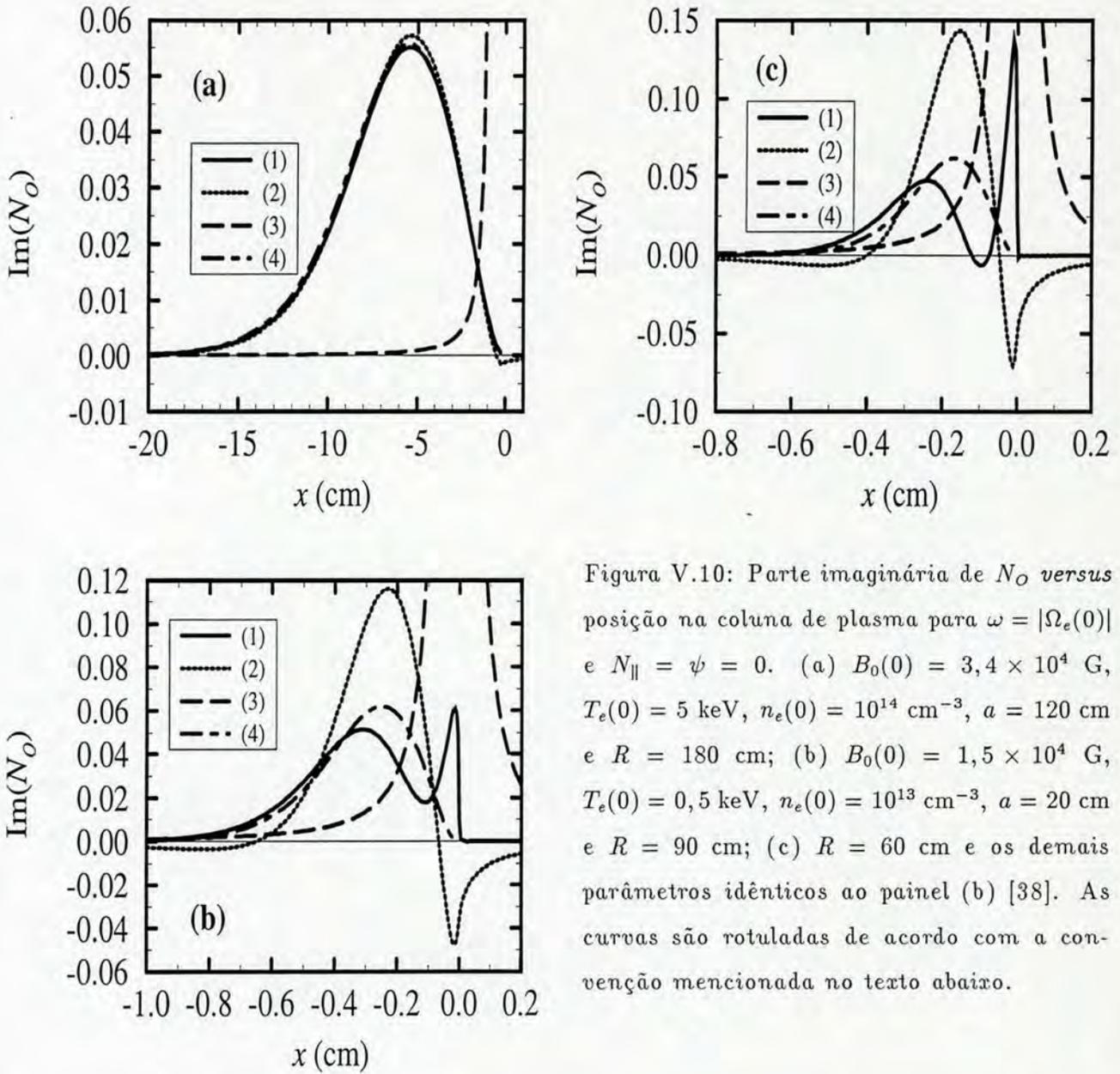


Figura V.10: Parte imaginária de N_O versus posição na coluna de plasma para $\omega = |\Omega_e(0)|$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$. (a) $B_0(0) = 3,4 \times 10^4$ G, $T_e(0) = 5$ keV, $n_e(0) = 10^{14}$ cm $^{-3}$, $a = 120$ cm e $R = 180$ cm; (b) $B_0(0) = 1,5 \times 10^4$ G, $T_e(0) = 0,5$ keV, $n_e(0) = 10^{13}$ cm $^{-3}$, $a = 20$ cm e $R = 90$ cm; (c) $R = 60$ cm e os demais parâmetros idênticos ao painel (b) [38]. As curvas são rotuladas de acordo com a convenção mencionada no texto abaixo.

distintos de parâmetros. A figura V.10a foi obtida com os mesmos parâmetros empregados na figura V.6 e com $R = 180$ cm. A curva contínua rotulada (1) é idêntica à curva tracejada “c” na figura V.6 e mostra $\text{Im}(N_O)$ obtido a partir do tensor dielétrico efetivo. A curva rotulada (2) foi obtida a partir do uso de (IV.53), o qual corresponde ao componente ϵ_{33}^0 do tensor (III.22), sobre o qual ainda não foi aplicada a transformação BGI. A curva (3) mostra o resultado obtido utilizando-se a relação de dispersão (IV.50), a qual é idêntica a (V.2.a) com o componente ϵ_{33}^0 no regime não relativístico. E a curva (4) é obtida usando o componente ϵ_{33}^A de (IV.47). Como já foi mencionado, para esta direção de propagação a curva (4) é igual ao resultado localmente homogêneo. Novamente, para este conjunto de parâmetros, compatíveis com um tokamak de grande porte, os resultados obtidos são muito próximos entre si, com exceção da curva (3), obtida no regime não relativístico. Como se pode perceber em (IV.50),

o único mecanismo de alargamento do espectro de absorção neste caso é a inhomogeneidade, e portanto o caso homogêneo não pode ser tratado. Pode-se perceber neste e nos outros painéis que a curva (3) prevê absorções arbitrariamente altas nas proximidades de $|\Omega_e(0)|$. Outro aspecto digno de nota no painel (a) é a região próxima a $x_1 = 0$ da curva (2), a qual mostra $\text{Im}(N_O) < 0$. Este aspecto é salientado nos painéis (b) e (c), cujos parâmetros físicos são os mesmos da figura V.7 com $R = 90\text{cm}$ (painel b) e $R = 60\text{cm}$ (painel c). No painel (b), a curva (1) foi retirada da figura V.7 e corresponde a $R_a = 4,5$. A inhomogeneidade ainda não é grande o suficiente para resultar em uma banda com absorção negativa. Pode-se ver, entretanto, que a curva (2) possui regiões com $\text{Im}(N_O) < 0$ em torno de $x_1 = 0$ ($\omega = |\Omega_e(0)|$), e de fato esta região se estende para posições ainda maiores, onde a curva (1) já zerou. Como a frequência de cíclotron depende da posição dentro da coluna de plasma, uma variação na posição corresponde a uma variação de $\omega/|\Omega_e(x_1)|$ e, de acordo com a argumentação feita em torno da equação (V.3), para posições onde $\omega/|\Omega_e(x_1)| > \omega_m/|\Omega_e|$, não pode mais ocorrer ressonância onda-partícula, e portanto a região com $\text{Im}(N_O) \neq 0$ na curva (2) (e também na curva 3) se deve a efeitos não-ressonantes contidos na parte anti-Hermiteana de ϵ_{33}^0 , que já foram discutidos na seção IV.3.

A curva (2) apresenta outra região com $\text{Im}(N_O) < 0$ para x_1 suficientemente pequeno. Esta curva é idêntica à mostrada na figura 1 de *McDonald et alli* (1994) [76], mais uma vez confirmando uma das argumentações feitas nesta tese, de que os resultados da *Abordagem B* são obtidos a partir do formalismo desenvolvido nesta tese realizando uma série de aproximações e fazendo um uso incorreto das expressões, ao não aplicar a transformação BGI sobre o tensor intermediário $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Ao se deparar com este comportamento bizarro, *Lashmore-Davies et alli* argumentam que embora o coeficiente de absorção local apresente a contribuição de termos não-ressonantes, estes termos são reversíveis e, portanto, no cálculo da absorção total integrada ($\eta(\infty)$ em V.9) estes termos se cancelam exatamente, deixando somente a contribuição dos termos ressonantes. Não obstante, esta argumentação não pode ocultar o fato de que o formalismo da *Abordagem B* é fundamentalmente incorreto, devido às várias razões apresentadas ao longo desta tese, e portanto não é possível afirmar que mesmo $\eta(\infty)$ esteja sendo corretamente calculada. Mesmo se assim o fosse, a argumentação de *Lashmore-Davies et alli* vale apenas para uma onda que se propaga no modo ordinário ao longo da inhomogeneidade. Se as ondas eletromagnéticas se propagarem em direções oblíquas ($N_{\parallel} \neq 0$ e/ou $\psi \neq 0$), a sua refração as forçará a passar por regiões com diferentes valores nos parâmetros físicos, e desta forma não se pode garantir que os efeitos não-ressonantes em um determinado ponto da coluna de plasma serão completamente compensados com os efeitos não-ressonantes em outros pontos ao longo da trajetória da frente de onda. Desta forma mesmo a absorção total

integrada não estaria livre de contribuições de efeitos que não possuem uma interpretação física aceitável.

Com o formalismo do tensor dielétrico efetivo, por outro lado, pode-se garantir, com base na argumentação tecida ao longo desta tese, que tanto o coeficiente de absorção local quanto a absorção total integrada possuem a contribuição exclusiva das partículas ressonantes, e por conseguinte os resultados assim obtidos são coerentes e fisicamente aceitáveis.

A única novidade que surge na figura V.10c é a presença da banda de absorção negativa na curva (1), retirada da figura V.7 para o caso de $R_a = 3$. As outras curvas apresentam as mesmas características já salientadas. Portanto, estes exemplos mostraram que o uso de três formalismos que não obedecem às simetrias básicas, quais sejam as expressões (IV.47, IV.50 e IV.53), levam a resultados diversos para o coeficiente de absorção. Pôde-se constatar como a inclusão correta dos efeitos da inhomogeneidade modifica os resultados usuais do espectro de absorção do modo ordinário nas proximidades da frequência de cíclotron eletrônica, onde a correção da inhomogeneidade compete com os efeitos relativísticos. A absorção aumenta próxima a $|\Omega_e|$ e continua a crescer com o aumento da inhomogeneidade, adquirindo alguma semelhança com o perfil apresentado pela curva (3) nas figuras V.10a-c, obtida com o uso de uma formulação não relativística. A diferença, contudo, está em que o pico de absorção decorrente da formulação correta não é simétrico em torno de $|\Omega_e|$, como é o caso da curva (3), porque os efeitos relativísticos, combinados com a correção inhomogênea, impedem que a absorção ocorra para $\omega > \omega_m$, de acordo com (V.3).

V.3 Análise do Modo Extraordinário

A análise do modo extraordinário é, em princípio, idêntica à análise feita na seção anterior para o modo ordinário, exceto que agora a refração e a absorção das ondas é governada pela equação (V.2.b). Na prática, porém, esta análise é dificultada por alguns fatores os quais, ou não existiam no caso anterior, ou não eram tão importantes. A principal dificuldade para a análise do modo extraordinário em frequências próximas a $|\Omega_e|$ consiste na existência da ressonância associada à frequência híbrida superior, $\omega_{HS} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2} = |\Omega_e| \sqrt{1 + \rho^2}$. No regime de parâmetros físicos com o qual se está trabalhando, onde $\rho < 1$ e $T_e \lesssim 5\text{keV}$, a frequência híbrida superior está pouco acima de $|\Omega_e|$, e em torno deste ponto o índice de refração do modo extraordinário (N_X) sofre uma variação abrupta, frequentemente entrando em uma região evanescente ($\text{Re}(N_X^2) < 0$) neste regime de baixa temperatura.

No caso de um plasma inhomogêneo, outros fenômenos acrescentam-se ao grau de dificuldade da análise do modo X (extraordinário). Já foi comentado em diversas ocasiões ao longo

desta tese que em torno de ressonâncias, como esta que ocorre em ω_{HS} , ocorrem fenômenos de conversão de modos, os quais não podem ser tratados com o formalismo aqui desenvolvido. Portanto, uma aplicação prática do presente formalismo ao estudo da absorção de ondas no modo X está vinculada a uma análise prévia do intervalo de parâmetros físicos onde a aproximação WKB é válida. Para se realizar tal análise é necessário que, no mínimo, se possa estimar a ordem de grandeza dos parâmetros de reflexão e conversão de modos, e tal análise está além do escopo desta tese. Algumas análises neste sentido podem ser encontradas na literatura, tais como os trabalhos de *Zvonkov & Timofeev* (1980) [114] e *Petrillo et alli* (1987) [90].

Nesta seção o interesse se restringe à apresentação de alguns resultados que mostram o efeito da inhomogeneidade na absorção de ondas X, resultados estes obtidos utilizando-se o formalismo aqui denominado de localmente inhomogêneo, cuja relação de dispersão está definida em termos do tensor dielétrico efetivo. Mesmo esta apresentação, contudo, será bem mais restrita em relação ao que se fez na seção anterior, porque a solução da equação (V.2.b), para determinados valores de parâmetros físicos, freqüentemente se mostrou violando a condição básica de absorção fraca, $\text{Im}(N_X) \ll \text{Re}(N_X)$. Em resumo, os resultados expostos nesta seção constituem apenas uma pequena introdução ao estudo numérico da absorção de ondas no modo X, e bastante trabalho resta ainda a ser feito.

Inicialmente será analisada a dependência de $\text{Im}(N_X)$ com a variação de \widetilde{N}_B . Os demais parâmetros físicos, tais como a temperatura e a densidade, serão da mesma ordem de grandeza dos valores adotados na seção anterior. Entretanto, como se pode notar na figura V.11, o efeito da inhomogeneidade tende a ser menos conspícuo para o modo X do que para o modo O (ordinário), pelo menos para o conjunto de parâmetros utilizado. Além disso, para a parte real de N_X o efeito é tão pequeno que não se considerou relevante incluir a correspondente figura para ilustrar o comportamento de $\text{Re}(N_X)$. Comparando-se a figura V.11 com a figura V.1, percebe-se que são necessários valores relativamente maiores de \widetilde{N}_B para se obter uma diferença visível entre os resultados homogêneo ($\widetilde{N}_B = 0$) e inhomogêneo. Novamente é possível definir-se, a partir de uma inspeção da figura V.11, uma banda inhomogênea, onde os efeitos do gradiente de B_0 se tornam importantes, para $0,98 \lesssim \omega \leq \omega_m$. Dentro desta banda observa-se que o pico de absorção diminui com o aumento de \widetilde{N}_B e, a exemplo do que sucede com o modo O (figura V.1), existe um segundo pico de absorção, como se observa na ampliação inserida na figura V.11, mas neste caso este pico é desprezível e aumenta muito lentamente com \widetilde{N}_B , ao contrário do que ocorre com o outro modo.

Outro aspecto importante na figura V.11 é a existência de uma banda de absorção negativa que aparentemente ocorre mesmo para valores arbitrariamente pequenos de \widetilde{N}_B . Este com-

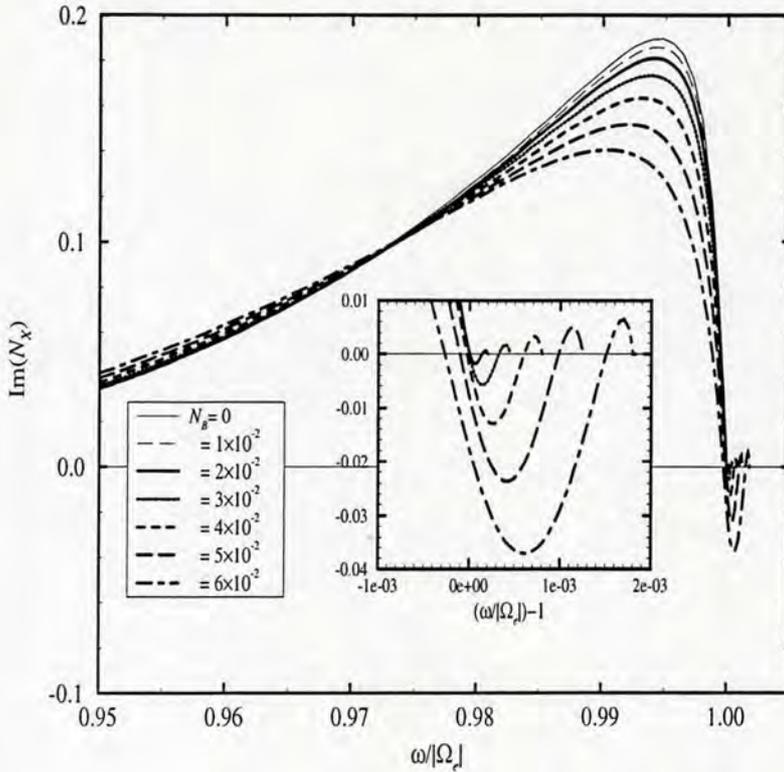


Figura V.11: Parte imaginária de N_X , em função da frequência $(\omega/|\Omega_e|)$, para diversos valores de \tilde{N}_B . Os demais parâmetros físicos utilizados são $T_e = 5$ keV, $\rho = 0,2$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$.

portamento também é distinto daquele que ocorre no modo O. Quanto aos valores máximos de frequência para ocorrer a absorção, observa-se que o modo X também satisfaz os valores de ω_m definidos na relação (V.3). A tabela V.3 mostra os valores de $\omega_m/|\Omega_e|$ para os casos ilustrados na figura V.11. Pode-se observar na ampliação inserida na figura V.11 que a parte final dos espectros concorda com os valores de ω_m apresentados na tabela V.3.

A evolução dos espectros de $\text{Im}(N_X)$ com a temperatura pode ser vista na figura V.12. Neste caso, o comportamento dos espectros é muito semelhante ao que se observa para o modo O na figura V.4. Enquanto que o espectro tende a se reduzir na banda de baixa frequência com a diminuição de T_e , o efeito da variação negativa da temperatura tende novamente a reforçar o efeito do gradiente do campo na banda inhomogênea, inclusive causando um aumento bem mais acentuado do segundo pico de absorção que se situa próximo a ω_m , em relação ao aumento ocasionado pela variação de \tilde{N}_B . Este segundo pico, entretanto, continua tão estreito que se fez necessário inserir na figura V.12 uma ampliação que tornasse possível separar os picos correspondentes a valores distintos de T_e . Ao contrário do que ocorre com

\tilde{N}_B	10^{-2}	2×10^{-2}	3×10^{-2}	4×10^{-2}	5×10^{-2}	6×10^{-2}
$(\omega_m/ \Omega_e) - 1$	5×10^{-5}	2×10^{-4}	$4,5 \times 10^{-4}$	8×10^{-4}	$1,25 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-3}$

Tabela V.3: Valores de ω_m para os espectros de absorção do modo extraordinário apresentados na figura V.11.

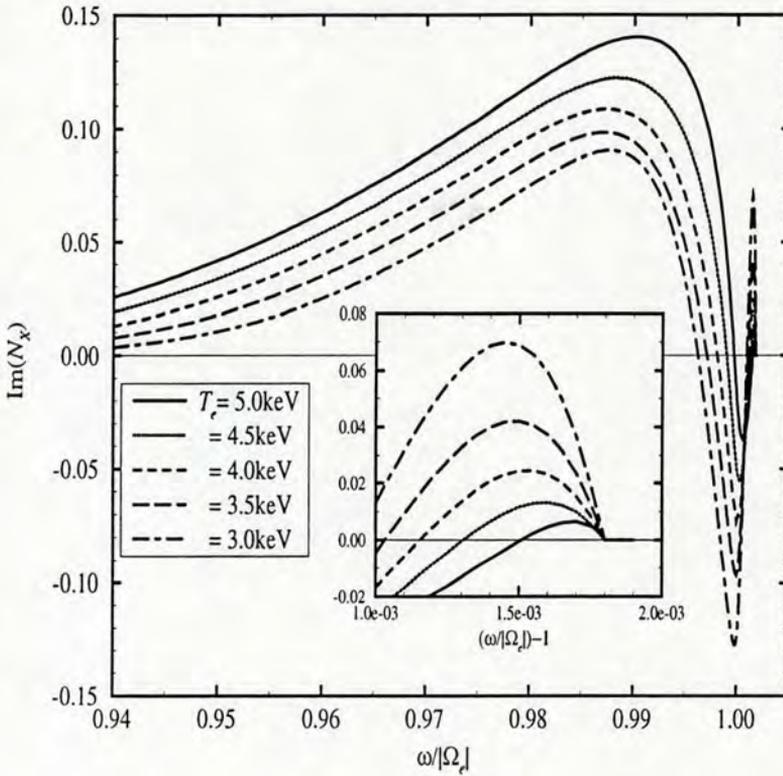


Figura V.12: Parte imaginária de N_X para diversos valores da temperatura T_e . Os demais parâmetros do plasma são: $\tilde{N}_B = 6 \times 10^{-2}$, $\rho = 0,2$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$.

o pico majoritário, e em conformidade com o que ocorre no segundo pico do modo O, o seu valor máximo aumenta com a redução de T_e .

Por fim, a figura V.13 mostra o comportamento de $\text{Im}(N_X)$ com a variação de ρ . Pode-se perceber que o espectro é bastante sensível ao aumento de ρ , ocorrendo uma redução

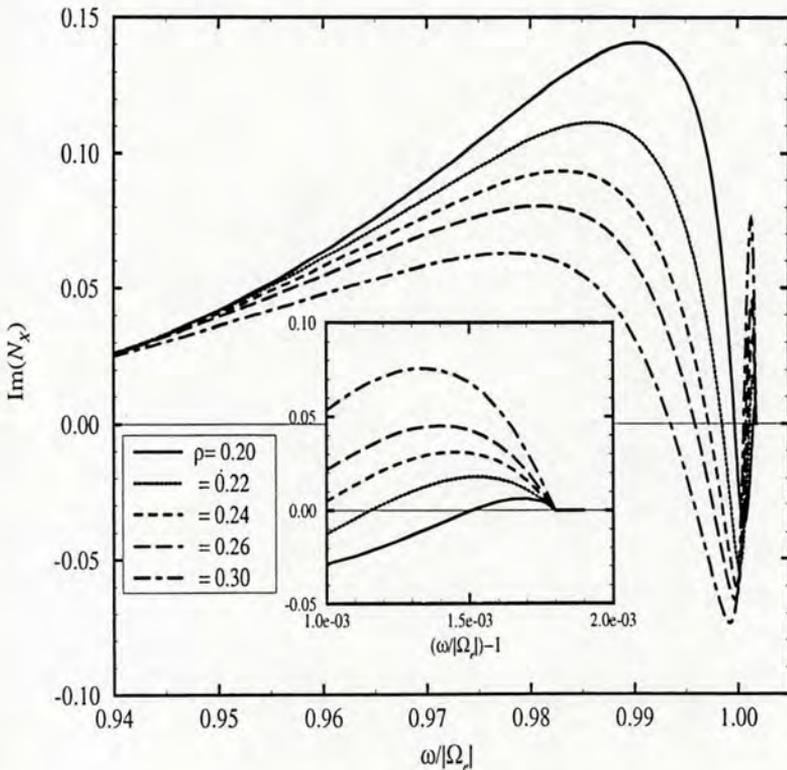


Figura V.13: Parte imaginária de N_X para diversos valores de ρ . Os demais parâmetros do plasma são: $\tilde{N}_B = 6 \times 10^{-2}$, $T_e = 5 \text{ keV}$ e $N_{\parallel} = \psi = 0$.

apreciável do primeiro pico de absorção com o aumento gradual de ρ , enquanto que o segundo pico e a banda de absorção negativa aumentam rapidamente. O comportamento do primeiro pico é novamente oposto ao comportamento do pico correspondente do modo O, como se pode notar na figura V.3 e também é coerente com resultados já conhecidos acerca da absorção do modo extraordinário em plasmas localmente homogêneos, onde o espectro varia com $(1/n_e)$ para densidades suficientemente altas [31].

SUMÁRIO E CONCLUSÕES

O estudo da absorção e da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas inhomogêneos constitui-se já em uma área tradicional de pesquisa em física dos plasmas, pois os primeiros trabalhos sistemáticos sobre o assunto possivelmente remontam à década de cinquenta, quando iniciou-se a construção de máquinas de confinamento de plasma, destinadas principalmente à obtenção da fusão nuclear. Simultaneamente, principiou também a pesquisa sobre o plasma em ambiente espacial em forma de plasma, com o lançamento cada vez mais freqüente de foguetes e satélites, sendo o Ano Geofísico Internacional um marco nesta exploração.

A despeito de sua longevidade, o problema da absorção e propagação de ondas em plasmas não uniformes caracteriza-se por ser ainda uma linha de pesquisa atual, principalmente devido à variedade de sistemas físicos novos que são continuamente observados e dos muitos outros sistemas possíveis. Mas, acima de tudo, as principais razões residem na complexidade matemática que o tratamento teórico apresenta e no difícil controle das diversas instabilidades que se devem às inhomogeneidades nos plasmas de laboratório e que têm dificultado o aumento no tempo de confinamento do plasma.

No capítulo I desta tese, procurou-se fazer um breve apanhado de alguns trabalhos recentes nesta área. Nesta oportunidade, dissertou-se de forma qualitativa sobre alguns dos métodos mais utilizados atualmente para se tratar o problema, com o intuito de situar o formalismo empregado ao longo desta tese dentro da área de pesquisa. Desta forma, abordou-se inicialmente a aproximação localmente homogênea, válida quando os gradientes espaciais forem muito pequenos, e cujo formalismo é idêntico ao caso homogêneo; isto é, supõe-se os campos dados em termos de ondas planas, e desta forma reduz-se a equação da onda a uma equação algébrica denominada relação ou equação de dispersão, a qual fica escrita em termos do vetor de onda e do tensor dielétrico. A inhomogeneidade é introduzida através da dependência espacial dos parâmetros físicos do plasma, e a trajetória da frente de onda é calculada introduzindo-se o conceito de raio e resolvendo um sistema canônico de equações diferenciais.

Em seguida, abordou-se três métodos distintos que incluem explicitamente os gradien-

tes espaciais dos parâmetros físicos nos seus formalismos. O primeiro método, devido a *Mikhaïlovskiï* [79, 82], consiste em uma solução formal da equação de Vlasov através do método das características, mantendo-se explícitos a dependência espacial e os gradientes dos parâmetros físicos do plasma. Escrevendo em seguida os campos em termos de ondas planas, e introduzindo a distribuição perturbada resultante na definição da densidade de corrente, torna-se possível isolar um tensor, o qual é identificado como o tensor de condutividade no espaço de Fourier, com os gradientes espaciais incluídos de forma explícita, diferentemente da aproximação localmente homogênea. Este tensor é introduzido então na relação de dispersão para se obter os modos normais de oscilação do plasma inhomogêneo. O segundo método, denominado teoria girocinética de *Chen & Tsai* [24, 106], consiste em um tratamento especial dado à equação de Vlasov, sendo aplicados diversos processos de promediação à esta última, resultando uma outra equação diferencial. Comentou-se então a aplicação que *Lashmore-Davies* e colaboradores [17, 63–65, 76] fizeram da teoria girocinética, expressando os campos novamente em termos de ondas planas e obtendo desta maneira relações de dispersão semelhantes às do caso homogêneo, mas contendo também contribuições explícitas dos gradientes espaciais.

Finalmente, abordou-se o formalismo adotado nesta tese e que é devido a *Beskin, Gurevich & Istomin* [8, 18, 50, 51]. Este método consiste basicamente em uma correção ou transformação, aqui chamada de transformação BGI, a ser aplicada sobre o tensor derivado pelo método devido a *Mikhaïlovskiï*, obtendo-se assim o denominado tensor dielétrico efetivo. Esta transformação foi derivada a partir de argumentos de conservação de energia e, entre outras propriedades, garante que o tensor dielétrico efetivo é a verdadeira transformada de Fourier, na variável rápida, do tensor dielétrico no espaço de configuração. Outras propriedades que este tensor apresenta consistem na satisfação das relações recíprocas de Onsager por parte do tensor dielétrico efetivo e na contribuição exclusiva das partículas ressonantes à parte anti-Hermiteana do referido tensor efetivo. Em sendo obtido o tensor dielétrico efetivo através da transformação BGI, este deve então ser introduzido em uma relação de dispersão idêntica àquela do caso homogêneo para se obter a descrição correta dos modos normais de oscilação em um plasma inhomogêneo.

Estes três métodos possuem em comum o fato de serem descrições em termos de modos normais de oscilação em um plasma não uniforme, modos estes obtidos a partir de relações de dispersão semelhantes aos limites homogêneo ou localmente homogêneo, mas os termos constituintes destas relações de dispersão dependem explicitamente dos gradientes dos parâmetros físicos. Devido a estas características em comum, estes métodos foram aqui denominados “localmente inhomogêneos.” Este tipo de tratamento se baseia em uma aproximação WKB, a qual

não descreve fenômenos de conversão de modos, passíveis de ocorrer em plasmas inhomogêneos.

Por fim, citou-se alguns métodos empregados na literatura recente, os quais tratam o problema através de soluções numéricas da equação da onda, tanto na forma diferencial quanto na forma íntegro-diferencial. Estes métodos são completamente gerais no sentido de que descrevem também fenômenos de conversão de modos, mas possuem a desvantagem de ser matematicamente complicados e de difícil implementação e aplicação.

Uma vez situado o formalismo empregado nesta tese dentro do contexto dos tratamentos usuais ao problema da propagação e absorção de ondas em plasmas inhomogêneos, procedeu-se então ao seu desenvolvimento aplicado ao sistema físico em particular aqui adotado. Os trabalhos pioneiros de Beskin *et alli*, que introduziram na literatura a transformação BGI e o conceito de tensor dielétrico efetivo, consistiram basicamente no desenvolvimento formal da teoria mais algumas poucas aplicações específicas. A gama de aplicações deste formalismo foi ampliada com os trabalhos de *Caldela et alli* [18–20] e *Cavalcanti et alli* [21, 23], onde o sistema físico adotado consistia em um plasma imerso em um campo magnético ambiente uniforme, mas com gradientes da função distribuição devidos às inhomogeneidades na temperatura, densidade, *etc.*

Nesta tese, ampliou-se ainda mais a gama de aplicações do formalismo BGI abordando-se um sistema físico particular onde a função distribuição pode ser considerada homogênea, mas o campo magnético externo apresenta um gradiente na sua direção perpendicular, gradiente este devido não à curvatura do campo, mas à dependência espacial do seu módulo. Com este intuito, no capítulo II procedeu-se à solução formal da equação de Vlasov linearizada através do método das características, obtendo-se a distribuição perturbada escrita na forma de uma integral de caminho calculada ao longo das trajetórias não perturbadas das partículas do plasma. O respectivo integrando depende dos campos eletromagnéticos e da função distribuição de equilíbrio, a qual é escrita em termos das constantes de movimento das trajetórias não perturbadas.

Tendo sido obtida formalmente a função distribuição perturbada, escreveu-se os campos em termos das integrais de Fourier e, fazendo uso da definição da densidade de corrente, obteve-se os tensores $\vec{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ e $\vec{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ na sua forma geral. Ao final do capítulo, abordou-se rapidamente os princípios fundamentais da transformação BGI, a qual deve ser aplicada sobre o tensor $\vec{\epsilon}^0$, de forma a se obter o tensor dielétrico efetivo.

O sistema físico considerado nesta tese foi então descrito no capítulo III. Considerando um plasma imerso em um campo magnético com gradientes perpendiculares, o tensor $\vec{\epsilon}^0$, obtido de maneira formal no capítulo anterior, foi particularizado para o sistema em questão. Inicialmente foram obtidas as trajetórias das partículas não perturbadas neste sistema físico

através do método perturbativo que corrige as secularidades que surgem nas expansões. Estas trajetórias foram então utilizadas na integral de caminho para se obter o tensor $\vec{\epsilon}^0$. Neste ponto supôs-se que o cálculo dos termos devidos às espécies e/ou populações de partículas responsáveis pela maior contribuição a $\vec{\epsilon}^0$, no intervalo de frequências de interesse, pode ser feito no referencial de repouso destas partículas na direção x_2 ; portanto, a corrente de equilíbrio nesta direção, devida à existência do gradiente do campo, é mantida por espécies e/ou populações de partículas que possuem contribuições desprezíveis a $\vec{\epsilon}^0$. Assim, torna-se possível escrever a função distribuição das partículas de interesse somente em termos das constantes de movimento p_{\perp}^2 e p_{\parallel} , sem a dependência explícita em x_1 . Tendo, desta maneira, isolado os efeitos dos gradientes do campo, obteve-se $\vec{\epsilon}^0$. Sobre este tensor, aplicou-se em seguida a transformação BGI e se obteve finalmente o tensor dielétrico efetivo $\vec{\epsilon}$. A parte final do capítulo III foi devotada a uma discussão sobre as relações recíprocas de Onsager para um sistema estatístico que sofre perturbações em torno de um estado de equilíbrio que não corresponde ao equilíbrio termodinâmico. Com base nesta discussão, deduziu-se as relações de reciprocidade que o tensor dielétrico efetivo para um plasma inhomogêneo deve satisfazer. Estas relações de reciprocidade foram então utilizadas para se mostrar que, enquanto o tensor $\vec{\epsilon}^0$ não satisfaz as relações de Onsager, o tensor $\vec{\epsilon}$ as satisfaz plenamente, corroborando o conceito do tensor dielétrico efetivo como o coeficiente de transporte correto a ser usado para relacionar o campo elétrico com a densidade de corrente no espaço de Fourier.

As expressões obtidas para os componentes do tensor dielétrico efetivo, escritas em termos da função distribuição de equilíbrio geral, foram particularizadas no capítulo IV para os regimes de velocidades fracamente relativísticas e não relativísticas. Inicialmente calculou-se $\vec{\epsilon}$ para uma distribuição Maxwelliana, escrevendo-se os componentes de $\vec{\epsilon}$ resultantes em termos de uma função especial denominada de função de dispersão de plasma inhomogêneo (\mathcal{G}). Obteve-se em seguida expressões para a função \mathcal{G} em termos de funções de dispersão usuais em física dos plasmas, tais como as funções de Fried & Conte e de Shkarofsky. Estas expressões se tornam extremamente úteis, pois facilitam e aceleram a computação da função \mathcal{G} e todas as suas propriedades analíticas são obtidas a partir das propriedades das funções de dispersão usuais e, em particular, facilitam o cálculo da parte imaginária de \mathcal{G} . Graças a esta última facilidade, conseguiu-se verificar explicitamente que a parte anti-Hermiteana do tensor $\vec{\epsilon}$, para uma distribuição Maxwelliana, fica escrita somente em termos da parte imaginária da função \mathcal{G} , a qual possui a contribuição somente das partículas ressonantes. Para comparar este importante resultado com resultados dos outros métodos citados da aproximação localmente inhomogênea no capítulo I, calculou-se alguns componentes dos tensores obtidos por estes métodos e se mostrou que estes tensores não satisfazem as relações recíprocas de

Onsager e que, por conseqüência, possuem a contribuição de partículas não ressonantes na sua parte anti-Hermiteana, fenômeno este que não possui justificativa física, uma vez que no regime linear a onda somente troca energia com o plasma através das partículas ressonantes.

Na parte final do capítulo IV obteve-se os componentes do tensor efetivo $\vec{\epsilon}$ para um função distribuição mais geral que a Maxwelliana utilizada anteriormente. Esta distribuição modela alguns aspectos freqüentemente encontrados em distribuições observadas e que são geralmente considerados a causa de diversas instabilidades que ocorrem em ondas em plasmas. Os aspectos modelados nesta distribuição reproduzem cones-de-perda e anisotropias nas dispersões de velocidades nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético. A presença de feixes de partículas também pode ser modelada se os componentes de $\vec{\epsilon}$ obtidos forem posteriormente transformados do referencial de repouso para o referencial de laboratório, através de uma transformação de Lorentz. Utilizando então esta outra distribuição, foi possível escrever os componentes de $\vec{\epsilon}$ em termos de uma nova função de dispersão de plasma inhomogêneo (\mathcal{G}^*), a qual está relacionada com a função \mathcal{G} . Estes novos componentes do tensor dielétrico efetivo também satisfazem as propriedades físicas fundamentais observadas para os componentes de $\vec{\epsilon}$ calculados para uma distribuição Maxwelliana.

Coletando os resultados obtidos ao longo dos capítulos prévios, conclui-se que o formalismo aqui desenvolvido possui uma série de características físicas que são consideradas altamente favoráveis à tese de que o tensor dielétrico efetivo é o tensor correto a ser utilizado na relação de dispersão para se descrever a absorção de ondas eletromagnéticas e para determinar os modos normais de oscilação em plasmas inhomogêneos na aproximação WKB. As propriedades físicas que o tensor dielétrico efetivo satisfaz são as seguintes.

- (1). *Conservação de energia.* O tensor dielétrico efetivo ($\vec{\epsilon}$) é definido de tal forma que se possa escrever uma equação de conservação de energia, em termos de $\vec{\epsilon}^0$, formalmente idêntica à equação que se obtém na aproximação localmente homogênea. A diferença consiste no fato de que ao invés de se escrever o termo dissipativo em função da parte anti-Hermiteana de $\vec{\epsilon}^0$, a inclusão explícita dos gradientes gera termos adicionais que, ao serem reordenados, mostram que o termo dissipativo na equação de conservação deve ser escrito em termos do tensor $\vec{\epsilon}^0$ corrigido, definindo-se assim o tensor dielétrico efetivo.
- (2). *Transformada de Fourier.* Mostrou-se, no capítulo II, que é possível também definir o tensor efetivo como sendo a transformada de Fourier na variável rápida do tensor dielétrico no espaço de configuração. Este tensor, $\vec{\epsilon}$, fica então escrito na forma de uma transformação do tipo Fourier aplicada sobre o tensor $\vec{\epsilon}^0$, sendo este último obtido

a partir de uma expansão em ondas planas realizada sobre o campo eletromagnético. Expandindo a seguir o tensor $\vec{\epsilon}^0$ em série de potências da variável rápida, a integração pode ser realizada resultando daí uma expressão para $\vec{\epsilon}$ em termos de uma série das derivadas de $\vec{\epsilon}^0$. Esta expressão para o tensor efetivo coincide com a definição obtida a partir de argumento de conservação de energia.

- (3). *Relações recíprocas de Onsager.* Aplicando-se o formalismo BGI em um sistema físico onde o campo magnético possui gradientes do seu módulo na direção perpendicular, e a função distribuição de equilíbrio pode ser considerada formalmente homogênea, obteve-se um tensor dielétrico efetivo que satisfaz plenamente as relações recíprocas de Onsager. Portanto, o tensor $\vec{\epsilon}$ consiste no correto coeficiente de transporte que relaciona o campo elétrico da onda com a densidade de corrente das partículas no espaço de Fourier. Mostrou-se também que o tensor $\vec{\epsilon}^0$, anterior à transformação BGI, não obedece às relações recíprocas de Onsager, e portanto não pode servir de coeficiente de transporte.
- (4). *Contribuições ressonantes à parte anti-Hermiteana.* Ao se calcular o tensor dielétrico efetivo para funções distribuição particulares, como por exemplo a distribuição de Maxwell-Boltzmann, pôde-se verificar que pelo menos para estas distribuições a parte anti-Hermiteana dos componentes de $\vec{\epsilon}$ possui a contribuição única e exclusiva das partículas ressonantes. Esta propriedade é fundamental, pois no regime linear o único mecanismo de troca de energia entre o plasma e o campo eletromagnético é a ressonância onda-partícula, sustentada exclusivamente pelas partículas que satisfazem a condição de ressonância. Mostrou-se também dois aspectos importantes a respeito de outros formalismos adotados na literatura atual. Em primeiro lugar, mostrou-se que os resultados destes formalismos alternativos podem ser obtidos a partir do tensor $\vec{\epsilon}^0$, algumas vezes com diversas aproximações. Devido a isso, mostrou-se então que estes formalismos não obedecem às relações recíprocas de Onsager e, portanto, que a parte anti-Hermiteana dos componentes do tensor $\vec{\epsilon}^0$ possui contribuições não ressonantes e, assim, fisicamente inaceitáveis.

Para finalizar o trabalho, realizou-se no capítulo V uma análise numérica das soluções da relação de dispersão para ondas que se propagam no plano perpendicular à direção de B_0 . Esta análise foi essencialmente acadêmica e serviu para ilustrar as modificações que os gradientes do campo induzem no espectro de absorção das ondas eletromagnéticas. Serviu também para corroborar numericamente algumas das conclusões expressas acima. Em particular, mostrou que o espectro de absorção obtido a partir do tensor dielétrico efetivo realmente

desaparece para frequências acima do limite onde não é mais possível ocorrer a ressonância onda-partícula. Simultaneamente, mostrou-se os espectros previstos pelos formalismos alternativos, nos quais nota-se perfeitamente que a absorção continuaria para frequências acima do limite superior da ressonância, evidenciando assim a contribuição das partículas não ressonantes.

Nesta oportunidade fez-se também um modelo simplificado para a absorção de ondas no modo ordinário que se propagam ao longo da inhomogeneidade, no centro da coluna de plasma de um tokamak. Obteve-se resultados para dois conjuntos de parâmetros físicos correspondentes a tokamaks de grande e pequeno portes, atualmente em operação ou projetados. No caso de tokamaks de grande porte, tais como o JET ou o ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*), o formalismo do tensor dielétrico efetivo não previu diferenças substanciais em relação aos resultados da aproximação localmente homogênea. Para um tokamak de pequeno porte, tal como o START ou o TBR II, entretanto, embora a absorção total integrada resultasse idêntica à prevista pela aproximação localmente homogênea, a absorção local pode apresentar diferenças substanciais, de onde se conclui que o padrão previsto para a deposição de energia em tokamaks pequenos pode ser alterado dependendo do formalismo adotado. Possivelmente a própria absorção total integrada possa ser diferente se a injeção de ondas se fizer em direções oblíquas, forçando assim a onda a se propagar por regiões distintas, dependendo do formalismo adotado para se calcular a trajetória e a absorção das ondas.

Um resultado inesperado foi o surgimento de uma banda de absorção negativa para valores suficientemente altos da inhomogeneidade. Esta banda surge mesmo para o caso de propagação ao longo da inhomogeneidade, quando a onda não se acopla à deriva macroscópica das partículas na direção x_2 . Sem se dispor de uma explicação física mais fundamentada, atribuiu-se este fenômeno à liberação de um possível excesso de energia contida no gradiente do campo magnético, a qual ocorreria a partir de um limiar que seria ultrapassado quando certas condições fossem satisfeitas. A banda de absorção negativa se intensifica sempre que o ângulo azimutal aumenta, e este efeito foi suposto ser devido a um acoplamento do componente k_2 do vetor de onda à deriva macroscópica das partículas nesta direção. Estes fenômenos merecem maiores investigações destinadas a esclarecer a verdadeira explicação e natureza desta banda de absorção negativa.

Como não poderia deixar de ser, existem diversos aspectos que não foram abordados ao longo desta tese, tanto em função das aproximações que foram feitas, mas que podem ser removidas, quanto por se tratarem de questões que foram levantadas como consequência dos resultados aqui obtidos. Estes aspectos deixam margem para futuros desenvolvimentos e aplicações do formalismo desenvolvido nesta tese, desenvolvimentos estes considerados

relevantes e factíveis. Alguns destes desenvolvimentos são listados a seguir.

- (1). Na análise numérica realizada no capítulo V, utilizou-se somente o tensor dielétrico efetivo obtido para a função de Maxwell-Boltzmann, e não se estudou os efeitos da inomogeneidade nas instabilidades geradas por distribuições que não estão em equilíbrio termodinâmico mesmo em plasmas homogêneos, das quais a distribuição utilizada na seção IV.4 constitui um exemplo. Estas distribuições geralmente apresentam regiões de inversão de população, como cones-de-perda ou feixes, ou anisotropias nas temperaturas paralela e perpendicular em relação ao campo magnético, e são largamente utilizadas para modelar plasmas espaciais e de laboratório.

Uma possível extensão, portanto, consiste em investigar inicialmente de uma forma acadêmica os efeitos de gradientes perpendiculares de campo nas instabilidades geradas por distribuições de não-equilíbrio. Os resultados a ser obtidos poderão eventualmente incentivar o estudo aplicado de algum tipo de radiação que ocorre em sistemas naturais, no regime de parâmetros que apresentar o maior efeito da inomogeneidade. Como a parte teórica deste problema já foi em parte desenvolvida na seção IV.4, resta apenas a construção dos códigos numéricos específicos ao problema.

- (2). Até então considerou-se inomogeneidades somente no campo magnético, mantendo-se a densidade e a temperatura do plasma uniformes. Como já foi ressaltado, trabalhos anteriores que fazem uso do formalismo BGI investigaram a situação complementar [18–21, 23]. A principal diferença entre estas duas aproximações é que no caso de gradiente de campo, este modifica a própria condição de ressonância onda-partícula, enquanto que para os outros gradientes a ressonância não é alterada, e neste caso basta uma correção de primeira ordem para se obter o tensor efetivo com as propriedades corretas. No caso de gradiente de campo, por outro lado, é necessária uma correção em um número infinito de ordens.

Outra possível extensão, portanto, consistiria em realizar um tratamento unificado, o qual possibilitaria ampliar enormemente a gama de fenômenos passíveis de estudo. Entre estes fenômenos, poder-se-ia investigar as instabilidades de deriva *cross-field*, as quais são devidas às inomogeneidades do plasma e do campo magnético, e que são supostas importantes na fase de energização de subtormentas na cauda magnetosférica terrestre [111–113].

- (3). O formalismo desenvolvido na tese e nos pontos (1) e (2) pode também ser empregado no estudo da absorção ou amplificação de ondas com frequências em torno da frequência

de cíclotron iônica. Recentemente tem surgido trabalhos que investigam a absorção e eventualmente a amplificação de ondas por ions minoritários, gerados através do aquecimento por ondas de cíclotron, ou pelas partículas alfa geradas pela fusão termonuclear [43, 65, 66]. Neste caso, uma possibilidade seria investigar os efeitos das inomogeneidades na absorção de ondas de cíclotron por ions minoritários. Como ions são muito mais massivos que eletrons, são necessárias energias muito elevadas para acelerá-los a velocidades relativísticas, e portanto a absorção de ondas por ions é estudada geralmente utilizando-se a aproximação não relativística. Este formalismo já foi em parte desenvolvido ao longo desta tese e poderia ser desenvolvido também durante a realização dos projetos descritos nos pontos (1) e (2). Seria assim possível aplicar o formalismo tanto para o centro da lâmina de plasma quanto para as bordas, onde os gradientes de densidade e temperatura são grandes.

- (4). A restrição de gradiente perpendicular ao campo magnético inibe a investigação de uma série de fenômenos naturais que se originam em regiões onde o gradiente é oblíquo ou predominantemente paralelo. Exemplo disso é a chamada Radiação Quilométrica Auroral (AKR), a qual se origina na região auroral da magnetosfera terrestre onde o gradiente de campo é principalmente paralelo, e que consiste na fonte mais intensa de radiação da magnetosfera terrestre [34, 40, 42]. Um aspecto até então inexplorado na investigação da AKR é a inclusão explícita dos gradientes no cálculo do coeficiente de absorção de ondas, sendo a grande maioria dos trabalhos até agora realizados na aproximação localmente homogênea.

Existiria, portanto, um grande interesse na obtenção do tensor dielétrico efetivo para o caso de gradiente oblíquo de campo para investigar quais seriam os efeitos da inomogeneidade de campo no coeficiente de absorção da AKR.

- (5). Os projetos até agora apresentados estão restritos à aproximação WKB, e portanto o formalismo não permite a investigação de fenômenos de reflexão e conversão de modos, os quais estão freqüentemente ocorrendo em plasmas inomogêneos quando determinado modo de propagação se aproxima de ressonâncias ou cortes [102]. Neste caso, poder-se-ia utilizar as expressões obtidas para o tensor dielétrico efetivo, o qual, como já foi ressaltado, consiste na verdadeira transformada de Fourier do tensor dielétrico no espaço de configuração, para construir uma equação da onda para plasmas inomogêneos que separasse corretamente o termo irreversível de absorção das ondas do termo reversível, que consiste em um fluxo cinético de potência [14, 77]. O procedimento a ser adotado para a obtenção da equação da onda seria semelhante ao empregado por *Itoh et al.*

(1985) [52] e por *McDonald et al.* (1994) [76]. A equação diferencial deverá ser passível de solução a partir de rotinas numéricas padrões e as condições de contorno serão semelhantes às utilizadas por *Maroli et al.* (1986) [74] e *Petrillo et al.* (1987) [90].

APÊNDICE A

A CONDIÇÃO DE RESSONÂNCIA PARA PLASMAS COM GRADIENTES PERPENDICULARES DO CAMPO

Em um plasma inhomogêneo, a condição de ressonância para a interação onda-partícula é dada pela equação (III.17), a qual é aqui repetida,

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = \gamma - N_{\parallel} u_{\parallel} - n Y_{\alpha}(x_1) - n N_B u_{\perp} \sin \varphi - N_B \frac{N_{\perp} u_{\perp}^2}{2 Y_{\alpha}} \sin \psi = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde os ângulos φ e ψ estão representados na figura III.1. No limite $k_B = N_B = 0$, a equação (A.1) se reduz à condição de ressonância para um plasma homogêneo, a qual possui a forma de uma cônica no espaço de *momenta*. Análises da condição de ressonância em plasmas homogêneos podem ser encontrados em *Gaelzer* (1991) [34] ou em *Wu* (1985) [110].

O significado físico da equação (A.1) fica mais claro escrevendo-a na seguinte forma,

$$\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + n \frac{\Omega_{\alpha}(x_1)}{\gamma} + n k_B v_{\perp} \sin \varphi + k_B \frac{k_{\perp} v_{\perp}^2}{2 \gamma \Omega_{\alpha}} \sin \psi. \quad (\text{A.2})$$

A equação acima determina a condição para que uma onda com frequência ω e vetor de onda k entre em ressonância com uma partícula de velocidade v imersa em um campo magnético $B_0(x_1)$. Se a distribuição das partículas possuir uma dispersão de velocidades $v_T^2 \propto T_{\alpha}$, então cada termo do lado direito de (A.2) introduz um alargamento no espectro de absorção (ou de emissão) ao redor do n -ésimo harmônico ($\Delta\omega_n$). Os dois primeiros termos já estão presentes em um plasma homogêneo e correspondem ao alargamento devido ao efeito Doppler [10]

$$(\Delta\omega_n)_1 \simeq n \Omega_{\alpha} |N_{\parallel}| \left(\frac{v_T}{c} \right)$$

e ao alargamento relativístico

$$(\Delta\omega_n)_2 \simeq n \Omega_{\alpha} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2.$$

Os dois termos restantes correspondem a alargamentos do espectro de absorção devidos à inhomogeneidade do campo magnético, e são dados por

$$(\Delta\omega_n)_3 \simeq n^2 \Omega_{\alpha} N_B \left(\frac{v_T}{c} \right), \quad (\Delta\omega_n)_4 \simeq n^2 \Omega_{\alpha} N_B |N_{\perp}| \sin \psi \left(\frac{v_T}{c} \right)^2, \quad (\text{A.3})$$

sendo que o termo $(\Delta\omega_n)_3$ mostra que os efeitos inomogêneos se manifestam mesmo quando a onda se propaga em uma direção coplanar à inomogeneidade ($\psi = 0$), não se acoplando, portanto, à deriva macroscópica na direção x_2 .

A comparação entre os termos homogêneos $(\Delta\omega_n)_1$ e $(\Delta\omega_n)_2$ mostra que, quando

$$|N_{\parallel}| < v_T/c,$$

o alargamento devido a efeitos relativísticos é predominante e, em caso contrário, o efeito mais significativo é o alargamento Doppler. Comparando agora os “alargamentos inomogêneos” com os homogêneos, resulta para $(\Delta\omega_n)_3$

$$\frac{(\Delta\omega_n)_3}{(\Delta\omega_n)_1} = \frac{nN_B}{|N_{\parallel}|}, \quad \frac{(\Delta\omega_n)_3}{(\Delta\omega_n)_2} = \frac{nN_B}{(v_T/c)}, \quad (\text{A.4})$$

o que mostra que $(\Delta\omega_n)_3$ se torna importante quando a direção do vetor de onda se aproxima da perpendicular ($k_{\parallel} \rightarrow 0$) e/ou quando a temperatura do plasma é reduzida. Simultaneamente, o termo $(\Delta\omega_n)_4$, comparado com o alargamento Doppler, resulta

$$\frac{(\Delta\omega_n)_4}{(\Delta\omega_n)_1} = nN_B \left| \frac{N_{\perp}}{N_{\parallel}} \right| \left(\frac{v_T}{c} \right) \text{sen } \psi.$$

Pode-se notar que este termo se torna importante quando $|N_{\perp}/N_{\parallel}| \gg 1$ e/ou também quando a temperatura do plasma é elevada. Comparando com o alargamento relativístico, contudo, este termo é sempre pequeno, exceto próximo a ressonâncias¹

$$\frac{(\Delta\omega_n)_4}{(\Delta\omega_n)_2} = nN_B |N_{\perp}| \text{sen } \psi.$$

Alguns casos especiais da condição de ressonância (A.1) serão agora analisados.

A.1 Propagação Coplanar à Direção da Inomogeneidade

Neste caso a condição de ressonância se reduz a

$$\gamma - N_{\parallel}u_{\parallel} - nY_{\alpha}(x_1) - nN_B u_{\perp} \text{sen } \varphi = 0,$$

a qual pode ser expressa em coordenadas cartesianas, resultando a equação de uma superfície em três dimensões dada por

$$u_1^2 + (1 - n^2 N_B^2) \left(u_2 - \frac{n^2 N_B Y_{\alpha}(x_1)}{1 - n^2 N_B^2} \right)^2 + (1 - N_{\parallel}^2) \left(u_{\parallel} - \frac{n N_{\parallel} Y_{\alpha}(x_1)}{1 - N_{\parallel}^2} \right)^2 - 2n N_B N_{\parallel} u_2 u_{\parallel} = n^2 Y_{\alpha}^2(x_1) - 1 + \frac{n^4 N_B^2 Y_{\alpha}^2(x_1)}{1 - n^2 N_B^2} + \frac{n^2 N_{\parallel}^2 Y_{\alpha}^2(x_1)}{1 - N_{\parallel}^2}$$

¹A quantidade $N_B = k_B c/\omega$, contudo, não necessariamente é pequena, ao contrário de k_B .

Esta superfície complicada se reduz a um elipsóide de revolução quando $N_{\parallel} = 0$:

$$u_{\perp}^2 + (1 - n^2 N_B^2) \left(u_2 - \frac{n^2 N_B Y_{\alpha}(x_1)}{1 - n^2 N_B^2} \right)^2 + u_{\parallel}^2 = \frac{n^2 [Y_{\alpha}^2(x_1) + N_B^2] - 1}{1 - n^2 N_B^2}.$$

No caso homogêneo, $N_B = 0$, este elipsóide se reduz para a usual semi-circunferência [34, 110]

$$u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2 = n^2 Y_{\alpha}^2 - 1.$$

A.2 Regime Fracamente Relativístico

Neste caso tem-se que $\gamma \approx 1 + u^2/2$, e a condição de ressonância (A.1), na sua forma mais geral, se reduz mais uma vez à equação de um elipsóide de revolução

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{2} u_{\perp}^2 + \frac{\sigma_{\alpha}}{2} \left(u_2 - \frac{n N_B}{\sigma_{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{2} (u_{\parallel} - N_{\parallel})^2 = n Y_{\alpha}(x_1) - 1 + \frac{N_{\parallel}^2}{2} + \frac{n^2 N_B^2}{2 \sigma_{\alpha}}. \quad (\text{A.5})$$

É evidente que este elipsóide somente existe se o lado direito de (A.5) for positivo, e esta é justamente a condição para a existência da parte imaginária da função de Shkarofsky $\mathcal{F}_q(z, a)$, de acordo com (IV.41). Pode-se perceber claramente então, que a parte anti-Hermiteana do tensor dielétrico efetivo (IV.16) é não nula somente em presença da ressonância onda-partícula.

A.3 Regime Não Relativístico

Neste regime a condição de ressonância se reduz a

$$n N_B u_2 + N_{\parallel} u_{\parallel} = 1 - n Y_{\alpha}(x_1), \quad (\text{A.6})$$

a qual pode ser escrita em uma forma equivalente através de uma rotação dos eixos coordenados em um ângulo $\theta = -\tan^{-1}(n N_B / N_{\parallel})$, de onde resulta

$$\bar{u}_{\parallel} = \frac{1 - n Y_{\alpha}(x_1)}{\sqrt{n^2 N_B^2 + N_{\parallel}^2}}. \quad (\text{A.7})$$

O lado direito das equações (A.6, A.7) está relacionado com a parte imaginária da função de dispersão de plasma inhomogêneo no regime não relativístico, como se pode ver na equação (IV.42).

APÊNDICE B

FUNÇÕES DE DISPERSÃO DE PLASMA

Neste apêndice serão rapidamente mostradas algumas das propriedades mais importantes das funções de dispersão de plasma. As funções que serão aqui estudadas são as funções de Fried & Conte $Z(z)$, de Dnestrovskiï $F_q(z)$ e de Shkarofsky $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$.

A grande maioria das propriedades aqui descritas foram retiradas dos trabalhos de Robinson (1986, 1987 e 1989) [95-97]; entretanto, não serão apresentadas todas as fórmulas contidas nestes trabalhos e em suas referências, sendo exibidas somente as que interessam de imediato a esta tese.

B.1 A Função de Fried & Conte $Z(z)$

A função $Z(z)$ é a função especial básica da teoria cinética de plasmas, sendo utilizada geralmente no estudo da dispersão de ondas em plasmas não relativísticos. Ela é definida por

$$Z(z) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - z} = i \int_0^{\infty} d\xi e^{(iz\xi - \xi^2/4)} ; \text{Im}(z) > 0. \quad (\text{B.1})$$

A continuação analítica de $Z(z)$ para $\text{Im}(z) < 0$ pode ser obtida ou deformando-se o contorno de integração de modo a passar sempre sob o pólo z , de onde resulta

$$Z(z) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-\xi^2}}{\xi - z} + i2\pi^{1/2} e^{-z^2} ; \text{Im}(z) < 0, \quad (\text{B.2})$$

ou redefinindo a variável de integração de modo a obter uma outra forma para a definição de $Z(z)$, a qual pode ser escrita em termos da função erro complementar,

$$Z(z) = 2ie^{-z^2} \int_{-\infty}^{iz} d\xi e^{-\xi^2} = i\pi^{1/2} e^{-z^2} \text{erfc}(-iz), \quad (\text{B.3})$$

a qual é válida para qualquer z .

Já no limite $\text{Im}(z) \rightarrow 0^+$ a função $Z(z)$ é dada por

$$Z(z) = -2e^{-z^2} \int_0^z d\xi e^{\xi^2} + i\pi^{1/2} e^{-z^2}. \quad (\text{B.4})$$

A derivada de ordem 1 de $Z(z)$ é dada por

$$Z'(z) = -2[1 + zZ(z)] , \tag{B.5}$$

enquanto que a derivada de ordem n é

$$Z^{(n)}(z) = i \int_0^\infty d\xi (i\xi)^n e^{(iz\xi - \xi^2/4)} \tag{B.6.a}$$

$$= i(-)^n 2^{n+1} e^{-z^2} \int_{-\infty}^{iz} d\xi (z + i\xi)^n e^{-\xi^2} \tag{B.6.b}$$

$$= -2zZ^{(n-1)}(z) - 2(n-1)Z^{(n-2)}(z) ; n \geq 2. \tag{B.6.c}$$

Para fins de computação, usam-se três expressões distintas para $Z(z)$, dependendo da ordem de grandeza de $|z|$. Para $|z| \ll 1$ utiliza-se a expansão em série

$$Z(z) = -z \sum_{j=0}^\infty \frac{\pi^{1/2} (-z)^j}{\Gamma(j + 3/2)} + i\pi^{1/2} e^{-z^2} ,$$

onde $\Gamma(z)$ é a função gama [2]. Para $|z| \approx 1$, costuma-se calcular a função de Fried & Conte através de frações continuadas, as quais podem ser obtidas da definição em termos da função erro (B.3) em *Abramowitz & Stegun* (1970) [2], fórmula 7.1.15,

$$Z(z) = \frac{1}{z} \frac{1/2}{z} \frac{1}{z} \frac{3/2}{z} \frac{2}{z} \dots$$

Já para o limite assintótico $|z| \gg 1$ utiliza-se a expansão

$$Z(z) \approx -\frac{1}{z} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(j + 1/2)}{\pi^{1/2} z^{2j}} + i\pi^{1/2} \sigma e^{-z^2} ; \sigma = \begin{cases} 0, \text{Im}(z) > 0 \\ 1, \text{Im}(z) = 0 \\ 2, \text{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

B.2 Funções de Dispersão para Plasmas Fracamente Relativísticos

Em plasmas fracamente relativísticos utiliza-se amiúde as funções de Dnestrovskiï $F_q(z)$ e de Shkarofsky $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$. A primeira é definida por

$$F_q(z) = -i \int_0^\infty dt \frac{e^{izt}}{(1-it)^q} ; \text{Im}(z) > 0 , \tag{B.7}$$

onde q é um número real e z é complexo. A função $F_q(z)$ obedece a seguinte relação de recorrência

$$(q-1)F_q(z) = 1 - zF_{q-1}(z) ,$$

e as suas derivadas são

$$\frac{dF_q}{dz}(z) = F_q(z) - F_{q-1}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} F_q(z)] = (-)^n e^{-z} F_{q-n}(z) .$$

Robinson (1986) [95] apresenta expressões para $F_q(z)$ (q arbitrário) em termos de diversas funções especiais: função gama incompleta, integral exponencial e função hipergeométrica confluyente. Entretanto, a expressão relevante para esta tese, válida para q semi-inteiro, como é o caso aqui considerado, foi obtida por Shkarofsky (1966) [100], relacionando $F_q(z)$ com $Z(z)$

$$\Gamma(q)F_q(z) = \sum_{j=0}^{q-3/2} (-z)^j \Gamma(q-1-j) + \pi^{1/2} (-z)^{q-3/2} [iz^{1/2} Z(iz^{1/2})]. \quad (B.8)$$

Utilizando esta relação, pode-se derivar a seguinte expansão em série de potências para $F_q(z)$

$$\Gamma(q)F_q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma(q-1-j)(-z)^j - i\pi(-z)^{q-1}e^z$$

e a expansão assintótica

$$\Gamma(q)F_q(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Gamma(q+j)(-z)^{-(j+1)} - i\pi\sigma(-z)^{q-1}e^z; \quad \sigma = \begin{cases} 0, & \text{Im}(iz^{1/2}) > 0 \\ 1, & \text{Im}(iz^{1/2}) = 0 \\ 2, & \text{Im}(iz^{1/2}) < 0. \end{cases}$$

Já a função de Shkarofsky $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$ é definida por

$$\mathcal{F}_{q,r}(z, a) = -i \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{izt}}{(1-it)^q} e^{-at^2/(1-it)}; \quad \text{Im}(z) > 0 \quad (B.9.a)$$

$$= -ie^{-a} \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{i(z-a)t}}{(1-it)^q} e^{a/(1-it)}. \quad (B.9.b)$$

Tanto a função de Dnestrovskiĭ (B.7) quanto a função (B.9) são reais se z e a forem reais e $z - a \geq 0$. Isto pode ser facilmente demonstrado, bastando definir a variável $y = -it$, de onde resulta de (B.9.b)

$$\mathcal{F}_{q,r}(z, a) = (-)^r e^{-a} \int_0^{-i\infty} dy \frac{y^r e^{-(z-a)y}}{(1+y)^q} e^{a/(1+y)} = (-)^r e^{-a} \int_0^{\infty} dy \frac{y^r e^{-(z-a)y}}{(1+y)^q} e^{a/(1+y)},$$

onde a última igualdade é obtida deformando-se o contorno de integração para o eixo real positivo. Conseqüentemente, as função $F_q(z)$ e $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$ serão complexas quando $z - a < 0$, mesmo se a e z forem ambos reais. A parte imaginária da função de Shkarofsky pode ser calculada explicitamente, para q semi-inteiro, resultando

$$\text{Im}[\mathcal{F}_q(z, a)] = \begin{cases} 0, & z - a \geq 0 \\ -\pi e^{z-2a} [(a-z)/a]^{(q-1)/2} I_{q-1}[2a^{1/2}(a-z)^{1/2}], & z - a < 0, \end{cases} \quad (B.10)$$

onde $\mathcal{F}_q(z, a) = \mathcal{F}_{q,0}(z, a)$. A função de Shkarofsky mais geral (B.9) pode ser obtida de $\mathcal{F}_q(z, a)$ através da relação

$$\mathcal{F}_{q,r}(z, a) = \sum_{j=0}^r (-)^j \binom{r}{j} \mathcal{F}_{q-j}(z, a). \quad (B.11)$$

Expandindo a segunda exponencial em (B.9.b), obtém-se outra relação entre as funções relativísticas, útil quando $|a| \ll 1$:

$$\mathcal{F}_q(z, a) = e^{-a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} F_{q+j}(z - a). \quad (\text{B.12})$$

Já para $|z - a| \gg 1$, existe a seguinte expansão assintótica

$$\mathcal{F}_q(z, a) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{q,j}}{(a - z)^{j+1}},$$

onde

$$C_{q,0} = 1$$

$$C_{q,j} = (j + q - 1)C_{q,j-1} + aC_{q+1,j-1} \quad (j \geq 1).$$

As derivadas da função de Shkarofsky são dadas por

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial a^k} \mathcal{F}_{q,r}(z, a) = \mathcal{F}_{q+k,r+j+2k}(z, a)$$

$$\mathcal{F}_{q,r}(z, a) = \frac{\partial^r}{\partial z^r} \mathcal{F}_q(z, a).$$

Para q semi-inteiro, relações extremamente úteis entre as funções de Shkarofsky e de Fried & Conte foram obtidas por *Krivenski & Orefice* (1983) [59]

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(z, a) = -iZ^+ / (z - a)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.13.a})$$

$$\mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(z, a) = -Z^- / a^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.13.b})$$

onde

$$Z^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ Z \left[a^{\frac{1}{2}} + i(z - a)^{\frac{1}{2}} \right] \pm Z \left[-a^{\frac{1}{2}} + i(z - a)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

As expressões (B.13.a,b), em conjunto com a relação de recorrência

$$a \mathcal{F}_{q+2}(z, a) = 1 - (z - a) \mathcal{F}_q(z, a) - q \mathcal{F}_{q+1}(z, a), \quad (\text{B.14})$$

são úteis para valores de $|z - a| \lesssim 1$ e $|a| \gtrsim 1$, e independem da raiz de $a^{\frac{1}{2}}$ a ser adotada. Porém, o sinal a ser adotado para $(z - a)^{\frac{1}{2}}$ é importante para $\mathcal{F}_q(z, a)$, assim como o sinal de $z^{\frac{1}{2}}$ é importante para $F_q(z)$ em (B.8). Isto mostra que tanto $\mathcal{F}_q(z, a)$ quanto $F_q(z)$ são funções que possuem mais de uma folha de Riemann, sendo as respectivas linhas de ramificação determinadas pelos pontos $|z - a| \rightarrow \infty$ e $z - a = 0$. Além disso, as relações (B.13.a) e (B.8) mostram que para $q < 1$ as funções $\mathcal{F}_q(z, a)$ e $F_q(z)$ são singulares para $z = a$ e $z = 0$, respectivamente. Foi com o intuito de evitar a ocorrência destas singularidades no cálculo de alguns componentes do tensor dielétrico, o que forçaria um controle mais cuidadoso na

computação da função $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, que se buscou uma expressão alternativa para esta última em termos de $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$, como é dado em (IV.37).

Quanto à continuação analítica das funções relativísticas, as relações (B.8, B.12, B.13 e B.14) mostram que esta propriedade é preenchida pela função de Fried & Conte, cuja continuação analítica é bem estabelecida e dada por (B.2 ou B.3).

Desta forma, todas as propriedades analíticas das funções de dispersão de plasma inhomogêneo relativística $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, dada por (IV.14), e não relativística $\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{\text{nr}}$, dada por (IV.17), ficam completamente determinadas em termos das propriedades das funções $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$ e $Z(z)$, respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AAMODT, R. E. Diffraction Effects for Focused Electromagnetic Waves in a Plasma. *Physics of Plasmas*, v. 1, n. 1, pp. 6–12, January 1994.
- [2] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications, Inc., 1970.
- [3] AIROLDI, A. C., OREFICE, A. Relativistic Dielectric Tensor of a Maxwellian Plasma for Electron Cyclotron Waves at Arbitrary Propagation Angles. *Journal of Plasma Physics*, v. 27, n. 3, pp. 515–524, June 1982.
- [4] ANTONSEN Jr., T. M., MANHEIMER, W. M. Electromagnetic Wave Propagation in Inhomogeneous Plasmas. *The Physics of Fluids*, v. 21, n. 12, pp. 2295–2305, December 1978.
- [5] BEKEFI, G. *Radiation Processes in Plasmas*. New York : John Wiley & Sons, 1966, 377 pp. (Wiley Series in Plasma Physics).
- [6] BERNSTEIN, I. B. Geometric Optics in Space- and Time-Varying Plasmas. *The Physics of Fluids*, v. 18, n. 3, pp. 320–324, March 1975.
- [7] BERNSTEIN, I. B., FRIEDLAND, L. Geometric Optics in Space and Time Varying Plasmas. In: *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth, M. N., Sagdeev, R. Z. (Eds.), volume 1: Basic Plasma Physics I, chapter 2.5, pp. 367–418. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1983.
- [8] BESKIN, V. S., GUREVICH, A. V., ISTOMIN, Ya. I. Permittivity of a Weakly Inhomogeneous Plasma. *Soviet Physics-JETP*, v. 65, n. 4, pp. 715–726, April 1987.
- [9] BLUMAN, G. W., COLE, J. D. *Similarity Methods for Differential Equations Volume 13*. New York : Springer-Verlag, 1974, 341 pp. (Applied Mathematical Sciences).

- [10] BORNATICI, M., CANO, R., de BARBIERI, O., ENGELMANN, F. Electron Cyclotron Emission and Absorption in Fusion Plasmas. *Nuclear Fusion*, v. 23, n. 9, pp. 1153-1257, September 1983.
- [11] BORNATICI, M., CHIOZZI, G., CHIARA, P. de. Weakly Relativistic Dielectric Tensor in the Presence of Temperature Anisotropy. *Journal of Plasma Physics*, v. 44, n. 2, pp. 319-335, October 1990.
- [12] BRAGINSKIĬ, S. I. Transport Processes in a Plasma. In: *Reviews of Plasma Physics*, Leontovich, M. A. (Ed.), volume 1, pp. 205-311. New York : Consultants Bureau, 1965.
- [13] BRAMBILLA, M. Integral Constitutive Relation for the Investigation of Ion Bernstein Waves in Non-Homogeneous Plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 33, n. 9, pp. 1029-1048, August 1991.
- [14] BRAMBILLA, M., KRÜCKEN, T. On the Local Power Dissipation of h.f. Waves in Hot Inhomogeneous Plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 30, n. 8, pp. 1083-1092, July 1988.
- [15] BRAVO-ORTEGA, A., GLASSER, A. H. Theory and Application of Complex Geometric Optics in Inhomogeneous Magnetized Plasmas. *Physics of Fluids B*, v. 3, n. 3, pp. 529-537, March 1991.
- [16] BRUNNER, S., VACLAVIK, J. Dielectric Tensor Operator of Hot Plasmas in Toroidal Axisymmetric Systems. *Physics of Fluids B*, v. 5, n. 6, pp. 1695-1705, June 1993.
- [17] CAIRNS, R. A., LASHMORE-DAVIES, C. N., DENDY, R. O., HARVEY, B. M., HASTIE, R. J., HOLT, H. Wave propagation near a cyclotron resonance in a nonuniform equilibrium magnetic field. *Physics of Fluids B*, v. 3, n. 11, pp. 2953-2959, November 1991.
- [18] CALDELA F^o, R. A. *Efeitos de Inomogeneidades no Estudo da Propagação de ondas Eletromagnéticas em Plasmas Magnetizados*. Tese de Doutorado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre, dezembro 1990. 116 pp.
- [19] CALDELA F^o, R. A., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. The Dispersion Relation and the Dielectric Tensor of Inhomogeneous Magnetized Plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 42, n. 1, pp. 165-175, August 1989.

- [20] CALDELA F^o, R. A., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Inhomogeneity Effects on the Absorption of Electromagnetic High-Frequency Waves by Magnetized Maxwellian Plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 43, n. 3, pp. 335–356, June 1990.
- [21] CAVALCANTI, C. J. de H. Estudo da Absorção de Ondas Eletromagnéticas de Alta Freqüência em Plasmas Inomogêneos com Presença de Corrente. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre, dezembro 1993. 128 pp.
- [22] CAVALCANTI, C. J. de H., SCHNEIDER, R., ZIEBELL, L. F. Emission and Propagation of Auroral Kilometric Radiation in Auroral Cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. , 1995. Submitted for publication.
- [23] CAVALCANTI, C. J. de H., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Electron-Cyclotron Absorption by Inhomogeneous Current-Carrying Plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 52, n. 2, pp. 195–214, October 1994.
- [24] CHEN, L., TSAI, S. T. Linear Oscillations in General Magnetically Confined Plasmas. *Plasma Physics*, v. 25, n. 4, pp. 349–359, April 1983.
- [25] DAVIDSON, R. C. Kinetic Waves and Instabilities in a Uniform Plasma. In: *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth, M. N., Sagdeev, R. Z. (Eds.), volume 1: Basic Plasma Physics I, chapter 3.3, pp. 519–585. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1983.
- [26] DORY, R. A., GUEST, G. E., HARRIS, E. G. Unstable Electrostatic Plasma Waves Propagating Perpendicular to a Magnetic Field. *Physical Review Letters*, v. 14, n. 5, pp. 131–133, February 1965.
- [27] DUFTY, J. M., RUBÍ, J. M. Generalized Onsager Symmetry. *Physical Review A*, v. 36, n. 1, pp. 222–225, July 1987.
- [28] ESTERKIN, A. R., PILIYA, A. D. Analytical Approach to Lower Hybrid Ray Tracing. *Nuclear Fusion*, v. 32, n. 6, pp. 927–932, June 1992.
- [29] FIDONE, I., GIRUZZI, G., KRIVENSKI, V., ZIEBELL, L. F., MAZZUCATO, E. Electron-Cyclotron Heating of a Tokamak Reactor With the Extraordinary Mode. *The Physics of Fluids*, v. 29, n. 3, pp. 803–809, March 1986.
- [30] FIDONE, I., GRANATA, G., MEYER, R. L., JORNADA, E. H., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Electron Cyclotron Emission from Tokamak Plasmas With Mildly Superthermal Electrons. *The Physics of Fluids*, v. 23, n. 7, pp. 1336–1347, July 1980.

- [31] FIDONE, I., GRANATA, G., RAMPONI, G., MEYER, R. L. Wave Absorption Near the Electron Cyclotron Frequency. *The Physics of Fluids*, v. 21, n. 4, pp. 645–652, April 1978.
- [32] FREIDBERG, J. P. *Ideal Magnetohydrodynamics*. New York : Plenum Press, 1987, 489 pp. (Modern Perspectives in Energy).
- [33] FRIEDLAND, L., BERNSTEIN, I. B. Geometric Optics in Plasma Characterized by Non-Hermitian Dielectric Tensors. *Physical Review A*, v. 22, n. 4, pp. 1680–1685, October 1980.
- [34] GAELZER, R. O Maser de Elétron-Cíclotron como Mecanismo Gerador da Radiação Quilométrica das Auroras. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre, abril 1991. 215 pp.
- [35] GAELZER, R., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Magnetic Field Inhomogeneity Effects in Weakly Relativistic Plasmas. In: *2º Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas*, pp. 226–229, Serra Negra - Brasil, October 1993. Sociedade Brasileira de Física.
- [36] GAELZER, R., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. A Time-Reversal Invariant Formulation of Wave Absorption in Weakly Inhomogeneous Magnetoplasmas. In: *1994 International Conference on Plasma Physics*, Sakanaka, P. H., del Bosco, E., Alves, M. V. (Eds.), volume 2, pp. 33–36, Foz do Iguaçu - Brasil, November 1994.
- [37] GAELZER, R., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Dispersion Functions for Weakly Relativistic Magnetized Plasmas in Inhomogeneous Magnetic Field. *Journal of Plasma Physics*, v. , 1995. Submitted for publication.
- [38] GAELZER, R., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. The Dispersion Relation and the Dielectric Tensor for Magnetized Plasmas with Inhomogeneous Magnetic Field. *Physical Review E*, v. 51, n. 3, pp. 2407–2424, March 1995.
- [39] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Two-Dimensional Ray-Tracing Studies in the Source of Auroral Kilometric Radiation. In: *1º Congresso Brasileiro de Física dos Plasmas*, pp. 81–85, Santos - Brasil, December 1991. Sociedade Brasileira de Física.

- [40] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Propagation and Amplification of Auroral Kilometric Radiation in Finite Width Auroral Cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 97, n. A12, pp. 19299–19310, December 1992.
- [41] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Ray Tracing Studies on Wave Propagation in the Auroral Cavities. In: *2º Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas*, pp. 317–321, Serra Negra - Brasil, October 1993. Sociedade Brasileira de Física.
- [42] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Ray Tracing Studies on Auroral Kilometric Radiation in Finite-Width Auroral Cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 99, n. A5, pp. 8905–8916, May 1994.
- [43] GALVÃO, R. M. O., GNAVI, G., GOMBEROFF, L., GRATTON, F. T. Decay of the Ion-Cyclotron Instability in Magnetized Plasmas With Thermally Anisotropic Minority Ions. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 36, n. 10, pp. 1679–1689, October 1994.
- [44] GLASSER, A. H., BRAVO-ORTEGA, A. Focusing Effects on Waves Propagating in a Nonuniform Plasma. *The Physics of Fluids*, v. 30, n. 3, pp. 797–803, March 1987.
- [45] GRADSHTEĪN, I. S., RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series and Products*. London : Academic Press, 1965, 1131 pp., fourth edition.
- [46] GROOT, S. R. de, MAZUR, P. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. New York : Dover Publications, 1984, 520 pp.
- [47] HORNE, R. B. Path-Integrated Growth of Electrostatic Waves: The Generation of Terrestrial Myriametric Radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 94, n. A7, pp. 8895–8909, July 1989.
- [48] HU, Y. D., FRASER, B. J. Electromagnetic Ion Cyclotron Wave Amplification and Source Regions in the Magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, v. 99, n. A1, pp. 263–272, January 1994.
- [49] IRZAK, M. A., PAVLOV, I. P., SHCHERBININ, O. N. Propagation and Absorption of Electromagnetic Waves in a Plasma Near the Ion Cyclotron Frequencies. *Technical Physics*, v. 39, n. 2, pp. 151–156, February 1994.
- [50] ISTOMIN, Ya. N. Nonlinear Interactions of Waves in an Inhomogeneous Plasma. *Soviet Physics-JETP*, v. 68, n. 1, pp. 1380–1385, July 1988.

- [51] ISTOMIN, Ya. N. Influence of Inhomogeneity on the Resonance Interaction. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 36, n. 5, pp. 1081–1089, May 1994.
- [52] ITOH, S. I., FUKUYAMA, A., ITOH, K., NISHIKAWA, K. Differential Form of Wave Propagation Equation in Inhomogeneous Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 54, n. 5, pp. 1808–1812, May 1985.
- [53] ITOH, S. I., FUKUYAMA, A., ITOH, K., NISHIKAWA, K. Radio Frequency Conductivity of Plasma in Inhomogeneous Magnetic Field. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 54, n. 5, pp. 1800–1807, May 1985.
- [54] JAEGER, E. F., BATCHELOR, D. B., WEITZNER, H. Exact and Approximate Solutions to the Finite Temperature Wave Equation in a One-Dimensional Perpendicularly Stratified Plasma. *Nuclear Fusion*, v. 28, n. 1, pp. 53–72, January 1988.
- [55] KIRKWOOD, R. K. Geometric Optics in a Tenuous Energetic Plasma. *Physics of Fluids B*, v. 3, n. 10, pp. 2741–2746, October 1991.
- [56] KLIMONTOVICH, YU. L. Relativistic Transport Equations for a Plasma. I. *Soviet Physics-JETP*, v. 10, n. 3, pp. 524–530, March 1960.
- [57] KLIMONTOVICH, YU. L. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. Oxford : Pergamon Press, 1967, 284 pp. (International Series of Monographs in Natural Philosophy, 9).
- [58] KRALL, N. A., TRIVELPIECE, A. W. *Principles of Plasma Physics*. Tokyo : McGraw-Hill, 1973, 674 pp. (International Series in Pure and Applied Physics).
- [59] KRIVENSKI, V., OREFICE, A. Weakly Relativistic Dielectric Tensor and Dispersion Functions of a Maxwellian Plasma. *Journal of Plasma Physics*, v. 30, n. 1, pp. 125–131, August 1983.
- [60] KROMMES, J. A., HU, G. General Theory of Onsager Symmetries for Perturbations of Equilibrium and Nonequilibrium Steady States. *Physics of Fluids B*, v. 5, n. 11, pp. 3908–3941, November 1993.
- [61] KULL, H. J., BERK, H. L., MORRISON, P. J. Wave Energy Flow Conservation for Propagation in Inhomogeneous Vlasov-Maxwell Equilibria. *Physics of Fluids B*, v. 1, n. 1, pp. 55–61, January 1989.

- [62] LAKHINA, G. S. Linear Macroscopic Instabilities in Space Plasmas. *Physica Scripta*, v. T50, pp. 114–126, 1994.
- [63] LASHMORE-DAVIES, C. N., DENDY, R. O. Gyrokinetic Theory of Perpendicular Cyclotron Resonance in a Nonuniformly Magnetized Plasma. *Physics of Fluids B*, v. 1, n. 8, pp. 1565–1577, August 1989.
- [64] LASHMORE-DAVIES, C. N., DENDY, R. O. Gyrokinetic Theory of Perpendicular Ion Cyclotron Resonance. *Physical Review Letters*, v. 62, n. 17, pp. 1982–1985, April 1989.
- [65] LASHMORE-DAVIES, C. N., DENDY, R. O. Gyrokinetic Theory of Fast Wave Transmission with Arbitrary Parallel Wave Number in a Nonuniformly Magnetized Plasma. *Physics of Fluids B*, v. 4, n. 3, pp. 493–503, March 1992.
- [66] LASHMORE-DAVIES, C. N., DENDY, R. O., KAM, K. F. Electromagnetic Ion-Cyclotron Instability Driven by a Hot Minority Ions-Species With Temperature Anisotropy. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 35, n. 11, pp. 1529–1540, November 1993.
- [67] LASHMORE-DAVIES, C. N., FUCHS, V., FRANCIS, G., RAM, A. K., BERS, A., GAUTHIER, L. A Theory of Fast-Wave Absorption, Transmission, and Reflection in the Ion Cyclotron Range of Frequencies. *The Physics of Fluids*, v. 31, n. 6, pp. 1614–1622, June 1988.
- [68] LIFSHITZ, E. M., PITAEVSKII, L. P. *Physical Kinetics Volume 10*. Oxford : Pergamon Press, 1981. (Course of Theoretical Physics).
- [69] LIKIN, K. M., OCHIROV, B. D. Ray Tracing and Absorption of Microwaves in Connection With Electron-Cyclotron Resonance Heating of the Plasma in the L-2 Stellarator. *Soviet Journal of Plasma Physics*, v. 18, n. 1, pp. 42–46, January 1992.
- [70] LITTLEJOHN, R. G., FLYNN, W. G. General Linear Mode Conversion Coefficient in One Dimension. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 12, pp. 1799–1802, March 1993.
- [71] MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. New York : Academic Press, 1970, 573 pp., second edition.
- [72] MAROLI, C., PETRILLO, V. Numerical Calculation of the Weakly Relativistic Dielectric Dyadic for a Vlasov Plasma. *Physica Scripta*, v. 24, n. 6, pp. 955–958, December 1981.

- [73] MAROLI, C., PETRILLO, V., LAMPIS, G. Propagation of Electron Cyclotron Waves in a Weakly Relativistic Plasma With Steep Density and Temperatures Profiles. *Il Nuovo Cimento*, v. 12D, n. 7, pp. 1005–1014, July 1990.
- [74] MAROLI, C., PETRILLO, V., LAMPIS, G., ENGELMANN, F. Wave-Dynamical treatment of the Ordinary Electron Cyclotron Mode Propagating Perpendicularly to the Magnetic Field Across the Resonance Region. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 28, n. 4, pp. 615–627, April 1986.
- [75] MARTIN, T., VACLAVIK, J. Dielectric Tensor Operator of a Nonuniformly Magnetized Inhomogeneous Plasma. *Helvetica Physica Acta*, v. 60, n. 3, pp. 471–479, April 1987.
- [76] MCDONALD, D. C., CAIRNS, R. A., LASHMORE-DAVIES, C. N. Electron Cyclotron Resonant Heating: a Simpler Method for Deriving the Linear Wave Equations in a Nonuniform Magnetic Field. *Physics of Plasmas*, v. 1, n. 4, pp. 842–849, April 1994.
- [77] MCVEY, B. D., SUND, R. S., SCHARER, J. E. Local Power Conservation for Linear Wave Propagation in an Inhomogeneous Plasma. *Physical Review Letters*, v. 55, n. 5, pp. 507–510, July 1985.
- [78] MELROSE, D. B. A Covariant Formulation of Wave Dispersion. *Plasma Physics*, v. 15, n. 2, pp. 99–106, February 1973.
- [79] MIKHAĬLOVSKIĬ, A. B. Oscillations of an Inhomogeneous Plasma. In: *Reviews of Plasma Physics*, Leontovich, M. A. (Ed.), volume 3, pp. 159–227. New York : Consultants Bureau, 1967.
- [80] MIKHAĬLOVSKIĬ, A. B. *Theory of Plasma Instabilities Volume 2: Instabilities of an Inhomogeneous Plasma*. New York : Consultants Bureau, 1974, 314 pp. (Studies in Soviet Science).
- [81] MIKHAĬLOVSKIĬ, A. B. Instabilities in Inhomogeneous Plasmas. In: *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth, M. N., Sagdeev, R. Z. (Eds.), volume 1: Basic Plasma Physics I, chapter 3.4, pp. 587–610. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1983.
- [82] MIKHAĬLOVSKIĬ, A. B., ONISHCHENKO, O. G. Drift Instabilities of a Relativistic Plasma. Part 1. Kinetic Description of Drift Effects in a Relativistic Plasma. *Journal of Plasma Physics*, v. 37, n. 1, pp. 15–28, February 1987.

- [83] MIKHAĬLOVSKIĬ, A. B., ONISHCHENKO, O. G. Drift Instabilities of a Relativistic Plasma. Part 2. Kinetic Theory of Low-Frequency Drift Instabilities of a Relativistic Finite-Pressure Plasma. *Journal of Plasma Physics*, v. 37, n. 1, pp. 29–43, February 1987.
- [84] MORSE, P. M., FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics Volume 1*. New York : McGraw-Hill, 1953, 1037 pp. (International Series in Pure and Applied Physics).
- [85] MYER, R. C., FRIED, B. D. A k -Space Integral Equation for Describing Propagation Through a Strongly Inhomogeneous Plasma Density Profile. *Physics of Fluids B*, v. 3, n. 10, pp. 2727–2740, October 1991.
- [86] NG, C. S., SWANSON, D. G. Analytic Calculation of the Nonzero Fast Wave Reflection Coefficient from the Tunneling Equation With Absorption. *Physics of Plasmas*, v. 1, n. 4, pp. 815–821, April 1994.
- [87] ONSAGER, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *The Physical Review*, v. 37, n. 4, pp. 405–426, February 1931.
- [88] ONSAGER, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II. *The Physical Review*, v. 38, n. 12, pp. 2265–2279, December 1931.
- [89] PEŠIĆ, S., STOJIĆ, A. Ray Paths Near the Electron Cyclotron Resonance in Cold and Thermal Plasmas. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 62, n. 7, pp. 2359–2367, July 1993.
- [90] PETRILLO, V., LAMPIS, G., MAROLI, C. Global Wave Treatment of Mode Conversion and Wave Damping for Perpendicular Propagation Across the Electron Cyclotron and Upper-Hybrid Resonances. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 29, n. 7, pp. 877–890, July 1987.
- [91] PILIYA, A. D., SAVELIEV, A. N. High-Order Ion Bernstein Waves in a Non-Uniform Magnetic Field. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 36, n. 12, pp. 2059–2071, December 1994.
- [92] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. New York : Cambridge University Press, 1992, 989 pp., second edition.
- [93] REICHL, L. E. *A Modern Course in Statistical Physics*. Austin : Edward Arnold, 1980, 722 pp.

- [94] ROBINSON, P. A. Dielectric Tensor of Weakly Relativistic Electron Distributions Separable in Momentum and Pitch Angle. *Australian Journal of Physics*, v. 39, n. 1, pp. 57–70, February 1986.
- [95] ROBINSON, P. A. Relativistic Plasma Dispersion Functions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 27, n. 5, pp. 1206–1214, May 1986.
- [96] ROBINSON, P. A. Relativistic Plasma Dispersion Functions: Series, Integrals, and Approximations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 28, n. 5, pp. 1203–1205, May 1987.
- [97] ROBINSON, P. A. Relativistic and Nonrelativistic Plasma Dispersion Functions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 30, n. 11, pp. 2484–2487, November 1989.
- [98] SAUTER, O., VACLAVIK, J. Non-Local Effects of Alpha Particles on ICRF Heating. *Nuclear Fusion*, v. 32, n. 8, pp. 1455–1464, August 1992.
- [99] SHAFRANOV, V. D. Electromagnetic Waves in a Plasma. In: *Reviews of Plasma Physics*, Leontovich, M. A. (Ed.), volume 3, pp. 1–157. New York : Consultants Bureau, 1967.
- [100] SHKAROFSKY, I. P. Dielectric Tensor in Vlasov Plasmas Near Cyclotron Harmonics. *The Physics of Fluids*, v. 9, n. 3, pp. 561–570, March 1966.
- [101] SITENKO, A. G. *Fluctuations & Non-Linear Wave Interactions in Plasmas*. Oxford : Pergamon Press, 1982, 278 pp. (International Series in Natural Philosophy, 107).
- [102] STIX, T. H., SWANSON, D. G. Propagation and Mode-Conversion for Waves in Nonuniform Plasmas. In: *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth, M. N., Sagdeev, R. Z. (Eds.), volume 1: Basic Plasma Physics I, chapter 2.4, pp. 335–366. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1983.
- [103] SWANSON, D. G. *Plasma Waves*. London : Academic Press, 1989, 454 pp.
- [104] SWANSON, D. G., NG, C. S. Modification of Emission from the X-Mode at the Third Electron Cyclotron Harmonic from Mode Conversion and Reflection. *Physics of Plasmas*, v. 2, n. 3, pp. 595–609, March 1995.
- [105] SWANSON, D. G., SHVETS, V. F. Cyclotron Emission From Nonuniformly Magnetized Plasmas. *Physical Review Letters*, v. 68, n. 20, pp. 3036–3039, May 1992.

- [106] TSAI, S. T., VAN DAM, J. W., CHEN, L. Linear Relativistic Gyrokinetic Equation in General Magnetically Confined Plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 26, n. 7, pp. 907-914, July 1984.
- [107] VÉZARD, D., LAURENT, L., SÉGUI, J. L., GIRUZZI, G. Wave Focusing near the Electron Cyclotron Frequency in Hot Plasmas. *Physics of Plasmas*, v. 2, n. 3, pp. 876-882, March 1995.
- [108] VLASOV, V. G. A Simple Method for Solving Problems of Linear Wave Conversion in Nonuniform Plasmas. *Plasma Physics Reports*, v. 19, n. 6, pp. 391-396, June 1993.
- [109] WONG, H. K., WU, C. S., KE, F. J., SCHNEIDER, R. S., ZIEBELL, L. F. Electromagnetic Cyclotron-Loss-Cone Instability Associated With Weakly Relativistic Electrons. *Journal of Plasma Physics*, v. 28, n. 3, pp. 503-525, December 1982.
- [110] WU, C. S. Kinetic Cyclotron and Synchrotron Maser Instabilities: Radio Emission Processes by Direct Amplification of Radiation. *Space Science Reviews*, v. 41, n. 3-4, pp. 215-298, August 1985.
- [111] WU, C. S., YOON, P. H., ZIEBELL, L. F., CHANG, C. L., WONG, H. K. A Purely Growing Electromagnetic Mode Operative in the Geomagnetic Tail. *Journal of Geophysical Research*, v. 97, n. A1, pp. 141-151, January 1992.
- [112] YOON, P. H., LUI, A. T. Y. Nonlinear Analysis of Generalized Cross-Field Current Instability. *Physics of Fluids B*, v. 5, n. 3, pp. 836-853, March 1993.
- [113] YOON, P. H., LUI, A. T. Y., CHANG, C. L. Lower-Hybrid-Drift Instability Operative in the Geomagnetic Tail. *Physics of Plasmas*, v. 1, n. 9, pp. 3033-3043, September 1994.
- [114] ZVONKOV, A. V., TIMOFEEV, A. V. Electron Cyclotron Resonance of Electromagnetic Waves Propagating across a Nonuniform Magnetic Field. *Soviet Journal of Plasma Physics*, v. 6, n. 6, pp. 668-672, nov.-dec. 1980.