

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Desenvolvimento de um modelo para
análise do campo acústico gerado por
chamas difusivas**

por

Charles Quevedo Carpes

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador

Porto Alegre, Novembro de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Carpes, Charles Quevedo

Desenvolvimento de um modelo para análise do campo acústico gerado por chamas difusivas / Charles Quevedo Carpes.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2015.

111 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: De Bortoli, Álvaro Luiz

Tese: Matemática Aplicada
acústica, combustão, simulação numérica.

Desenvolvimento de um modelo para análise do campo acústico gerado por chamas difusivas

por

Charles Quevedo Carpes

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Dinâmica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli

Banca examinadora:

Professor Dr. Andrei Bourchtein
UFPEL

Professor Dr. Jorge Hugo Silvestrini
PUCRS

Professor Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen
PPGMAp/UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
27/11/2015.

Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação	1
1.2 Histórico do Desenvolvimento	3
1.3 Objetivos	8
2 EQUAÇÕES BÁSICAS PARA ANÁLISE ACÚSTICA DE ES- COAMENTOS	10
2.1 Conceitos de Acústica	10
2.1.1 Equação da onda	10
2.1.2 Princípio da superposição	12
2.1.3 Ondas harmônicas	14
2.1.4 Ondas planas	16
2.1.5 Modos acústicos	17
2.2 Equações Básicas do Escoamento	19
2.3 Relações Constitutivas	22
2.4 Equação da Onda Linearizada	25
2.5 Acústica dos Escoamentos Reativos	27
2.6 Uma Equação da Onda para Baixo Número de Mach e Fluxo Reativo	29
2.7 Velocidade Acústica e Pressão em Fluxos Reativos de Baixa Velocidade	31

2.8	Densidade de Energia Acústica para Fluxos Reativos	32
3	MÉTODOS PARA ANÁLISE ACÚSTICA DE CHAMAS	35
3.1	Função de Green	35
3.2	Método da Matriz de Transferência	38
3.2.1	Matriz de Descrição do Sistema	47
3.2.2	Solução da equação matricial	48
4	DEFINIÇÃO DO MODELO	51
4.1	Definições iniciais	51
4.2	Modelo químico	53
4.3	Modelo LES para o escoamento	59
4.4	Procedimento de Discretização	64
4.5	Método de Runge-Kutta Simplificado	66
4.6	Condições de Contorno	69
4.7	Estimativas de Erro	71
4.8	Critério Q	73
5	RESULTADOS	76
5.1	Problema 1	76
5.2	Problema 2	84
5.3	Problema 3	94
6	CONCLUSÕES	100
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

Lista de Figuras

Figura 2.1	Ondas harmônicas	14
Figura 2.2	Representação dos raios acústicos para os modos de ressonância de uma região retangular.	18
Figura 2.3	Dimensões de uma região retangular.	19
Figura 2.4	Modo acústico $(1, 0, 0)$, com pressão máxima no contorno e mínima no centro da região.	20
Figura 2.5	Modo acústico $(3, 0, 0)$, com pressão máxima no contorno e em dois pontos do domínio e com pressão mínima no centro da região e em dois pontos do domínio.	20
Figura 3.1	Definição das junções 1 e 2 do duto. Nestas junções o duto é acoplado a outros elementos acústicos.	39
Figura 3.2	Desenho esquemático de um elemento acústico de junção.	40
Figura 3.3	Figura esquemática de um elemento de um queimador.	43
Figura 3.4	Figura esquemática de um elemento acústico de chama.	44
Figura 3.5	Figura esquemática de um sistema acústico de um equipamento de combustão.	47
Figura 4.1	Representação esquemática da câmara de combustão.	54
Figura 4.2	Aplicação do Critério Q para visualização das estruturas rotacionais turbulentas em torno de um jato.	75
Figura 5.1	Isosuperfície de velocidade ($ \vec{u} = 12m/s$) da simulação de uma <i>swirl flame</i> para o instante $t = 0, 6s$	77
Figura 5.2	Isosuperfície de pressão próximo à injeção de combustível e flutuações de pressão em torno do injetor de combustível em $t = 0, 1s$	78
Figura 5.3	Destaque das flutuações de pressão próximo à injeção de combustível em $t = 0, 2s$	78
Figura 5.4	Flutuações da pressão ao longo da linha central da câmara de combustão para o caso não reativo.	80
Figura 5.5	Flutuações da pressão ao longo da linha central da câmara de combustão para o caso reativo.	81

Figura 5.6	Erro relativo das flutuações da pressão.	82
Figura 5.7	Distribuição de frequências para o caso reativo.	82
Figura 5.8	Isosuperfície do Critério Q para $Q = 2,97 \cdot 10^5$	83
Figura 5.9	Distribuição radial da velocidade média do escoamento em $x/D = 5$	85
Figura 5.10	Distribuição radial da velocidade média do escoamento em $x/D = 20$	86
Figura 5.11	Distribuição axial da velocidade média do escoamento.	87
Figura 5.12	Erro relativo para a velocidade média em $x/D = 5$ e em $x/D = 20$	88
Figura 5.13	Distribuição radial da temperatura em $x/D = 5$	89
Figura 5.14	Distribuição radial da temperatura em $x/D = 20$	89
Figura 5.15	Distribuição axial da temperatura ao longo da linha central da câmara de combustão.	90
Figura 5.16	Erro relativo para a temperatura em $x/D = 5$ e em $x/D = 20$	91
Figura 5.17	Relação da Intensidade Acústica com o Número de Strouhal.	92
Figura 5.18	Isolinhas para o erro de discretização calculados pelo método de Richardson.	93
Figura 5.19	Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,1}$	96
Figura 5.20	Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,2}$	97
Figura 5.21	Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,3}$	98
Figura 5.22	Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,4}$	98

Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Índice de Convergência da Malha (GCI) para a velocidade, onde $r_{21} = 1.4174$, $r_{32} = 1.4000$, a distância 0,6 da linha central do jato.	93
Tabela 5.2	Convergência temporal para a velocidade em $x/D = 5$ e $r/D = 0,6$.	94

RESUMO

A combustão possui inúmeras aplicações comerciais e industriais. Consequentemente, o entendimento dos processos de combustão possui elevado valor comercial em diferentes setores como aviação, transportes, produção de energia, entre outros. Diversos equipamentos utilizam uma chama para realizar a conversão de energia através da queima. Exemplos desses dispositivos são os fornos industriais e as turbinas a gás. Garantir que a chama permaneça acesa por tempo indeterminado é um problema comum na etapa de desenvolvimento desses queimadores. Por este motivo, muitas pesquisas são realizadas para entender os mecanismos envolvidos na estabilização de uma chama. Em particular, o estudo dos fenômenos termoacústicos tem ganhado destaque nos últimos anos, pois verificou-se que mesmo pequenas oscilações acústicas, isto é oscilações de pressão, podem interferir na estabilidade de uma chama e reduzir a eficiência do queimador. Alguns efeitos da interação da chama com o campo acústico ainda não estão totalmente compreendidos e os modelos utilizados para descrever esses sistemas são ainda raros ou restritos. Considerando essa situação, o presente trabalho busca combinar os modelos existentes e propor um equacionamento que possibilite analisar a acústica de chamas de maneira rápida e suficientemente precisa. O número de equações resolvidas numericamente é reduzido através do desacoplamento da parte química do problema e sua solução é feita previamente de forma analítica. O conjunto de equações obtido nesse processo é implementado em uma linguagem de programação e são realizados 3 testes para comparar a precisão dos dados obtidos com os dados presentes na literatura. Verifica-se que é possível obter boa concordância com os dados experimentais mesmo após algumas simplificações e o desacoplamento das equações químicas. Como o número de equações resolvidas numericamente é menor, o custo computacional do problema também é reduzido. Acredita-se que o conjunto de equações apresentado possa ser melhorado continuamente e que possa ser aplicado para finalidades comerciais, de pesquisa e de desenvolvimento na área de queimadores de alto desempenho.

ABSTRACT

The combustion has numerous commercial and industrial applications. Consequently, the understanding of the process of combustion has high commercial value in different sectors such as aviation, transport, energy production, among others. Several devices use a flame to perform the conversion of energy by burning. Examples of these devices are industrial burners and gas turbines. A common problem in the design of these burners is ensure that the flame stays on indefinitely. For this reason, research is being carried out to understand the mechanisms involved in stabilizing a flame. In particular, the study of thermoacoustic phenomena has gained prominence in recent years because it was observed that even small acoustic oscillations, i.e., pressure oscillations may interfere the stability of the flame and reduce the flare efficiency. Some effects of the interaction of the flame with the acoustic field are not yet fully understood and the models used to describe these systems are still rare or restricted. Given this situation, this work seeks to combine existing models and propose a set of equations that allows analysing the acoustics of flames in quickly and sufficiently precise manner. The number of equations numerically solved is reduced by decoupling the chemical part of the problem, whose solution is previously obtained analytically. The set of equations obtained in this process is implemented in a programming language and are performed three tests to compare the accuracy of the data with the data in the literature. Good agreement with the experimental data is obtained even after some simplifications and the decoupling of chemical equations. Because the number of equations solved numerically is smaller, the computational cost of the problem is also reduced. It is believed that the presented set of equations can be continually improved and can be applied for commercial applications, research and development of high-performance burners.

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são descritos, de forma resumida, os desenvolvimentos iniciais na área até os estudos recentes sobre acústica de escoamentos reativos. Além disso, os aspectos da teoria que ainda precisam ser melhor entendidos são comentados para fundamentar os objetivos desse trabalho.

1.1 Motivação

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*CFD* na sigla em inglês) tem ganhado destaque nas últimas décadas tanto para finalidades de pesquisa, quanto para desenvolvimentos e aplicações diretas de engenharia nas mais diversas áreas. Devido aos rápidos avanços que tem ocorrido na área computacional e no desenvolvimento de algoritmos, o tamanho e a complexidade dos problemas que podem ser abordados computacionalmente tem crescido muito rapidamente. Apesar destes desenvolvimentos, os modelos computacionais ainda não são capazes de dispensar a realização de ensaios experimentais. Entretanto, o uso de soluções numéricas tem sido cada vez mais aceito para o desenvolvimento e análise de sistemas complexos, de modo que os dados experimentais são usados para verificar a qualidade das aproximações numéricas.

Dentre os diversos problemas que podem ser abordados numericamente, a acústica de escoamentos é um problema particularmente desafiante pois envolve a análise de variáveis com ordens de grandeza muito distintas. Essa característica, em geral, torna a obtenção de soluções numéricas precisas muito complicada pois exige a utilização de métodos suficientemente estáveis e malhas computacionais bastante refinadas. O refinamento das malhas computacionais faz com que o custo computacional torne-se elevado ao ponto de não ser possível obter soluções para problemas

realísticos. O equilíbrio entre custo computacional, refinamento da malha e eficiência dos algoritmos, tem sido o foco de pesquisas nos últimos anos.

Oscilações acústicas são, basicamente, variações de pressão causadas pelo escoamento ou geradas de forma artificial/sintética (como por alto-falantes). Uma vez que uma oscilação acústica ocorre, em uma câmara de combustão, ela se mantém devido ao retorno (*feedback*) provocado pela liberação de calor durante o processo de combustão. O retorno é um processo em que uma parte da energia acústica produzida retorna à fonte. Um exemplo comum de retorno é o som estridente que ocorre quando se coloca um microfone em frente a um alto-falante.

Para a maioria das aplicações aeroespaciais, a combustão ocorre em uma região da câmara de combustão especialmente projetada para esta finalidade, chamada de zona de combustão. No caso de turbinas à gás, ou foguetes à propelentes líquidos, esta região é próxima à injeção de combustível e é importante que a chama permaneça estável naquela posição mesmo na presença de vórtices. Qualquer instabilidade na estrutura da chama pode fazer com que ela se apague, que cause danos no equipamento ou, em alguns casos, que aumente muito a emissão de poluentes como os Óxidos Nitrosos (NO_x). Isto evidencia a importância do estudo dos efeitos das instabilidades sobre os processos de combustão. Dentre outras possíveis fontes, instabilidades na combustão podem ocorrer quando oscilações acústicas crescem com o tempo.

Sabe-se que, quando o escoamento é confinado, a energia acústica pode se acumular em modos de ressonância. Magri [1] afirma que perturbações podem crescer durante um período transitório mesmo em sistemas linearmente estáveis. Se este crescimento transiente for suficientemente grande ele pode gerar oscilações auto-sustentadas a partir de pequenos distúrbios. Devido à ressonância, a velocidade de deslocamento das partículas devido à acústica pode atingir a mesma ordem de grandeza que a velocidade da corrente principal, fazendo com que o retorno do

campo acústico para as fontes seja muito significativo. Isto leva a oscilações auto-sustentadas, chamadas em inglês de assobios (*whistling*).

Na seção seguinte apresenta-se um breve histórico das pesquisas sobre a acústica de escoamentos reativos. São destacados os principais avanços nas áreas experimental, analítica e numérica desde os primeiros estudos, na década de 1950, até os trabalhos mais recentes.

1.2 Histórico do Desenvolvimento

Inicialmente os estudos em acústica eram restritos às ondas de pressão que fossem detectáveis pelo ouvido humano, ou seja, os sons. Atualmente, ondas de baixa e alta frequências (infrassom e ultrassom) e até mesmo vibrações em estruturas são considerados campos de estudo da acústica. Neste trabalho, considera-se a acústica como o estudo de fenômenos ondulatórios ocorrendo em fluidos, isto é, como sendo parte da mecânica dos fluidos.

Os estudos modernos em acústica iniciaram quando Rayleigh [2] propôs o uso de termos fonte para descrever o comportamento acústico de um escoamento não uniforme no espaço livre. Esta mesma ideia foi adotada por Lighthill [3],[4] ao longo do desenvolvimento de seu modelo acústico que, hoje em dia, é chamado de **Analogia** de Lighthill. Na Analogia, as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento são combinadas para obter uma equação da onda com termos fonte não lineares. Desta forma, o conjunto de equações de Lighthill é capaz de descrever o comportamento não linear de produção sonora de um escoamento instável.

Porém, devido à não linearidade das equações governantes, é difícil prever a produção acústica de um escoamento, seja ele não reativo ou reativo como na combustão. Esta produção de som tipicamente ocorre em escoamentos com veloci-

dade relativamente elevada, para as quais os termos inerciais não lineares da equação de movimento são muito maiores do que os termos viscosos (elevado número de Reynolds). Entretanto, como a produção de som representa apenas uma fração da energia do escoamento, a previsão direta da geração de som torna-se ainda mais difícil. Isto é particularmente dramático no espaço aberto e em velocidades subsônicas. Por outro lado, o fato de o campo sonoro ser uma pequena perturbação do escoamento, pode ser utilizado para obter soluções aproximadas.

Tais aproximações podem ser obtidas supondo-se que o campo acústico é uma extrapolação de um escoamento ideal de referência. A diferença entre o escoamento real e o escoamento de referência é identificada como uma fonte de som. Esta ideia foi introduzida por Lighthill [3] [4], que chamou isto de **Analogia**. Outra ideia-chave de Lighthill [4] é a utilização de equações integrais como uma solução formal. O campo sonoro é obtido na forma de uma convolução de uma função de Green com a função que descreve a fonte sonora.

A Analogia de Lighthill é geral e útil para estimativas de ordem de grandeza, porém, ela é menos conveniente quando utilizada para prever a produção de ondas acústicas através de soluções numéricas [5]. Um dos problemas é que a fonte acústica deduzida pela analogia de Lighthill é espacialmente bastante "alargada", levando a integrais que convergem lentamente. Para escoamentos isotérmicos a baixo número de Mach verifica-se que a produção aerodinâmica de som é totalmente devida a flutuações da velocidade média do escoamento, o que pode ser descrito em termos da chamada dinâmica de vórtices. A vorticidade é, em geral, limitada a uma região muito menor do espaço do que o campo de velocidades correspondente à Analogia.

Isso conduz ao uso de um escoamento irrotacional como escoamento de referência. O resultado é chamado de Teoria sonora dos vórtices (*Vortex sound theory*) [6], [7]. Nesta teoria faz-se uma descrição adequada da dinâmica dos vórtices de escoamentos elementares, diretamente em propriedades de produção de som desses escoamentos. Dessa forma, faz-se a simulação de um escoamento tomado como base

e compara-se com a simulação de um escoamento similar, porém mais complexo (com reações químicas, por exemplo). A diferença entre as simulações é entendida ser proveniente das características que forem exclusivas do segundo escoamento.

Partindo das teorias de Lighthill, pesquisadores como Curle [8], Ffowcs e Hawkings [9], fizeram modificações na Analogia Acústica para descrever a influência dos contornos sobre o campo acústico do escoamento. Com o objetivo de considerar a influência de alguns processos físicos sobre a acústica outros autores utilizam uma mudança de variável sobre a equação da onda, o que lhes permite analisar outras características do escoamento. Morfey [10] e Lilley [11], [12] utilizaram a equação da onda formulada para a variável pressão, Ffowcs [13] e Kambe [14] utilizaram uma nova variável, $(p + \rho u^2)/3$ onde p é a pressão, ρ é a massa específica e \mathbf{u} é a velocidade), obtida pela combinação de pressão, velocidade e massa específica, enquanto Howe [15] optou por utilizar a entalpia de estagnação.

Além disso, outras formulações para a Analogia de Lighthill foram continuamente desenvolvidas e estudadas como fizeram Goldstein [16], [17], [18], Morfey [19] e Yazdi [20], os quais buscam estender a formulação original para considerar os mais diversos efeitos como fontes sonoras móveis.

Recentemente, devido ao grande interesse econômico e científico no problema, dois grandes ramos tem apresentado avanços no entendimento e na previsão das instabilidades acústicas envolvidas com a combustão.

No ramo experimental, Moeck [21] e Noiray [22] analisaram as oscilações acústicas e os modos azimutais que ocorrem em chamas rotacionais (*swirl flames*) e em câmaras de combustão circulares. Blimbaum [23] analisou a instabilidade dos modos acústicos transversais e verificou que as instabilidades transversais ocorrem devido ao movimento longitudinal do fluido induzido por flutuações do campo de pressão próximas ao injetor.

Paralelamente, O'Connor [24] investigou a resposta do escoamento à uma perturbação acústica nos casos reativo e não reativo. Ele mostrou que as perturbações acústicas criam pequenas zonas de recirculação e indicou que estas zonas talvez tenham pouca influência no escoamento no caso reativo. Porém, Kabiraj [25] investigou o comportamento não linear criado pelas oscilações termo-acústicas sobre a estabilidade da chama. Seus dados experimentais indicaram que estas oscilações modificam a dinâmica do jato causando forte intermitência e, em alguns casos, fazendo com que a chama se apague. Além disso, Bomberg [26] investigou as interações térmicas e acústicas em uma chama pré-misturada. Ele comprova que flutuações de velocidade geram flutuação na taxa de liberação de calor, que por sua vez, cria uma perturbação acústica.

Outros pesquisadores optam por analisar a influência de parâmetros externos sobre a acústica da combustão como Davis [27], que analisou experimentalmente o efeito do hidrogênio sobre a resposta dinâmica de oscilações auto excitadas no interior da câmara de combustão de uma turbina a gás. Na mesma linha, Allison [28] analisou o comportamento das instabilidades da combustão em um combustor experimental com objetivo de investigar a influência das propriedades dos combustíveis, do fluxo de ar e da geometria do combustor sobre o comportamento da chama.

Por outro lado, no ramo da dinâmica dos fluidos computacional, buscase simular e prever o campo acústico em situações realísticas. Os primeiros estudos numéricos iniciaram analisando a acústica de escoamentos não reativos. Por exemplo, Secundov [29] analisou as potencialidades das técnicas LES e RANS para determinação do campo acústico de jatos. Em seguida, Flemming [30] propôs uma técnica numérica híbrida (LES/CAA) para prever o ruído gerado pelo processo de combustão e Klewer [31] utilizou esta técnica numérica híbrida (LES/CAA) para a simulação de uma chama turbulenta não pré-misturada.

Visto que a abordagem numérica deste problema é relativamente nova, diversos modelos e técnicas numéricas tem sido desenvolvidas com objetivo de obter simulações precisas e eficientes de combustores reais. Assim, em 2011 Richard [32] apresentou um *Solver* para analisar a interação fluido-estrutura na geração de instabilidades acústicas. Chong [33] comparou o uso das técnicas numéricas LES e RANS para identificação da função de transferência de chama ”*flame transfer function*” (FTF) para o caso de escoamento compressível, turbulento, reativo e não adiabático. O autor Wolf [34] analisou numericamente as instabilidades dos modos azimutais em combustores cilíndricos através da técnica LES e de *Solvers* comerciais e verificou que os principais modos acústicos podem ser previstos numericamente. Gicquel [35] analisou o desempenho de simulações LES para descrever o comportamento de sistemas de combustão experimentais (laboratoriais) e reais (turbinas de aviação) e indicou estratégias para aperfeiçoar o uso da técnica para simulação de turbinas a gás reais.

Franzelli [36] investigou, numericamente e experimentalmente, os efeitos de uma mistura não homogênea entre ar e combustível na entrada da câmara de combustão. Seus dados mostraram que uma mistura não homogênea gera instabilidades auto-sustentadas no processo de combustão. Considerando que, em chamas difusivas, a mistura ocorre apenas no interior da câmara de combustão, existem diversas regiões onde a mistura encontra-se fora da faixa ideal de queima. Por este motivo, o estudo das instabilidades da combustão em motores e foguetes que utilizam este tipo de chama é essencial para tornar estes equipamentos mais eficientes e seguros. Alguns exemplos comuns do uso desse tipo de equipamentos são os motores de aeronaves, o que destaca a relevância econômica do problema.

1.3 Objetivos

O número de modelos capazes de descrever o comportamento acústico de escoamentos reativos ainda é consideravelmente pequeno, e os softwares comerciais utilizados para fazer estimativas sobre interações termoacústicas, nos problemas que envolvem combustão, são extremamente caros. Além disso, alguns fenômenos acústicos ainda não são completamente compreendidos. Desta forma, busca-se alcançar os seguintes objetivos:

- Definir um modelo numérico para análise da acústica de chamas.
- Realizar estimativas numéricas de erro e de taxa de convergência.
- Validar o modelo através da comparação com dados experimentais.
- Investigar fenômenos acústicos em escoamentos reativos.

Assim, definido o modelo numérico, pretende-se validá-lo através de testes e comparações com dados experimentais da literatura. Os testes são realizados para determinar o espectro de problemas e situações que podem ser analisados utilizando-se o conjunto de equações proposto.

O modelo deve ser capaz de prever o comportamento de uma chama, considerando os principais fenômenos conhecidos e suas interações. Este modelo deve ser preciso ao ponto de possibilitar a análise do campo acústico, mas deve ter custo computacional baixo a ponto de poder ser implementado e utilizado em computadores disponíveis comercialmente.

No que segue, é feita uma breve descrição de alguns conceitos da acústica geral e são apresentadas as equações gerais que modelam o comportamento acústico de escoamentos confinados e alguns casos clássicos são apresentados e comentados. No capítulo (3) discutem-se algumas abordagens analíticas que são utilizadas como

estimativas iniciais para determinar o comportamento acústico linear de alguns escoamentos. No capítulo (4) apresenta-se o conjunto de equações que é usado para modelar o comportamento acústico de escoamentos reativos. No capítulo (5) são mostrados os resultados obtidos através da combinação das soluções analíticas e numérica das equações do modelo. No capítulo (6) são apresentadas as principais conclusões do trabalho e suas perspectivas de desenvolvimento. Por fim, são indicadas as principais referências bibliográficas utilizadas ao longo da pesquisa.

2 EQUAÇÕES BÁSICAS PARA ANÁLISE ACÚSTICA DE ESCOAMENTOS

2.1 Conceitos de Acústica

Esta seção é dedicada à revisão de alguns conceitos básicos sobre acústica e movimento oscilatório. Busca-se retomar as definições gerais destacando suas ligações específicas com a acústica de chamadas. Desta forma, primeiramente é feita a dedução da equação da onda linear e nas seções seguintes são apresentadas outras definições consideradas pertinentes ao trabalho.

2.1.1 Equação da onda

A equação da onda para o escalar p , no caso unidimensional, é dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

A equação da onda unidimensional (2.1) pode ser resolvida pelo método de d'Alembert, o qual utiliza transformada de Fourier, ou pelo método de separação de variáveis. Pelo método de d'Alembert a solução é obtida conforme descrito a seguir.

Considere um novo sistema de coordenadas (ξ, η) dado por:

$$\xi = x - ct, \quad (2.2)$$

$$\eta = x + ct. \quad (2.3)$$

Nesse novo sistema é possível escrever

$$\begin{aligned} p_{xx} &= p_{\xi\xi} + 2p_{\xi\eta} + p_{\eta\eta}, \\ \frac{1}{c^2} p_{tt} &= p_{\xi\xi} - 2p_{\xi\eta} + p_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

desta forma, a equação (2.1) torna-se

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.4)$$

Isso significa que a função p permanece constante ao longo das curvas (2.2 - 2.3), isto é, as equações (2.2 - 2.3) descrevem as curvas características da equação da onda (2.1). Além disso, pode-se verificar que a derivada $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ não depende de η , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial \xi} = f(\xi). \quad (2.5)$$

Após integrar com respeito à ξ tem-se:

$$p(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (2.6)$$

onde F é a função primitiva de f e G é a constante de integração, que em geral é uma função de η . Retornando às coordenadas (x, t) obtém-se a solução geral da equação (2.1)

$$p(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (2.7)$$

Um caso particular ocorre quando as funções $F(x - ct)$ e $G(x + ct)$ são funções seno ou cosseno. As ondas obtidas com esse tipo função são chamadas de ondas harmônicas e surgem em diversas aplicações práticas.

Para uma onda se propagando no espaço tridimensional, onde a função de onda $p(\vec{x}, t)$ agora depende do vetor $\vec{x} = (x, y, z)$, tem-se

$$\frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (2.8)$$

que são chamadas de ondas escalares.

Neste trabalho de Acústica da Combustão o escalar considerado é a pressão. Às vezes, outros autores preferem considerar a massa específica como escalar de referência. De fato, esta escolha não deve interferir nos resultados, uma vez

que estas variáveis estão relacionadas pela Lei dos Gases Ideais:

$$p = R\rho T, \quad (2.9)$$

onde p é a pressão, ρ é a massa específica, T é a temperatura e R é a constante dos gases.

2.1.2 Princípio da superposição

Uma propriedade muito importante das ondas é que, ao contrário das partículas materiais, estas podem se cruzar sem que se alterem as suas propriedades. Ou seja, duas ondas viajando no espaço ao se cruzarem vão produzir momentaneamente uma terceira onda. Porém quando estas deixarem de ocupar a mesma região voltarão a ser as mesmas ondas, considerando um meio totalmente elástico.

Assim, várias ondas podem ocupar a mesma região do espaço em um certo instante, movendo-se independentemente uma da outra. O deslocamento de uma dada partícula do meio em um certo instante é definido pela soma dos deslocamentos que seriam produzidos por cada onda individualmente. Este é o chamado princípio da superposição, que é válido para ondas em meios elásticos supondo-se que as forças de restauração sejam proporcionais às deformações.

Se existirem $n = 2, 3, 4..$ ondas com amplitudes A_i e defasadas de d_i entre si se sobrepondo, a onda resultante será a soma algébrica de todas elas. Usando uma notação abreviada para indicar a função de onda P_n resultante tem-se:

$$P_n = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n A_i \cos(k_i x - w_i t + d_i) \quad (2.10)$$

Inversamente, como toda função com as propriedades corretas de suavidade e periodicidade pode ser representada através de uma soma de senos e cossenos através de uma série de Fourier, o movimento ondulatório descrito por essas funções pode ser entendido como uma combinação de movimentos harmônicos simples. Uma

aplicação disto são os filtros de ondas e os seletores de frequência. Os efeitos físicos resultantes da superposição de diversas ondas são chamados de interferência. Um exemplo clássico ocorre quando duas ondas de mesma direção e sentido, porém defasadas uma em relação à outra de uma fase d , possuem amplitudes, frequências e velocidades iguais. Neste caso têm-se:

$$p_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t - d) \quad (2.11)$$

$$p_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.12)$$

Numa dada posição (x fixo), p_1 e p_2 referem-se a dois movimentos harmônicos que estão defasados por um intervalo de tempo (d/ω). A onda resultante da superposição de p_1 e p_2 é dada por:

$$p_1(x, t) + p_2(x, t) = A [\sin(kx - \omega t - d) + \sin(kx - \omega t)] \quad (2.13)$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (2.14)$$

a expressão (2.13) torna-se:

$$p_1(x, t) + p_2(x, t) = 2A \sin(kx - \omega t - d/2) \cos(d/2) \quad (2.15)$$

Portanto, a onda resultante tem a mesma frequência angular ω que as ondas descritas por p_1 e p_2 e com fase ($d/2$). Mas a sua amplitude é dada por $2A \cos(d/2)$. Para uma fase $d = 2\pi n$ (n inteiro), ou seja, para $p_1 = p_2$, a amplitude da onda resultante vale $2A$ e diz-se que ocorre interferência construtiva entre p_1 e p_2 (condição de máximo). É muito comum dizer-se que as ondas estão em fase quando estas diferem de $d = 2\pi n$ (n inteiro).

Para uma fase $d = (n + 1/2)\pi$ (n inteiro), ou seja, para $p_1 = -p_2$, a amplitude da onda resultante vale zero e diz-se que ocorre interferência destrutiva

entre p_1 e p_2 (condição de mínimo). Diz-se que as ondas estão fora de fase quando estas diferem de $d = \pi(n + 1/2)$ (n inteiro).

De fato, ocorrem interferências entre ondas de quaisquer amplitudes ou frequências e com qualquer diferença de fase. Porém, nesse caso, não é possível obter uma expressão tão simples quanto a equação (2.15) e a onda resultante em geral não é harmônica.

2.1.3 Ondas harmônicas

As ondas harmônicas se constituem num tipo especial de ondas. O que as caracterizam é o fato delas se repetirem periodicamente e possuírem forma senoidal. Elas são produzidas, por exemplo, esticando-se uma corda, e depois puxando-a para cima e para baixo de uma mesma distância e com mesma velocidade até que se produza uma condição estacionária, como mostrado na figura (2.1). Uma onda harmônica não precisa ser estacionária, ela pode se propagar indefinidamente.

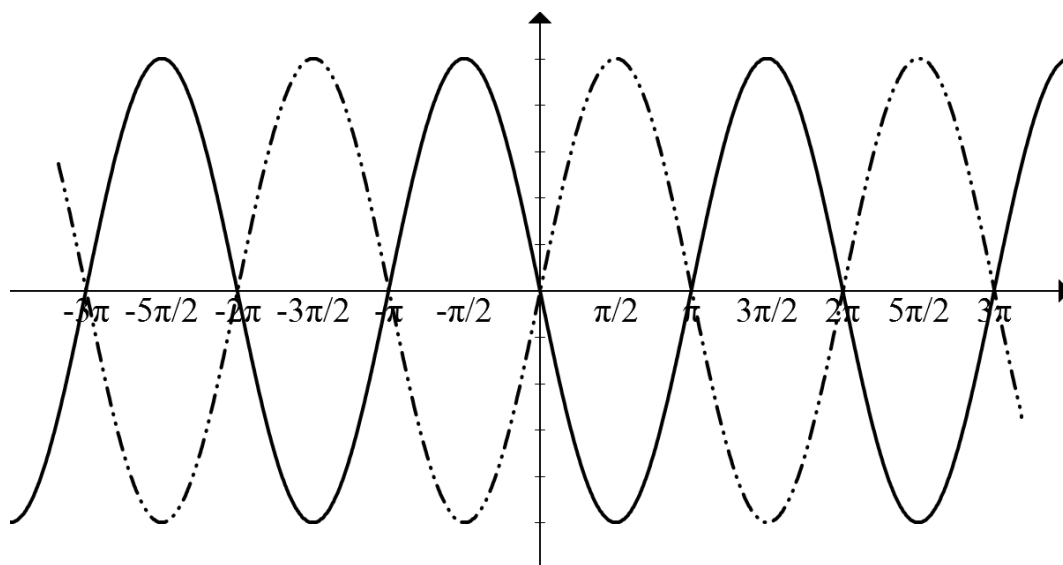


Figura 2.1: Ondas harmônicas

Estas ondas são caracterizadas por uma função que descreve o perfil da onda na forma de seno ou cosseno. Ou seja, para uma onda harmônica escreve-se:

$$f(x - ct) = A \cos(k(x - ct)), \text{ ou} \quad (2.16)$$

$$= A \sin(k(x - ct)), \quad (2.17)$$

onde A é a amplitude da onda, pois é o máximo da função f , k é o número de onda, c é a velocidade de propagação da onda, e x e t são o parâmetro espacial e temporal, respectivamente. Logo, o fator A está relacionado com a intensidade do impulso e k com o seu deslocamento na horizontal. Uma outra forma de escrever a expressão (2.16), e que é bastante comum, é:

$$f(x - ct) = A \cos(kx - \omega t), \text{ ou} \quad (2.18)$$

$$= A \sin(kx - \omega t). \quad (2.19)$$

Na expressão (2.18) a constante ω é dada por:

$$\omega = k \cdot c. \quad (2.20)$$

A variável ω é a frequência angular da onda. Numa onda harmônica é usual representar o seu perfil através da função exponencial com argumento puramente imaginário. Ou seja, representa-se a onda pela função

$$f(x - ct) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (2.21)$$

Conforme a equação (2.18), uma onda harmônica tem perfil que se repete no espaço e no tempo. Isso decorre do fato de que, depois de um intervalo de tempo \mathcal{T} , chamado de período da onda harmônica, dado por

$$\omega \mathcal{T} = 2\pi, \quad (2.22)$$

a onda se torna indistinguível da onda inicial. Portanto, de (2.20) segue que o período é dado, em função de k e c , por:

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kc}. \quad (2.23)$$

Define-se a frequência (F) da onda como o inverso do período,

$$F = \frac{1}{\mathcal{T}} = \frac{kc}{2\pi}. \quad (2.24)$$

A unidade de frequência mais utilizada para ondas, em geral, é o Hertz definido como o inverso do segundo. Depois de percorrida certa distância denominada de um comprimento de onda (aqui representado pela letra λ) a onda se torna indistinguível daquela de quando se iniciou o percurso. Isso ocorre para valores de λ tais que:

$$k\lambda = 2\pi. \quad (2.25)$$

Assim, o comprimento da onda nada mais é do que a distância entre, por exemplo, dois máximos da onda. De (2.24) e (2.25), nota-se que existe uma relação bem simples entre a velocidade da onda, a frequência e o comprimento de onda.

2.1.4 Ondas planas

O análogo, em três dimensões, de uma onda harmônica que se propaga ao longo do eixo x , é uma onda de tipo exponencial:

$$f(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (2.26)$$

onde \vec{k} é o vetor de onda, \vec{x} é o vetor posição de coordenadas (x, y, z) e A é a amplitude da onda. Esse tipo de função é uma solução particular da equação da onda.

A expressão (2.26) descreve uma onda que se propaga na direção dada pelo vetor \vec{k} . Uma onda que se propaga no sentido oposto será escrita como:

$$f(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega t)}, \quad (2.27)$$

Tendo em vista que o lugar geométrico dos pontos para os quais

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \text{constante} \quad (2.28)$$

é um plano, denomina-se uma onda desta forma de plana. A característica mais notável de uma onda plana é que sua fase é a mesma para cada superfície plana, dada pela expressão (2.28).

2.1.5 Modos acústicos

Quando se tem uma fonte sonora emitindo som na frequência f , surge um modo de ressonância na frequência $f_0 = \frac{c}{2L}$, onde c é a velocidade do som no meio e L é uma distância característica, por exemplo, a distância entre duas paredes paralelas de uma sala [37].

Ressonâncias similares ocorrem nas frequências $2f_0, 3f_0, 4f_0$, etc. Isto significa que a frequência f_0 é a frequência fundamental, entre dois contornos paralelos, e ela vem acompanhada de uma série de modos com ressonâncias em frequências crescentes a partir de f_0 . Assim, chama-se f_0 de primeiro modo acústico, $2f_0$ de segundo modo, $3f_0$ de terceiro modo acústico e assim por diante.

Considerando uma região retangular, chamam-se modos axiais aqueles que envolvem apenas duas paredes opostas paralelas, modos tangenciais aqueles que envolvem quatro paredes, enquanto que modos oblíquos envolvem as seis paredes da região. A figura 2.2 ilustra esses modos, usando o conceito de raios acústicos.

Sempre que uma onda acústica é emitida com frequência igual à frequência de um certo modo, tem-se aumento na intensidade sonora desta frequência. Assim,

a resposta em frequência do ambiente não é linear para todas as frequências, pois depende das distâncias características de cada região.

A fórmula utilizada no cálculo dos modos axiais, tangenciais e oblíquos em regiões com forma de paralelepípedo é:

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{L}\right)^2 + \left(\frac{q}{W}\right)^2 + \left(\frac{r}{H}\right)^2} \quad (2.29)$$

onde f é a frequência, em Hertz, dos modos p, q e r , c é a velocidade do som, p, q e r são os números naturais: 0,1,2, 3..., e L, W e H são as dimensões do ambiente, conforme a figura 2.3. Para $p = 1, q = 0$ e $r = 0$ obtém-se da equação (2.29) $f = \frac{c}{2L}$, ou seja, o primeiro modo axial.

Modos acústicos são possíveis quando p, q e r pertencem ao conjunto dos números naturais, condição que cria as ondas estacionárias. Os modos axiais são obtidos com dois elementos do conjunto p, q, r iguais a zero; os modos tangenciais com qualquer elemento do trio igual a zero, e modos oblíquos com todos os elementos do trio diferentes de zero.

Em situações reais, espera-se que os modos axiais sejam os mais fortes, visto que os modos tangenciais e oblíquos envolvem reflexões em mais superfícies, ou seja, esses modos sofrem mais absorção.

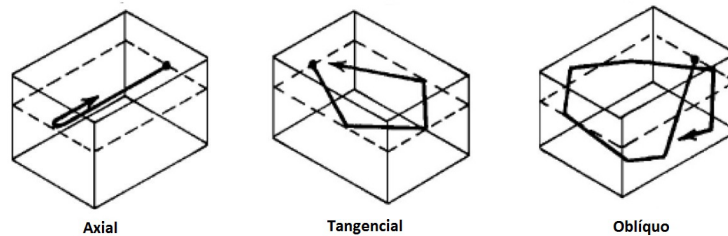


Figura 2.2: Representação dos raios acústicos para os modos de ressonância de uma região retangular.

A figura 2.4 apresenta a forma do modo $(1, 0, 0)$ e a figura 2.5 a forma do modo $(3, 0, 0)$. Tratam-se de dois modos axiais em que a pressão sonora é nula na região central da sala e máxima em duas das paredes paralelas da região.

Desta forma, conhecer os principais modos de ressonância de um escoamento confinado permite determinar quais regiões do domínio apresentarão pressão mais elevada. Como gradientes de pressão induzem escoamentos, o campo acústico pode influenciar diretamente o campo de velocidades, dependendo da intensidade sonora.

Na próxima seção são apresentadas as equações que modelam o campo acústico de escoamentos não reativos. Este modelo é composto pelas equações de Navier-Stokes, para descrever o campo de velocidades, além das equações de conservação de massa e energia.

2.2 Equações Básicas do Escoamento

Considerando o fluido como um meio contínuo, deduz-se as equações para a conservação da massa, da energia e da quantidade de movimento seguindo alguns livros clássicos de mecânica dos fluidos como Prandtl and Tietjens [38], Batchelor [39], Landau and Lifshitz [40], Schlichting [41], Kundu [42], Belotserkovskii

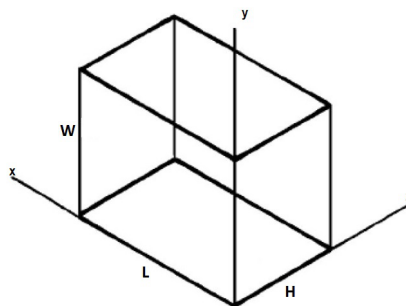


Figura 2.3: Dimensões de uma região retangular.

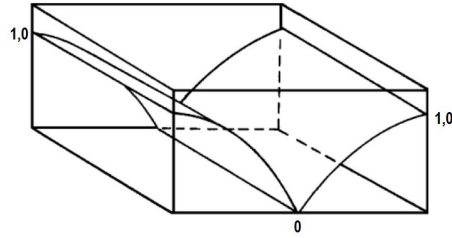


Figura 2.4: Modo acústico $(1, 0, 0)$, com pressão máxima no contorno e mínima no centro da região.

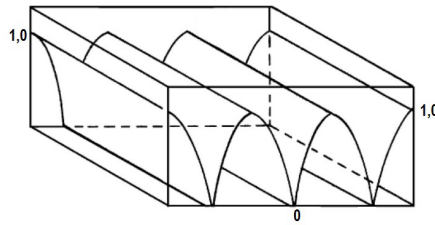


Figura 2.5: Modo acústico $(3, 0, 0)$, com pressão máxima no contorno e em dois pontos do domínio e com pressão mínima no centro da região e em dois pontos do domínio.

[43], Paterson [44] e Durand [45]. Desta forma, variáveis como velocidade, massa específica e temperatura serão consideradas funções contínuas no espaço e tempo. Portanto, a massa contida em um elemento infinitesimal de volume V e massa específica ρ é dada por $m = \rho V$. Obtém-se a seguinte equação para a conservação da massa

$$d(\rho V) = \rho dV + V d\rho = 0, \quad (2.30)$$

sendo que a taxa de variação da massa específica, quando o fluido se move com velocidade $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, corresponde a taxa de dilatação, obtendo-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{u}, \quad (2.31)$$

onde $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ denota o vetor gradiente em coordenadas Cartesianas.

A derivada material ($D\rho/Dt$) está relacionada com a derivada convectiva ($\partial\rho/\partial t$) por [46]

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho. \quad (2.32)$$

Obtém-se a lei de conservação da massa para um elemento de volume, conforme:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0, \text{ ou } \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.33)$$

Quando necessário, insere-se um termo fonte de massa (Q_m) na equação [47],[48]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = Q_m. \quad (2.34)$$

sendo $Q_m \neq 0$ apenas para a conservação de massas parciais [49], [50], [51]. Na equação (2.34), e daqui para frente, utiliza-se a notação de Einstein para índices repetidos, ou seja, o termo $\frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i}$ representa a soma

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial\rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\rho u_3}{\partial x_3}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton a uma partícula de fluido chega-se a relação

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \cdot P + \rho f, \quad (2.35)$$

onde f é a densidade do campo de força agindo sobre a massa de fluido, e $-\nabla \cdot P$ é o conjunto de forças agindo sobre a superfície do elemento de volume. Esta força pode ser expressa em termos do tensor de tensões P . Usando a lei de conservação da massa (2.33), obtém-se a equação de conservação da quantidade de movimento [39], [40]

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (2.36)$$

A parte isotrópica $p\delta_{ij}$ deste tensor corresponde aos efeitos da pressão hidrodinâmica $p = P_{ii}/3$,

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \sigma_{ij}, \quad (2.37)$$

onde $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e igual a 1 caso contrário. O desvio σ_{ij} do comportamento da pressão hidrostática corresponde ao efeito da viscosidade sobre o fluido [52], [53], [39].

A equação da energia aplicada a um elemento material é:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) = -\nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (P \cdot \vec{u}) + \vec{f} \cdot \vec{u} + Q_w, \quad (2.38)$$

onde e é a energia interna por unidade de massa, q é o fluxo de calor e Q_w a produção de calor por unidade de volume. Na forma conservativa esta equação torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\rho \vec{u} \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \right] = -\nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (P \cdot \vec{u}) + f \cdot \vec{u} + Q_w, \quad (2.39)$$

ou, em notação indicial,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \right] = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij} u_j}{\partial x_i} + f_i u_i + Q_w. \quad (2.40)$$

As leis de conservação da massa, da força e da energia na forma diferencial são válidas quando as derivadas das variáveis do fluxo estão definidas. Quando essas leis são aplicadas para um volume finito V , obtém-se formulações integrais que também são válidas na presença de descontinuidades tais como ondas de choque, porém esse caso não será analisado.

2.3 Relações Constitutivas

As equações para a massa (2.33), quantidade de movimento (2.36) e energia (2.39) envolvem outras variáveis desconhecidas e é necessária a inclusão de equações adicionais para completar o sistema. Se for assumido que o fluido está localmente em equilíbrio termodinâmico, basta que sejam consideradas duas variáveis de estado para que o sistema fique completamente determinado. Em acústica, é conveniente a escolha da massa específica ρ e a entropia específica s para descrever o sistema. As demais variáveis de estado são definidas em função de ρ e s . Deste

modo, a energia específica "e" é definida pela relação

$$e = e(\rho, s). \quad (2.41)$$

Esta relação é chamada de equação térmica de estado e foi determinada empiricamente. Variações de e podem ser escritas como

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho ds. \quad (2.42)$$

Comparando com a equação fundamental da termodinâmica,

$$de = Tds - pd\rho^{-1}, \quad (2.43)$$

obtém-se as seguintes equações para a temperatura e para a pressão:

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho, \quad (2.44)$$

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s. \quad (2.45)$$

Como p é também função de ρ e s , tem-se

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds. \quad (2.46)$$

Definindo o som como sendo isentrópico ($ds = 0$) para perturbações na massa específica e pressão [54], [55], a velocidade do som $c = c(\rho, s)$ é dada por

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (2.47)$$

Na maioria das aplicações o fluido considerado é o ar, sujeito à pressão e temperatura ambiente. Neste caso, vale a lei dos gases ideais

$$p = \rho RT, \quad (2.48)$$

onde R é a constante dos gases, a qual é definida pela razão da constante de Boltzmann (k_B) pela massa de uma molécula (m_w), $R = k_B/m_w$. Por definição, para gás ideal a densidade de energia depende apenas de T , $e = e(T)$ e obtém-se

$$c = \sqrt{\left(\gamma \frac{p}{\rho}\right)} = \sqrt{\gamma RT}, \quad (2.49)$$

onde $\gamma = c_p/c_V$ é a razão de Poisson dos calores específicos.

Considerando equilíbrio termodinâmico local, é razoável assumir que os processos de transporte são determinados por funções lineares dos gradientes das variáveis de estado do fluxo [41],[56]. Isto corresponde a um comportamento de fluido Newtoniano

$$\sigma_{ij} = 2\eta \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu_V D_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.50)$$

onde o tensor taxa de deformação D_{ij} é definido por

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.51)$$

O termo $D_{kk} = \nabla \cdot \vec{u}$ considera o efeito da dilatação. Em equilíbrio termodinâmico, de acordo com a hipótese de Stokes, supõe-se que a viscosidade μ_V desaparece. A viscosidade dinâmica η é função do estado termodinâmico do fluido. Embora a hipótese de μ_V (viscosidade) desaparecer ser, inicialmente, uma boa aproximação, observa-se efeitos significativos da viscosidade em aplicações acústicas, como propagação em grandes distâncias [57]. Este desvio do equilíbrio termodinâmico local é devido, no ar, ao tempo de relaxação finito da rotação dos graus de liberdade das moléculas.

A aproximação correspondente para o fluxo de calor \vec{q} é a lei de Fourier,

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.52)$$

onde κ é a condutividade térmica. Para um gás ideal, κ é função da temperatura somente. É conveniente introduzir a viscosidade cinemática ν e a difusividade de

calor a , conforme:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.53)$$

e

$$a = \frac{\kappa}{\rho c_p}. \quad (2.54)$$

onde c_p é o calor específico à pressão constante.

A viscosidade cinemática e a difusividade de calor são os coeficientes de difusão para a transferência da quantidade de movimento e a transferência de calor, respectivamente. Para um gás ideal, ambos os processos de transferência são determinados pelas mesmas velocidades moleculares e o livre caminho médio molecular. Isso explica porque o número de Prandtl $Pr = \nu/a$ é de ordem unitária. Para o ar à pressão e temperatura ambiente, tem-se $Pr \sim 0,7$.

2.4 Equação da Onda Linearizada

Conforme Rienstra [58], o que chamamos de acústica são flutuações muito pequenas de massa específica, ou seja $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$, onde $\bar{\rho}$ é a massa específica média do fluido e ρ' é sua flutuação. Além disso, as flutuações de velocidade u' associadas com a propagação da onda acústica também é pequena. Isso justifica algumas aproximações das equações que descrevem o movimento do fluido, relacionado ao fenômeno acústico. Uma destas aproximações é apresentada nesta seção.

Mesmo que o escoamento seja considerado sem atrito, as equações resultantes continuam complicadas se for assumido um fluxo médio não uniforme ou uma distribuição não uniforme de massa específica ($\bar{\rho}$). Os trabalhos de Pierce [57] e Goldstein [59] apresentam a dedução de equações da onda para casos mais gerais do que aqueles apresentados nesta seção.

Considere o caso de perturbações acústicas $(p', \rho', s', u', \dots)$ ocorrendo em um fluido uniforme e estagnado ($\bar{u} = 0$), ou seja, os parâmetros pressão média

(\bar{p}), massa específica média ($\bar{\rho}$), etc, todos constantes. Desta forma, as equações do movimento ficam bastante simplificadas. Assim para a conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia obtém-se:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot u' = 0, \quad (2.55)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \nabla p' = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = 0, \quad (2.57)$$

onde os termos de segunda ordem das perturbações foram negligenciados. A equação constitutiva torna-se

$$p' = c^2 \rho'. \quad (2.58)$$

Aplicando a derivada temporal na equação (2.55) e subtraindo-a do divergente da equação (2.56), pode-se eliminar v' para obter

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0. \quad (2.59)$$

Usando a equação constitutiva (2.58) para eliminar ρ' , chega-se à equação:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p' = 0. \quad (2.60)$$

Considerando que o escoamento é irrotacional, pois

$$\nabla \times \left(\bar{\rho} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \nabla p' \right) = \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{u}') = 0, \quad (2.61)$$

usa-se a equação de Bernoulli (linearizada)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{p'}{\bar{\rho}} = 0 \quad (2.62)$$

para deduzir uma equação da onda para $\partial \varphi' / \partial t$, onde φ é a velocidade potencial ($\vec{u}' = \nabla \varphi'$).

Desta forma, a flutuação da velocidade potencial satisfaz a mesma equação da onda que é satisfeita para a pressão (ou massa específica), ou seja,

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi' = 0. \quad (2.63)$$

Em acústica, é comum trabalhar com a velocidade potencial como uma primeira aproximação do comportamento acústico do sistema. Nas próximas seções são apresentadas algumas formulações para o estudo de escoamentos reativos.

2.5 Acústica dos Escoamentos Reativos

Para escoamentos reativos, a derivação da equação da onda é mais complexa e é conveniente trabalhar com o logaritmo da pressão. Inicia-se com as equações de Navier-Stokes, escritas na forma tensorial, e usa-se a derivada total definida por:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla g. \quad (2.64)$$

Serão usadas duas hipóteses principais:

1. as forças de volume são iguais a zero ($g_k = 0$);
2. as fontes de calor no volume também são iguais a zero ($\dot{Q} = 0$).

Também são necessárias as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para fluxos não reativos, isto é:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.65)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau. \quad (2.66)$$

Como será considerado um escoamento não adiabático, a dedução também requer a equação da energia:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\dot{w}_T + \frac{Dp}{Dt} + \tau : \nabla \vec{u} - \left(\rho \sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k \vec{v}_k \right) \cdot \nabla T, \quad (2.67)$$

onde ρ é a massa específica, c_p é o calor específico à pressão constante, T é a temperatura, \dot{w}_T é um termo fonte de calor proveniente da reação química, p é a pressão, τ é o tensor das tensões, \vec{u} é o vetor velocidade, $c_{p,k}$ é o calor específico à pressão constante da espécie k , Y_k é a fração de massa da espécie k , \vec{v}_k é o vetor velocidade de difusão da espécie k e N é o número total de espécies químicas.

As equações (2.65), (2.66) e (2.67) podem ser combinadas para a obtenção da equação da onda. Isto pode ser feito dividindo a equação da energia (2.67) por $\rho c_p T$ e usando a relação de estado, $p = \rho R T$, para obter uma equação para o logaritmo da pressão $\ln(p)$:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{D \ln(p)}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho c_p T} \left[\dot{w}'_T + \tau : \nabla \vec{u} - \left(\rho \sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k \vec{v}_k \right) \cdot \nabla T \right] + \frac{1}{R} \frac{DR}{Dt} \quad (2.68)$$

onde $\gamma = \frac{c_p}{p}$.

A equação da quantidade de movimento (2.66) pode ser reescrita em função de $\ln(p)$:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{c^2}{\gamma} \nabla \ln(p) = \frac{1}{\rho} \nabla \tau \quad (2.69)$$

sendo a velocidade do som no meio (c) dada por: $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$. Subtraindo a derivada material da equação (2.68) do divergente da equação (2.69), obtém-se a equação da onda para o logaritmo da pressão:

$$\nabla \cdot \left(\frac{c^2}{\gamma} \nabla \ln(p) \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{D \ln(p)}{Dt} \right) = \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \cdot \tau) - \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u} \quad (2.70)$$

$$- \frac{D}{Dt} \left[\frac{D}{Dt} \ln(p) \right] - \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{\rho c_p T} \left(\dot{w}'_T + \tau : \nabla \vec{u} - \left(\rho \sum_{k=1}^N c_{p,k} Y_k \vec{v}_k \right) \cdot \nabla T \right) \right]$$

Para um fluxo não reativo e não viscoso, com apenas uma espécie, a equação (2.70) se reduz a equação da onda deduzida na seção anterior.

2.6 Uma Equação da Onda para Baixo Número de Mach e Fluxo Reativo

Nesta dedução serão utilizadas mais duas hipóteses para a obtenção da equação da onda:

1. supõe-se que a velocidade média do fluxo é baixa;
2. todas as espécies possuem o mesmo peso molecular.

Estas duas hipóteses não são extremamente restritivas e permitem várias simplificações, por exemplo:

- \dot{w}'_T pode ser substituído por \dot{w}_T , pois todos os pesos moleculares são iguais.
- γ é constante e a pressão média \bar{p} também é constante, de modo que $\gamma\bar{p} = \bar{\rho}c^2$ é constante (o que não significa que $\bar{\rho}$ e c^2 também sejam constantes).
- Uma análise da ordem de magnitude indica que os principais termos fonte do lado direito da equação (2.70) são: o termo químico de liberação de calor e as perturbações da velocidade, o que leva a uma equação simplificada da forma:

$$\nabla \cdot \left(\frac{c^2}{\gamma} \nabla \ln(p) \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{D}{Dt} \ln(p) \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho c_p T} \dot{w}_T \right) - \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u}. \quad (2.71)$$

- Todas as derivadas convectivas são termos, duas ordens de magnitude, menores que as derivadas no tempo. Assim, considere uma quantidade unidimensional f que oscila harmonicamente dada por:

$$f = e^{i(kx - \omega t)}.$$

Portanto, sua derivada total é

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = (-i\omega + uik)f = -i\omega \left(1 - \frac{u}{c}\right) f = -i\omega(1 - M)f. \quad (2.72)$$

onde $k = \omega/c$ e u é a velocidade na direção do eixo x . Para números de Mach pequenos ($M = u/c \ll 1$), o segundo termo na expressão de Df/Dt é muito pequeno e Df/Dt pode ser aproximado por $\partial f/\partial t$.

A equação (2.71) torna-se:

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla \ln(p)) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln(p) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho c_v T} \dot{w}_T \right) - \gamma \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u}. \quad (2.73)$$

Esta equação descreve ondas de amplitudes finitas. Fazendo a sua linearização, a pressão pode ser escrita como $p = \bar{p} + p'$, onde \bar{p} é a pressão média e p' é a flutuação da pressão com $p'/\bar{p} \ll 1$. Assim a variação de $\ln(p)$ é dada por p'/\bar{p} e a equação (2.73) torna-se uma equação para as variações da pressão p' :

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla p') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' = (\gamma - 1) \frac{\partial \dot{w}_T}{\partial t} - \gamma \bar{p} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u}. \quad (2.74)$$

A seguir compara-se a equação da onda para fluxos não reativos e reativos. Não caso não reativo, o termo $\nabla \vec{u} : \nabla \vec{u}$ é mantido pois este termo é responsável pelo ruído gerado no fluxo turbulento. A complexidade adicionada pela combustão é que a variável velocidade do som deve ser mantida no operador gradiente, e um termo fonte adicional. A forma linearizada da equação (2.74) é suficiente para capturar a ordem de magnitude dos modos instáveis, porém, são necessárias extensões não lineares para descrever os efeitos não lineares que aparecem em ciclos-limite.

$$\text{Fluxo não reativo} \quad c^2 \nabla^2 p' - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\gamma \bar{p} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u} \quad (2.75)$$

$$\text{Fluxo reativo} \quad \nabla c^2 \nabla p' - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = (\gamma - 1) \frac{\partial \dot{w}_T}{\partial t} - \gamma \bar{p} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u} \quad (2.76)$$

2.7 Velocidade Acústica e Pressão em Fluxos Reativos de Baixa Velocidade

O uso de equações linearizadas para a pressão e para as perturbações da velocidade também são úteis para a análise acústica. A equação para a velocidade acústica \vec{u}' é simplificada a partir da equação (2.66) usando-se as hipóteses de tensão viscosa e derivada convectiva negligenciáveis, obtendo-se assim:

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p', \quad (2.77)$$

onde $\bar{\rho}$ pode ser função da posição espacial.

A equação para a pressão é obtida negligenciando o primeiro termo viscoso na equação (2.68) e as variações relativas do peso molecular nesta mesma equação. O termo associado à velocidade difusiva e o termo DR/Dt também desaparecem da equação (2.68), que fica simplificada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{D \ln(p)}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho c_p T} \dot{w}_T. \quad (2.78)$$

Para ordem zero, ou seja, para o fluxo médio, esta equação torna-se:

$$\nabla \cdot \bar{\vec{u}} = \frac{1}{\rho c_p T} \bar{\dot{w}}_T, \quad (2.79)$$

onde $\bar{\dot{w}}_T$ é a taxa média da reação. Mantendo os termos lineares de primeira ordem na equação (2.78) e desconsiderando as derivadas espaciais em comparação com as derivadas temporais, chega-se a:

$$\frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u}' = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \dot{w}'_T, \quad (2.80)$$

onde \dot{w}'_T representa a instabilidade da liberação de calor.

Para ondas longitudinais propagando-se em um duto de seção transversal variável, $S(z)$, e fluxo unidimensional (um bocal convergente/divergente, por

exemplo), pode-se assumir que as equações (2.77) e (2.80) podem ser integradas ao longo de x e y para obter:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (2.81)$$

$$\frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} (S u') = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \dot{w}'_T. \quad (2.82)$$

Com base nas definições apresentadas até o momento deduz-se as equações que descrevem a densidade de energia acústica.

2.8 Densidade de Energia Acústica para Fluxos Reativos

A energia acústica pode ser definida como:

$$e' = \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\bar{\rho} c^2}. \quad (2.83)$$

Multiplicando a equação (2.80) por p' e tomando o produto escalar da equação da conservação da quantidade de movimento (2.77) pela velocidade \vec{u}' , obtém-se:

$$\frac{\partial e'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{f}' = s', \quad (2.84)$$

onde

$$s' = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \bar{p}} p' \dot{w}'_T \text{ e } \vec{f}' = p' \vec{u}'. \quad (2.85)$$

O termo fonte s' do lado direito da equação (2.84) é uma correlação entre a instabilidade da pressão p' e a instabilidade da liberação de calor \dot{w}'_T . Este termo é devido à combustão e pode agir como fonte ou sumidouro para a energia acústica. Quando s' é positivo, isto é, se as oscilações de pressão (p') estão em fase com as oscilações da liberação de calor (\dot{w}'_T), s' age como termo fonte para a energia acústica e as instabilidades são amplificadas localmente. Por outro lado, se

a instabilidade da liberação de calor é máxima quando a pressão é mínima, a instabilidade total desaparece. Este critério qualitativo para instabilidade na combustão foi primeiramente proposto por Rayleigh [2].

A equação (2.84) pode ser usada para avaliar a taxa de crescimento da instabilidade. Se ela for integrada sobre todo o volume V do combustor, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \int_V e' dV + \int_{\partial V} \vec{f}' \cdot \vec{n} d\partial V = \int_V s' dV, \quad (2.86)$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada ordinária e ∂V é a fronteira do volume V .

Na equação (2.86) todos os termos são dependentes do tempo. Para se ter uma ideia sobre o crescimento da instabilidade a partir da equação (2.86) deve-se, portanto, realizar uma média no tempo. Isto pode ser feito sobre um período de oscilação, se for assumido que o combustor possui oscilação harmônica. Supondo variações harmônicas para todas as variáveis, escreve-se a flutuação da pressão, a velocidade e a liberação de calor como:

$$p' = \Re(p_{\varpi}(t)e^{-i\omega t}), \quad (2.87)$$

$$\vec{u}' = \Re(\vec{u}_{\varpi}(t)e^{-i\omega t}) \quad \text{e} \quad (2.88)$$

$$\dot{w}'_T = \Re(\dot{w}_{\varpi}(t)e^{-i\omega t}). \quad (2.89)$$

onde $\Re(p_{\varpi}(t)e^{-i\omega t})$ é a parte real da função $p_{\varpi}(t)e^{-i\omega t}$. As funções $p_{\varpi}(t)$, $\vec{u}_{\varpi}(t)$ e $\dot{w}_{\varpi}(t)$ apresentam pouca variação no tempo. A instabilidade no combustor ocorre quando estas funções crescem com o tempo para um dado pulso ϖ .

Realizando-se uma média da equação (2.86) sobre o período de oscilação $T = 2\pi/\omega$ e dividindo por T tem-se:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}' + \mathcal{F}' = \mathcal{S}', \quad (2.90)$$

onde \mathcal{E}' mede o período médio da energia acústica no interior do combustor:

$$\mathcal{E}' = \int_V E dV \quad \text{e} \quad E = \frac{1}{T} \int_0^T e' dt = \frac{1}{4\rho c^2} p_{\varpi} \mathbf{p}_{\varpi} + \frac{1}{4} \vec{u}_{\varpi} \cdot \vec{\mathbf{u}}_{\varpi}. \quad (2.91)$$

O período médio do fluxo acústico saindo do combustor é \mathcal{F}' :

$$\mathcal{F}' = \int_V F dV \quad \text{e} \quad F = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f}' dt = \frac{1}{2} \Re(p_\varpi \vec{\mathbf{u}}_\varpi), \quad (2.92)$$

e o termo fonte médio é \mathcal{S}'

$$\mathcal{S}' = \int_V S dV \quad \text{e} \quad S = \frac{1}{T} \int_0^T s' dt = \frac{\gamma - 1}{T\gamma\bar{p}} \int_0^T p' \dot{w}'_T dt = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma\bar{p}} \Re(p_\varpi \dot{\mathbf{w}}_\varpi). \quad (2.93)$$

As variáveis $\vec{\mathbf{u}}_\varpi$, $\dot{\mathbf{w}}_\varpi$, \mathbf{p}_ϖ representam o conjugado complexo das variáveis \vec{u}_ϖ , \dot{w}_ϖ , p_ϖ , respectivamente.

O acoplamento chama/acústica é agora representado por \mathcal{S}' : a integral da média espacial (sobre V) do período médio do valor $p_\varpi \dot{w}_\varpi$ (a instabilidade da pressão multiplicada pela instabilidade da liberação de calor) deve ser positiva para haver acréscimo na energia acústica da oscilação.

A taxa de crescimento da energia acústica, g , pode ser expressa assumindo que as amplitudes da perturbação variam pouco com o tempo, em comparação ao tempo acústico das funções p_ϖ , \vec{u}_ϖ e \dot{w}_ϖ , e que podem ser escritas como:

$$p_\varpi(t) = P' e^{gt}, \quad \vec{u}_\varpi = \vec{U}' e^{gt} \quad \text{e} \quad (2.94)$$

$$\dot{w}_\varpi = W' e^{gt}, \quad (2.95)$$

onde $gT \ll 1$. O balanço de energia torna-se:

$$g = \frac{1}{2\mathcal{E}'} (-\mathcal{F}' + \mathcal{S}'). \quad (2.96)$$

A taxa de crescimento g pode ser avaliada como a diferença entre o termo fonte da combustão \mathcal{S}' e as perdas acústicas pelos contornos \mathcal{F}' .

No próximo capítulo são apresentadas algumas aproximações analíticas para determinação do campo acústico em um escoamento que envolve combustão. Normalmente, as soluções analíticas são utilizadas como uma previsão das principais características do comportamento acústico, visto que a maioria das soluções considera apenas os efeitos lineares de produção e propagação do som.

3 MÉTODOS PARA ANÁLISE ACÚSTICA DE CHAMAS

Neste capítulo são apresentadas duas abordagens analíticas que possibilitam a obtenção de estimativas iniciais sobre modos acústicos e o comportamento geral do campo acústico: a solução da equação da onda via Funções de Green e o Método da Matriz de Transferência.

3.1 Função de Green

Nesta seção é apresentada uma solução para a equação da onda para o caso onde não há presença de reações químicas que interfiram na velocidade do escoamento ou que causem flutuações no campo acústico. Desta forma, supõe-se que todas as características do escoamento são decorrentes do nível de turbulência e da geometria da região considerada.

Nas referências de língua inglesa este tipo de problema é chamado de "Cold Flow", no sentido que a liberação de calor de uma reação, caso exista, não irá influenciar o escoamento. Mesmo assim, gradientes de temperatura podem ser considerados pelo modelo apresentado.

A solução para a equação da onda não homogênea

$$\frac{\partial^2 p(t, \vec{x})}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (3.1)$$

sujeita às condições iniciais e de contorno de fluxo nulo (3.2 - 3.9), numa região espacial retangular

$$p(t, \vec{x}) = p_0(\vec{x}) \quad \text{em } t = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial t} = p_1(\vec{x}) \quad \text{em } t = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_1} = n_1(t, x_2, x_3) \quad \text{em } x_1 = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_1} = n_2(t, x_2, x_3) \quad \text{em } x_1 = l_1, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_2} = n_3(t, x_1, x_3) \quad \text{em } x_2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_2} = n_4(t, x_1, x_3) \quad \text{em } x_2 = l_2, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_3} = n_5(t, x_1, x_2) \quad \text{em } x_3 = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p(t, \vec{x})}{\partial x_3} = n_6(t, x_1, x_2) \quad \text{em } x_3 = l_3, \quad (3.9)$$

onde $p(t, \vec{x})$ a pressão, \vec{x} o vetor posição, t o tempo, c a velocidade do som e $f(t, \vec{x})$ uma função que representa a fonte sonora, pode ser obtida através de funções de Green de valor inicial [60], [61], [62], [63], [64].

Suponha que existe uma função de Green $h(t, \tau, \vec{x}, \vec{\xi})$, tal que

$$\frac{\partial^2 h(t, \tau, \vec{x}, \vec{\xi})}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 h(t, \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) = c^2 \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \delta(t - \tau), \quad (3.10)$$

onde $\delta(\vec{x} - \vec{\xi})$ é a distribuição conhecida como Função Delta de Dirac e tal que h satisfaz as condições de contorno homogêneas do fluxo. Então, a solução da equação

(3.1) é dada por:

$$\begin{aligned}
p(t, \vec{x}) &= \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} h(t, \vec{x}, \vec{\xi}) p_o(\vec{x}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} h(t, \vec{x}, \vec{\xi}) p_1(\vec{x}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&+ \int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) f(\tau, \vec{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau \\
&- c^2 \int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} n_1(\tau, \xi_2, \xi_3) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3 d\tau \\
&+ c^2 \int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_2} n_2(\tau, \xi_2, \xi_3) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_1=l_1} d\xi_2 d\xi_3 d\tau \\
&- c^2 \int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_1} n_3(\tau, \xi_1, \xi_3) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_2=0} d\xi_1 d\xi_3 d\tau \\
&+ c^2 \int_0^t \int_0^{l_3} \int_0^{l_1} n_4(\tau, \xi_1, \xi_3) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_2=l_2} d\xi_1 d\xi_3 d\tau \\
&- c^2 \int_0^t \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} n_5(\tau, \xi_1, \xi_2) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_3} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_3=0} d\xi_1 d\xi_2 d\tau \\
&+ c^2 \int_0^t \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} n_6(\tau, \xi_1, \xi_2) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_3} h(t - \tau, \vec{x}, \vec{\xi}) \right]_{\xi_3=l_3} d\xi_1 d\xi_2 d\tau
\end{aligned}$$

Na formulação espectral, a função de Green de valor inicial pode ser escrita na forma de uma expansão [65]

$$\begin{aligned}
h(t, \vec{x}, \vec{\xi}) &= \frac{8}{cl_1 l_2 l_3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ijk}} \text{sen}(\alpha_i x_1) \text{sen}(\beta_j x_2) \text{sen}(\gamma_k x_3) \quad (3.11) \\
&\times \text{sen}(\alpha_i \xi_1) \text{sen}(\beta_j \xi_2) \text{sen}(\gamma_k \xi_3) \text{sen}(c\lambda_{ijk}t),
\end{aligned}$$

que envolve os autovalores e autofunções correspondentes à condição de fluxo nulo.

Aqui

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l_1}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{l_2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l_3}, \quad \lambda_{ijk} = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_j^2 + \gamma_k^2}. \quad (3.12)$$

Na próxima seção apresenta-se outra aproximação analítica que faz a descrição do comportamento acústico através de funções de transferência construídas na forma matricial. A vantagem desta metodologia é que ela permite analisar especificamente o efeito de cada componente do sistema de combustão sobre o campo acústico.

3.2 Método da Matriz de Transferência

Esta seção descreve o chamado "método da matriz de transferência" que pode ser utilizado para analisar a resposta linear de sistemas acústicos. Do ponto de vista físico, os elementos acústicos podem ser divididos em 4 tipos:

1. Elementos de propagação de som.
2. Elementos que descrevem a junção de duas (ou mais) partes da geometria.
3. Elementos especiais: Um elemento para a chama e um elemento para o estreitamento do duto como ocorre no injetor do queimador.
4. Elementos que descrevem os contornos acústicos.

A forma geral da equação matricial para elementos dos tipos 1, 2 e 3 é:

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ M_5 & M_6 & M_7 & M_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_1^- \\ p_2^+ \\ p_2^- \end{bmatrix} = S \quad (3.13)$$

onde S é um termo fonte vetorial.

O número de graus de liberdade da matriz de elementos é 2, os quatro elementos no vetor p foram escritos desta forma para facilitar a construção do sistema matricial. A forma geral da equação matricial para um contorno acústico (Elemento do tipo 4) é:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_1^- \end{bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

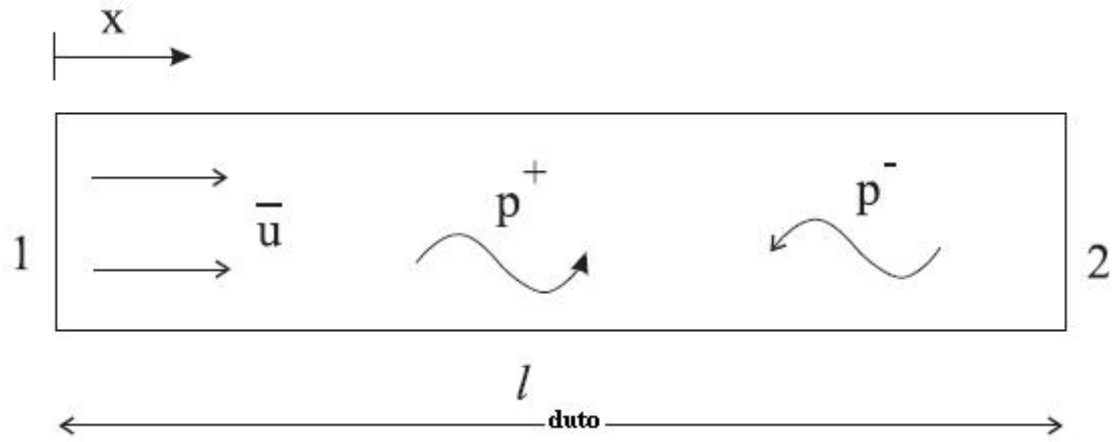


Figura 3.1: Definição das junções 1 e 2 do duto. Nestas junções o duto é acoplado a outros elementos acústicos.

Elemento para a propagação do som

Para um duto com seção transversal constante obtém-se uma equação matricial a partir da solução da equação da onda convectiva para uma onda harmônica, a saber:

$$p'(x, t) = \sum_{j=1}^n \left(p_j^+ e^{i(\omega_j t - k_j^+ x)} + p_j^- e^{i(\omega_j t + k_j^- x)} \right). \quad (3.15)$$

Esta equação matricial tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e^{-ik^+l} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & e^{ik^-l} & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_1^- \\ p_2^+ \\ p_2^- \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

As definições de 1, 2 e l são mostradas na figura (3.1), k^+ é definido como $k^+ = \omega/(c + \bar{u})$ e $k^- = \omega/(c - \bar{u})$.

Os efeitos viscosos são negligenciados na equação (3.16). A quantidade chave, que diz se é possível negligenciar o efeito viscoso, é o número de onda de

cisalhamento (s):

$$s = l \sqrt{\frac{\rho' \omega}{\mu}} \quad (3.17)$$

onde l é a escala de comprimento, ρ' é a flutuação da massa específica, ω é a frequência angular e μ é a viscosidade. Para um tubo circular l é o diâmetro do tubo. O número de onda de cisalhamento é a razão do diâmetro do tubo pela a espessura da camada limite viscosa.

Usa-se a equação da onda se o número de onda de cisalhamento é muito maior que a unidade ($s \gg 1$), o que significa que a espessura da camada limite é muito menor que o diâmetro do tubo.

Elemento de conexão

No encontro de dois elementos, o fluxo de massa acústico e o potencial acústico devem ser conservados devido à equação de conservação de massa unidimensional linearizada e integrada sobre a junção. Esta equação é:

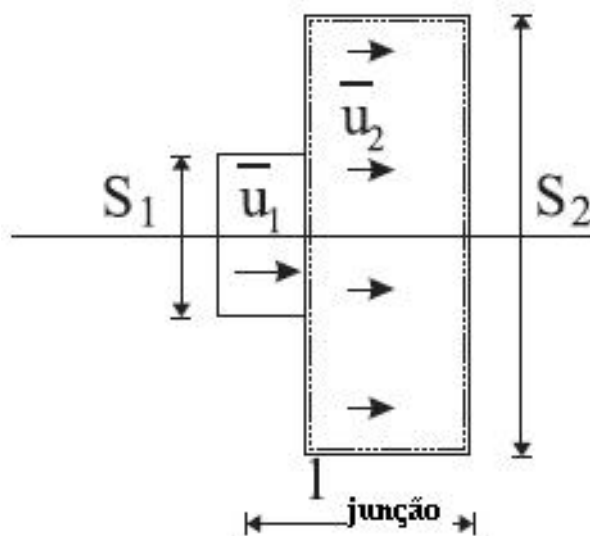


Figura 3.2: Desenho esquemático de um elemento acústico de junção.

$$i\omega \int_V \hat{\rho} dV + S_2 \left(\bar{\rho}_2 \hat{u}_2 + \bar{u}_2 \frac{\hat{p}_2}{c_2^2} \right) - S_1 \left(\bar{\rho}_1 \hat{u}_1 + \bar{u}_1 \frac{\hat{p}_1}{c_1^2} \right) = 0, \quad (3.18)$$

onde o volume (V) no primeiro termo no lado esquerdo pode ser estimado por $S_2 \cdot l_{jun}$.

A acústica é tratada como duas ondas de pressão que estão viajando em sentidos opostos; assim, a amplitude da velocidade acústica pode ser escrita como:

$$\hat{u} = \frac{p^+ - p^-}{\bar{\rho}c}. \quad (3.19)$$

Com esta equação para a velocidade acústica, a equação (3.18) pode ser reescrita como:

$$i\omega \left[\frac{\hat{p}}{c^2} \right] S_2 l_{jun} + \frac{S_2}{c_2} (p_2^+ (1 + Ma) + p_2^- (Ma - 1)) - \frac{S_1}{c_1} (p_1^+ (1 + Ma) + p_1^- (Ma - 1)) = 0 \quad (3.20)$$

A magnitude relativa do termo de acumulação (o primeiro termo) em relação aos outros termos é $\frac{\omega l_{jun}}{c} = k \cdot l_{jun} = \frac{2\pi l_{jun}}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda acústica. Em geral, o comprimento da junção é muito menor que o comprimento de onda acústico e o primeiro termo do lado esquerdo pode ser negligenciado.

Como a velocidade acústica é irrotacional, e os efeitos viscosos podem ser negligenciados, ela pode ser descrita pela equação de Bernoulli. A transformada de Fourier no tempo da equação de Bernoulli linearizada e unidimensional é usada para calcular a diferença de pressão acústica através da junção:

$$i\omega \bar{\rho} \left(\hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 \right) + (\bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \hat{u}_2 + \bar{u}_2^2 \hat{p}_2 - \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \hat{u}_1 + \bar{u}_1^2 \hat{p}_1) + \hat{p}_2 - \hat{p}_1 = 0, \quad (3.21)$$

onde ϕ é um escalar da velocidade potencial ($\nabla \phi = \vec{u}$).

O primeiro termo no lado esquerdo da equação (3.21) pode ser escrito como $i\omega \bar{\rho} l_{jun} \hat{u}_2$. A magnitude relativa deste termo é $\omega l_{jun}/c$. Este termo pode ser negligenciado para baixas frequências. A equação (3.21) estabelece que, na ausência

de um fluxo médio, a pressão acústica é constante em todo o domínio. Assim, a matriz para a junção de dois tubos é:

$$\begin{bmatrix} \frac{S_1}{c_1}(-1 - Ma_1) & \frac{S_1}{c_1}(1 - Ma_1) & \frac{S_2}{c_2}(1 + Ma_2) & \frac{S_2}{c_2}(Ma_2 - 1) \\ -1 - Ma_1 - Ma_1^2 & -1 + Ma_1 - Ma_1^2 & 1 + Ma_2 + Ma_2^2 & 1 + Ma_2 - Ma_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Neste texto, assume-se que nas junções o fluxo segue as expansões (ou contrações) do domínio de maneira suave. Isto só ocorre quando a área da seção transversal varia gradualmente. Para variações abruptas da área da seção transversal, na presença de fluxo médio, um novo elemento é necessário. O elemento "queimador", discutido a seguir, é capaz de descrever isso.

Elemento queimador

Os elementos padrão da acústica são derivados para o caso em que o fluxo médio afeta apenas a propagação do som. Esta aproximação não é válida para todas as partes do sistema de combustão. Especialmente para as partes com variações abruptas na geometria (expansões/contrações) ou em regiões onde a direção do fluxo varia (por exemplo, em *swirl flames*), o fluxo médio pode afetar a acústica fortemente.

Um componente típico em um sistema de combustão com tal comportamento é a entrada do queimador (onde há injeção do ar/combustível). Um elemento acústico especial será chamado de "elemento queimador". Este elemento é baseado na versão linearizada e integrada da equação de conservação de massa unidimensional e a equação de Navier-Stokes unidimensional. A equação unidimensional integrada para a conservação de massa é dada nas equações (3.18) e (3.20).

Assume-se que o bocal do queimador é curto. O termo de acumulação na equação da conservação de massa pode ser negligenciado. Assim, a equação de

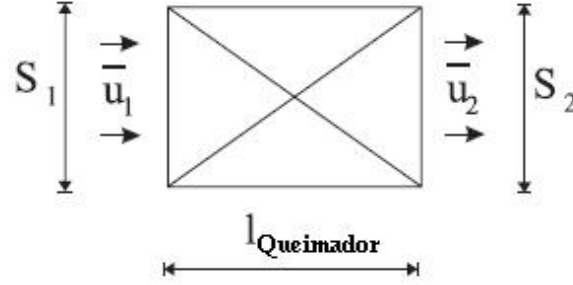


Figura 3.3: Figura esquemática de um elemento de um queimador.

Navier-Stokes unidimensional integrada é:

$$i\omega S_q l_q \bar{\rho} \hat{u}_q + 2\bar{\rho}_1 S_1 (\bar{u}_2 \bar{u}_1) \hat{u}_1 - \hat{F}(\hat{u}_q) = -(\hat{p}_2 S_2 - \hat{p}_1 S_1), \quad (3.23)$$

onde \hat{u}_q é a média espacial da flutuação da velocidade no queimador, $\bar{\rho}$ é a densidade média no queimador e $\hat{F}(\hat{u}_q)$ é a força que age sobre o fluxo no interior do queimador. Esta força pode ser causada por fricção viscosa, rotação do fluido ou expansão súbita. Aqui, assume-se que esta força é função apenas da flutuação da velocidade.

A função de transferência para o queimador é definida como:

$$H_q(\omega) = -\frac{\hat{p}_2 S_2 - \hat{p}_1 S_1}{\hat{u}_1}, \quad (3.24)$$

onde a flutuação da velocidade no queimador (\hat{u}_q) é escrita como a flutuação da velocidade da corrente livre no queimador ($\hat{u}_1 = \hat{u}_q$).

Assim, a matriz para o queimador é:

$$\begin{bmatrix} \frac{S_1}{c_1}(-1 - Ma_1) & \frac{S_1}{c_1}(1 - Ma_1) & \frac{S_2}{c_2}(1 + Ma_1) & \frac{S_2}{c_2}(Ma_2 - 1) \\ \frac{H_q}{\bar{\rho}_1 c_1} - S_1 & -\frac{H_q}{\bar{\rho}_1 c_1} - S_1 & S_2 & S_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Da forma integrada da equação de Navier-Stokes unidimensional, segue que a função de transferência do queimador irá apresentar o seguinte comportamento:

$$H_q(\omega) = i\omega S_q l_q \bar{\rho} + 2\bar{\rho}_1 S_1 (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) - \frac{d\hat{F}}{d\hat{u}}. \quad (3.26)$$

Elemento de chama

O comportamento acústico da chama em um sistema pode ser também representado por uma matriz de transferência. Existe uma distinção entre a chama como uma fonte de som e como um amplificador sonoro. Para a chama como amplificador, uma função de transferência para a chama deve ser introduzida.

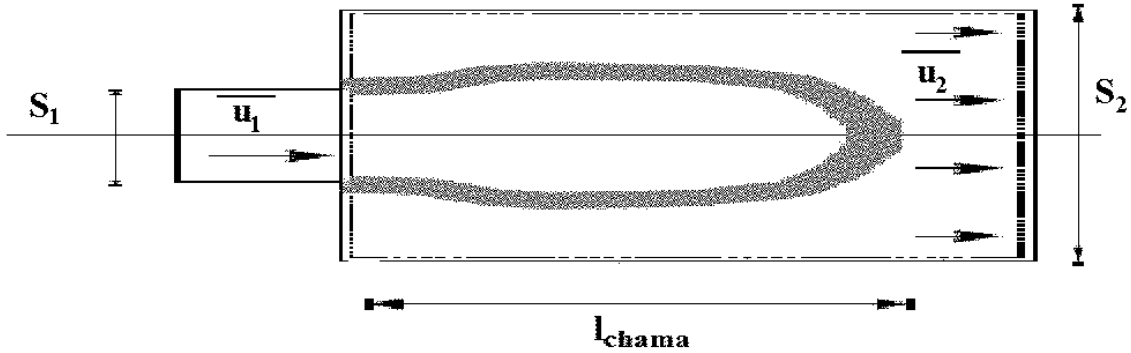


Figura 3.4: Figura esquemática de um elemento acústico de chama.

A matriz de transferência da chama é derivada a partir da integração da equação de conservação de massa unidimensional linearizada e também a partir da equação de Bernoulli linearizada, seguindo a figura 3.4. O volume de controle sobre o qual deve haver a integração é indicado na figura pela linha pontilhada. A equação de Bernoulli unidimensional linearizada é dada pela equação (3.21). A equação de conservação da massa é repetida aqui, pois a liberação de calor pela chama adiciona um termo fonte a esta equação. A versão integrada da equação de conservação de massa unidimensional linearizada é:

$$i\omega \hat{\rho} l_{ch} S_2 + S_2 \left(\bar{\rho}_2 \hat{u}_2 + \bar{u}_2 \frac{\hat{p}_2}{c_2^2} \right) - S_1 \left(\bar{\rho}_1 \hat{u}_1 + \bar{u}_1 \frac{\hat{p}_1}{c_1^2} \right) = \frac{\gamma - 1}{c^2} \hat{Q}. \quad (3.27)$$

O termo fonte \hat{Q} é a amplitude complexa da flutuação total da liberação de calor, definida por: $\hat{Q} = \int_V \hat{q} dV$. Se a região da chama for pequena em comparação com o comprimento de onda acústica ($l_{ch} \ll \lambda$), o primeiro termo no lado esquerdo das equações (3.21) e (3.27) pode ser negligenciado.

O termo fonte \hat{Q} é separado em duas partes: uma que descreve a geração de ruído (a chama como fonte - \hat{Q}_{rui}), e outra parte que descreve a chama como amplificador (\hat{Q}_{amp}). Em ambos os casos uma função de transferência para a chama deve ser usada. Anteriormente foi visto que a flutuação da liberação de calor pela chama é uma função que depende principalmente da flutuação da velocidade no interior do queimador. A função de transferência para a chama é, portanto, definida como:

$$\frac{\gamma - 1}{c^2} \hat{Q}_{amp} = H_{ch} \cdot \hat{u}_1 \quad (3.28)$$

Com esta função de transferência e a geração autônoma de ruído pela chama (Q_{rui}), obtém-se a seguinte equação matricial para a chama:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \left\{ \frac{S_1}{c_1}(-Ma_1 - 1) - \frac{H_{ch}}{\rho_1 c_1} \right\} & \left\{ \frac{S_1}{c_1}(-Ma_1 + 1) + \frac{H_{ch}}{\rho_1 c_1} \right\} & \frac{S_2}{c_2}(Ma_2 + 1) & \frac{S_2}{c_2}(Ma_2 - 1) \\ -1 - Ma_1 - Ma_1^2 & -1 + Ma_1 - Ma_1^2 & 1 + Ma_2 - Ma_2^2 & 1 - Ma_2 + Ma_2^2 \end{array} \right] \quad (3.29)$$

O vetor fonte da equação (3.13), neste caso, é:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\gamma - 1}{c^2} \hat{Q}_{rui} \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.30)$$

Elementos acústicos para contornos

Os contornos do queimador são classificados em 3 tipos: saída aberta, saída fechada (ou parede) e saída com estreitamento. Cada um desses casos é discutido a seguir.

Saída aberta - Em um contorno que represente uma saída aberta a pressão acústica total deve desaparecer. A pressão acústica total pode ser calculada

pela equação de Bernoulli. A condição de contorno para uma saída aberta é:

$$\hat{p}_{tot} = \hat{p} + \bar{\rho}\bar{u}\hat{u} = 0, \quad (3.31)$$

onde \bar{u} é a velocidade axial média na saída livre.

Na verdade, uma saída aberta não é a saída de um duto mas uma região à certa distância desta saída devido aos efeitos que ocorrem quando o fluido sai do duto. Portanto, um comprimento de correção deve ser introduzido. O comprimento de correção para tubo circular sem fluxo médio é [66]:

$$L = 0,61r_s, \quad (3.32)$$

onde r_s é o raio do tubo. Na presença de fluxo médio, uma correção extra deve ser usada. Se a condição de contorno aberto é usada na saída do tubo, esta correção é pequena e pode ser negligenciada. Se a condição de contorno aberto for para a entrada do tubo, esta correção extra pode ser grande. Aqui, a correção extra para o fluxo médio será desconsiderada.

A equação matricial para saída aberta é:

$$\begin{bmatrix} (1 + Ma)e^{-ik^+L} & (1 - Ma)e^{-ik^-L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Parede - Em uma parede, a acústica das flutuações da velocidade normal deve desaparecer. A condição de contorno pode ser expressa como:

$$\hat{u} = \frac{1}{\bar{\rho}c}(p^+ - p^-) = 0. \quad (3.34)$$

Isto resulta na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = 0. \quad (3.35)$$

Saída com estreitamento - Se o fluxo médio na saída passa por um estreitamento devido a um bocal convergente, o fluxo de massa deve ser constante

na saída. A acústica da flutuação do fluxo de massa deve também ser nula:

$$\hat{\rho}\bar{u} + \bar{\rho}\hat{u} = p^+(1 + Ma) - p^-(1 - Ma) = 0 \quad (3.36)$$

Esta equação deve ser avaliada no início do bocal ($Ma \ll 1$). Isto resulta na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 + Ma & Ma - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = 0. \quad (3.37)$$

Se não existe fluxo médio ($Ma = 0$), esta equação é a mesma para a saída fechada.

3.2.1 Matriz de Descrição do Sistema

Os diferentes elementos do sistema como a chama, o queimador, as junções e as saídas, devem ser combinados para se obter a matriz de descrição do sistema. A forma geral para matrizes 2×2 , as quais descrevem a propagação do som, e as matrizes para uma chama e um queimador são dadas pela equação (3.13). Estas matrizes possuem os elementos de M_1 a M_8 . A matriz 1×2 que descreve o contorno acústico é dada na equação (3.14). Essa matriz possui os elementos E_1 e E_2 .

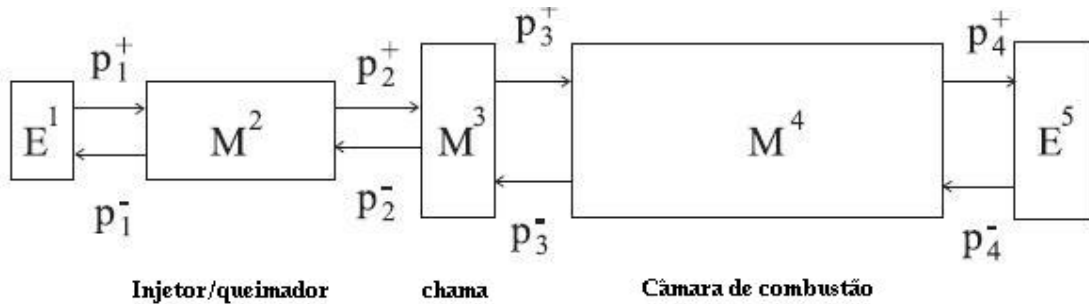


Figura 3.5: Figura esquemática de um sistema acústico de um equipamento de combustão.

Como ilustração da união de diferentes componentes, mostrado na figura (3.5), um exemplo será discutido. O sistema consiste de uma câmara de combustão (M^4) com uma chama (M^3). Na saída da câmara de combustão existe um contorno acústico (E^5). A corrente livre da câmara de combustão é alimentada por um tubo (injetor) (M^2), que possui certo diâmetro. No fim da corrente de injeção existe outro elemento acústico de terminação (E_1). A equação matricial para a combinação desses diferentes sistemas é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} E_1^1 & E_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 & M_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_5^2 & M_6^2 & M_7^2 & M_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 & M_4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_5^3 & M_6^3 & M_7^3 & M_8^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1^4 & M_2^4 & M_3^4 & M_4^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5^4 & M_6^4 & M_7^4 & M_8^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1^5 & E_2^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_1^- \\ p_2^+ \\ p_2^- \\ p_3^+ \\ p_3^- \\ p_4^+ \\ p_4^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma-1}{c^2} \hat{Q}_{rui} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.2.2 Solução da equação matricial

A solução da equação (3.38) pode ser separada em duas partes:

1. a solução da equação homogênea ($\hat{Q}_{rui} = 0$);
2. e a solução não homogênea ($\hat{Q}_{rui} \neq 0$).

A solução da equação não homogênea nos dá a resposta do sistema devido ao termo fonte, o que não será visto aqui.

A solução da equação matricial referente a parte homogênea, se existir, deve descrever as ondas sonoras do sistema que não foram geradas por fontes

externas. A equação matricial (3.38) possui soluções para a equação homogênea se o determinante da matriz não é igual a zero. As frequências para as quais o determinante é igual a zero são as autofrequências do sistema.

Em geral, as autofrequências possuem uma parte real e outra imaginária ($\omega = \omega_{Re} + i\alpha$). A parte real (ω_{Re}) nos dá a frequência de oscilação em radianos por segundo, a parte imaginária (α) nos dá a taxa de crescimento ($1/s$). Ambas as partes das autofrequências podem ser determinadas a partir da solução da equação para o determinante (o qual irá possuir parte real e imaginária).

O sinal de α indica a ocorrência de instabilidade: se α é positivo a oscilação irá decrescer com o tempo e a instabilidade não irá existir nesta frequência. Se α é negativo a amplitude da oscilação irá aumentar exponencialmente com o tempo e irá existir instabilidade.

A desvantagem do método do determinante é que ele exige que seja encontrada a solução para a equação do determinante, o que em geral é muito difícil. Este é o caso onde as matrizes de transferência são conhecidas apenas para um número discreto de frequências, por exemplo, se elas são conhecidas a partir das medições.

Um outro método é, portanto, utilizado para estudar o comportamento do sistema acústico. Este método baseia-se no critério de Nyquist da teoria de controle. Este método é muito semelhante ao utilizado por Deuker [67] para analisar a acústica de uma instalação de combustão.

O critério de Nyquist é usado para estudar a estabilidade de sistemas com retorno em ciclos. Um equipamento de combustão também pode ser tratado como um sistema desse tipo. A onda sonora é gerada pela chama (p_1^+), propaga-se até o final da câmara de combustão (p_2^+) e é refletida na saída da câmara de combustão (p_2^-). A onda sonora refletiva viaja pelo fluxo até a chama (p_1^-) onde afeta, junto com (p_1^+) a geração de som devido à chama. Assim, pode-se dividir a

matriz de transferência que descreve a propagação do som em um certo número de funções de transferência unidimensionais.

Portanto, considerando um sistema aberto (sem retorno), a função de transferência é dada por:

$$H_{abe}(\omega) = \frac{\bar{p}_{2b}}{\bar{p}_{2a}}. \quad (3.39)$$

Porém, para um sistema fechado (com retorno), a função de transferência pode ser descrita por:

$$H_{fec}(\omega) = \frac{H_{abe}}{1 - H_{abe}}. \quad (3.40)$$

No próximo capítulo é feita a descrição do sistema de equações utilizado para modelar o problema de acústica da chama através de métodos numéricos. A vantagem em se utilizar soluções numéricas é a possibilidade de considerar uma quantidade maior de termos os quais descrevem outros tipos de comportamentos não lineares. A análise dos comportamentos não lineares é extremamente complicada quando se utiliza apenas técnicas analíticas como as que foram apresentadas neste capítulo.

4 DEFINIÇÃO DO MODELO

Este capítulo é dedicado à descrição do modelo que é utilizado para determinar, numericamente, o campo acústico gerado por uma chama confinada no interior de uma câmara de combustão.

4.1 Definições iniciais

Nesta seção são apresentadas as definições de algumas expressões que foram, e que serão, utilizadas ao longo do texto. Algumas destas expressões são clássicas e estão bem estabelecidas em algumas áreas, enquanto outras expressões não são tão comuns e precisam ser esclarecidas antes da apresentação do modelo.

Definição 1. *Denomina-se **espécie química** qualquer átomo, íon ou molécula a qual não se queira fazer uma referência específica.*

Exemplos de espécies químicas são o gás oxigênio (O_2), o dióxido de carbono (CO_2) e o radical hidroxila (OH^-).

Definição 2. *Denomina-se **reação química** a alteração da composição química de uma ou mais espécies químicas.*

Costuma-se representar uma reação química por uma equação que representa as alterações ocorridas nas espécies. Por exemplo, a reação de oxidação (queima) do gás hidrogênio (H_2) é representada pela equação



onde os números que aparecem na frente de cada espécie química são chamados de coeficientes estequiométricos e servem para indicar as quantidades necessárias de cada espécie para que a reação ocorra de forma completa, isto é, sem que falte ou sobre algum componente.

Definição 3. *Combustão* é um tipo especial de reação química de oxirredução onde pelo menos uma das espécies age como oxidante (recebe elétrons), em geral esta espécie química é o oxigênio ou moléculas que possuam muito oxigênio em sua composição, enquanto outras espécies agem como redutores (doam elétrons).

Costuma-se classificar as reações de combustão, por sua velocidade, em reações **lentas**, **vivas** e **explosivas** [68], [69]. Um exemplo de reação de combustão lenta é a formação de ferrugem. Neste texto, porém, trata-se apenas de reações consideradas vivas (velocidade de reação $\geq 0,4\text{cm/s}$) e reações explosivas (velocidade de reação $\geq 340\text{m/s}$).

Definição 4. *Escoamento* é o movimento de um fluido (líquido ou gás) em uma região do espaço.

Quando existir alguma região do espaço que contenha fluido mas esse fluido não apresente movimento ($\vec{u} = 0$) diz-se que este fluido está **estagnado** (parado). Embora possam ser transmitidas ondas acústicas por fluidos estagnados, neste texto trata-se apenas de situações onde o fluido encontra-se com algum tipo de movimento, isto é, quando há escoamento.

Definição 5. *Turbulência* é um regime de escoamento onde o campo de velocidades varia significativamente e de forma irregular no espaço e no tempo [70].

O conceito de turbulência tem evoluído ao longo do tempo. Inicialmente, qualquer escoamento que houvesse a presença de vórtices era considerado turbulento. Atualmente, costuma-se caracterizar a turbulência por seu comportamento aleatório em relação ao campo de velocidades. Para as finalidades desse texto optou-se pela definição (5.1) dada por Stephen B. Pope.

Definição 6. *Chama* é a região do espaço onde efetivamente ocorre a reação de combustão.

A chama ocorre quando oxidante e combustível (agente redutor) estão na proporções corretas e com energia suficiente para iniciar a reação. Em um escoamento turbulento a região do espaço onde esses critérios são satisfeitos pode variar ao longo do tempo. É comum referir-se a esta região como a "superfície da chama" embora não exista ali realmente uma superfície. Pode-se classificar uma chama, com base na forma como os reagentes se encontram antes do início da reação, em chamas pré-misturadas e não pré-misturadas (também chamadas de chamas difusivas).

Definição 7. *Chama difusiva é o tipo de chama que ocorre quando os reagentes (combustível e oxidante) entram em contato apenas na região da reação.*

O adjetivo "difusiva" refere-se ao fato de que as principais características desse tipo de chama são determinadas pelos efeitos de difusão dos gases envolvidos no processo. A montagem de um queimador que utilize uma chama difusiva pode se basear no sistema chamado de "coflow", onde jatos axiais dos reagentes são inseridos na câmara de combustão na mesma direção e sentido, ou no sistema chamado de "counterflow", onde os jatos são inseridos na câmara na mesma direção mas em sentidos contrários. Neste texto considera-se apenas queimadores operando no sistema *coflow*.

4.2 Modelo químico

Para definir o modelo a ser utilizado, considera-se que o escoamento ocorre no interior de uma câmara de combustão tridimensional, conforme mostra figura a (4.1). Esta câmara possui comprimento L na direção do eixo x , largura e altura b nas direções dos eixos y e z . A letra D representa o diâmetro do injetor de combustível.

Para determinar a taxa de produção e consumo das espécies químicas, em geral, as equações químicas que descrevem as taxas de reação são simplificadas de

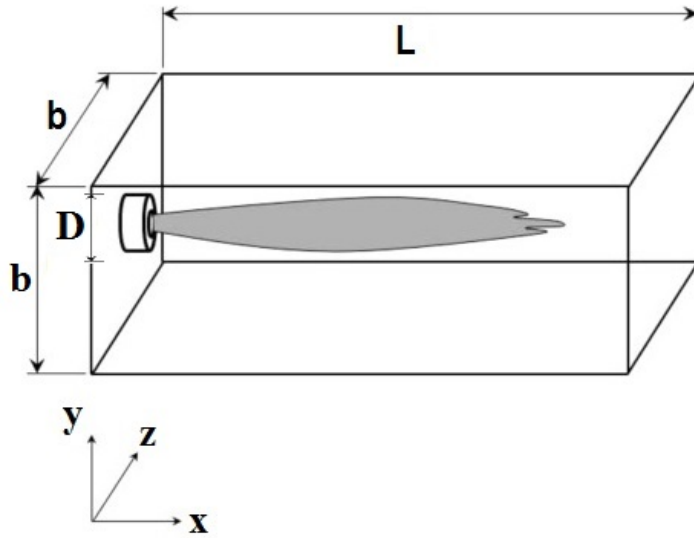


Figura 4.1: Representação esquemática da câmara de combustão.

modo que a combustão seja descrita por uma ou duas equações, dependendo do combustível. Mesmo assim, o uso direto dessas equações num modelo complexo implica em alto custo computacional, pois é necessária a implementação de uma equação convectiva-difusiva para cada espécie química. Além disso, o sistema de equações resultante normalmente é *stiff*, isto é, as aproximações numéricas das soluções lentas são muito perturbadas por soluções rápidas próximas [71]. Isso gera a necessidade de cuidados adicionais quanto a precisão dos dados e quanto ao uso de métodos numéricos específicos.

Adicionalmente, a escala de tempo das reações é extremamente pequena e difere, por várias ordens de magnitude, da escala de tempo do escoamento. Portanto, para reduzir o custo computacional do problema químico e facilitar a implementação de um método numérico utiliza-se a definição de *fração de mistura*, Z , a qual varia em um intervalo de 0 a 1 e é dada por:

$$Z = \frac{\nu Y_F - Y_{O_2} + Y_{O_2}^{in}}{\nu Y_F^{in} + Y_{O_2}^{in}} \quad (4.2)$$

onde ν é a razão de massa estequiométrica, Y_F é a fração de massa local do combustível, Y_F^{in} é a fração de massa inicial do combustível, Y_{O_2} é a fração de massa local do oxidante e $Y_{O_2}^{in}$ é a fração de massa inicial do oxidante.

Isso permite que apenas a equação da fração de mistura seja resolvida numericamente e que o comportamento químico seja deduzido a partir da distribuição desta variável ao longo do domínio.

Assume-se que a chama ocorre onde a variável Z atinge seu valor estequiométrico. Este valor pode ser calculado por:

$$Z_{st} = \left(1 + \frac{\nu Y_F^{in}}{Y_{O_2}^{in}} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

Na realidade existe uma faixa estreita de valores próximos ao Z_{st} onde a chama ocorre. Desta forma, o conjunto de equações pode ser transformado do espaço físico para o espaço da fração de mistura usando as seguintes transformações:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial Z_k} + \frac{\partial Z}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (4.5)$$

Assim, o conjunto de equações resulta em:

Equação para fração de massa

$$\frac{\partial Y_k}{\partial t} - \frac{a\chi}{2Le_k} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial Z^2} = \pm \nu_k Da Y_F Y_O e^{-Ze/T} \quad (4.6)$$

Equação para a temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{a\chi}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = \nu_k He Da Y_F Y_O e^{-Ze/T} \quad (4.7)$$

onde Y_k é a fração de massa da espécie k , t é o tempo na forma adimensional, χ é a taxa de dissipação escalar ($\chi \sim 10^0$), Le_k é o número de Lewis de cada espécie k ($Le \approx 1$), Z é a fração de mistura, ν_k é o coeficiente estequiométrico da espécie k , Da é o número de Damköler ($Da \sim 10^2$), Ze é o número de Zel'dovich ($Ze \sim 10^0$), T é a temperatura e $a = 2\Delta Z Z_{st}(1 - Z_{st})$. A liberação de calor é $He \sim 10$.

As equações (4.6 - 4.7) podem ser resolvidas analiticamente e suas soluções são utilizadas para determinar as distribuições das frações de massa das espécies químicas e também o campo de temperatura.

Para obter as soluções analíticas das equações (4.6 - 4.7) aproxima-se o termo exponencial delas conforme proposto por Ashurst [72]:

$$e^{-Ze/T} \sim e^{-Ze \frac{T_{ad}-T}{T_{ad}}} \sim e^{-Ze \frac{T_{ad}-(\alpha+\beta Z)}{T_{ad}}} \quad (4.8)$$

onde, para $Z < Z_{st}$, $\alpha = T_0$ e $\beta = \frac{T_{ad}-T_0}{Z_{st}}$, e para $Z \geq Z_{st}$, $\alpha = T_0 + \frac{T_{ad}-T_0}{1-Z_{st}}$ e $\beta = \frac{T_{ad}-T_0}{1-Z_{st}}$. Aqui T_0 é a temperatura inicial e T_{ad} é a temperatura adiabática da chama.

A seguir, conforme apresentado por Carpes [73], para o caso $Z \geq Z_{st}$, a equação (4.6) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial Y_k}{\partial t} = A \frac{\partial^2 Y_k}{\partial Z^2} + B e^{CZ}, \quad (4.9)$$

onde $A = \frac{\alpha \chi}{2Le_k}$, $B = \nu_k Da Y_F Y_O e^{-Ze \frac{T_{ad}-\alpha}{T_{ad}}}$ e $C = -\frac{\beta Ze}{T_{ad}}$ são constantes.

Para a fração de massa de um dos produtos, obtém-se o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\frac{\partial Y_k}{\partial t} = A \frac{\partial^2 Y_k}{\partial Z^2} + B e^{CZ}, \quad Z \in [0, 1], t \in [0, \infty) \quad (4.10)$$

$$Y_k(Z, 0) = 0 \quad (4.11)$$

$$Y_k(0, t) = 0 \quad (4.12)$$

$$Y_k(1, t) = 0 \quad (4.13)$$

Supondo que $Y_k(Z, t) = w(Z, t) + \phi(Z)$, a solução de estado estacionário $\phi(Z)$ deve satisfazer a equação (4.14) onde as condições de contorno são $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 0$:

$$A \frac{d^2 \phi(Z)}{dZ^2} + B e^{CZ} = 0, \quad (4.14)$$

a qual tem a seguinte solução:

$$\phi(Z) = \frac{B}{AC^2} [1 - e^{CZ} + (-1 + e^C)Z]. \quad (4.15)$$

Para obter $w(Z, t)$ considere que

$$Y(Z, t) = w(Z, t) + \phi(Z), \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial Y_k}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 Y_k}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} + \frac{d^2 \phi(Z)}{dZ^2}. \quad (4.18)$$

Após substituir as equações (4.16), (4.17) e (4.18) em (4.10), resulta

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} + A \phi''(Z) + B e^{CZ} = A \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}, \quad (4.19)$$

com condições de contorno,

$$w(0, t) = Y_k(0, t) - \phi(0) = 0, \quad (4.20)$$

$$w(1, t) = Y_k(1, t) - \phi(1) = 0, \quad (4.21)$$

$$w(Z, 0) = Y_k(Z, 0) - \phi(Z) = -\phi(Z). \quad (4.22)$$

Portanto, o novo problema é

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}, \quad (4.23)$$

com condições inicial e de contorno dadas por

$$w(0, t) = 0, \quad (4.24)$$

$$w(1, t) = 0, \quad (4.25)$$

$$w(Z, 0) = -\phi(Z). \quad (4.26)$$

Supondo que $w(Z, t) = \mathcal{Z}(z)\mathcal{T}(t)$, então a equação (4.23) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis obtendo-se, assim, para $Z > Z_{st}$ a seguinte solução analítica para a equação (4.6):

$$Y_k(Z, t) = \frac{B}{AC^2} [1 - e^{CZ} + (-1 + e^C)Z] + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-An^2\pi^2 t} \sin(n\pi Z), \quad (4.27)$$

onde $A = \frac{\alpha X}{2Le_k}$, $B = \nu_k Da Y_F Y_O e^{-Ze \frac{T_{ad}-\alpha}{T_{ad}}}$ e $C = -\frac{\beta Z e}{T_{ad}}$ são constantes e C_n são os coeficientes de Fourier dados por:

$$C_n = \frac{2B}{An\pi} \left(\frac{-1 + (-1)^n e^C}{C^2 + n^2\pi^2} \right). \quad (4.28)$$

Para $Z < Z_{st}$ as equações (4.6) possuem como solução:

$$\begin{aligned} Y_k(Z, t) &= \frac{B}{AC^2} \left[-e^{CZ} + \frac{Z}{Z_{st}}(-1 + e^{CZ_{st}}) + 1 \right] \\ &+ \epsilon \frac{Z}{Z_{st}} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-A \frac{n^2\pi^2}{Z_{st}^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{Z_{st}} Z\right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $B = \nu_f Da Y_F Y_O e^{-Ze \frac{T_{ad}-T_0}{T_{ad}}}$, $C = \frac{Ze(T_{ad}-T_0)}{Z_{st} T_{ad}}$, ϵ é a condição de contorno para $Y_k(Z_{st}, t)$ e C_n é:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2n\pi B}{AC^2 Z_{st}^2} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1} e^{CZ_{st}}}{C^2 + \left(\frac{n\pi}{Z_{st}}\right)^2} \right) + \frac{2(-1)^n}{n\pi AC^2} (\epsilon AC^2 + B(-1 + e^{CZ_{st}})) \\ &+ \frac{2B}{n\pi AC^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando a mesma técnica obtém-se a solução para a equação da temperatura (4.7). Para $Z \geq Z_{st}$ a solução é

$$\begin{aligned} T(Z, t) &= \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}C^2} \left[-e^{CZ} + (-1 + e^C)Z + 1 \right] + 1 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mathcal{A}n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{Z_{st}} Z\right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $\mathcal{A} = \frac{\alpha X}{2}$, $\mathcal{B} = \nu_F He Dae^{-Ze \frac{T_{ad}-\alpha}{T_{ad}}}$ e $C = \frac{-Ze}{T_{ad}} \left(\frac{T_{ad}-T_0}{1-Z_{st}} \right)$ são constantes, e

$$C_n = \frac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A}n\pi} \left(\frac{-1 + (-1)^n e^C}{C^2 + n^2\pi^2} \right) + 2 \left(\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \right). \quad (4.32)$$

Para o caso $Z < Z_{st}$ tem-se

$$\begin{aligned} T(Z, t) &= \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}C^2} \left[-e^{CZ} + \frac{Z}{Z_{st}}(-1 + e^{CZ_{st}}) + 1 \right] + 1 + (\gamma - 1) \frac{Z}{Z_{st}} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mathcal{A} \frac{n^2\pi^2}{Z_{st}^2} t} \sin(n\pi Z), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2n\pi\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}^\epsilon Z_{st}^2} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1} e^{\mathcal{C}Z_{st}}}{\mathcal{C}^2 + \left(\frac{n\pi}{Z_{st}}\right)^2} \right) \\
&+ \frac{2(-1)^n}{n\pi\mathcal{A}\mathcal{C}^2} (\gamma\mathcal{A}\mathcal{C}^2 + \mathcal{B}(-1 + e^{\mathcal{C}Z_{st}})) \\
&+ \frac{2\mathcal{B}}{n\pi\mathcal{A}\mathcal{C}^2} ((-1)^n - 1) - \frac{2}{n\pi}, \tag{4.34}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \nu_F Da He Y_F Y_O e^{-Z e \frac{T_{ad} - T_0}{T_{ad}}}, \mathcal{C} = \frac{Z e (T_{ad} - T_0)}{Z_{st} T_{ad}} \text{ e } \gamma = T(Z, t).$$

A próxima seção apresenta as equações do modelo que são resolvidas numericamente. Para obter essas soluções utiliza-se a técnica de Simulação de Grandes Escalas (LES na sigla em inglês). Portanto, antes de apresentar o modelo é feita uma breve descrição das principais características dessa técnica.

4.3 Modelo LES para o escoamento

Segundo Lesieur [74] "a turbulência é um processo tridimensional complexo que se caracteriza por uma distribuição contínua de escalas de flutuação". Pode-se dizer que as maiores escalas de turbulência caracterizam-se pelas forças de inércia e apresentam efeitos viscosos menores [75], enquanto que nas pequenas escalas o efeito da viscosidade aumenta.

É possível a utilização das equações de Navier-Stokes, diretamente, para fazer a descrição de quaisquer escoamentos (laminares ou turbulentos), mas para que suas soluções numéricas sejam suficientemente precisas, principalmente no caso turbulento, torna-se necessário a utilização de malhas computacionais extremamente finas, o que resulta em alto custo computacional. Muitas vezes esse custo torna proibitiva a obtenção de soluções diretas mesmo para problemas considerados pequenos.

Nas últimas duas décadas vem se desenvolvendo e popularizando o uso da técnica de simulação **LES** (*Large Eddy Simulation*), a qual calcula diretamente

os efeitos da turbulência nas escalas consideradas grandes e faz o uso de modelos para descrever o comportamento nas escalas menores [76].

A definição do que são pequenas e grandes escalas é feita em função da malha computacional que pode ser utilizada. Para certa malha com espaçamento $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, por exemplo, todo vórtice que tiver um tamanho inferior a esse espaçamento não poderá ser calculado diretamente. Portanto esse vórtice, e os menores, são definidos como "pequena escala" e seus efeitos são determinados através de modelos. As demais estruturas são consideradas grandes escalas e são calculadas diretamente. A definição da malha computacional que será utilizada depende da disponibilidade de hardware e do tempo de processamento considerado aceitável para determinado problema.

Na técnica **LES** as estruturas do fluxo são sempre definidas por valores filtrados de velocidade, pressão, etc [74]. É comum utilizar-se um filtro espacial chamado de média de Reynolds e denotado por \bar{f} , para certa variável f . Em geral, este filtro é definido como uma convolução da variável analisada com uma função filtro $\delta > 0$ [76]. Neste texto, o filtro ficará determinado, implicitamente, pelo espaçamento da malha [77]. Desta forma, nenhuma outra função filtro específica precisará ser utilizada.

Portanto, para realizar a implementação numérica das equações propostas, cada variável f precisa ser decomposta da seguinte forma:

$$f = \bar{f} + f', \quad (4.35)$$

onde \bar{f} é o valor médio da variável f e f' é a flutuação que a variável apresenta em torno dessa média. No caso da acústica, quando a variável analisada é a velocidade (\vec{u}), denomina-se $\bar{\vec{u}}$ como a velocidade do escoamento (velocidade média ou filtrada) e \vec{u}' é denominada **velocidade acústica**, uma vez que se supõe que a flutuação na velocidade é decorrente de fenômenos acústicos. Da mesma forma, \bar{p} é a pressão média (ou filtrada) e p' é a pressão acústica.

Além da média de Reynolds, é comum a utilização da média de Favre em problemas que envolvem combustão. A média Favre é obtida em relação à massa específica denotada por \tilde{f} , ou seja, dada uma função f usa-se a seguinte notação para o valor filtrado e sua flutuação:

$$f = \tilde{f} + f'' \quad (4.36)$$

As médias de Reynolds e Favre relacionam-se da seguinte forma:

$$\overline{\rho f} = \bar{\rho} \tilde{f}, \quad (4.37)$$

$$\overline{\rho f f} = \bar{\rho} \tilde{f} f. \quad (4.38)$$

Assim, o resultado da aplicação da média Reynolds sobre as variáveis da equação de conservação da quantidade de movimento, na forma indicial, é o seguinte:

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j}, \quad (4.39)$$

e usando as relações (4.35), (4.36), (4.37) e (4.38), tem-se

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j}, \quad (4.40)$$

que simplificando, resulta em

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)]. \quad (4.41)$$

Este tipo de abordagem exige um fechamento, isto é, necessita-se de equações adicionais para que todas as variáveis possam ser determinadas. Neste caso, o termo $\bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ precisa ser modelado [78]. O termo $\bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ é normalmente chamado de tensor de Reynolds e denotado por (σ_{ij}^{sgs}) . Utilizando a hipótese de Boussinesq [79], pode-se modelar esse termo através da equação

$$\sigma_{ij}^{sgs} = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = 2\nu_t \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (4.42)$$

onde

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.43)$$

e ν_t é chamado de viscosidade turbulenta.

A viscosidade turbulenta não é um parâmetro físico real, é apenas um artifício matemático para descrever os efeitos das menores escalas que não podem ser calculados diretamente através da simulação. Dentre os diversos modelos que podem ser utilizados para atribuir valor à viscosidade turbulenta optou-se, neste trabalho, pelo modelo de Smagorinsky que é dado por

$$\nu_t = (C_s \delta)^2 |\tilde{S}_{ij}|, \quad (4.44)$$

onde $|\tilde{S}_{ij}| = (2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{1/2}$, δ é o tamanho do filtro, que no caso de uma malha uniforme é dado por $\delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$, e C_s é a constante de Smagorinsky. Neste trabalho é utilizado o valor de $C_s = 0.2$.

As equações diferenciais que foram resolvidas numericamente passaram pelo processo de filtro de Reynolds e Favre. Assim, as equações para os valores médios da variáveis velocidade e pressão ($\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{p}}$) são, desta forma, resolvidos previamente para determinar o comportamento geral do escoamento. O modelo que permite determinar esses valores é dado por [80]:

$$\frac{(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma_{ij}^{sgs}}{\partial x_j} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

A velocidade acústica e a pressão acústica são determinados com base nestas soluções seguindo a ideia de Lighthill [3] de usar um escoamento padrão como referência.

O conjunto de equações que possibilita o cálculo das flutuações de velocidade e pressão, bem como a equação para a fração de mistura, é o seguinte [81], [82], [83]:

Equação para a fração de mistura

$$\rho \frac{\partial Z}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} = \rho D_k \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.47)$$

Equação para a conservação de massa

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}') = q_c, \quad (4.48)$$

Equação para conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}'}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}') + \nabla \left(\frac{p'}{\bar{\rho}} \right) = q_m, \quad (4.49)$$

Equação para a massa específica

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = q_e, \quad (4.50)$$

onde

$$q_c = -\nabla \cdot (\rho' \bar{\mathbf{u}}') \quad (4.51)$$

$$q_m = \nabla p \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\nabla \bar{p} + \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} c^2 - c^2 \right) \nabla \bar{\rho} \right] \quad (4.52)$$

$$+ \left[\frac{\nabla \tau}{\rho} + \sum_k Y_k f_k - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mathbf{u}}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}' - (\boldsymbol{\omega}' \times \bar{\mathbf{u}}) - (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{u}}') \right],$$

$$q_e = -\frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} + \frac{p - \bar{p}}{\rho c^2} \right) \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\alpha}{c_p} \left(S_{IA} + S_{IB} + S_{IC} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) \right\} \right] \quad (4.53)$$

$$- \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \rho_e) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{p} - \frac{p}{c^2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \left(\frac{\nabla \bar{p}}{\bar{p}} - \frac{\nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right).$$

Ainda tem-se que:

- S_{IA} é descrito pela taxa de liberação de calor, isto é:

$$S_{IA} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial h}{\partial Y_n} \cdot \omega_n \quad (4.54)$$

- O termo S_{IB} é descrito pela expansão volumétrica devido a reação não isomolar, ou seja:

$$S_{IB} = \frac{\partial h}{\partial \rho} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial Y_n} \cdot \omega_n \right) \quad (4.55)$$

- O termo S_{IC} é definido em função dos efeitos de difusão das espécies, isto é:

$$S_{IC} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial h}{\partial Y_n} \nabla \cdot J_n \quad (4.56)$$

Nas equações (4.48 - 4.50) utiliza-se a seguinte notação: ρ' é a flutuação da massa específica, t é o parâmetro temporal, \bar{u} é a velocidade média do escoamento, \bar{u}' é a velocidade acústica, p' é a pressão acústica, $\bar{\rho}$ é a densidade média, ρ' é a flutuação de densidade, c é a velocidade do som, τ é o tensor das tensões, Y_k é a fração de massa da espécie química k , f_k é uma força agindo sobre a espécie k , h é a entalpia, s é a entropia, ω é a vorticidade, c_p é o calor específico à pressão constante, $\nabla \cdot q$ é a difusão de calor, w_n é a taxa de produção da espécie n , J_n é o fluxo do espécie n por difusão e α , γ e ρ_e são, respectivamente:

$$\gamma = \frac{c^2 \rho}{p}, \quad (4.57)$$

$$\alpha = \frac{c_p(\gamma - 1)}{c^2}, \quad (4.58)$$

$$\rho_e = (\rho - \bar{\rho}) - \frac{p - \bar{p}}{c^2}, \quad (4.59)$$

onde ρ_e é chamado de excesso de densidade.

As equações (4.48 - 4.50) são conhecidas como **Equações para a Perturbação Acústica de Escoamentos Reativos** (ou **APE-RF**, na sigla em inglês) e tem sido adaptadas por diversos autores para a análise do campo acústico gerado por diversos tipos de chammas nas mais variadas configurações. Alguns termos fonte podem ser omitidos ou inseridos para levar em conta alguma característica específica do escoamento.

4.4 Procedimento de Discretização

Para prever o ruído gerado por um escoamento é essencial a utilização de métodos numéricos e esquemas computacionais de alta ordem e com características de

baixa dispersão e dissipação [84]. Isso é necessário pois a geração aerodinâmica do som é um processo muito pouco eficiente, no sentido que, apenas uma fração muito pequena da energia termoquímica e cinética, de um escoamento reativo e turbulento, é transformada em som. Dessa forma, a utilização de um esquema numérico com baixa precisão, ou grande dissipação, pode resultar em completa perda de informações sobre os fenômenos acústicos.

Neste trabalho, utiliza-se um método de diferenças finitas de quarta ordem para discretizar o conjunto de equações. Considerando uma malha igualmente espaçada, a discretização das derivadas de primeira ordem é feita da seguinte forma, para uma função f [85]:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \left(\frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} \right) + \mathcal{O}(h)^4. \quad (4.60)$$

Para as derivadas de segunda ordem utiliza-se o seguinte esquema de diferenças finitas

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \left(\frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} \right) + \mathcal{O}(h)^4. \quad (4.61)$$

onde h é o espaçamento da malha na direção considerada e f representa uma das variáveis do escoamento.

Todas as derivadas espaciais são discretizadas utilizando-se os esquemas (4.60) e (4.61) nos pontos interiores do domínio. Nos contornos utiliza-se as seguintes aproximações:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \left(\frac{25f_{i-1} - 48f_{i-2} + 36f_{i-3} - 16f_{i-4} + 3f_{i-5}}{12h} \right) + \mathcal{O}(h)^4. \quad (4.62)$$

Para as derivadas de segunda ordem utiliza-se o seguinte esquema de diferenças finitas

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \left(\frac{35f_{i-1} - 104f_{i-2} + 114f_{i-3} - 56f_{i-4} + 11f_{i-5}}{12h^2} \right) + \mathcal{O}(h)^3. \quad (4.63)$$

A integração temporal é feita utilizando-se o método de Runge-Kutta Simplificado o qual é detalhado na próxima seção.

4.5 Método de Runge-Kutta Simplificado

O método de Runge-Kutta Simplificado, também conhecido como esquema Jameson-Schmidt-Turkel, foi proposto inicialmente por Jameson et al. [86] em 1985 para solução das equações de Euler através do método de Volumes Finitos. Este método possui como característica a necessidade de realização de poucas operações em relação a outros métodos de integração numérica [77]. Desta forma, seus coeficientes podem ser selecionados para obter alta precisão na obtenção da solução temporal. Em geral, utiliza-se mais de dois estágios para estender a região de estabilidade do método. Nesta seção é feita uma breve apresentação deste método, que é utilizado neste trabalho para a integração numérica das equações do modelo.

As equações de Euler, para um escoamento compressível e bidimensional, podem ser escritas na forma integral da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w dx dy + \oint_{\partial\Omega} (f dy - g dx) = 0 \quad (4.64)$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas e Ω é uma região bidimensional com fronteira $\partial\Omega$. As variáveis w , f e g são dadas por:

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

$$g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

onde ρ é a massa específica, u é o componente de velocidade na direção x , v é o componente de velocidade na direção y , E é a energia total, H é a entalpia total e p é a pressão.

Como descrito em [86], as equações de Euler podem ser discretizadas dividindo o domínio computacional em quadriláteros com os valores dados no centro de cada

célula. Assim, a aproximação discreta dos termos espaciais da equação (4.64) torna-se

$$\frac{d}{dt}(hw) + Q(w) = 0, \quad (4.67)$$

sendo h a área da célula e Q representa uma aproximação para a integral de contorno que aparece na equação (4.64). A definição de Q é feita da seguinte forma. Sejam Δx_k e Δy_k os incrementos de x e y no lado k da célula. Então o balanço de fluxo para a quantidade de movimento na direção x é representada por

$$\frac{d}{dt}(h\rho u) + \sum_{k=1}^4 (Q_k \rho u_k + \Delta y_k p_k) = 0, \quad (4.68)$$

sendo Q_k o fluxo de velocidade dado por

$$Q_k = \Delta y_k u_k - \Delta x_k p_k, \quad (4.69)$$

e a soma é feita sobre os quatro lados da célula. Cada quantidade $(\rho u)_1$ é calculada como uma média dos valores de duas células consecutivas, isto é,

$$(\rho u)_1 = \frac{1}{2} [(\rho u)_{i,j} + (\rho u)_{i+1,j}]. \quad (4.70)$$

É possível verificar que este esquema se reduz ao método de diferenças centrais numa malha cartesiana. Para controlar as instabilidades de esquemas centrados e ajudar na convergência é necessária a adição de um termo dissipativo artificial. Esse termo é formado por diferenças de quarta ordem das variáveis dependentes as quais dependem do gradiente de pressão local. Assim, a equação (4.67) torna-se

$$\frac{d}{dt}(hw) + Qw - Dw = 0, \quad (4.71)$$

onde Q é o operador de discretização espacial e D é o operador dissipativo. Para a massa específica, por exemplo, $D\rho$ é dado por

$$D\rho = D_x \rho + D_y \rho, \quad (4.72)$$

onde

$$D_x \rho = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j}, \quad (4.73)$$

$$D_y \rho = d_{i,j+1/2} - d_{i,j-1/2}. \quad (4.74)$$

Os termos do lado direito das equações (4.73) e (4.74) tem a forma:

$$d_{i+1/2,j} = \frac{h_{i,j+1/2}}{\Delta t} \left[\epsilon^{(2)_{i+1/2,j}} (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) - \epsilon^{(4)_{i+1/2,j}} (\rho_{i+2,j} - 3\rho_{i+1,j} + 3\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}) \right] \quad (4.75)$$

onde

$$\epsilon_{i+1/2,j}^{(2)} = \kappa^{(2)} \max(\nu_{i+1,j}; \nu_{i,j}) \quad (4.76)$$

$$\epsilon_{i+1/2,j}^{(4)} = \max\left(0; (\kappa^{(4)} - \epsilon_{i+1/2,j}^{(2)})\right). \quad (4.77)$$

O parâmetro $\nu_{i,j}$ depende da pressão e é dado por:

$$\nu_{i,j} = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j}| + 2|p_{i,j}| + |p_{i-1,j}|} \quad (4.78)$$

e os parâmetros $\kappa^{(2)}$ e $\kappa^{(4)}$ são constantes cujo valor normalmente atribuído é:

$$\kappa^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (4.79)$$

$$\kappa^{(4)} = \frac{1}{256}. \quad (4.80)$$

Os termos dissipativos para as demais equações são obtidos de forma análoga fazendo-se a devida substituição da variável do escoamento nas equações listadas nesta seção.

Portanto, considerando uma malha fixa no tempo com espaçamento constante, a equação (4.71) (para a variável massa específica) pode ser integrada através do seguinte esquema

$$\rho^{(0)} \leftarrow \rho^{(t)} \quad (4.81)$$

$$\rho^{(1)} \leftarrow \rho^{(0)} - \frac{\Delta t}{4h} \left[Q(\rho)^{(0)} - D(\rho)^{(0)} \right] \quad (4.82)$$

$$\rho^{(2)} \leftarrow \rho^{(0)} - \frac{\Delta t}{4h} \left[Q(\rho)^{(1)} - D(\rho)^{(0)} \right] \quad (4.83)$$

$$\rho^{(3)} \leftarrow \rho^{(0)} - \frac{\Delta t}{4h} \left[Q(\rho)^{(2)} - D(\rho)^{(0)} \right] \quad (4.84)$$

$$\rho^{(4)} \leftarrow \rho^{(0)} - \frac{\Delta t}{4h} \left[Q(\rho)^{(3)} - D(\rho)^{(0)} \right] \quad (4.85)$$

$$\rho^{(t+\Delta t)} \leftarrow \rho^{(4)}. \quad (4.86)$$

Este esquema possui quarta ordem de precisão temporal [86], [87]. O fato de o termo dissipativo ser avaliado apenas uma vez ao longo da quatro iterações diminui o custo computacional e facilita a implementação do esquema numérico. Neste trabalho, verificou-se que o termo dissipativo não apresentou contribuição significativa para aumentar a estabilidade do método. Desta forma, na implementação numérica foi definido que

$$D(\rho)^{(0)} = 0. \tag{4.87}$$

A próxima seção descreve algumas considerações gerais sobre a implementação das condições de contorno do problema.

4.6 Condições de Contorno

A implementação das condições de contorno numéricas, para escoamentos viscosos e compressíveis, é um problema desafiador sobretudo do ponto de vista da acústica. Normalmente as flutuações acústicas possuem valor absoluto muito pequeno comparado com as demais escalas do escoamento. Isso faz com que os erros numéricos tornem-se muito relevantes e algumas vezes isto inviabiliza a obtenção de uma solução numérica aceitável.

Para simulações desse tipo usa-se frequentemente uma formulação chamada de NSCBC (*Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition*) proposta por Poinot [88]. As NSCBC baseiam-se na determinação de valores para as Variações de Amplitude da Onda (*Wave amplitude variations*) denotadas por L_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, as quais podem ser interpretadas como a taxa de variação temporal da amplitude das ondas nos contornos.

Para se obter valores para as L_i em função das variáveis do escoamento, são introduzidas relações chamadas de LODI (*Local One Dimensional Inviscid*). Por exemplo, para o componente de velocidade normal ao contorno e para a variável pressão monta-se

as seguintes relações [89]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) = 0, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\bar{\rho}c}(L_5 - L_1) = 0. \quad (4.89)$$

onde L_1 e L_5 são as Variações de Amplitude de Onda que estão se movendo na direção normal ao contorno nos sentidos positivo e negativo, respectivamente.

Dessa forma, calcula-se os valores das variáveis do escoamento nos contornos, na etapa $\mathbf{n} + \mathbf{1}$, com base nos valores destas variáveis e das Variações de Amplitude de Onda na etapa \mathbf{n} , da seguinte forma

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} \left(L_5^{(n)} + L_1^{(n)} \right), \quad (4.90)$$

considerando um esquema de integração temporal do tipo Euler explícito. A integração temporal pode ser feita seguindo o método numérico aplicado aos pontos do interior do domínio. A formulação da equação (4.90) para um esquema multi-passo pode ser visto em [90].

Para ondas planas viajando na direção normal ao contorno (suposta como sendo a direção x), determina-se L_1 e L_5 através das equações:

$$L_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \bar{\rho}c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (4.91)$$

$$L_5 = \lambda_5 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \bar{\rho}c \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.92)$$

onde $\lambda_1 = u - c$ e $\lambda_5 = u + c$ são as velocidades de propagação das ondas.

As equações que definem os valores de L_1 e L_5 podem ser modificadas em função do tipo de condição de contorno. Os tipos de condições de contorno são classificados como Totalmente Reflexiva, Parcialmente Reflexiva e Não Reflexiva. Essas classificações estão associadas ao problema físico que está sendo descrito. Condições totalmente reflexivas são, normalmente, utilizadas para descrever paredes, enquanto que condições não reflexivas são utilizadas para descrever saídas abertas.

As condições de contorno parcialmente reflexivas ocorrem quando é necessário fixar um valor para certa variável, como a pressão na saída de um duto. Alguns autores

optam por utilizar um "Termo de Relaxação Linear" nas condições parcialmente reflexivas. Este termo permite controlar possíveis desvios na velocidade e pressão que podem ser introduzidos acidentalmente. Essa técnica foi primeiramente proposta por Rudy e Strikwerda [91] em 1980 e tem sido utilizada juntamente com a formulação NSCBC por diversos autores, como pode ser visto em [92], [93]. Uma discussão mais aprofundada sobre a formulação NSCBC pode ser encontrada nos artigos originais listados nas referências [94], [88], [91] e [95].

4.7 Estimativas de Erro

Para se obter o erro devido ao processo de discretização utiliza-se o método de Richardson. Para o caso de equações não lineares, o extrapolador de Richardson é formulado para estimar a solução exata da equação diferencial parcial usando a ordem formal e soluções em diversas malhas. Se as malhas forem finas o suficiente, então o extrapolador de Richardson é capaz de estimar o erro de discretização com boa precisão.

Dizer que a malha é suficientemente fina significa que foi atingida a faixa de convergência assintótica. Entretanto, isso é frequentemente difícil em aplicações práticas e acaba sendo necessário trabalhar fora desta faixa. Isso gera incertezas nas estimativas do erro de discretização [96].

Para considerar estas incertezas é necessário empregar alguma espécie de medida. Esta medida gera uma faixa em torno da solução mais refinada (considerada a melhor solução). Esta faixa indica a região onde a probabilidade de encontrar a solução exata é suficientemente grande. Uma forma de estimar esta incerteza é dada por Roache [97] e é chamada de Índice de Convergência da Malha (GCI - na sigla em inglês).

Portanto, o procedimento de estimativa de erro de Richardson aproxima o erro obtido na solução ξ_1 (na malha refinada), comparando esta solução com a solução obtida por uma malha mais grossa, ξ_2 , e é definido por [97]

$$E_1 = \frac{\varepsilon_{21}}{1 - r^{\phi}}, \quad (4.93)$$

enquanto que para a malha mais grossa é dado por

$$E_2 = \frac{r^\varphi \varepsilon_{21}}{1 - r^\varphi}, \quad (4.94)$$

onde ξ_k é a solução na k -ésima malha, a qual possui espaçamento h_k , $\varepsilon_{21} = \xi_2 - \xi_1$, r é a taxa de refinamento entre as malhas grossa e fina ($r = \frac{h_2}{h_1} > 1$) e φ é a ordem de precisão do algoritmo. Assim, a ordem de precisão observada $\bar{\varphi}$ do método é dada por [98]

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\ln(r_{21})} \left| \ln \left| \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}} \right| + q(\varphi) \right|, \quad (4.95)$$

onde

$$q(\varphi) = \ln \left(\frac{r_{21} - s}{r_{32} - s} \right), \quad (4.96)$$

com

$$s = 1 \cdot \text{sign} \left(\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}} \right). \quad (4.97)$$

A ordem observada $\bar{\varphi}$ considera apenas a discretização espacial. Valores negativos de $\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21}$ são uma indicação de convergência oscilatória. Quando ε_{32} ou ε_{21} estão muito próximos de zero, significa que está ocorrendo convergência oscilatória ou que a solução exata foi atingida [98].

Desta forma, neste trabalho são utilizadas 3 malhas computacionais com espaçamentos denotados por h_1 , h_2 e h_3 , onde $h_1 < h_2 < h_3$, e $r_{21} = \frac{h_2}{h_1}$, $r_{32} = \frac{h_3}{h_2}$. Os erros relativos entre duas malhas são dados por:

$$e_a^{21} = \left| \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \right|, \quad e_a^{32} = \left| \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_2} \right|. \quad (4.98)$$

Além de atestar a qualidade dos resultados obtidos, o Índice de Convergência da Malha, GCI, indica o quanto a solução numérica varia com o refinamento da malha. O Índice de Convergência da Malha (GCI), utilizado neste trabalho, para três malhas é dado por [98]

$$I^{21} = \frac{F_s \cdot e_a^{21}}{r_{21}^\varphi - 1} \quad \text{or} \quad I^{21} = F_s |E_1|, \quad (4.99)$$

$$I^{32} = \frac{F_s \cdot r_{32}^\varphi \cdot e_a^{32}}{r_{32}^\varphi - 1} \quad \text{or} \quad I^{32} = F_s |E_2|, \quad (4.100)$$

onde $F_s = 3.0$ é um fator de segurança [97].

A estimativa de Richardson foi realizada da seguinte forma: O sistema de equações do modelo foi resolvido numericamente com espaçamento da malha igual a h e os valores obtidos ao longo da linha central da geometria foram armazenados. Na sequência, o mesmo conjunto de equações foi novamente resolvido utilizando-se espaçamentos das malhas iguais a $\frac{h}{2}$ e $\frac{h}{4}$. Assim, para cada ponto da linha central existem três aproximações. Estas aproximações foram utilizadas para calcular o GCI, conforme proposto por [97].

Para estimar a ordem de convergência temporal do método são analisadas diversas soluções $\phi(t, 2\tau), \phi(t, \tau), \phi(t, \frac{\tau}{2}), \dots$ para certo instante de tempo fixo "t", onde τ é o passo temporal. Assim, para cada trio de resultados, a seguinte relação é válida [99]:

$$\left| \frac{\phi(t, 2\tau) - \phi(t, \tau)}{\phi(t, \tau) - \phi(t, \frac{\tau}{2})} \right| \approx 2^{\bar{p}} \quad (4.101)$$

onde \bar{p} é a ordem de convergência observada.

Assim, vários trios de soluções são calculados, com passos temporais cada vez menores, obtendo-se uma sequência de aproximações $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$ a qual deve convergir para a ordem de convergência do método \bar{p} .

4.8 Critério Q

Uma das dificuldades ao se abordar o problema da turbulência computacionalmente é definir a melhor forma de visualizar as estruturas e regiões turbulentas de um escoamento. Neste trabalho, as estruturas turbulentas rotacionais são caracterizadas através da determinação de um valor conhecido como Critério Q, o qual foi inicialmente proposto por Hunt et al. [100]. O uso do Critério Q é bastante difundido entre os pesquisadores que utilizam a técnica de Simulação de Grandes Escalas (LES) como pode ser visto nos artigos [101], [102], [103], [104].

O Critério Q é definido da seguinte forma:

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (4.102)$$

onde Ω_{ij} e S_{ij} são os componentes antissimétrico e simétrico do tensor gradiente de velocidade, respectivamente, ou seja

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.103)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.104)$$

O tensor Ω_{ij} descreve a rotação de uma partícula fluida finita, enquanto o tensor S_{ij} descreve as deformações desta partícula. Portanto, o cálculo de Q permite identificar apenas a parte rotacional do escoamento pois, no caso de existir um núcleo rotacional, tem-se $\Omega_{ij} \neq 0$ enquanto que a viscosidade faz com que as partículas tendam ao movimento de corpo rígido, isto é, $S_{ij} = 0$. Logo, valores elevados para o critério Q indicam as regiões onde a velocidade angular é mais elevada. Como exemplo do uso do Critério Q , considere a figura 4.2. Ela apresenta a isosuperfície $Q = 8290$ correspondente a um jato coaxial confinado em uma região retangular fechada. As estruturas circulares que aparecem à esquerda na figura representam um escoamento rotacional imposto na região do tubo injetor. A partir de determinada distância verifica-se que o escoamento rotacional interage com o jato que foi inserido no centro da região formando pequenos vórtices. Essa configuração onde existe um jato central envolvido pelo escoamento rotacional é comum em sistemas de combustão chamados de *Swirl Burners*. As chamas que ocorrem nestes equipamentos são assim denominadas de *Swirl Flames*.

Na próxima seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo proposto para a simulação de chamas e determinação do campo acústico.

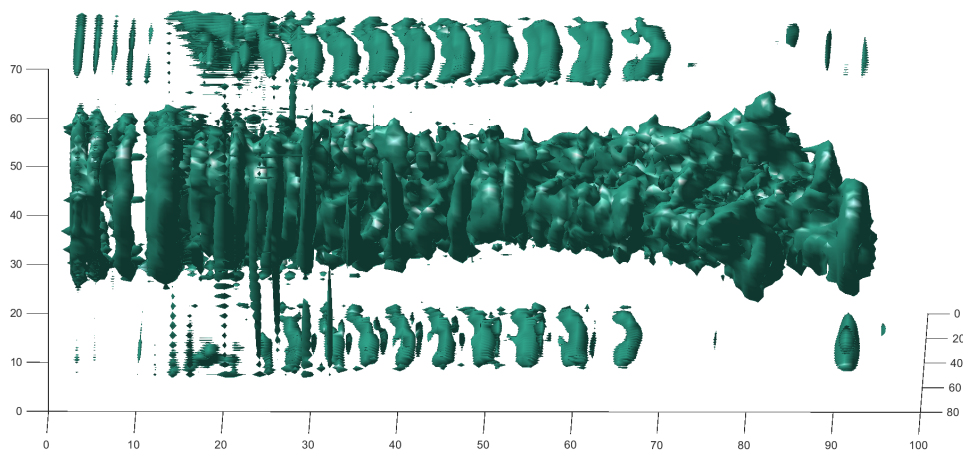


Figura 4.2: Aplicação do Critério Q para visualização das estruturas rotacionais turbulentas em torno de um jato.

5 RESULTADOS

Nesta capítulo são apresentados os resultados obtidos para três problemas. No primeiro problema avalia-se a capacidade do modelo de reproduzir o comportamento acústico de um escoamento turbulento nos casos reativo e não reativo. No segundo problema verifica-se a capacidade do modelo de determinar as principais características de uma chama em espaço aberto, isto é, com pouca influência dos contornos. No terceiro problema é feito o estudo da influência de cada um dos termos fonte sobre uma chama pré-misturada e confinada. Os parâmetros analisados são a velocidade, temperatura, pressão e as frequências acústicas, pois estes são determinantes na definição do campo acústico.

5.1 Problema 1

Nesta seção apresenta-se o comportamento acústico para um escoamento não reativo de dois jatos axiais e o comportamento acústico no caso reativo, quanto estes jatos representam combustível e oxigênio em uma câmara de combustão.

No caso reativo, a simulação refere-se a uma chama difusiva composta por metano (CH_4) e ar (76% de Nitrogênio e 24% de Oxigênio). Esta queima ocorre no interior de uma câmara de combustão tridimensional e cilíndrica, a qual possui paredes e saída livre para os gases da combustão na extremidade direita. Esta câmara possui comprimento $L = 110mm$ na direção do eixo x e seu diâmetro é $b = 86mm$. O queimador possui configuração de *swirlflame*, onde os gases reativos entram na câmara de combustão após passarem por um rotor que acrescenta rotação ao fluido [80]. Desta forma, o escoamento é considerado compressível e turbulento. A velocidade inicial dos gases é de $27m/s$, a temperatura inicial dos gases é $T = 300K$, o número de Mach é $M \sim 0,1$ e a mistura estequiométrica ocorre para razão de equivalência de 0,75.

Nesta simulação, o espaçamento da malha foi de $3,125 \times 10^{-3}mm$ nas direções y e z , e $1,5 \times 10^{-2}mm$ na direção x que é a direção dos jatos. O incremento temporal foi $\Delta t = 1 \times 10^{-5}s$. O número de Courant para esta simulação resulta em $C = \frac{|u|\Delta t}{\Delta x} + \frac{|v|\Delta t}{\Delta y} +$

$\frac{|w|\Delta t}{\Delta z} \simeq 0,05$. É comum utilizar-se o número de Courant para relacionar o espaçamento da malha com o incremento temporal de modo a obter-se um número de Courant próximo da unidade. Porém, neste caso o passo temporal está limitado pelas características físicas do escoamento e, desta forma, acaba ficando restrito a valores entre $1 \times 10^{-5}s$ e $1 \times 10^{-6}s$.

A figura (5.1) ilustra o comportamento turbulento desse escoamento. Esta figura apresenta a isosuperfície de velocidade $|\vec{u}| = 12m/s$ para $t = 0,6s$ vista através de dois ângulos distintos.

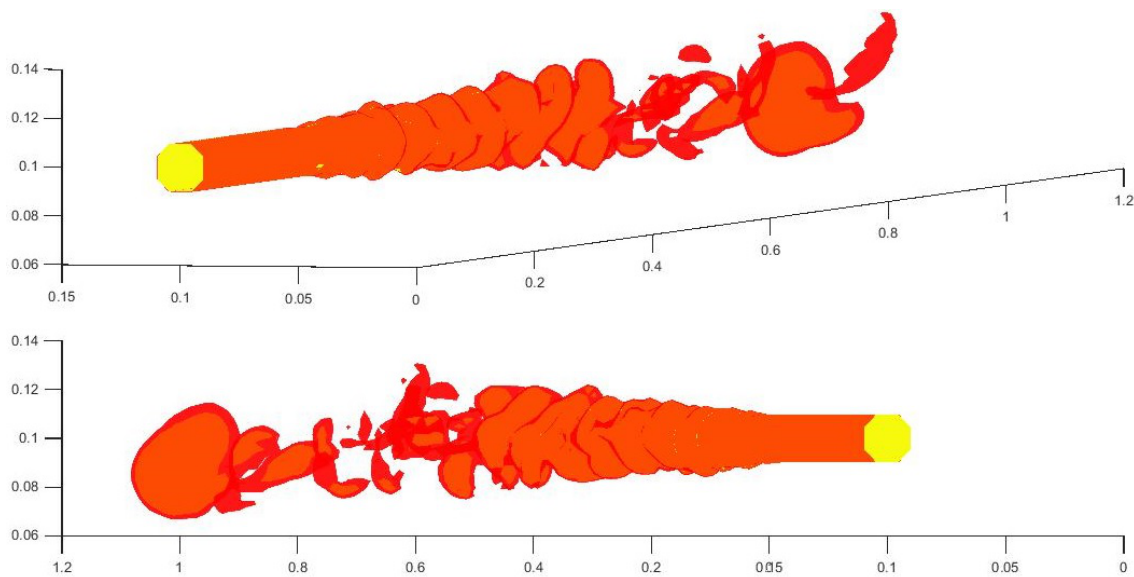


Figura 5.1: Isosuperfície de velocidade ($|\vec{u}| = 12m/s$) da simulação de uma *swirl flame* para o instante $t = 0,6s$.

As figuras 5.2 e 5.3 apresentam o comportamento da pressão em torno do injetor de combustível para os instantes de tempo $t = 0,1s$ e $t = 0,2s$. Na figura 5.2 a coloração amarela representa o comportamento da pressão média no início do desenvolvimento do jato enquanto que a coloração azul representa as flutuações de pressão ocorrendo em regiões distintas do domínio.

Na figura 5.3 apresenta-se o comportamento das flutuações de pressão. As flutuações concentram-se em torno do tubo injetor e próximo à linha central do escoamento. Essas são as regiões onde ocorre maior turbulência, além da interação com a chama.

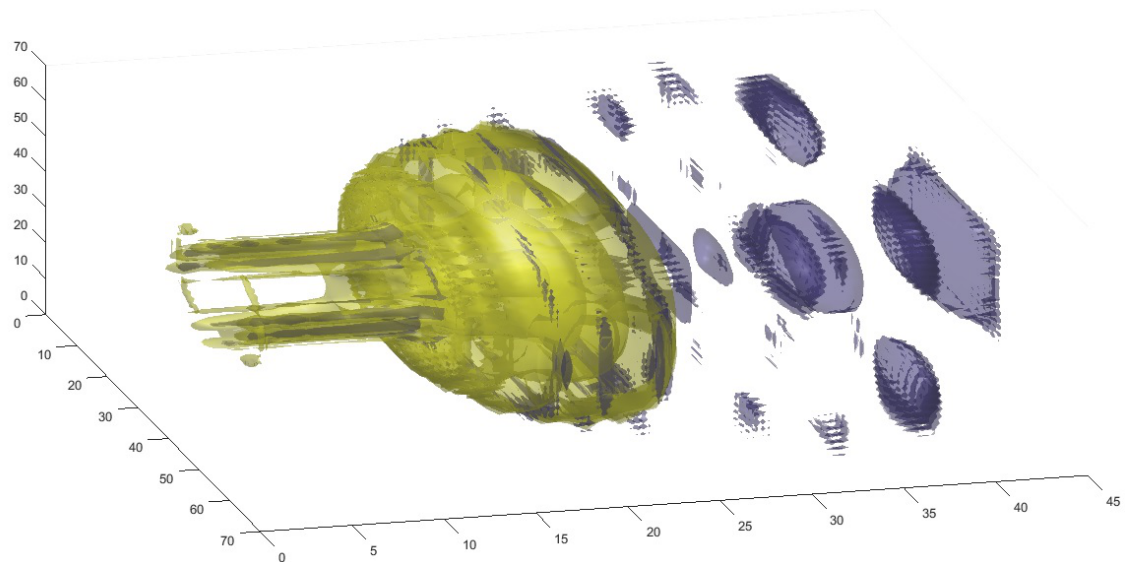


Figura 5.2: Isosuperfície de pressão próximo à injeção de combustível e flutuações de pressão em torno do injetor de combustível em $t = 0, 1s$.

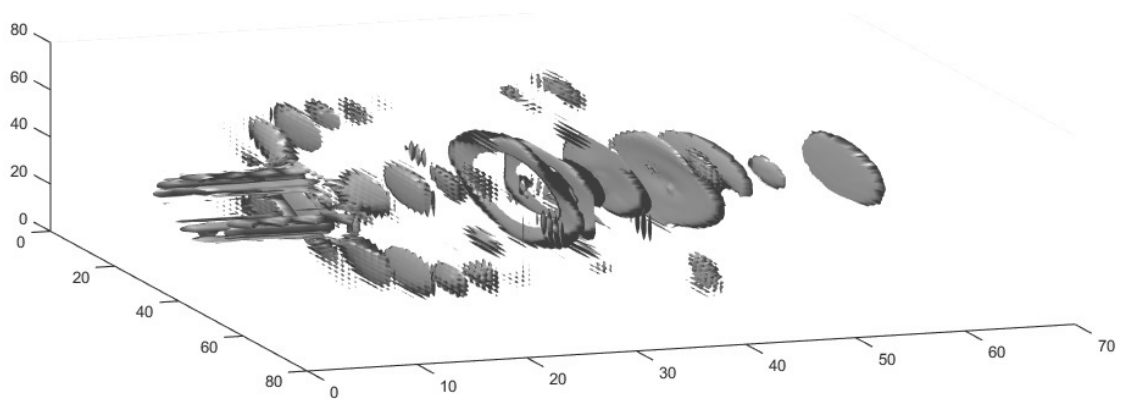
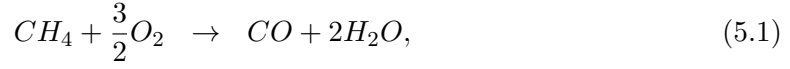


Figura 5.3: Destaque das flutuações de pressão próximo à injeção de combustível em $t = 0, 2s$.

Neste problema, reação química é modelada por duas equações que relacionam 5 espécies químicas, conforme proposto por Roux [105]



As taxas de reação são dadas, respectivamente, por:

$$q_1 = A_1 \left(\frac{\rho Y_{CH_4}}{W_{CH_4}} \right)^{n_{1F}} \left(\frac{\rho Y_{O_2}}{W_{O_2}} \right)^{n_{1O}} \exp \left(-\frac{E_{a1}}{RT} \right), \quad (5.3)$$

$$q_2 = A_2 \left[\left(\frac{\rho Y_{CO}}{W_{CO}} \right)^{n_{2CO}} \left(\frac{\rho Y_{O_2}}{W_{O_2}} \right)^{n_{2O}} - \left(\frac{\rho Y_{CO_2}}{W_{CO_2}} \right)^{n_{2CO}} \right] \exp \left(-\frac{E_{a2}}{RT} \right), \quad (5.4)$$

onde $A_1 = 2 \times 10^{15}$, $A_2 = 2 \times 10^9$, $n_{1F} = 0,9$, $n_{1O} = 1,1$, $n_{2CO} = 1$, $n_{2O} = 0,5$, $E_{a1} = 35.000$, $E_{a2} = 12.000$, Y_k é a fração de massa da espécie k , ρ é a massa específica do fluido, W_k é o peso molecular da espécie k , R é a constante dos gases e T é a temperatura.

Para analisar o comportamento da pressão foram realizados dois testes padrão. O primeiro teste considera que o escoamento ocorre sem influência da reação química, assim os termos reativos são omitidos na equação da pressão. Isso faz com que as flutuações da pressão ocorram apenas por causa da turbulência. No segundo teste realizado, os termos reativos são inseridos na equação da pressão. Isso faz com que as flutuações de pressão ocorram ao longo de todo o domínio e com intensidade mais elevada do que aquela observada no caso não reativo.

A figura (5.4) apresenta as flutuações de pressão ao longo da linha central da câmara para o caso não reativo. A linha tracejada representa os dados obtidos pelo modelo proposto e o símbolo "x" representa os dados obtidos por Roux [105]. Para a situação não reativa as flutuações de pressão ocorrem, com maior intensidade, na região próxima ao ponto de injeção devido a maior turbulência nessa região.

Para o caso reativo, verifica-se que as flutuações de pressão são mais intensas e distribuídas ao longo da câmara, como mostra a figura (5.5). Isso ocorre pois a liberação de calor proveniente da superfície da chama induz essas flutuações de pressão.

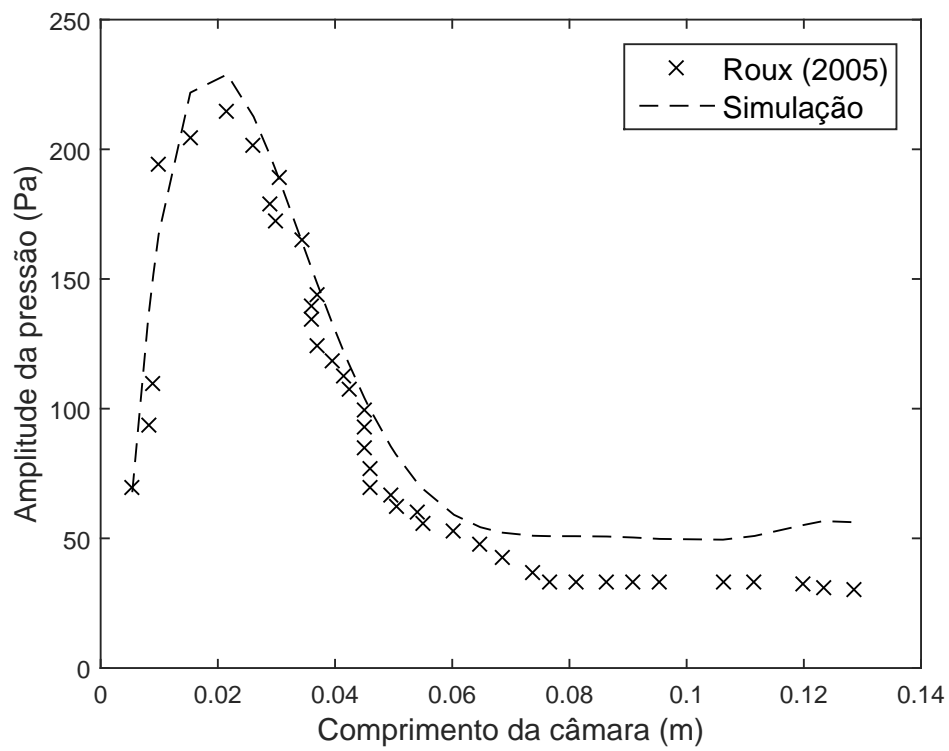


Figura 5.4: Flutuações da pressão ao longo da linha central da câmara de combustão para o caso não reativo.

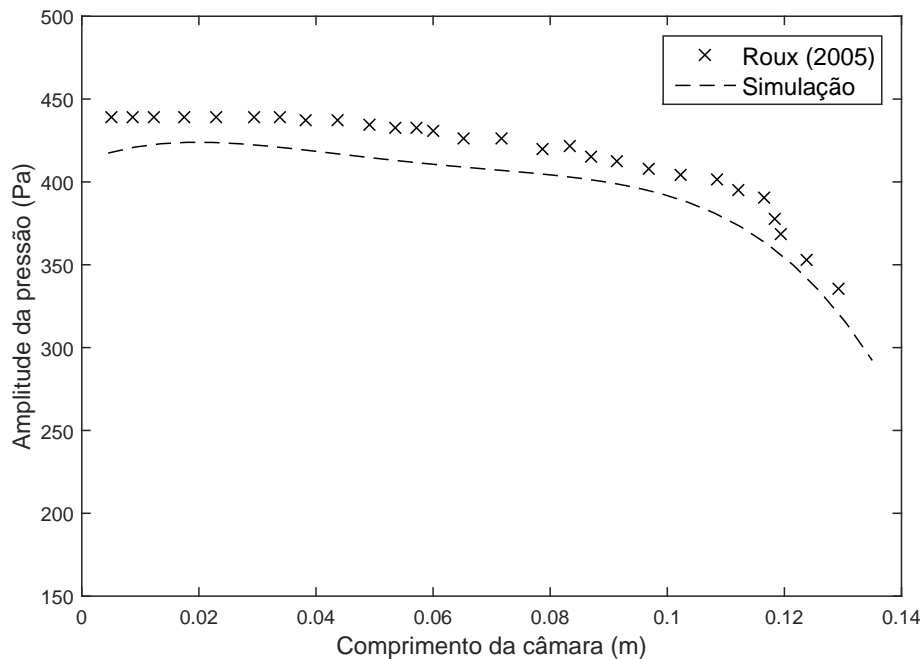


Figura 5.5: Flutuações da pressão ao longo da linha central da câmara de combustão para o caso reativo.

O erro relativo para as flutuações de pressão é apresentado na figura (5.6). Utiliza-se o ponto para representar o erro para o caso reativo e usa-se o símbolo "x" para representar o erro no caso não reativo. Verifica-se que o erro relativo no caso reativo é inferior a 10%, enquanto na situação não reativa o erro relativo atinge valores próximos a 50% em relação aos dados experimentais. Na situação não reativa o erro é maior pois as flutuações de pressão possuem menor intensidade (valor absoluto), e isso faz com que os erros numéricos se tornem mais relevantes no caso não reativo.

A figura (5.7) apresenta o espectro de frequência para este problema no caso reativo. Verifica-se que a frequência de maior amplitude ocorre em torno de 540Hz . A figura também sugere que possam ocorrer frequências características em torno de 250Hz , 370Hz , 950Hz e 1050Hz . No entanto, a amplitude dessas frequências é baixa e não é possível distingui-las das demais flutuações de pressão.

Conforme apresentado por Roux [105] este escoamento apresenta 3 modos acústicos. O primeiro modo (1/4 de onda) ocorre entre as frequência 265 - 300 Hz, o

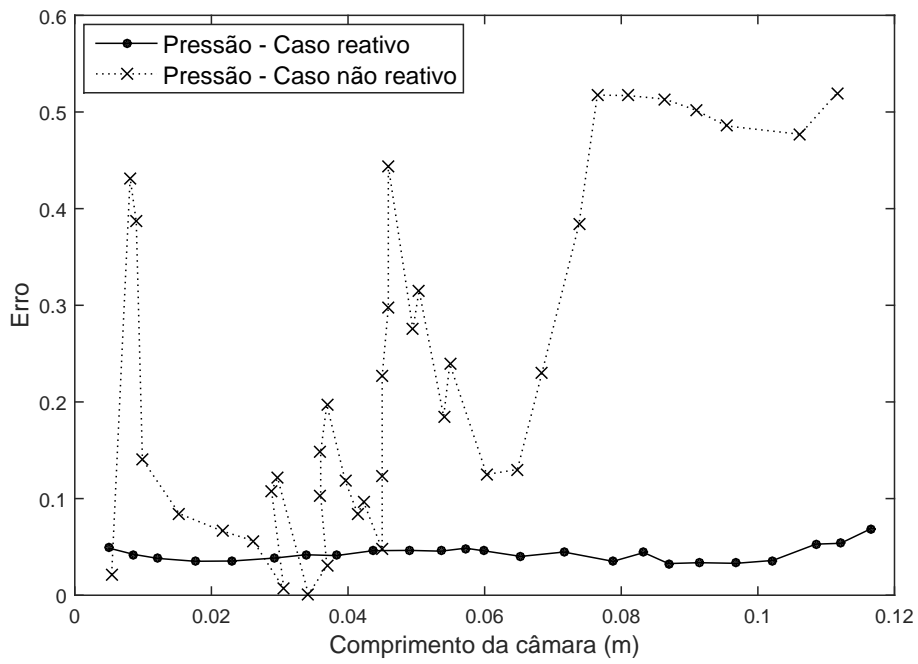


Figura 5.6: Erro relativo das flutuações da pressão.

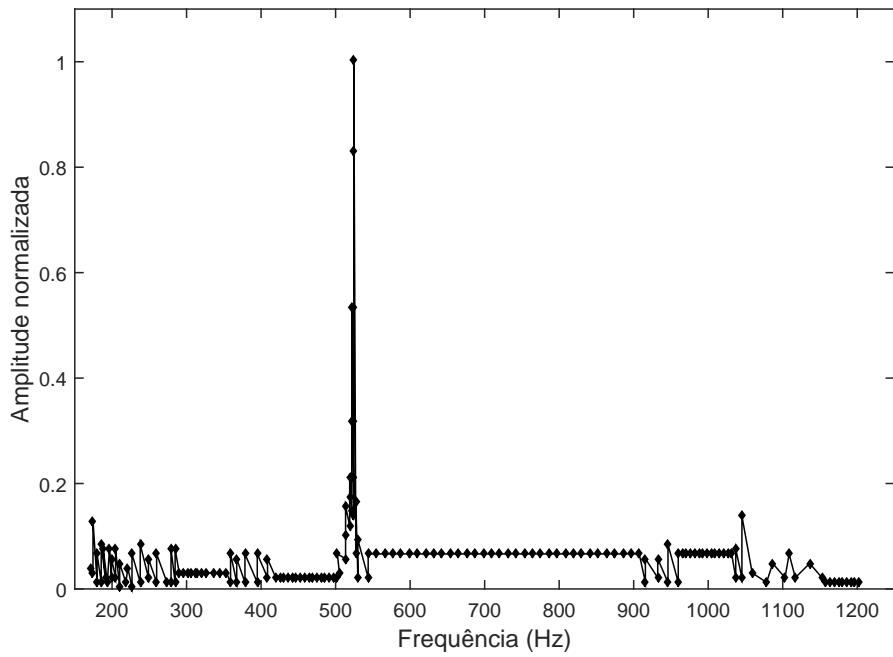


Figura 5.7: Distribuição de frequências para o caso reativo.

segundo modo (3/4 de onda) ocorre entre as frequências 500 - 588 Hz e o terceiro modo (5/4 de onda) ocorre na frequência 1440 Hz. Portanto, conclui-se que a frequência do segundo modo acústico foi capturada pela simulação enquanto as demais não foram determinadas com precisão.

A figura 5.8 apresenta a isosuperfície $Q = 2,97 \cdot 10^5$ para o escoamento em $t = 0,7s$. Verifica-se as regiões de turbulência em torno do injetor e outros pequenos vórtices espalhados em torno da linha central do escoamento. Esses vórtices são responsáveis por gerar as instabilidades de pressão vistas nas figuras anteriores. Também é possível identificar a formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, que ocorre devido ao cisalhamento entre as camadas de fluido que estão interagindo próximo à entrada da câmara.

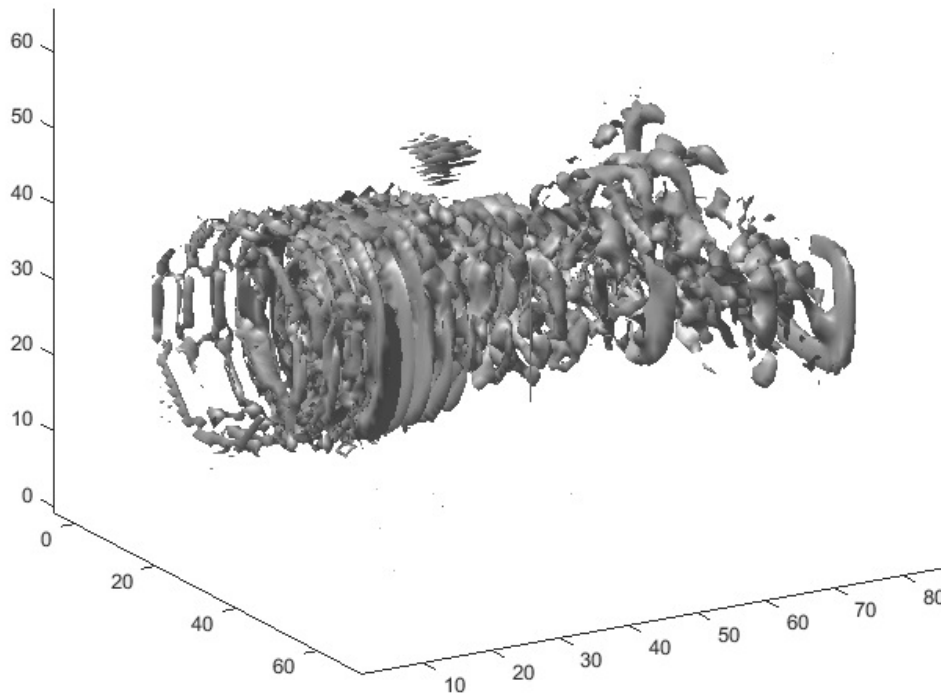


Figura 5.8: Isosuperfície do Critério Q para $Q = 2,97 \cdot 10^5$.

Sabe-se que se a frequência dos vórtices gerados, pelas instabilidades de Kelvin-Helmholtz, for próxima a alguma frequência acústica pode ocorrer um acoplamento

aeroacústico que pode resultar em aumento da intensidade de pressão causando danos à câmara de combustão, ou até um amortecimento de determinada frequência se a defasagem entre elas for adequada. Neste caso, verifica-se que duas frequências são amortecidas e uma frequência acústica é intensificada pela ação da turbulência

5.2 Problema 2

Os dados a seguir descrevem as propriedades acústicas de uma chama difusiva chamada de *H3*. Esta configuração de chama foi proposta em 2004 no Workshop sobre chamas difusivas e turbulentas, organizado pelos laboratórios Sandia do governo dos Estados Unidos da América [106].

Esta chama usa como combustível uma mistura de duas partes iguais (em volume) de gás Hidrogênio (H_2) e gás Nitrogênio (N_2). Essa mistura é injetada em uma região com ar atmosférico, à temperatura de 300 K, através de um injetor de diâmetro $D = 0,008m$ à velocidade de $34,8m/s$. O suprimento de ar para esta chama é fornecido através de um jato coaxial de velocidade $0,2m/s$. Em função do diâmetro do injetor e da velocidade do jato de combustível o número de Reynolds desse escoamento é $Re = 10000$, o número de Mach é $M \sim 0,1$ e a mistura estequiométrica de ar e combustível ocorre para $Z = 0,31$.

Para simular a condição de chama aberta (isto é, em espaço não confinado) são utilizadas condições de contorno do tipo *far field* conforme proposto por Lesieur [74]. Vale destacar que a condição de chama aberta significa que as paredes da câmara de combustão estão suficientemente distantes da linha central do jato de combustível; entretanto, tanto o experimento real quanto a simulação computacional ocorrem em regiões fechadas. As condições iniciais foram definidas, com base no modelo experimental, com temperatura inicial $T = 300K$, velocidade do jato de combustível e de ar iguais as do experimento, fração de mistura fixada $Z = 1$ no interior do duto injetor e $Z = 0$ em todo o domínio (exceto o duto injetor).

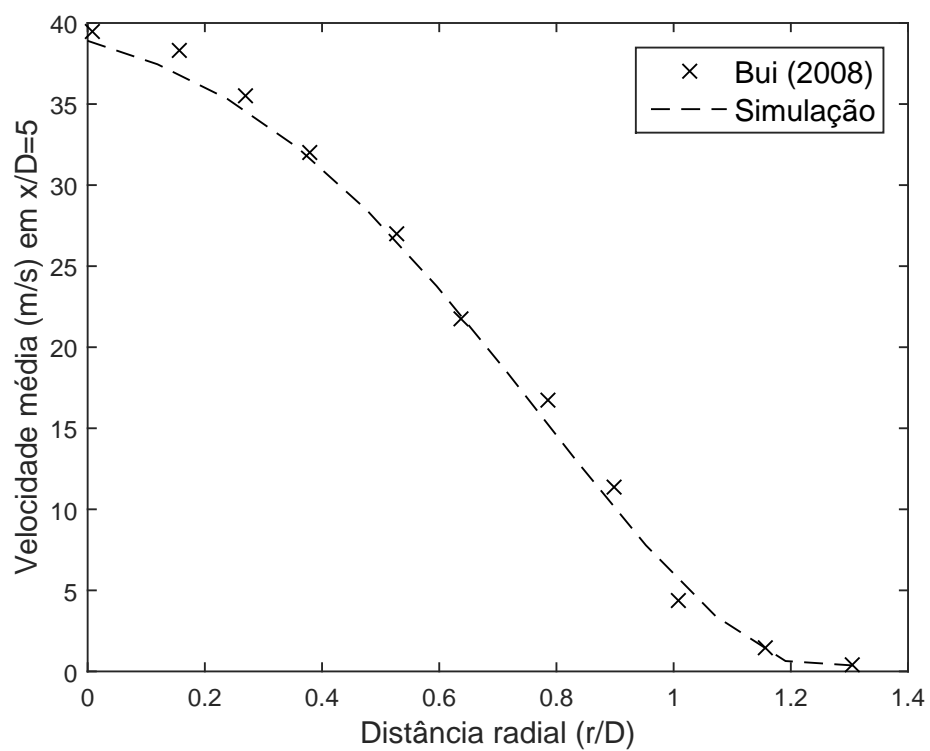


Figura 5.9: Distribuição radial da velocidade média do escoamento em $x/D = 5$.

A figura (5.9) apresenta a distribuição radial da velocidade na posição $x/D = 5$, medida a partir do ponto de injeção do combustível. A linha tracejada representa os dados obtidos neste trabalho e os símbolos "x" representam os dados experimentais obtidos por Bui [107]. Como esta região é muito próxima ao ponto de injeção do jato de combustível, a velocidade é alta próximo à linha central da geometria ($r/D = 0$) e diminui rapidamente próximo às paredes.

A figura (5.10) apresenta a distribuição radial da velocidade na posição $x/D = 20$, também medida a partir do ponto de injeção do combustível. A velocidade no

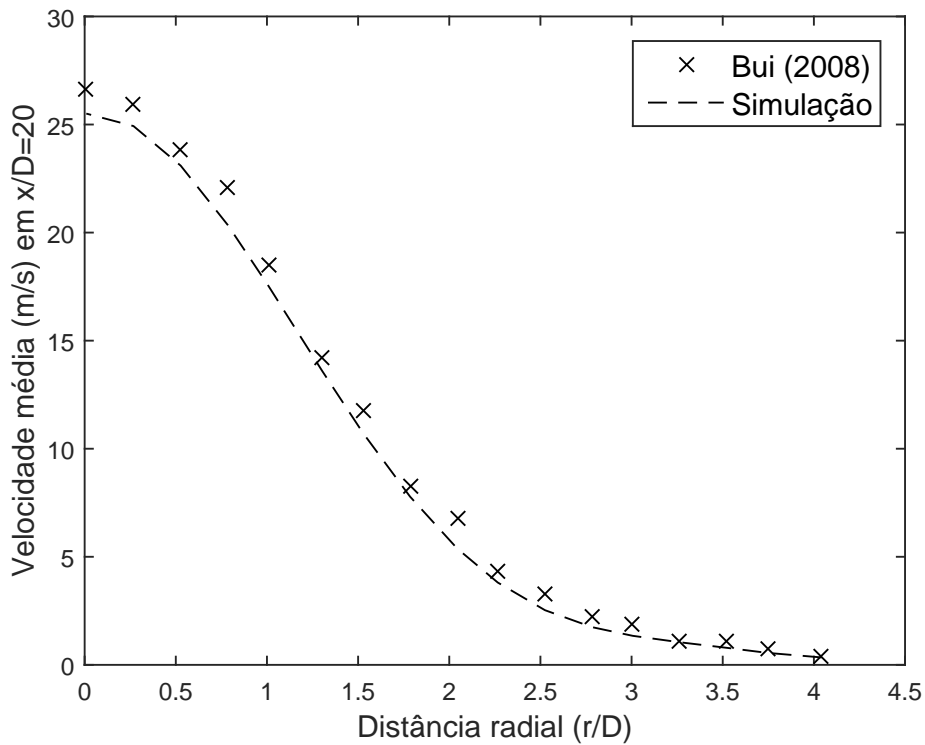


Figura 5.10: Distribuição radial da velocidade média do escoamento em $x/D = 20$.

núcleo do jato inicia em $25m/s$ e decai conforme distancia-se da linha central do jato. O perfil de velocidade previsto pela simulação é similar ao perfil experimental, obtido por Bui [107].

Na figura (5.11) apresenta-se o perfil da velocidade média do escoamento na direção axial ao longo da linha central da câmara de combustão. Nesta figura, os dados

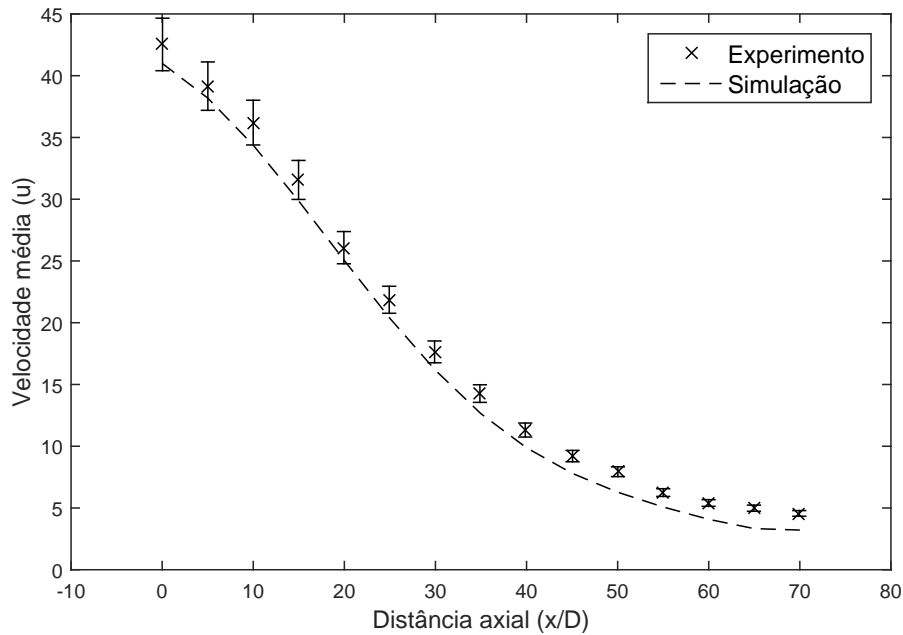


Figura 5.11: Distribuição axial da velocidade média do escoamento.

experimentais são representados por pontos com barras de erro. As barras representam um erro experimental de 10%. A linha tracejada representa os dados obtidos pelo modelo proposto. Verifica-se que os dados da simulação permanecem dentro da margem de erro experimental durante todo o primeiro terço do domínio e mantém-se próximos aos dados experimentais no restante do domínio.

Na figura (5.12) utiliza-se pontos para representar os dados de erro relativo da velocidade em $x/D = 5$ e utiliza-se o símbolo "x" para representar os dados de erro relativo em $x/D = 20$. Verifica-se que o erro relativo, entre os dados numéricos e experimentais, fica abaixo de 10% para a maior parte dos pontos do domínio considerado. Há crescimento do erro relativo quando a distância radial excede uma unidade em $x/D = 5$. Esse aumento no erro pode ser causado pelo fato da velocidade média, nessa região, ter valor absoluto pequeno fazendo com que os erros numéricos de discretização tornem-se mais relevantes. Outros possíveis motivos para esse aumento podem ser a influência:

- das paredes, isto é, das condições de contorno aplicadas,

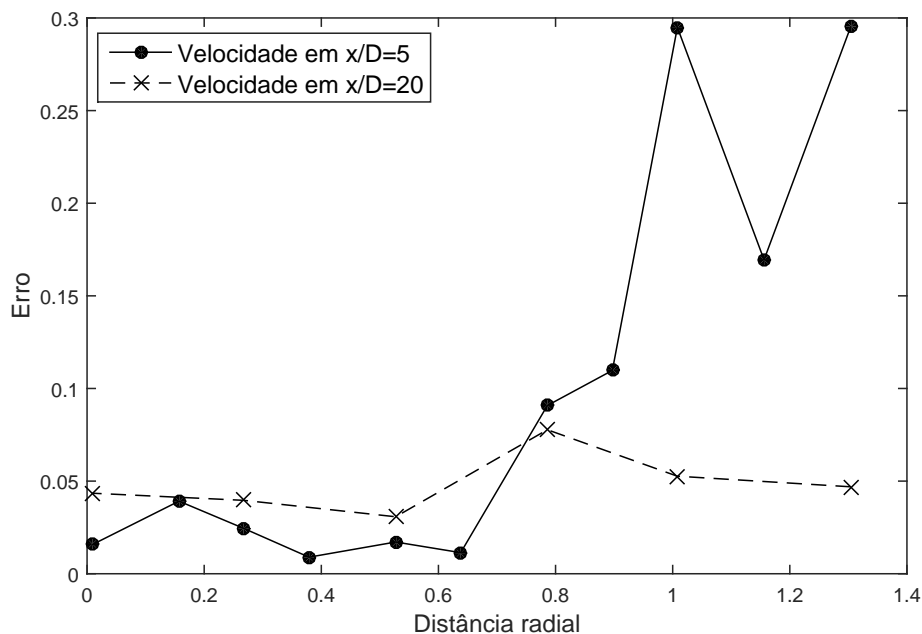


Figura 5.12: Erro relativo para a velocidade média em $x/D = 5$ e em $x/D = 20$.

- do tubo injetor de combustível, ou
- das flutuações de velocidade causadas pela turbulência que existe naquela região.

A figura (5.13) apresenta a distribuição radial da temperatura em $x/D = 5$, medida a partir do ponto de injeção do combustível. A linha representa os dados obtidos neste trabalho e os pontos marcados com "x" representam os dados experimentais obtidos por Bui [107]. A distribuição de temperatura indica a posição da superfície da chama nesta região, neste caso a superfície da chama encontra-se em $x/D = 1,0$. A temperatura diminui próximo à linha central do domínio pois o combustível injetado, e que ainda não foi queimado, entra na câmara à temperatura ambiente e se aquece por convecção do calor gerado na superfície da chama.

A figura (5.14) apresenta a distribuição radial da temperatura em $x/D = 20$, medida a partir do ponto de injeção do combustível. Este gráfico indica que o gás no interior da chama aquece conforme distancia-se do ponto de injeção. Esse aquecimento

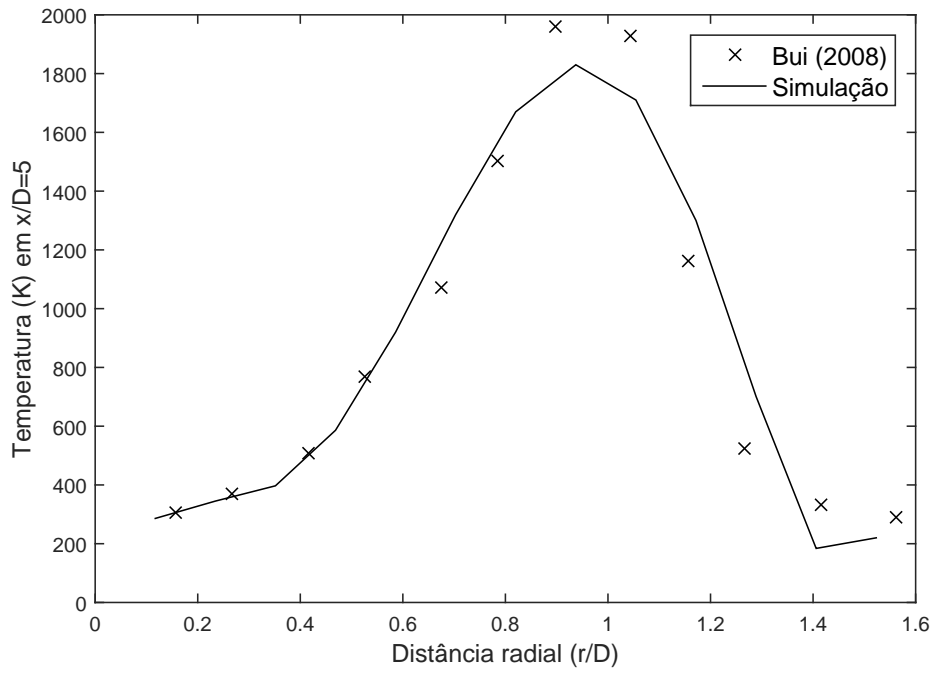


Figura 5.13: Distribuição radial da temperatura em $x/D = 5$.

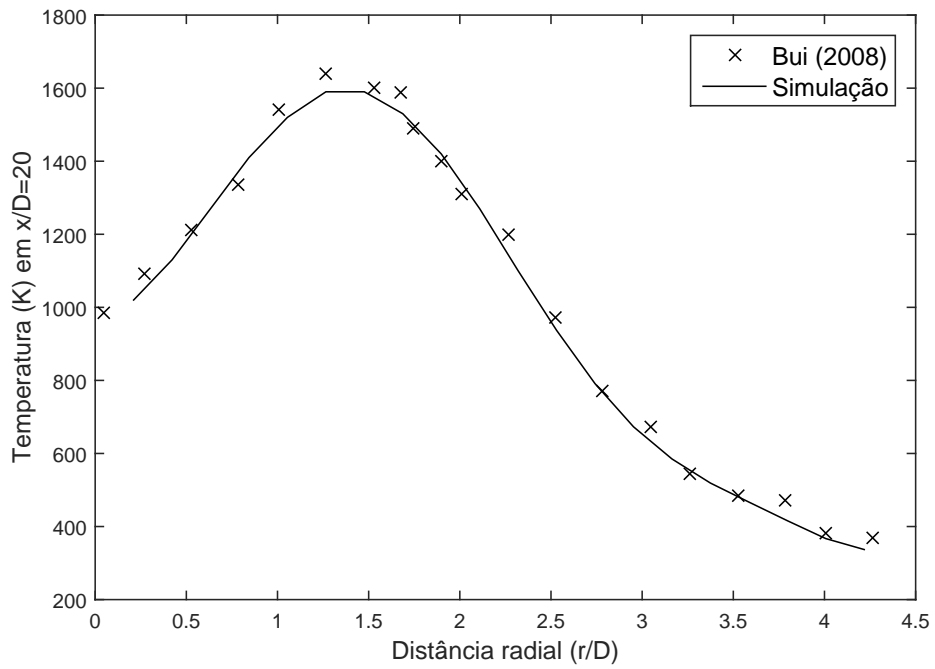


Figura 5.14: Distribuição radial da temperatura em $x/D = 20$.

faz com que todo o gás combustível injetado atinga a temperatura de ignição em algum ponto do domínio.

A figura (5.15) apresenta a distribuição axial da temperatura ao longo da câmara de combustão, onde os dados experimentais são representados por pontos com barras de erro (Erro experimental relativo de 5%). Os dados obtidos pelo modelo ao longo

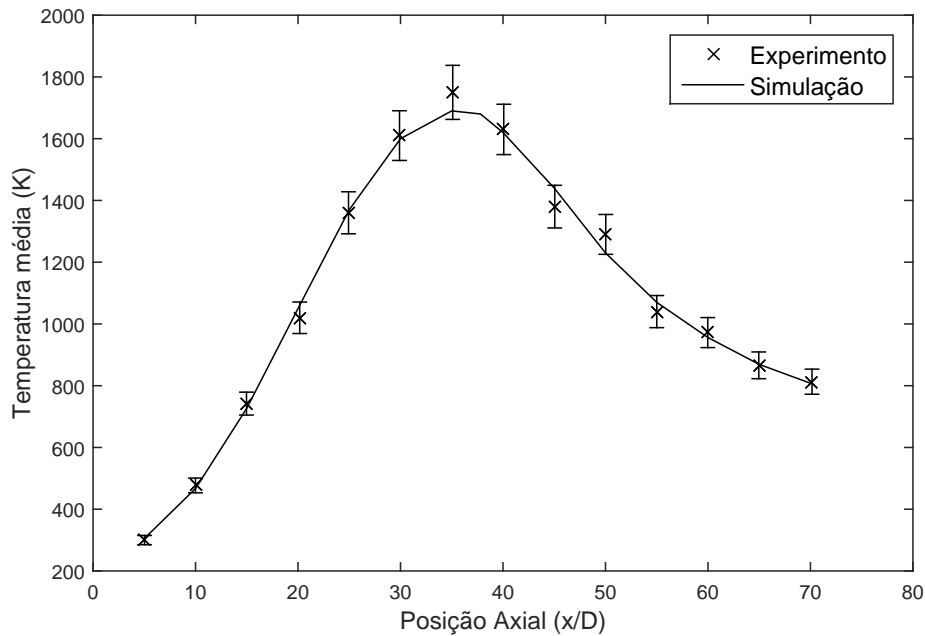


Figura 5.15: Distribuição axial da temperatura ao longo da linha central da câmara de combustão.

da linha central do domínio apresentam boa concordância com os dados experimentais, permanecendo dentro da faixa de erro experimental para a maioria dos pontos indicados. A distribuição axial da temperatura mostra que o combustível entra na câmara de combustão à temperatura ambiente ($\sim 300K$) e é aquecido até atingir a temperatura da superfície da chama ($\sim 1700K$). Depois de atingir a temperatura máxima, os gases da combustão perdem calor até saírem pela extremidade esquerda da câmara de combustão.

Na figura (5.16) utiliza-se pontos para representar os dados de erro relativo em $x/D = 5$ e usa-se o símbolo "x" para representar os erros relativos em $x/D = 20$. Verifica-se que o erro relativo, entre os dados numéricos e experimentais, fica abaixo de

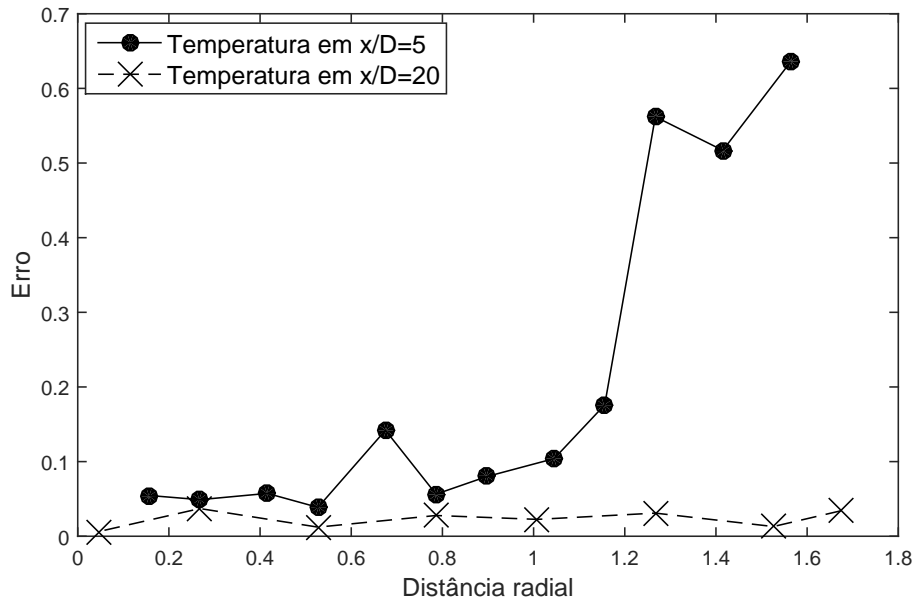


Figura 5.16: Erro relativo para a temperatura em $x/D = 5$ e em $x/D = 20$.

15% para a maior parte dos pontos do domínio considerado. Há crescimento do erro relativo quando a distância radial excede $r/D = 1,2$ em $x/D = 5$. Assim como no caso da velocidade, esse aumento no erro pode ser causado pela temperatura ter valor absoluto pequeno, fazendo com que os erros numéricos de discretização tornem-se mais relevantes. Outros motivos possíveis para esse aumento podem ser devido à influência:

- dos contornos,
- do tubo injetor de combustível, ou
- das flutuações de velocidade causadas pela turbulência que existe naquela região.

O comportamento acústico da chama *H3* foi analisado, experimentalmente, através de diversos microfones dispostos em um círculo (no plano $x-y$) cuja origem estava localizada no ponto $(x/D, y/D, z/D) = (15, 0, 0)$ e com medida do raio tal que $R/D = 45$, por Brick et al. [108].

Os dados apresentados na figura (5.17) mostram a relação da Intensidade acústica em função do número de Strouhal. O número de Strouhal é definido como [109]:

$$St = \frac{f \cdot L}{\vec{u}} \quad (5.5)$$

onde f é uma frequência, L é um comprimento característico e \vec{u} é a velocidade do fluido. Neste caso, foi tomado $L = 0,008m$ e $\vec{u} = 34,8m/s$. Considerando o incremento temporal da simulação $\Delta t = 1 \times 10^{-5}s$ e que são necessários pelo menos 25 pontos por período para que uma simulação seja capaz de determinar uma frequência acústica com boa precisão, a maior frequência que pode ser determinada é $f = \frac{1}{25 \cdot \Delta t} = 4000Hz$. Portanto, o número de Strouhal pode variar de 0 até 0,9. Os valores apresentados na figura (5.17) para

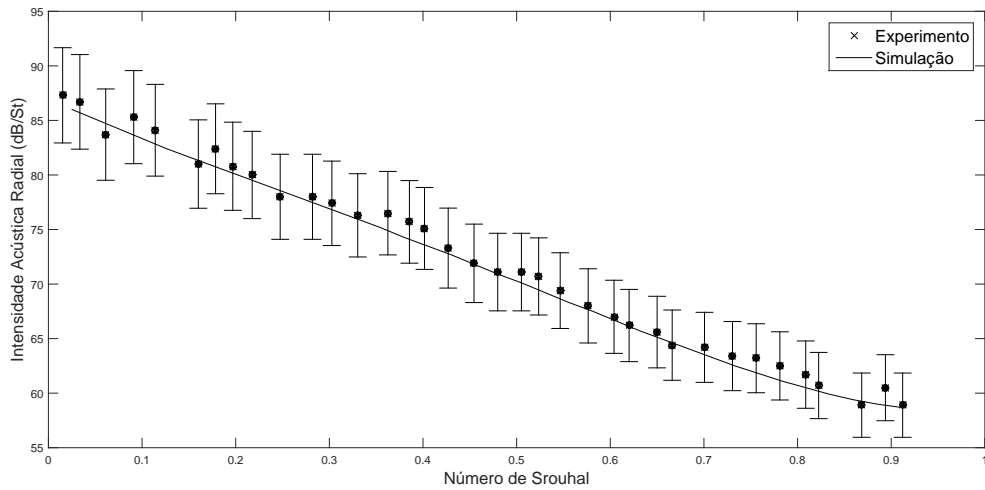


Figura 5.17: Relação da Intensidade Acústica com o Número de Strouhal.

a intensidade acústica foram normalizados baseado na intensidade de referência $I_{ref} = 10^{-12}W/m^2$. O comportamento dos dados mostra que a intensidade das perturbações acústicas diminui, quase de forma linear, com o aumento das frequências. As barras de erro da figura referem-se a um erro experimental de 5%, o que mostra que a simulação está em boa concordância com os dados experimentais.

A partir de agora utiliza-se o método de Estimativa de Richardson, descrito previamente, para estimar o erro de discretização proveniente da aproximação numérica do modelo proposto.

A tabela (5.1) mostra os parâmetros usados para calcular o Índice de Convergência da Malha com 3 malhas distintas ($grid_1 = 1200 \times 120 \times 120$, $grid_2 = 850 \times 85 \times 85$ e $grid_3 = 612 \times 61 \times 61$, o que resulta em $r_{21} = 1.4174$ e $r_{32} = 1.4000$), para a variável velocidade. As condições iniciais e de contorno foram ajustadas para permitir a comparação com os dados de Bui [107].

Tabela 5.1: Índice de Convergência da Malha (GCI) para a velocidade, onde $r_{21} = 1.4174$, $r_{32} = 1.4000$, a distância 0,6 da linha central do jato.

Parâmetro	Valores em $x/D = 5$	Valores em $x/D = 20$
ϕ_1	21,945887	22,395859
ϕ_2	21,940360	22,387742
ϕ_3	21,919745	22,357395
p	3,895560	3,902752
e_a^{21}	0,025187%	0,036242%
e_a^{32}	0,093959%	0,135553%
I^{21}	0,181027%	0,260481%
I^{32}	0,704694%	1,016648%

Para o preenchimento da tabela (5.1) foi utilizado $F_s = 3,0$. Na tabela (5.1) verifica-se que a ordem observada do método aproxima-se da ordem teórica. Para facilitar a visualização da tabela, são apresentados os resultados apenas para dois pontos do domínio. Os demais pontos apresentam comportamento similar, conforme as isolinhas de erro para a variável temperatura apresentadas na figura (5.18).

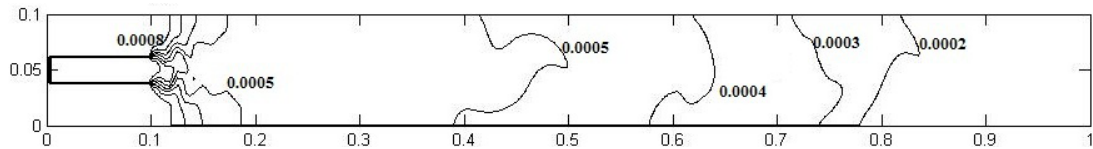


Figura 5.18: Isolinhas para o erro de discretização calculados pelo método de Richardson.

Verifica-se que o erro é maior na região da chama próxima ao injetor de combustível. Isso ocorre pois aquela região concentra muita turbulência e a influência direta da reação química. Assim, as flutuações de temperatura, velocidade e pressão ocorrem com maior intensidade nesta região.

A tabela (5.2) mostra uma estimativa da ordem de convergência temporal para a variável velocidade no ponto $x/D = 5$ a distância radial $r/D = 0,6$, onde r é a distância radial medida a partir da linha central da câmara e D é o diâmetro do injetor. A expressão $e(t, \tau)$ representa a diferença $|\phi(t, 2\tau) - \phi(t, \tau)|$, onde $\phi(t, \tau)$ é a solução para

Tabela 5.2: Convergência temporal para a velocidade em $x/D = 5$ e $r/D = 0,6$.

Passo no tempo (s)	Velocidade (m/s)	$\left \frac{e(t, \tau)}{e(t, \frac{\tau}{2})} \right $	$\log_2 \left \frac{e(t, \tau)}{e(t, \frac{\tau}{2})} \right $
1,0000E-03	21,68970240		
5,0000E-04	21,91267800	6,1498456480	2,620550201
2,5000E-04	21,94893511	6,7138944680	2,747149860
1,2500E-04	21,95433541	7,3156135400	2,870978864
6,2500E-05	21,95507360	7,6437875610	2,934287683
3,1250E-05	21,95517018	7,9347865476	2,988191414
1,5625E-05	21,95518235	7,9716546808	2,994879216
7,8125E-06	21,95518388		

a velocidade no instante de tempo " t ", obtida com o passo temporal " τ ".

Assim, a tabela (5.2) mostra 8 valores para a velocidade, correspondentes a cada tamanho de passo temporal. Isso permite calcular uma estimativa para a ordem de convergência temporal que, conforme a tabela, é igual a 3. Isto significa que para passo temporal " τ " a diferença entre duas soluções é da ordem $O(\tau^3)$.

Considerando a velocidade do som e as taxas das reações químicas, sabe-se que é necessário manter o passo temporal em valores muito pequenos. Neste trabalho foram utilizados passos temporais entre 10^{-5} e 10^{-6} para a obtenção dos resultados numéricos. Portanto, de acordo com a tabela (5.2), espera-se que o erro na integração temporal seja pequeno em comparação com os erros de discretização espacial.

5.3 Problema 3

Neste problema analisa-se a influência de cada termo fonte da equação da pressão sobre o espectro de frequências. Para comparar os dados obtidos optou-se por reproduzir as condições de queima e escoamento propostas por Bui [110]. Portanto, neste

caso trabalha-se com uma chama pré-mistura de monóxido de carbono, hidrogênio e ar. O domínio numérico é uma caixa retangular com comprimento $L = 100mm$, altura e largura $b = 8mm$. O espaçamento da malha foi de $1,25 \times 10^{-3}mm$ nas direções y e z , e $5,0 \times 10^{-3}mm$ na direção x , que é a direção do escoamento. O incremento temporal foi $\Delta t = 2 \times 10^{-6}s$ para que a simulação numérica fosse capaz de capturar frequências de até 20000 Hz. Os dados de intensidade acústica apresentados nas figuras estão em (W/m^2) .

As condições iniciais consideradas são $\rho_{ref} = 1,2kg/m^3$, temperatura $T_{ref} = 300K$, velocidade de injeção do combustível $\vec{u} \simeq 3m/s$ e número de Mach $M \sim 0,01$. As condições de contorno para a pressão são do tipo Neumann nas laterais, do tipo Dirichlet na entrada e do tipo *far field* na saída. As condições de contorno para a velocidade são do tipo Dirichlet na entrada e nas laterais e do tipo *far field* na saída.

Para analisar a influência de cada termo fonte, reescreve-se o termo $q_{e,rf}$ da equação da pressão acústica da seguinte forma. A equação da pressão é dada por:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = q_{e,rf} \quad (5.6)$$

onde o termo $q_{e,rf}$ é decomposto em função de cada efeito físico da seguinte forma:

Instabilidades na liberação de calor:

$$q_{e,rf,1} = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\gamma - 1}{c^2} \sum_{n=1}^N h_n w_n, \quad (5.7)$$

Reação não isomolar:

$$q_{e,rf,2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\gamma - 1}{c^2} c_p T \bar{W} \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{W_n}, \quad (5.8)$$

Difusão das espécies:

$$q_{e,rf,3} = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\gamma - 1}{c^2} \left(\sum_{n=1}^N h_n \nabla \cdot J_n - c_p T \bar{W} \sum_{n=1}^N \frac{\nabla \cdot J_n}{W_n} \right), \quad (5.9)$$

Difusão de calor:

$$q_{e,rf,4} = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\gamma - 1}{c^2} \nabla \cdot (-\lambda \nabla T), \quad (5.10)$$

A definição de cada variável que aparece nas equações (5.7- 5.10) é dada na seção 4.3.

A determinação da influência acústica de cada termo fonte é feita da seguinte forma:

1. Toma-se $q_{e,rf} = 0$ e utiliza-se esta simulação para comparação.
2. Insere-se, separadamente, cada um dos termos de $q_{e,rf,1}$ até $q_{e,rf,4}$ na equação (5.6).
3. Os resultados obtidos são comparados com o escoamento base para determinar as frequências características de cada termo.

A figura (5.19) apresenta a intensidade acústica gerada pelo termo $q_{e,rf,1}$ considerando um espectro de frequências de 0 até 20000 Hz. A linha representa os dados obtidos neste trabalho e os pontos marcados com "x" representam os dados obtidos por Bui [110]. Verifica-se que a intensidade acústica diminui gradativamente com o aumento

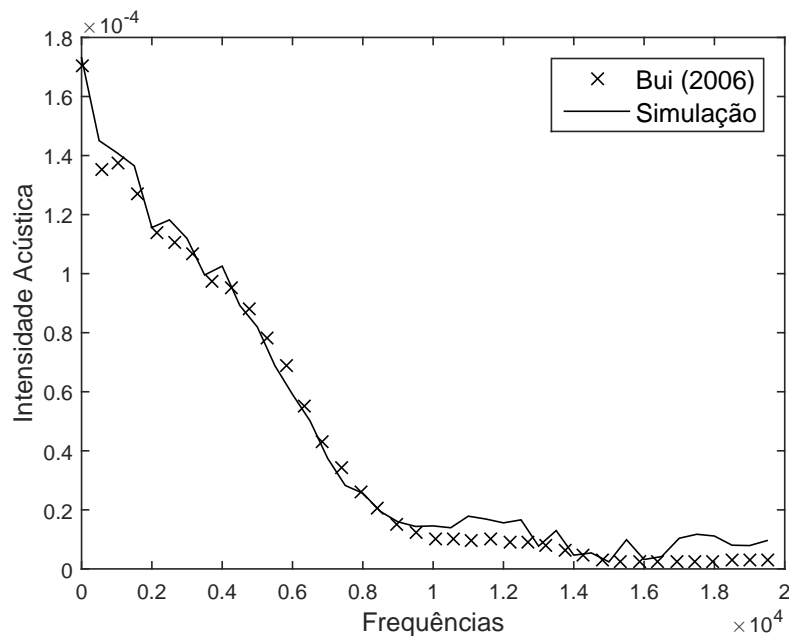


Figura 5.19: Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,1}$.

da frequência até estabilizar a partir da frequência de aproximadamente 12000 Hz.

Na figura (5.20) apresenta-se a intensidade acústica gerada pelo termo $q_{e,rf,2}$ para a mesma faixa de frequências. Verifica-se que a intensidade acústica diminui gradativamente com o aumento da frequência até estabilizar a partir da frequência de 15000 Hz.

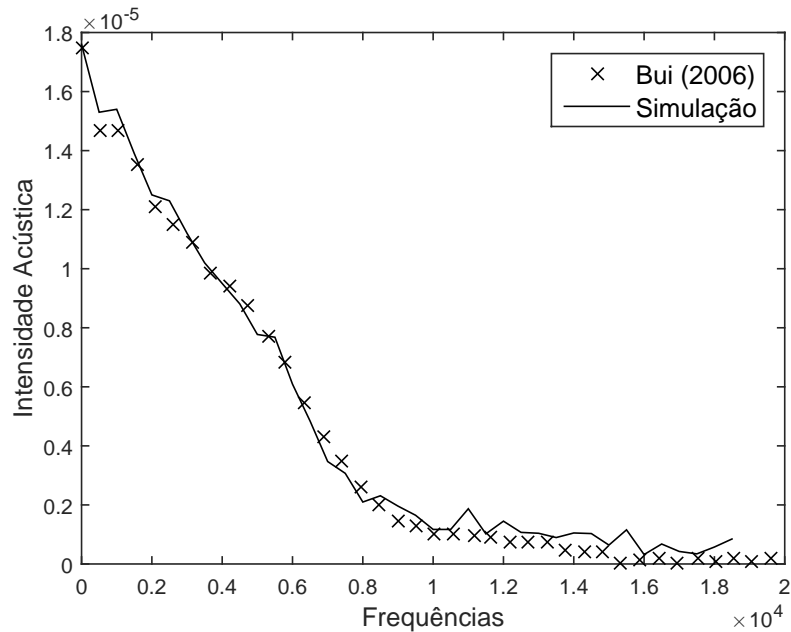


Figura 5.20: Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,2}$.

tivamente com o aumento da frequência até estabilizar a partir da frequência de 15000 Hz.

Na figura (5.21) apresenta-se a intensidade acústica gerada pelo termo $q_{e,rf,3}$ para a mesma faixa de frequências. Na figura (5.21) percebe-se que o decaimento da intensidade acústica não é o mesmo para todo o espectro de frequências. Os picos de intensidade sugerem frequências características em $\sim 500Hz$, $\sim 5000Hz$ e $9500Hz$, para o termo $q_{e,rf,3}$.

Na figura (5.22) apresenta-se a intensidade acústica gerada pelo termo $q_{e,rf,4}$ para a mesma faixa de frequências. Verifica-se que o decaimento da intensidade acústica também não é o mesmo para todo o espectro de frequências. Os picos de intensidade obtidos pelo modelo proposto sugerem que existam 07 frequências características em \sim

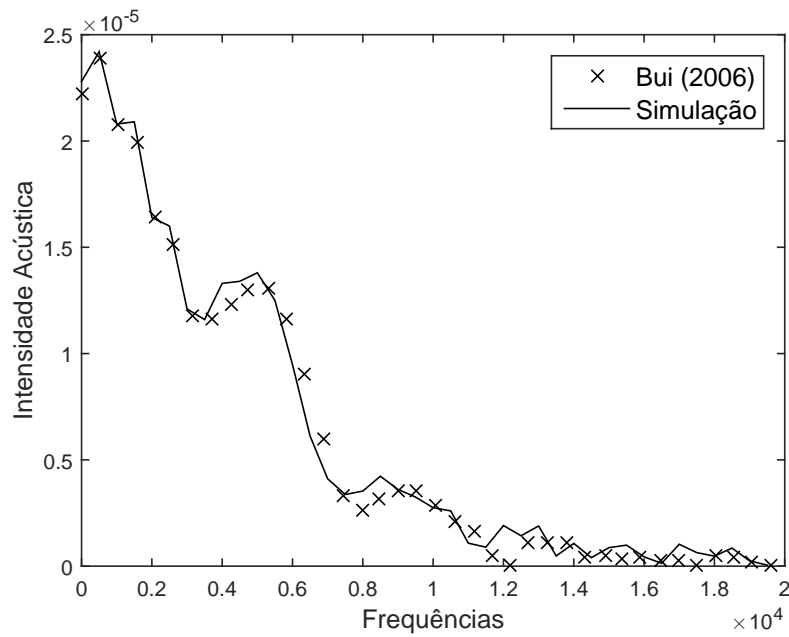


Figura 5.21: Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,3}$.

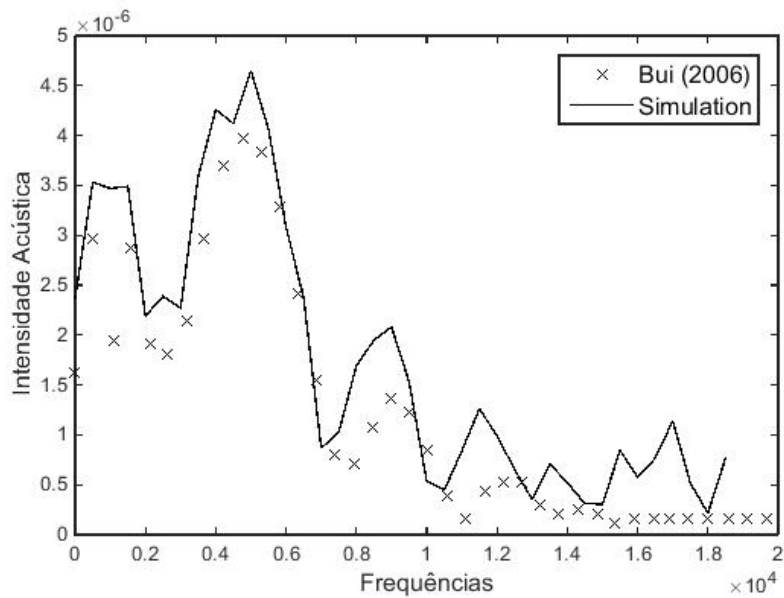


Figura 5.22: Intensidade acústica das frequências de 0 até 20000 Hz para o termo $q_{e,rf,4}$.

$500Hz$, $\sim 5000Hz$, $\sim 9000Hz$, $\sim 11500Hz$, $\sim 13500Hz$, $15500Hz$ e $17500Hz$, para o termo $q_{e,rf,4}$. No entanto, os dados obtidos por Bui [110] sugerem apenas 2 ou 3 frequências características. Essa diferença entre os dois resultados pode ser decorrente do fato que o valor absoluto da intensidade é muito pequeno de modo que os erros numéricos para esses dados tornam-se mais relevantes e faz com que pequenas oscilações numéricas possam ser confundidas com o efeito do termo analisado.

Verifica-se que o termo que apresenta maior contribuição para o Nível de Pressão Acústica é o termo $q_{e,rf,1}$. O demais termos apresentam intensidade máxima que não excede 10% da intensidade máxima gerada pelo termo de liberação de calor. No entanto, o termo de liberação de calor não apresenta frequências características na faixa de 0 a 20000 Hz para este problema. Por outro lado, os termos referentes à difusão das espécies químicas e difusão de calor ($q_{e,rf,3}$ e $q_{e,rf,4}$) apresentam frequências características e, em particular, os dois termos possuem frequência característica em torno de $5000Hz$.

6 CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático capaz de descrever, de modo numericamente eficiente, o comportamento acústico de chamas difusivas confinadas em uma região tridimensional. A principal vantagem do modelo proposto, em relação aos demais, é a combinação de soluções analíticas e numéricas na determinação do comportamento acústico de escoamento reativos.

A utilização de soluções analíticas obtidas para o espaço da fração de mistura possibilitou redução considerável do custo computacional do problema e dispensou a necessidade da utilização de técnicas numéricas específicas para tratamento do sistema de equações que descrevem a parte química do problema. Esse sistema de equações normalmente resulta num problema *stiff* que possui características numéricas indesejáveis. Considerando o número de espécies químicas envolvidas no modelo, e que deixou-se de resolver uma equação para cada espécie, estima-se uma redução no custo computacional de 15%.

A vantagem do modelo proposto neste trabalho está na redução drástica do custo computacional decorrente do desacoplamento e solução analítica da parte química, além da seleção dos termos fonte em função da sua relevância na descrição do comportamento acústico da chama. Com essa redução foi possível a implementação do algoritmo em computadores de pequeno porte. Isso diminuí o custo financeiro para a abordagem numérica do problema e possibilita a análise mais rápida em hardwares mais sofisticados.

Buscou-se validar o modelo numérico através da comparação com dados experimentais e numéricos da literatura através da construção de 3 problemas padrão. O primeiro problema foi proposto para verificar a capacidade do modelo em descrever o campo acústico de escoamentos reativos e não reativos. O segundo problema buscou verificar a qualidade do modelo para o problema de uma chama difusiva turbulenta. O terceiro problema foi proposto para verificar a precisão dos termos fonte em descrever uma chama confinada.

De modo geral, os dados obtidos apresentam boa concordância com os dados da literatura. Algumas discrepâncias surgiram quando os valores analisados das variáveis aproximavam-se dos valores dos erros numéricos. Entende-se que essas discrepâncias sejam uma situação normal e que melhores resultados poderiam ser obtidos realizando-se alguns ajustes nas técnicas numéricas de discretização e de integração temporal.

O modelo proposto não é considerado definitivo, isto é, sabe-se que diversos melhoramentos podem e precisam ser realizados para que o mesmo seja capaz de descrever situações e problemas mais gerais. Entretanto, os resultados obtidos sugerem que bons avanços já foram obtidos uma vez que são raros, na literatura, modelos capazes de produzir resultados em acústica para diversos tipos de escoamentos (reativos e não reativos) e diversos tipos de chamas (difusivas e pré-misturadas).

Como proposta para o futuro, planeja-se aprimorar o modelo proposto para possibilitar sua utilização na análise da influência de fontes sonoras sobre o campo acústico gerado pela chama. Sabe-se que fontes sonoras artificiais podem influenciar o comportamento da chama afetando sua estabilidade e a produção de poluentes. Porém, os estudos nesta área são na maioria experimentais e ainda não existem modelos capazes de reproduzir alguns dos fenômenos observados.

Pretende-se, ainda, melhorar o algoritmo numérico otimizando o número de operações de ponto flutuante, aumentar o espectro de problemas que podem ser abordados com o código e analisar a influência dos principais parâmetros do código sobre os resultados obtidos.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Magri; K. Balasubramanian; R.I. Sujith; M.P. Juniper. Non-normality in combustion-acoustic interaction in diffusion flames: a critical revision. *Journal of Fluid Mechanics*, 733: 681 – 683, 2013.
- [2] L. Rayleigh. *Theory of sound*. UK: Macmillan, London, 1894.
- [3] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 211(1107): 564 – 587, 1952.
- [4] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 222(1148): 1 – 32, 1954.
- [5] C. Wagner; T. Hüttl; P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for Acoustics*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] A. Schwarz; J. Janicka. *Combustion Noise*. Springer-Verlag Berlin, 2009.
- [7] S. Marburg; S. Nolte. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids; Finite and Boundary Element Methods*. Springer-Verlag Berlin, 2008.
- [8] N. Curle. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 231: 505 – 514, 1955.
- [9] J.E. Ffowcs Williams; D.L. Hawkings. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 264: 321 – 342, 1969.
- [10] C.L. Morfey. Sound radiation due to unsteady dissipation in turbulent flows. *Journal of Sound and Vibration*, 48: 95 – 111, 1976.
- [11] G.M. Lilley. On the noise from jets. Noise mechanisms. *Advisory Group for Aerospace Research and Development*, 13: 1 – 12, 1974.

- [12] G.M. Lilley. The radiated noise from isotropic turbulence with applications to the theory of jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, 190: 463 – 476, 1996.
- [13] J.E. Ffowcs Williams. Hydrodynamic noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1: 197 – 222, 1969.
- [14] T. Kambe. Influence of viscosity on aerodynamic sound emission in free space. *Journal of Sound and Vibration*, 95: 351 – 360, 1984.
- [15] M.S. Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71: 625 – 673, 1975.
- [16] M.E. Goldstein. An exact form of Lilley’s equation with a velocity quadrupole/temperature dipole source term. *Journal of Fluid Mechanics*, 443: 231 – 236, 2001.
- [17] M.E. Goldstein. A generalized acoustic analogy. *Journal of Fluid Mechanics*, 488: 315 – 333, 2003.
- [18] M.E. Goldstein. On identifying the true sources of aerodynamic sound. *Journal of Fluid Mechanics*, 526: 337 – 347, 2005.
- [19] C.L. Morfey; M.C.M. Wright. Extensions of Lighthill’s acoustic analogy with application to computational aeroacoustics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 463: 2101 – 2127, 2007.
- [20] A. Najafi-Yazdi; G.A. Brès; L. Mongeau. An acoustic analogy formulation for moving sources in uniformly moving media. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471: 1 – 22, 2010.
- [21] J.P. Moeck; J.F. Bourgouin; D. Durox; T. Schuller; S. Candel. Nonlinear interaction between a precessing vortex core and acoustic oscillations in a turbulent swirling flame. *Combustion and Flame*, 159: 2650 – 2668, 2012.

- [22] N. Noiray; B. Schuermans. On the dynamic nature of azimuthal thermoacoustic modes in annular gas turbine combustion chambers. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 469: 1 – 15, 2013.
- [23] J. Blimbaum; M. Zanchetta; T. Akin; V. Acharya; J. O’Connor; D.R. Noble; T. Lieuwen. Transverse to longitudinal acoustic coupling processes in annular combustion chambers. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*, 4: 275 – 298, 2012.
- [24] J. O’Connor; T. Lieuwen. Recirculation zone dynamics of a transversely excited swirl flow and flame. *Physics of Fluids*, 24: 1 – 31, 2012.
- [25] L. Kabiraj; R.I. Sujith. Nonlinear self-excited thermoacoustic oscillations: intermittency and flame blowout. *Journal of Fluid Mechanics*, 713: 376–397, 2012.
- [26] S. Bomberg; T. Emmert; W. Polifke. Thermal versus acoustic response of velocity sensitive premixed flames. *Proceedings of the Combustion Institute*, 35: 3185 – 3192, 2015.
- [27] D.W. Davis; P.L. Therkelsen; D. Littlejohn; R.K. Cheng. Effects of hydrogen on the thermo-acoustics coupling mechanisms of low-swirl injector flames in a model gas turbine combustor. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34: 3135 – 3143, 2013.
- [28] P.M. Allison; J.F. Driscoll; M. Ihme. Acoustic characterization of a partially-premixed gas turbine model combustor: Syngas and hydrocarbon fuel comparisons. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34: 3145 – 3153, 2013.
- [29] A.N. Secundov; S.F. Birch; P.G. Tucker. Propulsive jets and their acoustics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 365: 2443 – 2467, 2007.
- [30] F. Flemming; A. Sadiki; J. Janicka. Investigation of combustion noise using a LES/CAA hybrid approach. *Proceedings of the Combustion Institute*, 31: 3189 – 3196, 2007.

- [31] C. Klewer; F. Hahn; C. Olbricht; J. Janicka. Hybrid LES/CAA simulation of a turbulent non-premixed jet flame. In *Direct and Large-Eddy Simulation VII*, volume 13 of *ERCRAFTAC Series*. Springer, Netherlands, 2010.
- [32] Effect of the fluid structure interaction on the aeroacoustic instabilities of solid rocket motors. *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (32nd AIAA Aeroacoustics Conference)*.
- [33] L. Tay-Wo-Chong; S. Bomberg; A. Ulhaq; T. Komarek; W. Polifke. Comparative validation study on identification of premixed flame transfer function. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 134: 1 – 8, 2011.
- [34] P. Wolf; G. Staffelbach; L.Y.M. Gicquel; J. Müller; T. Poinsot. Acoustic and large eddy simulation studies of azimuthal modes in annular combustion chambers. *Combustion and Flame*, 159: 3398 – 3413, 2012.
- [35] L.Y.M. Gicquel; G. Staffelbach; T. Poinsot. Large eddy simulations of gaseous flames in gas turbine combustion chambers. *Progress in Energy and Combustion Science*, 38: 782 – 817, 2012.
- [36] B. Franzelli; E. Riber; L.Y.M. Gicquel; T. Poinsot. Large eddy simulation of combustion instabilities in a lean partially premixed swirled flame. *Combustion and Flame*, 159: 621 – 637, 2012.
- [37] B.O. Köhn; M.P. Hodgkin; W.S. Morita. *Tratamento de modos Acústicos em Salas de Audição Crítica*. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.
- [38] L. Prandtl; O.G. Tietjens. *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [39] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library, 2000.
- [40] L.D. Landau; E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1959.
- [41] H. Schlichting; K. Gersten. *Boundary-Layer Theory*. Springer, 2000.

- [42] P.K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [43] O.M. Belotserkovskii; A.M. Oparin; V.M. Chechetkin. *Turbulence: New Approaches*. Cambridge International Science Publishing, 2005.
- [44] A.R. Paterson. *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1983.
- [45] W.F. Durand. *Aerodynamic theory; a general review of progress*. Dover Publications, 1963.
- [46] F. Bataille; G. Brillant; M.Y. Hussaini. *Mathematical and Physical Theory of Turbulence*. Chapman and Hall, 2006.
- [47] P. Manneville. *Instabilities, Chaos and Turbulence*. Imperial College Press, 2004.
- [48] T. Cebeci. *Turbulence Models and their Application*. Springer, 2004.
- [49] J. Bardina; J.H. Ferziger; W.C. Reynolds. Improved turbulence models based on LES of homogeneous incompressible turbulent flows. Report, Department of Mechanical Engineering - Stanford University, 1984.
- [50] T. Poinot; D. Veynante. *Theoretical and numerical combustion*. R.T. Edwards Inc., 2001.
- [51] R.S. Rogallo; P. Moin. Numerical simulation of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 16: 99 – 137, 1984.
- [52] P. Moin; K. Squires; W. Cabot; S. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A*, 3: 2746 – 2757, 1991.
- [53] B. Vreman; B. Geurts; H. Kuerten. Subgrid-modelling in LES of compressible flow. *Applied Scientific Research*, 54: 191 – 203, 1995.
- [54] C. Martin; L. Benoit; F. Nicoud; T. Poinot. *Analysis of acoustic energy and modes in a turbulent swirled combustor*. Center for Turbulence Research - Proceedings of the Summer Program, 2004.

- [55] R.I. Sujith. *Acoustic Instabilities in Aerospace Propulsion*. Notes of Indian Institute of Technology Madras, 2004.
- [56] G.D.C. Kuiken; J.F. Dijksman. Simulation of non-isothermal flow of viscoelastic liquids. *Proceedings of IUTAM Symposium on Numerical Simulation of Non-Isothermal Flow of Viscoelastic Liquids*, 28, 1995.
- [57] A.D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill Book Company, 1981.
- [58] S.W. Rienstra; A. Hirschberg. *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2013.
- [59] M.E. Goldstein. *Aeroacoustics*. McGraw-Hill Book Company, 1976.
- [60] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley-VCH, 1989.
- [61] G.F.D. Duff and D. Naylor. *Differential Equations of Applied Mathematics*. Wiley, 1966.
- [62] I.N. Sneddon. *Elements of Partial Differential Equations*. Dover Books on Mathematics, 2006.
- [63] H.F. Weinberger. *A First Course in Partial Differential Equations: with Complex Variables and Transform Methods*. Dover Books on Mathematics, 1995.
- [64] G. Barton. *Elements of Green's Functions and Propagation: Potentials, Diffusion, and Waves*. Oxford Science Publications, 1989.
- [65] A.D. Polyanin. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [66] M.L. Munjal. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley and Sons, 1987.
- [67] E. Deuker. *Ein Beitrag zur Vorausberechnung des Akustischen Stabilitätsverhaltens von Gasturbinen-Brennkammern Mittels Theoretischer und Experimenteller Analyse von Brennkammerschwingungen*. PhD thesis, RWTH Aachen, 1995.

- [68] S.R. Turns. *An Introduction to Combustion: Concepts and applications*. McGraw-Hill Book Co, Singapore, 2000.
- [69] M.A. Liberman. *Introduction to Physics and Chemistry of Combustion: Explosion, Flame, Detonation*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [70] S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [71] E. Hairer; G. Wanner. Stiff differential equations solved by Runge-Kutta methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111: 93 – 111, 1999.
- [72] W.T. Ashurst. Vorticity generation in a nonpremixed flame sheet. *Lecture Notes in Physics*, 351: 1 – 21, 1989.
- [73] C.Q. Carpes; A.L. De Bortoli. Numerical analysis of the acoustics of a diffusion flame. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (doi):10.1016/j.cam.2015.01.022, 2015.
- [74] M. Leusieur, O. Metais, and P. Comte. *Large-Eddy Simulations of Turbulence*. Cambridge University Press, 2005.
- [75] Uriel Frisch. *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996.
- [76] John Volker. *Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [77] A.L. De Bortoli; G.S.L. Andreis; F.N. Pereira. *Modeling and Simulation of Reaction Flows*. Elsevier Science Publishing, 2015.
- [78] H. Pitsch and H. Steiner. Large-eddy simulation of a turbulent piloted methane/air diffusion flame. *Physics of Fluids*, 12:2541–2554, 2000.
- [79] B. J. Boersma and S. K. Lele. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. *CTR-Annual Research Briefs*, pages 365–377, 1999.
- [80] C.Q. Carpes; A.L. De Bortoli. *Técnicas de Estabilização de Chamas Difusivas: Estudo numérico sobre a estabilização de chamas*. Novas Edições Acadêmicas, 1 edition, 2014.

- [81] M.C.M. Wright. *The Mathematics of Acoustics*. Imperial College Press, 2004.
- [82] A.L. Birbaud; H. Pitsch. *Combustion noise modeling using compressible simulations*. Center for Turbulence Research - Annual Research Briefs, 2008.
- [83] S.A. Klein. *On the acoustics of turbulent non-premixed flames*. FEBO Druk - Enschede, 2000.
- [84] M. Ihme; H. Pitsch; D. Bodony. Radiation of noise in turbulent non-premixed flames. *Proceedings of the Combustion Institute*, 32: 1545 – 1553, 2009.
- [85] L.N. Trefethen. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. Cornell University, 1996.
- [86] A. Jameson. *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*, chapter Numerical solution of the Euler equations for compressible inviscid fluids, pages 199 – 245. SIAM, 1985.
- [87] H. Musa; I. Saidu; M.Y. Waziri. A simplified derivation and analysis of fourth order Runge Kutta Method. *International Journal of Computer Applications*, 9(8): 51 – 55, 2010.
- [88] T. Poinso; S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101: 104 – 129, 1992.
- [89] W. Polifke; C. Wall; P. Moin. Partially reflecting and non-reflecting boundary conditions for simulation of compressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 213: 437 – 449, 2006.
- [90] F. Piscaglia; A. Montorfano; A. Onorati. Development of a non-reflecting boundary condition for multidimensional nonlinear duct acoustic computation. *Journal of Sound and Vibration*, 332: 922 – 935, 2013.
- [91] D.H. Rudy; J.C. Strikwerda. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. *Journal of Computational Physics*, 80: 55 – 70, 1980.

- [92] T. Schönfeld; T. Poinso. Influence of boundary conditions in LES of premixed combustion instabilities. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, CA*, 1999.
- [93] L. Selle; F. Nicoud; T. Poinso. Actual impedance of nonreflecting boundary conditions: implications for computation of resonators. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 42: 958 – 964, 2004.
- [94] K.W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68: 01 – 24, 1987.
- [95] M. Giles. Non-reflecting boundary conditions for Euler equation calculations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 28: 2050 – 2058, 1990.
- [96] T.S. Phillips; C.J. Roy. Evaluation of extrapolation-based discretization error and uncertainty estimators. *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, pages 1 – 18, 2011.
- [97] P.J. Roache. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, pages 123 – 160, 1997.
- [98] I.B. Celik; U. Ghia; P.J. Roache; C.J. Freitas; H. Coleman; P.E. Raad. Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications. *Journal of Fluids Engineering*, 130: 1 – 4, 2006.
- [99] J.C. Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 2003.
- [100] J.C.R. Hunt; A.A. Wray; P. Moin. Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows. *In CTR Summer Program*, 1: 193 – 208, 1988.
- [101] J. Jeong; F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285: 69 – 94, 1995.

- [102] M. Lesieur; P. Begou; E. Briand; A. Danet; F. Delcayre; J.L. Aider. Coherent-vortex dynamics in large-eddy simulations of turbulence. *Journal of Turbulence*, 4: 1 – 24, 2003.
- [103] V. Faivre; T. Poinso. Experimental and numerical investigations of jet active control for combustion applications. *Journal of Turbulence*, 5: 1 – 16, 2004.
- [104] A. Devesa; J. Moreau; J. Hélie; V. Faivre; T. Poinso. Initial conditions for large eddy simulations of piston engine flows. *Computers and Fluids*, 36(4): 701 – 713, 2007.
- [105] S. Roux; G. Lartigue; T. Poinso; U. Meier; C. Berat. Studies of mean and unsteady flow in a swirled combustor using experiments, acoustic analysis, and large eddy simulations. *Combustion and Flame*, 141: 40 – 54, 2005.
- [106] R. Barlow. Proceedings of the TNF workshops. *Sandia National Laboratories*, 2004.
- [107] T.Ph. Bui; W. Schröder; M. Meinke. Numerical analysis of the acoustic field of reacting flows via acoustic perturbation equations. *Computers and Fluids*, 37: 1157 – 1169, 2008.
- [108] H. Brick; R. Piscoya; M. Ochmann; P. Költzsch. Prediction of the sound radiation from open flames by coupling a large eddy simulation and a Kirchhoff-method. *Aca Acust Unit Acust*, 91: 17 – 21, 2005.
- [109] F.M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, 1999.
- [110] T.P. Bui; W. Schröder; M. Meinke; H. Shalaby; D. Thévenin. Source term evaluation of the APE-RF system using DNS data. *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, pages 1 – 14, 2006.