

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DINÂMICA DO FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM UMA BARRA
DE HOPKINSON

por

Henrique Meneghetti Candia

Monografia apresentada ao
Departamento de Engenharia Mecânica da
Escola de Engenharia da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como parte
dos requisitos para obtenção do diploma de
Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2015

ANÁLISE DINÂMICA DO FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM UMA BARRA
DE HOPKINSON

por

Henrique Meneghetti Candia

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof^a. Dr^a. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Rogério Marczak

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, Novembro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a minha mãe, Susana, e a meu pai, Paulo, pelo esforço dedicado ao longo de todos os anos para que eu possa estar concluindo mais uma etapa de minha vida. Para que isto fosse possível, eles necessitaram abdicar de muitas coisas. Serei eternamente grato a eles por isso. Sem eles não seria possível.

Agradeço, também, ao Prof. Dr. Jakson Vassoler, que me orientou ao longo da realização deste trabalho e que sempre tinha importantes conselhos em momentos de dificuldades enfrentados. Sua dedicação é inspiradora.

Estendo o agradecimento a todos os colegas de curso com os quais tive a oportunidade de conviver. Formamos um grupo unido dentro da Engenharia Mecânica e isto nos incentiva a seguir em frente nos momentos de dificuldade. Avante Peões com Grife!

Por último, em nome de inúmeras gerações de engenheiros mecânicos formados sob sua influência, agradeço ao Prof. Dr. Jun Fonseca, falecido em Out/2015, pelos anos de dedicação à academia. Seus ensinamentos são perenes e sua influência, sem dúvida, foi preponderante em centenas de jovens engenheiros.

CANDIA, H. M. **Análise Dinâmica do Fenômeno de Propagação de Onda em uma Barra de Hopkinson**. 2015. 23. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

RESUMO

O desenvolvimento da engenharia traz consigo a necessidade da busca por soluções técnicas representativas e eficientes em termos da previsão do comportamento mecânico de materiais e estruturas. Para alimentar modelos matemáticos de fenômenos de impacto, normalmente é necessária a caracterização experimental do material sob altas taxas de deformação. Uma das técnicas mais comuns para a caracterização mecânica de materiais sob altas taxas de deformação, através da obtenção da curva tensão-deformação, é através da utilização da barra de Hopkinson. O equacionamento para obtenção desta resposta possui várias simplificações que podem não ser adequadamente respeitadas no projeto do aparato, ou mesmo na execução do ensaio mecânico. Assim, este trabalho visa a compreensão dos fenômenos dinâmicos de propagação de ondas envolvidos neste tipo de ensaio de modo a desenvolver ferramentas numéricas para avaliação e interpretação da esperada resposta mecânica. Para isto, são estudados e implementados modelos matemáticos unidimensionais e bidimensionais axissimétricos que servirão como um conjunto de modelos numéricos para auxiliar o projetista deste aparato, bem como o usuário. A implementação destes modelos permitem prever matematicamente a resposta de uma barra de Hopkinson e também pode auxiliar na análise dos resultados encontrados experimentalmente.

PALAVRAS-CHAVE: modelos numéricos, propagação de ondas, barra de Hopkinson

CANDIA, H. M. **Dynamic Analysis of Wave Propagation Phenomenon in a Split Hopkinson Pressure Bar**. 2015. 23. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ABSTRACT

The development of engineering demands the need of searching for representative and efficient technical solutions in terms of mechanical behavior prediction of materials and structures. To properly use mathematical models of impact phenomenon is usually necessary the experimental characterization of the material under high strain rates. One of the most common techniques for the mechanical characterization of materials at high strain rates, by obtaining the stress-strain curve is through the use of the Hopkinson bar. The equations for obtaining this response have a number of simplifications that cannot be adequately respected in the apparatus of the project, or even the implementation of the mechanical test. This work aims to understand the dynamic phenomena of wave propagation involved in this type of test in order to develop numerical tools to evaluate and understand its expected mechanical response. Thus, it was implemented a one-dimensional and two-dimensional mathematical model that will serve as a set of numerical models to help the designer of this apparatus, as well as the user. The implementation of these models allowed to mathematically predict the response of a Hopkinson bar and can also assist in the analysis of the results obtained experimentally.

KEYWORDS: numerical models, wave propagation, split Hopkinson pressure bar

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Objetivos.....	2
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	2
2.1. A barra de Hopkinson.....	2
2.1.1. Transmissão e reflexão de onda na barra de Hopkinson.....	3
2.1.2. Tensão, deformação e taxa de deformação no corpo de prova.....	4
2.1.3. Validade da simplificação unidimensional.....	4
2.2. Propagação de ondas elásticas em sólidos.....	5
2.2.1. Características Gerais.....	5
2.2.2. Propagação de onda unidimensional longitudinal.....	6
2.2.2.1. Solução analítica da onda unidimensional.....	7
2.2.2.2. Solução numérica da onda unidimensional.....	7
2.2.3. Propagação de onda generalizada.....	9
3. METODOLOGIA.....	10
3.1. Modelo unidimensional numérico.....	10
3.2. Modelo bidimensional numérico.....	11
4. MODELO COMPLETO DA BARRA DE HOPKINSON.....	14
5. CONCLUSÕES.....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
Apêndice 1.....	16
Anexo 1.....	18

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da engenharia traz consigo a necessidade da busca por soluções técnicas representativas e eficientes em termos da previsão do comportamento mecânico de materiais e estruturas. Por exemplo, indústrias como a automobilística, aeroespacial e de proteção balística possuem diversos problemas de natureza dinâmica, que não permitem que sejam aplicados exagerados coeficientes de segurança, os quais vêm a suplantar as deficiências e limitações da solução empregada.

Nas aplicações dinâmicas envolvendo impacto, os corpos são submetidos a carregamentos aplicados de forma quase instantânea [Hiermaier, 2007] e normalmente sua solução envolve contato e resposta não linear do material. Além disto, a maioria dos materiais demonstra forte sensibilidade a taxa de deformação [Ramesh, 2008]. Quando se necessita estimar o comportamento mecânico, além de um modelo matemático adequado, com parâmetros de solução apropriados segundo o método escolhido, é necessário caracterizar a resposta mecânica real do material nas velocidades de deformações que este alcança durante o tempo de análise.

Problemas dinâmicos são caracterizados pela natureza transiente de seu comportamento. Sua análise, do ponto de vista matemático, passa pela solução de equações de conservação de massa, momento linear e energia – as quais são descritas através de equações diferenciais parciais em função do tempo. A solução analítica de tais equações, para geometria complexas, usualmente, não é uma tarefa trivial e demanda métodos de resolução avançados – necessitando comumente adotar, desta forma, uma abordagem numérica ao problema. O problema torna-se ainda mais laborioso, do ponto de vista numérico, quando se inclui não linearidades devido à existência de contato entre partes de corpos deformáveis sujeitos a impacto, ou mesmo não linearidades de comportamento de material, como deformações permanentes ou viscosas. Assim, existem inúmeras dificuldades técnicas na modelagem de um problema de impacto entre dois corpos que necessitam ser bem compreendidas.

Para alimentar modelos matemáticos de fenômenos de impacto, normalmente é necessária a caracterização experimental do material sob altas taxas de deformação, que pode identificar a variação de suas propriedades mecânicas – como tensão de escoamento e ruptura, módulo de elasticidade e tenacidade – em relação a resultados em condições quasi-estáticas [Curry, 2012]. Porém, o próprio experimento do qual se obtém tais informações pode necessitar de atenção na interpretação de seus resultados.

Existem inúmeras técnicas experimentais através das quais o comportamento mecânico do material pode ser determinado. Tais técnicas variam conforme a taxa de deformação a qual o material deve ser submetido [Ramesh, 2008]. O método mais utilizado para se obter a resposta do material sob altas taxas de deformação através de uma curva tensão-deformação é o experimento com a Barra de Hopkinson [Owens, 2007]. Entretanto, devido às hipóteses que são adotadas em seu equacionamento unidimensional de propagação de uma onda trapezoidal, diversos fatores na concepção do aparato, bem como na execução do ensaio, podem fazer com que estas hipóteses não sejam adequadamente satisfeitas, levando a obtenção de respostas não realísticas. Alguns dos problemas estão relacionados a uniaxialidade das equações empregadas, dispersão da onda longitudinal, efeitos de inércia radial, atrito e alinhamento entre as barras [Silva, 2010]. Cada um destes pode modificar de forma mais ou menos significativa a resposta de propagação da onda, inviabilizando o uso de seus resultados. Estas correlações entre resposta da propagação da onda e os problemas que a originaram não são triviais. Assim, a resposta do próprio experimento deve ser compreendida para adequada interpretação de seus dados, antes mesmo da utilização de suas informações em um problema de impacto real.

É notável, portanto, que o entendimento de todos os aspectos numéricos e experimentais envolvidos em fenômenos dinâmicos é complexo e ainda demanda de um maior entendimento. Por isto, é motivo de pesquisa em inúmeros centros acadêmicos de excelência

no mundo - tanto ao que tange os métodos de resolução de suas equações, quanto à influência da taxa de carregamento nas respostas mecânicas experimentais dos materiais.

1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como principal objetivo compreender, do ponto de vista matemático, o modelamento do fenômeno dinâmico de propagação de onda envolvido em um experimento com a barra de Hopkinson. Para isto, serão desenvolvidos modelos numéricos que possibilitem o entendimento do fenômeno envolvido no aparato projetado, permitindo estimar as respostas em um projeto preliminar da barra, bem como suas limitações. Além disto, espera-se que estes modelos sejam capazes de ser aplicados futuramente em um aparato já construído, para interpretar corretamente quais problemas podem estar associados com uma resposta aparentemente incoerente segundo as hipóteses adotadas em sua concepção. Com este intuito, pretende-se compreender os conceitos envolvidos na dinâmica de corpos deformáveis segundo fenômenos de impacto em meios contínuos, onde o principal enfoque será no sistema de barras de Hopkinson. Tal compreensão passa pela implementação de caso particular unidimensional de propagação de ondas, bem como bidimensionais axissimétricos, que irão compor o conjunto de modelos numéricos deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 A barra de Hopkinson

Sua configuração consiste em duas barras longas que tem a extremidade de uma destas impactada por um projétil. Conforme Hiermaier, 2007, tal experimento é extremamente representativo para determinação das propriedades do material sob taxas de deformação na ordem de $10^2 - 10^4 s^{-1}$, conforme mostrado na Figura 2.1

No experimento utilizando a barra de Hopkinson, em sua forma usual, um corpo de prova cilíndrico é posicionado entre duas barras elásticas esbeltas colineares, conforme mostrado na Figura 2.2. As barras são geralmente feitas de material metálico com alta resistência mecânica e com uma relação comprimento-diâmetro de ao menos 20 – geralmente esta relação é superior a este valor [Chen e Song, 2011].

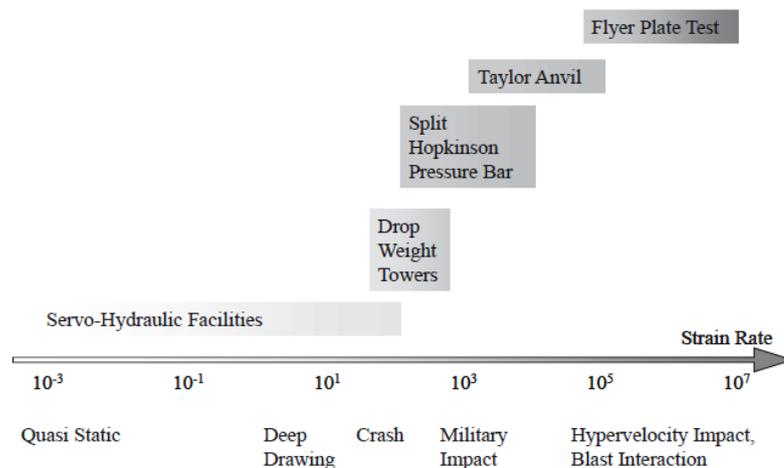


Figura 2.1 - Faixa de taxa de deformação aplicável aos diferentes métodos de ensaios mecânicos [Hiermaier, 2007].

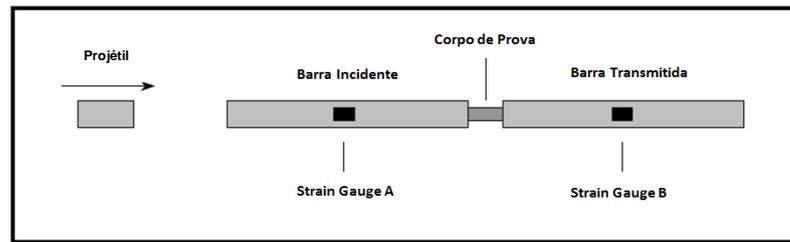


Figura 2.2 - Representação esquemática de um sistema de Barra de Hopkinson, adaptado de Kaiser, 1998.

O projétil é disparado contra a extremidade da Barra Incidente gerando um pulso de onda de deformação compressiva nesta. Imediatamente após o impacto, o pulso é propagado pela Barra Incidente até que atinge a primeira interface com o corpo de prova, onde é parcialmente refletido e parcialmente propagado para a Barra Transmitida – relação proporcional à diferença de impedância entre o corpo de prova e as barras [Kaiser, 1998]. O histórico do pulso de deformação nas duas barras é medido pelos Strain Gauges A e B. A medição e análise do pulso incidente, refletido e transmitido permite a determinação da curva tensão-deformação do corpo de prova.

2.1.1 Transmissão e reflexão de ondas na barra de Hopkinson

O perfil do pulso de onda gerado pelo impacto do projétil, usualmente, é trapezoidal [Chen e Song, 2011]. O período deste pulso é determinado pelo tempo necessário para que a onda de impacto percorra todo o comprimento do projétil. De acordo com Kaiser, 1998, o período, T , a amplitude do pulso de deformação, ε_{amp}^i , e a amplitude do pulso de tensão, σ_{amp}^i , gerada pelo impacto de um projétil de mesmo material que a barra, é definido, respectivamente, por:

$$T = \frac{2L_p}{c_p} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{amp}^i = \frac{1}{2} \frac{v_p}{c_b} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{amp}^i = \frac{1}{2} \rho_b c_b v_p \quad (2.3)$$

onde L_p , v_p e c_p são o comprimento, a velocidade de impacto e a velocidade de propagação de onda do projétil, respectivamente. Por sua vez, ρ_b e c_b são a densidade e a velocidade de propagação de onda da barra impactada, respectivamente.

Segundo Graff, 1975, esta amplitude conserva-se, ignorando os efeitos de dispersão radial e amortecimento, desde que a frente de onda não encontre descontinuidades. Kaiser, 1998, cita que os tipos mais comuns de descontinuidades no sistema da barra de Hopkinson são a variação da seção transversal e das propriedades do material. Outra fonte de descontinuidade é proveniente de espaços vazios entre as barras, originados de problemas de faces paralelas ou desalinhamento [Chen e Song, 2011]. Usualmente, tais descontinuidades ocorrem na interface barra-corpo de prova. O comportamento da frente de onda na interface com descontinuidades pode ser regido pelo descompasso entre as impedâncias desta interface [Chen e Song, 2011].

A influência da interface entre dois corpos, devido a impedância, pode ser incluída na solução numérica da propagação de uma onda de uma forma simples. A impedância, dentro de problemas mecânicos, é definida como a razão entre a força motriz e a velocidade em um

ponto da estrutura [Graff, 1975]. A Equação 2.4 representa a expressão para a impedância mecânica em um sistema de Barra de Hopkinson [Kaiser, 1998]:

$$Z = \frac{F}{V} = A\rho c_L \quad (2.4)$$

onde Z representa a impedância mecânica, A é a seção transversal, ρ a densidade e c_L é a velocidade de propagação da onda longitudinal no componente.

Desta forma, pode-se definir um coeficiente de transmissão, α , e reflexão, β . O coeficiente de transmissão é a razão entre a amplitude transmitida e refletida de um pulso de onda quando encontra uma interface. Assumindo continuidade de força e velocidade, os coeficientes de transmissão e reflexão entre um componente 1 e um componente 2 são definidos por Graff, 1975, respectivamente, como:

$$\alpha_{12} = \frac{2A_1(\rho c)_2}{A_1(\rho c)_1 + A_2(\rho c)_2} \quad (2.5)$$

$$\beta_{12} = \frac{A_2(\rho c)_2 - A_1(\rho c)_1}{A_2(\rho c)_2 + A_1(\rho c)_1} \quad (2.6)$$

Com a definição da expressão para o coeficiente de transmissão e reflexão apresentado nas Equações 2.5 e 2.6, as expressões para a transmissão de ondas podem ser resolvidas para as duas interfaces do sistema apresentado na Figura 2.2.

2.1.2 Tensão, deformação e taxa de deformação no corpo de prova

Utilizando a hipótese de deformação uniforme no corpo de prova, as expressões que relacionam as deformações nas barras incidente e transmitida com as propriedades mecânicas do corpo de prova são significativamente simplificadas [Kaiser, 1998]. Segundo Chen e Song, 2011, através da aquisição dos dados de deformação pelos strain gauges mostrados na Figura 2.2, pode-se calcular os esforços no corpo de prova e, conseqüentemente, a curva tensão-deformação, através das expressões:

$$\frac{d\varepsilon_S(t)}{dt} = \frac{2c_L}{L_S} \varepsilon_R(t) \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_S(t) = \frac{-2c_L}{L_S} \int_0^t \varepsilon_R(t) dt \quad (2.8)$$

$$\sigma_S(t) = E \frac{A_B}{A_S} \int_0^t \varepsilon_T(t) dt \quad (2.9)$$

onde ε_S , ε_R , ε_T representam, respectivamente, o histórico de deformação no corpo de prova, refletido na barra incidente e transmitido à barra transmitida. O comprimento do corpo de prova é L_S e as seções transversais das barras e do corpo de prova definidas por A_B e A_S , respectivamente.

2.1.3 Validade da simplificação unidimensional

As equações apresentadas na seção 2.1.2 foram desenvolvidas para a propagação de onda unidimensional em uma barra elástica. Ou seja, todos os esforços internos são

considerados uniaxiais. As equações utilizadas em um experimento com a barra de Hopkinson assumem que esta hipótese é verdadeira e, desta forma, a única componente não-nula no tensor de deformação é a referente a direção axial da barra. Esta hipótese também não considera que as diferentes frequências que formam a onda de deformação longitudinal podem viajar com velocidades diferentes.

A geometria do aparato tem papel importante na validade desta aproximação unidimensional. A relação do comprimento das barras em relação ao seu diâmetro deve ser maior do que vinte [Chen e Song, 2011]. Além disto, segundo Kaiser, 1998, o fator experimental mais importante que influencia na natureza da onda propagada é o alinhamento entre as barras. Se o impacto entre estas ocorre com um ângulo de incidência, uma distribuição não-uniforme da onda ocorrerá ao longo da seção transversal da barra e, portanto, um campo de deformação multidimensional estará ocorrendo. Tal cuidado estende-se para o impacto do projétil com a barra incidente.

Como a barra, na verdade, está livre para se mover na direção radial, o tensor de deformação nesta é efetivamente bidimensional, devido ao efeito Poisson [Graff, 1975]. Tal fenômeno é descrito como dispersão radial e causa oscilações no pulso de onda. Segundo Chen e Song, 2011, este fenômeno é menos significativo em barras esbeltas ($L/D > 20$) e pode ser controlado através de filtros mecânicos ou corrigido matematicamente *a posteriori*. Outro fator que deve ser minimizado para que a aproximação unidimensional seja representativa é o atrito na interface superficial entre o corpo de prova [Ramesh, 2008]. Para isto, é comum a utilização de lubrificantes no contato entre os componentes [Chen e Song, 2011].

2.2 Propagação de ondas elásticas em sólidos

As consequências do carregamento aplicado a uma estrutura são transmitidas ao longo de um corpo através de ondas que se propagam na velocidade do som neste meio considerado contínuo [Hiermaier, 2007]. Em caso de carregamentos quasi-estáticos, os efeitos da propagação de ondas não são investigados, uma vez que a duração deste carregamento é longa comparada a duração das subsequentes reflexões na estrutura [Bower, 2009]. Entretanto, se as ondas de carregamento induzidas no sólido assumirem a forma e amplitude das chamadas ondas de choque e estiverem na ordem da velocidade do som local, os efeitos da propagação de onda através da estrutura precisam ser resolvidos no tempo e no espaço [Hiermaier, 2007].

2.2.1 Características gerais

As ondas em um sólido são basicamente perturbações no campo de velocidades propagando em um meio contínuo de diferentes formas e em velocidades relativas diferentes [Hiermaier, 2007]. As mais importantes formas de propagação de ondas são [Bower, 2009]:

- 1) Ondas Longitudinais: Podendo ser trativas ou compressivas, causam a deflexão das partículas do meio ao longo da direção de propagação da onda. São as ondas que se propagam de forma mais rápida no sólido e, portanto, também chamadas de ondas primárias. Sua velocidade de propagação é usualmente definida por $c_L = (E/\rho)^{1/2}$, onde E é o Módulo de Elasticidade e ρ a densidade do material.
- 2) Ondas Transversais: Também chamadas de cisalhantes, é a segunda mais rápida forma de propagação de onda no sólido, por isto, conhecida por ondas secundárias. Sua velocidade de propagação costuma ser definida por $c_S = (G/\rho)^{1/2}$, onde G é o Módulo de Cisalhamento do material.
- 3) Ondas de Rayleigh: Propagam-se ao longo da superfície do sólido.
- 4) Ondas de Flexão: Em estruturas com rigidez finita à flexão, se propagam mediante um carregamento dinâmico.

As ondas mais comuns nas aplicações dos problemas dinâmicos abordados no presente trabalho são ondas longitudinais e transversais, onde esta última é normalmente desconsiderada devido a escolhas constitutivas. Suas representações ilustrativas estão mostradas na Figura 2.3.

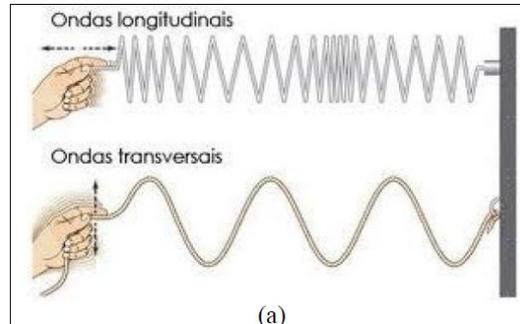


Figura 2.3 – Propagação de onda longitudinal e transversal [Silva, 2010].

A maneira de representar matematicamente os problemas dinâmicos é através das equações de conservação de massa, momento e energia, as quais levam a uma equação de movimento e, não, de equilíbrio [Hiermaier, 2007].

2.2.2 Propagação de onda unidimensional longitudinal

Para deduzir a equação da onda unidimensional, pode-se definir um elemento diferencial de tamanho dx e seção transversal A . Após a aplicação da carga, as partículas deste elemento diferencial estão sob compressão devido às forças F_1 e F_2 , conforme mostrado na Figura 2.4.

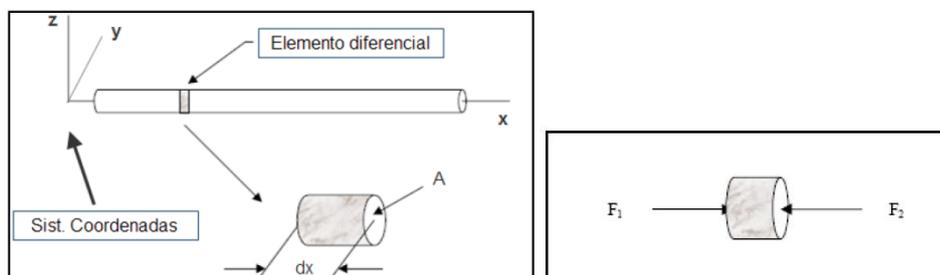


Figura 2.4 – Definição do elemento diferencial e equilíbrio dinâmico de forças [Silva, 2010].

As forças no elemento diferencial podem ser associadas aos esforços internos. Para um material linear elástico, tais esforços são associados aos deslocamentos diretamente pela Lei de Hooke. Assumindo um estado uniaxial de tensões e se valendo-se da igualdade $c_L = \sqrt{E/\rho}$, chega-se na expressão para a velocidade de propagação da onda longitudinal em um meio infinito [Silva, 2010]:

$$c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

onde u_1 é a componente longitudinal do deslocamento. O relativamente simples e analiticamente solucionável caso da propagação unidimensional da onda em um meio sólido linear-elástico ainda possui relevância significativa dentro do contexto da engenharia. Em tal aproximação, a única componente do tensor tensão não-nula é a componente longitudinal. A

contribuição do deslocamento transversal para o estado de deformações do corpo é ignorada. Segundo Chen e Song, 2011, dentro do contexto da elasticidade linear, tal aproximação gera resultados satisfatórios em pontos de uma barra de Hopkinson cuja distância das extremidades é superior a dois diâmetros.

2.2.2.1 Solução analítica da onda unidimensional

A solução analítica da Equação 2.10 é função das condições iniciais e das condições de contorno nas extremidades aplicadas ao sistema. Para a solução do problema em questão, necessita-se de duas condições iniciais e duas condições de contorno conforme mostrado no exemplo a seguir:

$$c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\text{Condições de Contorno: } \quad \partial u(0,t)/\partial x = 0 \text{ e } \partial u(L,t)/\partial x = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Condições Iniciais: } \quad u(x,0) = f(x) \text{ e } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

A Equação 2.11 representa a equação da onda através de uma equação diferencial parcial, homogênea e de segunda ordem. A variável $t > 0$ representa o tempo, $x \in \mathfrak{R}$ é a variável espacial e $c_L > 0$ é uma constante que representa a velocidade de propagação da onda no sólido. Segundo Silva, 2010, existem diversas maneiras de se solucionar o problema de contorno descrito acima. Um dos métodos comumente utilizado é o método de separação de variáveis, que tem sua solução para o deslocamento $u(x,t)$ apresentada por Graff, 1975, e descrita na Equação 2.12.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \text{sen} \frac{n\pi c}{L} t \right) \text{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (2.12)$$

Os coeficientes A_n e B_n são obtidos através da aplicação das condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$ sobre a solução de $u(x,t)$ encontrada, resultando em:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad (2.13)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad (2.14)$$

Portanto, a solução analítica da equação da onda unidimensional consiste na série de Fourier expressa na Equação 2.12, com os coeficientes A_n e B_n definidos pelas condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$. São estas condições iniciais que determinarão o modo de propagação da onda no meio [Graff, 1975].

2.2.2.2 Solução numérica da onda unidimensional

Normalmente, utiliza-se métodos de solução numérica para obter-se uma solução aproximada do problema. Segundo Zill e Cullen, 2001, para certas aplicações dinâmicas, é perfeitamente justificável adotar uma aproximação numérica para problemas envolvendo o fenômeno de propagação de ondas em sólidos.

Métodos numéricos buscam a solução aproximada do problema através da discretização do domínio sob análise. No problema unidimensional da barra de Hopkinson, a discretização deve ocorrer no espaço e no tempo. A solução da equação de movimento discretizada pode ser realizada utilizando o método implícito ou explícito. O método implícito soluciona a equação de movimento utilizando tanto o estado atual de deslocamento $u(i, j)$ como o estado de tempo no novo incremento $u(i, j + \Delta t)$. Desta forma, necessita de um método iterativo para resolver a equação de movimento. Devido a este processo iterativo, é computacionalmente mais custoso que o método explícito [Bower, 2009]. Contudo, tem sua convergência independente do tamanho de incremento no tempo escolhido, possibilitando grandes incrementos temporais [Hiermaier, 2007]. Por sua vez, o método explícito soluciona a equação de movimento utilizando apenas variáveis previamente calculadas nos incrementos anteriores, $u(i, j - \Delta t)$ e $u(i, j)$, para determinar o novo estado de deslocamento $u(i, j + \Delta t)$. Diferentemente do método implícito, a convergência da solução explícita é restrita a escolha de um incremento de tempo adequado [Bower, 2009].

Um método pertinente para a discretização espacial e temporal da equação da onda unidimensional, apresentada na Equação 2.10, é o método das diferenças finitas. Este método aproxima a segunda derivada de uma função genérica $f(x)$ na posição $(i, j + 1)$, de forma explícita, conforme a Equação 2.15:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{2h^2} \quad (2.15)$$

Bancroft, 2002, apresenta a formulação numérica da equação da onda unidimensional utilizando a Equação 2.15 e a substituindo na Equação 2.10:

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} - \frac{c_L^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (2.16)$$

onde Δx e Δt são os incrementos no espaço e no tempo, respectivamente, utilizados para a discretização do domínio. Para obter a posição da onda no tempo $j + 1$, de acordo com a Equação 2.16, necessita-se determinar as duas posições da onda nos tempos anteriores j e $j - 1$, ou seja, as duas condições iniciais do problema necessárias pra solução explícita da equação. Na Figura 2.5, está mostrado o operador de diferenças finitas posicionado na posição i para calcular a posição da onda no tempo $j = 3$ [Bancroft, 2002].

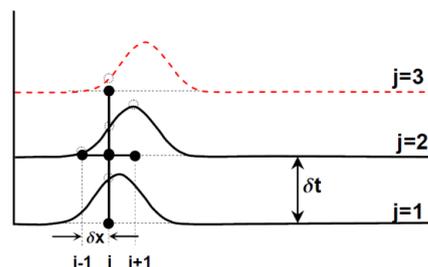


Figura 2.5 - As duas primeiras condições iniciais em $j = 1$ e $j = 2$ para computar a posição do pulso de onda no tempo $j = 3$ [Bancroft, 2002].

Para qualquer método de solução explícita, sua estabilidade está condicionada ao tamanho do passo de tempo Δt escolhido. Este passo de tempo é limitado pela razão da velocidade máxima de propagação da onda no meio e o tamanho mínimo das unidades de espaço discretizadas [Hiermaier, 2007]. Segundo Hiermaier, 2007, o maior passo de tempo

estável, Δt_{\max} , é determinado pela chamada Condição Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) definida como:

$$\Delta t_{\max} \leq C_{\max} \frac{\Delta x_{\min}}{c_L} \quad (2.18)$$

onde C_{\max} é o número de Courant máximo, c_L é a velocidade de propagação de onda no sólido e Δx_{\min} é o menor tamanho das unidades do domínio espacial discretizadas (malha). Segundo Bower, 2009, para problemas dinâmicos gerais, utiliza-se $C_{\max} = 1$. Desta forma, para garantir a convergência em métodos de solução explícitos, necessita-se usar unidades espaciais muito pequenas e/ou pequeno Δt , o que pode encarecer de forma significativa o custo computacional de métodos explícitos. Qualquer leve variação de Δt pode levar a instabilidade da solução numérica.

2.2.3 Propagação de onda generalizada

Em problemas reais de engenharia, a geometria, normalmente, não pode ser simplificada a ponto de se utilizar apenas as equações de propagação de onda unidimensional descritas anteriormente. Segundo Hiermaier, 2007, um problema de propagação de onda, na forma geral de um caso tridimensional, é regido pela Equações 2.19 e 2.18:

$$\nabla \cdot [\nabla \vec{u}] = \frac{1}{c_d} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$c_d = \sqrt{\frac{K + 4/3G}{\rho}} \quad (2.20)$$

onde c_d é a velocidade de propagação de onda no material, K representa a compressibilidade isotérmica, G o Módulo de Cisalhamento e ρ a densidade do material.

Para solucionar estes casos é necessário abordar o problema com técnicas mais robustas. Um dos procedimentos de análise dinâmica que pode ser usado integra explicitamente as equações de movimento utilizando o método de diferenças centrais [ABAQUS, 2013]:

$$\dot{u}_{(i+\frac{1}{2})}^N = \dot{u}_{(i-\frac{1}{2})}^N + \frac{\Delta t_{(i+1)} + \Delta t_{(i)}}{2} \ddot{u}_{(i)}^N \quad (2.21)$$

$$u_{(i+1)}^N = u_{(i)}^N + \Delta t_{(i+1)} \dot{u}_{(i+\frac{1}{2})}^N \quad (2.22)$$

onde u^N é o vetor deslocamento com N graus de liberdade e o subscrito i se refere ao número do incremento dentro da análise explícita.

Para aumentar a eficiência computacional do método, a aceleração $\ddot{u}_{(i)}^N$ é determinada através da matriz de massa diagonal conforme [ABAQUS, 2013]:

$$\ddot{u}_{(i)}^N = (M^N)^{-1} (P_{(i)}^N - I_{(i)}^N) \quad (2.23)$$

onde M^N é a matriz de massa diagonal (*lumped mass*), $P_{(i)}^N$ é o vetor de carregamento aplicado e $I_{(i)}^N$ é o vetor de carregamento interno. O procedimento explícito utiliza pequenos incrementos de tempo, uma vez que o operador de diferenças centrais é condicionalmente estável.

O limite de estabilidade do método é dado em termos da máxima frequência do sistema e é estimado inicialmente por:

$$\Delta t \leq \frac{L_{min}}{c_d} \quad (2.24)$$

onde L_{min} é a dimensão do menor elemento da discretização e c_d é a velocidade de propagação de onda no material.

3. METODOLOGIA

Com o intuito de entender o fenômeno de propagação de onda existente em uma barra de Hopkinson e de avaliar a pertinência das hipóteses de resolução usualmente adotadas em seu equacionamento, dividiu-se o problema em duas fases.

Em uma abordagem inicial o problema unidimensional foi abordado numericamente através de uma rotina implementada em MATLAB®. Os resultados obtidos através do método unidimensional servem como base para a compreensão do fenômeno em questão e constituem os primeiros modelos matemáticos para estimativa de comportamento de uma barra de Hopkinson. Em um segundo momento, em busca de uma maior representatividade do fenômeno, foi desenvolvido um modelo bidimensional axissimétrico usando o pacote de elementos finitos ABAQUS/Explicit®. Este modelo bidimensional serve como uma ferramenta para entender as variabilidades existentes no processo e auxilia a análise de resultados experimentais provenientes de uma barra de Hopkinson já construída.

3.1 Modelo unidimensional numérico

O modelo numérico unidimensional foi implementado utilizando a aproximação por diferenças finitas, mostrada na Equação 2.16, usando o software comercial MATLAB®. Utilizou-se um pulso de onda trapezoidal com amplitude unitária como condição inicial, conforme Equação 3.1.

$$u(x,1) = u(x,2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{5000} \frac{\text{sen}((2k-1)x)}{(2k-1)} \quad (3.1)$$

A função onda trapezoidal foi obtida por meio de uma série de soma de senos truncada no termo $n=5000$ – número suficiente para diminuir as oscilações de forma satisfatória.

O modelo desenvolvido tenta reproduzir a propagação da condição inicial da Equação 3.1 entre uma barra de aço e de alumínio. Conforme mencionado anteriormente, o incremento de tempo máximo para garantir a convergência do método numérico deve respeitar a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). A Tabela 3.1 mostra as propriedades geométricas, materiais e os resultantes incrementos de espaço e tempo utilizados:

Tabela 3.1 – Dados Utilizados no Modelo Numérico Unidimensional

Material	Aço (Barra Incidente)	Alumínio (Barra Transmitida)
Módulo de Elasticidade, GPa	210	68
Densidade, kg/m ³	7800	2690
Diâmetro, mm	20	10
Velocidade da Onda, m/s	5188	5027
Incremento no Espaço Δx , mm	1	1
Incremento no Tempo Δt , s	1.92E-6	1.98E-6

A parcela da amplitude da onda que será refletida ou transmitida nas interfaces entre as barras é definida pela diferença de impedância entre os dois materiais, conforme a Equação

2.5 e 2.6. A Tabela 3.2 mostra os valores dos coeficientes de transmissão, α , e de reflexão, β , para o modelo desenvolvido:

Tabela 3.2 – Coeficientes de Transmissão e Reflexão nas Interfaces

Coeficiente	Barra Incidente p/ Transmitida
Coeficiente de Transmissão, α	$\alpha_{12} = 0.61$
Coeficiente de Reflexão, β	$\beta_{12} = 0.39$

A Figura 3.1 mostra a vista tridimensional que representa o deslocamento longitudinal propagando na barra incidente para os diferentes incrementos de tempo e espaço. Por sua vez, a Figura 3.2 mostra que esta modelo é capaz de representar as características do pulso incidente, refletido e transmitido nas barras incidente e transmitida.

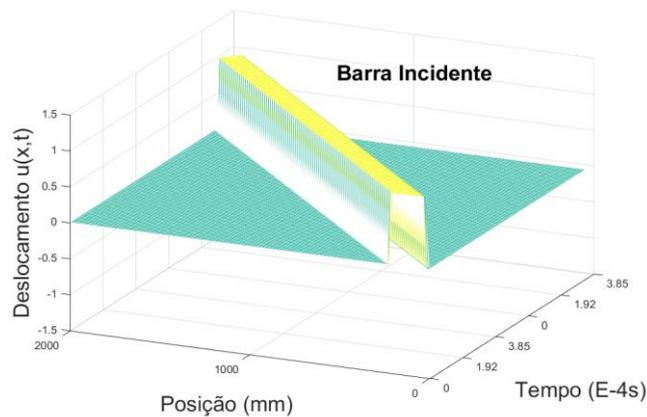


Figura 3.1 – Solução numérica para o pulso de onda trapezoidal propagando na barra incidente.

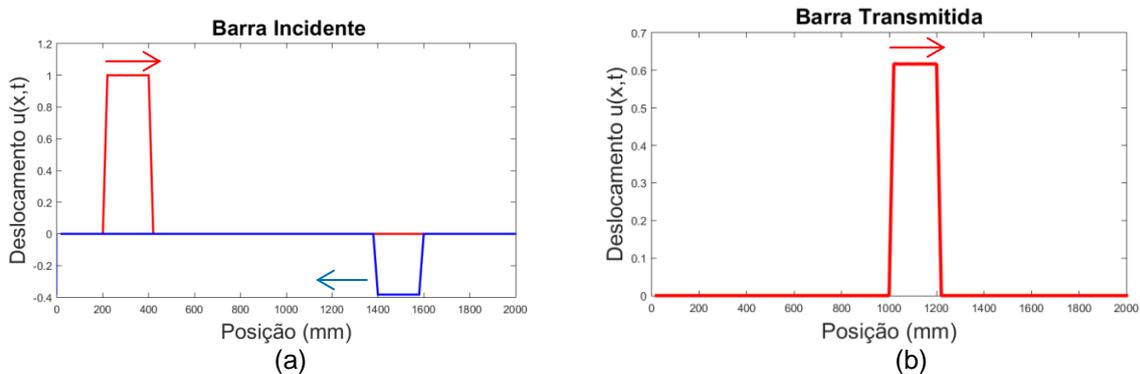


Figura 3.2 – a) Pulso incidente (vermelho) e refletido (azul) na barra incidente; b) pulso transmitido para a segunda barra.

3.2 Modelo bidimensional numérico

O modelo unidimensional apresentado anteriormente tem suas aplicações limitadas e não contabiliza importantes efeitos característicos de uma barra de Hopkinson, como a dispersão radial, desalinhamentos, entre outros. Utilizando o pacote de solução explícita do ABAQUS®, desenvolveu-se um modelo dinâmico axissimétrico composto por um projétil, uma barra incidente e uma barra transmitida, conforme mostrado na Figura 3.3. As barras e o projétil foram modeladas com o mesmo material e seção transversal.

Foi utilizado o cálculo automático do incremento de tempo para a solução explícita, que considera o menor tamanho de elemento da malha e a velocidade de propagação da onda

neste elemento, conforme Equação 2.24. Todos os materiais foram considerados elásticos, lineares e isotrópicos. A Tabela 3.3 mostra as propriedades do material e o incremento de tempo utilizado (calculado de forma automática pelo software).

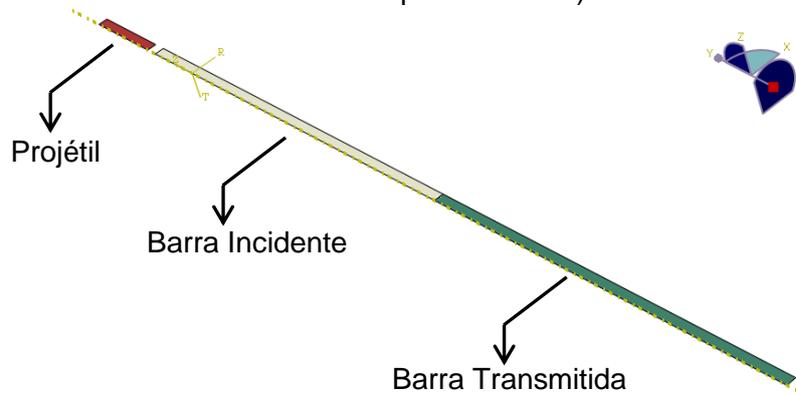


Figura 3.3 -Representação do modelo axissimétrico desenvolvido utilizando o ABAQUS/Explicit®.

Tabela 3.3 – Dados Utilizados no Modelo Bidimensional

Propriedade	Barras	Projétil
Módulo de Elasticidade, GPa	210	210
Densidade, kg/m ³	7800	7800
Diâmetro, mm	20	20
Comprimento, mm	2000	200
Velocidade da Onda, m/s	5188	5188
Incremento de tempo, Δt	9.2E-8	9.2E-8

O elemento utilizado foi o CAX4R [Silva, 2010], que é um elemento axissimétrico bilinear de 4 nós, com integração reduzida. A malha gerada, tanto para as barras como para o projétil, tem tamanho global de 2mm. Porém, na região central das barras, onde a aquisição do sinal da onda é feita, refinou-se a malha para um tamanho local de 0.3mm, escolhido em função do tamanho de um *strain gauge* convencional (3mm). Assim, os dados adquiridos na simulação são resultantes da média entre os 10 elementos destacados em vermelho na Figura 3.4.

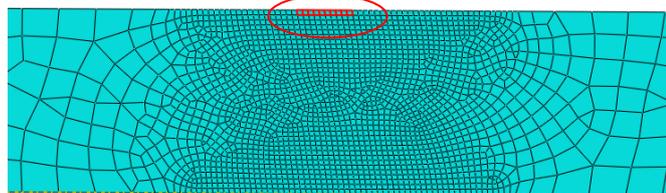


Figura 3.4 – Representação da malha utilizada na região central da barra, com os 10 elementos de aquisição de dados marcados em vermelho.

A formulação do contato entre os componentes do modelo tem direta influência nos resultados obtidos dinamicamente. Diante da impossibilidade de validar os parâmetros escolhidos experimentalmente, utilizou-se os parâmetros de contato definidos por Silva, 2010, que foram validados pelo autor. Existem dois contatos neste primeiro modelo implementado: entre projétil e barra incidente e entre barra incidente e transmitida. Para ambas as interfaces, foi utilizado contato cinemático, com comportamento normal (*normal behavior*) através de um contato rígido (*Hard Contact*) [Silva, 2010]. Contato rígido significa que as superfícies não transmitem pressão até que exista contato entre os nós, não é permitido penetração e não existe limite na pressão de contato transmitida entre as superfícies [ABAQUS, 2013]. A

velocidade de impacto do projétil foi definida como 15m/s e não existe restrição no movimento das barras após o impacto (barras livres). A Figura 3.5 mostra o pulso de onda de deformação e tensão gerados pelo impacto do projétil na barra incidente. Com o objetivo de validar o modelo desenvolvido, os resultados numéricos obtidos para amplitude de deformação e tensão foram comparados com as equações unidimensionais analíticas mostradas nas Equações 2.2 e 2.3. Deve-se lembrar que o modelo 1D não contabiliza dispersões da onda longitudinal e por isto deve apresentar a onda de deformação sem oscilações, que podem ocorrer na realidade. A Tabela 3.4 apresenta esta comparação quantitativa. Os valores máximos e mínimos representam o maior e o menor valor de amplitude dentro da oscilação do pulso de onda, respectivamente. A média destes dois valores foi comparada com o valor analítico unidimensional, a diferença resultante está apresentada na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Comparação entre o resultado numérico e o analítico

	Analítico 1D	Numérico 2D			Diferença da média	
		mín	máx	média	Absoluta	Percentual
Deformação	1,44E-3	1,20E-3	1,77E-3	1,48E-3	0,04E-3	3%
Tensão, MPa	303,5	254	367	310,5	7	2%

Os resultados numéricos 2D obtidos demonstraram ser satisfatórios quando comparados com as expressões analíticas unidimensionais. Segundo Kaiser, 1998, as oscilações encontradas no perfil do pulso são resultantes da dispersão radial e das diferentes frequências naturais associadas à barra, que não são previstas no modelo unidimensional. Também estão condizentes com resultados experimentais apresentados por Chen e Song, 2011, e com resultados numéricos apresentados por Silva, 2010.

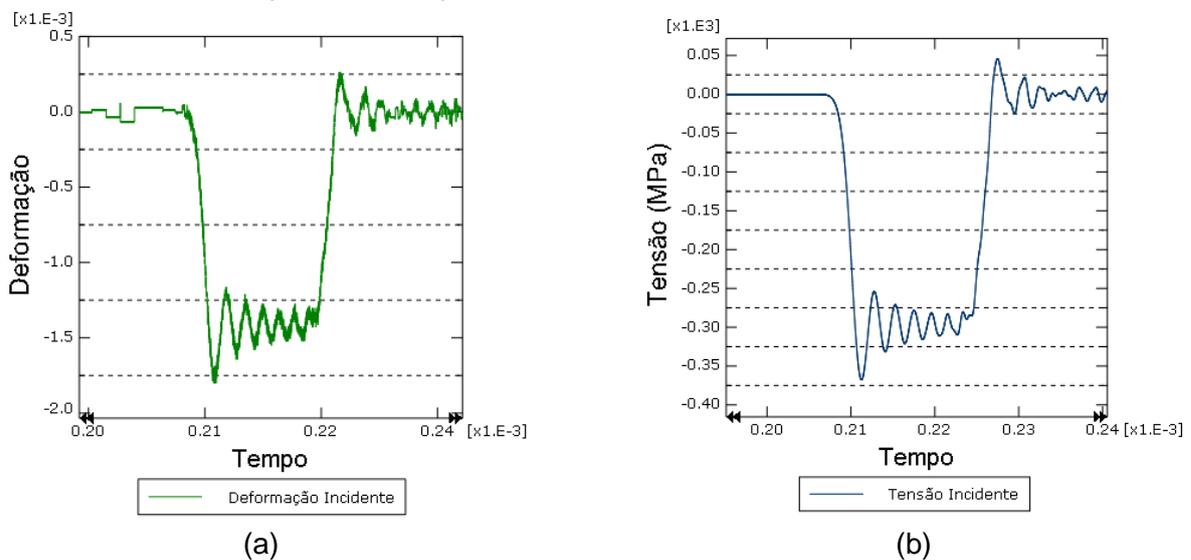


Figura 3.5 - Pulso Incidente de Deformação (a) e de Tensão (b).

Com o intuito de contribuir com a validação do modelo axissimétrico e identificar possíveis limitações deste, foram implementadas algumas variações dos parâmetros do modelo. Dentre estas variações destacam-se a análise dos efeitos de dispersão radial, de alinhamento entre as barras e de variação da relação de esbelteza das barras. Tais análises adicionais estão descritas no Apêndice I e corroboram com a validação do modelo.

Após a validação do modelo axissimétrico simplificado, partiu-se para a implementação de um modelo completo da barra de Hopkinson, com corpo de prova metálico entre as barras. Este modelo utilizou os mesmos parâmetros de análise descritos para o modelo simplificado sem o corpo de prova e será apresentado no Capítulo 4.

4. MODELO COMPLETO DA BARRA DE HOPKINSON

O modelo completo da barra de Hopkinson proposto inclui um corpo de prova metálico, de mesmo material das barras incidente e transmitida, com diâmetro igual a 12mm. Este foi posicionado entre as barras, conforme mostrado na Figura 4.1

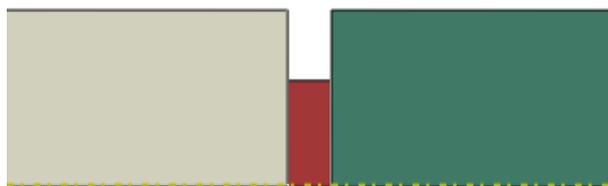


Figura 4.1 – Corpo de prova metálico posicionado entre as barras incidente e transmitida.

As propriedades materiais e geométricas utilizadas são as mesmas descritas na Tabela 3.3. Para as interfaces entre o corpo de prova e as barras, os mesmos parâmetros de contato proposto por Silva, 2010, foram utilizados e já foram descritos para o modelo simplificado no Capítulo 3. A velocidade de impacto do projétil foi de 15m/s. Utilizou-se o modelo sem dispersão radial (coef. Poisson = 0), conforme proposto por Silva, 2010.

A Figura 4.2 (a) mostra o pulso de deformação e tensão incidente e refletido, em vermelho, e o pulso transmitido, em azul. O pulso refletido é decorrente da diferença de impedância existente na interface entre o corpo de prova e as barras.

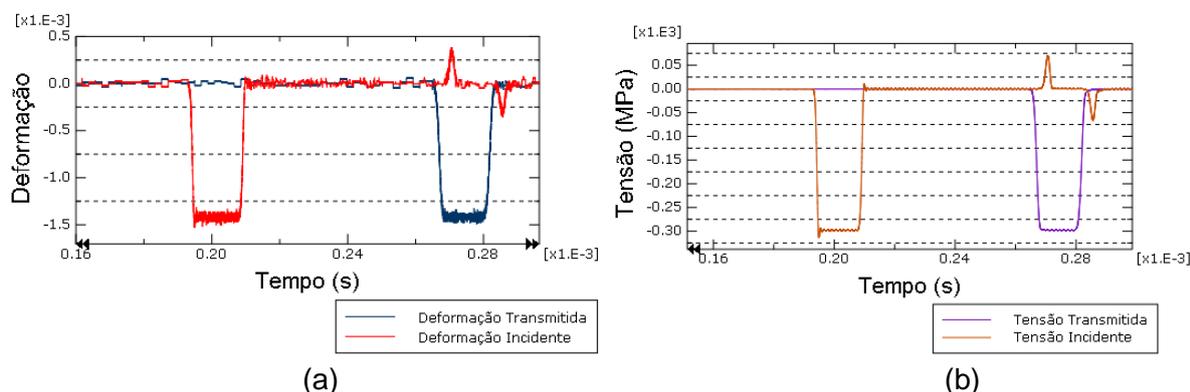


Figura 4.2 – a) Pulso de deformação incidente e refletido (vermelho) e transmitido entre as barras (azul); b) Pulso de tensão incidente e refletido (marrom) e transmitido (roxo).

O modelo completo da barra de Hopkinson, com resultados mostrados na Figura 4.2, apresenta resultados condizentes com o que a teoria prevê. O pulso refletido é decorrente da variação de seção transversal na interface com o corpo de prova. Como o corpo de prova é modelado como sendo elástico e não há variação de material na interface, não existe energia dissipada por meio de deformação plástica e o pulso é quase inteiramente transmitido pelas interfaces. O resultado numérico apresentado tem similaridade com implementações disponíveis na literatura. Silva, 2010, realizou um trabalho análogo e obteve resultados bastante semelhantes com os apresentados no presente trabalho, seus resultados estão apresentados no Anexo I.

5. CONCLUSÕES

Os modelos desenvolvidos e apresentados ao longo deste trabalho permitiram a reprodução do fenômeno de propagação de onda envolvido em uma barra de Hopkinson. O modelo numérico unidimensional implementado representa uma importante alternativa para a

construção do conhecimento sobre o tema. Por sua vez, o modelo bidimensional axissimétrico provou ser uma ferramenta capaz de auxiliar no projeto do experimento e ajudar a prever suas respostas, tendo resultados bastante satisfatórios. Este modelo também permite que sejam feitas alterações em sua configuração para que auxilie na interpretação de resultados experimentais. O modelo considerando a variação do alinhamento entre as barras mostra uma importante variação da configuração experimental das barras que pode gerar resultados incoerentes, mas que podem ser induzidos no modelo e, então, melhor compreendidos.

Como sugestão para trabalhos futuros, os parâmetros dos modelos implementados devem ser validados experimentalmente para garantir a representatividade deste para a situação específica do aparato construído e do material ensaiado. Além disso, pode-se incluir novas variáveis na análise, como filtros mecânicos, plasticidade do corpo de prova e a tridimensionalidade do modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

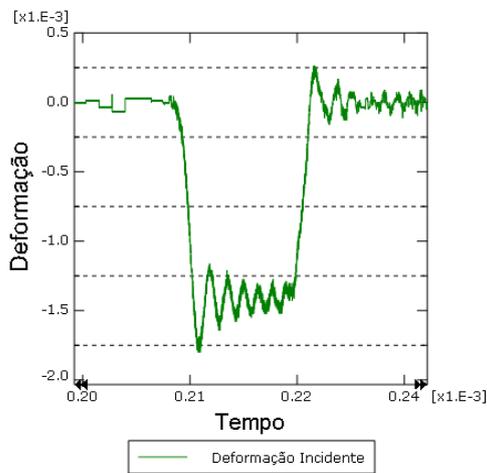
- ABAQUS (2013) “**ABAQUS Documentation**”, Dassault Systèmes, Providence, RI, USA.
- Bancroft, J. C.; “**Simplified Wave Modeling**”, Crews Research Report – Vol. 14, 2002.
- Bower, A. F.; “**Applied Mechanics of Solids**”, CRC press, 2009.
- Chen, W. W.; Song, B. “**Split Hopkinson (kolsky) Bar: Design, Testing and Applications**”. Nova Iorque: Springer, 2011.
- Curry, R.; “**Implementation of Viscoelastic Hopkinson Bars**” EPJ Web of Conferences. EDP Sciences, 2012. p. 01044
- Graff, K. F.; “**Wave Motion in Elastic Solids**”, Dover Publications, Inc., Nova Iorque, 1975
- Hiermaier, S. J.; “**Structures under Crash and Impact: Continuum Mechanics, Discretization and Experimental Characterization**. Springer Science & Business Media, 2007.
- Kaiser, M. A. “**Advancements in the Split Hopkinson Test**”, Tese de Doutorado. Virginia Polytechnic Institute and State University. 1998.
- Lang, S. M. “**Design of a Split Hopkinson Bar Apparatus for use with Fiber Reinforced Composite Materials**” Utah State University, 2012.
- MATLAB. 7.12.0635 (R2013a). The Mathworks Inc., Natick, Massachusetts, 2013.
- Owens, A. T. “**Development of a Split Hopkinson Tension Bar for Testing Stress-Strain Response of Particulate Composites under High Rates of Loading**”, Tese de Doutorado, Auburn, 2007.
- Ramesh, K.T. “**High Rates and Impact experiments**”. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, 2008.
- Silva, L.M. “**Projeto de uma Barra de Hopkinson para a caracterização da resposta estrutural de materiais no regime dinâmico**”, São José dos Campos, 2010.
- Zill, D. G.; Cullen, M. “**Equações Diferenciais**”, vol.2, Makron Books, São Paulo, 2001.

APÊNDICE I

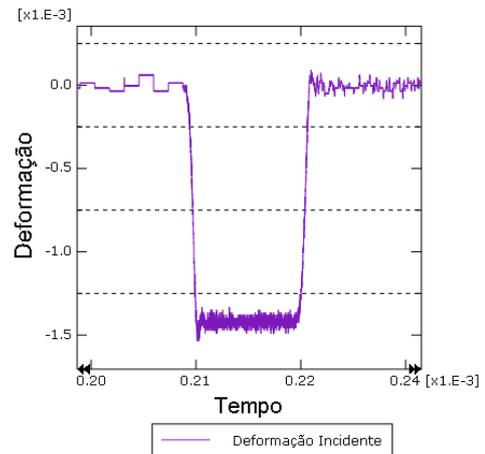
Os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando o modelo axissimétrico descrito na seção 3.2 e têm como objetivo identificar algumas das principais variações experimentais que podem ser encontradas utilizando o sistema da barra de Hopkinson.

a) Efeitos da dispersão radial

A dispersão da onda em materiais metálicos é consequência da deformação radial que ocorre no material devido ao deslocamento axial. Tal fenômeno é inerente aos metais, pois estes possuem coeficiente de Poisson, ν , na ordem de 0,3. Para avaliar os efeitos de dispersão, adotou-se o procedimento proposto por Silva, 2010, no qual se compara o modelo com $\nu=0$ e com $\nu=0,3$. A Figura I-1 mostra os pulsos de deformação obtidos para as duas condições e a Figura I-2 apresenta esta comparação para o caso da tensão.

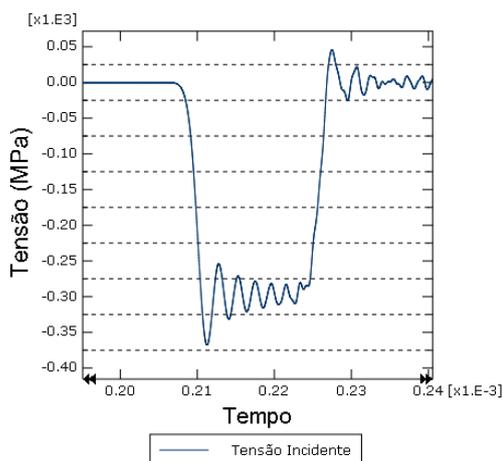


(a)

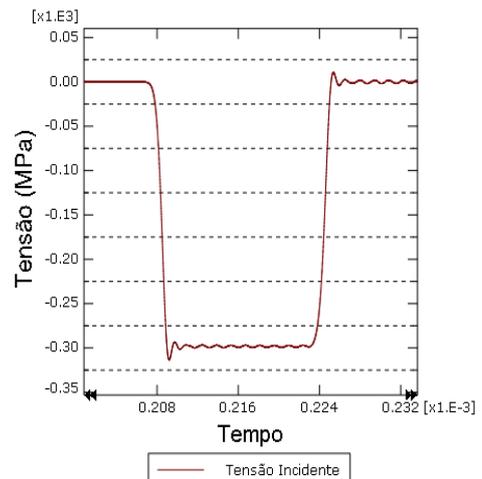


(b)

Figura I-1 – Pulso de Deformação na Barra Incidente com dispersão (a) e sem dispersão (b).



(a)



(b)

Figura I-2 – Pulso de Tensão na Barra Incidente com dispersão (a) e sem dispersão (b).

b) Faces não paralelas entre as barras

As faces paralelas entre as barras incidente e transmitida é vital para que o pulso de onda seja transmitido de forma completa. Chen e Song, 2011, demonstram que, com barras alinhadas, o pulso deve ser transmitido integralmente da barra incidente para a transmitida. A Figura I-3 mostra os pulsos incidente e transmitido para as barras alinhadas e também com um desalinhamento de 1° entre as faces das barras incidente e transmitida (sem os efeitos de dispersão radial). O mesmo efeito sobre os resultados também seria esperado em leves desalinhamentos (barras não concêntricas).

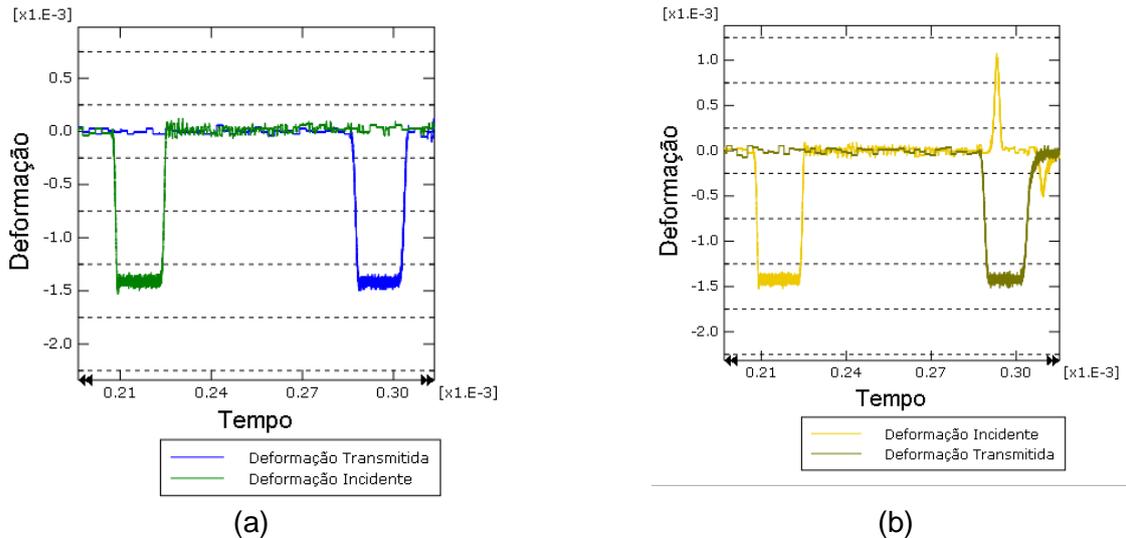


Figura I-3 – Pulso de deformação gerado com barras alinhadas (a) e faces não paralelas com desalinhamento de 1° (b).

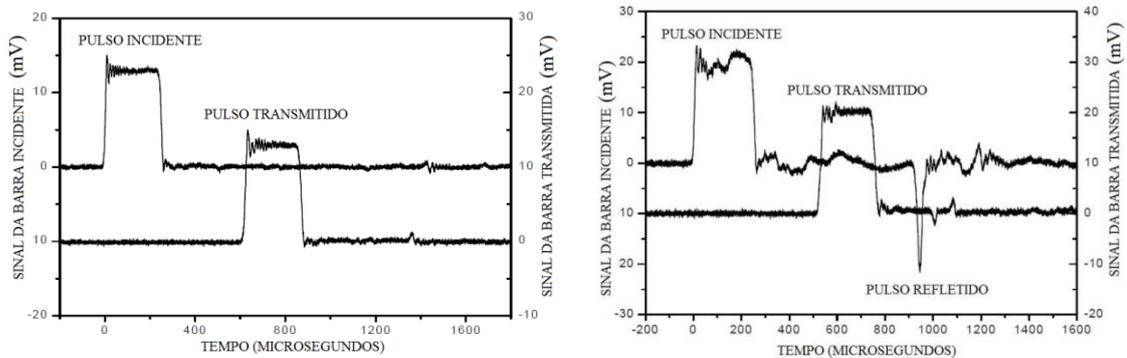


Figura I-4 – Pulso de onda obtido experimentalmente com as barras alinhadas (à esquerda) e com desalinhamento (à direita), adaptado de Chen e Song, 2011.

A transmissão total do pulso de onda mostrado na Figura I-3 (a), está de acordo com o previsto em literatura por Graff, 1975, e por Chen e Song, 2011. A Figura I-4 mostra os pulsos de onda obtidos por Chen e Song, 2011, experimentalmente para barras alinhadas e desalinhadas, resultados de acordo com os previstos no modelo bidimensional aqui apresentado.

c) Influência da relação entre comprimento e diâmetro das barras

O experimento da barra de Hopkinson se baseia basicamente na hipótese da unidimensionalidade dos esforços internos. Segundo Ramesh, 2008, esta hipótese perde

representatividade em casos em que a relação entre comprimento e diâmetro das barras diminui. A Figura I-5 mostra o perfil da onda incidente gerado por três relações L/D diferentes.

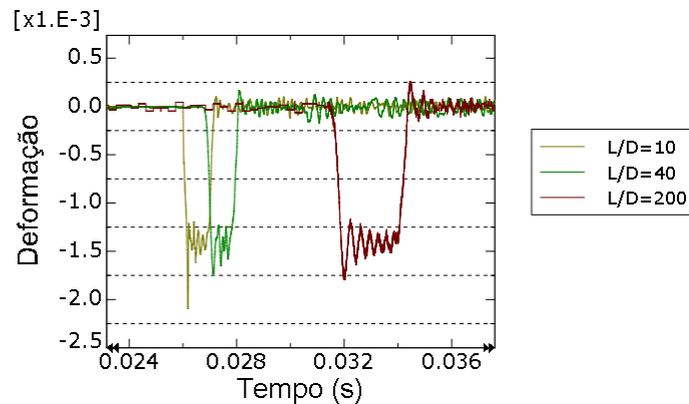


Figura I-5 – Perfil da onda incidente gerado em barras com relação comprimento diâmetro, L/D, igual a 10, 40 e 200.

Nota-se que para menores relações de L/D, o formato do pulso da onda é afetado e as oscilações devido aos efeitos de dispersão radial são acentuadas.

ANEXO I

O Anexo I apresenta através da Figura II-1 os resultados numéricos para o pulso de deformação incidente, refletido e transmitido encontrados por Silva, 2010, em seu modelo numérico.

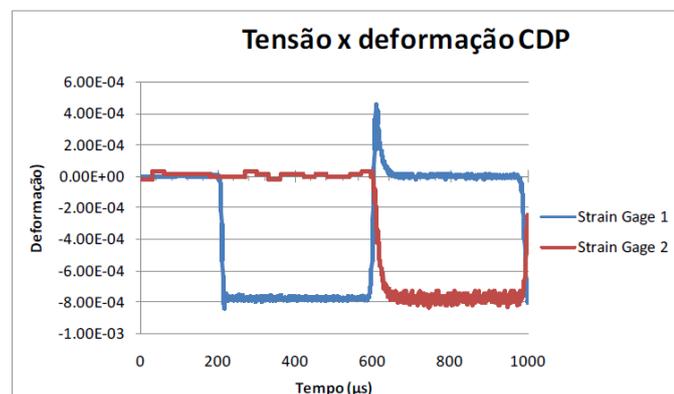


Figura II-1 – Resultado numérico de deformação encontrado por Silva, 2010 para o modelo da barra de Hopkinson completo.

Resultado demonstra semelhança com o obtido no presente trabalho. Mostrando um pulso transmitido muito similar ao incidente e um pulso refletido na interface entre o corpo de prova e as barras. As variáveis de projeto e de modelo utilizadas por Silva, 2010, são um pouco diferentes das utilizadas no presente trabalho – o que explica os valores absolutos um pouco divergentes. Além disto, Silva, 2010, deslocou os pulsos transmitido e refletido para próximo do pulso incidente, para facilitar visualização.