UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ISABEL CRISTINA PEREGRINA VASCONCELOS

A COMPREENSÃO DAS RELAÇÕES NUMÉRICAS NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica

PORTO ALEGRE
2015

ISABEL CRISTINA PEREGRINA VASCONCELOS

A COMPREENSÃO DAS RELAÇÕES NUMÉRICAS NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Beatriz Vargas Dorneles.

PORTO ALEGRE

2015

CIP - Catalogação na Publicação

Vasconcelos, Isabel Cristina Peregrina
A compreensão das relações numéricas: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4° ano da Educação Básica / Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos. -- 2015.
143 f.

Orientadora: Beatriz Vargas Dorneles.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. Números Racionais. 2. Aprendizagem. 3. Divisão. 4. Fração. 5. Relação Inversa. I. Dorneles, Beatriz Vargas, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos

A COMPREENSÃO DAS RELAÇÕES NUMÉRICAS
NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Aprovada em 19 de agosto de 2015.

____

Prof.ª Dr.ª Beatriz Vargas Dorneles – Orientadora - UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Maria Luiza Rheingantz Becker - UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Ema Paula Botelho da Costa Mamede – UNIVERSIDADE DO MINHO

____

Prof. Dr. João Alberto da Silva - FURG

Aos meus pais, Maria Alda e Eduardo, pelo incentivo e confiança. Ao Beto, pelo companheirismo para a superação dos obstáculos, e pelo apoio para o meu aperfeiçoamento profissional e realização pessoal. À Helen, pelo orgulho e felicidade de tê-la como filha, e, principalmente, por compreender os momentos de ausência durante esta trajetória.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Prof.ª Dr.ª Beatriz Vargas Dorneles, por acreditar na realização deste trabalho e compreender, pacientemente, o meu processo de construção desse conhecimento.

À Prof.ª Dr.ª Ema Paula Botelho Costa Mamede, pela acolhida, generosidade e incentivo, propiciando uma transformação significativa na minha trajetória acadêmica.

À Prof.ª Dr.ª Maria Luiza Cardinale Baptista, pela incessante e competente leitura deste trabalho, bem como pelo incentivo e apoio.

Às minhas amigas Mariangela Kraemer Lenz Ziede, Simone Berg Sobierayski e Rossana Strunz Coelho dos Santos, pela parceria e por ouvir meus desabafos e inquietações, confortando com incentivo e ânimo.

À Dr.ª Gislaine Verginia Barone, pela dedicação profissional e discussões construtivas no desenvolvimento da minha resiliência para a condução da vida com mais saúde e a possibilidade de conquistar a maturidade com sabedoria.

Às colegas de orientação, em especial à Adriana Corrêa Costa, Eliane Kiss de Souza, Jutta Cornelia Reuwsaat Justo, Luciana Vellinho Corso, Neila Tonin Agranionih, Nelba Maria Teixeira Pisacco, Rosane da Conceição Vargas, Virginia Bedin e Yasmini Lais Spindler Sperafico, que participaram de toda a minha trajetória de pesquisadora, contribuindo com sugestões e comentários preciosos, durante a minha qualificação acadêmica.

Por fim, às professoras que participaram da banca do projeto, Prof.ª Dr.ª Clarissa Seligman Golbert, Dr.ª Maria Luiza Rheingantz Becker e Prof.ª Dr.ª Maria Cecilia Bueno Fischer, pela possibilidade de discutir os caminhos para a construção da tese.

RESUMO

Esta tese aborda as relações numéricas na aprendizagem inicial das frações. O referencial teórico aborda estudos da Psicologia Cognitiva e da Educação Matemática e revisa a complexidade do conceito dos números racionais, que representa um desafio enfrentado pelas crianças e adolescentes na aprendizagem da Matemática na educação básica. O método compreendeu uma pesquisa *survey* de caráter quali-quantitativo e envolveu um estudo piloto com o objetivo de testar, avaliar e aprimorar os instrumentos e os procedimentos da pesquisa. No estudo transversal, buscou-se verificar como a compreensão da relação inversa entre quantidades, em situação de divisão, influencia na aprendizagem inicial das frações menores do que a unidade. Já no estudo comparativo, buscou-se verificar se existem diferenças e semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre quantidades, em situações de divisão e de fração. A amostra envolveu 90 estudantes brasileiros (M=9,88 anos) e 73 portugueses (M=9,69 anos), do 4º ano do ensino fundamental de escolas da rede pública de ensino das cidades de Porto Alegre – Brasil, e de Braga – Portugal. Utilizou-se, um instrumento de avaliação individual com 22 problemas, que foi aplicado aos estudantes, de forma coletiva, na sala de aula. Os resultados indicaram que a situação de fração quociente promove mais facilmente a compreensão da relação inversa entre quantidades. A correlação forte entre o princípio de ordenação e as situações de fração quociente evidenciou desempenho superior na resolução dos problemas de fração quociente por parte dos estudantes de ambos os países. Houve diferença significativa de desempenho entre os estudantes brasileiros e portugueses, indicando superioridade destes. Este estudo fornece evidência de que, no quarto ano, as crianças podem entender a relação inversa entre quantidades, e que momentos de exploração em torno desse assunto poderiam ser interessantes nas aulas nos anos iniciais. A ausência dessa exploração, nessa etapa da educação básica, pode comprometer a compreensão sobre quantidades e operações com números racionais, bem como o conhecimento algébrico.

Palavras-chave: Números Racionais; Aprendizagem; Divisão; Fração; Relação Inversa.

ABSTRACT

This thesis discusses numerical relationships in the initial learning of fractions. The theoretical framework covers studies of Cognitive Psychology and Psychology of Mathematics Education, and revises the complexity of the concept of rational numbers, which is a challenge faced by children and adolescents in learning Mathematics in Basic Education. The method comprised a qualitative and quantitative survey, and involved a pilot study aimed to test, evaluate and improve the instruments and procedures of the survey. In the cross-sectional study, we sought to verify how the understanding of the inverse relationship between quantities, in a division situation, influences the initial learning of fractions smaller than a unity. In the comparative study, we sought to verify if there are differences and similarities in the performance of Brazilian and Portuguese students, regarding the understanding of the inverse relationship between quantities, in division and fraction situations. The sample involved 90 Brazilian students (m=9,88 years old) and 73 Portuguese students (m=9,69 years old) from the 4th grade of elementary school, in public schools of the cities of Porto Alegre – Brazil, and Braga – Portugal. An individual questionnaire with 22 problems was used, which was collectively applied to students in the classroom. The results indicated that the fraction quotient situation promotes understanding of the inverse relationship between quantities more easily. A strong correlation between fraction quotient situations and the well-ordering principle showed superior performance in solving situation quotient problems by students in both countries. There was a significant difference in the performance of Brazilian and Portuguese students, indicating higher performance of the Portuguese pupils. There is evidence that children in grade 4 can understand the inverse relationship between quantities and moments of exploration around that subject could be interesting in elementary education classes from 1st to 5th grade. Not exploring this education in the early years can compromise the understanding of quantities and operations with rational numbers and algebraic knowledge.

Keywords: Rational Numbers; Learning; Division; Fraction; Inverse Relationship;

RESUMEN

Esta tesis trata de las relaciones numéricas en el aprendizaje inicial de las fracciones. La referencia teórica abarca estudios de la Psicología Cognitiva y de la Psicología de la Enseñanza Matemática, y revisa la complejidad del concepto de los números racionales, lo que representa un desafio para los niños y los jóvenes en el aprendezaje de las matemáticas, en la enseñanza primaria. El método incluyó una investigación *survey* de carácter cuali-cuantitativo e involucró un estudio piloto cuyo objetivo era poner a prueba, evaluar y perfeccionar los instrumentos y los procedimientos de la investigación. En el estudio transversal, se buscó estudiar cómo la comprensión de la relación inversa entre cantidades, en situaciones de división, ejerce influencia en el aprendizaje de las fracciones inferiores a la unidad. Y en el estudio comparativo, se analizó si hay diferencias y semejanzas en el desempeño de los estudiantes brasileños y portugueses con relación a la comprensión de la relación inversa entre cantidades, en situaciones de división y de fracción. La muestra fue formada por 90 estudiantes brasileños (m=9,88 años) y 73 portugueses (m=9,69 años), del 4º año de enseñanza primaria de escuelas públicas de las ciudades de Porto Alegre, Brasil, y de Braga, en Portugal. Se utilizó un cuestionario individual con 22 ejercícios, que se les aplicó a los estudiantes de forma colectiva. Los resultados apuntan que la situación de fracción cociente conlleva más facilmente la comprensión de la relación inversa entre cantidades. La fuerte correlación entre situaciones de fracción cociente y el principio de la ordenación, evidencia el desempeño superior en la resolución de estes problemas, por parte de los estudiantes de los dos países. Hubo diferencia significativa entre el desempeño de los estudiantes brasileños y los portugueses, indicando mejor desempeño de los portugueses. Hay evidencias de que los niños, del 4º año, pueden comprender la relación inversa entre cantidades. De esta manera, momentos de investigación sobre ese asunto, podríam ayudar a los niños en las clases de los años iniciales. La ausencia de esta exploración, puede comprometer, en los años posteriores, la comprensión sobre cantidades y operaciones con números racionales, así como el conocimiento de álgebra.

Palabras-clave: Números Racionales; Aprendizaje; División; Fracción; Relación Inversa.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A compreensão das relações numéricas na aprendizagem inicial das frações é o tema da presente tese. Números e quantidades fazem parte da vida cotidiana e são utilizados para representar as informações das diferentes áreas do conhecimento. As frações representam quantidades que resultam da divisão e que não podem ser descritas por números inteiros. São importantes nas diversas situações diárias que envolvem relações quantitativas simples, tais como, 'maior do que' e 'menor do que'. Além disso, também é necessário entender a complexidade conceitual envolvida, tanto na representação numérica quanto nas diferentes interpretações de frações, que envolvem relações proporcionais. Vale destacar que a compreensão da relação inversa entre quantidades é uma habilidade fundamental para o desenvolvimento conceitual de frações e é estabelecida entre o numerador - número de partes - e o denominador - tamanho das partes. Nesse sentido, utilizar-se-á a expressão 'relação inversa entre quantidades', a partir deste ponto, para se referir à relação inversa entre o numerador e o denominador, que pode ser uma relação entre quantidades de mesma natureza ou de naturezas distintas.

Para muitas pessoas, a compreensão das frações não é uma tarefa simples, porque requer entender a natureza relativa do conceito e as relações entre quantidades, uma vez que demanda uma reorganização do conhecimento numérico (STAFYLIDOU & VOSNIADOU, 2004), bem como a compreensão de que as propriedades dos números inteiros não definem os números em geral, e, portanto, requerem outros tipos de habilidades cognitivas mais complexas (VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004). Assim, a compreensão do conhecimento conceitual das frações tem sido apontada como um dos maiores desafios cognitivos no ensino fundamental, tanto para o ensino, quanto para a aprendizagem (BEHR, WACHSMUTH, POST & LESH, 1984; SINGLER THOMPSON & SCHINEIDER, 2011; HALLETT, NUNES, BRYANT & THORPE, 2012).

A opção de investigar a compreensão do conceito de fração deve-se às dificuldades enfrentadas por muitos estudantes, durante o ensino fundamental e Médio, que, muitas vezes, se estendem até a Educação Superior. Isso pode acarretar em prejuízos profissionais ou, mesmo, na tomada de decisão em determinadas situações da vida cotidiana que envolvem a área da Matemática. A partir dessa constatação emergiram duas indagações: as dificuldades encontradas na aprendizagem do conceito de fração estão associadas à falta da compreensão da relação inversa entre quantidades que são representadas com frações menores do que a unidade? Que tipos de situações podem favorecer a aprendizagem inicial das frações?

O interesse neste tema teve motivações diversas. Na perspectiva geral, vislumbrou-se a possibilidade de refletir sobre diferentes formas de ensino que favoreçam uma aprendizagem contextualizada do conceito de fração. Na perspectiva pessoal, a tese decorre de um processo de ampliação de percepções, no que diz respeito à aprendizagem da Matemática, bem como às suas dificuldades.

Essas percepções correspondem, também, ao que motivou a pesquisadora deste estudo a optar pela formação acadêmica e pela atuação como professora na área da Matemática, ao longo de três décadas. O percurso no ensino na educação básica, e, na última década, na Educação Superior, possibilitou uma visão do conhecimento matemático, transversalmente, nos diferentes níveis de ensino. Desse modo, compreendeu-se não apenas os conceitos matemáticos, mas também como eles se relacionam com os outros componentes curriculares. Além disso, a oportunidade de acompanhar o desenvolvimento cognitivo de alunos em diferentes níveis de ensino permitiu avaliar as estratégias e os diferentes modos de organização da representação do conhecimento matemático. Desse modo, a investigação nacional e internacional da área permitiu ampliar a visão a respeito do desenvolvimento do conhecimento da Matemática, bem como os processos da aprendizagem, destacando alguns estudos relacionados à aprendizagem da divisão e de outros centrados no conceito de fração propriamente dito.

A literatura tem mostrado contribuições de diferentes perspectivas teóricas, que constituem conhecimento relevante e importantes implicações para a investigação científica e a prática educacional. Como resultado, exploram-se novas maneiras de entender como as crianças compreendem as relações entre o conhecimento numérico e o conhecimento conceitual (NUNES; BRYANT, 2008; HECHT; CLOSE; SANTISI, 2003).

A necessidade de entender algumas relações numéricas, na aprendizagem inicial das frações, possibilita um novo campo de pesquisa que necessita de investigação, com a finalidade de compreender o quê e como as crianças podem aprender a respeito de frações. Desse modo, tem-se como problema de investigação:

como a compreensão da relação inversa entre quantidades influencia a aprendizagem inicial das frações menores do que a unidade?

Esta pesquisa está vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRGS e ao projeto de pesquisa intitulado “Diferentes grupos de Crianças com Dificuldades na aprendizagem da Matemática: o que há em comum”, (Plataforma Brasil e Comitê de Ética em Pesquisa da UFRGS, sob o número 2008016), coordenado pela Professora Doutora Beatriz Vargas Dorneles, orientadora desta tese.

Outro fato decorre do insucesso dos estudantes brasileiros nas avaliações em larga escala, tanto nas avaliações nacionais, quanto nas internacionais durante sua trajetória escolar. Esse dado se baseia no resultado da avaliação do desempenho no *Programme for International Student Assessment* (PISA), Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, realizada em 2012. Nessa avaliação, o Brasil obteve a 58ª posição em Matemática, entre os 65 países participantes. Os resultados do PISA possibilitam comparações sistemáticas do desempenho com crianças de diferentes países, antes de ser estabelecidas generalizações.

A ideia de uma análise comparativa entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses surgiu a partir da realização de um estágio acadêmico da pesquisadora na Universidade do Minho, na cidade de Braga, em 2014, sob a orientação da Professora Doutora Ema Paula Botelho da Costa Mamede. Tem-se, no caso desta tese, a coleta de dados realizada pela própria pesquisadora em ambos os países, facilitada pela linguagem e proximidade cultura. Ainda, os resultados do PISA apontam diferença entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, com desempenho superior dos estudantes portugueses. Considerando a disparidade de desempenho dos estudantes dos dois países, surge a questão: a que se deve tal diferença?

O método compreendeu uma pesquisa *survey* de caráter quali-quantitativo e envolveu um estudo piloto com o objetivo de testar, avaliar e aprimorar os instrumentos e os procedimentos da pesquisa. A partir do estudo piloto foram delineados um estudo transversal e um estudo comparativo. O estudo transversal buscou verificar como a compreensão da relação inversa entre quantidades, em situação de divisão, influencia na aprendizagem inicial das frações, com 90 estudantes brasileiros do 4º ano do ensino fundamental, com média de idade de 9 anos e 10 meses. Já o estudo comparativo teve como objetivo verificar se existem diferenças e semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de divisão e de fração. Além dos 90 estudantes brasileiros, participaram deste estudo 73 estudantes portugueses, com média de idade de 9 anos e 8 meses.

A tese está estruturada da seguinte maneira: no segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica, que traz, inicialmente, uma abordagem sobre a aprendizagem dos números racionais e, na sequência, a revisão da literatura sobre a compreensão do conceito de fração. Nesse ponto, são discutidos princípios lógicos da ordenação e da equivalência das frações e, a seguir, são destacadas as situações em que as frações são usadas, bem como as diversas representações simbólicas. Ainda nessa parte da tese, são referidos os diferentes programas curriculares da Matemática nos dois países estudados.

No terceiro capítulo, descreve-se o método da pesquisa, explicitando os objetivos, a hipótese, a caracterização da amostra, os instrumentos utilizados, os procedimentos de coleta de dados, e a apresentação dos resultados.

A discussão está no quarto capítulo. Para finalizar, o quinto capítulo apresenta as conclusões do estudo, salientando a importância de distinguirmos as diferentes situações que favorecem a aprendizagem das frações. Ainda neste capítulo, destacam-se as limitações da pesquisa, e são sugeridas algumas implicações resultantes deste estudo, relacionadas à aprendizagem inicial das frações e de interesse tanto para o ensino quanto para a pesquisa.

2 APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM MODELO COMPLEXO DE RELAÇÕES

Os números racionais são introduzidos no ensino como fração ou números fracionários. As quantidades menores do que a unidade, representadas com fração, estão presentes na vida cotidiana e no mundo do trabalho (NUNES: BRYANT, 2008). No entanto, a compreensão dessas quantidades e a sua utilização de maneira adequada nas situações do dia a dia representam um desafio cognitivo para muitos estudantes, em diferentes níveis de ensino (BEHR et al., 1993; KIEREN, 1993). Isso decorre do fato de que lidar com a complexidade desse campo numérico requer a reorganização do conhecimento numérico e o desenvolvimento de habilidades básicas adquiridas com relação aos números inteiros, tornando-se mais complexas (HECHT; CLOSE; SANTINI, 2003; VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004).

Para explicitar a relevância desse conhecimento, inicialmente, realiza-se a caracterização dos números racionais e especifica-se a opção da definição de frações como tema da presente pesquisa. Na sequência, são apresentadas as diferentes tendências teóricas sobre o conhecimento numérico, e descreve-se a relevância e os desafios cognitivos envolvidos na aprendizagem das frações. Posteriormente, são abordados os aspectos do conceito de fração e os modelos de aprendizagem, acrescidos de algumas estratégias de resolução de problemas. Para finalizar, apresenta-se o Programa Curricular da Matemática na educação básica e a participação do Brasil no PISA. Por fim, são apresentados os resultados do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses na avaliação do PISA em 2012.

2.1 CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Número racional é todo número que pode ser representado por uma fração ou uma relação entre dois números inteiros através da notação simbólica a/b, com a e b $\in Z$ e $b \neq 0$, conforme define Kieren (1976). O autor destaca que os números racionais são quocientes, associados à ideia de frações de unidade, como $1/b$, a classes de equivalência e a relações assimétricas.

Vergnaud (1983) esclarece que o termo fração, algumas vezes, é usado para indicar uma parte fracionada de um todo; em outras, para indicar uma magnitude fracionada (que não pode ser expressa por um número inteiro de unidades); e, ainda, um par ordenado de símbolos a/b, que indica uma relação entre duas grandezas do mesmo tipo ou natureza.

A definição proposta por Behr, Harel, Post e Lesh (1992), números racionais são números que são infinitamente divisíveis, descritos em classes de equivalência infinita, e, desse modo, os elementos dessas classes de equivalências são chamados de frações.

De forma complementar, Nunes e Bryant (2008) definem números racionais como uma quantidade descrita por duas grandezas que estão relacionadas e que são indicadas por dois valores: o numerador e o denominador. A contagem é o procedimento usado para identificar o numerador e o denominador. Porém, os autores destacam que, a definição do numerador e do denominador requer mais do que uma contagem: é necessário compreender como as situações são representadas por frações.

Para Siegler, Fazio, Bailey e Zhou (2013), a relação entre o numerador e o denominador determina a magnitude numérica das frações e representa pontos em uma linha numérica.

Considerando as definições para números racionais apontadas na literatura, pode-se perceber que existe um consenso, no sentido de que a sua compreensão está relacionada ao conceito de divisão (BEHR et al., 1992; KIEREN, 1976; VERGNAUD, 1990). O conceito de divisão envolve a noção de repartir em partes do mesmo tamanho, assim como implica compreender as relações de covariação - diretas e inversas - entre as quantidades representadas pelo dividendo, divisor e quociente (VERGNAUD, 1983; NUNES; BRYANT, 1997). O termo fração compreende o tamanho do numerador, o tamanho do denominador e a relação entre o numerador e o denominador; também é essencial entender como um número único e que tem um tamanho definido pela relação inversa entre o numerador e o denominador (BEHR et al., 1992). De um modo mais geral, o termo razão é utilizado para expressar uma relação multiplicativa entre duas quantidades de mesma natureza ou de diferentes naturezas, indicadas como quantidades intensivas (BEHR et al., 1984; NUNES; BRYANT, 2008).

Nesta tese, adotou-se o termo fração por este contemplar a proposta de investigação, que envolve a relação inversa entre quantidades representadas com fração menor do que a unidade, a representação por um par de números inteiros, a ordenação e a equivalência, e ainda indica um quociente ou uma magnitude. Também se utiliza número racional num sentido amplo, de campo numérico, e fração, num sentido intuitivo, de conceito. Apresentam-se as diferentes abordagens teóricas, com as relevantes reflexões sobre a concepção do desenvolvimento do conhecimento matemático, adquirido através da aprendizagem.

2.2 DIFERENTES TENDÊNCIAS TEÓRICAS SOBRE O CONHECIMENTO DE FRAÇÕES

A aprendizagem de frações desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do conhecimento numérico por duas razões: a primeira é a necessidade de representar as quantidades que não podem ser descritas por um único número inteiro, e a segunda é que do sucesso dessa aprendizagem depende o sucesso na aprendizagem da Matemática em níveis mais avançados de ensino (NUNES, 2015; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Assim como os números inteiros, os números racionais são usados para representar quantidades e as relações entre as quantidades; porém, raramente as abordagens de ensino consideram o seu uso para representar as relações (NUNES, 2015). Desse modo, muitas vezes, estudantes no ensino médio ainda têm dificuldade em usar frações para representar números e para representar relações entre quantidades.

As investigações realizadas por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) são consideradas como pioneiras, ao explorarem as inferências das crianças para quantificar frações sem utilizar representação numérica. Os autores exploraram as consequências do conhecimento de número e de quantidade para compreender os princípios lógicos: da invariância (conservação da quantidade), reversibilidade e raciocínio transitivo[1]. Os autores já destacavam que algumas crianças têm dificuldade em compreender o princípio da invariância e, ainda, sinalizavam para a falta de um pensamento reversível, que permita perceber que a soma das partes é igual ao todo inicial que as originou.

Em contrapartida, Gelman e Galistel (1978) apresentam uma visão diferente, no sentido de que a contagem é a base para a compreensão de número por parte das crianças. Sabe-se que a contagem envolve um conjunto de princípios[2] que estão presentes desde muito cedo na vida das crianças. Levando em conta essa perspectiva, Gelman e Williams (1998) argumentam que o conhecimento das crianças sobre números naturais, tal como o fato de cada número natural ter um único sucessor, serve como um obstáculo na aprendizagem de frações.

Por outro lado, Butterworth (2005) ressalta que o entendimento de número pressupõe o conhecimento de duas outras ideias. A primeira ideia pressupõe que um objeto é algo que pode ser individualizado e formar uma coleção que possui uma numerosidade[3]. A segunda ideia considera a habilidade de determinar quando dois conjuntos possuem a mesma numerosidade e quando um conjunto possui a numerosidade maior que outro conjunto. Para o autor, tal conceito pode ser aplicado a conjuntos com qualquer quantidade de elementos.

Na mesma perspectiva, Geary (2004) sugere que desenvolvimento do conhecimento numérico depende de habilidades cognitivas e de ferramentas matemáticas culturais. Geary (2006) distingue as habilidades cognitivas primárias (herdadas e aprimoradas) e secundárias (adquiridas culturalmente). Dessa forma, o autor considera que a aquisição das habilidades biologicamente secundárias geralmente é lenta, exige esforço e ocorre através de ensino formal ou informal. Nesse sentido, Geary (2006) descreve as habilidades matemáticas, como:

- primárias (discriminação de numerosidades; ordinalidade “maior que” e “menor que”; princípios de contagem; aritmética simples, adição e subtração de pequenos conjuntos), com quantidade de elementos de pequenos conjuntos; e

---

[1]Raciocínio transitivo: capacidade de ordenar os números por tamanho A > B e B > C, então A > C (PIAGET, 1952).

[2]Princípios da contagem: envolve as atividades de contagem através de cinco princípios: correspondência (designar um e somente um nome de número para cada item a ser contado); ordem estável (sempre recitar os nomes dos números na mesma ordem); cardinalidade (o último nome de número pronunciado indica o total de itens contados); abstração (qualquer tipo de entidade pode ser contado); e princípio da irrelevância da ordem (a ordem em que os objetos são enumerados não importa) (GELMAN; GALISTEL, 1978).

[3]Numerosidade: habilidade de reconhecer quantidades (BUTTERWORTH, 2005).

- secundárias (contagem verbal, sistema numérico, álgebra, geometria, resolução de problemas e tantas outras), que exigem abordagens educacionais específicas, pois emergem em contextos bem diferentes.

Sendo assim, as habilidades matemáticas são desenvolvidas em situações variadas. Enquanto as habilidades biologicamente primárias dependem da integridade física do cérebro, da motivação inerente à criança pequena e dos estímulos naturais do meio, as biologicamente secundárias envolvem as habilidades matemáticas mais avançadas. Nesse caso, o seu desenvolvimento ocorre mediante instrução, prática, concentração, esforço, entusiasmo e motivação (GEARY, 2006). O autor sugere que a escola é o primeiro contexto no qual as crianças são expostas aos conhecimentos que envolvem as habilidades biologicamente secundárias, como, por exemplo, leitura, escrita, aritmética complexa.

Acredita-se que as habilidades matemáticas mais complexas são desenvolvidas através da aprendizagem, a partir do conhecimento adquirido sobre números e de outros conceitos da Matemática (GEARY, 2004). De acordo com Butterworth (2005), a habilidade numérica depende de três fatores:

- módulo numérico: núcleo inato das habilidades numéricas, especializado em processar a informação;

- recursos culturais: nível de conhecimento matemático da cultura em que vivemos;

- aprendizagem: habilidade individual para adquirir esse conhecimento.

Com outro enfoque, bastante próximo ao de Piaget, os estudos realizados por Vergnaud (1990) possibilitam um aporte teórico importante para compreender o desenvolvimento do conhecimento conceitual. Nesse caso, o autor ressalta que a compreensão dos conceitos matemáticos desenvolve o raciocínio. Isso ocorre a partir das experiências, especialmente se os seguintes aspectos forem considerados:

- um conjunto de situações que tornam o conceito útil e significativo;
- um conjunto de invariantes operatórias, que podem ser usadas para compreender essas situações;
- um conjunto de representações simbólicas, linguísticas, gráficas ou gestuais, que podem ser usadas para representar as invariantes, as situações e os procedimentos.

Vergnaud (1990) salienta que o desenvolvimento de um conceito envolve mudanças em cada um desses três aspectos e que são realizados através de uma variedade de situações.

Por mais simples que uma situação seja, ela implica a utilização de mais do que um conceito, pois está conectada com os conhecimentos prévios e com as experiências adquiridas pelas crianças. Um conjunto de situações permite construir novas relações e estruturas de pensamento. Tais estruturas compreendem os “esquemas de ação”, que são definidos como uma organização sequencial de atividades para um determinado conjunto de situações. Os esquemas de ação passam a ter significado e são usados como representações simbólicas, e não apenas como sinais matemáticos convencionais, mas como gestos, palavras e sinais visuais ou icônicos (VERGNAUD, 2009). Na mesma perspectiva, Nunes e Bryant (1997) acrescentam que um conceito matemático requer o aprendizado dos símbolos convencionais e de seus significados; estes fazem parte de uma rede de significados, e, à medida que são estabelecidas mais conexões entre os significados e as redes de significados, os conceitos tornam-se mais abstratos.

Em contrapartida, Siegler, Thompson e Schneider (2011) referem que o desenvolvimento do conhecimento numérico envolve compreender as representações numéricas, com base na percepção de numerosidade e de que todos os números reais têm magnitudes que podem ser designadas em uma reta numérica.

Antes de descrever alguns aspectos do desenvolvimento do conhecimento de fração, torna-se importante explicitar que, neste estudo, optou-se por adotar, de forma complementar, as duas abordagens teóricas do desenvolvimento numérico, considerando que ambas não são, necessariamente, opostas.

2.3 DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO DE FRAÇÃO

Estudos do desenvolvimento do conhecimento numérico destacam a distinção entre números naturais e números racionais (NUNES; BRYANT, 2015; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Para Nunes e Bryant (2015), a compreensão dos números naturais está associada ao desenvolvimento do raciocínio aditivo, enquanto que a compreensão das frações está relacionada com o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

Acredita-se que a compreensão do significado de número está associada à compreensão das quantidades que são representadas pelos diferentes tipos de número (NUNES; BRYANT, 2015). Complementando as ideias de Nunes e Bryant (2015) e de Siegler, Thompson e Schneider (2011) destacam que a aprendizagem das frações possibilita aos estudantes compreender que as propriedades dos números inteiros não definem os números em geral.

Nunes e Bryant (2015) salientam que a compreensão das relações entre as quantidades que resultam da divisão parece ser anterior à aquisição da representação numérica de fração. Levando em conta essa perspectiva, os autores definem dois significados para os números: um representacional, que se refere ao uso de números para representar quantidades, e um analítico intrínseco, que diz respeito às definições dadas pelo sistema de numeração. Nesse sentido, aprender o significado analítico intrínseco de número envolve o raciocínio sobre as quantidades que os números representam e sobre a forma como são configurados os sistemas numéricos convencionais (NUNES; BRYANT, 2015; NUNES, 2012).

2.3.1 Conhecimento informal

O conhecimento informal caracteriza-se como o conhecimento que pode ser aprendido fora da escola (MACK, 1990). Um caminho possível para o desenvolvimento da compreensão do conceito de fração pode ocorrer através do conhecimento informal dos estudantes nas situações da vida cotidiana. Isso se verifica ao repartir objetos e compartilhar quantidades em partes iguais, quando são estimuladas as conexões com as ideias mais complexas (KIEREN, 1988).

Alguns estudos indicam que as crianças já possuem conhecimento informal desenvolvido a partir de suas experiências antes de entrar na escola (MACK, 1990; EMPSON, 1999; VERGNAUD, 1990; MAMEDE; NUNES; BRAYNT, 2005). Nessa perspectiva, Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) sugerem que tal conhecimento permite juntar e separar conjuntos, e estimar quantidades que envolvam metades e quarta parte. Os autores ressaltam que a desconexão entre o conhecimento informal, que as crianças desenvolvem nas experiências do cotidiano, e os conhecimentos formais da Matemática, adquiridos nas situações de ensino, pode estar relacionado com formas mecânicas e memorizadas. De maneira complementar, Mack (1990) acrescenta que é do conhecimento informal que emergem os significados dos símbolos e os procedimentos matemáticos sobre fração.

As experiências da criança no convívio social podem auxiliar a organizar o conhecimento formal matemático, e, nesse sentido, as situações que utilizam quantidades de objetos podem ser usadas para determinar a contagem do número de amigos em brincadeiras ou, então, para identificar casas e números de telefone.

Ainda salienta-se que algumas histórias infantis envolvem situações sobre a noção de partilha, como, por exemplo, *Tocaram a campainha* (HUTCHINS, 2007). A narrativa do livro citado foi usada no estudo realizado por Empson (1999) com crianças de 1ª série para introduzir o conceito de divisão. A história envolve uma divisão de 12 biscoitos entre duas crianças, quando alguém toca a campainha, e chegam mais duas crianças. Inicia-se, então, uma nova distribuição dos biscoitos, quando toca a campainha e, novamente, chegam mais duas crianças. A situação se repete com a chegada de outras seis crianças, que se juntam às seis que já estavam ali. A história termina quando cada criança recebe um biscoito. Para explorar o conhecimento informal das crianças, a autora utilizou essa narrativa como um recurso para explorar as frações. Os resultados evidenciaram que a intervenção de ensino, explorando o conhecimento informal das crianças, usando ferramentas representacionais, contribuiu para o desenvolvimento da compreensão das crianças sobre frações.

Um conjunto de estudos refere que as experiências das crianças no cotidiano podem ser utilizadas para explorar o conhecimento informal como base para a aprendizagem inicial sobre fração (BEHR et al., 1984; MACK, 1990; KIEREN, 1993; EMPSON, 1999).

2.3.2 Conhecimento conceitual

Diversas abordagens teóricas investigam o conhecimento conceitual e a resolução de problemas sobre fração (HECHT; VAGI; TORGESEN, 2007; HALLET;

NUNES; BRYANT, 2010). Conhecimento conceitual é definido como a consciência dos símbolos de fração e a capacidade de representar frações de diversas maneiras (HECHT; CLOSE; SANTISI, 2003). Partindo do pressuposto de que é importante adquirir conhecimento conceitual como base para a compreensão das quantidades representadas com fração, esse conhecimento pode auxiliar os alunos na escolha de estratégias e de procedimentos para a resolução de problemas com fração (HECHT; VAGI; TORGESEN, 2007).

Nesta perspectiva, Hecht (1998) investigou as relações entre o conhecimento matemático e o conhecimento processual com fração, a compreensão conceitual das frações, as habilidades básicas de aritmética e a capacidade de resolver problemas sobre frações. O conhecimento conceitual verificou a compreensão da equivalência, como, por exemplo, comparar as frações com números diferentes, $^{2}/_{8}$ e $^{1}/_{4}$, que, na verdade, são equivalentes; e da ordenação, como, por exemplo, identificar qual fração, $^{2}/_{3}$ ou $^{3}/_{4}$, é maior. O conhecimento processual foi medido usando questões de múltipla escolha, e os alunos foram convidados a escolher um procedimento para resolver um determinado problema. Os resultados revelaram que o conhecimento conceitual indicou sucesso na resolução de problemas de fração e, especialmente, precisão em tarefas de estimativa, já os procedimentos não estavam relacionados entre si para qualquer um dos tipos de problema. Analisando os resultados obtidos por Hecht (1998), observa-se que, o conhecimento conceitual contribui para a variabilidade em todos os resultados de fração. Apesar disso, os resultados sugerem que, independentemente da ordem cronológica, o conhecimento conceitual e o conhecimento processual têm a mesma importância para a aprendizagem geral de frações.

Para determinar o baixo desempenho em problemas envolvendo números racionais, Hecht, Vagi e Torgesen (2007) examinaram se ocorre uma separação entre a compreensão conceitual sobre as frações e os conhecimentos prévios adquiridos sobre os números inteiros. Os autores concluíram que pode ser difícil determinar essas conexões quando as operações de frações contradizem as propriedades dos números naturais. Tais propriedades podem interferir na compreensão conceitual e na execução dos procedimentos de fração. Por exemplo, ao se multiplicarem duas quantidades fracionárias, o produto pode resultar em um valor menor do que cada um dos termos do problema $^{1}/_{2}$ X $^{1}/_{4}$ $=^{1}/_{8}$. Nesse caso, a multiplicação de frações com fatores menores do que a unidade contradiz o conhecimento adquirido sobre os números naturais, que postula que a multiplicação torna o produto um número maior. Esses resultados sugerem que a falta de conhecimento conceitual faz com que muitos alunos utilizem procedimentos memorizados e, frequentemente, incorretos para resolver problemas de fração.

Mais recentemente, Hallett, Nunes, Bryant e Thorpe (2012) definiram conhecimento conceitual como um conhecimento relacional, e a compreensão de como esses conhecimentos estão inter-relacionados. Os autores sugerem que o conhecimento conceitual e o conhecimento processual estão combinados em diferentes contextos da matemática. Dessa maneira, a falta de conhecimento conceitual de frações pode explicar os desafios enfrentados por alguns alunos ao realizarem procedimentos sobre frações.

2.3.3 Conhecimento processual

Conhecimento processual é utilizado para executar as tarefas matemáticas e corresponde a uma sequência de ações, destinada a gerar a resposta correta para um determinado tipo de problemas (HALLETT et al., 2012).

Acredita-se que o conhecimento processual envolve a consciência das etapas necessárias para resolver um problema, bem como para realizar as operações aritméticas com fração (HECHT; VAGI, 2012). A resolução de problemas mais complexos, como, por exemplo, adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, pode indicar um padrão diferente de resultado para converter os denominadores comuns. Siegler e colaboradores (2013) sugerem que, nesse caso, a memória de trabalho, a atenção ou o raciocínio podem se tornar cada vez mais importantes para a equivalência de frações, ao converter $6/10$ em $3/5$.

O estudo realizado por Hallett e colaboradores (2012) investigou a existência de diferenças individuais na compreensão dos alunos do 6º e 8º anos sobre conhecimentos conceitual e processual de fração, conhecimento geral e habilidades conceitual e processual gerais. Os resultados obtidos indicaram que alguns alunos têm um conhecimento mais conceitual; outros têm um conhecimento mais processual; e, ainda, alguns têm um nível igual em ambos os conhecimentos. Tais resultados demonstraram que existem diferenças individuais no conhecimento conceitual e processual de frações, e que estes são fortemente correlacionados e independentes do desempenho geral de fração. Porém não foi encontrada diferença significativa na distribuição dos grupos nas escolas, sugerindo que as diferentes abordagens escolares não influenciaram o grupo ao qual o aluno pertence.

O conhecimento conceitual dos símbolos de fração pode ser usado na resolução de problemas; entretanto, um entendimento conceitual impreciso pode interferir na execução adequada de procedimentos necessários para a resolução de problemas, conduzindo a uma solução errada (HECHT; VAGI; TORGENSEN, 2007).

Há um consenso entre os pesquisadores de que a aprendizagem de frações representa um desafio aos estudantes, que pode estar relacionado com a desconexão entre conhecimento conceitual e processual (HECHT; VAGI; TORGESEN, 2007; HALLETT; NUNES; BRYANT, 2010). Nesse sentido, entender a relevância e os desafios cognitivos enfrentados pelos alunos na aprendizagem de frações constitui um conhecimento relevante, que pode contribuir para explorar as relações entre o conhecimento numérico e o conhecimento conceitual de frações.

2.4 RELEVÂNCIA E DESAFIOS COGNITIVOS NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

A aprendizagem do conceito de fração desempenha um papel relevante na aprendizagem da Matemática para representar quantidades, bem como para o sucesso em níveis mais avançados de ensino (NUNES; BRYANT, 2015). Na perspectiva prática, as frações envolvem relações entre quantidades simples (maior, menor) e relações proporcionais (covariação), necessárias para lidar com as situações e os problemas enfrentados na vida cotidiana, assim como na área profissional. Na perspectiva psicológica, a compreensão das frações permite desenvolver habilidades complexas, necessárias para os conceitos de porcentagem e probabilidade. Na perspectiva científica, representa com símbolos convencionais os conceitos de velocidade (distância percorrida por unidade de tempo); densidade (massa por volume); temperatura (energia em massa); entre outros, que não podem ser descritos por um único número inteiro.

Um amplo e diversificado conjunto de estudos tem ampliado o conhecimento sobre os números racionais, contribuindo com informações a respeito da complexidade conceitual e de seu impacto na aprendizagem da Matemática (STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005; HECHT; VAGI; TORGESEN, 2007; NUNES; BRYANT, 2008; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). No entanto, existem diferentes razões pelas quais a aprendizagem das frações representa um desafio para alguns estudantes. Dessa maneira, destacam-se a seguir algumas das dificuldades na aprendizagem de frações.

Uma primeira dificuldade diz respeito à representação simbólica, que envolve dois números inteiros, *a* e *b*, (onde $b \neq 0$), para indicar a fração a/b. Nesse caso, Nunes e Bryant (2015) apontam que a representação de uma quantidade usando dois números pode induzir o aluno a:

- prestar a atenção em apenas um dos números, ou então não compreender que existe uma relação inversa entre o numerador e o denominador;

- estabelecer uma relação aditiva entre os dois valores, e nesse caso, concluir que $2/5$ e $3/6$ são equivalentes, considerando que a diferença entre o numerador e o denominador é a mesma;

- formar uma ideia de fração com parte de um todo e concluir que $6/5 < 1$.

Outra dificuldade está relacionada aos procedimentos para realizar os cálculos numéricos com frações. Em geral, a adição ou a subtração de frações são mais complicadas em comparação às mesmas operações com os números naturais, principalmente quando os denominadores são diferentes. Hecht, Vagi e Torgesen (2007) afirmam que na adição de frações, como, por exemplo, na resolução de $1/3 + 1/5$, podem ocorrer dois erros processuais. O primeiro diz respeito à falta de compreensão de que é necessário usar uma conversão para denominadores comuns das frações, e assim formar um modelo mental do significado parte-todo das unidades de números fracionários. O segundo se refere à falta de identificação de que as frações são de tamanhos desiguais e, portanto, não podem ser somadas sem serem igualadas. Nesse caso, o conhecimento conceitual do significado de medida de unidades de fração pode evitar o erro ao adicionar denominadores em um problema, tal como, $1/3 + 1/5 = 2/8$. Os autores sugerem que o entendimento dos significados de símbolos de fração pode ser usado para detectar ou evitar os erros processuais ao resolver problemas de fração.

Por fim, há a dificuldade em interpretar o significado do numerador e do denominador, associado às diferentes situações onde as frações são usadas, que podem modificar o significado dos números racionais, tais como, parte-todo, quociente, operadores e quantidade intensiva (NUNES et al., 2004).

Considerando-se alguns dos motivos que descrevem os desafios na aprendizagem das frações, busca-se investigar a quê se devem essas dificuldades. Para Gelman (1991), essas dificuldades seriam interpretadas como uma tendência do cérebro para interpretar números naturais, interferindo na compreensão de fração. Em contrapartida, Kieren (1993) considera que são limitadas as situações de ensino às quais os alunos estão expostos, explorando apenas um dos significados de frações. Siegler, Thompson e Schneider (2011) ressaltam que a dificuldade dos alunos decorre do fato de transferirem o conhecimento dos números naturais às frações, focalizando na representação numérica, como, ao comparar frações, considerar que $1/3$ é menor do que $1/4$ porque três é menor do que quatro.

Neste trabalho, busca-se entender como as crianças compreendem as relações numéricas e o conhecimento conceitual de frações, e explorar novas maneiras que favoreçam essa compreensão, bem como as implicações para a investigação científica e a prática educacional.

2.5 COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

A compreensão do conceito de fração pode ser desenvolvida a partir de situações-problema de repartir ou compartilhar, através das experiências do cotidiano e das atividades escolares (BEHR et al., 1984; NUNES; BRYANT, 2008). Além disso, observa-se que para algumas crianças, contudo, pode ser difícil estabelecer as conexões entre as ideias de repartir em partes iguais e a representação simbólica de frações devido à falta de exposição da notação fracionária nos ambientes da vida diária (STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004; NUNES; BRYANT, 2008).

Salienta-se que o desenvolvimento da compreensão conceitual envolve as experiências e os esquemas de ação, que dão significado aos símbolos convencionais (VERGNAUD, 1997). No entanto, o que se observa é que a compreensão é um processo que requer tempo necessário para estabelecer as múltiplas conexões entre os diferentes significados e representações (KIEREN, 1993). Apresenta-se, a seguir, o conceito de fração e aborda-se a noção da quantidade representada com fração, os princípios lógicos de ordenação e equivalência, as diferentes situações e as múltiplas representações simbólicas.

2.5.1 O conceito de fração

O conceito de fração envolve compreender princípios, tais como: repartir um todo ou a unidade em partes iguais; partes fracionárias têm nomes especiais; o número de partes necessárias para compor o todo; relações direta e inversa (mais partes para formar um todo, menor o tamanho das partes); o denominador indica o número de partes em que o todo foi dividido, a fim de produzir o tipo de parte, assim, é um divisor e também nomeia a parte fracionária; o numerador diz quantas partes são consideradas, assim é o multiplicador; e duas frações equivalentes são dois modos de descrever a mesma quantidade (NUNES; BRYANT, 1997; BEHR et al., 1992; KIEREN, 1976).

Nunes e Bryant (1997) e Vergnaud (1993) sugerem que a compreensão do conceito de fração está fundamentada em três aspectos básicos: os princípios lógicos, as representações numéricas e as diferentes situações. O primeiro aspecto refere-se a dois princípios lógicos, a ordenação e a equivalência. O segundo aspecto refere-se às representações numéricas, à notação simbólica e aos símbolos convencionais, tais como linguagem oral ou escrita, representações visuais e icônicas de quantidades e notação simbólica. O terceiro aspecto diz respeito às diferentes situações nas quais as frações são usadas. A seguir, esses aspectos básicos são apresentados separadamente.

2.5.1.1 Ordenação e equivalência de fração

A comparação de quantidades assume um papel importante no desenvolvimento da compreensão da ordenação e da equivalência, e sobre o tamanho relativo de frações. Post, Behr e Lesh (1986) consideram que a ordenação dos números racionais recebe influência, por vezes persistente, do conhecimento sobre números inteiros. Isso pode representar um obstáculo e dificultar o desenvolvimento da compreensão da ordenação dos números racionais, aspecto já destacado anteriormente. As diferenças conceituais estão associadas ao fato de que os números inteiros estão baseados nas estruturas aditivas, enquanto os números racionais estão associados às estruturas multiplicativas (POST; BEHR; LESH, 1986).

Salienta-se que a ordenação e a equivalência são princípios lógicos fundamentais dos números inteiros e dos números racionais; no entanto, não é possível uma transferência desses princípios dos números inteiros para os números racionais (NUNES; BRYANT, 2008). Os autores destacam que os números inteiros podem ser ordenados por percepção ou por contagem. Desse modo, ao comparar dois números inteiros diferentes, como, por exemplo, três elementos e dez elementos, a percepção é suficiente. No entanto, quando um julgamento perceptivo não é suficiente, utiliza-se a contagem dos elementos para ordenar uma quantidade representada com números inteiros. Por outro lado, a ordenação e a equivalência de frações são diferentes das dos números inteiros. A ordenação de fração envolve a ideia de "qual fração é a maior?", e a comparação estabelece uma relação entre o tamanho das partes e o número de partes, considerando a magnitude relativa de um par de frações (NUNES; BRYANT, 2008). Behr e colaboradores (1984) destacam que a compreensão do tamanho representado por uma fração é fundamental para o desenvolvimento conceitual e subjacente às habilidades de ordenação e equivalência.

A comparação entre quantidades é fundamental para a compreensão da ordenação das frações. Nesse caso, Nunes e Bryant (2008) indicam três aspectos relevantes que devem ser considerados:

- se o denominador é o mesmo nas duas frações, quanto maior o numerador, maior é a fração, por exemplo, $2/4 < 3/4$, é necessário considerar, aqui, a relação direta.

- se o numerador é o mesmo, quanto maior o denominador, menor é a fração, por exemplo, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, neste caso, a relação inversa.

- se o numerador e o denominador são diferentes, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, envolve relações proporcionais.

A possibilidade de ordenar as frações, considerando a percepção na representação numérica, pode induzir à ideia de que, quanto maior o valor dos símbolos numéricos que formam uma fração, maior a quantidade por ela representada. A afirmação, no entanto, não é verdadeira com números racionais, o que inviabiliza esse tipo de ordenação (STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004; NUNES; BRYANT, 2008; BEHR et al., 1984).

Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) apontam que as estratégias de comparação utilizadas para ordenar os números racionais envolvem uma compreensão mais complexa, que considere entender que:

- o tamanho da fração depende da relação entre dois números inteiros, que a compõem;

- nas frações com numeradores iguais, existe uma relação inversa, entre o número de partes em que o todo é dividido e o tamanho de cada parte;

- nas frações com denominadores iguais, há uma relação direta entre o número de partes consideradas e o tamanho de cada parte;

- nas frações que têm numeradores e denominadores diferentes, as decisões acerca da sua ordem exigem o uso extensivo e flexível da equivalência de frações;

- a densidade de números racionais implica a noção de que as frações podem ser infinitamente divisíveis.

Em relação à equivalência, Nunes e Bryant (2008) destacam que, no domínio dos números naturais, dois conjuntos têm a mesma quantidade, se forem representados pelo mesmo número, e são diferentes, se forem representados por números diferentes. No domínio de números racionais, entretanto, a mesma quantidade pode ser representada por diferentes sinais, por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, e assim infinitamente, onde sinais diferentes representam a mesma quantidade, e a mesma representação numérica pode representar quantidades diferentes, por exemplo, $\frac{1}{2}$ de 8 e $\frac{1}{2}$ de 12, em que o mesmo símbolo numérico $\frac{1}{2}$, representa diferentes quantidades.

A compreensão da equivalência de frações requer o estabelecimento de relações compensatórias entre a área e o número de partes iguais em que a unidade foi dividida. Assim, é necessário entender que as frações que se referem à mesma quantidade podem ser representadas por símbolos diferentes, tais como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, e serem expressas por nomes diferentes (um meio, dois quartos, três sextos, etc.), bem como formar classes de equivalência (BEHR et. al., 1983).

Nunes (2015) sugere que a equivalência de frações envolve a compreensão da linguagem e da percepção. Alguns exemplos são mencionados a seguir:

- a mesma fração, um mesmo todo, modelos visuais diferentes indicam a mesma quantidade, conforme Figura 1.

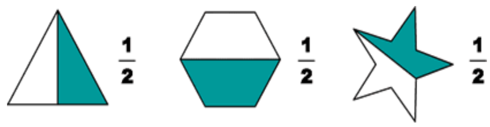


Figura 1: Diferentes modelos para a fração ½
Fonte: Mdmat, 2015.

- frações diferentes, indicam a mesma quantidade, conforme a Figura 2.

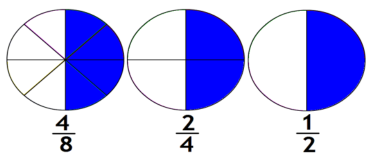


Figura 2: Modelo de frações equivalentes
Fonte: Estudokids, 2015.

- a mesma fração de quantidades diferentes, tais como, $\frac{1}{2}$ de 4 doces e $\frac{1}{2}$ de 6 doces.

Figura 3: Modelo de representação fracionária de quantidades diferentes
Fonte: Adaptado de Nunes, 2009.

O estudo de Nunes e Bryant (2008) analisou as dificuldades envolvidas na compreensão da equivalência e da ordenação com números racionais. Participaram 318 alunos do 4º e do 5º anos, em oito escolas de Oxford, Inglaterra. As tarefas envolveram a comparação de frações, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, e sem referência a um contexto situacional. Os resultados demonstraram que menos da metade dos alunos do 5º ano e menos de 20% dos alunos do 4º ano conseguiram identificar as frações equivalentes, e apenas 28% dos alunos foram capazes de indicar que $\frac{3}{4}$ é maior do $\frac{3}{5}$ que. As respostas dos alunos estiveram baseadas no julgamento apenas do valor numérico das frações, indicando que $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, embora $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ sejam frações equivalentes. Esses dados indicam que os alunos do 4º e do 5º anos apresentaram dificuldade para identificar a equivalência entre frações ou para comparar magnitudes de frações. De modo geral, os resultados sugerem que os símbolos linguísticos e numéricos desempenham apoio na compreensão dos alunos quanto à equivalência e à ordenação. Assim, é feita a distinção entre números naturais e frações, sugerindo que a percepção, com base em símbolos numéricos, não é suficiente para a compreensão da equivalência e da ordenação no contexto de números racionais. Abordam-se, a seguir, as diferentes situações de fração.

2.5.1.2 Diferentes situações de fração

As situações de divisão fornecem um ponto de partida para a compreensão dos princípios lógicos das frações. No entanto, não devem ser vistas como o único contexto em que os números racionais podem ser ensinados (BEHR et al.,1984; KIEREN, 1993; NUNES et al., 2004; NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2008).

Kieren (1976) foi o primeiro a defender a ideia de que o conceito de números racionais envolve vários significados. O autor descreveu quatro categorias, que foram designadas como subconstructos para o conhecimento sobre frações: quociente, medida, operador e razão. Nesse sentido, a compreensão do conceito de frações requer não só uma compreensão de cada um dos significados separados, mas também da forma como eles se relacionam.

Behr, Lesh, Post e Silver (1983) redefiniram a classificação proposta por Kieren (1976) e estabeleceram cinco subconstructos para referir as concepções do conceito de fração: parte-todo, quociente, razão, operador e medida. A seguir, segue um modelo que esquematiza os cinco subconstructos do significado das frações.

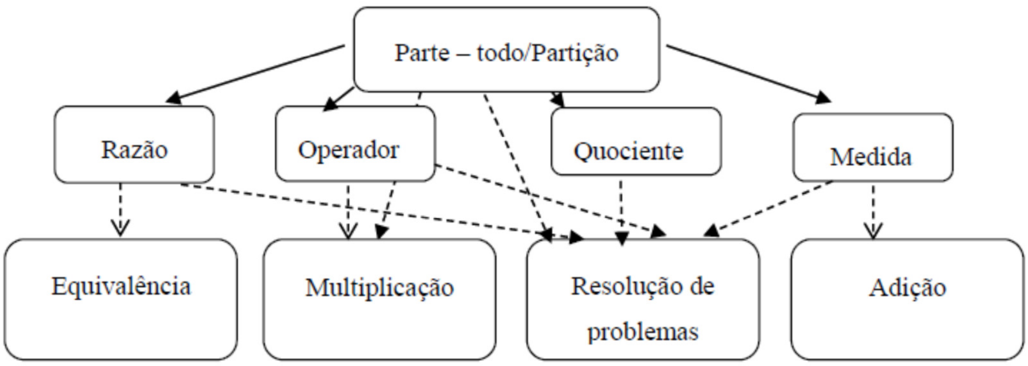


Figura 4: Modelo para os cinco subconstructos dos significados das frações.
Fonte: Behret al., 1984.

Mais recentemente, Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade e Bell (2004) apresentaram uma classificação baseada nas diferentes situações em que as frações são usadas. Os autores identificaram quatro situações distintas baseadas no significado do numerador e do denominador e na relação destes: parte-todo, quociente, operador e quantidades intensivas. Neste estudo assume-se esta última classificação, que está baseada nas situações em que as frações são usadas e no significado das magnitudes assumidas em cada um dos casos: parte-todo e quociente.

Situação parte-todo - Essa situação expressa uma relação entre as partes de tamanhos iguais de um todo ou unidade. As partes fracionárias recebem nomes especiais, que indicam quantas partes daquele tamanho são necessárias para compor o todo. O denominador da fração representa o número de partes pelo qual o todo foi dividido. O numerador da fração representa o número de partes consideradas. A fração $\frac{3}{4}$, por exemplo, representa um todo dividido em quatro partes iguais, e três dessas partes são consideradas (FIGURA 5).

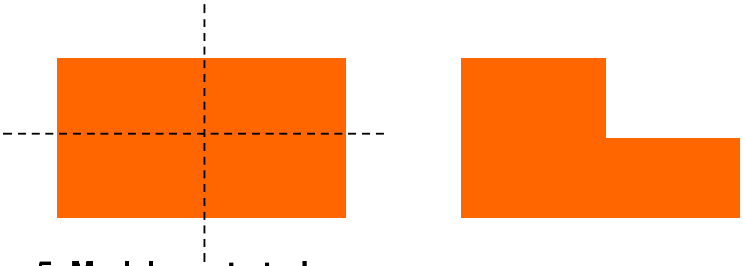


Figura 5: Modelo parte-todo
Fonte: Adaptado de Mamede, Nunes e Bryant, 2005.

A partição é o esquema de ação usado nas situações parte-todo. Em relação aos princípios lógicos de frações, Nunes e colaboradores (2004) sugerem que, nesse tipo de situação, é possível compreender, por exemplo, a ordenação, que envolve a relação inversa entre o tamanho do denominador e a quantidade representada. Nesse caso, para manter a equivalência entre as quantidades é necessário o dobro de partes, quando cada parte é a metade do tamanho do inteiro. Essa situação é tipicamente usada para iniciar as abordagens de ensino. Siegler, Thompson e Schneider (2011), no entanto, destacam que as situações parte-todo têm vantagens quando o numerador e o denominador usam algarismos pequenos e positivos; porém, apresentam limitações com frações negativas e com frações impróprias, tais como $\frac{4}{3}$, onde não se pode ter quatro partes de um objeto que tem três partes.

Hecht, Close e Santisi (2007) sugerem que a compreensão de situação parte-todo pode ser usada como um modelo mental necessário para converter quantidades fracionárias em numeros inteiros aproximados.

Situação quociente – Essa situação indica a relação entre o numerador e o denominador, e está associada com a divisão (NUNES et al., 2004). Nesse caso, o numerador representa a quantidade a ser repartida, enquanto o denominador representa o número de pessoas que estão repartindo. Nessa situação não existem restrições sobre o tamanho da fração, ou seja, o numerador pode ser menor, igual ou maior que o denominador (POST; BEHR; LESH, 1982). Também ocorre que a fração corresponde à divisão, mas também ao tamanho relativo (POST; BEHR; LESH, 1982). A fração $^2/_3$, por exemplo, representa duas barras de chocolate compartilhadas entre três crianças (FIGURA 6).

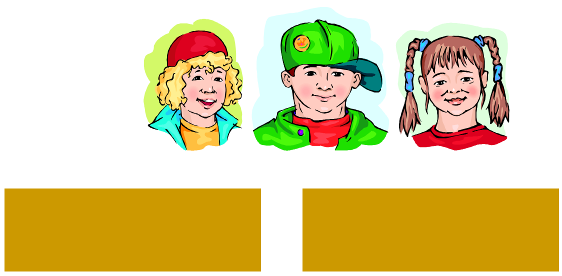


Figura 6: Modelo quociente
Fonte: Retirado de Mamede, Nunes e Bryant, 2005.

Nessa situação, as frações são explicitamente uma operação de divisão, em que o numerador é dividido pelo denominador. Behr e colaboradores (1984) destacam que correspondência um-para-muitos é o esquema de ação usado nas situações quociente, quando o dividendo é uma quantidade, e o divisor é outra quantidade. Por exemplo, quando as crianças partilham barras de chocolate para um número de destinatários, os dividendos estão em um domínio de medidas – o número de barras de chocolate - e o divisor é em outro domínio - o número de crianças. A distinção entre partição e correspondência na divisão é que, na partição, existe um único conjunto, quantidade ou medida, e na correspondência, há duas quantidades ou medidas.

Situação operador – Essa situação está associada ao papel de transformação, ou seja, é uma ação que se deve realizar sobre um número (NUNES et al., 2004). Verifica-se, através dessa situação, que o valor da quantidade discreta se transforma, ou ocorre uma ampliação ou redução das quantidades contínuas. Para Lamon (2006), uma forma simples de se referir à noção de operador é associada a "encolher/esticar", "contrair/expandir", "reduzir/ampliar" ou "dividir/ multiplicar". A fração $\frac{1}{4}$ de bolinhas de gude representa a quantidade de bolinhas de gude do menino (FIGURA 7).

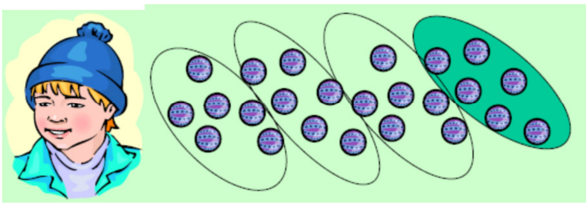


Figura 7: Modelo Operador
Fonte: Nunes, Bryant, Pretzlik e Hurry, 2006.

Para saber o que significa $\frac{1}{4}$ de 24 bolinhas de gude, no entanto, é preciso considerar a fração $\frac{1}{4}$ e operar sobre a quantidade de 24 bolinhas de gude, utilizando uma multiplicação e divisão para gerar o resultado de seis bolas de gude (NUNES et al., 2004). Já na situação de parte-todo, não seria possível gerar uma resposta sem antes definir $\frac{1}{4}$ de 24 bolinhas de gude; nesse caso, é necessário dividir em quatro partes iguais e, após, considerar uma parte (que em si é uma operação). Também, na situação quociente, a fim de resolver este problema, primeiro teriam que ser compartilhadas as 24 bolinhas de gude entre quatro pessoas, e, em seguida, a quota de cada receptor.

Os diferentes tipos de situações de frações descritas representam o significado entre o numerador e o denominador; podem ser referidas como quantidades extensivas (NUNES; BRYANT, 2008).

O estudo realizado por Mamede, Nunes e Bryant (2005) investigou a compreensão das situações de fração quociente, parte-todo e operador de fração na resolução de problemas. Participaram do estudo oitenta crianças com idades entre seis e sete anos de idade e que não possuíam instrução formal sobre frações, embora algumas já fossem familiarizadas com as palavras 'meio' e 'quartos' em contextos sociais. Os autores analisaram como as crianças compreendem a equivalência, a ordenação e a nomeação. Os resultados indicaram que as crianças tiveram melhor desempenho na situação quociente do que em parte-todo, considerando ordenação e equivalência de frações; as crianças apresentaram um desempenho semelhante na resolução de tarefas de nomeação, apresentadas nas situações parte-todo e quociente. Os níveis de sucesso das crianças na ordenação e equivalência de frações na situação quociente sugerem que elas têm algum conhecimento informal sobre a lógica de frações, desenvolvido em sua vida diária, sem instrução escolar. Esses resultados reforçam a ideia de que diferentes interpretações de frações criam oportunidades distintas para as crianças compreenderem a relação inversa entre quantidades em diferentes contextos.

Quantidades Intensivas - Por fim, a quarta situação, descrita por Nunes e colaboradores (2004) refere-se às quantidades intensivas, que estão baseadas na relação entre duas quantidades diferentes. Por exemplo, para fazer um suco de laranja são usadas três garrafas de água e duas garrafas de laranja, ou seja, $3/5$ do suco é água e $2/5$ do suco é laranja (FIGURA 8).

$3/5$ do suco é água e $2/5$ do suco é laranja

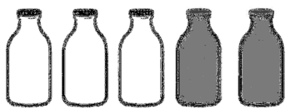


Figura 8: Modelo quantidades intensivas
Fonte: Nunes e Bryant, 2009.

A distinção entre as quantidades extensivas e intensivas está associada à relação parte-todo e à correspondência. Por exemplo, se $1/3$ de um bolo é consumido pela manhã, e $1/3$ do mesmo bolo é consumido na parte da tarde, o consumo foi de $2/3$ do bolo, ou seja, dois terços expressam uma quantidade extensiva. Se a mistura de tinta, que, na parte da manhã, é composta por $1/3$ de tinta azul, for adicionada outra mistura, que tem também $\frac{1}{3}$ de tinta azul, na parte da tarde, a mistura feita continua tendo $\frac{1}{3}$ de tinta azul, ou seja, as frações de quantidades intensivas não são adicionadas, quando colocadas juntas.

Em um estudo realizado por Nunes, Desli e Bell (2003) para examinar a compreensão das crianças com relação às quantidades intensivas, as crianças, todas com idades entre seis e oito anos e oriundas de escolas de Londres, foram convidadas a julgar se a pipoca comprada em uma loja foi mais cara do que a pipoca comprada em outra loja. As quantidades adquiridas nas duas lojas foram as mesmas, e o preço variou. Todas as crianças perceberam que, quanto mais você paga, mais cara é a pipoca. Os resultados indicaram que, quando o preço pago foi o mesmo e as quantidades variaram, aproximadamente 10% das crianças de seis anos, 26% das crianças de sete anos e 60% das crianças de oito anos reconheceram que uma pipoca era mais cara do que a outra. O problema, no entanto, não envolvia cálculo e, nesse caso, a dificuldade das crianças na concepção de custo foi com a relação entre quantidade e preço, relação que parece ser construída lentamente pelas crianças.

Posteriormente, o estudo desenvolvido por Nunes e Bryant (2008) investigou a compreensão dos alunos do 4º e 5º anos sobre a mistura de duas latas de tinta com o mesmo tom de azul. Ao serem questionadas se se mantinha o mesmo tom de azul, 37% dos alunos responderam corretamente, acreditando que se mantinha o mesmo tom de azul; 4% indicaram um tom mais claro; e 58% responderam um tom mais escuro como resultado da mistura de duas latas de tinta com a mesma cor. Esses resultados sugerem que os alunos estavam tratando a cor da mistura da mesma maneira que a quantidade de tinta, considerando que, ao misturar as duas latas, a cor passaria a ser mais escura. Nesse caso, embora haja mais tinta, os alunos ainda não compreenderam que a cor permanece a mesma. A seguir apresentam-se as múltiplas representações dos números racionais.

2.5.1.3 Múltiplas representações simbólicas

As representações desempenham um papel fundamental no conceito de fração. Nunes (2015) destaca que a representação de quantidades, através dos símbolos, tem um papel amplificador (ampliam as capacidades naturais) e estruturador (organizam as atividades), direcionando o raciocínio. Vergnaud (2009) destaca a importância de utilizar diversos tipos de representações, incluindo materiais manipulativos, esquemas e sistemas linguísticos e simbólicos.

Já discutiu-se anteriormente que a compreensão do significado das diferentes representações simbólicas com fração não é uma tarefa fácil para alguns estudantes, devido à sua notação simbólica, que utiliza dois números inteiros para representar um único número fracionário (NUNES, 2015). Van de Walle (2009) complementa que a compreensão dos símbolos de fração é estabelecida através do significado do numerador e do denominador, ou seja, a relação entre o numerador e o denominador é a base para a compreensão da representação simbólica dos números racionais.

Kieren (1988) refere que os símbolos transformam-se em instrumentos de raciocínio quando fazem sentido para os estudantes. A falta de compreensão do conhecimento simbólico conduz a procedimentos dependentes de memorização. Para o autor, a introdução prematura dos símbolos conduz os alunos a limitações que os impedem de desenvolver o sentido das operações, pelo fato de não conseguirem conectar os símbolos ao mundo real.

É interessante a abordagem de Nunes e Bryant (1997) quando destacam que os sistemas numéricos são instrumentos culturais que nos permitem ir além da nossa capacidade de perceber, comunicar e registrar quantidades. Os autores defendem que esse sistema não é simplesmente transmitido; sua aprendizagem depende da compreensão. Eles distinguem os símbolos que são usados para representar as operações (+; -; x; ÷) e as relações (>; <; =; ≠) entre quantidades. Apresentam que diferentes modelos (pictóricos, físicos, esquemáticos, representações simbólicas) proporcionam oportunidades para os estudantes estabelecerem conexões entre as situações do cotidiano e optarem pela representação que é mais favorável em um determinado contexto. Desse modo, Nunes e Bryant (2015) apontam que as representações simbólicas podem se referir a expressões do conhecimento matemático que ajudam a explicar os conceitos e as relações, bem como a resolver problemas. As representações podem ser internas ou externas, sendo que as internas se referem aos modelos mentais da realidade, enquanto as externas correspondem aos registros que expressam a realidade, tais como palavras, numerais, gráficos.

Complementando estes achados, Butterworth (2005) aponta que são utilizados sistemas simbólicos e ferramentas conceituais fornecidos pela cultura. Assim, o autor descreve quatro tipos de ferramentas conceituais:

1. representações com a utilização dos dedos para contar ou, mesmo, de partes do corpo para representar números;
2. representações linguísticas de palavras para representar números e contar;
3. numerais: símbolos escritos para representar os números e registrar quantidades com precisão;
4. representações externas: marcas nas paredes das cavernas, pedrinhas para contar o rebanho, ábaco, métodos de cálculo, calculadoras, computadores, entre outras ferramentas para registrar quantidades e calcular com elas.

Por fim, Nunes e Bryant (2015) destacam que a compreensão das quantidades relacionadas com divisão é progressiva, e está à frente de seu entendimento de fração com números.

2.5.2 Noção quantitativa

A noção da quantidade representada por fração requer a compreensão de diferentes tipos de quantidades. Nunes e Bryant (2015) destacam que as quantidades representadas por relações são descritas como quantidades extensivas e quantidades intensivas (PIAGET et al, 1960). O estudo de Piaget e colaboradores (1960) apontou que as quantidades extensivas são medidas por unidades da quantidade e seguem as relações parte-todo, onde o todo é a soma das partes. Nesse sentido, a investigação realizada por Piaget e colaboradores (1960) indicou que o princípio da invariância está associado à conservação da quantidade, ou seja, requer a compreensão de que a soma das partes é igual ao todo inicial que as originou. Para Behr e colaboradores (1984), a noção quantitativa envolve a habilidade de estabelecer uma relação compensatória entre o tamanho do todo e o tamanho das partes. Isso inclui a habilidade de estimar as relações de 'maior que' ou 'menor que' quando um par de frações é comparado. Os autores destacam que a compreensão do tamanho representado por uma fração é fundamental para o desenvolvimento conceitual e subjacente às habilidades de ordenação e equivalência.

Já as quantidades intensivas, foram descritas por Piaget e colaboradores (1960) como a relação entre partes e o todo. Nunes e Bryant (2015) definem como uma relação entre duas quantidades ou grandezas, geralmente representadas como razão. Para os autores, as quantidades intensivas são medidas por índices. Diferentemente das quantidades extensivas, não são adicionadas. Por exemplo, a velocidade envolve uma relação entre o tempo e a distância. Nesse exemplo, a velocidade é diretamente proporcional à distância. Então, se o tempo é mantido constante, uma distância maior envolve uma velocidade maior; ou é inversamente proporcional ao tempo, se distância é mantida constante: um tempo maior envolve uma velocidade menor. Para os autores, essas quantidades são importantes na vida cotidiana, mas a compreensão dessas quantidades parece significativamente mais difícil para a maioria das pessoas porque envolve um raciocínio proporcional.

Post e colaboradores (1985) destacam que a noção quantitativa de número racional inclui a compreensão da distinção entre quantidade relativa e quantidade absoluta. Os autores apontam que a quantidade relativa envolve a relação entre numerador e denominador, que define o significado assumido pela fração, e as quantidades absolutas são descritas de forma independente. Para Van de Walle (2009), a comparação entre duas quantidades pode desempenhar um papel significativo, no sentido de desenvolver a compreensão do tamanho relativo das frações.

Desse modo, Behr, Lesh, Post e Silver (1983) destacam a importância da distinção entre as quantidades que podem ser contadas ou medidas. Para os autores, as quantidades discretas ou descontínuas estão associadas à contagem e aos números inteiros. Já as quantidades contínuas são quantidades medidas e podem ser exaustivamente divididas, estando associadas aos números racionais. Os autores acrescentam que esses dois tipos de quantidades estão baseados na relação parte-todo e relacionados a duas quantidades da mesma natureza. Apesar disso, as estratégias usadas em tarefas que envolvem essas quantidades são diferentes. As tarefas com quantidades discretas podem ser resolvidas por distribuição, enquanto as quantidades contínuas requerem um esquema de ação de partição.

O estudo realizado por Stafylidou e Vosniadou (2004) investigou o desenvolvimento da compreensão do valor numérico das frações em 200 estudantes com idades entre 10 e 16 anos. Os estudantes foram avaliados através de tarefas que exigiam apontar qual a maior/menor fração, ordenar um conjunto de determinadas frações e justificar suas respostas. Os resultados indicaram que 22% dos estudantes expressam a ideia de que o valor de uma fração aumenta à medida que o tamanho dos números da fração aumenta. Os estudantes mais jovens tiveram mais dificuldade em compreender a relação inversa entre o numerador e o denominador da fração. Esse tipo de resposta, no entanto, diminuiu no ensino médio, sendo que houve um aumento no número de estudantes que ordenou corretamente as frações nesse nível de ensino. Esses resultados evidenciam que o conceito de fração exige uma reorganização do conhecimento existente e que as dificuldades enfrentadas pelas crianças para compreender frações podem ser explicadas como resultado de um conflito entre as novas informações e seu conhecimento prévio.

2.5.3 Raciocínio multiplicativo

Números racionais representam quantidades que expressam uma relação entre duas quantidades ou grandezas e estão baseados no raciocínio multiplicativo (NUNES: BRYANT, 1997). O raciocínio multiplicativo envolve um conjunto de operações complexas, as quais envolvem diferentes sentidos de número, como proporção, relação escalar e relação funcional (NUNES; BRYANT, 1997). Vergnaud (1983) aponta que o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve regras operatórias para a multiplicação, bem como para a divisão, as quais são desenvolvidas de forma gradual, através de situações significativas, associadas aos esquemas de ação e às representações simbólicas.

Nunes e Bryant (1997) distinguem três tipos de situações multiplicativas, que fundamentam o conceito de fração: divisão e distribuição; relações entre variáveis e correspondência um-para-muitos A realização desse estudo envolveu situações de divisão, que serão descritas a seguir.

2.5.3.1 Situação de divisão

O conceito de divisão envolve a capacidade de repartir em partes iguais e compreender a relação entre os três termos em uma situação (o todo, o tamanho das partes e o número de partes), relação que pode ser direta ou inversa. Um conjunto de estudos a respeito da compreensão sobre divisão define dois tipos de situações: divisão partitiva e por quotas (VERGNAUD, 1992; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; NUNES: BRYANT, 1997; CORREA, 2004; KORNILAKI; NUNES, 2005).

A conexão entre as relações lógicas de divisão e de fração se estabelece quando são exploradas as consequências da alteração da quantidade inicial em relação ao número de partes (partitiva) ou ao tamanho das partes (quotas) (VERGNAUD, 1992). Na situação de divisão partitiva, os esquemas de ação envolvem partilhar um conjunto em subconjuntos iguais, sendo que o número de recipientes é conhecido. Por exemplo, se há 12 doces (o todo) e três crianças para compartilhá-los (três partes), há quatro doces por criança (o tamanho da parte ou quota). Já na situação de divisão por quotas, existe um tamanho da parte ou quota que não pode ser alterado. Por exemplo, se existem 12 doces (o todo) e três doces para compartilhar por criança (o tamanho da parte ou quota), quatro crianças recebem doces (número de partes) (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998).

Nunes e Bryant (1997) referem que as diferentes situações de divisão envolvem princípios lógicos diferentes. A situação de divisão partitiva requer a ação de partilha equitativa, ou seja, a igualdade das partes; enquanto a divisão por quotas corresponde ao fato de que a parte já está estabelecida e que não pode ser alterada. Nesse caso, existe uma relação inversa entre as partes e o tamanho das partes, ou seja, quanto mais partes, menor o tamanho de cada parte. Para os autores, a compreensão do conceito de divisão constitui-se na capacidade de compartilhar um conjunto ou quantidade de forma equitativa (distribuição) e nas relações entre os três elementos em uma situação de divisão: o dividendo (o todo); o divisor (o número de partes) e o quociente (o tamanho das partes ou quotas). A relação é direta entre o dividendo e o quociente, ou seja, quanto maior o todo a compartilhar, mais partes a receber. A relação é inversa entre o divisor e o quociente, ou seja, quanto mais partes para compartilhar um conjunto, menor é o tamanho de cada parte a receber.

O estudo realizado por Correa, Nunes e Bryant (1998) investigou a relação entre a ação de repartir e as noções iniciais sobre divisão em crianças de cinco aos sete anos, analisando como estas entendiam a relação inversa entre divisor e quociente em tarefas de divisão partitiva e por quotas. As tarefas envolveram comparação das quantidades e solicitavam o julgamento sobre os resultados de uma divisão, tais como: “O grupo A tem 12 doces para compartilhar entre duas crianças, e o grupo B tem 12 doces para compartilhar entre três crianças, em qual grupo as crianças comem mais doces?”. Os resultados indicaram taxas de sucesso na divisão partitiva em 30% das crianças de cinco anos, em 55% das crianças de seis anos, e em 85% do grupo de sete anos. Na divisão por quotas, o sucesso foi obtido em 50% das crianças de cinco anos, em 38% das crianças de seis anos e em 40 % das crianças de sete anos. Em relação às justificativas, 30% das crianças de cinco anos referem-se à relação direta entre divisor e quociente, o que significa que elas estão focalizando a atenção no tamanho do dividendo, esquecendo o divisor, ou focalizando a atenção no divisor, esquecendo o tamanho do dividendo. Isso demonstra a falta de compreensão sobre as relações de covariações entre os termos, quando o dividendo é mantido constante. A maioria das crianças de seis anos apresenta justificativas lógicas, mas cerca da metade dessas crianças inferiu uma relação direta entre divisor e quociente, demonstrando uma compreensão qualitativamente superior em relação à compreensão dessas relações entre os termos envolvidos na operação de divisão. O desempenho das crianças de sete anos foi semelhante ao das crianças de seis anos. Os resultados evidenciaram que as crianças de cinco anos já fazem estimativas quando o dividendo é mantido constante, e os valores para o divisor variam, sem um ensino formal sobre divisão. Isso pode ser atribuído às experiências do cotidiano das crianças relacionadas às situações de divisão.

Mais recentemente, Mamede e Silva (2012) replicaram o estudo referido acima com crianças pré-escolares de quatro e cinco anos, e analisaram sua compreensão sobre divisão partitiva com quantidades discretas. As crianças foram entrevistadas individualmente e solicitadas a fazerem julgamentos em tarefas de relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo é o mesmo. As tarefas envolviam a divisão de 12 e 24 quantidades discretas por dois, três e quatro recipientes. Os resultados mostraram que crianças de quatro e cinco anos já têm algumas ideias sobre a divisão; conseguem estimar o quociente, quando o divisor varia e o dividendo é constante; e conseguem justificar suas respostas.

É importante destacar que as experiências do cotidiano não se limitam apenas à partilha de quantidades discretas. Muitas situações no cotidiano, frequentemente, envolvem partilha de quantidades contínuas, como dividir uma barra de chocolate, uma garrafa de suco ou um pedaço de bolo.

O estudo realizado por Kornilaki e Nunes (2005) envolveu os dois estudos com quantidades contínuas e quantidades discretas. O primeiro estudo foi realizado com tarefas de divisão partitiva, e o segundo, com tarefas de divisão por quotas. As autoras investigaram se as crianças, em número de 96 e com idades entre cinco a sete anos, transferem a sua compreensão das relações lógicas de quantidades discretas para quantidades contínuas. Nos problemas propostos, o número de recipientes variava, produzindo duas condições. Na primeira condição, os divisores eram iguais, e o tamanho do divisor era o mesmo; e na segunda condição, os divisores eram diferentes, e o número de recipientes variava. Os resultados indicaram que a condição ‘divisores diferentes’ foi mais difícil do que a condição ‘divisores iguais’, e que a relação inversa entre o divisor e o quociente é compreendida posteriormente ao princípio de equivalência. Nas tarefas de divisão partitiva, 33% das crianças de cinco e seis anos justificaram as respostas como relação direta: quanto mais recipientes, mais cada um tem. Esse tipo de resposta foi diminuindo com a idade das crianças, considerando que pouco mais de 10% das crianças de sete anos usaram esse raciocínio incorreto. Nas tarefas de divisão por quotas, 50% das crianças de cinco e seis anos e 25% das crianças de sete anos justificaram as suas respostas como relação direta. As respostas corretas apresentaram a justificativa da relação inversa entre o divisor e o quociente. Os resultados evidenciaram que as crianças entendem mais facilmente a relação inversa na divisão partitiva do que na divisão por quota.

Posteriormente, Correa (2004) realizou um estudo com crianças de 6 a 9 anos. O estudo investigou as estratégias de resolução oral de divisão partitiva e por quotas. As tarefas utilizaram quatro valores para o dividendo (4, 8, 12 e 24) e dois divisores (2 e 4). Os resultados apontaram que o desempenho das crianças foi influenciado pelo tamanho do dividendo e do divisor. Os procedimentos de resolução dos problemas de divisão por quotas envolveram fatos multiplicativos, enquanto que na divisão partitiva estavam baseados no uso de adições repetidas.

Observando as evidências trazidas em cada estudo, pode-se concluir que as crianças são capazes de resolver problemas de divisão antes de serem formalmente ensinadas na escola (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; CORREA 2004; KORNILAKI e NUNES, 2005; MAMEDE e SILVA, 2012).

2.5.3.2 Esquemas de ação relacionados à divisão

As situações de divisão envolvem dois esquemas de ação, apontados na literatura como partição e correspondência (BEHR et al., 1992; VERGNAUD, 1992; NUNES; BRYANT, 1997). Nunes e Bryant (2009) consideram importante a distinção entre partição e correspondência nas situações de divisão, bem como compreender como cada esquema de ação contribui para a aprendizagem sobre frações. Na mesma perspectiva de Behr e colaboradores (1984), Nunes e Bryant (2009) destacam que na partição existe um único conjunto ou medida, ao passo que na correspondência existem duas quantidades ou grandezas. Complementando esses achados, Behr, Harel, Post e Lesh (1992) concluíram que a partição é o esquema de ação que as crianças usam nas situações de fração parte-todo.

A partição é usada pelas crianças nas situações do cotidiano ao repartirem objetos ou quantidades entre os amigos ou receptores. Inicialmente, está associada à igualdade entre as partes e, posteriormente, ao todo ou ao conjunto de objetos; (KIEREN, 1988). Para Kieren (1988) a divisão equitativa é subjacente à noção de partição, definida como a divisão de uma quantidade em partes iguais. Seguindo tal perspectiva, Nunes e Bryant (1997) apontam que as crianças, a partir dos seis anos, iniciam a desenvolver uma compreensão das relações estabelecidas nas situações de divisão, bem como a relação inversa entre tamanho das partes, o tamanho do todo e o número de partes.

Pothier e Sawada (1983) descreveram cinco níveis de partição: partilha; metade algorítmica; uniformidade; imparidade e composição. No primeiro nível de partição, as crianças conseguem dividir regiões circulares e retangulares para mostrar metades e quartos; porém, ainda podem dividir o objeto em partes desiguais, fazer um número errado de divisões ou dividir apenas uma parte do objeto. No segundo nível, já conseguem dividir uma região retangular ou circular em um determinado número de partes, através de partições sucessivas em metades; porém, as partes ainda são resultantes da partição e podem não ter o mesmo tamanho. No terceiro nível, iniciam a compreensão de que o tamanho das partes resultantes da partição é igual. No quarto nível, já percebem que a divisão de um objeto em metades não é adequada com frações cujos denominadores são ímpares, e que as divisões sucessivas precisam obter partes iguais. E, por fim, as crianças realizam divisões sucessivas do objeto com frações com denominadores ímpares. Isso ocorre, por exemplo, na partição de um objeto em nove partes, quando a criança pode dividir em terços e, posteriormente, dividir cada terço em terços, reconstruindo a fração da unidade com a utilização desse algoritmo multiplicativo.

As experiências iniciais das crianças com partição contribuem para a compreensão do conceito de números racionais, para a ordenação de frações e para a determinação de frações equivalentes, conforme Pothier e Sawada (1983). Para Behr e colaboradores (1984), a partição é fundamental no conceito de fração; porém, não é suficiente para a compreensão das quantidades que resultam da divisão e que são representadas por frações ou por números racionais.

Sabe-se que a correspondência está associada a duas quantidades, que podem ser de mesma natureza ou de naturezas distintas, e que também se refere à proporção e à distribuição, bem como envolve o raciocínio multiplicativo. Acredita-se que a correspondência um-para-muitos é usada pelas crianças antes do ensino formal sobre multiplicação e divisão na escola (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; CORREA, 2004).

O estudo realizado por Nunes e colaboradores (2009) investigou o progresso de crianças de seis e sete anos após uma intervenção sobre raciocínio multiplicativo. Os resultados apontaram que o uso da correspondência nas situações de divisão possibilita manter uma razão fixa entre duas quantidades. Isso permite usar um tipo de raciocínio diferente do raciocínio parte-todo e conduz à compreensão de razão e de proporção. Para os autores, a relação entre as quantidades permanece implícita, como se a criança focasse a atenção nas quantidades envolvidas nos problemas e não considerasse as relações entre as quantidades. Estes resultados indicam que o esquema de correspondência um-para-muitos está na origem do raciocínio multiplicativo.

Nunes e Bryant (2009) descreveram quatro diferenças entre partição e correspondência apresentadas a seguir:

- duas quantidades em correspondência não necessitam de uma relação entre o tamanho do dividendo e do divisor, enquanto que, na partição, a soma das partes não deve ser maior do que o todo;

- a correspondência entre duas quantidades deve ser justa; já na partição, deve ser equitativa;

- a ordenação de quantidades envolve a relação inversa entre o divisor e o quociente. Usando a correspondência, é estabelecida uma relação entre as quantidades (mais crianças, menos bolos), enquanto que na partição é necessário estabelecer uma relação dentro da quantidade (mais partes, menores serão as partes).

- a equivalência entre as quantidades envolve o raciocínio proporcional. Na correspondência, a compreensão da equivalência baseia-se no raciocínio proporcional direto - o dobro de chocolates e o dobro das crianças significam ações equivalentes. Já na partição, a compreensão da equivalência baseia-se no raciocínio proporcional inverso, segundo o qual o dobro das partes significa que cada parte terá a metade do tamanho.

Nunes (2015) refere que o raciocínio proporcional envolve a compreensão de relações necessárias, tal como a relação inversa entre a multiplicação e a divisão, mas também requer a compreensão da natureza de uma situação. A seguir, descrevem-se as relações necessárias e contextuais.

2.5.3.3 Relações necessárias e contextuais

Os problemas de raciocínio multiplicativo envolvem duas quantidades que estão ligadas por uma transformação (operações) e dois tipos de relações (direta e inversa). Já a representação desses problemas utiliza dois tipos de relações entre quantidades, descritas como: relações necessárias e relações contextuais.

Para Nunes (2012), as relações necessárias resultam das operações sobre as quantidades ou relações, enquanto as relações contextuais descrevem o contexto de uma situação e requerem a compreensão da natureza da situação, bem como a tomada de decisão quanto à solução do problema. A autora destaca que as situações estão baseadas em relações aditivas e multiplicativas. As relações aditivas são relacionadas ao esquema parte-todo, enquanto que as relações multiplicativas são baseadas na correspondência uma-para-muitos. Nunes e Bryant (1997) destacam que os esquemas de ação representam o que é geral nas ações e não dependem dos objetos, e quando são coordenados entre si, novos conceitos são formados.

Em relação à divisão, as relações necessárias estão associadas aos princípios entre os três termos, em qualquer situação: princípio da relação direta entre o dividendo e o quociente; princípio da relação inversa entre o divisor e o quociente; e princípio da equivalência. Já as relações contextuais descrevem a natureza da situação e possibilitam a tomada de decisão, usando as relações necessárias e as operações matemáticas (NUNES; BRYANT, 2015).

A compreensão das relações lógicas é considerada por Nunes (2012) como a tomada de consciência dos esquemas de ação. Isso ocorre quando as crianças separam um todo em partes e tomam consciência das relações parte-todo. Por exemplo, quando uma quantidade conhecida está em correspondência (razão fixa) com outra quantidade (produto), é estabelecida uma correspondência um-para-muitos. Já, na partilha, as duas quantidades são conhecidas e a razão é desconhecida. A coordenação desses dois esquemas de ação forma um conceito operacional de relações multiplicativas (NUNES; BRYANT, 1997).

Acredita-se que a conexão entre as relações lógicas de divisão e de fração é estabelecida ao explorar as consequências da alteração da quantidade inicial em relação ao número de partes (partitiva) ou tamanho das partes (quotas) (VERGNAUD, 1992). Quando duas quantidades estão ligadas por uma transformação, envolvem relações necessárias, e posteriormente progridem quando pensam nas relações contextuais entre quantidades (VERGNAUD, 1983; NUNES; BRYANT, 2015). Nesse sentido, Vergnaud (1983) destaca que o raciocínio multiplicativo envolve a compreensão de relações necessárias, mas também requer a compreensão da natureza de uma situação a fim de encontrar a solução para o problema.

As relações necessárias envolvem esquemas conceituais distintos, associados ao tipo de situação. Nas situações quociente, é relevante o esquema de correspondência, nesse caso envolve a partilha de duas quantidades diferentes. Já nas situações parte-todo, exige entender que quanto mais partes iguais de um todo, menores serão as partes, e que não há uma compensação exata entre o tamanho e o número de partes, e envolve o esquema de partição. Esta diferença conceitual possibilita comparações entre a compreensão das crianças sobre os princípios básicos equivalência e ordenação através desses dois tipos de situações (NUNES; BRYANT, 1997).

A resolução de um problema de divisão pode torna-se mais simples ou mais complexa, devido à comparação entre quantidades quando estabelecem relações diretas ou inversas; operação quando ocorre a transformação do referente e uma quantidade; e mudança no significado dos números.

2.5.4 Resolução de problemas e modelos na aprendizagem de frações

A resolução de problemas promove o desenvolvimento do conhecimento conceitual, ao mesmo tempo em que estimula o raciocínio e a comunicação, além de ser aspecto facilitador da aprendizagem matemática (BEHR; POST; LESH, 1981). Van de Walle (2009) define problema como uma tarefa ou uma atividade para a qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já determinada, e não exista um procedimento específico de solução. Desse modo, o presente estudo considera problemas como ferramentas conceituais no ensino da Matemática, que se constituem como um desafio intelectual e permite desenvolver habilidades matemáticas complexas (BUTTERWORTH, 2005).

O estudo realizado por Hecht, Vagi e Torgesen (2007) investigou as causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas sobre frações. Os resultados evidenciaram que alguns alunos recorrem a modelos mentais imprecisos na interpretação dos enunciados dos problemas, mesmo quando os problemas requerem uma construção de modelos mentais precisos. Em função disso, realizam um procedimento incorreto na resolução do problema. Os autores destacam que a falta de conhecimento conceitual conduz muitos alunos a usarem procedimentos memorizados e incorretos para resolver problemas de fração. Isso pode ser atribuído a uma separação entre a compreensão do conhecimento conceitual e a resolução de problemas com fração.

Nunes (2012) destaca a capacidade de usar um modelo matemático quantitativo na resolução de um problema como uma função mental superior. A autora considera três fatores importantes quando os estudantes estão envolvidos na tarefa ativamente: o pensamento reflexivo, a interação social com os outros estudantes e o uso de ferramentas de aprendizagem. Cada um desses fatores tem um impacto na forma de aprender e influencia de modo significativo o ensino da Matemática. O primeiro fator, pensamento reflexivo, refere-se à atividade mental por parte do aluno, que se expressa por imaginar ou relacionar ideias. A interação e o ambiente sociocultural é o segundo fator que amplia o desenvolvimento das ideias matemáticas dos estudantes, através de interações com o ambiente. E, por fim, o uso de ferramentas de aprendizagem e de modelos manipulativos pode ajudar a desenvolver procedimentos e estratégias para a solução dos problemas.

Nunes (2012) propõe a distinção entre dois tipos de problemas quantitativos. O primeiro tipo de problema, para representar as quantidades, é definido como aqueles que envolvem quantidades e operações com as quantidades, e que requerem operar sobre quantidades e relações, por exemplo, $a + b + c = d$. O segundo tipo de problema, para representar as relações contextuais, envolvem os contextos. Esses devem ser representados e coordenados com as relações necessárias e as operações para que se possa encontrar a solução. A autora destaca que esse tipo de problema é mais difícil do que aqueles que envolvem apenas quantidades e operações. Esses dois tipos de problemas podem envolver informações e operações semelhantes; porém, quando as relações contextuais estão presentes, os problemas tornam-se mais difíceis.

É interessante para a presente pesquisa o uso de modelos relacionados à resolução de problemas como tarefas de aprendizagem. A seguir, apresenta-se um modelo de resolução de problemas quantitativas, proposto por Nunes (2012) (FIGURA 9).

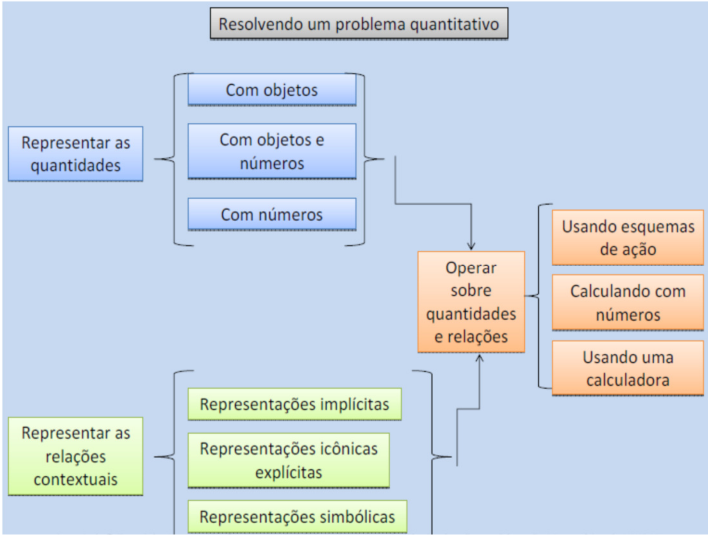


Figura 9: Resolução de problema quantitativo
Fonte: Nunes, 2012. UNIBAN.

Esse modelo usado na aprendizagem da Matemática possibilita: compreender as relações necessárias; estabelecer relações contextuais; transferir as informações no problema de relações contextuais para relações necessárias; e representar as relações contextuais, ligando-as às relações necessárias e às operações.

De acordo com Gravemeijer (1994), os procedimentos informais podem ser interpretados como uma antecipação aos procedimentos formais; através de um princípio baseado no papel que os modelos representam entre o conhecimento informal e formal. O autor apresenta quatro níveis de atividade matemática: situacional; referencial; geral e formal. Na Figura 10 apresentam-se os quatro níveis de atividade matemática.

Níveis de atividade matemática

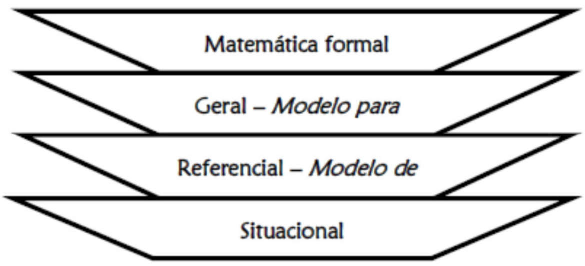


Figura 10: Níveis de atividade matemática
Fonte: Adaptado de GRAVEMEIJER, 1994.

a) numa atividade num nível situacional, as interpretações e as resoluções dependem da compreensão do contexto, uma vez que a tarefa se encontra associada a uma situação real, sem o recurso ao papel ou lápis;

b) numa atividade de nível referencial, cada 'modelo de' refere-se a atividades em situações descritas pelas atividades de ensino;

c) numa atividade de nível geral, os 'modelos para' já se referem a um quadro de representações matemáticas em que o foco são as estratégias;

d) no último nível, o conhecimento formal, não há dependência de qualquer apoio de modelo.

Para Gravemeijer (2005), a mudança de um 'modelo de' para um 'modelo para' corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno. O papel dos modelos é estabelecer avanços entre o nível informal (modelo de) e o nível formal (modelo para). Para que isso ocorra, é necessário aprender a criar modelos de uma situação e transformá-los em modelos para várias situações semelhantes (NUNES, 2012). Nesse sentido, utiliza-se, na presente pesquisa, o 'modelo de' como representação das situações.

Na aprendizagem matemática, os modelos desempenham um papel facilitador, quando são utilizados como ferramentas para representar os aspectos abstratos da matemática, baseados no cotidiano (BEHR et al., 1992). No ensino de frações, é possível recorrer a diferentes modelos de representações que contribuem para a sua compreensão. Entre os modelos facilitadores do desenvolvimento do conceito de fração, Nunes (2012) destaca os modelos icônicos, que podem auxiliar na passagem da compreensão de uma situação para o nível geral, oferecendo uma referência mais abrangente. Lesh, Behr e Post (1987) destacam que os modelos podem facilitar a resolução de problemas se o conhecimento conceitual explorar situações do cotidiano. Descrevem-se quatro modelos icônicos: região ou área; comprimento ou medida; conjuntos; e reta numerada.

O primeiro modelo – região ou área –, descrito por Van de Walle (2009), pode ser um recurso utilizado para a multiplicação e a divisão de números racionais. Explora o conhecimento informal e formal, possibilitando estabelecer ligações entre as diferentes representações. A seguir, apresenta-se um exemplo do modelo de região ou área (FIGURA11).

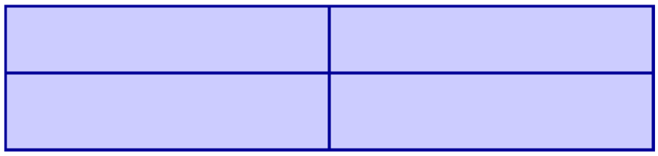


Figura 11: Modelo de região ou área
Fonte: Van de Walle, 2009.

O segundo modelo - comprimento ou medida de uma barra retangular (ou figura geométrica) -, favorece o processo de repartir o objeto em partes iguais, ou seja, a divisão equitativa. Nesse modelo, é possível explorar o aspecto proporcional das frações, as relações entre números e as representações simbólicas. Brigth e colaboradores (1988) descrevem algumas vantagens na sua utilização, tais como: o comprimento representa uma extensão da unidade, bem como de todas as subdivisões da unidade; o modelo é contínuo; e requer o uso de símbolos para indicar o significado. A seguir, apresenta-se um exemplo do modelo de comprimento ou medida (FIGURA12).

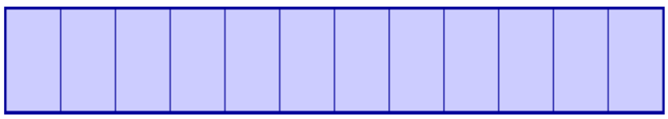


Figura 12: Modelo de comprimento ou medida
Fonte: Van de Walle, 2009.

Outro modelo refere-se a um conjunto de objetos e subconjuntos. O conjunto é identificado como o todo ou a unidade, enquanto que os subconjuntos do todo compõem as partes fracionárias. Van de Walle (2009) destaca que este modelo pode ser difícil para algumas crianças, quando uma coleção de objetos se refere a uma unidade. O autor acrescenta que as crianças se concentram no tamanho do conjunto e não consideram o número de partes iguais no todo. A seguir, apresenta-se um exemplo do modelo de conjunto (FIGURA13).

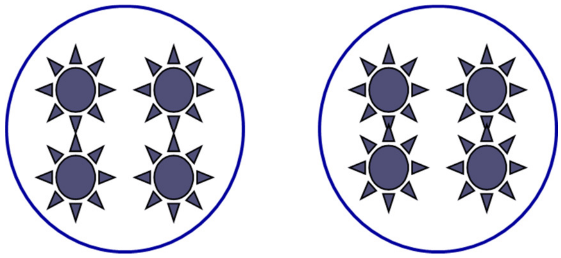


Figura 13: Modelo de conjunto
Fonte: Van de Walle, 2009.

Por fim, o modelo de reta numérica é um modelo de medida para representar as magnitudes de frações (SIEGLER; THOMPSON; SCHENEIDER, 2011). Difere dos outros modelos, no entanto, por ser considerada como uma representação mais abstrata, que pode ser utilizada para representar a magnitude da fração, e também para designar um determinado local para os números (NUNES, 2015). A seguir, apresenta-se um exemplo do modelo de reta numerada (FIGURA14).

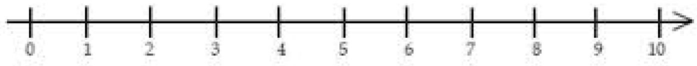


Figura 14: Modelo de reta numerada
Fonte: Elaborada pela autora.

Em um estudo recente, Siegler, Thompson e Schneider (2011) exploraram o conhecimento de magnitudes de frações. A investigação envolveu alunos com idades entre 11 e 14 anos e avaliou o conhecimento de magnitudes de frações através de tarefas de: estimativa de reta numérica de zero a um; estimativa de reta numérica de zero a cinco; e comparação de magnitude de zero a um. Os resultados revelaram que a reta numérica mostrou-se como uma estratégia útil para as representações de magnitude de números inteiros e para predizer padrões de velocidade e precisão. As estratégias utilizadas pelos alunos indicaram que analogias com números inteiros também são usadas para gerar representações de magnitude para frações. Esses resultados sugerem que a ênfase ao uso de frações, como medidas de quantidade, pode melhorar o aprendizado dos alunos.

As estratégias usadas para a solução dos problemas, além de procedimentos apoiados em modelos de representação, podem estar apoiadas no raciocínio informal. De acordo com Post e colaboradores (1986), as estratégias de raciocínio se apresentam de três formas: raciocínio residual, utilização de pontos de referência e raciocínio diferencial.

A primeira estratégia, raciocínio residual, refere-se à quantidade necessária para compor o todo. Por exemplo, ao comparar $5/6$ e $7/8$, os alunos podem perceber que, na primeira fração, falta $1/6$ para completar o inteiro, da mesma forma que falta $1/8$ na segunda fração. Esses valores correspondem aos resíduos para compor o todo. Assim, os alunos podem concluir corretamente que $7/8$ é maior do que $5/6$. A segunda estratégia, pontos de referência, compara duas frações, e ainda prevê a utilização de uma terceira fração, como, por exemplo, usar $1/2$ e 1 como ponto de referência. Um aluno pode utilizar essa estratégia e responder corretamente que $5/8$ é maior do que $3/7$, porque o numerador da primeira fração é maior do que a metade do denominador. Já, na segunda fração, o numerador é menor que a metade do denominador.

O raciocínio diferencial é a terceira estratégia. Ao comparar $5/6$ e $7/8$, alguns alunos afirmam que são frações equivalentes, porque, em ambas, falta apenas uma parte para formar o todo. Nessa estratégia, os alunos focam-se na diferença absoluta entre cinco e seis e entre sete e oito, não consideram o valor relativo da fração. Esse raciocínio está apoiado nas regularidades dos números naturais, conduzindo, geralmente, a resultados incorretos. Dessa maneira, os alunos que usam as estratégias de raciocínio residual e de pontos de referência tendem a apresentar um melhor desempenho do que aqueles que usam raciocínio diferencial.

As estratégias associadas às demandas cognitivas, necessárias para resolução dos problemas, estão relacionadas à habilidade cognitiva para executar cálculos aritméticos, de maneira eficiente e precisa, e à habilidade para usar a operação aritmética correta para resolver um problema particular (NUNES et al., 2011). Desse modo, Vergnaud (2009) propõe uma distinção entre dois tipos de cálculos utilizados na resolução de problemas: numérico e relacional. Para o autor, cálculo numérico envolve as relações entre números e pode usar a contagem como estratégia de resolução. Já o cálculo relacional se torna mais difícil, pois estabelece as relações entre quantidades e as transformações e as composições das relações em uma situação.

Nunes e colaboradores (2011) consideram que esses dois tipos de cálculos são relativamente independentes entre si, provavelmente realizados separadamente. Os autores afirmam, entretanto, que ambos estão ligados, porque a decisão tomada sobre qual cálculo usar para resolver um problema exige a compreensão da relação entre as quantidades envolvidas no problema. Em problemas como aqueles de resultado desconhecido, essas relações são transparentes e óbvias, e há muito pouco cálculo relacional para ser feito. Já o sucesso na resolução de outros tipos problemas, como, por exemplo, os problemas de início desconhecido, exige a habilidade de estabelecer as relações entre as quantidades envolvidas nos problemas.

Hiebert e colaboradores (1997) propõem que as situações apresentadas aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito, como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos, incluindo diferentes áreas do saber e as situações do cotidiano. O autor descreve a importância da aprendizagem da Matemática através de atividades baseadas em resolução de problemas. Essas atividades têm várias funções:

- concentram a atenção dos alunos sobre as ideias e dão sentido às mesmas;
- desenvolvem a convicção nos alunos de que eles são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido;
- contribuem para o desenvolvimento conceitual dos alunos;
- criam oportunidades para o professor avaliar o que os seus alunos estão aprendendo e como estão enfrentando as dificuldades;
- podem ser abordadas pelos alunos através de diversas estratégias de resolução;
- podem ser solucionados de diferentes maneiras ou permitem tomar decisões ou posições diferentes, assim como a sua defesa;
- incentivam o envolvimento dos alunos na explicação;
- permitem conexões com outras ideias matemáticas;
- promovem a agilidade no uso da matemática; e
- oferecem oportunidades de mobilizar diferentes competências.

2.6 ENSINO DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este item apresenta aspectos relacionados ao ensino da Matemática, nos anos iniciais da educação básica. Inicia-se com a Organização do Programa Curricular de Matemática dos níveis de escolaridade da educação básica no Brasil

2.6.1 Programa Curricular de Matemática no Brasil

Inicialmente, no Brasil, as habilidades e os conteúdos da Matemática são encontrados no Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997). Ressalta-se que os PCNs estão organizados por ciclos para os anos iniciais do ensino fundamental. O primeiro ciclo corresponde ao 2º e 3º anos, e o segundo ciclo está composto pelo 4º e 5º anos.

As orientações didáticas descritas nos PCNs estão de acordo com os estudos de Nunes e Bryant (1997) e Vergnaud (1992) a respeito do desenvolvimento das habilidades e dos conceitos iniciais da Matemática. Nessa perspectiva, a resolução de problemas é proposta pelos PCNs como uma concepção de ensino e aprendizagem que possibilita desenvolver habilidades e conceitos, e não apenas como mera reprodução de conhecimento (BRASIL, 1997, p. 33).

Em relação aos conteúdos para o ensino fundamental, estão selecionados e organizados em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Formas; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação. No bloco Números e Operações, assunto desta pesquisa, os PCNs propõem que o desenvolvimento dos conceitos numéricos envolve:

- as diversas categorias, como números naturais, números inteiros (positivos e negativos), números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais;

- a resolução de situações-problema sobre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;

- a compreensão dos diferentes significados e das relações existentes entre os números e as operações;

- os diferentes tipos de cálculo (exato e aproximado, mental e escrito); e

- o desenvolvimento da noção de pré-álgebra, como a base conceitual da álgebra nos anos finais do ensino fundamental (BRASIL, 1997).

Em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática, destacam-se os objetivos gerais do bloco Números e Operações, relativos ao segundo ciclo do ensino fundamental, que estão relacionados ao tema deste estudo:

> - Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
> - Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal.
> - Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.
> - Ampliar os procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (BRASIL, 1997, p. 56).

Quanto aos conteúdos, no segundo ciclo, caracterizam-se pela ampliação dos conceitos relativos aos números naturais. Estabelecem relações com novos conceitos, como os números racionais, e aperfeiçoam os procedimentos, ao solucionar as situações-problemas e ao utilizar cálculos, como, por exemplo, envolvendo proporcionalidade (BRASIL, 1997). A seguir, o Quadro 1 apresenta os conteúdos conceituais e procedimentais sobre números racionais, para o segundo ciclo.

Segundo ciclo	Conteúdos conceituais e procedimentais do Bloco Números e Operações: Números Naturais sobre Números Racionais.
4º e 5º anos	- Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário. - Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente. - Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária. - Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas. - Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão. - Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária. - Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional. - Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.

Quadro 1: Conteúdos Conceituais e Procedimentais do Bloco Números e Operações.
Fonte: BRASIL, 1997. p. 58.

Os PCNs propõem a abordagem de ensino e aprendizagem dos números racionais, no segundo ciclo, com o emprego de situações do cotidiano em que os números racionais são usados como resposta a novos problemas. Isso se evidencia, pois os números naturais não conseguem exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão. Nessa perspectiva, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas com os números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada. De acordo com os PCNs, o uso da representação decimal está presente nas situações do dia-a-dia, enquanto que as representações fracionárias são menos frequentes, limitando-se o seu uso a metades, terços, quartos e quintos. O estudo sobre os números racionais inicia no segundo ciclo e é consolidado nos ciclos finais do ensino fundamental. (BRASIL, 1997). A partir dessa perspectiva de aprendizagem, questiona-se: como realizar, na prática, essa abordagem de ensino que supõe rupturas com as ideias construídas com os números naturais?

2.6.1.1 Organização dos níveis de escolaridade da educação básica no Brasil

Nas últimas décadas, as políticas educacionais desenvolvidas no país possibilitaram algumas conquistas, no que diz respeito à qualidade da Educação, que constam no projeto “Todos pela Educação”. Os objetivos e as metas para expandir o acesso e promover a melhoria da qualidade de ensino na educação básica, para todos os brasileiros, até 2022, são amparados na Lei 9394/96, no artigo 87 (BRASIL, 1996), de acordo com a Declaração Mundial sobre Educação para Todos.

Vale destacar, nesse sentido, que o Brasil passou a integrar um conjunto de países empenhados na conquista das metas de educação para todos, a partir do marco de ação de Dakar, quando foi realizada a segunda Cúpula Mundial de Educação. Na ocasião, foi definido como objetivo melhorar a qualidade da educação e assegurar a excelência para todos, de forma a garantir os resultados reconhecidos e mensuráveis, especialmente na alfabetização, na matemática e nas habilidades essenciais à vida. A Figura 15 ilustra os 'marcos globais' da Educação para Todos, com vistas a 2015.

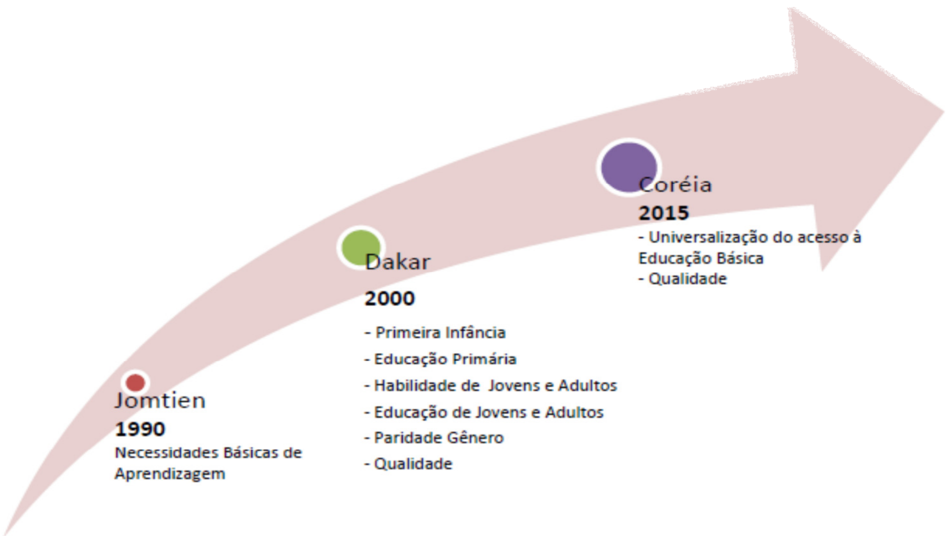


Figura 15: Marcos Globais da Educação para Todos
Fonte: Relatório Educação para Todos no Brasil 2000 – 2015 (2014).

Ressalta-se, no contexto das mudanças nas políticas educacionais, a ampliação da escolaridade obrigatória, de 7 a 14 anos para 4 a 17 anos (Emenda Constitucional nº 59/2009), que se encontra em processo de implantação até 2016. O Quadro 2 apresenta a atual estrutura do sistema educacional no Brasil.

<table>
<tr><th>Níveis</th><th colspan="2">Etapas</th><th>Duração</th><th>Faixa etária</th></tr>
<tr><td>Educação Superior</td><td colspan="2">Ensino Superior</td><td>Variável</td><td>Acima de 18 anos</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Educação Básica</td><td colspan="2">Ensino Médio</td><td>3 anos</td><td>15 – 17 anos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Fundamental</td><td>9 anos</td><td>6 – 14 anos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Educação Infantil</td><td>Pré-escola</td><td>2 anos</td><td>4 – 5 anos</td></tr>
<tr><td>Creche</td><td>3 anos</td><td>0 – 3 anos</td></tr>
</table>

Quadro 2: Estrutura do Sistema Educacional Brasileiro – Lei nº 9394/96
Fonte: Relatório Educação para Todos, 2014.

A ampliação da escolaridade constituiu-se em um fator importante para a expansão da Educação Infantil, possibilitando, desse modo, o direito da criança, na primeira infância, a um maior tempo de aprendizagem. Ressalta-se que a implementação do projeto ampliou, consideravelmente, o acesso das crianças de 4 e 5 anos na Educação Infantil, de 15,3% em 1989 para 78,2% em 2012. Ainda é importante destacar que o ensino fundamental de nove anos é um movimento mundial, adotado em vários países. Esse fato colocava os estudantes brasileiros em uma situação de desvantagem. É evidente, no entanto, que a aprendizagem não depende somente do aumento do tempo de permanência na escola, mas da associação entre ambos os fatores - aprendizagem e tempo. Assim, o emprego eficaz do tempo pode contribuir significativamente para que os estudantes aprendam mais (BRASIL, 2014).

De uma maneira geral, pode-se dizer que a definição de metas para o desempenho de estudantes brasileiros foi um passo importante para a conquista da qualidade na Educação. Objeto de gradativo aprimoramento e ampliação, o Sistema de Avaliação da educação básica (SAEB) abriu caminho para introduzir uma cultura de avaliação de larga escala, seguindo o exemplo dos países vinculados à Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O monitoramento de resultados permitiu que fossem instituídos alguns mecanismos de avaliação do desempenho escolar. Ao criar um Índice de Desenvolvimento da Educação (IDEB), em 2007, o Brasil passou a poder estabelecer metas, avaliar e comparar resultados, reunindo, em um único indicador, dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias do desempenho nas avaliações. Os avanços obtidos foram significativos, mas ainda há muito por fazer.

Esse quadro mostra-se particularmente desafiador quando se compara o desempenho dos estudantes brasileiros com os dos estudantes de outros países, o que é possível mediante a análise dos dados do PISA. A participação do Brasil no PISA está ocorrendo desde a primeira edição, no ano de 2000, e os resultados obtidos confirmam o esforço do país em melhorar os resultados atuais.

2.6.2 Caracterização do PISA

PISA é um programa de avaliação educacional em larga escala, desenvolvido e coordenado internacionalmente pela OCDE. No Brasil, o INEP é o órgão responsável pela condução deste programa de avaliação. O principal objetivo do PISA é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria da educação básica. O Programa ainda se propõe a verificar até que ponto as escolas, de cada país participante estão preparando os estudantes para exercer a cidadania na sociedade contemporânea.

A avaliação é realizada com estudantes com 15 anos de idade completos, de forma amostral, conforme critérios da OCDE, e que estejam matriculados e frequentando qualquer etapa compreendida entre o sétimo ano e o final do ensino médio. Abrange os conhecimentos nas áreas da Matemática, das Ciências e da Leitura, procurando verificar as habilidades dos alunos no sentido de analisar, raciocinar e agir sobre os seus conhecimentos e suas experiências. Além disso, o PISA coleta informações para a elaboração de indicadores contextuais, que permite relacionar o desempenho dos alunos a variáveis demográficas, socioeconômicas e educacionais. Isso é feito por meio de questionários específicos para os alunos, para os professores e para as escolas.

Em cada edição, o foco principal de análise e de interpretação da aprendizagem dos estudantes tem ênfase maior em uma dessas áreas. Em 2000, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; e em 2006, Ciências. O PISA 2009 iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de

Leitura; em 2012, voltou-se novamente para Matemática, e em 2015, Ciências, além da inclusão de novas áreas do conhecimento: Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas (INEP, 2014).

Atualmente, participam do PISA os 34 países membros da OCDE e vários países convidados. A participação do país ocorreu num período de transição, na elaboração de um Plano Nacional de Educação, de acordo com a Declaração Mundial sobre Educação para Todos (BRASIL, 1998). A última edição do PISA, em 2012, teve a participação de 65 países, e o foco foi no letramento matemático. A seguir, apresenta-se a concepção de letramento matemático do PISA. Por fim, descrevem-se os conteúdos, as competências e os contextos, bem como algumas das questões avaliadas.

2.6.2.1 Letramento em Matemática no PISA

Letramento em Matemática definido pelo PISA 2012 consiste na "[..] capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos" (OCDE, 2010, p.4). A noção de letramento, adotada pelo PISA, considera o conhecimento da matemática como fundamental na formação dos estudantes. Isso se verifica, no sentido de exercer o papel de cidadãos em um mundo em transformação e também no de enfrentar os desafios na sua vida profissional, social e científica.

O PISA utiliza um modelo dinâmico como processo de aprendizagem. Neste modelo de aprendizagem, os estudantes usam seus conhecimentos e habilidades para enfrentarem os problemas em um mundo que está em constante transformação. Assim, os estudantes precisam ser capazes de organizar e conduzir seu aprendizado, o que requer uma consciência da própria capacidade de raciocínio e de estratégias e métodos de aprendizado (INEP, 2011, p. 01).

O modelo de letramento utilizado na avaliação do PISA não se concentra apenas em conteúdos, mas destaca as capacidades fundamentais da Matemática para que os estudantes possuam letramento na área. O PISA estabelece as seguintes capacidades cognitivas para resolver problemas a fim de compreender e interagir com o mundo: comunicação, representação, delineamento de estratégias, raciocínio e argumentação, utilização de linguagem e de operações simbólicas, formais e técnicas, utilização de ferramentas matemáticas e o ato de “matematizar”[4]. A Figura 16 apresenta o modelo de aprendizagem de letramento matemático, definido pelo PISA.

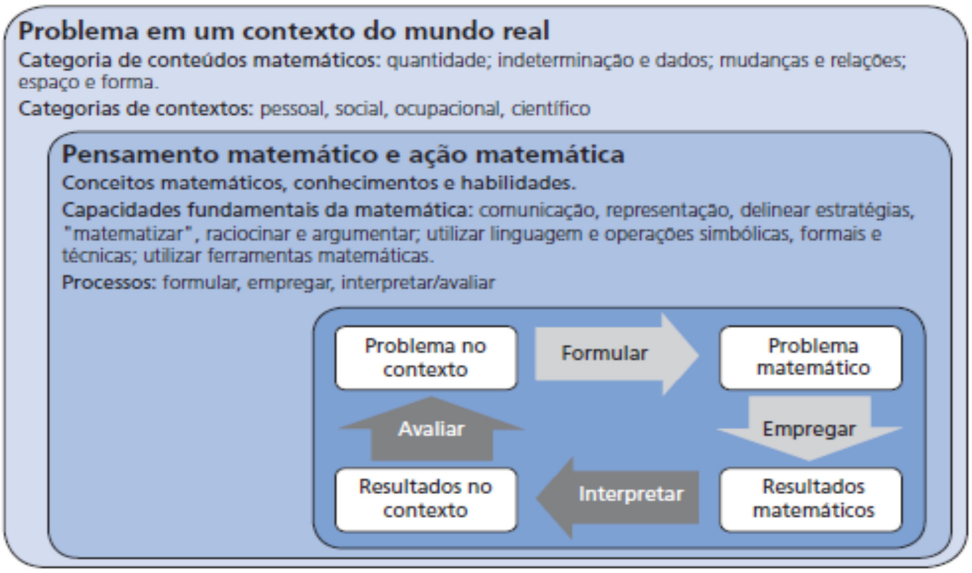


Figura 16: Modelo de letramento matemático na prática.
Fonte: MEC/ INEP, 2011.

O letramento matemático do PISA é avaliado em três dimensões: processos matemáticos, conteúdo e contexto. Para que os estudantes sejam ativos na resolução de problemas, é necessário dominar os processos de formular, empregar, interpretar e avaliar. O processo de ‘formular’ envolve a capacidade de reconhecer e identificar as oportunidades para utilizar matemática. Quanto ao processo ‘empregar’, refere-se à utilização de conceitos, de fatos, de procedimentos e de modelos para resolver problemas. Já o processo ‘interpretar’ está relacionado com a reflexão sobre as soluções matemáticas e a interpretação de um determinado contexto. Por fim, as soluções devem ser analisadas para verificar se os resultados são adequados em determinado contexto (INEP, 2011).

[4]Matematizar é utilizado para descrever as atividades matemáticas fundamentais envolvidas em um problema (INEP, 2011).

Em relação aos conteúdos, o letramento matemático envolve quantidades; mudanças e relações; espaço e forma; e indeterminação e dados. A noção de quantidade está presente na quantificação de atributos de objetos, na compreensão dessas quantificações e no julgamento baseado em quantidades. Envolve medidas, contagem, grandezas, unidades, indicadores e tamanho relativo. O raciocínio quantitativo é a essência da área de quantidade, sendo necessário à compreensão das múltiplas representações de números, do cálculo mental e numérico, da estimativa e avaliação da razoabilidade de resultados.

Já a abordagem de mudanças e relações envolve reconhecer e modelar funções e equações, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas. Espaço e forma compreendem os fenômenos que são encontrados em vários lugares, no mundo físico e visual, nos padrões geométricos, na propriedade dos objetos, na orientação do espaço. Indeterminação e dados implicam em reconhecer a variação nos processos, a incerteza e o erro presentes na vida cotidiana, nas ciências e nas tecnologias, bem como no conhecimento das probabilidades (INEP, 2011).

Quanto aos contextos, o PISA considera as situações nas quais a Matemática é usada, e que se relacionam com as atividades cotidianas dos estudantes. As categorias de contexto podem ser: pessoal (relacionada ao indivíduo); social (relacionada à comunidade, ao país ou ao mundo); ocupacional (centrada no trabalho) e científica (relacionada à natureza ou à tecnologia) (INEP, 2011).

Para avaliar a capacidade e as habilidades evidenciadas pelos estudantes, tendo como base o modelo de aprendizagem, foi estabelecida pelo PISA uma matriz de referência a partir dos conhecimentos associados ao final da escolarização básica. Na continuidade, apresenta-se a descrição dos seis níveis de proficiência em Matemática ou níveis de letramentos em Matemática, que compõem a matriz de avaliação do Pisa. O Quadro 3 sintetiza essas informações:

Nível	Proficiência em Matemática
Nível 6 **Acima de 669,3**	- conceituar, generalizar e utilizar informações, com base em suas investigações e em modelagem de situações-problema complexas. - estabelecer ligações entre diferentes fontes de informações e representações, e transitar entre elas, com flexibilidade. - utilizar pensamento e raciocínio matemáticos avançados. - associar sua percepção e sua compreensão a um domínio de operações e relações matemáticas, simbólicas e formais, de modo a desenvolver novas abordagens e estratégias para enfrentar novas situações. - formular e comunicar, com precisão, suas ações e reflexões, relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequá-las às situações originais.
Nível 5 **607 a 669**	- desenvolver modelos para situações complexas e trabalhar com eles, identificando restrições e especificando hipóteses. - selecionar, comparar e avaliar estratégias adequadas de resolução de problemas, para lidar com problemas complexos relacionados a esses modelos. - trabalhar estrategicamente, utilizando habilidades de pensamento e raciocínio abrangentes e bem desenvolvidas, representações conectadas de maneira adequada, caracterizações simbólicas e formais, bem como percepção relativa a essas situações. - refletir sobre suas ações, formular e comunicar suas interpretações e seu raciocínio.
Nível 4 **545 a 607**	- trabalhar, de maneira eficaz, com modelos explícitos para situações concretas complexas, que podem envolver restrições ou exigir formulação de hipóteses. - selecionar e integrar diferentes representações, inclusive representações simbólicas, relacionando-as diretamente a aspectos de situações da vida real. - utilizar habilidades desenvolvidas e raciocínio, com flexibilidade e alguma percepção. - construir e comunicar explicações e argumentos, com base em interpretações, argumentos e ações.
Nível 3 **482 a 545**	- executar procedimentos descritos com clareza, inclusive aqueles que exigem decisões sequenciais. - selecionar e aplicar estratégias simples de resolução de problemas. - interpretar e utilizar representações, baseadas em diferentes fontes de informação, e raciocinar diretamente a partir delas. - desenvolver comunicações curtas, que relatam interpretações, resultados e raciocínio.
Nível 2 **420 a 482**	- interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferência direta. - extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um modo simples de representação. - empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções de nível básico. - raciocinar diretamente e fazer interpretações literais dos resultados.
Nível 1 **358 a 482**	- responder a questões definidas com clareza, que envolvem contextos conhecidos, nas quais todas as informações relevantes estão presentes. - identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas em situações explícitas. - executar ações óbvias e dar continuidade imediata ao estímulo dado.

Quadro 3: Níveis de Proficiência em Matemática, avaliados pelo PISA 2012
Fonte: Inep, 2011.

2.6.2.2 Desempenho dos estudantes brasileiros no PISA 2012

Conforme os resultados divulgados em 2014 pela OCDE, que corresponde à avaliação realizada no ano de 2012, o país obteve a 58ª posição entre 65 países participantes na avaliação. Embora esse resultado seja preocupante, o Relatório Nacional Pisa 2012, divulgado pelo Inep, apresenta os resultados do desempenho dos estudantes brasileiros e aponta que o Brasil é um dos países que vêm apresentando os maiores progressos na educação básica e que teve o maior avanço absoluto na proficiência em Matemática. Essa constatação é apresentada na Tabela 1, que descreve a comparação dos resultados brasileiros nas edições do PISA.

Tabela 1 - Resultados do desempenho brasileiro nas edições do PISA

	PISA 2000	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2012
Matemática	**334**	**356**	**370**	**386**	**391**

Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

Esses resultados demonstram os investimentos do país nas políticas educacionais para a melhoria da qualidade da Educação, com a criação do projeto "Todos pela Educação", políticas já descritas anteriormente. Os índices de crescimento no desempenho em Matemática observados em relação à primeira participação, no entanto, não são suficientes para um avanço no nível do letramento da Matemática dos estudantes brasileiros. A comparação do desempenho dos estudantes brasileiros nos seis níveis de proficiência, entre as edições de 2003 e 2012 - ambas com o foco em Matemática -, está descrita na Figura 17.

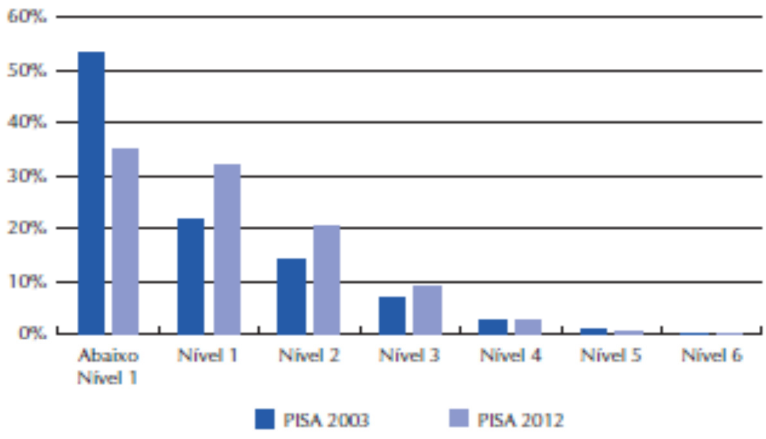


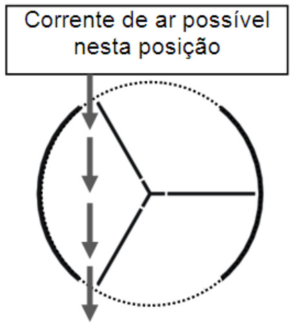
Figura 17: Distribuição percentual dos estudantes nos níveis de proficiência em matemática nas edições do Pisa de 2003 e 2012.
Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

É possível observar uma redução significativa no número de estudantes situados abaixo de Nível 1, bem como um crescimento no número de estudantes situados no Nível 2 ou acima desse nível. O relatório nacional do PISA 2012 aponta como preocupante o fato de o número de estudantes nos níveis mais avançados de proficiência (Níveis 5 e 6) não ter aumentado. Essa constatação pode indicar que o país não está preparando seus estudantes para funções mais complexas, que demandam maior conhecimento da Matemática, como as áreas das engenharias e tecnologias.

O desempenho dos estudantes na avaliação é analisado com base na concepção de letramento da Matemática adotada pelo PISA. Os tipos de questões são problemas aplicados a situações úteis, na vida cotidiana ou no contexto do mercado de trabalho, para avaliar as habilidades cognitivas e os processos de solução de problemas, relacionados aos conhecimentos dos conteúdos da Matemática. Para o PISA, a resolução de problema é definida ”[...] como a capacidade que envolve o processo cognitivo para compreender e resolver situações-problema nas quais um método de solução não é imediatamente óbvio”. As habilidades de resolução de problemas são essenciais para o sucesso em todas as atividades e podem ser desenvolvidas na escola por meio de disciplinas curriculares. No entanto, muitos dos jovens de 15 anos apresentam um desenvolvimento das habilidades básicas insuficiente na solução de problemas.

Considerando os objetivos da presente pesquisa, descrevem-se os exemplos de questões do PISA 2012 sobre o conhecimento de quantidades e de mudança e relações. O Quadro 4 apresenta a questão “Porta giratória”. Esse item está inserido no contexto científico e avalia o processo formular, que se refere à capacidade de reconhecer e de identificar oportunidades para utilizar a Matemática na resolução de um problema.

As duas aberturas da porta (os arcos pontilhados no diagrama) são do mesmo tamanho. Se essas aberturas forem muito largas, as folhas giratórias talvez não proporcionem um espaço fechado e o ar pode então correr livremente entre a entrada e a saída, causando perda ou ganho de calor indesejado. Isso é mostrado no diagrama ao lado. A porta giratória faz 4 rotações completas por minuto. Há espaço para duas pessoas em cada um dos três setores. Qual o número máximo de pessoas que pode entrar no edifício pela porta giratória em 30 minutos?



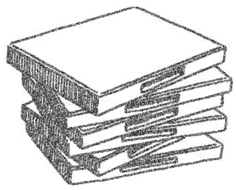
(A) 60
(B) 180
(C) 240
(D) 720

DADOS TÉCNICOS	CORREÇÃO
Descrição: Identificar informação e construir um modelo quantitativo (implícito) para resolver o problema. **Domínio matemático:** Quantidade. **Contexto:** Científico. **Processo:** Formular.	**Crédito total** Código 1: (D) 720 **Nenhum crédito** Código 0: Outras respostas. Código 9: Em branco.

Quadro 4: Questão Porta giratória
Fonte: Itens liberados do PISA 2012 (INEP, 2014)

O item quantidade compreende medidas, contagem, grandezas, unidades e tamanho relativo. Além disso, o raciocínio quantitativo envolve o cálculo mental e a estimativa da ordem das grandezas, por exemplo, as múltiplas representações de números. A seguir, descreve-se a questão “Aluguel de DVDs”, inserida no contexto pessoal, que avalia a habilidade de empregar estratégias, encontrar uma solução matemática para resolver problemas.

Jane trabalha em uma loja de aluguel de DVDs e de jogos de *videogame*. Nessa loja, a anuidade dos membros custa 10 zeds. O preço de locação de DVDs é menor para os membros do que para os não membros, como indica o quadro abaixo.



Preço de aluguel de locação de um DVD para os não membros.	**Preço de aluguel de um DVD para os membros.**
3,20 zeds	2,50 zeds

No ano passado, Jonas era membro da loja de aluguel de DVDs. Durante o ano passado, ele gastou o total de 52,50 zeds, incluindo a anuidade dos membros. Quanto Jonas teria gasto para alugar o mesmo número de DVDs se ele não fosse membro?

Quantia em zeds: ____________

DADOS TÉCNICOS	CORREÇÃO
Descrição: Utilizar dados financeiros para resolver um problema de várias etapas. **Domínio matemático:** Quantidade. **Contexto:** Pessoal. **Processo:** Empregar.	**Crédito total** Código 1: 54,40 (Aceitar respostas que mostram o processo correto, ou incompleto ou com erros menores) 52.5 – 10 = 42.5, 42.5 ÷ 2.5 = 17, 17 x 3.30 = 56.10 zeds. [processo correto com pequeno erro de transcrição (3,30 ao invés de 3.20)]

Quadro 5: Questão Aluguel de DVD
Fonte: Itens liberados do PISA 2012 (INEP, 2014).

Mudança e relações foi o domínio da Matemática em que os estudantes apresentaram o pior desempenho, comparado aos demais conteúdos avaliados. Esse item, de um modo geral, exige dos estudantes a compreensão dos tipos de mudanças, assim como o reconhecimento a respeito de quando tais mudanças ocorrem, a fim de utilizar modelos matemáticos que permitam descrevê-las e prevê-las. Isso demanda modelos de mudança e relações, com funções e equações adequadas, assim como criar, interpretar e transitar entre as diferentes representações gráficas e simbólicas. A seguir, descreve-se a questão *A ciclista Helena*. Esse item se insere no contexto pessoal e avalia o processo interpretar. Desse modo, interpreta um resultado matemático, aplicado a um contexto do mundo real, e avalia a razoabilidade de uma solução matemática em um problema do mundo real.

Helena pedalou 6 km até a casa de sua tia. O velocímetro indicou que sua velocidade média foi de 18 km/h para todo o trajeto. Dentre as afirmações abaixo, qual está correta? (A) Foram necessários 20 minutos para Helena chegar à casa de sua tia. (B) Foram necessários 30 minutos para Helena chegar à casa de sua tia. (C) Foram necessárias 3 horas para Helena chegar à casa de sua tia. (D) Não é possível dizer quanto tempo foi necessário para Helena chegar à casa de sua tia.	
DADOS TÉCNICOS	CORREÇÃO
Descrição: Calcular a duração do trajeto a partir de uma velocidade média e de uma distância percorrida. **Domínio matemático:** Mudança e relações **Contexto:** Pessoal. **Processo:** Interpretar.	**Crédito completo** Código 1: Foram necessários 20 minutos para Helena chegar à casa de sua tia. **Nenhum crédito** Código 0: Outras respostas. Código 9: Em branco.

Quadro 6: Questão A Ciclista Helena
Fonte: Itens liberados do PISA 2012 (INEP, 2014)

O desempenho dos estudantes brasileiros está descrito em síntese na Tabela 2, que apresenta os resultados por área de conteúdo. Os dados da tabela mostram melhor desempenho médio em indeterminação e dados.

Tabela 2 - Resultado do desempenho brasileiro por área de conteúdo da Matemática

Conteúdo	Média	EP	Abaixo Nível 1	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6
Indeterminação e dados	402,1	2,0	26,5	35,1	25,5	10,0	2,5	0,3	0,0
Quantidade	392,9	2,5	36,5	27,0	20,2	10,5	4,3	1,3	0,2
Espaço e forma	380,7	2,0	40,3	30,6	18,8	7,3	2,4	0,6	0,1
Mudanças e relações	371,5	2,7	46,3	24,0	16,5	8,4	3,3	1,1	0,3

Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

Os resultados indicam que os estudantes brasileiros concentram seu desempenho entre “Abaixo do Nível 1” e “Nível 2”. A seguir, apresenta-se a comparação do desempenho dos estudantes por área de conteúdos da Matemática entre 2003 e 2012.

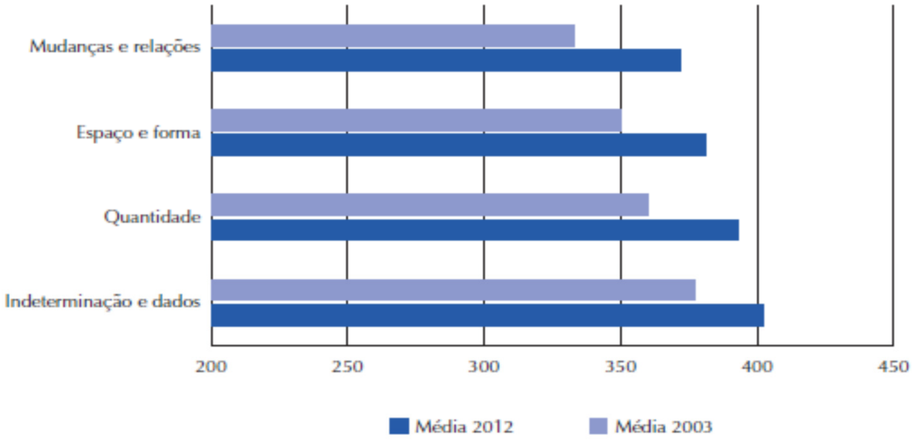


Figura 18: Evolução da média brasileira por conteúdos de Matemática 2003-2012.
Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

É possível observar que o desempenho dos estudantes por área de conteúdo apresentou uma evolução média de crescimento entre 2003 e 2012. Esse aumento mais evidente ocorreu na área de mudança e relações, na qual os estudantes brasileiros apresentaram maiores dificuldades em 2003, demonstrando um resultado que é positivo. A nota média do Brasil nos exames do PISA tem subido desde a primeira avaliação, em 2000, refletindo uma melhora na qualidade educacional no país.

2.6.3 Organização do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) em Portugal

O Ensino Básico, em Portugal, está estruturado em três ciclos. O primeiro ciclo compreende o 1º, 2º, 3º e 4º anos; o segundo ciclo é composto pelo 5º e 6º anos; o terceiro pelo 7º, 8º e 9º anos. Ressalte-se o fato de que as crianças iniciam na Educação aos três anos de idade, sendo que mais de 85% das crianças portuguesas cursam essas séries iniciais, envolvendo crianças de três a cinco anos. No Primeiro Ciclo, as matrículas atingem 100% das crianças de seis a nove anos (DGIDC, 2007).

Vale ressaltar que, nos últimos anos, Portugal viveu a implantação de um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), que entrou em vigor, oficialmente no ano de 2007. Esse programa constitui-se em um fator importante de possível mudança curricular em dois níveis fundamentais. No primeiro nível, essa mudança pode ser observada nas práticas de ensino-aprendizagem na sala de aula, com destaque especial para as tarefas propostas e o desenvolvimento da comunicação. Já no segundo nível, a mudança diz respeito à aprendizagem matemática dos alunos. Para que a concretização do programa aconteça, um dos aspectos mais relevantes é a organização dos professores nos espaços escolares.

Na implantação desse programa, foi realizada uma experimentação em algumas turmas-piloto, do 1º ao 9º ano de escolaridade. O PMEB (2007) está estruturado de modo a considerar as finalidades do ensino da Matemática, a organização dos temas matemáticos, e diversas orientações metodológicas gerais.

Inicialmente, o PMEB (2007) expressa as finalidades do ensino da Matemática, valorizando uma formulação de objetivos claros para o ensino da disciplina, a fim de orientar, efetivamente, a prática. Destacam-se as seguintes finalidades:

- promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade de integração e mobilização em diferentes contextos.

- desenvolver atitudes positivas frente à Matemática e a capacidade de apreciar essa área do conhecimento científico.

Na sequência, considerando essas duas finalidades, apresentam-se os objetivos que dizem respeito às capacidades transversais. Vale ressaltar que essas capacidades são semelhantes às propostas pelos princípios do *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, uma organização de professores e educadores de matemática norte-americanos. Os objetivos gerais apontam para uma valorização da compreensão sobre procedimentos de regras, sendo estes necessários ao desenvolvimento da disciplina de Matemática, mas não como finalidade principal. Assim, os estudantes devem compreender conceitos, algoritmos, procedimentos e relações, e perceber a Matemática como uma disciplina aplicada e lógica. Além disso, devem ser capazes de lidar com diversas representações e estabelecer conexões entre elas para comunicar e raciocinar matematicamente, no sentido de resolver problemas, usando os conceitos, as representações e os procedimentos matemáticos.

Partindo desses objetivos, foram organizados os temas matemáticos do PMEB (2007), que se diferenciam significativamente dos previstos em programas anteriores: Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados.

O PMEB (2007) propôs algumas diferenças importantes na organização dos temas matemáticos, iniciando o pensamento algébrico no primeiro ciclo, com noções de Álgebra, que foram inseridas no tema Números e Operações, com maior destaque no segundo e terceiro ciclos. Outra distinção está na ênfase das ideias fundamentais para a Matemática escolar, no caso do tema “Números e Cálculo”, substituído por “Números e Operações”.

Um dado importante percebido quando se entra em contato com os documentos oficiais portugueses envolvendo o currículo do ensino da Matemática é o extremo detalhamento dos temas a serem abordados, bem como do delineamento dos objetivos e pertinências de estudo de cada item. Cabe ressaltar aqui que no estudo realizado para esta tese está listado o delineamento do tema “Números e Operações”, considerando a operação de divisão e os números racionais.

No PMEB (2007), o tema ‘Números e Operações’ está presente em todos os ciclos, considerando três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. Destaca-se, nesse tema, a importância do desenvolvimento do sentido de número por parte dos estudantes. Isso ocorre a partir da proposição de tarefas que envolvam a compreensão de relações numéricas e a compreensão das operações aritméticas baseadas no cálculo mental e na estimativa numérica. Ressalte-se, ainda, o fato de que a aprendizagem dos algoritmos com compreensão é importante para valorizar e apoiar atitudes de autoconfiança, tão necessárias para a resolução de problemas.

Com relação aos números racionais, o PMEB incluiu no primeiro ciclo do ensino básico os números racionais. Desse modo, passou a orientar a noção inicial do conceito de fração e os seus diferentes significados, explorando, paralelamente, a representação fracionária e decimal, com uma abordagem para o desenvolvimento do sentido do número. Dessa maneira, ocorre uma mudança curricular significativa para os professores desse ciclo. Entretanto, o relatório do desempenho dos estudantes do 6º ano de 2010 ainda apontam dificuldades relacionadas à compreensão dos números racionais, divulgado pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE). Nesse relatório, é apresentado um nível de desempenho inferior na resolução de problemas envolvendo o conceito de fração. As respostas desses estudantes indicaram falta de análise da solução obtida e existência de lacunas conceituais na compreensão da noção de fração.

No que se refere ao tema Números e Operações, a síntese a seguir foi elaborada com base nos documentos: Programa e Metas Curriculares da Matemática e Ensino Básico, homologado em junho de 2013; PMEB, de 2007. Apresenta-se, no Quadro 7, a descrição do programa curricular para a operação de divisão no 2º, 3º e 4º anos de escolaridade.

	Divisão de números naturais
2º Ano	- Divisão exata por métodos informais; - Relação entre a divisão exata e a multiplicação: dividendo, divisor e quociente; - O símbolo ÷; - Os termos metade, terça parte, quarta parte e quinta parte; - Problemas envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.
3º Ano	- Divisão inteira por métodos informais; - Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto; - Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10; - Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor; - Problemas de até três procedimentos, envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.
4º Ano	- Algoritmo da divisão inteira; - Determinação dos divisores de um número natural até 100; - Problemas de vários procedimentos, envolvendo números naturais e as quatro operações.

Quadro 7: Conteúdo números e operações: números naturais
Fonte: PMEB, 2007.

Os números racionais foram incluídos a partir do primeiro e segundo anos, com uma prática de ensino através de "[...] uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão em partes iguais, recorrendo-se a modelos e à representação na forma de fração" (DGIDC, 2007, p. 15). Dessa maneira, há uma ampliação do conhecimento numérico para além dos números naturais. E, no 3º e 4º anos, o programa orienta a aprofundar a exploração com números racionais, recorrendo a problemas com os diferentes significados das frações, introduzindo números na forma decimal a partir de situações de partilha equitativa e medidas. Além disso, sugere que sejam exploradas as situações que permitam relacionar a representação fracionária e a decimal, e que, de uma maneira intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e proporção (DGIDC, 2007). Apresenta-se no Quadro 8 a descrição dos conteúdos desenvolvidos para os números racionais, nos 2º, 3º e 4º anos de escolaridade.

	Números Racionais
2º Ano	- Frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$, como medidas de comprimentos e de outras grandezas; - Representação dos números naturais e das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$ numa reta numérica.
3º Ano	- Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas; numerais fracionários; - Representação de frações na reta numérica; - Frações equivalentes e noção de número racional; - Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas; - Frações próprias.
4º Ano	- Construção de frações equivalentes por multiplicação dos termos por um mesmo fator; - Simplificação de frações de termos pertencentes à tabuada de multiplicação do 2 e do 5 ou ambos múltiplos de 10 .

Quadro 8: Conteúdo números e operações: números racionais
Fonte: PMEB, 2007.

Além das alterações nos temas matemáticos, o PMEB (2007) salienta três capacidades transversais: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. A primeira capacidade transversal, a resolução de problemas, assume um papel fundamental em todos os ciclos, no sentido do desenvolvimento das habilidades de compreensão do problema, bem como a sua concepção, aplicação e elaboração de justificativas das estratégias de solução. Além disso, o PMEB (2007) propõe, também, que os problemas podem servir como contexto de aplicação de conhecimentos já adquiridos anteriormente, assim como têm potencial de servir para o desenvolvimento de novas aprendizagens.

No caso da segunda capacidade transversal, o PMEB (2007) aponta como fundamental entender quais processos de raciocínio são usados na realização de diferentes tipos de tarefa matemática. Dessa maneira, a resolução de problemas e de exercícios inclui a formulação de uma estratégia geral de resolução de um exercício. Em outro nível, implica na realização de uma transformação ou cálculo, bem como na sua explicação. Ainda, na realização de explorações e investigações, temos a formulação de uma estimativa sobre um objeto específico, apoiada numa razão e, por outro lado, a definição de uma estratégia de teste de uma conjectura. Por fim, uma demonstração envolve certo nível de formulação de uma estratégia geral de demonstração e, em outro nível, uma construção argumentativa.

Para finalizar, com relação à terceira capacidade transversal, a comunicação, o PMEB (2007) destaca que se trata da capacidade dos estudantes de interpretar, comunicar (oralmente) e representar, por escrito e por outras formas, as suas ideias matemáticas, bem como de compreenderem as ideias formuladas pelos outros. A seguir, o Quadro 9 apresenta cada uma das capacidades transversais associadas a cada ciclo.

Resolução de Problemas	**1º ciclo**: desenvolver a capacidade de resolver problemas de diversos tipos, relacionados às situações do cotidiano, identificando as informações relevantes sobre o problema, bem como ao seu objetivo; **2º ciclo**: ampliar as estratégias de resolução de problemas, aprofundando a análise dos resultados obtidos, bem como a adequação dos processos utilizados; **3º ciclo:** possibilitar o aprofundamento da capacidade de resolução de problemas, de forma a analisar as consequências na solução de um problema resultante da alteração dos dados e das condições iniciais.
Raciocínio	**1º ciclo**: está associado à explicação e a formulação de estimativa relativa a situações matemáticas simples; **2º ciclo:** permite aprofundar as explicações e a formulação de estimativa justificando-as com deduções informais; **3º ciclo:** assume novas dimensões, argumentação informal de uma demonstração, identificação e a utilização do raciocínio indutivo e dedutivo na compreensão do papel das definições em Matemática.
Comunicação	**1º ciclo:** desenvolve-se através da vivência de situações variadas envolvendo a interpretação de enunciados, a representação e expressão de ideias matemáticas, no início com mais ênfase na comunicação oral, mas, progressivamente, valorizando também a comunicação escrita e a sua discussão na turma. **2.º ciclo:** os alunos evoluem na forma de exprimirem as suas ideias e de descreverem os processos matemáticos que utilizam, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem. **3.º ciclo:** espera-se que os alunos progridam "na fluência e no rigor com que se exprimem, oralmente e por escrito, tanto na linguagem natural como na linguagem matemática, usando a notação e a simbologia específica dos diversos tópicos matemáticos e desenvolvem a sua capacidade de interagir num grupo e na turma" (p. 62).

Quadro 9: Capacidades transversais associadas a cada ciclo.
Fonte: PMEB, 2007.

Assim como o Brasil, Portugal também participa da avaliação do PISA, e os resultados obtidos têm indicado melhora no desempenho dos estudantes. Tais resultados apontam que o aumento na média de desempenho não foi linear, mas significativo em dois momentos, relativos ao PISA de 2003 e 2009. A seguir, descreve-se a comparação do desempenho dos dois países na avaliação do PISA.

2.6.4 Desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses no PISA 2012

Os resultados do PISA fornecem os dados da evolução do desempenho cognitivo dos estudantes ao longo do tempo e também permitem que esse desempenho seja comparado aos de outros países. Dessa forma, é possível verificar a evolução do desempenho dos estudantes brasileiros nas edições do PISA, considerando a sequência temporal, assim como a atuação de outros países.

O avanço do desempenho dos estudantes brasileiros, em comparação com o dos estudantes portugueses nas sucessivas edições do PISA está apresentado na Tabela 3.

Tabela 3 - Comparação dos resultados do desempenho brasileiro e português nas edições do PISA

	PISA 2000	PISA 2003	PISA 2006	PISA 2009	PISA 2012
Brasil	**334**	**356**	**370**	**386**	**391**
Portugal	**454**	**466**	**466**	**487**	**487**

Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

É possível observar diferenças nos níveis de proficiência, quando comparadas as edições de 2003 e 2012. Nessas edições, o foco foi a Matemática, sendo que ambos os países demonstraram crescimento no desempenho dos estudantes.

A OCDE destaca que Portugal é um dos países que conseguiram reduzir o número de estudantes que apresentaram desempenho muito ruim e aumentaram o número de estudantes que se destacam com desempenho superior.

É possível observar o Brasil, em uma relação internacional, destacando-se a comparação com Portugal, pela participação dos estudantes dos dois países na presente pesquisa. A distribuição dos estudantes desses países está indicada por níveis de proficiência e é apresentada na figura a seguir.

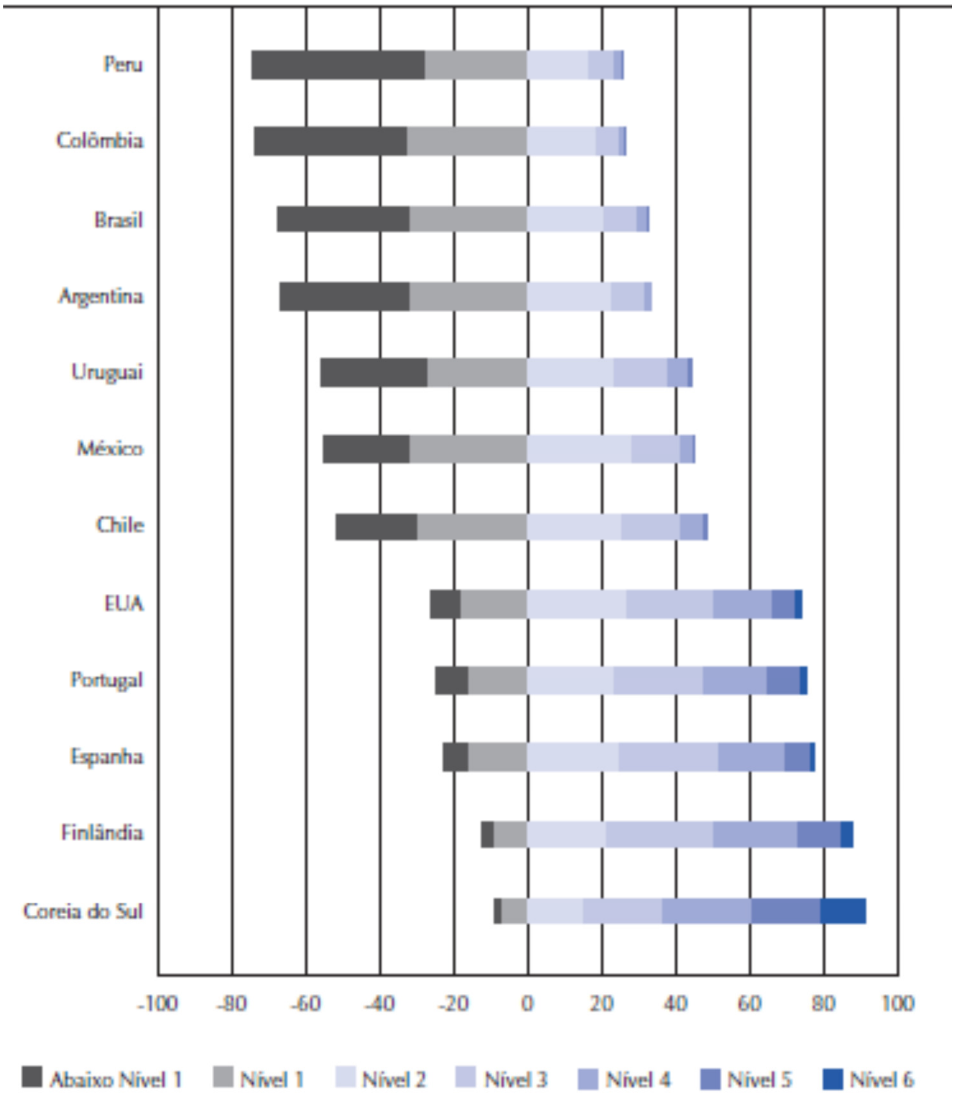


Figura 19: Distribuição percentual dos estudantes, por níveis de proficiência em Matemática, nos países
Fonte: Relatório Nacional PISA 2012 (INEP, 2014).

Percebe-se, no caso do Brasil, que mais de 60% dos estudantes não atingiram o Nível 2, enquanto que, em Portugal, mais de 40% dos estudantes atingiram o Nível 2. Este nível é estabelecido pela OCDE como necessário para que o estudante possa exercer plenamente sua cidadania.

No Brasil encontramos apenas um estudo comparativo com crianças brasileiras e portuguesas, com idades entre seis e sete anos, realizado por Dorneles, Mamede e Nunes (2008). As autoras investigaram se os significados de fração quociente e parte-todo influenciam o nível de desempenho das crianças nas tarefas de resolução de problemas relacionadas à equivalência, à ordenação e à nomeação. Os resultados indicaram o uso de procedimentos de correspondência (associação estabelecida entre uma parte e cada destinatário) e de divisão de um item em partes iguais como sendo aqueles mais utilizados pelas crianças. As crianças apresentaram níveis de sucesso nas tarefas de ordenação e de equivalência de frações e no significado quociente, sugerindo que elas têm algum conhecimento informal da lógica de frações desenvolvido na sua vida cotidiana, sem instrução na escola. As autoras sugerem que esse fato pode ser atribuído como consequência da Educação Infantil mais precoce e prolongada em Portugal.

Poucos estudos comparativos sobre números racionais foram encontrados envolvendo nacionalidades diferentes e crianças com idade escolar. O estudo realizado por Miura, Okamoto, Vlahovic-Stetic, Kim e Han (1999) comparou o desempenho de crianças coreanas, croatas e norte-americanas com idades de seis e sete anos. A investigação examinou o conhecimento das crianças sobre frações numéricas antes da instrução escolar. Os autores investigaram a influência das características da linguagem no pensamento e no desempenho matemático, e também verificaram se a relação quantitativa de frações parte-todo pode ser entendida mais facilmente em idiomas do leste asiático, como Coréia. Os resultados evidenciaram melhor desempenho das crianças coreanas e indicaram que o vocabulário coreano influenciou um entendimento melhor das crianças sobre o significado atribuído às frações numéricas. Tais resultados mostraram que as crianças são capazes de associar as frações numéricas com as correspondentes representações pictóricas anteriores à instrução formal. Geary (1995) e Butterworth (1999) argumentam que praticamente não existem diferenças nas habilidades matemáticas biologicamente primárias entre as crianças asiáticas e norte-americanas. No entanto destacam que as crianças asiáticas têm uma vantagem substancial nas habilidades matemáticas biologicamente secundárias. Essa vantagem pode ser atribuída às diferenças culturais nos métodos de ensino e influenciada pelo idioma coreano.

3 MÉTODO

Nesta tese, tem-se como problema de pesquisa investigar como a compreensão da relação inversa entre quantidades, expressa pelo número de partes e o tamanho das partes, influencia a aprendizagem inicial das frações.

Para isso, a pesquisa dividiu-se em dois estudos: um estudo transversal e um estudo comparativo. O estudo transversal propôs-se a verificar como a compreensão da relação inversa entre quantidades, em situação de divisão e de fração, influencia na aprendizagem inicial das frações. Já o estudo comparativo teve como objetivo verificar se existem diferenças e semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses no que tange à compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de divisão e de fração. Para a realização do estudo comparativo, foram utilizados os procedimentos de coleta de dados e os instrumentos de avaliação matemática semelhantes ao estudo transversal.

Os estudos envolveram uma abordagem de pesquisa *survey* e a combinação dos métodos quantitativos e qualitativos, que possibilitam uma complementação dos resultados e que permitem mais de uma visão do problema de pesquisa (MINAYO, 2007). Na perspectiva quantitativa, utilizou-se um questionário, que foi aplicado no espaço escolar, de forma coletiva, mantendo as características do ambiente no qual os estudantes estão habituados. Na perspectiva qualitativa, solicitou-se a explicação para as respostas dos problemas, e, a partir da interpretação dos tipos de justificativas, estabeleceu-se categorias de soluções.

A revisão da literatura consistiu na seleção de artigos, nacionais e internacionais, a fim de verificar os principais resultados de pesquisas recentes na área da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva. Trata-se de uma revisão não sistemática e não abrangente da literatura. A partir da pesquisa inicial no Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, selecionou-se artigos nas bases de dados *Science Direct, PsycINFO, Wiley Online Library*e *SciELO*. Utilizaram-se dois parâmetros de busca: o primeiro parâmetro considerou o período da publicação, entre 2003 e 2014; e o segundo parâmetro envolveu o descritor *rational numbers, fraction, division, fração, divisão e número racional.* Para complementar a busca, selecionou-se estudos através das listas de referência dos artigos inicialmente encontrados, considerando os seguintes aspectos: incluir estudo empírico; ter sido realizado com participantes em idade escolar; e abordar estudos com paradigmas teóricos em campos numéricos. Por fim, fez-se a busca das referências científicas nas bibliotecas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Brasil e da Universidade do Minho - Portugal. A análise dos resumos das 51 referências selecionadas abordando o tema indicou que 13,7% eram de estudos nacionais, 50,9% de estudos norte-americanos, 33,3% de estudos europeus e 1,9% coreano. Observou-se que as publicações nacionais com estudos sobre a aprendizagem dos números racionais são escassas.

Antes de iniciar a descrição dos dois estudos da pesquisa, ressalta-se que a investigação foi delineada a partir de um estudo piloto, realizado pela própria pesquisadora, durante o ano de 2013.

3.1 ESTUDO PILOTO

A condução de um estudo piloto possibilitou testar, avaliar, revisar e aprimorar os instrumentos e os procedimentos de pesquisa. Nesse sentido, teve como objetivo testar se os tipos de problemas de divisão e de fração permitiriam verificar se a compreensão dos estudantes no que diz respeito à relação inversa entre o divisor e o quociente favorece a compreensão do conceito de fração.

Inicialmente, participaram 50 estudantes do 4º ano do ensino fundamental, com idades entre 9 e 11 anos, de uma escola da rede pública de ensino da cidade de Porto Alegre – Brasil. A opção por escolas da rede pública de ensino deve-se ao fato de que essa categoria representa a realidade escolar da maioria da população brasileira. A participação dos estudantes ocorreu após uma entrevista da pesquisadora com a direção da escola para apresentação do estudo e solicitação da autorização, por parte da direção (ANEXO A). O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, autorizando a participação na pesquisa foi enviado aos pais e/ou responsáveis e aos estudantes (ANEXO B).

As tarefas de avaliação de divisão foram adaptadas dos estudos de Correa, Nunes e Bryant (1998) e de Kornilaki e Nunes (2005), e as de fração foram adaptadas de Mamede, Nunes e Bryant (2005). O instrumento de investigação consistiu em 40 problemas de divisão, com quantidades discretas e contínuas. Os problemas foram organizados em um caderno de atividades com um problema em cada folha. Foram aplicados cinco problemas de divisão partitiva, cinco de divisão por quotas, dez de fração parte-todo, dez problemas de fração quociente, e dez com representação simbólica.

A realização do estudo piloto envolveu dois momentos distintos no ano de 2013. No primeiro momento, o instrumento de avaliação foi aplicado de forma coletiva, em pequenos grupos. Estipulou-se o tempo de 50 minutos para resolução dos problemas. Todos os problemas foram projetados em slides, com recurso de multimídia. O caderno de atividades apresentava os problemas na mesma sequência em que foram projetados nos slides para a turma. Todos os problemas foram lidos em voz alta pela pesquisadora para evitar a interferência de diferenças nas habilidades de leitura no desempenho da realização das tarefas. Após a leitura do problema, os estudantes resolveram, individualmente, e escreveram a resposta no caderno de atividades. Não foram disponibilizados materiais manipulativos para a resolução dos problemas.

No segundo semestre de 2013, ocorreu o segundo momento da aplicação do instrumento de avaliação. Nesse momento, o instrumento já havia sido modificado e foram realizadas algumas adequações nos procedimentos de coleta de dados.

Os dados evidenciados pelo estudo piloto permitiram aprimorar os instrumentos e os procedimentos da pesquisa, bem como auxiliaram no delineamento do estudo transversal e do estudo comparativo. As alterações que consistiram no refinamento do instrumento foram as seguintes: redução do número de problemas; aplicação de forma coletiva na turma, em um único momento; tempo destinado para a resolução dos problemas; e adequação dos valores numéricos dos problemas. Considerou-se fundamental, para a presente pesquisa, a realização do estudo piloto.

3.2 ESTUDO TRANSVERSAL

Este estudo teve como objetivo geral verificar como a compreensão da relação inversa entre quantidades, em situação de divisão e de fração, influencia na aprendizagem inicial das frações.

A partir do objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Verificar a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente, em situações de divisão partitiva e por quotas;

- Verificar a compreensão da relação inversa entre numerador e denominador, em situações de fração parte-todo e quociente;

- Verificar se existe correlação entre os tipos de situações de fração e os princípios lógicos da ordenação e da equivalência;

- Verificar a compreensão da relação inversa entre quantidades, através das explicações que justificam as soluções dos diferentes tipos de problemas;

Considerando a revisão da literatura realizada, as seguintes questões do estudo foram propostas:

- Qual desempenho os estudantes apresentam na resolução de problemas sobre relação inversa entre quantidades em situações de divisão?
- Qual desempenho os estudantes apresentam na resolução de problemas sobre relação inversa entre quantidades em situações de fração?

3.2.1 Amostra

Participaram 90 estudantes brasileiros do 4º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de ensino da cidade de Porto Alegre – Brasil, com idades entre 9 e 10 anos.

Para definir a amostra, foram considerados três aspectos. O primeiro aspecto envolveu a escolha da escola da rede de ensino público, com perfil socioeconômico semelhante. O segundo aspecto esteve relacionado à idade dos estudantes, sendo que não foram consideradas, para análise dos dados, as informações dos estudantes com idade superior a 11 anos e dos estudantes portadores de necessidades educativas especiais. A decisão, nesse sentido, visou evitar discrepâncias na amostra que pudessem interferir nos resultados. Por fim, o último aspecto referiu-se ao conhecimento matemático. Os estudantes envolvidos nesse estudo tinham ensino regular sobre divisão, no contexto escolar, mas não tinham ensino formal sobre fração, conforme legislação vigente.

Assim como no estudo piloto, a participação dos estudantes ocorreu após uma entrevista da pesquisadora com a direção da escola, para apresentação do estudo e solicitação da autorização por parte da direção (ANEXO A). O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, autorizando a participação na pesquisa, foi enviado aos pais e/ou responsáveis e aos estudantes (ANEXO B). Já a participação das professoras, licenciadas em Pedagogia, ocorreu da seguinte maneira: a pesquisadora lhes apresentou os objetivos do estudo, e, posteriormente, foi realizada uma entrevista para verificar o conhecimento dos estudantes sobre divisão, tema que vinha sendo abordado e explorado em sala de aula.

3.2.2 Procedimentos de coleta de dados

Inicialmente foi solicitada autorização das direções das escolas para a realização da pesquisa. Após esse contato inicial, foram agendadas as datas e os horários para a aplicação do instrumento de avaliação, de acordo com a disponibilidade das turmas. Em ambos os países, as professoras relataram que os estudantes já haviam recebido ensino regular sobre divisão com números naturais; no entanto, não haviam abordado a temática da presente pesquisa com os estudantes envolvidos.

Com base na abordagem de pesquisa *survey*, o estudo transversal caracterizou-se pela coleta dos dados em um único momento. A aplicação do instrumento de avaliação ocorreu de forma coletiva, na sala de aula, no horário escolar e com duração média de 50 minutos. Os estudantes receberam um caderno de atividades (ANEXO C) e foram orientados a preencherem as informações, como nome, idade e série. Foi realizada uma breve explicação para os estudantes sobre os objetivos do estudo e os procedimentos para realização da atividade.

Todos os problemas foram projetados em slides, com o recurso *Power Point,* e lidos em voz alta pela pesquisadora, para evitar a interferência de diferenças nas habilidades de leitura, no desempenho da realização das tarefas. Após a leitura, os estudantes resolveram individualmente o problema. Não foi fornecido material manipulável e estipulou-se o tempo de dois minutos para resolução de cada um dos problemas. Depois disso, juntos, todos os estudantes prosseguiam para a resolução do próximo problema. Finalizadas as atividades, os cadernos devidamente preenchidos foram recolhidos. As professoras responsáveis acompanharam a aplicação do instrumento de avaliação.

3.2.3 Instrumento de avaliação

O instrumento de avaliação foi composto de um questionário com 22 problemas: seis problemas de divisão, oito problemas de fração parte-todo e oito problemas de fração quociente. Os problemas estavam organizados em um caderno de atividades, com um problema de múltipla escolha em cada folha, cada uma apresentando três alternativas, sendo apenas uma correta, e as demais erradas. Para compreender a estratégia e o raciocínio utilizados na resolução dos problemas, foi solicitado que os estudantes escrevessem uma explicação como justificativa da solução do problema.

O caderno de atividades foi composto de séries alternadas de problemas. Cada série apresentava um problema de divisão partitiva; divisão por quotas; fração parte-todo ordenação; fração parte-todo equivalência; fração quociente ordenação; e fração quociente equivalência. O caderno de atividades entregue aos estudantes apresentou os problemas na ordem das séries a serem resolvidas.

3.2.3.1 Avaliação da compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de divisão

O instrumento de avaliação foi aplicado para verificar a compreensão da relação inversa entre os termos da divisão, o raciocínio multiplicativo, e os esquemas de partição e de correspondência um-para-muitos. O instrumento consistiu em seis problemas de divisão: três de divisão partitiva e três de divisão por quotas. Os problemas privilegiaram a comparação entre as quantidades descritas pelos três termos da divisão: dividendo, divisor e quociente; e o julgamento do valor relativo: "mais que; menos que; mesma quantidade que". A resolução dos problemas não exigia cálculo numérico. Após a resolução dos problemas, solicitou-se que os estudantes explicassem sua resposta. Os problemas de divisão foram adaptados dos estudos de Correa, Nunes e Bryant (1998) e de Kornilaki e Nunes (2005). A seguir, no Quadro 10, apresentam-se exemplos de problemas de divisão que compõem o instrumento deste estudo.

Divisão	Problema
Partitiva	Maria e Luiza têm a mesma quantidade de doces. Maria distribuiu os doces, de forma justa, para três crianças, e Luiza distribuiu os doces, de forma justa, para quatro crianças. Cada criança do grupo da Luiza recebe: ☐ mais doces ☐ menos doces ☐ a mesma quantidade de doces, do que cada criança do grupo da Maria. Explica a tua resposta:____
Quotas	João e Paulo têm a mesma quantidade de adesivos. João colocou três adesivos em cada folha de um livro, e Paulo colocou quatro adesivos em cada folha de um livro. João usou: ☐ mais folhas ☐ menos folhas ☐ a mesma quantidade de folhas de um livro, do que Paulo. Explica a tua resposta: ____

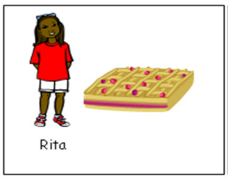
Quadro 10: Exemplos de problema envolvendo situação de divisão.
Fonte: Adaptado de Correa, Nunes e Bryant, 1998.

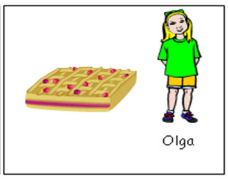
Os problemas de divisão partitiva apresentaram a quantidade inicial desconhecida, e o número de quotas variou entre os valores 2 a 6, em cada problema, e a solução exigia o julgamento do tamanho da quota. Já os problemas de divisão por quotas o tamanho da quota variou entre os valores 2 a 6, e a solução exigia o julgamento do número de quotas existentes (CORREA, 2004).

3.2.3.2 Avaliação da compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de fração

O instrumento de avaliação baseou-se numa sequência de problemas adaptados do estudo de Mamede, Nunes e Bryant (2005). A aplicação do instrumento envolveu um questionário com 16 tarefas com ilustração, sendo oito problemas de situação parte-todo, e oito problemas de situação quociente. Os problemas foram aplicados para verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes, o raciocínio quantitativo, e os esquemas de partição e de correspondência um-para-muitos. A resolução dos problemas envolveu a habilidade de comparar quantidades, estabelecer as relações entre as quantidades e julgar o valor relativo: “mais que; menos que; mesma quantidade que”, e não exigiam cálculo numérico. Os problemas de fração distinguem-se em dois tipos de situações: parte-todo e quociente. As situações parte-todo envolvem noção de partição, e as situações quociente envolvem a noção de correspondência um-para-muitos. Em cada situação, foram considerados os princípios básicos de ordenação e equivalência. A seguir, no Quadro 11, apresentam-se problemas de situação parte-todo que compõem o instrumento deste estudo.

Equivalência





Rita divide um bolo em dois pedaços iguais e come um deles. Olga divide o bolo em quatro pedaços iguais e come dois deles.

☐Rita come mais bolo do que a Olga;

☐Rita come menos bolo do que a Olga;

☐ As duas comem a mesma quantidade de bolo.

Explica a tua resposta: ____

Ordenação

Marco corta uma pizza em duas fatias iguais e come uma delas. Lara corta uma pizza em três fatias iguais e come uma delas.

☐ Marco come mais pizza do que a Lara;

☐ Marco come menos pizza do que a Lara;

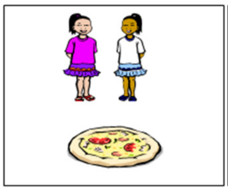
☐ Os dois comem a mesma quantidade de pizza.

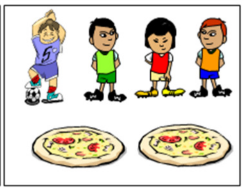
Explica a tua resposta: ____

Quadro 11: Exemplos de problema de situação de fração parte-todo
Fonte: Mamede, Nunes e Bryant, 2005.

Os problemas de situação parte-todo estão associados à noção de partição. A ordenação das frações menores do que a unidade estabelece a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes de um todo. É necessário compreender que, quanto maior for o número de partes iguais em que um todo é dividido, menores serão as partes, e que não há uma compensação entre o tamanho e as partes. Já a equivalência de frações exige compreender que existe uma compensação entre o tamanho e o número das partes. Nesse caso, a metade de um tamanho necessita o dobro de partes para que os tamanhos sejam equivalentes. A seguir, no Quadro 12, apresentam-se exemplos de problemas de situação quociente que compõem o instrumento deste estudo.

Equivalência





.

As meninas dividem uma pizza de forma justa, e os meninos dividem duas pizzas de forma justa.

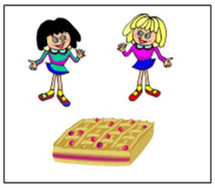
☐ Cada menina come mais pizza do que cada menino;

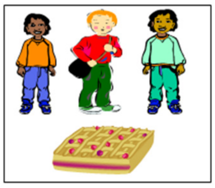
☐ Cada menina come menos pizza do que cada menino;

☐ Cada menina come a mesma quantidade de pizza do que cada menino.

Explica a tua resposta: ____

Ordenação





Duas meninas dividem um bolo de maneira igual. Três meninos dividem um bolo de maneira igual.

☐ Cada menina come mais bolo do que cada menino;

☐ Cada menina come menos bolo do que cada menino;

☐ Cada menina come a mesma quantidade de bolo do que cada menino.

Explica a tua resposta: ____

Quadro 12: Exemplo de problema de situação de fração quociente.
Fonte: Mamede, Nunes e Bryant, 2005.

Os problemas de situação quociente estão associados à noção de correspondência um-para-muitos. A ordenação das frações menores do que a unidade estabelece a relação inversa entre duas grandezas distintas, o que exige compreender que, quanto mais pessoas houver para receber o que será compartilhado, menos cada uma receberá. A equivalência de frações, nesse caso, não exige a compensação entre o tamanho das partes e o número de partes.

3.2.4 Procedimento de análise dos dados

Os dados coletados foram analisados com o recurso do *Statistical Package for Social Sciences*, SPSS versão 20, nas seguintes modalidades:

1) Análise descritiva foi realizada para verificar o desempenho dos estudantes. Foram apresentadas as médias e o desvio padrão, e a mediana e o intervalo interquartílico para as variáveis quantitativas, e frequências, para as variáveis categóricas. Foi utilizada a pontuação um para a resposta correta, e a pontuação zero para as respostas restantes. Realizou-se uma proporção das respostas corretas devido à diferença no número de problemas por tipo de situação. A análise de normalidade foi realizada por meio do teste não paramétrico de *Kolmogorov-Smirnov*.

2) Análise de correlação, para evidenciar as possíveis correlações entre os tipos de situação e os princípios lógicos, por meio do cálculo do coeficiente de correlação de *Spearman* (r_s).

3) Análise qualitativa das explicações para as respostas dos problemas, organizadas em categorias, por meio das frequências relativas.

3.2.5 Resultados

A apresentação dos resultados do estudo transversal foi feita em três etapas: (1) descrição do desempenho dos estudantes nos problemas de divisão e de fração; (2) análise de correlação entre os princípios lógicos e as situações de fração; (3) descrição do desempenho dos estudantes quanto às justificativas por tipo de problema de divisão e de fração.

3.2.5.1 Descrição do desempenho dos estudantes nos problemas de divisão e de fração

Em relação aos problemas de divisão partitiva e por quotas, o desempenho dos estudantes foi descrito a partir das médias e do desvio padrão, e das medianas e do intervalo interquartílico, das respostas corretas. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Desempenho obtido pelos estudantes, por tipo de problema de divisão

	Divisão (n = 90)		
	Partitiva	Quotas	*p*-valor
Média (dp)	20 (33)	31 (34)	0,018
Mediana (iiq)	00 (0;33)	33 (0;67)	

Os valores representam o percentual de acertos de cada tipo de problema.
dp= desvio padrão
iiq= intervalo interquartílico

Os resultados apontam que os estudantes apresentaram desempenho superior nos problemas de divisão por quotas. Os dados da Tabela 4 indicam que o desempenho dos estudantes apresenta diferença significativa (p=0,018) entre os problemas de situação de divisão partitiva e por quotas.

É possível observar que a média de respostas corretas obtida pelos estudantes nos problemas de divisão por quotas foi de 31%, enquanto que, nos problemas de divisão partitiva, foi de 20%. A mediana indica que metade dos estudantes apresenta até 33% de respostas corretas nos problemas de divisão por quotas, enquanto que metade dos estudantes não obteve respostas corretas na divisão partitiva.

O desempenho dos estudantes nos problemas de divisão foi inferior a 50% de acertos, o que se considera como um desempenho baixo. Esse resultado indica que os estudantes da amostra apresentaram dificuldade ao estabelecer a relação inversa entre as quantidades envolvidas nos problemas de situação de divisão partitiva e por quotas.

Em relação aos problemas de fração parte-todo e quociente, o desempenho dos estudantes foi descrito a partir das médias e do desvio padrão, e das medianas e do intervalo interquartílico, das respostas corretas. Os resultados estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Desempenho obtido pelos estudantes, por tipo de problema de fração

	Quociente (n = 90)			Parte-todo (n = 90)		
	Ordenação	Equivalência	p-valor	Ordenação	Equivalência	p-valor
Média (dp)	43 (36)	42 (35)	0,902	29 (26)	13 (23)	0,000
Mediana (iiq)	25 (0;75)	50 (0;75)		25 (0;50)	00 (0;25)	

Os valores representam o percentual de acertos de cada tipo de problema.

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram que o desempenho dos estudantes nos problemas de situação quociente apresenta média de acertos superior, quando comparado aos problemas de situação parte-todo. Esse fato é coerente com a literatura, que aponta a situação de fração quociente como mais facilitadora da compreensão do conceito de fração.

Não houve diferença significativa entre os problemas de fração quociente em relação à ordenação e à equivalência (p=0,902). A mediana indica, no entanto, que metade dos estudantes obteve até 25% de acertos na ordenação e até 50% dos acertos na equivalência nesse tipo de problema.

Nos problemas de situação parte-todo, a média de acertos obtida pelos estudantes foi superior na ordenação. A mediana demonstra que metade dos estudantes obteve até 25% de acertos na ordenação, enquanto metade dos estudantes não obteve acertos na equivalência nessa situação de fração.

3.2.5.2 Análise de Correlação

Conduziu-se uma análise de correlação para identificar as possíveis relações estabelecidas entre as situações de fração quociente e parte-todo, e os princípios de ordenação e equivalência, bem como suas intercorrelações. Os resultados estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Correlações entre os diferentes tipos de problemas fração

	Quociente Ordenação	Quociente Equivalência	Parte-todo Ordenação	Parte-todo Equivalência
Quociente Ordenação	1			
Quociente Equivalência	0,29**	1		
Parte-todo Ordenação	0,59**	0,10	1	
Parte-todo Equivalência	0,13	0,38**	0,24*	1

*p<0,05; **p<0,01; Coeficiente de correlação de Spearman.

Os resultados do coeficiente de Spearman revelam uma correlação forte (r_s=0,59; p<0,01), indicando que quanto maior o desempenho dos estudantes na ordenação com as situações de fração quociente, maior o desempenho nas situações de parte-todo. Tais resultados demonstram que a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes está associada a um melhor desempenho nas situações de fração quociente. Percebeu-se correlação moderada (r_s=0,38; p<0,01) do princípio de equivalência e as situações de fração quociente e parte-todo.

Quando os tipos de problemas foram relacionados entre si, verificou-se correlação fraca da situação de fração quociente e os princípios de ordenação e de equivalência (r_s=0,29; p<0,01); bem como da situação parte-todo e os princípios de ordenação e de equivalência (r_s=0,24; p<0,05). Para os demais itens, não foi evidenciada a existência de correlação, conforme mostra a Tabela 6.

3.2.5.3 Descrição do desempenho dos estudantes quanto às justificativas por tipo de problemas de divisão e de fração

Após realizar a análise descritiva do desempenho dos estudantes, conduziu-se uma análise qualitativa das explicações que justificam as soluções para a resolução dos problemas. Procurou-se, assim, entender melhor como os estudantes pensam e identificar as diferenças no desempenho entre os tipos de problemas de divisão e de fração.

A fim de sistematizar as justificativas apresentadas pelos estudantes, foi possível distinguir cinco diferentes categorias, a partir das semelhanças entre as respostas:

1) relação inversa – a justificativa atende à relação inversa entre as duas quantidades do problema, apresentando uma justificativa válida.

Exemplo: "Porque ele partiu a sua pizza em duas partes iguais, e ela, em quatro partes iguais, e as partes dela ficaram menores";

2) raciocínio proporcional – evidencia o estabelecimento de uma relação proporcional entre as quantidades do problema, produzindo um argumento válido.

Exemplo: "Comem igual porque as meninas são duas, para um chocolate, e os meninos são o dobro delas, com o dobro dos chocolates";

3) relação direta – estabelece uma relação direta entre as quantidades.

Exemplo: "Porque tem mais crianças por isso come mais bolo";

4) quantidade inicial – atende apenas a uma das quantidades iniciais do problema, produzindo justificativas incompletas.

Exemplo: "Porque tem mais bolos";

5) inconclusivo/inválido – contempla todas as explicações inconclusivas, ou em branco.

Os resultados apresentados na Tabela 7 referem-se às justificativas utilizadas pelos estudantes para explicar suas respostas na resolução, por tipo de problema.

Tabela 7 - Porcentagem de tipos de justificativas apresentadas

	Quociente		Parte-todo		Divisão	
	Ordenação	Equivalência	Ordenação	Equivalência	Partitiva	Quotas
Relação inversa	37.8	32.2	11.1	7.8	11.1	15.6
Raciocínio proporcional	-	4,4	1,1	2,2	-	-
Relação direta	25.6	24.4	25.6	60.0	34.4	31.1
Quantidade inicial	7.8	17.8	30.0	2.2	31.1	22.2
Inconclusivo/-inválido	28.9	21.1	32.2	27.8	23.3	31.1

Os valores representam o percentual da frequência de justificativas de cada tipo de problema.

Os dados da Tabela 7 mostram que a justificativa "relação inversa" foi apontada nas situações de fração quociente por 37,8% dos estudantes brasileiros. Dentre as justificativas, essa foi a mais utilizada nas situações de quociente. Esse resultado evidencia que os níveis de sucesso registrados no desempenho dos estudantes, nesse tipo de problema, não foram obtidos ao acaso.

A justificativa "relação direta" foi apontada por 34,4% dos estudantes brasileiros nas situações de divisão partitiva, evidenciando-a como uma explicação válida para as suas respostas. Nas situações de fração parte-todo, 60% dos estudantes brasileiros indicaram como uma explicação válida na lógica da equivalência. Entre as justificativas, a "Inconclusivo/Inválido" aponta que a maioria dos estudantes apresentou dificuldade para explicar sua resposta na solução do problema.

3.2.5.4 Síntese dos Resultados

Os resultados encontrados revelam que as diferentes situações de divisão e de fração contribuem, de forma distinta, para a compreensão dos estudantes sobre relação inversa entre quantidades em situações de divisão e de fração. Observou-se um baixo desempenho dos estudantes brasileiros ao estabelecerem a relação inversa entre o divisor e o quociente nas situações de divisão. Esse fato pode indicar a existência de uma defasagem, nessa habilidade matemática, em relação ao esperado para os estudantes do 4º ano do ensino fundamental, apesar das orientações indicadas no programa curricular vigente na legislação.

Apesar das diferenças no desempenho, os estudantes demonstraram ter melhor compreensão da relação inversa entre quantidades nas situações de fração quociente, mesmo antes do ensino formal sobre frações na escola. Esse resultado aponta que os estudantes têm alguma facilidade para comparar as quantidades e realizar julgamentos sobre o valor relativo da quantidade antes mesmo de terem sido apresentados à representação numérica de fração. Considera-se que isso pode acontecer devido ao conhecimento informal dos estudantes, adquirido nas experiências do cotidiano, e aos contextos presentes nos problemas, que permitiram a coordenação dos esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e partição.

Em relação às situações parte-todo, muito utilizada no ensino para explorar o conhecimento sobre frações na escola, percebeu-se que os estudantes apresentaram dificuldade em estabelecer a relação inversa entre o tamanho das partes fracionárias, que requer uma compreensão da divisão em partes iguais de um todo.

3.3 ESTUDO COMPARATIVO

Com as evidências obtidas no estudo transversal, no sentido de que a relação inversa entre quantidades foi mais facilmente compreendida nas situações de fração quociente, o segundo estudo teve como objetivo geral comparar o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de divisão e de fração.

A partir do objetivo geral, definiu-se como objetivos específicos:

- verificar se existem diferenças e semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de divisão e de fração;

- comparar o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, através das explicações que justificam as soluções dos diferentes tipos de problemas de divisão e de fração.

O estudo teve as seguintes questões de investigação:

- Que diferenças e semelhanças são identificadas no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses no que diz respeito à compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de divisão?
- Que diferenças e semelhanças são identificadas no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses no que diz respeito à compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de fração?

3.3.1 Amostra

Participaram 90 estudantes brasileiros (M=9,88 anos) e 73 estudantes portugueses (M=9,69 anos) do 4º ano do ensino fundamental de escolas da rede pública de ensino das cidades de Porto Alegre – Brasil, e de Braga – Portugal. Para definição da amostra, foram considerados os aspectos já descritos no estudo transversal.

3.3.2 Procedimentos de coleta de dados

A coleta de dados foi realizada pela própria pesquisadora em ambos os países, o que garantiu a realização de procedimentos semelhantes. Em Portugal, a pesquisadora foi acompanhada pela Prof.ª Dr.ª Ema Mamede e pela doutoranda Paula Cardoso.

Conforme apresentado anteriormente, a aplicação do instrumento de avaliação foi realizada de forma coletiva em sala de aula, com duração de 50 minutos. Os estudantes receberam um caderno de atividades com um problema por folha. Os problemas foram projetados para a turma com recurso *Power Point*, e foi realizada a leitura em voz alta pela pesquisadora. Estipulou-se um tempo para a resolução de cada problema. As professoras titulares das turmas acompanharam a aplicação do instrumento de avaliação.

3.3.3 Instrumento de avaliação

O instrumento de avaliação utilizado no estudo comparativo foi o mesmo do estudo transversal, já descrito anteriormente.

3.3.4 Procedimento de análise dos dados

A análise de comparação de grupos utilizou o teste não paramétrico de Mann-Whitney para verificar se existem diferenças e semelhanças entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses na resolução dos problemas em situações de divisão e de fração. Para os testes estatísticos utilizados, foi considerado o nível de significância de $p<0,05$.

3.3.5 Resultados

A apresentação dos resultados do estudo comparativo será feita em três etapas: (1) descrição do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses nos problemas de situação de divisão e de fração; (2) análise de comparação do desempenho entre grupos; e (3) comparação do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto às justificativas, por tipo de problema de divisão e de fração.

3.3.5.1 Descrição do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses nos problemas de divisão de fração

A Tabela 8 apresenta o desempenho obtido pelos estudantes brasileiros e portugueses, descritos a partir da média e do desvio padrão, da mediana e do intervalo interquartílico, e do percentual de acertos por tipo de problemas em cada grupo estudado. O teste não paramétrico de Mann-Whitney foi utilizado para comparar o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses.

Tabela 8 - Medidas descritivas e comparação do desempenho entre os dois grupos de estudantes, quanto aos tipos de problema

Tipos de problemas	Estudantes brasileiros (n=90)		Estudantes portugueses (n=73)		Valor-p*
	Média (dp)	Mediana (iiq)	Média (dp)	Mediana (iiq)	
Quociente Equivalência	42 (35)	50 (0;75)	61 (26)	75 (0;75)	0,001
Quociente Ordenação	43 (36)	25 (0;75)	80 (26)	100 (75;100)	<0,001
Parte-Todo Equivalência	13 (23)	00 (0;25)	35 (32)	25 (0;63)	<0,001
Parte-Todo Ordenação	29 (26)	25 (0;50)	59 (35)	75 (25;75)	<0,001
Divisão Partitiva	20 (33)	00 (0;33)	43 (40)	33 (0;83)	<0,001
Divisão por Quotas	31 (34)	33 (0;67)	46 (40)	33 (0;100)	<0,05

dp = desvio-padrão Iiq=intervalo interquartílico
Os valores representam o percentual de acertos em cada tipo de problema.
* Nível de significância de p<0,05, associado ao teste Mann-Whitney U, para duas amostras independentes.

Os dados da Tabela 8 mostram que os estudantes brasileiros e portugueses apresentaram médias superiores nas situações de fração quociente. Houve diferença estatisticamente significativa entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, e os estudantes portugueses apresentaram uma média de acertos superior, quando comparados aos estudantes brasileiros (p<0,001).

É possível observar que, no princípio da ordenação, os estudantes brasileiros e os portugueses obtiveram médias superiores, tanto nas situações de fração quociente quanto nas situações parte-todo. Em relação à equivalência, os dados indicam que os estudantes de ambos os países apresentaram médias inferiores nas situações de fração parte-todo.

Nas situações de divisão por quotas, os estudantes brasileiros e portugueses evidenciaram médias superiores em relação às médias obtidas nas situações de divisão partitiva. Os dados indicam diferença estatisticamente significativa entre o desempenho dos estudantes, e os estudantes portugueses apresentaram uma média de acertos superior, quando comparados aos estudantes brasileiros (p<0,019).

3.3.5.2 Análise de Comparação do Desempenho entre Grupos

Através do Teste de Mann-Whitney U (Tabela 8) pode-se perceber que o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses mostrou diferença significativa (p<0,001) em todos os tipos de problemas avaliados. Os dados indicam que os estudantes portugueses apresentaram médias superiores de acertos.

3.3.5.3 *C*omparação do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto às justificativas, por tipo de problema de divisão e de fração.

Após realizar a análise descritiva do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, procurou-se, assim, comparar o desempenho dos estudantes através das explicações que justificam as soluções dos problemas de divisão e de fração. As justificativas foram organizadas em cinco categorias, já descritas anteriormente.

Tabela 9 - Porcentagem de tipos de justificativas apresentadas por tipo de problema

	Quociente		Parte-todo		Divisão	
	Ordenação	Equivalência	Ordenação	Equivalência	Partitiva	Quotas
	Estudantes brasileiros (n = 90)					
Relação inversa	37.8	32.2	11.1	7.8	11.1	15.6
Raciocínio proporcional	-	4.4	1.1	2.2	-	-
Relação direta	25.6	24.4	25.6	60.0	34.4	31.1
Quantidade inicial	7.8	17.8	30.0	2.2	31.1	22.2
Inconclusivo/inválido	28.9	21.1	32.2	27.8	23.3	31.1
	Estudantes portugueses (n = 73)					
Relação inversa	91,8	56,6	49,3	17,8	38,2	42,5
Raciocínio proporcional	1,4	15,1	2,7	6,8	-	9,6
Relação direta	2,7	13,7	9,6	42,5	32,9	30,1
Quantidade inicial	1,4	6,8	26,0	8,2	15,1	6,8
Inconclusivo/inválido	2,7	8,2	12,3	24,7	13,7	11,0

Os valores representam o percentual da frequência de justificativas de cada tipo de problema.

É possível observar que a justificativa "relação inversa" foi apontada nas situações de fração quociente por 37,8% dos estudantes brasileiros na ordenação, e por 91,8% dos estudantes portugueses na mesma categoria. Dentre as justificativas, essa foi a mais utilizada nas situações de quociente. Esse resultado evidencia que os níveis de sucesso registrados no desempenho dos estudantes nesse tipo de problema não foram obtidos ao acaso.

Os dados da Tabela 9 mostram que a justificativa “relação direta” foi apontada, nas situações de divisão partitiva, por 34,4% dos estudantes brasileiros e por 32,9% dos estudantes portugueses, evidenciando-a como uma explicação válida para as suas respostas. Nas situações de fração parte-todo, 60% dos estudantes brasileiros e 42,5% dos estudantes portugueses a evidenciaram como uma explicação válida na lógica da equivalência.

A justificativa “Inconclusivo/Inválido” indica que alguns estudantes apresentam dificuldade para explicar a resposta na solução do problema.

Em síntese, das cinco justificativas, a maior parte dos estudantes brasileiros usou a ‘relação direta’ como justificativa válida para as soluções dos problemas. Esse tipo de justificativa sugere que os estudantes brasileiros estão usando mais a percepção do que relações entre as quantidades (NUNES, 2015). O Gráfico 1 mostra que foi difícil para os estudantes brasileiros explicar a solução dos problemas, apresentado uma justificativa ‘inconclusiva/inválida’.

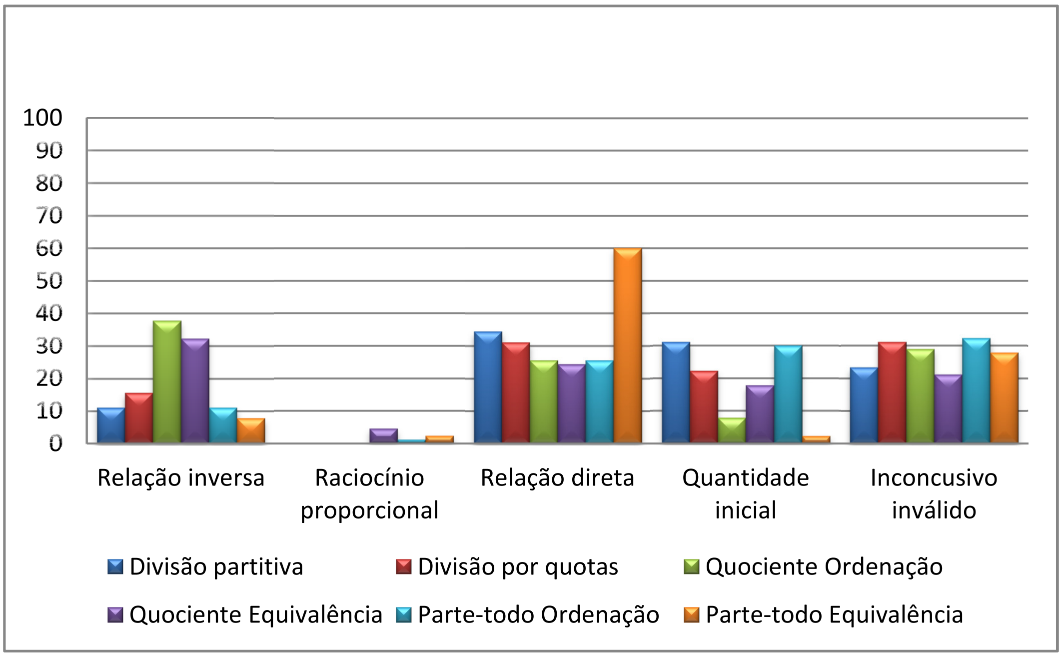


Gráfico 1 – Justificativa dos estudantes brasileiros por tipo de problema

A discrepância no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses pode ser evidenciada através das explicações usadas para justificar as soluções dos problemas. A maior parte dos estudantes portugueses usou a ‘relação inversa’ como justificativa válida para as soluções dos problemas. Esse tipo de justificativa sugere que os estudantes portugueses apresentaram justificativas que indicam argumentos válidos para a solução dos problemas (Gráfico 2). Esse fato pode ser atribuído a uma das metas do PMEB (2007) que envolve a comunicação do pensamento matemático.

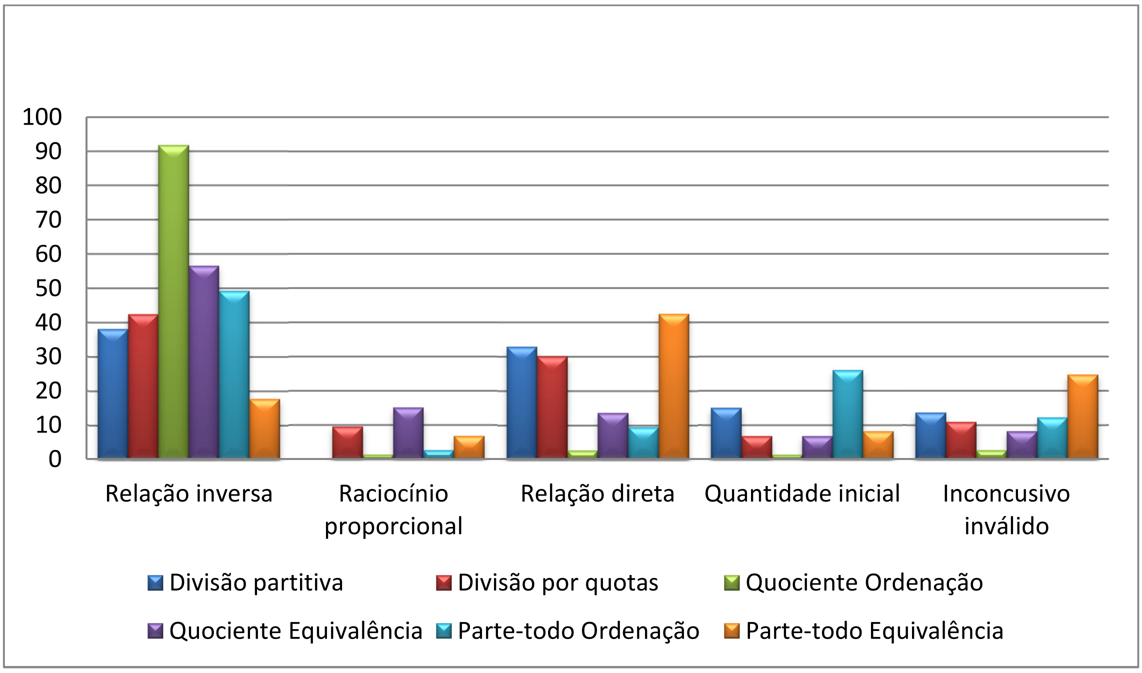


Gráfico 2 – Justificativas dos estudantes brasileiros por tipo de problema

3.3.5.4 Síntese dos Resultados

Os resultados indicam que os estudantes brasileiros e portugueses compreendem mais facilmente a relação inversa entre quantidades nas situações de fração quociente. Apesar da diferença significativa no desempenho dos estudantes, percebeu-se desempenho superior nos problemas de ordenação e de equivalência, apresentados nas situações de fração quociente, em ambos os grupos. Já nas situações de fração parte-todo, os estudantes dos dois países encontraram dificuldades para ter sucesso, principalmente no princípio da equivalência.

Os estudantes portugueses apresentaram desempenho superior, em todas as situações avaliadas, demonstrando níveis superiores de compreensão da relação inversa entre quantidades, evidenciados no percentual maior das explicações para a solução dos problemas com justificativas válidas. Considera-se que a mudança no programa curricular da Matemática realizada em Portugal, explorando o conhecimento conceitual dos números racionais desde os primeiros níveis dos anos iniciais, pode indicar que o tempo maior durante o qual os estudantes são expostos a situações de fração, bem como os tipos destas que são exploradas parecem favorecer a aprendizagem inicial das frações.

4 DISCUSSÃO

Para a análise dos dados, retoma-se o problema de pesquisa e o objetivo geral, bem como os objetivos específicos. No problema de pesquisa, questionou-se como a compreensão da relação inversa entre quantidades (tamanho das partes e número de partes) influencia a aprendizagem inicial das frações. No objetivo geral, buscou-se verificar como a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes, em situações de divisão e de fração, influencia a aprendizagem inicial das frações. Considerando tal questão e objetivo geral, propõe-se, em termos específicos:

1) Verificar a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente, em situações de divisão partitiva e por quotas;

2) Verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes, em situações de fração parte-todo e quociente;

3) Verificar se existe correlação entre os tipos de situações de fração e os princípios de ordenação e de equivalência;

4) Verificar se existem diferenças ou semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de divisão e de fração.

5) Verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes, através das explicações que justificam as soluções dos diferentes tipos de problemas;

A seguir, apresenta-se a discussão, organizada em três seções, que estão descritas da seguinte maneira: desempenho dos estudantes, por tipo de situação; associação entre os princípios de ordenação e equivalência, e os tipos de situação de fração; e comparação do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses.

4.1 DESEMPENHO DOS ESTUDANTES POR TIPO DE SITUAÇÃO

A análise do desempenho dos estudantes visa a entender as relações numéricas presentes na aprendizagem de frações, bem como aspectos relativos à compreensão da relação inversa entre quantidades na resolução dos problemas. Diante disso, ressalta-se que foi utilizado procedimento idêntico no estudo transversal e no estudo comparativo, o que permitiu uma análise conjunta do desempenho dos estudantes dos dois países. Para verificar o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, foram comparadas as situações de divisão partitiva e por quotas, e as situações de fração parte-todo e quociente.

Os resultados do estudo evidenciaram que os tipos de situações de divisão e de fração contribuem, de maneira distinta, para a compreensão, por parte dos estudantes, da relação inversa entre quantidades (tamanho das partes e o número de partes) envolvidas no problema. Os estudantes brasileiros e portugueses tiveram melhor desempenho nas situações de fração quociente, demonstrando níveis superiores da compreensão da relação inversa entre quantidades, o que pode favorecer a aprendizagem de frações menores do que a unidade.

A seguir, discutem-se os resultados referentes ao desempenho dos estudantes, por tipo de situação de divisão e de fração.

4.1.1 Situações de divisão

Para analisar o desempenho dos estudantes, buscou-se verificar a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente em situações de divisão partitiva e por quotas. Os resultados mostraram que os estudantes apresentam baixo desempenho nas situações de divisão. De modo geral, os problemas de divisão por quotas foram resolvidos mais facilmente, em comparação com os problemas de divisão partitiva. Tal resultado foi surpreendente, uma vez que os resultados encontrados nas pesquisas de Correa, Nunes e Bryant (1998) e Kornilaki e Nunes (2005) evidenciaram níveis superiores de compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente em situações de divisão partitiva. Além disso, os autores ressaltaram que as crianças de cinco anos já fazem estimativas quando o dividendo é mantido constante, e os valores do divisor variam. Observa-se que essa compreensão pode ser atribuída às experiências do cotidiano, relacionadas às situações de divisão.

Salienta-se, entretanto, que os estudantes desta pesquisa já haviam recebido ensino formal sobre divisão e que isso pode ter influenciado na solução dos problemas. Uma possível explicação para esse resultado pode ser atribuída ao conhecimento baseado no raciocínio multiplicativo, que parece ter facilitado os níveis de compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente nas situações de divisão por quotas. Esses resultados corroboram os encontrados no estudo de Correa (2004), que evidenciaram o uso de estratégias relacionadas às vezes em que uma determinada quantidade pode 'estar contida' em outra quantidade, até chegar à quantidade inicial do dividendo, como no caso da dupla contagem. Vale ressaltar, no entanto, que se pode fazer apenas uma suposição, pois o presente estudo não compreendeu uma amostra com níveis diferentes de idade e de escolaridade, o que permitiria chegar a tal conclusão. Além disso, observa-se que os esquemas de ação envolvidos na resolução dos problemas de divisão partitiva e por quotas são diferentes. (VERGANUD, 1990). Dessa maneira, as estratégias baseadas na correspondência um-para-muitos reduzem as etapas necessárias para a solução dos problemas de divisão por quotas. Já nos problemas de divisão partitiva, são usadas estratégias baseadas em adições repetidas e procedimentos de distribuição, envolvendo a ideia de partição, associada à divisão em partes iguais (CORREA, 2004; NUNES; BRYANT, 1997; 2008; NUNES et al., 2009).

É interessante discutir qual a relação desses resultados com a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente, o que se pretendeu com a proposição de resolução de problemas sobre as situações de divisão partitiva e por quotas. Os resultados obtidos sugeriram que a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente mostrou-se como uma habilidade pouco desenvolvida na maioria dos estudantes. Além disso, observa-se que os estudantes apresentaram dificuldade em estabelecer as relações de covariação entre os termos da divisão, quando o dividendo foi mantido constante. Igualmente, mostraram-se com dificuldade para realizar o julgamento da relação inversa entre o divisor e o quociente. Esses resultados não eram esperados, considerando que, no 4º ano, os estudantes já haviam recebido ensino formal sobre divisão. Nesse sentido, apresentam-se algumas possíveis explicações que contribuem para entender tais resultados.

Um dos motivos para os níveis inferiores da compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente pode ser explicado pelo tipo de problema. Nas situações de divisão, foram usados problemas com a quantidade inicial desconhecida para enfatizar o uso do cálculo relacional. Conforme Nunes e colaboradores (2011), os problemas com a quantidade inicial desconhecida tornam-se mais complexos, exigindo uma maior demanda cognitiva para raciocinar sobre as relações envolvidas no problema. Pode-se destacar, ainda, que esses resultados reforçam o que tem sido indicado por algumas pesquisas, de que as crianças focalizam a atenção no valor do dividendo e esquecem o valor do divisor. Isso ocorre porque elas consideram que o dividendo é maior que o divisor e o quociente, induzindo a uma operação errada (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; NUNES, 2015).

Outras possibilidades estão associadas à resolução de problemas que envolvem relações contextuais e à realização de comparações entre quantidades, assim como o estabelecimento de relações, tais como: ‘maior do que’ e ‘menor do que’. Os resultados sugerem que os estudantes demonstraram dificuldade para estabelecer as relações de covariação entre o divisor (aumentando e diminuindo) e o quociente, que não são evidentes e perceptivas. Dessa forma, os procedimentos usados na resolução dos problemas exigiram estratégias diferentes daquelas utilizadas com o cálculo numérico, muito comum nas aulas de Matemática. Para Nunes (2012), as relações contextuais permitem descrever a natureza da situação e a tomada de decisão para encontrar a melhor solução para o problema.

Parece pertinente ressaltar, ainda, que os níveis de baixo desempenho dos estudantes nas situações de divisão também foram identificados nos resultados da avaliação do PISA 2012. Estes evidenciaram que os estudantes brasileiros demonstram níveis de proficiência abaixo do esperado para o letramento na Matemática, pela OCDE, para que um indivíduo exerça a plena cidadania em um mundo em transformação.

Nesse sentido, é importante considerar os diferentes tipos de situações de divisão, as quantidades envolvidas nos problemas, e o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo como fatores que influenciam a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente e que afetam o desempenho dos estudantes.

4.1.2 Situações de fração

Em relação às situações de fração, procurou-se verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de fração parte-todo e quociente. Os resultados mostraram níveis superiores da compreensão da relação inversa entre quantidades (tamanho das partes e número de partes) em situação de fração quociente, em comparação com os níveis obtidos em situação de fração parte-todo. Esses resultados estão em consonância com os encontrados nas pesquisas de Mamede, Nunes e Bryant (2005), Nunes e colaboradores (2007), e Nunes e Bryant (2008). Os estudos de Mamade, Nunes e Bryant (2005) evidenciaram que a situação de fração quociente favoreceu uma melhor compreensão da ordenação e da equivalência de fração.

Em relação às situações de parte-todo, os resultados indicaram o pior desempenho dos estudantes nos problemas de equivalência, evidenciando níveis inferiores da compreensão da relação inversa entre quantidades (tamanho das partes e número de partes). Esses resultados são similares aos encontrados no estudo de Stafylidou e Vosniadou (2004), que evidenciaram que os estudantes mais novos têm dificuldade em compreender a relação entre o numerador e o denominador da fração, porque consideram os dois números como sendo independentes. O estudo realizado por Siegler e colaboradores (2011) mostrou que a situação de parte-todo pode facilitar a compreensão do conceito de fração, quando o numerador é menor do que o denominador; no entanto, há algumas limitações, como no caso das frações impróprias - por exemplo, a interpretação da fração $^4/_3$, como sendo quatro partes de um todo que foi dividido em três partes. A literatura revisada aponta que o baixo desempenho dos estudantes em situações de parte-todo está associado com as experiências adquiridas com os números inteiros, que exercem uma influência que pode dificultar a aprendizagem inicial das frações. Conforme apontado por Gelman (1991), as dificuldades demonstradas na aprendizagem de frações estariam associadas a uma tendência do cérebro para representar quantidades inteiras, interferindo na capacidade para representar frações. Já o estudo de Hecht, Close e Santisi (2007) comprovou que o baixo desempenho pode ser atribuído a uma separação entre a compreensão conceitual sobre frações e os conhecimentos prévios sobre os números inteiros, e que isso ocorre devido ao fato de as operações de frações contradizerem as propriedades dos números naturais. Nesse sentido, fica claro que a compreensão do conceito de fração requer uma reorganização do conhecimento numérico, a fim de entender as frações como representações de um número, que pode ser maior ou menor do que a unidade. (STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004; SIEGLER et al., 2013).

De acordo com os resultados, os estudantes brasileiros e portugueses apresentaram melhor desempenho nos problemas de fração, em comparação com os problemas de divisão. Como foi mencionado anteriormente, esse resultado pode estar relacionado com o tipo de problema. Os estudos revisados enfatizam a resolução de problemas como um modelo usado na aprendizagem da Matemática que permite compreender e estabelecer as relações necessárias e contextuais, bem como o papel que os modelos representam na mudança do conhecimento informal e formal (NUNES; 2012; GRAVEMEIJER; 1994). Nas situações de fração, os dados remetem que o desempenho dos estudantes pode ter sido facilitado pelo modelo de representação icônica, com ilustração de barra retangular e contextos associados ao cotidiano dos estudantes. Esse tipo de problema pode ter favorecido a divisão em partes iguais e a partição com as quantidades menores do que a unidade, o que permitiu examinar as relações representadas entre o tamanho das partes e o número de partes. Estudos anteriores, utilizando modelos de representação visual ou icônica, tais como os modelos circular ou barras, facilitaram o entendimento inicial conceitual (BEHR et al., 1984). Os resultados do estudo de Hecht e colaboradores (2003) apontaram que as crianças com um conhecimento conceitual de fatos básicos podem ser capazes de resolver os problemas de situações de fração parte-todo e quociente mais facilmente do que os estudantes com menos conhecimento sobre frações. Os estudos realizados por Geary (1995) indicaram que as habilidades cognitivas consideradas como biologicamente secundárias exigem abordagens educacionais específicas, através de educação formal ou informal.

Além disso, a literatura destaca que o conhecimento informal, adquirido nas experiências das situações da vida cotidiana, pode ter favorecido os níveis superiores da compreensão da relação inversa entre quantidades nas situações de fração (MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005; VERGNAUD, 1992; Mack, 1990). O estudo realizado por Empson (1999) revelou que as crianças podem desenvolver o conceito de fração de forma significativa, usando as situações de partilha das experiências do dia a dia. A pesquisa de Mack (1990) evidenciou que o conceito de fração emerge do conhecimento informal e fornece significado para os símbolos formais. O autor afirma, contudo, que o conhecimento informal não é suficiente para a formalização do conhecimento de fração. Conforme Behr e colaboradores (1984), existe uma desconexão entre o conhecimento informal e os conhecimentos formais da Matemática desenvolvidos na escola. Já os estudos de Kieren (1993) sugerem que as situações de ensino tornam-se limitadas quando exploram apenas um dos significados de frações. O autor destaca que a compreensão conceitual de fração é um processo que requer tempo para estabelecer conexões das múltiplas representações e os diferentes significados.

Por outro lado, o conhecimento conceitual de fração é amplo e complexo, e não está relacionado apenas com uma simples extensão dos números inteiros (NUNES et al., 2009). O estudo realizado por Hecht, Vagi e Torgesen (2007) esclarece que a compreensão conceitual de fração pode evitar erro ao adicionar frações com denominadores diferentes. Os autores destacam a necessidade de formar um modelo mental do significado parte-todo, das unidades de fração, e de considerar que as partes das frações não podem ser somadas sem serem igualadas. Já o estudo de Hecht (1998) assinalou que o conhecimento conceitual e processual têm a mesma importância para a aprendizagem geral das frações. Hallett e colaboradores (2012), no entanto, ressaltam que a falta de conhecimento conceitual de frações pode explicar os desafios enfrentados por alguns estudantes ao realizarem procedimentos sobre frações sem uma compreensão.

4.2 ASSOCIAÇÕES ENTRE AS SITUAÇÕES DE FRAÇÃO E OS PRINCÍPIOS DE ORDENAÇÃO E DE EQUIVALÊNCIA

Em relação às associações entre as situações de fração e os princípios lógicos, buscou-se verificar a existência de correlação entre as situações de fração (parte-todo e quociente) e os princípios (ordenação e equivalência). Os resultados indicam correlação forte entre as situações de parte-todo e de quociente e o princípio de ordenação. É possível observar que o desempenho dos estudantes demonstrou níveis de compreensão da relação inversa entre quantidades, e que o tipo de problema de fração favoreceu a comparação das quantidades, bem como influenciou a aprendizagem inicial das frações. Esses resultados estão de acordo com os obtidos por Behr e colaboradores (1983), que indicaram que as crianças apresentam uma compreensão da relação inversa, entre o numerador e o denominador. Os autores destacam a necessidade de tempo e de instrução formal.

Os dados ainda mostram que alguns dos estudantes que participaram desse estudo apresentam falta de compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador ao comparar quantidades. Esses resultados corroboram os encontrados por Behr e colaboradores (1984), que demonstraram que os estudantes têm dificuldades para ordenar frações quando o numerador é o mesmo, e o denominador é diferente. Isso se verifica devido à falta de compreensão da relação inversa entre o denominador e a quantidade representada com fração. Os autores afirmam, ainda, que os estudantes realizam um julgamento baseado nas propriedades dos números inteiros, considerando que a fração com o maior denominador, nesse exemplo, é o número maior. Outro estudo interessante, realizado por Post e colaboradores (1986), evidenciou que os estudantes utilizam as propriedades dos números inteiros para comparar frações com símbolos numéricos, como, por exemplo, $2/3$ e $2/4$ ou $3/9$ e $4/9$. Os autores afirmam que as diferenças conceituais dos números naturais, baseadas nas relações aditivas, e dos números racionais, associados às relações multiplicativas, podem servir como um obstáculo para o desenvolvimento da compreensão da relação inversa. A literatura revisada aponta as tentativas dos estudantes de transferir as propriedades que se aplicam aos números inteiros para as informações adquiridas sobre frações. Apresenta, contudo, um entendimento de que as propriedades dos números inteiros não definem os números em geral e, portanto, exigem outros tipos de habilidades cognitivas (STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004; JORDAN et al., 2013).

Os resultados mostram que, nos problemas de equivalência de situações de fração parte-todo, os estudantes brasileiros e portugueses apresentaram dificuldade para estabelecer a relação inversa entre o tamanho e o número de partes. Os resultados encontrados por Behr e colaboradores (1984) demonstraram que pode ser difícil, para algumas crianças, entender a equivalência de frações parte-todo, devido ao estabelecimento de relações compensatórias entre o tamanho e o número de partes iguais. Os autores destacam que a compreensão da equivalência, nessas situações de fração, está baseada no raciocínio proporcional inverso, ou seja, afirmam que é necessário considerar que o dobro de partes significa que cada parte é a metade do tamanho.

4.3 DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS NO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES BRASILEIROS E PORTUGUESES

Os resultados evidenciaram a existência de semelhança entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, que indicaram níveis superiores da compreensão da relação inversa entre quantidades nas situações de fração quociente. Esses resultados são similares aos encontrados nos estudos de Mamede, Nunes e Bryant (2005) e Nunes e Bryant (2008), que apontaram melhor desempenho nas situações de fração quociente. Os autores sugerem que as crianças possuem um conhecimento informal sobre a lógica das frações e os princípios de ordenação e de equivalência, desenvolvido nas experiências da vida cotidiana. Para Kieren (1988), as situações de fração quociente facilitam a relação entre o numerador e o denominador, que pode facilmente estar associada com uma divisão e que também pode indicar uma quantidade. Os estudos revisados enfatizam que as stiuações de fração quociente referem-se a duas variáveis de natureza diferente. Esse fato favorece o uso de correspondência. Uma possível explicação para os resultados desta pesquisa, portanto, é que o uso de correspondência permite a distribuição dos itens entre os receptores mais naturalmente do que em situações parte-todo (NUNES; BRYANT, 1997; CORREA; NUNES; BRYANT, 1998; BEHR et al., 1984)

Além disso, outro dado evidenciado neste estudo diz respeito ao baixo desempenho dos estudantes de ambos os países nas situações de fração parte-todo, tanto na ordenação quanto na equivalência. Nesse sentido, vale ressaltar que a literatura aponta que essas situações não produzem percepções imediatas relativas às quantidades fracionárias, no que se refere à ordenação e à equivalência (NUNES; BRYANT, 2008). Assim, os resultados do nosso estudo indicam que os estudantes de ambos os países enfrentaram dificuldades na resolução de tais problemas. Esse fato mostra que essa compreensão é mais tardia, necessitando de um maior tempo de exploração, para perceber que, se um todo for dividido no dobro de partes, cada parte terá a metade do tamanho. Outro aspecto relevante para explicar tal dificuldade demonstrada nos resultados pode ser atribuído à própria denominação da fração. É o que o apontam alguns estudos como Geary (2006), que afirma que a compreensão conceitual pode estar relacionada à denominação das frações. Desse modo, vale destacar também o estudo realizado por Miura e colaboradores (1999). Esse estudo identificou a influência da língua coreana na compreensão das crianças sobre frações parte-todo, que são representadas, por exemplo, pelo símbolo ¼ e pelas expressões: ‘um quarto’ e ‘uma parte de quatro’.

Os resultados indicaram que existem diferenças significativas entre o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, e que o melhor desempenho foi alcançado pelos estudantes portugueses nas situações de divisão e de fração. Esses resultados são similares aos encontrados no estudo de Dorneles, Mamede e Nunes (2008), que mostraram um desempenho superior dos estudantes portugueses com idades de seis e sete anos, que não haviam recebido ensino formal sobre frações. Já os estudantes brasileiros apresentaram baixo desempenho em ambos os estudos. Esses dados estão em consonância com os resultados do PISA (2012) sobre os níveis de proficiência em Matemática dos estudantes dos dois países. Os estudantes portugueses apresentaram desempenho superior, atingindo a média estabelecida pela OCDE, que considera o Nível 2 de proficiência em Matemática como necessário para que o estudante possa exercer plenamente sua cidadania. Já os estudantes brasileiros tiveram um desempenho muito baixo nesse parâmetro. Esse fato pode ser explicado pela mudança no Programa da Matemática no Ensino Básico, realizada em Portugal em 2007, que incluiu instrução formal sobre frações a partir do 3º ano. Diferente disso, no Brasil, apesar de as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais indicarem que esses conhecimentos devem ser desenvolvidos a partir do 4º ano, há limitação das representações fracionárias, menos frequentes no dia a dia, deixando os estudantes restritos à exploração de metades, terços, quartos e quintos. Os resultados encontrados neste estudo parecem indicar que as situações de divisão não foram exploradas, considerando as relações entre o dividendo, o divisor e o quociente nas aulas de matemática. Esse fato compromete o desenvolvimento da compreensão da relação inversa entre quantidades, apesar de estar previsto nos PCNs (1997). Os dados apontados no desempenho dos estudantes brasileiros que participaram deste estudo são coerentes com o desempenho dos estudantes brasileiros no PISA (2012). Na área de conteúdo “quantidades”, foi registrado o desempenho de 83% abaixo do Nível 2.

Enquanto isso, em Portugal, o PMEB (2007) orienta a noção inicial do conceito de fração e os seus diferentes significados, explorando, paralelamente, a representação fracionária e decimal, a partir do 2º ano, envolvendo os termos metade, terça parte, quarta parte e quinta parte. Além das alterações dos conteúdos matemáticos, o Programa propõe também que a resolução dos problemas possa servir como contexto de aplicação de conhecimentos já adquiridos anteriormente, bem como para o desenvolvimento de novas aprendizagens.

Esses dados remetem ainda a estudos como o de Hecht (2003), que salienta que as habilidades de fração podem ser influenciadas pela qualidade e quantidade de prática que as crianças recebem em sala de aula. Tem-se, aqui, portanto, uma referência à questão do tempo de escolarização em que as crianças portuguesas vivenciam o aprendizado desses conteúdos. Vale lembrar que elas iniciam na Educação Infantil em Portugal aos três anos de idade, com índice de 85% das crianças portuguesas a partir dessa idade, enquanto que, no Brasil, a Educação Infantil é oferecida a partir dos cinco anos na rede pública de ensino e não tem obrigatoriedade para todos os estudantes.

A partir dos dados da pesquisa, fica evidente o seguinte: em termos de comparação, pode-se verificar que os estudantes brasileiros e portugueses tiveram desempenho semelhante nos tipos de problemas, tanto nas situações com melhor desempenho quanto nas situações de baixo desempenho. Emerge, então, o questionamento: o que isso significa? Dizendo de outra maneira, a quê esses dados podem ser relacionados? Considerando que os estudantes têm a mesma faixa etária, pressupõe-se o desenvolvimento do conhecimento informal e das habilidades biologicamente primárias como fatores em que praticamente não há diferenças. A variação ocorre, então, no desenvolvimento do conhecimento formal e das habilidades biologicamente secundárias, o que parece justificar o melhor desempenho nas situações de fração quociente associadas a um raciocínio de correspondência e às relações inversas entre quantidades (tamanho das partes e número de partes). Esses aspectos são apontados pelos estudos de Geary (1995) e Butterworth (1999), que argumentam no sentido de que o desenvolvimento das habilidades biologicamente secundárias é geralmente lento, requer esforço e implica na associação entre o conhecimento formal ou informal. Os autores indicam a relação do conhecimento formal com o contexto, destacando o papel da escola e fazendo referência às diferenças culturais nos métodos de ensino.

Os níveis de sucesso do desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses na resolução dos problemas de fração quociente e divisão por quotas não foram obtidos ao acaso. Esses resultados parecem fazer sentido, considerando as explicações dos estudantes sustentados em argumentos válidos. As explicações referem-se aos diferentes tipos de justificativas, que refletiram as estratégias usadas pelos estudantes para determinar a solução dos problemas. Foram organizadas em cinco categorias: relação inversa, raciocínio proporcional, relação direta, quantidade inicial e inconclusivo.

As explicações usadas pelos estudantes apontaram que o tipo de justificativa 'relação inversa' apresentou maior frequência nos problemas de ordenação nas situações de fração quociente. Esses resultados estão em consonância com os dados obtidos nos estudos de Nunes e colaboradores (2009) sobre um modelo implícito, usado pelas crianças, para resolver problemas de raciocínio multiplicativo. Os autores sugerem que o uso de estratégias baseadas no esquema de correspondência um-para-muitos, que permite estabelecer a relação entre duas quantidades, nesse caso, expressa uma melhor compreensão da relação inversa entre duas quantidades.

É possível observar que os dados apontam esse tipo de justificativa como sendo usada por 88% dos estudantes portugueses e por 37,8% dos estudantes brasileiros. Uma possível explicação para esse resultado é a utilização de diferentes tipos de comunicação como forma de aprendizagem da Matemática. Esta é, inclusive, uma orientação do PMEB (2007). O programa curricular português tem como meta que as crianças devem ser encorajadas a falar, escrever, ler, ouvir e aprender a comunicar-se matematicamente. Dessa maneira, as justificativas das crianças para as soluções das tarefas matemáticas podem ser uma ferramenta poderosa para explorar suas ideias e organizar seu pensamento matemático.

Quanto ao tipo de justificativa 'relação direta', foi observado que 60% dos estudantes brasileiros e 44,1% dos portugueses indicaram como explicação para a solução dos problemas de equivalência envolvendo as situações de fração parte-todo. Esses resultados são similares aos encontrados por Behr e colaboradores (1992), que evidenciaram que a compreensão da equivalência de frações requer o estabelecimento de relações compensatórias entre o tamanho das partes e o número de partes. Os resultados do estudo realizado por Stafylidou e Vosniadou (2004) indicaram que as dificuldades podem estar associadas às tentativas das crianças de relacionar as informações que recebem sobre frações com o seu conhecimento prévio. As autoras acrescentam a necessidade de uma reorganização do conhecimento numérico. Observando os resultados desta pesquisa, pode-se sugerir que os estudantes de ambos os países usaram explicações considerando as propriedades que se aplicam aos números naturais, e não as relações inversas entre as quantidades.

Com relação ao tipo de justificativa ‘raciocínio proporcional’, os resultados indicaram que esta explicação foi pouco usada pelos estudantes brasileiros. Já os estudantes portugueses usaram o raciocínio multiplicativo nos problemas de equivalência, tanto para as situações de fração quociente quanto para as situações de parte-todo. Esses dados sugerem que os estudantes portugueses associam suas explicações aos conhecimentos formais sobre os fatos multiplicativos e ao raciocínio proporcional. Tais resultados estão de acordo com os estudos de Correa (2004) e Nunes e colaboradores (2009) sobre uma razão fixa entre as quantidades em uma situação de divisão baseada no raciocínio multiplicativo.

Foram ainda observadas justificativas do tipo ‘quantidade inicial’ entre as explicações usadas com maior frequência pelos estudantes brasileiros e portugueses para os problemas de ordenação em situações de fração parte-todo. Constatou-se que os resultados encontrados neste estudo, nesse sentido, estão de acordo com os apontados por Nunes e colaboradores (2009), que enfatizam que as crianças focalizam a atenção na quantidade inicial envolvida nos problemas e não estabelecem as relações entre as quantidades.

Também foi observado que o tipo de justificativas ‘inconclusivas ou inválidas’ teve um alto índice de frequência usada pelos estudantes brasileiros. Por outro lado, poucos estudantes portugueses utilizaram esse tipo de justificativa. Uma possível explicação para esses resultados diz respeito ao fato de os estudantes portugueses estarem expostos a vivências de situações variadas, com ênfase na comunicação oral. Além disso, há valorização também da comunicação escrita para explicitar seu pensamento e comunicar suas justificativas de solução de problemas em Matemática (PMEB, 2007).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese analisou a compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de divisão e sua influência na aprendizagem das frações menores do que a unidade. Partiu-se da constatação dos desafios de aprendizagem dos estudantes, no que diz respeito à fração, e da constatação de que as dificuldades acompanham os estudantes ao longo de sua vida. Assim como outros estudos desenvolvidos nas fronteiras de diversas áreas – Psicologia Cognitiva, Educação e Educação Matemática –, esta tese sugere que lidar com a complexidade envolvida nesse campo numérico requer uma reorganização do conhecimento. Essa reorganização deve possibilitar aos estudantes utilizarem um número maior de recursos cognitivos para a solução de um problema com quantidades representadas com frações.

Vale destacar que a relevância do estudo está no desafio de propor o desenvolvimento do raciocínio que permita compreender a relação das quantidades entre as partes de um todo e o tamanho dessas partes, ou seja, a compreender a partição dos objetos do mundo vivido e sua valorização, ou o valor que lhes é atribuído. Tudo isso, se não for compreendido, pode gerar dificuldades em diversas áreas da vida, a começar na área profissional.

Observou-se que as diferenças conceituais estão baseadas em processos cognitivos e no desenvolvimento do raciocínio lógico, fatores que caracterizam a competência na solução de problemas. Essas diferenças decorrem do fato de que os números inteiros estão baseados no raciocínio aditivo, enquanto as frações estão associadas ao raciocínio multiplicativo. O uso de estratégias de comparação entre quantidades evidenciou a importância de tais estratégias para a ordenação e a equivalência, que são princípios lógicos fundamentais, tanto dos números inteiros quanto das frações. Apesar disso, está claro que não é possível uma transferência desses princípios dos números inteiros para os números racionais. A ordenação dos números inteiros pode ser por percepção ou por contagem, enquanto a ordenação de frações depende de considerar a magnitude relativa entre o tamanho das partes e o número de partes.

A revisão da literatura permitiu perceber, em associação aos dados empíricos, a relevância do conhecimento informal como formação de uma base de referências para o posterior aprendizado formal. Houve destaque, também, para a importância do conhecimento conceitual e processual, na resolução dos problemas, de tal forma a extrapolar a repetição memorizada de procedimentos. Isso indica, em síntese, a relevância da compreensão, muito mais que a repetição e apreensão de estratégias procedimentais de resolução de problemas. Fica evidente, então, que a compreensão vai possibilitar a criação de estratégias mais simples e econômicas.

Verificou-se que, no Brasil, as pesquisas com foco na aprendizagem dos números racionais são escassas, principalmente em relação ao conhecimento conceitual das frações relacionadas à realidade dos estudantes brasileiros. Nesse sentido, foi importante a aproximação com Portugal, já que esse país realizou uma mudança curricular significativa que valoriza a noção dos números racionais a partir do 2º ano da educação básica. As mudanças e os resultados decorrentes dessa alteração curricular trazem contribuições que podem subsidiar a reformulação de currículos escolares, bem como o planejamento pedagógico da educação básica no Brasil.

As avaliações internacionais na área da Matemática também são sinalizadores importantes para a realização de estudos como o desenvolvido para esta tese. Os resultados do PISA (2012), por exemplo, mostram baixo desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática, enquanto os estudantes portugueses se destacam com um desempenho melhor. Ambos os países, no entanto, vêm demonstrando evolução a cada edição da avaliação. O acompanhamento do desempenho e a observação de fatores contextuais e curriculares de cada país são aspectos que contribuíram para o delineamento do estudo comparativo.

A partir deste ponto, retomam-se os objetivos da tese para refletir sobre os resultados. No primeiro deles, "verificar a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente em situações de divisão partitiva e por quotas", obteve-se o dado de que há um percentual elevado de estudantes brasileiros que não estabeleceram a relação inversa entre o divisor e o quociente nas situações de divisão. Nesse sentido, pôde-se perceber que foi difícil para esses estudantes estabelecerem as relações numéricas avaliadas. Isso indica a existência de uma defasagem, nessa habilidade matemática, em relação ao esperado para os estudantes do 4º ano do ensino fundamental, apesar das orientações indicadas no programa curricular vigente na legislação.

Vale ressaltar que essa defasagem também foi verificada nos resultados da avaliação do PISA 2012, que revelaram que os estudantes brasileiros apresentam níveis de proficiência abaixo do esperado para o letramento na Matemática. Diante desses resultados, algumas constatações ficaram evidentes ao longo da pesquisa. Uma delas diz respeito à necessidade da aquisição, pelos estudantes brasileiros, de conhecimentos mais complexos que possam refletir no seu desempenho, proporcionando melhores níveis das habilidades consideradas essenciais no letramento matemático para que um indivíduo exerça a cidadania.

Nesse sentido, torna-se necessário que os professores tenham a dimensão da importância do conhecimento conceitual sobre frações, bem como do fato de que esse conhecimento pode evitar o comprometimento do desenvolvimento de habilidades da matemática mais complexa. Igualmente, percebe-se a relevância de que os professores acompanhem esses resultados de avaliações para repensarem suas práticas docentes, especialmente quanto à discussão a respeito do conhecimento necessário para o letramento matemático. Faz-se necessário, então, incluir atividades visando a explorar o conceito de divisão, focalizadas no desenvolvimento de habilidades mais complexas e do raciocínio lógico matemático, que permitam o avanço do conhecimento numérico.

Em relação ao segundo objetivo desta tese, “verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de fração parte-todo e quociente”, pôde-se perceber que os estudantes brasileiros apresentaram níveis superiores da compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes nas situações de fração quociente, mesmo antes do ensino formal sobre frações na escola. Esse resultado evidencia que os estudantes têm alguma facilidade para estabelecer a relação inversa entre quantidades e fazer julgamentos sobre o valor relativo da quantidade, antes mesmo da representação numérica de fração. Entende-se que isso ocorre devido ao conhecimento informal dos estudantes, adquirido nas experiências do cotidiano, e aos contextos abordados nos problemas, que permitiram a coordenação dos esquemas de ação de correspondência um-para-muitos e partição.

No que diz respeito ao terceiro objetivo, “verificar se existe correlação entre os tipos de situações de fração e os princípios de ordenação e de equivalência”, os resultados encontrados mostraram a existência de correlação entre a situação de fração quociente e o princípio de ordenação. Isso indica que esse tipo de problema propicia a base para compreender o conceito de números racionais, bem como a transição entre os números inteiros e os números racionais.

O quarto objetivo propunha "verificar se existem diferenças ou semelhanças no desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em situações de divisão e de fração". Nesse sentido, a pesquisa demonstrou diferença significativa do desempenho entre os estudantes brasileiros e portugueses. Os estudantes portugueses apresentaram níveis superiores de compreensão da relação inversa entre quantidades, evidenciados no percentual maior das explicações para a solução dos problemas com justificativas válidas. Diante da discrepância no desempenho dos estudantes nos problemas de divisão e de fração, considera-se que a mudança no programa curricular da Matemática realizada em Portugal possibilita a exploração do conhecimento conceitual dos números racionais desde os primeiros níveis dos anos iniciais, o que parece favorecer a aprendizagem. Atendeu-se, portanto, também ao quinto objetivo da tese: "Verificar a compreensão da relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes através das explicações que justificam as soluções dos diferentes tipos de problemas".

A tese sugere que o conhecimento matemático recebe influência cultural dos métodos e do currículo de ensino, e reforça que as habilidades mais complexas necessitam concentração, prática, esforço e motivação.

Vale destacar que não se pretendeu explorar a influência da representação numérica na compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de fração menor do que a unidade, o que pode ser entendido como uma limitação desta tese. Outra limitação foi a não realização de comparação entre diferentes níveis de escolaridade e faixas etárias. Além disso, há o fato de que as situações de divisão não incluírem tarefas com modelos típicos escolares para verificar o nível de desempenho dos estudantes nas atividades que são oferecidas nas situações de ensino escolar. Em termos de estudos futuros, a tese sinaliza para a importância de que se avance em pesquisas sobre a transferência da compreensão dos números inteiros para os números racionais.

Por fim, a tese situa-se entre os estudos da aprendizagem da Matemática que se propõem a contribuir para a reflexão e a instrumentalização do ensino das frações. Trata-se de um estudo a mais, que, no caso, sinaliza para aspectos gerais e operacionais, ao mesmo tempo em que destaca, a partir de uma comparação internacional, as dimensões contextual e curricular, até chegar a situações concretas sobre os conceitos matemáticos básicos, de tal forma a explorar procedimentos que favoreçam condições de aprendizagem efetiva para os estudantes em todos os níveis da Educação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M. J.; WACHSMUTH, I.; POST, T. R.; LESH, R. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, 15(5), p. 323-341, 1984.

______; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

______; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. A. Rational number concepts.In: LESH,R; LANDAU, M. (Eds.).**Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

_______; POST, T.; LESH R. Construct Analyses, Manipulative Aids, Representational Systems and the Learning of Rational Numbers. In: **Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**.France: Grenoble PME. p. 203-209, 1981.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRIGHT, G.; BEHR, M.; POST, T.; WACHSMUTH, I. Identifying fractions on number lines. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 19, n. 3, p. 215-232, 1988.

______. The Development of Arithmetical Abilities. **Journal of Child Psychology and Psychiatry**, New York, US, v. 46, n. 1, p. 3-18, Jan. 2005.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. **Estudos de Psicologia**, Rio Grande do Norte: Natal, v.9, n.1, p. 145-155, 2004.

______; NUNES, T.; BRYANT, P. Young Children's Understanding of Division: The Relationship between Division Terms in a Noncomputational Task, **Journal of Educational Psychology**, 90, p. 321-329, 1998.

DORNELES, B. V.; MAMEDE, E.; NUNES, T. A situação-problema afeta a compreensão do conceito de fração? In: XIV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2008, Porto Alegre. Anais do XIV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Porto Alegre: PUC_RS, 2008. v. 1.

DGIDC. **Direção geral para a Inovação e Desenvolvimento Curricular**. Lisboa, 2007.

EMPSON, S. Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a First-Grade Classroom. **Cognition and Instruction**, v. 17, n. 3, p. 283-342, 1999.

ESTUDOKIDS.Disponível em: http://www.estudokids.com.br/fracoes-equivalentes-como-encontrar-e-simplificar/. Acesso em: abr. 2015.

GEARY, D. C. Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. **The American Psychologist***,* n. 50, p. 24–37, 1995.

______.Mathematics and learning disabilities. **Journal of Learning Disabilities***,* n. 37, 4-15, 2004.

______.Development of mathematical understanding. In: KUHL, D. & SIEGLER, R. S. (Vol. Eds.). **Cognition, perception, and language**. W. Damon (Gen. Ed.), Handbook of child psychology. 6. Ed. New York: John Wiley & Sons. p. 777-810. v. 2, 2006.

______.; WILLIAMS, E. Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. In: KUHN, D.; SIEGLER R., (Eds.).**Cognition, perception and language**. v. 2. Handbook of Child Psychology (Fifth Ed). p. 575-630. W. Damon, Editor-in-Chief; New York: John Wiley and Sons, 1988.

GELMAN, R; GALISTEL C. R. **The child's understanding of number**. Cambridge: Harvard University Press;1978.

GELMAN, R. Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *Epigenesis of mind: Essays on biology and cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum. p. 293-322,1991.

GRAVEMEIJER, K. Educational development and development and developmental research in mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 25, n. 5, p. 443-471, 1994.

______. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS L., CANAVARRO A. P.; BROCARDO J. (Ed.). **Educação matemática**: Caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.

HALLETT, D.; NUNES, T.; BRYANT, P. Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. **Journal of Educational Psychology**, n. 102, p. 395-406, 2010.

______;______; ______; THORPE, C. M. Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. **Journal of Experimental Child Psychology**, n. 113, p. 469-486, 2012.

HECHT, S. A. & VAGI, K. J. Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. **Journal of Experimental Child Psychology**, n. 111, p. 212-229, 2012.

______. Toward an information-processing account of individual differences in fraction skills. **Journal of Educational Psychology**, n. 90, p. 545-559, 1998.

HECHT, S. A.; CLOSE, L.; SANTISI, M. Sources of individual differences in fraction skills. **Journal of Experimental Child Psychology**, n. 86, p. 277-302, 2003.

______; ______; TORGESEN, J. K. Fraction skills and proportional reasoning. In: BERCH, D. B. & MAZZOCCO, M. M. M. (Eds.). **Why is math so hard for some children?** The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities. New York: Brookes, 2007. p. 121-132.

HIEBERT, J. Re-thinking what cognitive science can contribute to improving students' learning. **Issues in Education**, n. 3, p. 93-100, 1997.

HUTCHINS, P. **Tocaram a Campainha**. (Tradução). In: MACHADO, A. M. (Ed.) Salamandra Ed., 2007.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. PISA **2012**: Relatório Nacional. Apresentação. Brasília, 2011.

JORDAN, N. C.; HANSEN, N.; FUCHS, L. S.; SINGLER, R.; GERSTEN, R.; MICKLOS, D.; Developmental predictors of fraction concepts and procedures. **Journal of Experimental Child Psychology**, n. 116, p. 45-58, 2013.

KIEREN, T. E. Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Rational Numbers**: An Integration of Research. Hillsdale. N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1993. p. 49-84.

______. Multiple Views of Multiplicative Structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (Eds.). **The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**. Albany, New York: State University of New York Press, 1994. p. 389-400.

______. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and Measurement**: Paper from a Research workshop, 1976. p. 101-144.

______. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle-grades.** Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 53-92.

KORNILAKI, E.; NUNES, T. Generalizing Principles in Spite of Procedural Differences: Children's understanding of division, **Cognitive Development**, n. 20, p.388-406, 2005.

LAMON, S. J. The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 27, 170-193. 1996.

LESH, R.; POST, T; BEHR, M. Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics,** 1987, p. 40-77.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 21, p. 16-32, 1990.

MAMEDE, E.; NUNES, T.; BRYANT, P.The Equivalence and Ordering of Fractions in Part-whole and Quotient Situations. In: CHICK, Helen & VINCENT, Jill L. (Eds.).PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. **Proceedings**, v. 3, p. 281-288, Austrália: Melbourne, 2005.

MAMEDE, E. & SILVA, A. Exploring partitive division with young children. **Journal of the European Teacher Education Network**, n. 8, p. 35-43, 2012.

MDMAT.Disponívelem:http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/fracoes/fracoes_09.htm Acesso em: abr. 2015.

MIURA, I. T., OKAMOTO, Y., VLAHOVIC-STETIC, V., KIM, C. C., & HAN, J. H. Language supports for children's understanding of numerical fractions: Cross-national comparisons. **Journal of Experimental Child Psychology**, n. 74, p. 356–365, 1999.

MYNAIO, M. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. 10 ed. São Paulo: Editora Hucitec, 2007.

NUNES. T. A. Pesquisa sobre o Ensino e Aprendizagem da Matemática Universidade de Oxford. In: **Seminário Especial Intensivo: Escola de Altos Estudos da Capes**, UFRGS. Porto Alegre,2015.

______. Números, quantidades e relações: o desenvolvimento do raciocínio na escola fundamental. In: **Seminário Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática**, UNIBAN. São Paulo, 2012.

NUNES, T.& BRYANT, P. **Key Understandings in Mathematics Learning**. Paper 3.Understanding rational numbers and intensive quantities, 2009. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P3_amended_FB2.pdf.

______;______.The Development of Mathematical Reasoning. **Handbook of Child Psychology and Developmental Science**. v. 2. Cognitive Processes, 2015

_____; ______. Rational Numbers and Intensive Quantities: Challenges and Insights to Pupils' Implicit Knowledge. **Anales de Psicologia**, v. 24, n. 2, p. 262-270, dec. 2008.

______; ______. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

______; ______; PRETZLIK, U.; EVANS, D.; WADE.J.; BELL, D. Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Annual Meeting for the Association pour la Recherchesur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris: p. 28-31, 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P.; EVANS, D. & Bell, D. The scheme of correspondence and its role in children's mathematics. **British Journal of Educational Psychology**, Monograph Series II, n. 7 , Understanding number development and difficulties, p. 83-99, 2010.

______;______; BARROS, R.& SYLVA, K. The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. **British Journal of Educational Psychology**, n. 82, 136-156, 2011.

______;______; PRETZLIK, U.& HURRY, J. **Fractions**: difficult but crucial in mathematics learning. London Institute of Education, London: ESRC-Teaching and Learning Research Programme, 2006.

NUNES, T.; DESLI, D.; BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, n. 39, p. 652-675, 2003.

PIAGET, J. **The child's conception of number.** London: Routledge & Kegan Paul. 1952.

______; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **The child's conception of geometry.** New York: Harper & Row. 1960.

POTHIER, Y. & SAWADA, D. Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 14, p. 307-317, 1983.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Research-Based Observations About Children's Learning of Rational Number Concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**,v.8, n.1, p. 39-48, 1986.

______; WACHSMUTH, I.; LESH, R.; BEHR, M. Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 16, n. 1, p. 18-36, 1985.

SIEGLER, R. S.; FAZIO, L. K.; BAILEY, D. H.; ZHOU, X. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, v. 17, n. 1, p. 13-19, Jan. 2013.

______; THOMPSON, C. A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development, **Cognitive Psychology**, n. 62, p.273-296, 2011.

STAFYLIDOU, S.; VOSNIADOU, S. The development of students' understanding of the numerical value of fractions. **Learning and Instruction**, n. 14, p. 503-518, 2004.

VAMVAKOUSSI, X.; VOSNIADOU, S. Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. **Learning and Instruction**, n. 14, p. 453-467, 2004.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: Formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

______. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 13, p. 133 -170, 1990.

______. Multiplicative Structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. 1983. p. 128-175.

______. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds.). **Learning and Teaching Mathematics**. An International Perspective.Hove (UK): Psychology Press, 1997. p. 1-28.

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____________________ no cargo de ____________________ venho representar a escola ____situada no endereço _________________________, em Porto Alegre, no sentido de autorizar o desenvolvimento da pesquisa “Compreensão do conceito de fração: o papel da relação inversa entre o tamanho e o número de partes”, pela doutoranda Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos, sob orientação da Prof.ª Dr.ª Beatriz Vargas Dorneles e a participação livre e espontânea dos alunos das turmas do 4º ano. Declaro estar ciente que a pesquisa se desenvolverá nas dependências da escola e da necessidade da instituição disponibilizar uma sala para a aplicação do instrumento de avaliação.

Porto Alegre, _________ de__________________________ de 2013.

____
Assinatura do (a) representante da escola

ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Autorizo meu filho (a) ____ a participar da pesquisa intitulada "Compreensão do conceito de fração: o papel da relação inversa entre o tamanho e o número de partes", realizada pela doutoranda Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos, com a orientação da Prof.ª Dr.ª Beatriz Vargas Dorneles.

Declaro ter conhecimento que os procedimentos metodológicos adotados incluem a realização de tarefas na área da matemática. As atividades serão desenvolvidas em horário de aula, previamente combinado com a direção da escola.

A pesquisadora assegura a privacidade do aluno pela não divulgação de seu nome. O aluno tem direito de não participar ou se retirar da pesquisa a qualquer momento. Assim, a pesquisadora fica autorizada a publicar os resultados encontrados.

Quaisquer dúvidas a respeito da pesquisa, a pesquisadora está à disposição para esclarecimentos.

Porto Alegre,______ de __________________________________de 2013.

____

Assinatura do (a) responsável

ANEXO C–INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO

Nome:

Data de nascimento:

Ano:

Em cada problema, assinala com uma cruz (*X*) a resposta certa.

- Sempre que te for pedido, explica a tua resposta.
- A resolução é individual.

1) A Maria e o João têm a mesma quantidade de biscoitos. Maria vai distribuir igualmente os seus biscoitos em 2 potes e o João vai distribuir igualmente os seus biscoitos em 3 potes.

( ) Maria vai colocar mais biscoitos em cada pote do que o João.

( ) Maria e João vão colocar a mesma quantidade de biscoitos em cada pote.

( ) Maria vai colocar menos biscoitos em cada pote do que o João.

Explica a tua resposta:

----

2) O João e o Paulo têm a mesma quantidade de palitos. João vai colocar 3 palitos em cada pote e o Paulo vai colocar 6 palitos em cada pote.

( ) João vai precisar da mesma quantidade de potes do que o Paulo.

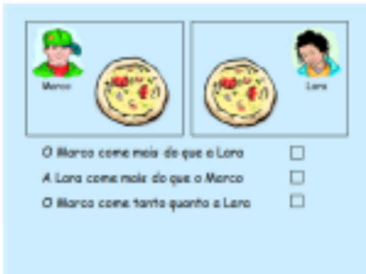
( ) João vai precisar de mais potes do que o Paulo.

( ) João vai precisar de menos potes do que o Paulo.

Explica a tua resposta:

----

3) O Marco partiu a sua *pizza* em 2 partes iguais e comeu uma parte. A Lara partiu a sua *pizza* em 4 partes iguais e comeu uma parte.

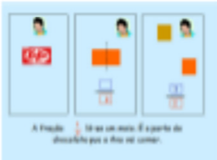


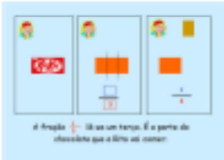
Explica a tua resposta:

----

4) Ana comeu $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e a Rita comeu $\frac{1}{3}$ da barra de chocolate.

( ) Ana come mais chocolate do que a Rita.
( ) Ana come menos chocolate do que a Rita.
( ) As duas meninas comem a mesma quantidade da barra de chocolate.





Explica a tua resposta:

---

5) Um bolo de morango será repartido entre duas meninas. Outro bolo de morango será repartido por três meninos.

Explica a tua resposta:

---

6) As meninas vão repartir uma barra de chocolate e cada uma vai comer $\frac{1}{2}$ do chocolate. Os rapazes vão repartir uma barra de chocolate e cada um vai comer $\frac{1}{3}$ do chocolate.

( ) Cada uma das meninas come mais chocolate do que cada um dos rapazes.
( ) Cada uma das meninas come menos chocolate do que cada um dos rapazes.
( ) Cada menina come a mesma quantidade de chocolate do que cada rapaz.

Explica a tua resposta:

---

7) O Carlos e a Luiza têm a mesma quantidade de fichas. O Carlos vai distribuir igualmente as suas fichas em 4 caixas, e a Luiza vai distribuir igualmente as suas fichas em 3 caixas.

( ) Carlos e Luiza vão colocar a mesma quantidade de fichas em cada caixa.
( ) Carlos vai colocar mais fichas em cada caixa do que a Luiza.
( ) Carlos vai colocar menos fichas em cada caixa do que a Luiza.

Explica a tua resposta:

8) O João e a Maria têm a mesma quantidade de fotografias. O João vai colocar 3 fotografias em cada folha do álbum e a Maria vai colocar 6 fotografias em cada folha do álbum.

( ) João e Maria vão precisar da mesma quantidade de folhas do álbum.
( ) João vai precisar de mais folhas do álbum do que a Maria.
( ) João vai precisar de menos folhas do álbum do que a Maria.

Explica a tua resposta:

----

9) A Rita cortou o seu bolo em 2 partes iguais e comeu uma parte, e a Olga cortou o seu bolo em 4 partes iguais e comeu duas delas.

Explica a tua resposta:

----

10) Rita comeu $\frac{1}{3}$ da barra de chocolate e a Maria comeu $\frac{1}{5}$ da barra de chocolate.

( ) Rita come mais chocolate do que a Maria.
( ) Rita come menos chocolate do que a Maria.
( ) As duas meninas comem a mesma quantidade de chocolate.

Explica a tua resposta:

----

11) As duas meninas vão dividir igualmente uma barra de chocolate. Os quatro meninos vão dividir igualmente duas barras de chocolate.

Explica a tua resposta:

----

12) Os rapazes vão repartir uma barra de chocolate e cada um vai comer $\frac{1}{2}$ do chocolate. As meninas vão repartir uma barra de chocolate e cada uma vai comer $\frac{1}{4}$ do chocolate.

( ) Cada uma das meninas come mais chocolate do que cada um dos rapazes.

( ) Cada uma das meninas come menos chocolate do que cada um dos rapazes.

( )Cada uma das meninas come a mesma quantidade de chocolate do que cada um dos rapazes.

Explica a tua resposta:

----

13) Maria e Luiza têm a mesma quantidade de fichas. A Maria vai dividir igualmente as suas fichas em 5 sacos e a Luiza vai dividir igualmente as suas fichas em 3 sacos.

( ) A Maria vai colocar menos fichas em cada saco do que a Luiza.

( ) A Maria vai colocar mais fichas em cada saco do que a Luiza.

( ) A Maria e a Luiza vão colocar a mesma quantidade de fichas em cada saco.

Explica a tua resposta:

----

14) A Camila e a Mariana têm a mesma quantidade de lápis. A Camila vai colocar 3 lápis em cada estojo e a Mariana vai colocar 6 lápis em cada estojo.

( ) A Camila e a Mariana vão precisar a mesma quantidade de estojos.

( ) A Camila vai precisar de mais estojos do que a Mariana.

( ) A Camila vai precisar de menos estojos do que a Mariana.

Explica a tua resposta:

----

15) O Marco partiu a sua barra de chocolate em 4 partes iguais e comeu uma e a Rita partiu a sua barra de chocolate em 8 partes iguais e comeu duas.

Explica a tua resposta:

----

16) A Eva comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate e a Rita comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate.

( ) A Eva come mais chocolate do que a Rita.
( ) A Eva come menos chocolate do que a Rita.
( ) As meninas comem a mesma quantidade de chocolate.

Explica a tua resposta:

---

17) O grupo das 3 meninas tem um bolo para repartir igualmente, sem sobrar bolo. O grupo dos 6 rapazes tem dois bolos para repartir igualmente entre eles, sem sobrar bolo.

Explica a tua resposta:

---

18) Os rapazes vão repartir uma barra de chocolate e cada um vai comer $\frac{1}{3}$ do chocolate. As meninas vão repartir uma barra de chocolate e cada uma vai comer $\frac{1}{5}$ do chocolate.

( ) Cada uma das meninas come mais chocolate do que cada um dos rapazes.
( ) Cada uma das meninas come menos chocolate do que cada um dos rapazes.
( )Cada uma das meninas come a mesma quantidade de chocolate que cada um dos rapazes.

Explica a tua resposta:

---

19) O menino índio corta a sua pizza em 3 partes iguais e come uma parte. A menina índia corta a sua pizza em 6 partes iguais e come duas partes.

Explica a tua resposta:

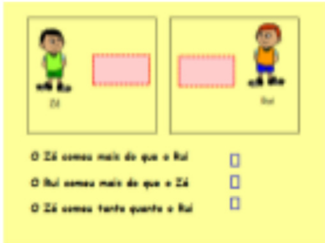
---

20) Os meninos vão dividir igualmente 6 barras de chocolate. As meninas vão dividir igualmente 2 barras de chocolate.

Explica a tua resposta:

----

21) O Zé cortou o seu bolo em 3 partes iguais e comeu duas partes e o Rui cortou o seu bolo em 9 partes iguais e comeu seis partes.



Explica a tua resposta:

----

22) Os meninos vão repartir igualmente uma barra de chocolate. As meninas vão repartir igualmente duas barras de chocolate.

Explica a tua resposta:
