

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A APROXIMAÇÃO  $P_N$   
DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE LINEAR UNIDIMENSIONAL

por

Elaine Evaní Streck

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

1993

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A APROXIMAÇÃO  $P_N$   
DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE LINEAR UNIDIMENSIONAL

por

Elaine Evaní Streck  
Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola  
de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Aprovado por:

Prof. Dr. Marco Túllio M. B. de Vilhena (Orientador)	UFRGS
Prof. Dr. Vilmar Trevisan	UFRGS
Prof. Dr. Alwin Wilhelm Elbern	UFRGS
Prof. Dr. Cláudio de Oliveira Graça	UFSC
Prof. Dr. José Rubens Maiorino	IPEN

Prof. Dr. Sérgio Viçosa Möller  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 03 de dezembro de 1993.

**DEDICADO**

**à meus pais**

**e irmão**

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marco Túllio de Vilhena, pelo privilégio de compartilhar de seus conhecimentos.

A Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul - FAPERGS, pelo apoio financeiro.

A chefia, membros e amigos do Departamento de Engenharia Nuclear da UFRGS, pela amizade e bons conselhos.

## SUMÁRIO

	pag.
LISTA DE FIGURAS .....	III
LISTA DE TABELAS .....	IV
LISTA DE SÍMBOLOS .....	VIII
RESUMO .....	XII
ABSTRACT .....	XIII
1 INTRODUÇÃO .....	1
2 O MÉTODO LTP <sub>N</sub> PARA UM GRUPO DE ENERGIA .....	6
3 O MÉTODO LTP <sub>N</sub> PARA MULTIGRUPO .....	17
4 APLICAÇÕES PARA UM GRUPO DE ENERGIA .....	23
4.1 Domínio Semi-infinito .....	23
4.2 Meio Homogêneo e Domínio Finito .....	25
4.2.1 Espalhamento Isotrópico .....	26
4.2.2 Espalhamento Linearmente Anisotrópico .....	29
4.2.3 Meio Puramente Espalhador .....	31
4.3 Meio Heterogêneo e Domínio Finito .....	33
4.3.1 Espalhamento Linearmente Anisotrópico .....	33
4.3.2 Desvantagem Térmica .....	35
4.4 Espalhamento Totalmente Anisotrópico .....	38
5 APLICAÇÕES PARA MULTIGRUPO .....	40
5.1 Problema Homogêneo .....	40
5.2 Problema Heterogêneo .....	41
6 PROBLEMA INVERSO .....	47
6.1 Determinação do Fluxo Angular Incidente para Um Grupo de Energia .....	47
6.2 Determinação do Fluxo Angular Incidente para G Grupos de Energia.....	50
6.3 Determinação do Parâmetro de Espalhamento .....	53
6.4 Determinação da Espessura Crítica .....	55
7 CONCLUSÃO .....	57
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	60

APÊNDICE A - Inversão Numérica do Problema Transformado .	64
APÊNDICE B - O Algoritmo de Trzaska .....	66
B.1 - O Triângulo de Pascal Matricial .....	71

## LISTA DE FIGURAS

	pag.
5.1 - Parâmetros para o problema homogêneo. ....	40
5.2 - Resultados para o fluxo escalar dos grupos 1 e 2, aproximação $LTP_7$ , com $f(\mu)$ descrito pelo caso 3. ....	45
6.1 - Parâmetros físicos da placa homogênea. ....	49
6.2 - Parâmetros físicos da placa heterogênea. ....	52
B.1 - Forma matricial do Triângulo de Pascal. ....	74

## LISTA DE TABELAS

	pag.
4.1 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o albedo pelo método $LTP_N$ e resultados exatos no caso $Q=0$ e $f(\mu)=1$ . .....	24
4.2 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o albedo pelo método $LTP_N$ e resultados exatos no caso $Q=0$ e $f(\mu)=1$ . .....	25
4.3 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=20cm$ ) pelos métodos $LTP_N$ e $S_{48}$ . .....	27
4.4 - Erro percentual relativo do método $LTP_N$ para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=20cm$ ). .....	27
4.5 - Comparação numérica entre os valores obtidos para a corrente transmitida pelos métodos $LTP_N$ e $S_{48}$ . .....	28
4.6 - Erro percentual relativo do método $LTP_N$ para a corrente transmitida. .....	28
4.7 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_1$ e SGF $S_2$ . .....	30
4.8 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_2$ e SGF $S_4$ . .....	30
4.9 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_7$ e SGF $S_8$ . .....	30



4.10 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar mais profundo ( $x=15\text{cm}$ ) pelos métodos $LTP_N$ e $S_{16}$ . .....	32
4.11 - Erro percentual relativo do método $LTP_N$ para o fluxo escalar mais profundo ( $x=15\text{cm}$ ). .....	32
4.12 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_1$ e SGF $S_2$ . .....	34
4.13 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_3$ e SGF $S_4$ . .....	34
4.14 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos $LTP_7$ e SGF $S_8$ . .....	35
4.15 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fator desvantagem térmica pelos métodos $LTP_N$ e $S_{48}$ . .....	37
4.16 - Erro percentual relativo do método $LTP_N$ para o fator desvantagem térmica. .....	37
4.17 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=5\text{cm}$ ) e a corrente transmitida pelos métodos $LTP_N$ e $S_{48}$ . .....	39
4.18 - Erro percentual relativo do método $LTP_N$ para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=5\text{cm}$ ) e a corrente transmitida. .....	39
5.1 - Problema Homogêneo: Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio para dois grupos de energia pelos métodos $LTP_3$ e SGF $S_4$ . .....	41

5.2 - Secções de choque macroscópicas do problema heterogéneo. ....	41
5.3 - Resultados obtidos pelo método $LTP_N$ para o fluxo escalar do grupo 1, com $f(\mu)$ descrito no caso 1 e parâmetros dados como: conjunto 1 para o meio 1, conjunto 2 para o meio 2. ....	43
5.4 - Resultados obtidos pelo método $LTP_N$ para o fluxo escalar do grupo 1, com $f(\mu)$ descrito no caso 1 e parâmetros dados como: conjunto 2 para o meio 1, conjunto 1 para o meio 2. ....	43
5.5 - Resultados obtidos pelo método $LTP_N$ para o fluxo escalar do grupo 1, com $f(\mu)$ descrito no caso 2 e parâmetros dados como: conjunto 1 para o meio 1 e conjunto 2 para o meio 2. ....	44
5.6 - Resultados obtidos pelo método $LTP_N$ para o fluxo escalar do grupo 1, com $f(\mu)$ descrito no caso 2 e parâmetros dados como: conjunto 2 para o meio 1, conjunto 1 para o meio 2. ....	44
5.7 - Erro no fluxo escalar pela aproximação $LTP_7$ em relação à solução por autofunções singulares. ....	46
6.1 - Valores do fluxo angular incidente, pelo método $LTP_1$ .....	50
6.2 - Valores do fluxo angular incidente, pelo método $LTP_N$ - 3ª iteração. ....	50
6.3 - Valores do fluxo angular incidente rápido, pelo método $LTP_N$ . ....	53
6.4 - Valores do parâmetro $c$ , pelo método $LTP_N$ . ....	54

6.5 - Comparação entre os resultados obtidos pelo método $LTP_N$ e valores analíticos para a espessura crítica de uma placa homogênea. ....	56
A.1 - Comparação entre os resultados obtidos para o fluxo escalar médio utilizando inversão numérica e analítica da transformada de Laplace para uma placa homogênea. ....	65
A.2 - Comparação entre os resultados obtidos para o fluxo escalar médio utilizando inversão numérica e analítica da transformada de Laplace para uma placa heterogênea. ....	65

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A^*$	Albedo
$A_k$	Pesos da quadratura de Gauss
$A_N(s)$	Matriz gerada pelo método LTP <sub>N</sub> - um grupo
$A_N^{-1}(s)$	Inversa da matriz $A_N^{-1}(s)$
$A_{GN}(s)$	Matriz gerada pelo método LTP <sub>N</sub> - multigrupo
$A_{GN}^{-1}(s)$	Inversa da matriz $A_{GN}^{-1}(s)$
$A_g(s)$	Submatriz de $A_{GN}(s)$ para espalhamento no grupo g
$A_{k, m}$	Matriz coeficiente da expansão de $A_N(s)$ e $A_{GN}(s)$ em série de potências
$a_{k, m}$	Coeficiente da expansão de $d(s)$ em série de potências
$B_{g, g}$	Submatriz de $A_{GN}(s)$ para espalhamento do grupo g' para o grupo g
$C$	Matriz parcela de $A_N(s)$ e $A_{GN}(s)$ cujos elementos são coeficientes de s
$C_0$	Matriz parcela de $A_N(s)$ e $A_{GN}(s)$ cujos elementos são independentes de s
$c$	Número médio de nêutrons secundários emitidos por colisão
$D(s)$	Matriz adjunta de $A_N(s)$ e $A_{GN}(s)$
$D_k$	Matriz coeficiente da expansão de $D(s)$ em série de potências
$d(s)$	Polinômio característico de $A_N(s)$ e $A_{GN}(s)$

$f(\mu)$	Fluxo angular incidente prescrito em $x = 0$
$f_g(\mu)$	Fluxo angular incidente prescrito em $x = 0$ no grupo $g$
$g(\mu)$	Fluxo angular incidente prescrito em $x = R$
$g_g(\mu)$	Fluxo angular incidente prescrito em $x = R$ no grupo $g$
$I$	Matriz identidade
$i_g$	Número que indica a linha da matriz $P_k$ que corresponde ao fluxo escalar do grupo $g$
$J^+(x)$	Corrente na direção positiva
$\tilde{~}$	
$P_k$	Zeros da quadratura de Gauss
$P_n(\mu)$	Polinômio de Legendre de grau $n$
$P_k$	Matriz de coeficientes da expansão em frações parciais
$P_k(i)$	Linha $i$ da matriz $P_k$
$P_k(i_g)$	Linha $i_g$ da matriz $P_k$
$Q$	Fonte constante
$Q(x, \mu)$	Fonte dependente da posição e da direção
$Q(x)$	Vetor dos termos de fonte
$\tilde{~}$	
$q_k$	Inverso da derivada de $d(s)$ calculada em $s_k$
$R$	Espessura da placa (cm)
$s$	Parâmetro complexo da transformada de Laplace
$s_k$	Zeros do determinante das matrizes $A_N(s)$ e $A_{0N}(s)$
$v$	Vetor linha dos polinômios de Legendre para um grupo de energia
$\tilde{~}$	

$\vec{V}$	Vetor linha dos polinômios de Legendre para g
$\sim$	grupos de energia
x	Posição na placa (cm)

### Símbolos Gregos

$\delta$	Delta da Dirac
$\xi$	Fator de desvantagem térmica
$\mathcal{L}^{-1}$	Transformada inversa de Laplace
$\mu$	Cosseno diretor do ângulo de espalhamento
$\sigma_{g'g}$	Secção de choque de transferência do grupo g' para o grupo g (cm <sup>-1</sup> )
$\sigma(x, \mu, \mu')$	Secção de choque diferencial de espalhamento
$\sigma_{s0}$	Componente de ordem zero da secção de choque diferencial de espalhamento (cm <sup>-1</sup> )
$\sigma_{s1}$	Componente de ordem um da secção de choque diferencial de espalhamento (cm <sup>-1</sup> )
$\sigma_{sl}$	l-ésima componente da secção de choque diferencial de espalhamento (cm <sup>-1</sup> )
$\sigma_t$	Secção de choque total (cm <sup>-1</sup> )
$\sigma_{tg}$	Secção de choque total do grupo g (cm <sup>-1</sup> )
$\Phi(x)$	Fluxo escalar (#/cm <sup>2</sup> -s)
$\Phi_g(x)$	Fluxo escalar no grupo g (#/cm <sup>2</sup> -s)
$\vec{\phi}(s)$	Vetor componente espacial transformada da expansão do fluxo angular

$\vec{\phi}(x)$	Vetor componente espacial da expansão do fluxo angular
$\vec{\phi}(0)$	Vetor componente espacial da expansão do fluxo angular na posição $x = 0$
$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular na placa
$\psi_g(x, \mu)$	Fluxo angular no grupo g
$\psi_h(x, \mu)$	Solução homogênea
$\psi_p(x, \mu)$	Solução particular
$\chi(x, \mu, \mu')$	Secção de choque diferencial de transferência
*	Convolução

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma solução analítica para a aproximação  $P_N$  da equação de transporte linear unidimensional em geometria plana, considerando modelo de multigrupo e espalhamento anisotrópico. A idéia principal desse método consiste em aplicar a transformada de Laplace ao sistema de equações diferenciais ordinárias  $P_N$ . Este procedimento gera um sistema linear para o fluxo angular transformado. Resolvendo esse sistema pelo algoritmo de Trzaska, o fluxo angular é obtido em termos do fluxo angular na fronteira  $x = 0$  pela técnica de inversão de Heaviside. Os resultados obtidos por este método para problemas de placa plana, homogênea e heterogênea, para um e dois grupos de energia, em domínio finito e semi-infinito, bem como os problemas inversos: determinação do parâmetro  $c$ , da espessura crítica de uma placa e do fluxo angular incidente na fronteira de uma placa plana, para um e dois grupos de energia, foram comparados com os resultados disponíveis na literatura e apresentaram boa concordância.



## ABSTRACT

In this work is presented an approximated analytical solution for the one-dimensional slab-geometry linear transport equation by considering multigroup model and anisotropic scattering. The main idea of this approach is based on the application of the Laplace transform into the set of the  $P_N$  ordinary differential equations. This procedure leads to a linear system to be solved for the transformed angular flux by the Trzaska's algorithm. Once this system is solved, the angular flux is then obtained as a function of the angular flux at the boundary  $x = 0$  by using the Heaviside's expansion technique. The results achieved by this method for the homogeneous and heterogeneous slab-geometry problems in a finite and semi-infinite domain, considering the multigroup model and anisotropic scattering as well for the inverse problems: determination of the  $c$  parameter, critical thickness of a slab and the incoming angular flux at the boundary, were compared with the ones available in the literature showing a very good agreement.

## 1. INTRODUÇÃO

A equação que descreve o transporte de nêutrons e fótons através de um meio material, é uma versão linearizada da equação integro-diferencial não-linear, originalmente desenvolvida por Boltzmann, em 1872, para a teoria cinética dos gases e tem aplicação, tanto em problemas de cálculo de reatores nucleares e blindagem de radiação, como na análise da transferência de radiação em atmosferas estelares e planetárias [14,8].

Soluções exatas da equação de transporte (forma fechada) podem ser obtidas, para problemas unidimensionais, pelas técnicas de expansão em autofunções singulares (método de Case) e aplicação da transformada de Fourier [7,8]. No entanto, a solução da equação de transporte associada a problemas práticos é obtida com a utilização de métodos numéricos. Uma grande variedade de métodos numéricos tem sido desenvolvida nos últimos anos, sendo tais métodos baseados em algumas técnicas básicas de aproximação, como diferenças finitas para operadores diferenciais, fórmulas de quadratura para operadores integrais e métodos de expansão. Entre os diversos métodos, os mais usados são: método de expansão em harmônicos esféricos (método  $P_N$  ou  $DP_N$ ); ordenadas discretas (método  $S_N$ ); método dos elementos finitos; método das características; métodos de transporte integral (probabilidade de colisão, transformada integral); métodos de integral de superfície ou de interface (métodos  $C_N$  e  $F_N$ ); e métodos nodais de malha grossa (SGF  $S_N$ ) [30,25,11].

O método dos harmônicos esféricos pode ser considerado clássico na resolução da equação de transporte linear e consiste na separação da dependência angular e espacial do fluxo, o qual é expandido em termos de um conjunto completo de funções que definem a direção do nêutron ou fóton, resultando num conjunto infinito de equações diferenciais ordinárias. A solução aproximada é então obtida considerando a expansão em um subconjunto finito de harmônicos esféricos, que resulta num conjunto finito de equações diferenciais ordinárias, o qual é resolvido por técnicas de diferenças finitas ou elementos finitos. Em geometria plana, o método dos harmônicos esféricos recai no método de expansão em polinômios de Legendre, método  $P_N$  [14,4].

Existem variações do método  $P_N$ , como o  $P_N$  teórico, cuja principal característica é assegurar que os autovalores assintóticos sejam iguais aos obtidos pelo método de expansão em autofunções singulares [17,18] e o duplo  $P_N$ , cuja idéia principal é separar as expansões de Legendre em semi-intervalos de  $\mu$  [14]. Os trabalhos mais recentes relativos ao método  $P_N$  tem sido na redefinição do truncamento da expansão [2] e das condições de contorno [16,23].

Observando que nestes últimos anos tem-se buscado métodos de solução da equação de transporte que apresentem características de formulação simples, eficiência computacional e aplicabilidade a uma classe abrangente de problemas (uma, duas e três dimensões, geometria irregular, anisotropia e multigrupo), focaliza-se então o objetivo deste trabalho nessa direção. Para tal, cabe observar que, tanto a aproximação  $P_N$  como as aproximações  $S_N$  [14] e  $W_N$  [31] da equação de transporte

linear unidimensional, podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\frac{d\tilde{\phi}(x)}{dx} + A_N \tilde{\phi}(x) = \tilde{Q}(x), \quad (1.1)$$

onde  $\tilde{\phi}(x)$ ,  $\tilde{Q}(x)$  e  $A_N$  denotam respectivamente o vetor componente espacial do fluxo angular, o termo de fonte e a matriz associada à aproximação. A solução do problema (1.1) é expressa como:

$$\tilde{\phi}(x) = e^{-A_N x} \tilde{\phi}(0) + e^{-A_N x} * \tilde{Q}(x), \quad (1.2)$$

onde o asterisco significa convolução. Diversos métodos tem sido propostos para calcular a exponencial de uma matriz [27]. Neste trabalho, é apresentada uma formulação analítica para a exponencial da matriz  $A_N$ , associada à aproximação  $P_N$ , utilizando a transformada de Laplace e o algoritmo de Trzaska [38]. A idéia principal dessa formulação consiste em aplicar a transformada de Laplace ao sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes da aproximação  $P_N$  na equação de transporte linear unidimensional gerando um sistema linear para a componente espacial do fluxo angular transformado, que é resolvido pelo algoritmo de Trzaska [38]. O fluxo angular é então obtido em termos do fluxo angular incidente em  $x = 0$ , pela técnica de inversão por expansão de Heaviside. Como em problemas de contorno, apenas a primeira metade das componentes do vetor  $\tilde{\phi}(0)$  é conhecida, é necessária a aplicação da condição de contorno

na fronteira  $x = R$  em (1.2), para que as componentes desconhecidas de  $\phi(0)$  possam ser obtidas, a partir do sistema linear resultante. Desse modo, a solução do problema (1.1) fica perfeitamente determinada, analiticamente, pela equação (1.2). É oportuno ressaltar que este método também pode ser aplicado no cálculo da exponencial das matrizes associadas às aproximações  $S_N$  [39] e  $W_N$  [5] e, em consequência, uma solução analítica também é encontrada para essas aproximações.

A formulação analítica proposta neste trabalho, para a exponencial da matriz  $A_N$ , associada à aproximação  $P_N$  da equação de transporte de linear unidimensional, em geometria plana com anisotropia de grau arbitrário é desenvolvida para um grupo de energia no capítulo 2 e, para multigrupo, no capítulo 3.

A seguir, no capítulo 4, são apresentados os resultados numéricos obtidos por essa formulação para problemas homogêneos e não-homogêneos em placa plana, homogênea e heterogênea, finita e semi-infinita, considerando modelo de um grupo para a energia e espalhamento isotrópico e anisotrópico. No capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos obtidos para problemas homogêneos em placa plana finita, homogênea e heterogênea, considerando espalhamento isotrópico e modelo de multigrupo (dois grupos) para a energia.

No capítulo 6, são apresentados os resultados numéricos obtidos pela formulação  $LTP_N$  para os problemas inversos de determinação do fluxo angular incidente na fronteira de uma placa plana finita, homogênea e heterogênea, considerando modelo de um grupo e multigrupo (dois grupos) para a energia, de obtenção dos parâmetros físicos do meio para uma placa plana semi-infinita, homogênea, considerando espalhamento isotrópico e

um grupo de energia e finalmente o problema de determinação da espessura crítica de uma placa homogênea considerando espalhamento isotrópico e um grupo de energia.

Todos os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos com aritmética de dupla precisão num computador PC-386 com memória convencional.

Cumpramos finalmente observar que a transformada de Laplace tem sido aplicada, na solução da equação de transporte, nas variáveis energia [3], tempo [9,21,22] e recentemente na variável espacial para aproximação  $S_N$  [39]. Como não se tem conhecimento de sua aplicação para a aproximação  $P_N$ , este procedimento será denotado como método  $LTP_N$ .

## 2. O MÉTODO LTP<sub>N</sub> PARA UM GRUPO DE ENERGIA

Neste capítulo é apresentado o método LTP<sub>N</sub> para a solução da aproximação P<sub>N</sub> da equação de transporte considerando problemas em estado estacionário, geometria plana e espalhamento anisotrópico de ordem arbitrária para um grupo de energia. Para tal, é considerado o seguinte problema de transporte linear num domínio finito [14]:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \sigma_s(x, \mu, \mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq R, \quad (2.1)$$

com a secção de choque diferencial de espalhamento descrita como, [8],

$$\sigma_s(x, \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{L \leq N} \frac{2\ell + 1}{2} \sigma_{s\ell} P_\ell(\mu) P_\ell(\mu'), \quad (2.1a)$$

sujeito às condições de contorno,

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.1b)$$

$$\psi(R, \mu) = g(\mu), \quad \mu < 0, \quad (2.1c)$$

onde  $f(\mu)$  e  $g(\mu)$  são os fluxos incidentes prescritos nas fronteiras do domínio;  $\psi(x, \mu)$  é o fluxo angular na direção  $\mu$ ;  $\sigma_t$  é a secção de choque total;  $\sigma_{s, \ell}$  é a  $\ell$ -ésima componente da secção de choque diferencial de espalhamento.

O problema de transporte linear em uma placa heterogênea é considerado como sendo um problema com placas homogêneas justapostas. Nesse caso, deve-se acrescentar às condições de contorno (2.1b) e (2.1c) a condição de continuidade do fluxo angular na interface,

$$\psi^i(x_i, \mu) = \psi^{i+1}(x_i, \mu) \quad , \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad \text{e} \quad \mu \neq 0. \quad (2.1d)$$

Para a aplicação do método  $P_N$  [14], o fluxo angular é aproximado como

$$\psi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu) \quad , \quad N \text{ ímpar} . \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1), aplicando na equação resultante o operador

$$\int_{-1}^1 ( ) P_{n'}(\mu) d\mu \quad , \quad \text{com} \quad n' = 0, \dots, N, \quad (2.3)$$

e utilizando a fórmula de recorrência, bem como a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas na variável  $x$ ,



$$(n + 1) \phi'_{n+1}(x) + (n) \phi'_{n+1}(x) +$$

$$(2n + 1) (\sigma_l - \sigma_{sl}) \phi_n(x) = 0, \quad (2.4)$$

com  $n = 0, 1, \dots, N$ , e onde  $\phi'_n(x)$  representa a derivada de  $\phi_n(x)$  na variável  $x$ , sendo  $\phi(x)_{N+1} = 0$  na aproximação  $P_N$ .

Aplicando a transformada de Laplace em (2.4), resulta o seguinte sistema de equações lineares para a componente espacial da expansão do fluxo angular transformado:

$$(n + 1) [s \bar{\phi}_{n+1}(s) - \phi_{n+1}(0)] + (n) [s \bar{\phi}_{n-1}(s) -$$

$$\phi_{n-1}(0)] + (2n + 1) [(\sigma_l - \sigma_{sl}) \bar{\phi}_n(s)] = 0, \quad (2.5)$$

com  $n = 0, 1, \dots, N$ , que pode ser reescrito na seguinte forma matricial:

$$A_N(s) \bar{\phi}(s) = \phi(0) \quad (2.6)$$

onde

$$\bar{\phi}(s) = \text{col} [ \bar{\phi}_0(s) \dots \bar{\phi}_i(s) \dots \bar{\phi}_N(s) ], \quad (2.6a)$$

$$\phi(0) = \text{col} [ \phi_0(0) \dots \phi_i(0) \dots \phi_N(0) ], \quad (2.6b)$$

e  $\bar{\phi}(s)$  denota a transformada de Laplace do vetor  $\phi(x)$  na variável  $x$ , sendo a matriz  $A_N(s)$  expressa como:

$$A_N(s) = \begin{pmatrix} s & a_{1,2} & \dots & 0 & a_{1,j} & \dots & 0 & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & s & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & s & a_{i,j} & \dots & 0 & a_{i,N+1} \\ a_{i+1,1} & 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & s & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & s & a_{N,N+1} \\ a_{N+1,1} & 0 & \dots & a_{N+1,j-1} & 0 & \dots & a_{N+1,N} & s \end{pmatrix} \quad (2.6c)$$

Os elementos  $a_{ij}$  da matriz  $A_N(s)$  para  $j < i$ ,  $i$  par e  $j$  ímpar, são dados como:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2j-1}{j} (\sigma_t - \sigma_a^{j-1}) ; j = i-1 \\ \frac{2j-1}{j} (\sigma_t - \sigma_a^{j-1}) \prod_{k=0}^{(i-j-3)/2} - \frac{(i-2k-2)}{(i-2k-1)} ; j < i-1 \end{cases} \quad (2.6d)$$

Por outro lado, para  $j > i$ ,  $i$  ímpar e  $j$  par, têm a seguinte expressão:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_t - \sigma_a^{j-1}) ; j = i+1 \\ \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_t - \sigma_a^{j-1}) \prod_{k=0}^{(j-i-3)/2} - \frac{(i+2k+1)}{(i+2k)} ; j > i+1 \end{cases} \quad (2.6e)$$

e para  $i = j$ ,  $a_{ij} = s$ . Todos os elementos correspondentes à  $j < i$  ( $i$  ímpar,  $j$  par) e  $j > i$  ( $i$  par,  $j$  ímpar) são nulos.

A solução do problema transformado, descrito pela equação (2.6), é dada por

$$\bar{\phi}_{\sim}(s) = A_N^{-1}(s) \phi_{\sim}(0). \quad (2.7)$$

A componente espacial da expansão fluxo angular pode então ser obtido aplicando a transformada inversa de Laplace à solução do problema transformado descrito pela equação (2.7), ou seja,

$$\phi_{\sim}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{A_N^{-1}(s) \phi_{\sim}(0)\}, \quad (2.8)$$

uma vez conhecida a inversa da matriz  $A_N(s)$ , isto é,  $A_N^{-1}(s)$ , a qual não pode ser obtida numericamente face à existência do parâmetro  $s$  na diagonal principal. Duas opções estão disponíveis neste estágio do procedimento:

1º- Realizar a inversão da transformada de Laplace numericamente. O método de inversão por quadratura de Gauss foi o considerado nesse trabalho já que Davies [10] mostrou ser eficiente para a inversão de funções racionais. Detalhes do método são apresentados no Apêndice A.

2º- Realizar a inversão da transformada de Laplace analiticamente pelo algoritmo de Trzaska [38] descrito no Apêndice B.

Então, para atingir o objetivo proposto neste trabalho, que consiste na obtenção de uma solução analítica para a aproximação  $P_N$ , o algoritmo de Trzaska foi aplicado ao sistema (2.6), resultando:

$$\bar{\phi}(s) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{P_k}{(s - s_k)} \phi(0) \quad (2.9)$$

onde  $P_k$  são as matrizes coeficientes da decomposição em frações parciais do segundo membro da equação (2.7) e os parâmetros  $s_k$  são os zeros do polinômio característico da matriz  $A_N(s)$ .

Para determinar as matrizes coeficientes  $P_k$  a matriz  $A(s)$  é decomposta como:

$$A_N(s) = sI - C \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} c_{ij} = 0, & i = j \\ c_{ij} = -a_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

e as etapas de 1 a 5 devem ser seguidas.

1. Considerando  $A_{0,0} = I$  calcula-se as matrizes  $A_{k,m}$  usando

$$A_{k,m} = A_{k-1,m}(-C) + A_{k-1,m-1}I \quad (2.11)$$

com  $k = 1, 2, \dots, N+1$  e  $m < k$ .

2. Considerando  $a_{0,0} = 1$  calcula-se os coeficientes  $a_{k,m}$  pela fórmula

$$a_{k,m} = -\frac{1}{k} \text{traço}(A_{k,m} + \sum_{\substack{h=1, j \leq h \\ q=1, r \leq q}}^{k-1} a_{h,j} A_{q,r}) \quad (2.12)$$

com  $k = 1, 2, \dots, N+1$ ,  $h + q = k$  e  $j + r = m < k$ . Quando  $k = N+1$ , os  $a_{k,m}$  são os coeficientes do polinômio característico de  $A_N(s)$ .

3. Calcula-se os coeficientes  $q_k$  pela equação

$$q_k = - \left[ \frac{d}{ds} a_{N+1}(s_k) \right]^{-1} \quad (2.13)$$

onde  $a_{N+1}(s_k)$  é o polinômio característico de  $A_N(s)$  calculado em  $s_k$ .

4. Com os coeficientes determinados nos passos 1 e 2, calcula-se as matrizes  $D_k$  pela expressão

$$D_k = A_{N+1,k} + a_{N+1,k} I + \sum_{\substack{h=1, j \leq h \\ q=1, r \leq q}}^N a_{h,j} A_{q,r} \quad (2.14)$$

e  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h + q = N$  e  $j + r = k < N$ .

5. Uma vez determinadas as matrizes  $D_k$ , as raízes  $s_k$  e os coeficientes  $q_k$ , então as matrizes coeficientes  $P_k$  são dadas por

$$P_k = q_k \sum_{j=0}^N s_k^j D_j \quad (2.15)$$

Como resultado dessa decomposição, o fluxo angular é facilmente obtido pela inversão da componente espacial do fluxo angular transformado dada pela equação (2.9):

$$\psi(x, \mu) = \underset{\sim}{v} \sum_{k=1}^{N+1} P_k \exp [s_k x] \underset{\sim}{\phi}(0) \quad (2.16)$$

Onde o vetor  $\underset{\sim}{v}$  com dimensão  $(N + 1)$  é dado como:

$$\underset{\sim}{v} = \left[ \frac{1}{2} P_0(\mu) \dots \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \dots \frac{2N+1}{2} P_N(\mu) \right] . \quad (2.16a)$$

As componentes do vetor  $\phi(0)$  são obtidas pela resolução do sistema linear gerado pela multiplicação das condições de contorno (2.1b) e (2.1c) para problemas homogêneos e, as mesmas condições de contorno acrescidas da condição de interface (2.1d) para problemas heterogêneos, por uma função peso apropriada, seguida pela integração na variável  $\mu$  nos intervalos  $[0,1]$  e  $[-1,0]$ . Nesse trabalho foram consideradas como função peso os polinômios de Legendre de ordem ímpar, condição de Marshak e a função generalizada delta de Dirac, condição de Mark [14].

As condições de contorno e interface resultantes da condição de Marshak são respectivamente descritas como:

$$\int_0^1 P_n(\mu) \psi(0,\mu) d\mu = \int_0^1 P_n(\mu) f(\mu) d\mu, \quad (2.17a)$$

$$\int_{-1}^0 P_n(\mu) \psi(R,\mu) d\mu = \int_{-1}^0 P_n(\mu) g(\mu) d\mu, \quad (2.17b)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) \psi^i(x_i,\mu) d\mu = \int_{-1}^1 P_n(\mu) \psi^{i+1}(x_i,\mu) d\mu, \quad (2.17c)$$

com  $n = 1, 3, \dots, N$ , enquanto que para a condição de Mark são respectivamente dadas por:

$$\psi(0,\mu_n) = f(\mu_n), \quad \mu > 0, \quad (2.18a)$$

$$\psi(R,\mu_n) = g(\mu_n), \quad \mu < 0, \quad (2.18b)$$

$$\psi^i(x_i,\mu_n) = \psi^{i+1}(x_i,\mu_n), \quad -1 \leq \mu \leq 1 \text{ e } \mu \neq 0, \quad (2.18c)$$

com  $n = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ . Outras expressões para as funções peso, como a função de Chandrasekhar [8], não foram consideradas, visto que o objetivo desse trabalho consiste na determinação de uma expressão analítica para a solução da aproximação  $P_N$ , a qual, uma vez obtida, pode ser resolvida para qualquer expressão da função peso, bastando para tal, substituir  $P_N(\mu)$  por esta expressão nas equações (2.17).

Finalmente, uma vez determinado o vetor  $\phi(0)$ , a solução analítica para o fluxo angular para a aproximação  $P_N$  do problema (2.1) fica completamente determinada pela equação (2.16).

Com o objetivo de exemplificar este procedimento, uma solução detalhada do problema (2.1) é apresentada, considerando  $N = 1$  e espalhamento linearmente anisotrópico.

Neste caso, definindo  $c_0 = \sigma_{s0}/\sigma_t$  e  $c_1 = \sigma_{s1}/\sigma_t$ , a equação (2.6) é escrita como

$$\begin{bmatrix} s & 3\sigma_t(1-c_1) \\ \sigma_t(1-c_0) & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_0(s) \\ \bar{\phi}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0(0) \\ \phi_1(0) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Resolvendo o sistema (2.19) obtém-se:

$$\bar{\phi}_0(s) = \frac{s}{\Delta} \phi_0(0) - \frac{3\sigma_t(1-c_0)}{\Delta} \phi_1(0) \quad (2.20)$$

$$\bar{\phi}_1(s) = -\frac{\sigma_t(1-c_0)}{\Delta} \phi_0(0) + \frac{s}{\Delta} \phi_1(0) \quad (2.21)$$

onde

$$\Delta = s^2 - 3 \sigma_t^2 (1-c_0) (1-c_1) \quad (2.22)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na componente espacial do fluxo angular transformado, descrita pelas equações (2.20) e (2.21), resulta

$$\begin{aligned} \phi_0(x) = & \phi_0(0) \cosh(\delta x) - \phi_1(0) 3 \sigma_t (1-c_1) \\ & \times \frac{\sinh(\delta x)}{\delta}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = & - \phi_0(0) \sigma_t (1-c_0) \frac{\sinh(\delta x)}{\delta} \\ & + \phi_1(0) \cosh(\delta x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, considerando as equações (2.23) e 2.24), o fluxo angular para a aproximação  $P_1$  é dado por

$$\psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \phi_0(x) + \frac{3}{2} \mu \phi_1(x). \quad (2.25)$$

Aplicando as condições de contorno (2.17) na equação (2.25) substituindo a função peso  $P_n(\mu)$  por  $\mu^n$  ( $n = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ ) e resolvendo o sistema linear resultante, obtém-se as seguintes expressões para as componentes de  $\phi(0)$ :



$$\phi_0(0) = \frac{1}{D} \int_{-1}^0 g(\mu) d\mu + \frac{A}{D} \int_0^1 f(\mu) d\mu, \quad (2.26)$$

$$\phi_1(0) = \frac{2/3}{D} \int_{-1}^0 g(\mu) d\mu + \frac{B}{D} \int_0^1 f(\mu) d\mu, \quad (2.27)$$

com

$$A = 2 \sigma_t (1-c_1) \frac{\sinh(\delta a)}{\delta} + \cosh(\delta a), \quad (2.28)$$

$$B = \sigma_t (1-c_0) \frac{\sinh(\delta a)}{\delta} + \frac{2}{3} \cosh(\delta a), \quad (2.29)$$

$$D = \left[ (1-c_1) + \frac{3}{4} (1-c_0) \right] \sigma_t \frac{\sinh(\delta a)}{\delta} + 2 \cosh(\delta a), \quad (2.30)$$

e  $\delta$  sendo as raízes positivas da equação algébrica (2.22).

### 3. O MÉTODO LTP<sub>N</sub> PARA MULTIGRUPO

Neste capítulo é apresentado o método LTP<sub>N</sub> para a solução da aproximação P<sub>N</sub> da equação de transporte, considerando problemas em estado estacionário, geometria plana com espalhamento anisotrópico de ordem arbitrária e modelo de multigrupo para a energia. Para tal, é considerado o seguinte problema de de transporte linear [14]:

$$\mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_{tg} \psi_g(x, \mu) = \int_{-1}^1 \chi(x, \mu, \mu') \psi_g(x, \mu') d\mu' , \quad (3.1)$$

sendo  $0 \leq x \leq R$ ,  $g = 1, 2, \dots, G$ , e a secção de choque diferencial de transferência descrita como, [8],

$$\chi(x, \mu_0) = \sum_{\ell=0}^L \frac{2\ell + 1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'g}^{\ell} P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') , \quad (3.1a)$$

com as condições de contorno

$$\psi_g(0, \mu) = f_g(\mu) , \quad \mu > 0 , \quad (3.1b)$$

$$\psi_g(R, \mu) = g_g(\mu) , \quad \mu < 0 , \quad (3.1c)$$

onde  $f_g(\mu)$  e  $g_g(\mu)$  são os fluxos incidentes do grupo  $g$  nas fronteiras;  $\psi_g(x, \mu)$  é o fluxo angular do grupo  $g$  com direção  $\mu$ ;  $\sigma_{tg}$  é a secção de choque total para o grupo  $g$  e  $\sigma_{g'g}^{\ell}$  é a componente de  $\ell$ -ésima ordem da secção de choque diferencial de transferência do grupo  $g$ .

Em problemas com meios heterogêneos deve ser também considerada a condição de interface:

$$\psi_g^i(x_i, \mu) = \psi_g^{i+1}(x_i, \mu) \quad , \quad -1 \leq \mu \leq 1 \text{ e } \mu \neq 0. \quad (3.1d)$$

Aplicando ao problema (3.1) procedimento análogo ao descrito no capítulo 2, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} (n+1) [s \bar{\varphi}_{n+1}^{-g}(s) - \varphi_{n+1}^g(0)] + n [s \bar{\varphi}_{n-1}^{-g}(s) - \\ \varphi_{n-1}^g(0)] + (2n+1) [(\sigma_{tg} - \sigma_{gg}^{\ell}) \\ \bar{\varphi}_n^{-g}(s) - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \sigma_{g'g}^{\ell} \bar{\varphi}_n^{-g'}(s)] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.2)$$

com  $n = 0, 1, \dots, N$  e  $g = 1, 2, \dots, G$ ; aqui  $\varphi_{\ell}^g$  denota os momentos do fluxo angular para o grupo  $g$  e barra sua transformada de Laplace em relação à variável  $x$ .

O sistema linear (3.2) pode ser também reescrito na seguinte forma matricial:

$$A_{GN}(s) \bar{\tilde{\phi}}(s) = \tilde{\phi}(0) \quad , \quad (3.3)$$

ou

$$\begin{bmatrix} A^1(s) & \dots & B^{g'g} & \dots & B^{g'1} \\ & \ddots & & & \\ B^{1g} & & A^g(s) & & B^{g'g} \\ & & & \ddots & \\ B^{1a} & & B^{g'a} & & A^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}^1(s) \\ \vdots \\ \bar{\phi}^g(s) \\ \vdots \\ \bar{\phi}^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1(0) \\ \vdots \\ \phi^g(0) \\ \vdots \\ \phi^a(0) \end{bmatrix} \quad (3.3a)$$

com os vetores  $\bar{\phi}^g(s)$  e  $\phi^g(0)$ , para  $g = 1, \dots, G$ , são definidos respectivamente como:

$$\bar{\phi}^g(s) = \text{col} \left[ \bar{\varphi}_0^g(s) \dots \bar{\varphi}_l^g(s) \dots \bar{\varphi}_N^g(s) \right], \quad (3.3b)$$

$$\phi^g(0) = \text{col} \left[ \varphi_0^g(0) \dots \varphi_l^g(0) \dots \varphi_N^g(0) \right], \quad (3.3c)$$

e  $A_g(s)$  e  $B_{g'g}$  são matrizes de dimensões  $(N+1)$ . Os elementos  $a_{ij}^g$  de  $A_g(s)$ , para  $j < i$ ,  $i$  par e  $j$  ímpar, são definidos como:

$$a_{ij}^g = \begin{cases} \frac{2j-1}{j} (\sigma_{lg} - \sigma_{gg}^{j-1}) ; j = i-1 \\ \frac{2j-1}{j} (\sigma_{lg} - \sigma_{gg}^{j-1}) \prod_{k=0}^{(i-j-3)/2} - \frac{(i-2k-2)}{(i-2k-1)} ; j < i-1 \end{cases} \quad (3.3d)$$

enquanto que, para  $j > i$ ,  $i$  ímpar e  $j$  par, são dados por:

$$a_{ij}^g = \begin{cases} \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_{lg} - \sigma_{gg}^{j-1}) ; j = i+1 \\ \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_{lg} - \sigma_{gg}^{j-1}) \prod_{k=0}^{(j-i-3)/2} - \frac{(i+2k+1)}{(i+2k)} ; j > i+1 \end{cases} \quad (3.3e)$$

e para  $i = j$ ,  $a_{ij} = s$ . Todos os elementos correspondentes a  $j < i$  ( $i$  ímpar,  $j$  par) e  $j > i$  ( $i$  par,  $j$  ímpar) são nulos. As matrizes  $B_{g',g}$  podem ser construídas a partir das matrizes  $A_g(s)$  fazendo  $\sigma_{lg} = 0$  e substituindo  $\sigma_{gg}^{j-1}$  por  $\sigma_{g',g}^{j-1}$  ( $g' = 1, \dots, G; g' \neq g$ ) nas equações (3.2d) e (3.2e). Então, os elementos de  $B_{g',g}$  para  $j < i$ ,  $i$  par e  $j$  ímpar, são definidos como:

$$b_{ij}^{g',g} = \begin{cases} \frac{2j-1}{j} (-\sigma_{g',g}^{j-1}) ; j = i-1 \\ \frac{2j-1}{j} (-\sigma_{g',g}^{j-1}) \prod_{k=0}^{(i-j-3)/2} - \frac{(i-2k-2)}{(i-2k-1)} ; j < i-1 \end{cases} \quad (3.3f)$$

enquanto que para  $j > i$ ,  $i$  ímpar e  $j$  par, são dados por:

$$b_{ij}^{g',g} = \begin{cases} \frac{2j-1}{j-1} (-\sigma_{g',g}^{j-1}) ; j = i+1 \\ \frac{2j-1}{j-1} (-\sigma_{g',g}^{j-1}) \prod_{k=0}^{(j-i-3)/2} - \frac{(i+2k+1)}{(i+2k)} ; j > i+1 \end{cases} \quad (3.3g)$$

e para  $i = j$ ,  $b_{ij}^{g',g} = 0$ . Todos os elementos correspondentes a  $j < i$  ( $i$  ímpar,  $j$  par) e  $j > i$  ( $i$  par,  $j$  ímpar) são também nulos.

Assim, o fluxo angular é obtido resolvendo a equação (3.3) para a componente espacial do fluxo angular transformado usando o procedimento proposto no capítulo 2, para problemas com um grupo de energia.

Do mesmo modo que no capítulo 2, a componente espacial do fluxo angular transformado, descrita pela equação (3.3), é decomposta como:

$$\bar{\phi}_{\sim}(s) = \sum_{k=1}^{GN} \frac{P_k}{(s - s_k)} \phi_{\sim}(0) \quad (3.4)$$

onde  $GN = G \times (N + 1)$  é a dimensão da matriz  $A_{GN}$ ,  $P_k$  são as matrizes coeficientes da decomposição em frações parciais e os parâmetros  $s_k$  são os zeros do polinômio característico de  $A_{GN}(s)$ .

Fazendo agora a inversão de  $\bar{\phi}_{\sim}(s)$ , descrita pela equação (3.3), resulta a seguinte expressão para o fluxo angular no grupo  $g$ :

$$\psi_g(x, \mu) = \underset{\sim}{V} \sum_{k=1}^{GN} P_k \exp [s_k x] \phi_{\sim}(0), \quad g = 1, \dots, G, \quad (3.5)$$

onde o vetor  $\underset{\sim}{V}$  com dimensão  $G$  tem o vetor  $\underset{\sim}{v}$  com dimensão  $N+1$  como a  $g$ 'ésima componente e o vetor nulo com as mesmas dimensões nas demais componentes. O vetor  $\underset{\sim}{v}$  é dado como

$$\underset{\sim}{v} = \left[ \frac{1}{2} P_0(\mu) \dots \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(\mu) \dots \frac{2N+1}{2} P_N(\mu) \right]. \quad (3.5a)$$

De maneira idêntica ao que foi descrito no capítulo 2, para a determinação de  $\phi_{\sim}(0)$  são aplicadas as condições de contorno descritas pelas equações (3.1b) e (3.1c) e, para problemas em meio heterogêneo, as condições de continuidade do fluxo angular nas interfaces (3.1d), multiplicados pela função peso e integrados na variável  $\mu$ . Este procedimento gera um sistema

linear que permite calcular  $\phi(0)$ , e assim sendo, a solução analítica para o fluxo angular para a aproximação  $P_N$  da equação (3.1) fica completamente determinada pela equação (3.5).

#### 4. APLICAÇÕES PARA UM GRUPO DE ENERGIA

Neste capítulo a formulação LTP<sub>N</sub> [40,34] para um grupo de energia, apresentada no capítulo 2, é aplicada a problemas de transporte de nêutrons e fótons, considerando geometria plana, domínio finito e semi-infinito, meio homogêneo e heterogêneo com espalhamento isotrópico e anisotrópico.

##### 4.1 Domínio Semi-infinito

Este é um problema de transporte de nêutrons num domínio semi-infinito com espalhamento isotrópico e fonte constante [32]:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \\ \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + Q, \quad 0 \leq x < \infty, \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (4.1a)$$

$$\psi(x, \mu) = \frac{Q}{1 - c}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.1b)$$

onde  $f(\mu)$  é o fluxo angular incidente em  $x = 0$ ,  $Q$  é o termo de fonte e  $c = \sigma_{s0}/\sigma_t$ ;



Sua solução é dada por

$$\psi(x, \mu) = \psi_h(x, \mu) + \psi_p(x, \mu), \quad (4.2)$$

onde  $\psi_h$  é a solução homogênea dada pela equação (4.1) e  $\psi_p$  é a solução particular [28] dada por:

$$\psi_p(x, \mu) = \frac{Q}{1 - c}. \quad (4.3)$$

Os resultados numéricos obtidos por este método, para o albedo definido como:

$$A^* = 2 \int_0^1 \mu \psi(0, -\mu) d\mu, \quad (4.4)$$

considerando fluxo angular constante na fronteira,  $f(\mu) = 1$ , e ausência de fonte,  $Q = 0$ , são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o albedo pelo método  $LTP_N$  e valores exatos:  $Q=0$  e  $f(\mu)=1$ .

c	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	EXATO
.1	-0.0455	0.0042	0.0137	0.0171	0.0187	0.0217
.2	-0.0161	0.0304	0.0390	0.0421	0.0436	0.0463
.3	0.0172	0.0602	0.0681	0.0708	0.0721	0.0745
.4	0.0557	0.0949	0.1018	0.1042	0.1053	0.1073
.5	0.1010	0.1360	0.1419	0.1439	0.1449	0.1465
.6	0.1559	0.1861	0.1909	0.1926	0.1934	0.1947
.7	0.2251	0.2499	0.2537	0.2550	0.2555	0.2566
.8	0.3189	0.3374	0.3400	0.3408	0.3412	0.3419
.9	0.4650	0.4757	0.4771	0.4775	0.4777	0.4780

Por outro lado, na tabela 4.2, são apresentados os resultados obtidos considerando vácuo na fronteira,  $f(\mu) = 0$ , e a presença de fonte constante,  $Q = 1$ .

Tabela 4.2 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o albedo pelo método  $LTP_N$  e valores exatos:  $Q=1$  e  $f(\mu)=0$ .

c	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	EXATO
.1	1.162	1.107	1.096	1.092	1.090	1.087
.2	1.270	1.212	1.201	1.197	1.196	1.192
.3	1.404	1.343	1.331	1.327	1.326	1.322
.4	1.574	1.509	1.497	1.493	1.491	1.488
.5	1.798	1.728	1.716	1.712	1.710	1.707
.6	2.110	2.035	2.023	2.019	2.017	2.013
.7	2.583	2.500	2.488	2.483	2.482	2.478
.8	3.405	3.313	3.300	3.296	3.294	3.291
.9	5.350	5.243	5.229	5.225	5.223	5.220

Em ambos os casos foram adotadas as condições de contorno de Marshak. O erro máximo nos resultados obtidos pela aproximação  $LTP_9$  em relação aos resultados exatos [19] ocorre para  $c = 0.1$  e ausência de fonte, sendo de 13.8%.

#### 4.2 Meio Homogêneo e Domínio Finito

Nesta secção a formulação  $LTP_N$  é aplicada à problemas em domínio finito, meio homogêneo, considerando espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico, bem como para meio puramente espalhador.

#### 4.2.1 Espalhamento Isotrópico

Este é um problema de transporte de nêutrons numa placa uniforme de espessura 40cm com espalhamento isotrópico, vácuo na fronteira  $x = 40\text{cm}$  e fluxo angular constante na fronteira  $x = 0\text{cm}$ :

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s0} \psi(x, \mu') d\mu' , \quad 0 \leq x \leq 40 , \quad (4.5)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = 1 , \quad \mu > 0 , \quad (4.5a)$$

$$\psi(40, \mu) = 0 , \quad \mu < 0 . \quad (4.5b)$$

Neste problema são calculados tanto o fluxo escalar no ponto médio da placa,  $x = 20\text{cm}$ , como a corrente transmitida,

$$J^+(40) = \int_0^1 \mu \psi(40, \mu) d\mu , \quad (4.6)$$

na fronteira,  $x = 40\text{cm}$ , para valores de  $\sigma_{s0}$  variando de 1.00 a 0.80 e  $\sigma_t = 1.0$ . Os resultados foram comparados com os obtidos pelo código ANISN ( $S_{40}$ ) [29] e são apresentados nas tabelas 4.3 e 4.5. Nas tabelas 4.4 e 4.6 são mostrados os erros percentuais no cálculo do fluxo escalar e da corrente transmitida.

Tabela 4.3 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=20\text{cm}$ ) pelos métodos  $LTP_N$  e  $S_{40}$ .

$\sigma_{50}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{40}$
1.00	1.00E+0*	1.00E+0	1.00E+0	1.00E+0	1.00E+0	1.00E+0
0.999	5.85E-1	5.83E-1	5.83E-1	5.83E-1	5.83E-1	5.83E-1
0.990	5.61E-2	5.62E-2	5.61E-2	5.61E-2	5.61E-2	5.61E-2
0.980	1.28E-2	1.30E-2	1.30E-2	1.30E-2	1.30E-2	1.30E-2
0.960	1.59E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3	1.71E-3
0.950	6.88E-4	7.66E-4	7.65E-4	7.65E-4	7.65E-4	7.65E-4
0.900	2.56E-5	3.64E-5	3.64E-5	3.64E-5	3.64E-5	3.63E-5
0.800	2.47E-7	7.17E-7	7.25E-7	7.24E-7	7.24E-7	7.24E-7

\* Leia 1.00E+0 como  $1.00 \times 10^0$

Tabela 4.4 - Erro percentual relativo do método  $LTP_N$  para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=20\text{cm}$ ).

$\sigma_{50}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{40}$
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.00E+0
0.999	0.252	0.060	0.046	0.041	0.039	5.83E-1
0.990	0.039	0.086	0.033	0.015	0.008	5.61E-2
0.980	1.422	0.332	0.256	0.232	0.222	1.30E-2
0.960	6.907	0.101	0.003	0.036	0.051	1.71E-3
0.950	10.135	0.165	0.052	0.016	0.000	7.65E-4
0.900	29.452	0.272	0.196	0.151	0.130	3.63E-5
0.800	65.926	0.995	0.084	0.048	0.022	7.24E-7

Tabela 4.5 - Comparação numérica entre os valores obtidos para a corrente transmitida pelos métodos  $LTP_N$  e  $S_{48}$ .

$\sigma_{50}$	$LTP_2$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_p$	$S_{48}$
1.000	1.610E-02*	1.610E-02	1.610E-02	1.610E-02	1.610E-02
0.999	7.658E-03	7.655E-03	7.655E-03	7.654E-03	7.654E-03
0.990	1.845E-04	1.843E-04	1.843E-04	1.842E-04	1.842E-04
0.980	1.424E-05	1.421E-05	1.421E-05	1.420E-05	1.420E-05
0.960	3.556E-07	3.549E-07	3.546E-07	3.545E-07	3.544E-07
0.950	8.070E-08	8.053E-08	8.048E-08	8.045E-08	8.041E-08
0.900	2.755E-10	2.756E-10	2.753E-10	2.752E-10	2.750E-10
0.800	1.749E-13	1.817E-13	1.817E-13	1.816E-13	1.815E-13

\* Leia 1.670E-02 como  $1.670 \times 10^{-02}$

Tabela 4.6 - Erro percentual relativo pelo método  $LTP_N$  para a corrente transmitida.

$\sigma_{50}$	$LTP_2$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_p$	$S_{48}$
1.000	0.006	0.021	0.025	0.028	1.610E-02
0.999	0.053	0.018	0.007	0.002	7.654E-03
0.990	0.176	0.069	0.035	0.019	1.842E-04
0.980	0.247	0.098	0.050	0.029	1.420E-05
0.960	0.325	0.128	0.063	0.034	3.544E-07
0.950	0.356	0.152	0.081	0.048	8.041E-08
0.900	0.166	0.203	0.114	0.072	2.750E-10
0.800	3.644	0.106	0.118	0.068	1.815E-13

Observando as tabelas 4.4 e 4.6 pode-se notar que o erro percentual máximo da aproximação  $LTP_p$  em relação à aproximação  $S_{48}$  é de 0.22% para o fluxo escalar no ponto médio e de 0.07% para a corrente transmitida. É importante ressaltar

que os referidos erros se reduzem a zero a partir da aproximação LTP<sub>3</sub> para o fluxo escalar no ponto médio e da aproximação LTP<sub>3</sub> para a corrente transmitida, se os resultados apresentados na tabela 4.5 forem arredondados para dois algarismos decimais como na tabela 4.3.

#### 4.2.2 Espalhamento Linearmente Anisotrópico

Este é um problema de transporte de nêutrons numa placa homogênea com espalhamento linearmente anisotrópico descrito pela equação:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sigma_{s0} + 3\sigma_{s1} \mu \mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad (4.7)$$

com  $0 \leq x \leq 100$  e sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = 1, \quad \mu > 0, \quad (4.7a)$$

$$\psi(100, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (4.7b)$$

Para este caso os seguintes parâmetros foram considerados:  $\sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ ,  $\sigma_{s0} = 0.99\text{cm}^{-1}$  e  $\sigma_{s1} = 0.80\text{cm}^{-1}$ .

Os resultados obtidos por este método para o fluxo escalar médio,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu, \quad (4.8)$$

foram comparados com os resultados obtidos pelo método SGF- $S_N$  [11] e aparecem nas tabelas 4.7 a 4.9. Foram consideradas nesse caso as condições de contorno de Mark, visto que nessas condições as aproximações  $P_N$  e  $S_N$  são equivalentes [14], o que permite uma comparação numérica dos mesmos.

Tabela 4.7 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>1</sub> e SGF S<sub>2</sub>

Posição	LTP <sub>1</sub>	SGF S <sub>2</sub>
0	0.83777×10 <sup>+00</sup>	0.83777×10 <sup>+00</sup>
50	0.17417×10 <sup>-01</sup>	0.17417×10 <sup>-01</sup>
100	0.11756×10 <sup>-08</sup>	0.11756×10 <sup>-08</sup>

Tabela 4.8 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>3</sub> e SGF S<sub>4</sub>

Posição	LTP <sub>3</sub>	SGF S <sub>4</sub>
0	0.82226×10 <sup>+00</sup>	0.82226×10 <sup>+00</sup>
50	0.16538×10 <sup>-01</sup>	0.16538×10 <sup>-01</sup>
100	0.12353×10 <sup>-08</sup>	0.12353×10 <sup>-08</sup>

Tabela 4.9 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>7</sub> e SGF S<sub>8</sub>

Posição	LTP <sub>7</sub>	SGF S <sub>8</sub>
0	0.82284×10 <sup>+00</sup>	0.82284×10 <sup>+00</sup>
50	0.16470×10 <sup>-01</sup>	0.16470×10 <sup>-01</sup>
100	0.12250×10 <sup>-08</sup>	0.12250×10 <sup>-08</sup>

### 4.2.3 Meio Puramente Espalhador

Este é um problema de transporte de nêutrons numa placa de espessura 15cm com espalhamento isotrópico sem absorção, reflexão na fronteira  $x = 15\text{cm}$  e um feixe monodirecional de nêutrons incidindo na fronteira  $x = 0\text{cm}$ , ou seja,

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_t \psi(x, \mu') d\mu' , \quad 0 \leq x \leq 15 , \quad (4.8)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = \delta(\mu - \mu_{inc}) , \quad \mu > 0 , \quad (4.8a)$$

$$\psi(15, \mu) = \psi(15, -\mu) , \quad \mu > 0 . \quad (4.8b)$$

onde  $\sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ . O objetivo deste problema é calcular o fluxo escalar na fronteira  $x = 15\text{cm}$ , com a direção do fluxo angular incidente em  $x = 0\text{cm}$ . Os resultados obtidos para valores de  $\mu_{inc}$ , escolhidos como as raízes positivas para 16 pontos da quadratura de Gauss [37], são apresentados na tabela 4.10 e comparados com os valores obtidos pelo código ANISN ( $S_{16}$ ) [29]. O erro percentual das aproximações  $LTP_N$  aparecem na tabela 4.11.



Tabela 4.10 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar mais profundo ( $x=15\text{cm}$ ) pelos métodos  $LTP_N$  e  $S_{1\sigma}$ .

$\mu_{inc}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{1\sigma}$
0.9894009	3.9576	5.0501	4.9169	4.9440	4.9525	4.9468
0.9445750	3.7783	4.6325	4.5899	4.5858	4.5910	4.5927
0.8656312	3.4625	3.9601	4.0111	3.9982	3.9943	3.9987
0.7554044	3.0216	3.1447	3.2298	3.2390	3.2359	3.2323
0.6178762	2.4715	2.3031	2.3509	2.3752	2.3842	2.3795
0.4580167	1.8321	1.5256	1.5086	1.5157	1.5239	1.5332
0.2816035	1.1264	0.8533	0.8036	0.7866	0.7796	0.7820
0.0950125	0.3801	0.2725	0.2469	0.2345	0.2271	0.2023

Tabela 4.11 - Erro percentual relativo do método  $LTP_N$  para o fluxo escalar mais profundo ( $x=15\text{cm}$ ).

$\mu_{inc}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{1\sigma}$
0.9894009	19.997	2.089	0.604	0.058	0.116	4.9468
0.9445750	17.732	0.867	0.061	0.151	0.038	4.5927
0.8656312	13.409	0.964	0.310	0.011	0.110	3.9987
0.7554044	6.518	2.712	0.078	0.206	0.111	3.2323
0.6178762	3.867	3.212	1.201	0.181	0.199	2.3795
0.4580167	19.493	0.497	1.603	1.139	0.609	1.5332
0.2816035	44.043	9.112	2.767	0.583	0.307	0.7820
0.0950125	87.865	34.697	22.021	15.923	12.280	0.2023

A tabela 4.11 mostra que o erro percentual da aproximação  $LTP_9$  relativo à aproximação  $S_{1\sigma}$  é de no máximo 12.28% quando o ângulo entre a direção do feixe incidente e a direção normal à fronteira é próximo de  $90^\circ$ , e de 0.6% para os ângulos intermediários.

### 4.3 Meio Heterogêneo e Domínio Finito

Nesta secção a formulação  $LTP_N$  é aplicada a problemas em domínio finito, meio heterogêneo, considerando espalhamento isotrópico e linearmente anisotrópico.

#### 4.3.1 Espalhamento Linearmente Anisotrópico

Este é um problema de transporte de nêutrons numa placa heterogênea consistindo de três regiões com espalhamento linearmente anisotrópico descrito pela equação:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sigma_{s0}(x) + 3\sigma_{s1}(x) \mu \mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad (4.9)$$

com  $0 \leq x \leq 100$  e sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = 1, \quad \mu > 0, \quad (4.9a)$$

$$\psi(100, \mu) = 0, \quad \mu < 0, \quad (4.9b)$$

e à condição de interface

$$\psi^i(x_i, \mu) = \psi^{i+1}(x_i, \mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad \mu \neq 0, \quad (4.9c)$$

com  $i = 1, 2$ .

Para este caso, os seguintes parâmetros foram considerados para as três regiões. Primeira região: espessura 20cm,  $\sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ ,  $\sigma_{e0} = 0.90\text{cm}^{-1}$  e  $\sigma_{e1} = 0.80\text{cm}^{-1}$ . Segunda região: espessura de 50cm,  $\sigma_t = 0.60\text{cm}^{-1}$ ,  $\sigma_{e0} = 0.40\text{cm}^{-1}$  e  $\sigma_{e1} = 0.30\text{cm}^{-1}$ . A terceira região tem espessura de 30cm e os mesmos parâmetros da primeira região. Os resultados obtidos por este método, usando as condições de contorno de Mark, para o fluxo escalar médio foram comparados com resultados obtidos pelo método SGF- $S_N$  [11] e são apresentados nas tabelas 4.12 a 4.14.

Tabela 4.12 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>1</sub> e SGF S<sub>2</sub>.

Posição	LTP <sub>1</sub>	SGF S <sub>2</sub>
0	0.62020x10 <sup>+00</sup>	0.62020x10 <sup>+00</sup>
20	0.42912x10 <sup>-02</sup>	0.42912x10 <sup>-02</sup>
70	0.28178x10 <sup>-11</sup>	0.28178x10 <sup>-11</sup>
100	0.13775x10 <sup>-14</sup>	0.13775x10 <sup>-14</sup>

Tabela 4.13 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>3</sub> e SGF S<sub>4</sub>.

Posição	LTP <sub>3</sub>	SGF S <sub>4</sub>
0	0.60819x10 <sup>+00</sup>	0.60819x10 <sup>+00</sup>
20	0.41486x10 <sup>-02</sup>	0.41486x10 <sup>-02</sup>
70	0.31917x10 <sup>-10</sup>	0.31917x10 <sup>-10</sup>
100	0.24196x10 <sup>-19</sup>	0.24196x10 <sup>-19</sup>

Tabela 4.14 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio pelos métodos LTP<sub>7</sub> e SGF S<sub>8</sub>.

Posição	LTP <sub>7</sub>	SGF S <sub>8</sub>
0	0.61112×10 <sup>+00</sup>	0.61112×10 <sup>+00</sup>
20	0.41033×10 <sup>-02</sup>	0.41033×10 <sup>-02</sup>
70	0.32316×10 <sup>-10</sup>	0.32316×10 <sup>-10</sup>
100	0.24323×10 <sup>-19</sup>	0.24323×10 <sup>-19</sup>

#### 4.3.2 Desvantagem Térmica

Este problema consiste na determinação do fator de desvantagem térmica numa placa heterogênea de duas regiões com espessura total de 4cm, espalhamento isotrópico e vácuo nas fronteiras, descrito como:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{s0}(x) \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{1}{2} Q(x), \quad 0 \leq x \leq 4 \quad (4.10)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0, \quad (4.10a)$$

$$\psi(4, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (4.10b)$$

e à condição de interface

$$\psi^1(x_1, \mu) = \psi^2(x_1, \mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1 \text{ e } \mu \neq 0. \quad (4.10c)$$

Neste caso foram considerados os seguintes parâmetros:

$$\sigma_{s0}(x) = \begin{cases} \sigma_s, & 0 \leq x < 2.5, \\ 0.98, & 2.5 < x \leq 4, \end{cases} \quad (4.10d)$$

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2.5, \\ 1, & 2.5 < x \leq 4, \end{cases} \quad (4.10e)$$

e  $\sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ . Uma vez conhecida a solução do problema (4.10) então, o fator de desvantagem térmica é calculado como

$$\xi = \frac{2.5 \int_{2.5}^4 \Phi(x) dx}{1.5 \int_0^{2.5} \Phi(x) dx} \quad (4.11)$$

Os resultados obtidos para o fator de desvantagem térmica pelo método  $LTP_N$  foram comparados com os resultados do código ANISN ( $S_{48}$ ) [29] e são apresentados na tabela 4.15 para valores de  $\sigma_{s0}$  na primeira região variando entre  $0.99\text{cm}^{-1}$  e  $0.30\text{cm}^{-1}$ . Os erros percentuais da aproximação  $LTP_N$  em relação à aproximação  $S_{48}$  são apresentados na tabela 4.16 e mostram que o fator de desvantagem térmica pode ser obtido com erro máximo de 0.48% pela aproximação  $LTP_0$  para o caso mais crítico,  $\sigma_{s0} = 0.3\text{cm}^{-1}$ , quando a heterogeneidade aumenta e a interface em  $x = 2.5\text{cm}$  se torna mais importante.

Tabela 4.15 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fator desvantagem térmica pelos métodos  $LTP_N$  e  $S_{40}$ .

$\sigma_{50}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{40}$
0.99	1.610	1.767	1.793	1.798	1.799	1.801
0.98	1.665	1.839	1.868	1.873	1.875	1.877
0.97	1.719	1.911	1.942	1.948	1.950	1.953
0.96	1.774	1.983	2.016	2.023	2.025	2.028
0.95	1.828	2.054	2.090	2.097	2.099	2.103
0.93	1.936	2.196	2.237	2.245	2.248	2.252
0.90	2.097	2.408	2.456	2.466	2.469	2.474
0.80	2.621	3.097	3.170	3.186	3.191	3.199
0.70	3.130	3.765	3.865	3.887	3.895	3.907
0.60	3.626	4.415	4.543	4.572	4.583	4.599
0.50	4.110	5.051	5.207	5.244	5.257	5.279
0.40	4.583	5.675	5.859	5.904	5.921	5.948
0.30	5.048	6.288	6.501	6.554	6.575	6.607

Tabela 4.16 - Erro percentual relativo do método  $LTP_N$  para o fator desvantagem térmica.

$\sigma_{50}$	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$LTP_9$	$S_{40}$
0.99	10.632	1.915	0.460	0.189	0.104	1.801
0.98	11.323	2.030	0.505	0.217	0.127	1.877
0.97	11.971	2.152	0.560	0.258	0.163	1.953
0.96	12.538	2.231	0.577	0.261	0.160	2.028
0.95	13.074	2.318	0.605	0.276	0.170	2.103
0.93	14.026	2.467	0.648	0.294	0.177	2.252
0.90	15.245	2.679	0.721	0.332	0.202	2.474
0.80	18.062	3.205	0.896	0.411	0.241	3.199
0.70	19.884	3.647	1.084	0.519	0.315	3.907
0.60	21.163	3.994	1.228	0.593	0.358	4.599
0.50	22.151	4.311	1.372	0.673	0.410	5.279
0.40	22.942	4.591	1.499	0.743	0.453	5.948
0.30	23.596	4.835	1.607	0.796	0.481	6.607

#### 4.4 Espalhamento Totalmente Anisotrópico

Este é um problema de transporte de fótons que consiste na determinação do fluxo escalar e da corrente transmitida numa placa plana homogênea de espessura de 10cm com espalhamento anisotrópico sem absorção, descrito como:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu, \mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq 10, \quad (4.12)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = \delta(\mu-1), \quad \mu > 0, \quad (4.12a)$$

$$\psi(10, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (4.12b)$$

Nesse problema o modelo de Henyey-Greenstein [29] foi considerado para o núcleo de espalhamento, ou seja,

$$\sigma_s(\mu, \mu') = \sigma_t \sum_{\ell=0}^{L \leq N} \frac{2\ell + 1}{2} P_\ell(\mu) P_\ell(\mu') (0.3)^\ell, \quad (4.12c)$$

com  $\sigma_t = 1.0 \text{cm}^{-1}$ . Os resultados obtidos por esse método para o fluxo escalar no ponto médio da placa,  $x = 5 \text{cm}$ , e para a corrente transmitida na fronteira  $x = 10 \text{cm}$  são comparados com os obtidos pelo código ANISN ( $S_{40}$ ) [29] e apresentados na tabela 4.17.

Tabela 4.17 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=5\text{cm}$ ) e a corrente transmitida pelos métodos  $LTP_N$  e  $S_{48}$ .

	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$S_{48}$
$\Phi(5)$	2.00000	2.58616	2.49512	2.51585	2.51470
$J^+(10)$	0.160000	0.204993	0.198062	0.199821	0.199642

Tabela 4.18 - Erro percentual relativo do método  $LTP_N$  para o fluxo escalar no ponto médio ( $x=5\text{cm}$ ) e a corrente transmitida.

	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	$S_{48}$
$\Phi(5)$	20.468	2.842	0.779	0.046	2.51470
$J^+(10)$	19.857	2.680	0.791	0.090	0.19964

Os erros percentuais da método  $LTP_N$  em relação à aproximação  $S_{48}$ , apresentados na tabela 4.18, mostram que o mesmo é aplicável em problemas de anisotropia geral, gerando resultados com erro máximo de 0.09% pela aproximação  $LTP_7$ .



## 5. APLICAÇÕES PARA MULTIGRUPO

Neste capítulo a formulação  $LTP_N$  para multigrupo, apresentada no capítulo 3, é aplicada a problemas com dois grupos de energia em meio homogêneo e heterogêneo, considerando espalhamento isotrópico.

### 5.1 Problema Homogêneo

Neste problema foi considerada uma placa homogênea com espessura de 100cm, espalhamento isotrópico e dois grupos de energia. As secções de choque e as condições de contorno para os dois grupos de energia são apresentados na figura 5.1.

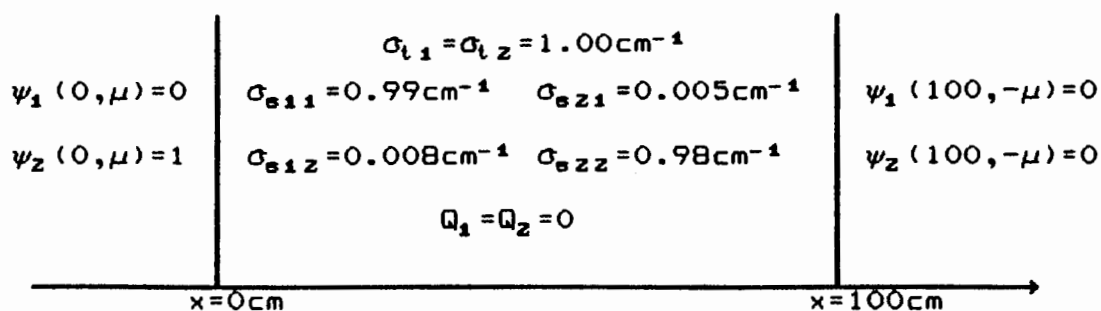


Figura 5.1 - Parâmetros para o problema homogêneo.

Os resultados obtidos pela formulação  $LTP_N$ , associada às condições de contorno de Mark, são comparados com os obtidos por Barros [12] e apresentados na tabela 5.1. A coincidência dos resultados numéricos é justificada pelo fato da formulação  $LTP_N$  ser analítica e o método SGF- $S_N$  um método nodal livre de erro de truncamento.

Tabela 5.1 - Comparação numérica entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio para dois grupos de energia pelos métodos LTP<sub>3</sub> e SGF S<sub>4</sub>.

Posição	LTP <sub>3</sub>		SGF-S <sub>4</sub>	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
0	0.91268x10 <sup>+00</sup>	0.27264E×10 <sup>-01</sup>	0.91268x10 <sup>+00</sup>	0.27264x10 <sup>-01</sup>
50	0.55129x10 <sup>-09</sup>	0.33652E×10 <sup>-09</sup>	0.55129x10 <sup>-09</sup>	0.33652x10 <sup>-09</sup>
100	0.62769x10 <sup>-07</sup>	0.38443E×10 <sup>-07</sup>	0.62769x10 <sup>-07</sup>	0.38443x10 <sup>-07</sup>

## 5.2 Problema Heterogêneo

Este é um problema de transporte de nêutrons para dois meios distintos com espalhamento isotrópico e dois grupos de energia, o qual foi resolvido por Ishiguro [20] usando o método de expansão em autofunções singulares. Os valores das secções de choque considerados aparecem na tabela 5.2, sendo que cada uma das placas justapostas tem espessura correspondente à uma unidade de livre caminho médio do grupo 2.

Tabela 5.2 - Secções de choque macroscópicas para o problema heterogêneo, [20].

	Conjunto 1	Conjunto 2
$\sigma_1$	2.986500	2.966400
$\sigma_2$	0.887980	0.887310
$\sigma_{11}$	2.967600	2.887600
$\sigma_{12}$	0.047490	0.045880
$\sigma_{21}$	0.000336	0.001060
$\sigma_{22}$	0.839750	0.839120

O intervalo de energia (  $0 < E < 15$  MeV ) foi dividido dois grupos considerando a energia de corte de 0.3 eV gerando

então as seguintes faixas de energia para os grupos térmico e rápido respectivamente:

Grupo 1:  $E < 0.3$  eV

Grupo 2:  $E \geq 0.3$  eV

Foram considerados três casos de fluxo angular incidente em  $x = 0$  mfp e vácuo em  $x = 2$  mfp para todos casos,

$$f(\mu) = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{CASO 1}$$

$$f(\mu) = 3 \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{CASO 2}$$

$$f(\mu) = 4 \mu^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{CASO 3}$$

sendo aplicadas as condições de contorno (2.17), onde a função peso  $P_n(\mu)$  foi substituída por  $\mu^n$  ( $n = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ ).

O fluxo escalar é definido por

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu \quad (5.1)$$

Os resultados para o fluxo escalar obtidos por este método para o fluxo escalar do grupo 1, caso 1 e 2, são reportados nas tabelas 5.3 a 5.6. Por outro lado, o fluxo escalar para os grupos 1 e 2, caso 3, é mostrado na figura 5.2.

Tabela 5.3 - Resultados obtidos pelo método  $LTP_N$  para o fluxo escalar do grupo 1, com  $f(\mu)$  descrito no caso 1 e parâmetros dados como: conjunto 1 para o meio 1, conjunto 2 para o meio 2.

x	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	[20]
0.0	0.14826	0.16369	0.16442	0.16506	0.16816
0.2	0.31562	0.36627	0.36652	0.36542	0.36402
0.4	0.42425	0.47372	0.46696	0.46487	0.46469
0.6	0.48167	0.52288	0.51445	0.51320	0.51356
0.8	0.49460	0.52760	0.52004	0.51959	0.52003
1.0	0.46907	0.49399	0.48764	0.48764	0.48805
1.2	0.41757	0.43733	0.43236	0.43261	0.43299
1.4	0.35047	0.36970	0.36645	0.36679	0.36714
1.6	0.27039	0.29066	0.28927	0.28947	0.28974
1.8	0.17928	0.19852	0.20014	0.20070	0.20071
2.0	0.07860	0.08366	0.08454	0.08521	0.08688

Tabela 5.4 - Resultados obtidos pelo método  $LTP_N$  para o fluxo escalar do grupo 1, com  $f(\mu)$  descrito no caso 1 e parâmetros dados como: conjunto 2 para o meio 1, conjunto 1 para o meio 2.

x	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	[20]
0.0	0.13006	0.14150	0.14219	0.14278	0.14545
0.2	0.27552	0.31407	0.31440	0.31352	0.31225
0.4	0.37165	0.40683	0.40120	0.39954	0.39937
0.6	0.42821	0.45563	0.44856	0.44771	0.44804
0.8	0.45323	0.47529	0.46855	0.46833	0.46878
1.0	0.45330	0.47515	0.46971	0.46994	0.47039
1.2	0.42704	0.45112	0.44710	0.44756	0.44800
1.4	0.37277	0.39841	0.39549	0.39591	0.39637
1.6	0.29521	0.32208	0.32093	0.32117	0.32156
1.8	0.19873	0.22333	0.22547	0.22610	0.22618
2.0	0.08736	0.09398	0.09511	0.09590	0.09781

Tabela 5.5 - Resultados obtidos pelo método  $LTP_N$  para o fluxo escalar do grupo 1, com  $f(\mu)$  descrito no caso 2 e parâmetros dados como: conjunto 1 para o meio 1, conjunto 2 para o meio 2.

x	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	[20]
0.0	0.11120	0.15128	0.15684	0.15835	0.16266
0.2	0.23672	0.34290	0.35479	0.35583	0.35678
0.4	0.31819	0.45180	0.46040	0.46015	0.46118
0.6	0.36125	0.50673	0.51413	0.51365	0.51434
0.8	0.37095	0.51815	0.52489	0.52411	0.52444
1.0	0.35180	0.49052	0.49585	0.49474	0.49492
1.2	0.31318	0.43832	0.44218	0.44089	0.44108
1.4	0.26285	0.37341	0.37646	0.37516	0.37541
1.6	0.20279	0.29541	0.29819	0.29691	0.29716
1.8	0.13446	0.20270	0.20681	0.20629	0.20633
2.0	0.05895	0.08555	0.08742	0.08764	0.08939

Tabela 5.6 - Resultados obtidos pelo método  $LTP_N$  para o fluxo escalar do grupo 1, com  $f(\mu)$  descrito no caso 2 e parâmetros dados como: conjunto 2 para o meio 1, conjunto 1 para o meio 2.

x	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	[20]
0.0	0.09754	0.13071	0.13545	0.13676	0.14054
0.2	0.20664	0.29431	0.30439	0.30530	0.30612
0.4	0.27874	0.38921	0.39643	0.39619	0.39702
0.6	0.32116	0.44378	0.44991	0.44941	0.44991
0.8	0.33992	0.46977	0.47505	0.47411	0.47433
1.0	0.33997	0.47518	0.47996	0.47864	0.47875
1.2	0.32028	0.45533	0.45943	0.45787	0.45801
1.4	0.27957	0.40504	0.40807	0.40635	0.40663
1.6	0.22141	0.32927	0.33213	0.33046	0.33078
1.8	0.14904	0.22924	0.23382	0.23306	0.23313
2.0	0.06552	0.09660	0.09869	0.09891	0.10089

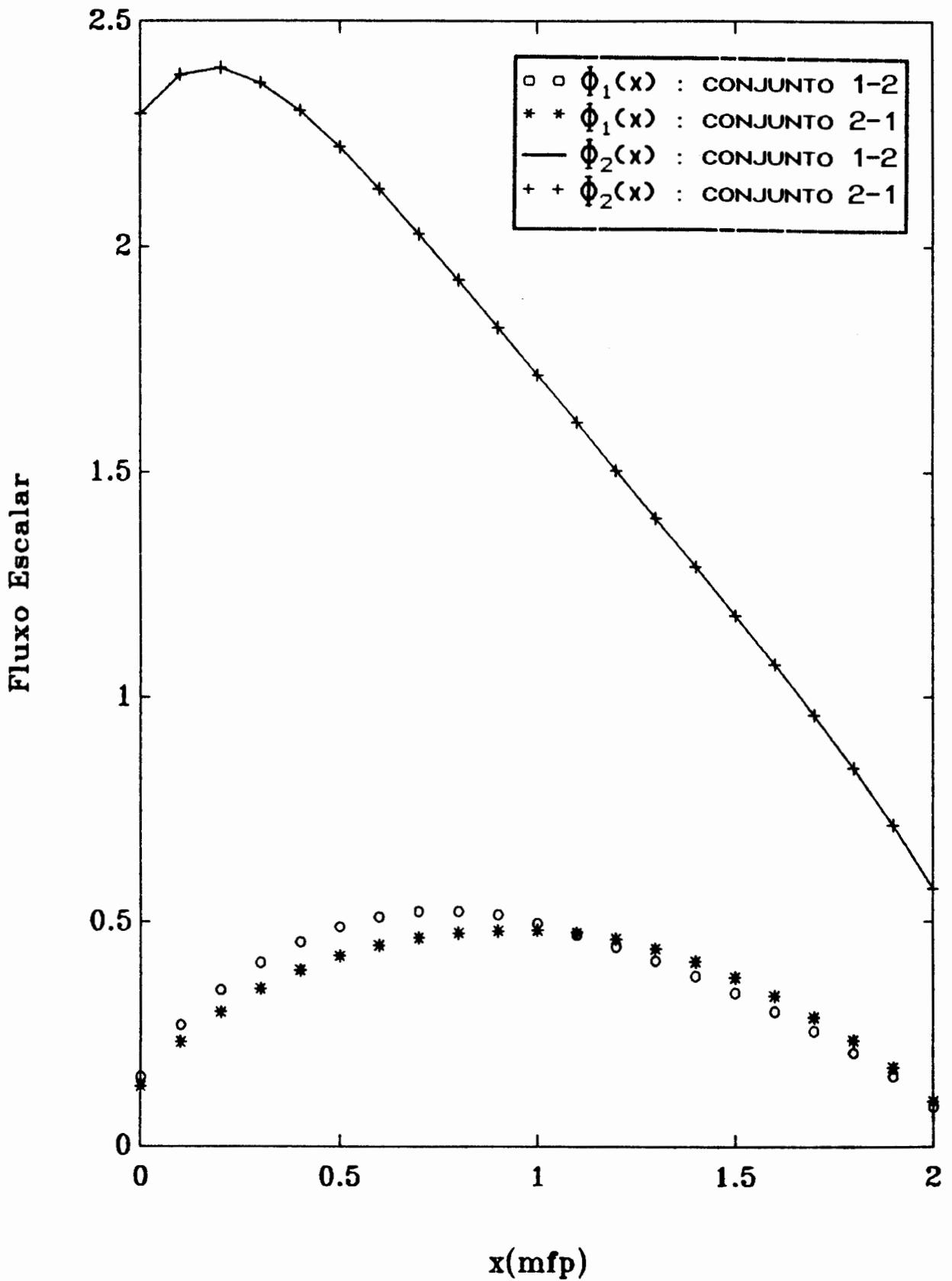


Figura 5.2 - Resultados para o fluxo escalar dos grupos 1 e 2, aproximação  $LTP_7$ , com  $f(\mu)$  descrito pelo caso 3.

Tabela 5.7 - Erro no fluxo escalar pela aproximação  $LTP_7$  em relação à solução por autofunções singulares [20].

x (mfp)	Caso 1		Caso 2	
	$\Phi_2(x)^a$	$\Phi_2(x)^b$	$\Phi_2(x)^a$	$\Phi_2(x)^b$
.0	1.84	2.65	1.84	2.69
.2	.38	.27	.41	.27
.4	.04	.22	.04	.21
.6	.07	.13	.07	.11
.8	.08	.06	.10	.05
1.0	.09	.04	.09	.02
1.2	.09	.05	.09	.03
1.4	.10	.07	.11	.06
1.6	.10	.09	.12	.09
1.8	.01	.03	.02	.02
2.0	1.92	1.96	1.95	1.96

a : meio 1 - conjunto 1 ; meio 2 - conjunto 2

b : meio 1 - conjunto 2 ; meio 2 - conjunto 1

Os erros percentuais dos resultados obtidos pelo método  $LTP_N$  relativo ao método de expansão em autofunções singulares [20] são apresentados na tabela 5.7, os quais mostram que a aproximação  $LTP_7$  gera resultados para o fluxo escalar com erro máximo de 0.1% nos pontos interiores e 2.7% nas fronteiras da placa para todos os casos aqui considerados.

## 6. PROBLEMA INVERSO

O problema direto em teoria de transporte, consiste na determinação do fluxo angular no interior do domínio, uma vez conhecidos os parâmetros físicos do meio e o fluxo angular incidente na fronteira, enquanto que o problema inverso consiste na determinação das propriedades do meio ou das condições de contorno, uma vez conhecido o fluxo escalar no interior do domínio [26]. Neste capítulo a formulação  $LTP_N$ , desenvolvida nos capítulos 2 e 3, é aplicada na resolução dos problemas inversos mencionados. Inicialmente, na secção 6.1, é considerado o problema que consiste na determinação do fluxo angular incidente na fronteira de uma placa homogênea uma vez conhecido o fluxo escalar em pontos interiores ao domínio [35,36]. Na secção 6.2, é abordado o problema de obtenção dos parâmetros físicos do meio uma vez conhecido o fluxo angular emergente na fronteira [15]. Finalmente, na secção 6.3, é resolvido o problema de determinação da espessura crítica de uma placa homogênea para um dado valor do parâmetro  $c$ .

### 6.1 Determinação do Fluxo Angular Incidente para Um Grupo de Energia

Considerando o seguinte problema de transporte de nêutrons em geometria plana com espalhamento anisotrópico linear e um grupo de energia:



$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_t \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sigma_{s0} + 3 \sigma_{s1} \mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad (6.1)$$

com  $0 \leq x \leq R$  e as seguintes condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (6.1a)$$

$$\psi(R, \mu) = g(\mu), \quad \mu < 0. \quad (6.1b)$$

A solução do problema (6.1) pela formulação  $LTP_N$  é expressa como

$$\psi(x, \mu) = \underset{\sim}{v} \sum_{k=1}^{N+1} P_k \exp[s_k x] \underset{\sim}{\phi}(0), \quad (6.2)$$

onde as matrizes coeficientes  $P_k$ , os autovalores  $s_k$  e o vetor  $\underset{\sim}{v}$  foram determinados no capítulo 2.

Integrando a equação (6.2) em  $\mu$  no intervalo  $[-1, 1]$  resulta a seguinte expressão analítica para o fluxo escalar num ponto qualquer no interior do domínio:

$$\Phi(x_i) = \sum_{k=1}^{N+1} P_k(1) \exp(s_k x_i) \underset{\sim}{\phi}(0). \quad (6.3)$$

onde  $P_k(1)$  é a primeira linha da matriz  $P_k$ . Conseqüentemente,  $\underset{\sim}{\phi}(0)$  pode ser calculado, conhecendo-se o fluxo escalar em  $N+1$  pontos interiores ao domínio pela solução do sistema linear descrito pela equação (6.3).

O método exposto foi aplicado na resolução do problema inverso de determinação do fluxo angular incidente na fronteira de uma placa homogênea com espalhamento linearmente anisotrópico e um grupo de energia, cujos parâmetros físicos são apresentados na Figura 6.1.

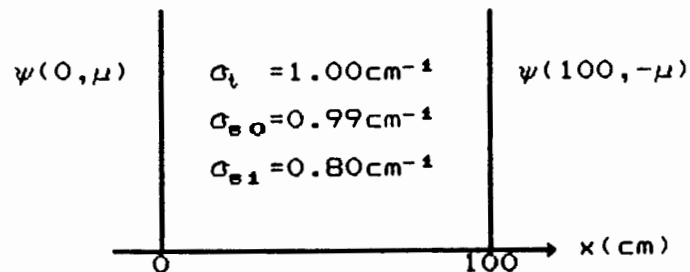


Figura 6.1 - Parâmetros físicos da placa homogênea.

Foram considerados três casos distintos de localização dos pontos nos quais o fluxo escalar é conhecido, de modo a verificar a influência desta localização no valor do fluxo angular incidente. Os valores do fluxo escalar nos referidos pontos foram obtidos através da resolução do problema 6.1 pela aproximação  $LTP_7$  com as condições de contorno  $f(\mu) = 2$  e  $g(\mu) = 1$ .

$$\text{CASO 1: } \Phi(20) = 3.348 \times 10^{-1} \quad \text{e} \quad \Phi(25) = 2.289 \times 10^{-1}$$

$$\text{CASO 2: } \Phi(45) = 5.961 \times 10^{-2} \quad \text{e} \quad \Phi(55) = 4.659 \times 10^{-2}$$

$$\text{CASO 3: } \Phi(75) = 1.180 \times 10^{-1} \quad \text{e} \quad \Phi(80) = 1.698 \times 10^{-1}$$

Os valores obtidos para o fluxo angular incidente, pela aproximação  $LTP_1$ , mostrados na tabela 6.1, já indicam a dependência destes com a localização dos pontos. A partir da aproximação  $LTP_3$  esta dependência se torna mais acentuada, de modo que os valores obtidos para o fluxo angular incidente são pre-

cisos apenas quando os pontos em que o fluxo escalar é conhecido são próximos à fronteira. Para solucionar este problema, optou-se por refinar os valores obtidos pela aproximação  $LTP_1$  através do método da bissecção, sendo os resultados obtidos para a terceira iteração apresentados na tabela 6.2, para os três casos, podendo-se observar que o maior erro ocorre no caso 2.

Tabela 6.1 - Valores do fluxo angular incidente, pelo método  $LTP_1$ .

	CASO 1	CASO 2	CASO 3
$f(\mu)$	1.870	1.888	2.031
$g(\mu)$	1.209	0.946	0.935

Tabela 6.2 - Valores do fluxo angular incidente, pelo método  $LTP_N$  - 3ª iteração

	$LTP_8$		$LTP_5$		$LTP_7$		EXATO	
	$f(\mu)$	$g(\mu)$	$f(\mu)$	$g(\mu)$	$f(\mu)$	$g(\mu)$	$f(\mu)$	$g(\mu)$
CASO 1	2.013	1.694	1.999	0.994	2.000	1.004	2.0	1.0
CASO 2	2.016	1.015	1.998	1.002	1.999	1.001	2.0	1.0
CASO 3	2.342	1.007	1.995	0.999	2.003	1.000	2.0	1.0

## 6.2 Determinação do Fluxo Angular Incidente para G Grupos de Energia

Considerando o seguinte problema de transporte de nêutrons em geometria plana com espalhamento isotrópico e modelo de multigrupo para energia:

$$\mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_{tg} \psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{g'=1}^G \sigma_{g'g} \psi_{g'}(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq R, \quad (6.4)$$

sujeito às seguintes condições de contorno

$$\psi_g(0, \mu) = f_g(\mu), \quad \mu > 0, \quad (6.4a)$$

$$\psi_g(R, \mu) = g_g(\mu), \quad \mu < 0, \quad (6.4b)$$

e à condição de continuidade de fluxo angular nas interfaces para problemas heterogêneos

$$\psi_g^i(x_i, \mu) = \psi_g^{i+1}(x_i, \mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad \mu \neq 0. \quad (6.4c)$$

A solução do problema (6.4) pela formulação LTP<sub>N</sub> para o grupo  $g$ , descrita no capítulo 3, é dada por:

$$\psi_g(x, \mu) = \underset{\sim}{V} \sum_{k=1}^{GN} \underset{\sim}{P}_k \exp[s_k x] \underset{\sim}{\phi}(0), \quad (6.5)$$

com  $g = 1, \dots, G$  e  $GN = G \times (N + 1)$ . Onde as matrizes coeficientes  $\underset{\sim}{P}_k$ , os autovalores  $s_k$  e o vetor  $\underset{\sim}{V}$ , são característicos da formulação LTP<sub>N</sub>, descrita no capítulo 3.

Integrando a equação (6.5) em  $\mu$  no intervalo  $[-1, 1]$  resulta a seguinte expressão analítica para o fluxo escalar num ponto qualquer no interior do domínio:

$$\tilde{\phi}_g(x_i) = \sum_{k=1}^{GN} P_k^{(ig)} \exp(s_k x_i) \tilde{\phi}(0), \quad (6.6)$$

para  $g = 1, \dots, G$ , onde  $ig$  define a linha da matriz  $P_k$  que permite calcular o fluxo escalar com energia no grupo  $g$ , genericamente escrita como  $ig = (g - 1) \times (N + 1) + 1$ . Conseqüentemente,  $\tilde{\phi}(0)$  pode ser calculado, conhecendo-se o fluxo escalar em  $GN$  pontos interiores do domínio pela solução do sistema linear descrito pela equação (6.8).

A solução do problema inverso pelo método exposto foi aplicada à um problema de duas placas justapostas considerando dois grupos de energia, cujos parâmetros físicos, medidos em unidades do livre caminho médio do grupo 2, são apresentados na Figura 6.2.

O intervalo de energia ( $0 < E < 15$  MeV) foi dividido nos seguintes grupos, térmico e rápido [20],

Grupo 1:  $E < 0.3$  eV

Grupo 2:  $E \geq 0.3$  eV

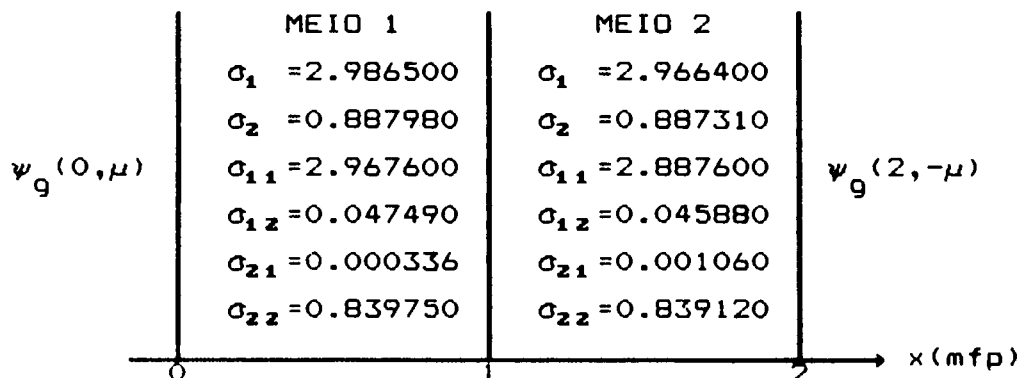


Figura 6.2 - Parâmetros físicos da placa heterogênea.

Foi resolvido o problema em que considerou-se fluxo angular incidente constante em  $x = 0$ mfp, condição (6.4a), e vá-

cuo em  $x = 2mfp$ , condição (6.4b).

Tabela 6.3 - Valores do fluxo angular incidente rápido, pelo método  $LTP_N$ .

	$LTP_1$	$LTP_3$	$LTP_5$	$LTP_7$	EXATO
$f_2(\mu)$	1.90	1.96	1.98	2.00	2.00

Os resultados apresentados na Tabela 6.2 mostram que os valores obtidos pela aproximação  $LTP_7$  coincidem em dois algarismos significativos com a solução exata, observando que os fluxos escalares considerados foram tomados em pontos interiores do meio 1.

### 6.3 Determinação do Parâmetro de Espalhamento

Considerando o seguinte problema de transporte de nêutrons em geometria plana, espalhamento isotrópico e um grupo de energia em domínio semi-infinito:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x < \infty, \quad (6.9)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (6.9a)$$

$$\psi(x, \mu) = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \text{ e } \mu \neq 0. \quad (6.9b)$$

No problema inverso considerado nesta secção, o parâmetro  $c$  é desconhecido enquanto o fluxo angular de nêutrons que sai do domínio em  $x = 0$  é conhecido e, conseqüentemente, o albedo, descrito no capítulo 2, também é conhecido. Então, resulta a seguinte equação transcendental para o parâmetro  $c$ :

$$A^* = 2 \sum_{\ell=0}^N \phi_{\ell}(0, c) I_{\ell}(\mu) \quad (6.10)$$

sendo

$$I_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^1 \mu P_{\ell}(-\mu) d\mu \quad (6.10a)$$

Para a obtenção do parâmetro  $c$ , a equação transcendental (6.10) é resolvida pelo método da bissecção, observando que para a aproximação  $LTP_1$ , conforme o exemplo descrito no capítulo 2, o valor de  $c$  é determinado pela expressão:

$$c = 1 - \frac{3}{4} \left[ \frac{A^* - 1}{A^* + 1} \right]^2 \quad (6.11)$$

Tabela 6.4 - Valores do parâmetro  $c$  pelo método  $LTP_N$ .

$A^*$	$LTP_7$	$LTP_{11}$	$LTP_{15}$	EXATO
.0217	.1194	.1089	.1051	.1000
.0463	.2153	.2070	.2031	.2000
.0745	.3117	.3054	.3030	.3000
.1073	.4085	.4038	.4021	.4000
.1465	.5059	.5026	.5014	.5000
.1947	.6038	.6017	.6010	.6000
.2566	.7023	.7010	.7006	.7000
.3419	.8011	.8005	.8003	.8000
.4780	.9003	.9001	.9000	.9000

Na tabela 6.3 são apresentados resultados numéricos para o parâmetro  $c$ , pelas aproximações  $LTP_7$ ,  $LTP_9$  e  $LTP_{15}$ . Cumprido ressaltar que o erro máximo encontrado para a aproximação  $LTP_{15}$  foi de 5%. Este fato mostra que a solução do problema inverso, em teoria de transporte de nêutrons, geometria planar e meio semi-infinito pode ser resolvido de maneira computacionalmente simples e precisa pelo método  $LTP_N$ .

#### 6.4 Determinação da Espessura Crítica

Considerando o seguinte problema de transporte de nêutrons em geometria plana com espalhamento isotrópico e um grupo de energia :

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq R, \quad (6.14)$$

sujeito às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0, \quad (6.14a)$$

$$\psi(R, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (6.14b)$$

Usando as condições de contorno de Marshak e a aproximação  $LTP_1$ , obtém-se a seguinte expressão para a espessura crítica



$$R = \frac{1}{|\delta|} \arctg \left[ -|\delta| / (1.75 - c) \right] , \quad (6.15)$$

onde  $\delta = \sqrt{3(1-c)}$  .

Tabela 6.5 - Comparação entre os valores obtidos pelo método  $LTP_N$  e valores analíticos para a espessura crítica de uma placa homogênea.

c	Exato	$LTP_1$	ERRO%	$LTP_2$	ERRO%	$LTP_3$	ERRO%
1.1	4.2266	4.4573	5.46	4.2427	0.38	4.2318	0.12
1.2	2.5796	2.8250	9.51	2.6040	0.95	2.5852	0.22
1.3	1.8776	2.1226	13.05	1.9099	1.72	1.8840	0.34
1.4	1.4768	1.7162	16.21	1.5153	2.61	1.4844	0.51
1.5	1.2152	1.4470	19.07	1.2583	3.55	1.2243	0.75
1.6	1.0303	1.2538	21.69	1.0768	4.51	1.0409	1.03
1.7	0.8928	1.1078	24.08	0.9414	5.44	0.9047	1.33
1.8	0.7963	0.9931	24.71	0.8364	5.04	0.7995	0.40
1.9	0.7016	0.9006	28.36	0.7526	7.27	0.7158	2.02
2.0	0.6527	0.8241	26.26	0.6841	4.81	0.6477	0.77

Os resultados numéricos para a espessura crítica descrita pela equação (6.15) foram comparados com os resultados obtidos pelo método de Case [6] e são apresentados na tabela 6.4, de onde se pode concluir que a espessura crítica de uma placa pode ser determinada com precisão de no mínimo 2% pela aproximação  $LTP_3$ .

## 7. CONCLUSÃO

Os resultados numéricos obtidos pela aplicação da formulação  $LTP_N$ , proposta neste trabalho, apresentam boa concordância com os resultados disponíveis na literatura com erro máximo de 13.8% para a aproximação  $LTP_0$  (problema em domínio semi-infinito com  $c = 0.1$ ), tanto para os problemas diretos em geometria plana, domínio finito e semi-infinito, um e dois grupos energia, como para os problemas inversos considerados. Cumpre ressaltar que os resultados obtidos por este método apresentaram uma concordância perfeita com os obtidos pelo método  $SGF-S_N$  como era esperado, já que o método  $SGF-S_N$  é livre de erro de truncamento espacial e o método  $LTP_N$  é analítico.

Em relação aos problemas inversos considerados neste trabalho, os resultados numéricos mostram que o método  $LTP_N$  é simples e eficiente tanto para o problema de determinação do parâmetro de espalhamento, como no problema de determinação do fluxo angular incidente na fronteira do domínio, devido ao seu caráter analítico.

Cabe ressaltar que o problema inverso é intrinsecamente mal-condicionado, uma vez que o argumento das exponenciais que aparecem no sistema crescem com a ordem da aproximação e a espessura do meio. No entanto, devido ao caráter analítico da formulação  $LTP_N$ , acredita-se ser possível uma mudança de escala que permita sua aplicação a problemas de grande espessura, e em consequência, eliminar a dependência da solução do pro-

blema inverso com a posição dos pontos interiores considerados para o fluxo escalar, verificada com essa formulação.

Todos os cálculos necessários à resolução dos problemas apresentados neste trabalho foram realizados num micro-computador PC-386, sem qualquer recurso sofisticado de programação já que o objetivo deste trabalho foi encontrar uma solução analítica para a aproximação  $P_N$  da equação de transporte e, nestas condições, os tempos de execução foram de no máximo 30 segundos nos problemas mais complexos, i. e., os problemas de multi-região e multigrupo para aproximações de maior ordem ( $N=7$ ).

Apesar dos problemas aqui apresentados serem restritos a uma dimensão, a generalização desta formulação para problemas bidimensionais está sendo analisada, considerando-o como um sistema de duas equações unidimensionais acopladas, sendo ambas resolvidas pela formulação unidimensional [13,24]. Também, a generalização para problemas dependentes do tempo está sendo estudada, considerando a aplicação da transformada de Laplace na variável tempo.

Para os problemas não-lineares, cogita-se aplicar o método proposto por Adomian [1], que também apresenta a solução em forma fechada, baseado na decomposição do operador associado ao problema não-linear na soma de operadores linear e não-linear. A aplicação deste método depende do conhecimento da forma explícita do operador linear inverso que pode ser obtido pela formulação  $LTP_N$ .

Finalmente, dada a simplicidade do método proposto, devida ao seu carácter analítico, a possibilidade das generalizações acima mencionadas e sua aplicação a outras aproximações

da equação de transporte de neutrons ( $S_N$ ,  $W_N$  e  $DP_N$ ), verifica-se que este método é aplicável a uma classe abrangente de problemas em teoria de transporte.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADOMIAN, G. Analytic solutions for nonlinear equations, **Applied Mathematics and Computation**, v.26, p.77-88, 1988.
- [2] BADHAM, V. C. & POMRANING G. C. A spherical harmonics method utilizing polynomials which are both angularly and spatially dependent, **Nuclear Science and Engineering**, v.86, p.63-75, 1984.
- [3] BAKER, R. S., MONAHAN, S. P. & ZHANG, H. B. An application of Chandrasekar's method to the energy-dependent neutron transport equation in a semi-infinite medium, In: **Methods in particle transport and thermal hydraulics**. [S. l: s. n., 198-] 158-160.
- [4] BELL, G. I. & GLASSTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.
- [5] CARDONA, A. V. & VILHENA, M. T. As funções de Walsh e sua aplicação na resolução da equação de transporte de nêutrons, In: **ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMO-HIDRAULICA**, 9., 1993, Caxambú. **Anais ... a serem publicados**.
- [6] CASE, K. M. Elementary solutions of transport equation and their applications, **Annals of Physics**, v.9, p.1-23, 1960.
- [7] ——— & ZWEIFEL, P. F. **Linear Transport Theory**. Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1967.
- [8] CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**. Oxford University Press, London, 1957.
- [9] DAVIES, B. & MARTIN, B. Numerical inversion of the Laplace transform: A survey and comparison of methods, **Journal of Computational Physics**, v.33, p.1-32, 1979.
- [10] DASGUPTA, S. R. & BISHNU, S. K. Exact solution of transport equation in multiplying media, **Astrophysics and Space Science**, v.74, p.131-147, 1981.

- [11] DE BARROS, R. & LARSEN, E. W. A numerical method for one-group slab geometry discrete ordinates problems with no spatial truncation error, **Nuclear Science and Engineering**, v.104, p.199-208, 1990.
- [12] ——— & LARSEN, E. W. A multigroup slab-geometry discrete ordinates problems, **Comunicação Privada**.
- [13] ——— & LARSEN, E. W. A spectral nodal method for one-group, x,y-geometry discrete ordinates problems, **Nuclear Science and Engineering**, v.111, p.34-45, 1992.
- [14] DUDERSTADT, J. J. & MARTIN, W. R. **Transport Theory**. John Willey & Sons, New York, 1979.
- [15] FERNANDEZ, J. F., STRECK, E. E. & VILHENA, M. T. Solução do problema inverso em teoria de transporte pelo método  $LTP_N$ , In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMO-HIDRAULICA, 9., 1993, Caxambú. **Anais ... a serem publicados**.
- [16] GANAPOL, B. D., KELLEY, C. T. & POMRANING, G. C. Asymptotically exact boundary conditions for the  $P_N$  equations, **Nuclear Science and Engineering**, v.114, p.12-14, 1993.
- [17] GANGULY, K. & SENGUPTA, A. A transport theoretic  $P_N$  approximation, **Nuclear Science and Engineering**, v.74, p.1-12, 1980.
- [18] ——— & SENGUPTA, A. Interface and source problems by a transport theoretic  $P_N$  approximation, **Nuclear Science and Engineering**, v.77, p.13-19, 1981.
- [19] GRANDJEAN, P. & SIEWERT, C. E. The  $F_N$  method in neutron transport theory - Part II: Applications and numerical results, **Nuclear Science and Engineering**, v.69, p.161-168, 1979.
- [20] ISHIGURO, Y. & GARCIA, R. D. M. Two media problems in two group neutron transport theory, **Nuclear Science and Engineering**, v.67, p.99-110, 1978.
- [21] ITO, S. A new method for analysis of pulsed fast Newton experiments, **Nuclear Science and Engineering**, v.49, p.548-567, 1972.

- [22] KUŠČER, I. & ZWEIFEL, P. F. Time dependent one-speed albedo problem for a semi-infinite medium. *Journal of Mathematical Physics*, v.6, p.1125-1130, 1965.
- [23] LARSEN, E. W. & POMRANING G. C. The  $P_N$  theory as an asymptotic limit of transport theory in planar geometry - I: Analysis, *Nuclear Science and Engineering*, v.109, p.49-75, 1991.
- [24] LEWIS, E. E. Progress in multidimensional neutron transport computation, *Nuclear Science and Engineering*, v.64 p.279-293, 1977.
- [25] MAIORINO, J. R. Computer code ANISN multiplying media and shielding calculation - I: Theory, WORKSHOP ON REACTOR PHYSICS CALCULATIONS FOR APPLICATIONS IN NUCLEAR TECHNOLOGY, 1990, Trieste.
- [26] McCORMICK, N. J. Inverse radiative transfer problems: A review, *Nuclear Science and Engineering*, v.112, p.185-198, 1992.
- [27] MOLER, C. & VAN LOAN, C. Nineteen dubious ways to compute exponential of a matrix, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v.20, p.801-836, 1978.
- [28] ÖZISIK, M. N. & SIEWERT, C. E. Several particular solutions of the one-speed transport equation, *Nuclear Science and Engineering*, v.40, p.491-494, 1970.
- [29] RULKO R. P., LARSEN E. W. & POMRANING G. C. The  $P_N$  theory as an asymptotic limit of transport theory in planar geometry - II: Numerical results, *Nuclear Science and Engineering*, v.109, p.76-85, 1991.
- [30] SANCHEZ, R. & McCORMICK, N. J. A review of neutron transport approximations, *Nuclear Science and Engineering*, v.80, p.481-535, 1982.
- [31] SEED, T. S. & ALBRECHT, R. W. Application of Walsh functions to neutron transport problems - Theory, *Nuclear Science and Engineering*, v.60, p.337-345, 1976.
- [32] SIEWERT, C. E. & BENDIST, P. The  $F_N$  method in neutron transport theory - Part I: Theory and applications, *Nuclear Science and Engineering*, v.69, p.156-160, 1979.

- [33] ——— & MAIORINO, J. R. A point source in a finite sphere  
*Journal of Quantum Spectroscopy and Radiative Transfer*,  
v.22, p.435-439, 1979.
- [34] STRECK, E. E. & VILHENA, M. T. Combinação do método  $P_N$  e transformada de Laplace na solução da equação de transporte de nêutrons unidimensional, In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 14., 1991, Nova Friburgo. Resumo dos Trabalhos... Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (1991) p.108.
- [35] ——— Solução analítica do problema inverso pelo método  $LTP_N$ , In: CONGRESSO GERAL DE ENERGIA NUCLEAR, 4., 1992, Rio de Janeiro. Anais ... Associação Brasileira de Energia Nuclear e Furnas Centrais Elétricas (1991) p.405-408.
- [36] ——— Solução do problema inverso de multigrupo para uma placa plana heterogênea pelo método  $LTP_N$ , In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE REATORES E TERMO-HIDRAULICA, 9., 1993, Caxambú. Anais ... a serem publicados.
- [37] STROUD, A. H. & SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall Inc., New Jersey (1986).
- [38] TRZASKA, Z. An efficient algorithm for partial fraction expansion of the linear matrix pencil inverse, *Journal of the Franklin Institute*, v.324, p.465-477, 1987.
- [39] VILHENA, M. T. & BARICHELLO, L. B. A new analytical approach to solve the neutron transport equation, *Kern-technik*, v.56, p.334-336, 1991.
- [40] VILHENA, M. T. & STRECK, E. E. An approximated analytical solution for the one-group slab-geometry neutron transport Equation, *Kern-technik*, v.57, p.196-198, 1992.



## A. INVERSÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA TRANSFORMADO

Observando a equação (2.6), que descreve o problema transformado, vê-se que a matriz associada é dependente do parâmetro  $s$ , o que dificulta a solução desse sistema para aproximações de maior ordem,  $N > 1$ . Para contornar esta dificuldade apresenta-se a alternativa de utilização da inversão numérica da transformada de Laplace por quadratura de Gauss [37]. Nesse caso o fluxo angular  $\psi(x, \mu)$ , é expresso como:

$$\psi(x, \mu) = \underset{\sim}{v} \sum_{k=1}^M A_k \left[ \frac{p_k}{x} \right] \bar{\underset{\sim}{\phi}} \left( \frac{p_k}{x} \right), \quad (\text{A.1})$$

com  $x \neq 0$ ;  $A_k$  e  $p_k$  são os pesos e as raízes da quadratura de Gauss, o vetor  $\underset{\sim}{v}$  é definido pela equação (2.16a) e o vetor  $\bar{\underset{\sim}{\phi}}(p_k/x)$  é definido como:

$$\bar{\underset{\sim}{\phi}} \left( \frac{p_k}{x} \right) = \mathbf{A}_N^{-1} \left( \frac{p_k}{x} \right) \underset{\sim}{\phi}(0). \quad (\text{A.2})$$

Aplicando as condições de contorno (2.1a) e (2.1b) obtém-se um sistema algébrico de ordem  $N + 1$  para a determinação das componentes de  $\underset{\sim}{\phi}(0)$ . Conseqüentemente o fluxo angular fica determinado pela expressão (A.1).

A inversão numérica da solução transformada foi aplicada aos problemas descritos nas secções 4.7 e 4.9 e os resultados obtidos para o fluxo escalar médio, usando oito pontos de quadratura,  $M = 8$ , foram comparados com os resultados obtidos

pela inversão analítica e são apresentados nas tabelas A.1 e A.2, considerando as aproximações  $LTP_1$  e  $LTP_2$ .

Tabela A.1 - Comparação entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio utilizando inversão numérica e analítica da transformada de Laplace para uma placa homogênea.

N	Posição	Inversão Numérica	Inversão Analítica
1	0	$8.377671 \times 10^{-01}$	$8.377670 \times 10^{-01}$
	50	$1.741734 \times 10^{-02}$	$1.741731 \times 10^{-02}$
	100	$1.175609 \times 10^{-04}$	$1.175605 \times 10^{-04}$
3	0	$8.289001 \times 10^{-01}$	$8.289001 \times 10^{-01}$
	50	$1.634925 \times 10^{-02}$	$1.634922 \times 10^{-02}$
	100	$1.176904 \times 10^{-04}$	$1.176900 \times 10^{-04}$

Tabela A.2 - Comparação entre os valores obtidos para o fluxo escalar médio utilizando inversão numérica e analítica da transformada de Laplace para uma placa heterogênea.

N	Posição	Inversão Numérica	Inversão Analítica
1	0	$6.202022 \times 10^{-01}$	$6.202022 \times 10^{-01}$
	20	$4.291185 \times 10^{-09}$	$4.291196 \times 10^{-09}$
	70	$2.817682 \times 10^{-12}$	$2.817822 \times 10^{-12}$
	100	$1.377434 \times 10^{-15}$	$1.377508 \times 10^{-15}$
3	0	$6.272912 \times 10^{-01}$	$6.272913 \times 10^{-01}$
	20	$4.023025 \times 10^{-09}$	$4.022938 \times 10^{-09}$
	70	$3.085190 \times 10^{-11}$	$3.085291 \times 10^{-11}$
	100	$2.248359 \times 10^{-14}$	$2.248442 \times 10^{-14}$

Os resultados mostram que a inversão numérica é uma alternativa viável para a inversão da transformada de Laplace quando a inversão analítica não for possível ou for muito complexa.

## B. O ALGORITMO DE TRZASKA

O sistema linear resultante da aplicação da transformada de Laplace ao sistema de equações diferenciais ordinárias  $P_N$ , descrito no capítulo 2 pela equação (2.6), e no capítulo 3 pela equação (3.6), é dado pela expressão

$$A(s) \bar{\phi}(s) = \phi(0) , \quad (B-1)$$

na qual os índices que diferenciam a matriz  $A_N$ , para um grupo de energia, da matriz  $A_{GN}$ , para multigrupo, são omitidos neste apêndice, pois o procedimento aqui descrito se aplica em ambos os casos.

Para resolver o sistema (B.1) é preciso obter a matriz inversa  $A^{-1}(s)$ , o que não pode ser feito numericamente dada a existência do parâmetro  $s$ . O algoritmo de Trzaska [38], descrito a seguir, resolve esta questão.

Para tanto, a matriz  $A(s)$  é assim decomposta:

$$A(s) = sC_0 - C , \quad (B-2)$$

onde  $C_0$  e  $C$  são matrizes de dimensões  $n \times n$ . Substituindo (B-2) em (B-1) e resolvendo para  $\bar{\phi}(s)$  temos:

$$\bar{\phi}(s) = (sC_0 - C)^{-1} \phi(0) . \quad (B-3)$$

A matriz  $(sC_0 - C)^{-1}$  é então expandida em frações parciais, considerando que o polinômio característico de  $A(s)$ ,  $d(s)$ , possua zeros simples,

$$A^{-1}(s) = \frac{D(s)}{d(s)} = \frac{P_1}{s-s_1} + \frac{P_2}{s-s_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{s-s_{n-1}} + \frac{P_n}{s-s_n} . \quad (B-4)$$

Na expressão acima,  $d(s)$  e  $D(s)$  denotam respectivamente o determinante e a matriz adjunta de  $A(s)$ .

As matrizes parciais  $P_1, P_2, \dots, P_n$  na expressão (B-4) são independentes de  $s$  e expressas por:

$$P_k = \frac{D(s_k)}{d'(s_k)} , \quad k = 1, 2, \dots, n , \quad (B-5)$$

onde

$$d'(s_k) = \left. \frac{d}{ds} d(s) \right|_{s=s_k} , \quad k = 1, 2, \dots, n . \quad (B-6)$$

Assim conhecendo  $D(s)$  e  $d(s)$  pode-se facilmente obter as matrizes parciais  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Para determinar a matriz  $D(s)$  aplica-se o teorema de Cayley-Hamilton, ou seja:

$$A^n(s) + a_1(s) A^{n-1}(s) + \dots + a_{n-1}(s) A(s) + a_n(s) I = 0 , \quad (B-7)$$

onde  $I$  denota a matriz identidade e os coeficientes  $a_k(s)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) são os coeficientes do polinômio característico de  $A(s)$ . A equação (B-7) pode ser reescrita como:

$$I = \frac{-1}{a_n(s)} [A^n(s) + a_1(s) A^{n-1}(s) + \dots + a_{n-1}(s) A(s)] . \quad (B-8)$$

Prémultiplicando ambos os lados da equação (B-8) por  $A^{-1}(s)$  obtém-se:

$$A^{-1}(s) = \frac{-1}{a_n(s)} [A^{n-1}(s) + a_1(s)A(s)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(s) I] . \quad (B-9)$$

Esta expressão estabelece que a inversa da matriz  $A(s)$  pode ser expressa em termos de suas sucessivas potências inteiras de ordem  $n-k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) prémultiplicadas pelos coeficientes correspondentes  $a_{k-m}(s)$  com  $a_0(s)=1$ .

Assim, substituindo (B-9) na equação (B-3) obtém-se a seguinte expressão para a inversa da matriz  $A(s)$ :

$$A^{-1}(s) = \frac{-1}{a_n(s)} \sum_{m=0}^{n-1} a_m(s) A^{n-m-1}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{s-s_k} . \quad (B-10)$$

Agora, vê-se a partir da expressão (B-10) que, para calcular a inversa da matriz  $A(s)$  todos os coeficientes  $a_{k-m}(s)$  e potências sucessivas da matriz  $A(s)$  devem ser determinadas.

Para tal um algoritmo eficiente foi desenvolvido usando o triângulo de Pascal. Para esse propósito pode-se observar que os coeficientes  $a_k(s)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) podem ser representados na seguinte forma:

$$a_k(s) = a_{k,k} s^k + a_{k,k-1} s^{k-1} + \dots + a_{k,1} s + a_{k,0}, \quad (B-11)$$

onde  $a_{k,m}$  são números reais  $m = 0, 1, \dots, k$ .

Além disso é fácil ver que a  $k$ 'ésima potência da matriz  $A(s)$  pode ser expressa como:

$$A^k(s) = A_{k,k} s^k + A_{k,k-1} s^{k-1} + \dots + A_{k,1} s + A_{k,0}. \quad (B-12)$$

As matrizes constantes  $A_{k,m}$  ( $m = 0, 1, \dots, k$ ) podem ser facilmente calculadas de acordo com o diagrama mostrado na figura B.1. O uso do diagrama para calcular todas as matrizes  $A_{k,m}$  e os coeficientes  $a_{k,m}$  ( $k, m = 0, 1, \dots, n, m \leq k$ ) será explicado a seguir.

Levando em conta as equações (B-11) e (B-12) pode-se estabelecer que

$$D(s) = D_{n-1} s^{n-1} + D_{n-2} s^{n-2} + \dots + D_1 s + D_0, \quad (B-13)$$

onde  $D_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) são matrizes constantes expressas como:

$$D_k = \sum_{\substack{h=0, j \leq h \\ q=0, r \leq q}}^{n-1} a_{h,j} A_{q,r}, \quad (B-14)$$

com  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $h+q = n-1$  e  $j+r = k < n-1$ .

Substituindo a equação (B-13) na equação (B-5) obtém-se as seguintes expressões para as matrizes  $P_k$  :

$$P_k = q_k [D_{n-1} s_k^{n-1} + D_{n-2} s_k^{n-2} + \dots + D_1 s_k + D_0], \quad (B-15)$$

onde

$$q_k = - [\dot{a}_n(s_k)]^{-1}, \quad (B-16)$$

e

$$\dot{a}_n(s_k) = \left. \frac{d}{ds} a_n(s) \right|_{s=s_k}, \quad (B-17)$$

com  $k = 1, 2, \dots, n$ .

## B.1 O Triângulo de Pascal Matricial

Todos os cálculos das matrizes parciais  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) na expansão (B-1) podem ser realizados de acordo com o diagrama mostrado na figura B.1. Este apresenta uma forma semelhante ao triângulo de Pascal. Neste triângulo a matriz  $s^m A_{k,m}$  é anexada ao nó  $(k,m)$  formado pela intersecção da  $k$ 'ésima e da  $m$ 'ésima linhas ( $k, m = 1, 2, \dots, n$ ). Para determinar a matriz  $s^m A_{k,m}$  é recomendado o uso da regra da "letra V". Deste modo esta matriz é relacionada diretamente com as duas matrizes localizadas nos nós superiores que correspondem aos topos da "letra V" no triângulo de Pascal. Assim a regra da "letra V" deve ser aplicada da seguinte maneira: A matriz localizada no vértice inferior de "V" é a soma da matriz no vértice superior esquerdo de "V" multiplicada por  $(-C)$  e da no vértice superior direito de "V" multiplicada por  $sC_0$ , como é mostrado pelas setas externas na figura B.1. Esta regra também se aplica aos nós localizados nos lados do triângulo. Neste caso as matrizes em todos os vértices superiores direitos de "V" para o lado direito e as matrizes em todos os vértices superiores esquerdos de "V" para o lado esquerdo são zero. Então, a partir da regra da letra "V", tem-se

- para o lado esquerdo do triângulo:

$$A_{k,k} = A_{k-1,k-1} C_0 = C_0^k, \quad (B-18a)$$

- para o lado direito do triângulo:

$$A_{k,0} = A_{k-1,0} (-C) = (-1)^k C^k, \quad (B-18b)$$



- para os nós interiores do triângulo:

$$A_{k,m} = A_{k-1,m}(-C) + A_{k-1,m-1}C_0, \quad (B-18c)$$

com  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$  e  $m < k$ .

O diagrama apresentado na figura B.1 também pode ser usado no cálculo dos coeficientes  $a_k(s)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), descrito pela equação (B-11). É fácil mostrar que os coeficientes constantes  $a_{k,m}$  podem ser calculados de acordo com a regra do "topo da árvore", a qual estabelece que o coeficiente  $a_{k,m}$  localizado no nó inferior do "topo da árvore" no interior do triângulo de Pascal é obtido como o traço da soma das matrizes correspondentes a todos os nós que aparecem na parte superior do "topo da árvore", tal que cada matriz desta soma é multiplicada por um coeficiente  $a_{k,m}$ , cujos índices resultam da diferença entre os índices correspondentes ao nó inferior do "topo da árvore" e os índices do nó em questão. Para os nós localizados nos lados do triângulo, a mesma regra usada no cálculo das matrizes é aplicável. Pela regra do "topo da árvore" pode-se escrever:

- para o lado esquerdo do triângulo:

$$a_{k,k} = \frac{-1}{k} \text{traço} (A_{k,k} + \sum_{m=1}^{k-1} a_{m,m} A_{k-m,k-m}), \quad (B-19a)$$

- para o lado direito do triângulo:

$$a_{k,0} = \frac{-1}{k} \text{traço} (A_{k,0} + \sum_{m=1}^{k-1} a_{m,0} A_{k-m,0}), \quad (B-19b)$$

- para os nós interiores do triângulo:

$$a_{k,m} = \frac{-1}{k} \text{ traço } (A_{k,m} + \sum_{\substack{h=0, j \leq h \\ q=0, r \leq q}}^{k-1} a_{h,j} A_{q,r}), \quad (\text{B-19c})$$

sendo  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $h+q = k$  e  $j+r = m < k$ .

A mesma regra do "topo da árvore" pode ser usada para calcular as matrizes  $D_k$ , uma vez calculadas todas as matrizes  $A_{k,m}$  e todos os coeficientes  $a_{k,m}$ , como segue:

- para o lado esquerdo do triângulo:

$$D_{n-1} = A_{n-1,n-1} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{m,m} A_{n-1-m,n-1-m}, \quad (\text{B-20a})$$

- para o lado direito do triângulo:

$$D_0 = A_{n-1,0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{m,0} A_{n-1-m,0}, \quad (\text{B-20b})$$

- para os nós interiores do triângulo:

$$D_k = A_{n-1,k} + \sum_{\substack{h=0, j \leq h \\ q=0, r \leq q}}^{n-1} a_{h,j} A_{q,r}, \quad (\text{B-20c})$$

com  $k = 1, 2, \dots, n-2$ ,  $h+q = n-1$  e  $j+r = k < n-1$ .

Assim o uso das regras da "letra V" e do "topo da árvore" fornece um algoritmo eficiente para o cálculo da matriz inversa  $A(s)$ . Tendo calculado todos os  $a_{k,m}$  e  $A_{k,m}$  ( $k, m = 1, 2, \dots, n$ ) ( $m \leq k$ ) a inversa de  $A(s)$  pode ser obtida de acordo com as expressões (B-10), (B-14) e (B-15).

Finalmente cabe ressaltar que esse algoritmo apresenta as vantagens da não necessidade de inversão de matrizes, todas as matrizes envolvidas no cálculo serem constantes e, com pequenas alterações, poder ser aplicado a sistemas singulares e sistemas degenerados.

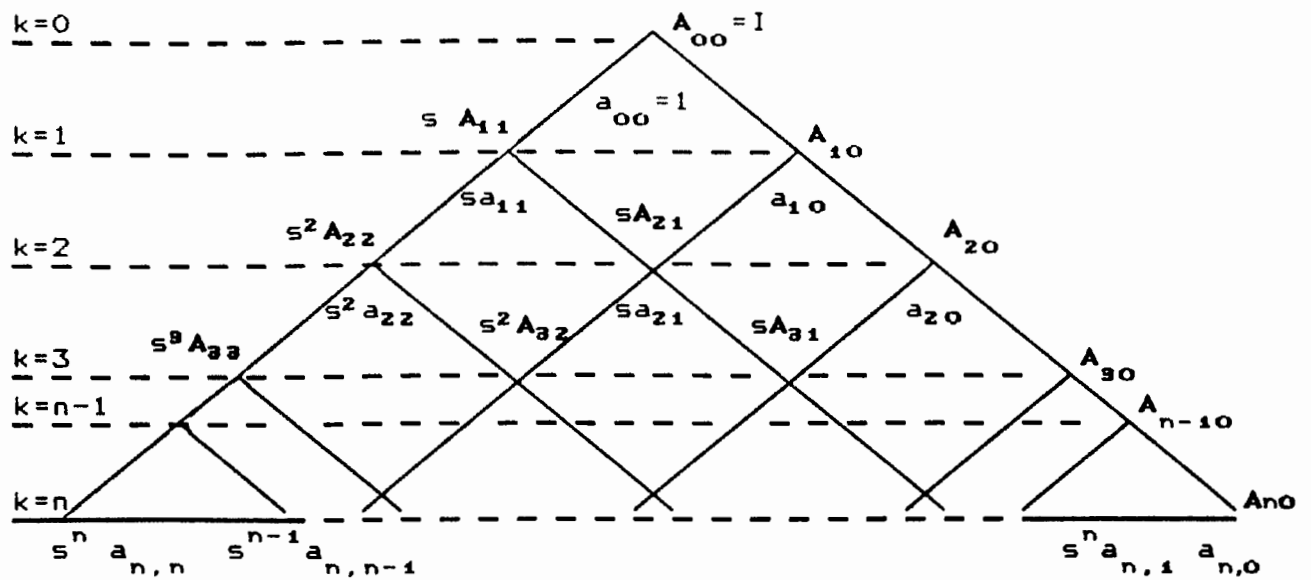


Figura B.1 - Forma matricial do triângulo de Pascal.