

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas,  
Metalúrgica e Materiais (PPGEM)

**Influência da Incerteza dos Teores no Planejamento de  
Lavra Aplicado ao Sequenciamento de Longo Prazo**

Pablo Koury Cherchenevski

Dissertação para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre  
2015

Pablo Koury Cherchenevski

**Influência da Incerteza dos Teores no Planejamento de  
Lavra Aplicado ao Sequenciamento de Longo Prazo**

Dissertação desenvolvida no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro, Departamento de Engenharia de Minas da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais – PPGEM, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Tecnologia Mineral

Orientador: Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

Porto Alegre  
2015

Pablo Koury Cherchenevski

## **Influência da Incerteza dos Teores no Planejamento de Lavra Aplicado ao Sequenciamento de Longo Prazo**

Esta dissertação foi analisada e julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração Metalurgia Extrativa / Tecnologia Mineral, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora designada pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

---

Orientador: Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

---

Coordenador do PPGEM: Prof. Dr. Carlos Pérez Bergmann

Banca examinadora:

Dr. Diego Machado Marques (DIGAMMA)

Prof. Dr. Rodrigo de Lemos Peroni (DEMIN/UFRGS)

Prof. Dr. Vanessa Cerqueira Koppe (DEMIN/UFRGS)

À minha mãe Márcia, aos  
meus irmãos Michel,  
Caroline e Gabriele, pelo  
apoio e dedicação.

## AGRADECIMENTO

Ao Prof. Dr. João Felipe C. L. Costa, pela orientação na elaboração desse trabalho incentivando meu crescimento profissional, sempre depositando sua confiança em minha capacidade, além de sua amizade.

Aos Eng. de minas Paulo Mello e Diego Machado Marques por valiosas discussões acerca do assunto abordado.

Ao Eng. de minas Éder Griebler pelo apoio e incentivo ao longo de minha carreira profissional, além de sua amizade.

A todos os colegas e amigos do LPM que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Minas (DEMIN) e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM).

À Companhia Vale pela disponibilização dos dados e informações necessárias para a realização deste estudo. Em especial a Evangelina Apparício da Silva, Maurício Gomide e Tiãozito Cardoso pela valiosa ajuda quanto às informações solicitadas.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida.

“O mais importante de tudo é nunca deixar de se perguntar. A curiosidade tem sua própria razão de existir.”

Albert Einstein

# Resumo

O mapeamento da incerteza dos teores através de métodos de simulação geoestatística é uma metodologia que está começando a ser amplamente utilizada na indústria mineira. No entanto, o uso correto desse intervalo de incerteza para os processos subsequentes à avaliação de recursos ainda carece de entendimento e aplicação no setor industrial, onde o modelo de krigagem é empregado para o planejamento de mina. O sequenciamento da produção de longo prazo, com o objetivo de maximizar o Valor Presente Líquido (VPL), é uma das etapas mais importantes no planejamento de lavra e, portanto, o acesso à informação da variabilidade dos teores torna-se de grande importância permitindo a maximização dos lucros e da extração dos recursos.

O objetivo deste estudo é avaliar o impacto da incerteza geológica no planejamento de lavra de modo a definir um sequenciamento a partir das simulações. Para isso ser alcançado, propõe-se uma análise probabilística incorporando as incertezas dos teores no sequenciamento de lavra, e quantificando, através de um índice de classificação proposto no estudo, os potenciais ganhos e riscos de perda associado a cada cenário sequenciado.

O método de co-simulação por bandas rotativas é utilizado para gerar cenários equiprováveis. Em seguida, o sequenciamento de lavra é definido para cada cenário de teor simulado utilizando um software de otimização. Então, cada sequência de extração dos blocos obtida foi reavaliada para cada simulação de teor. Além disso, um índice de classificação é utilizado para definir o sequenciamento de lavra que gera o maior VPL. Por fim, é realizada uma comparação entre a opção de planejamento selecionada pela metodologia proposta e o modelo utilizado tradicionalmente na indústria obtido a partir de interpolações lineares (krigagem) dos teores.

**Palavras chave:** Incerteza dos teores, Planejamento de lavra, Sequenciamento de lavra.

# Abstract

Mapping grade uncertainty through geostatistical simulation is becoming widely used in the mining industry. However, the proper use of this uncertainty interval for subsequent decision making processes still lacks of understanding and use, where a grade kriging model is mostly employed for mine planning. The long-term scheduling aiming at maximizing Net Present Value (NPV) is one of the most important stages in mine planning, and therefore the assessment of grade variability is of great importance and allowing maximizing profit and resources extraction.

The aim of this study is to evaluate the impact of geological uncertainty in mine planning in order to define the best scheduling given grade uncertainty derived from the simulations. For this to be achieved, it is proposed a probabilistic analysis incorporating grade uncertainties in the mining sequencing and quantifying, through a proposed classification index, the potential gains and risks of loss associated with each sequenced scenario.

Turning bands algorithm is used to generate equally probable scenarios. Next, it is defined the mining sequence for each grade simulated scenario using an optimization software. Then, each block extraction sequence obtained is re-evaluated for each grade simulation. Furthermore, a classification index is used to select the schedule which leads to the highest NPV. Finally, a comparison is performed with the selected schedule and the one obtained using the model traditionally used based on kriged grades.

**Keywords:** Grade Uncertainty, Mine Planning, Mining Schedule.



## Lista de Figuras

Figura 2.1. Comparativo de mapas interpolados e simulados. Adaptado de Rossi e Deustch (2014).....	24
Figura 2.2. - Projeção das linhas simuladas pelo algoritmo de bandas rotativas. ....	27
Figura 2.3. Mapa de localização das amostras de $P_2O_5$ para o domínio do bebedourito, onde X (leste) e Y (norte). ....	33
Figura 2.4. Mapa de localização das amostras de $P_2O_5$ para o domínio do foscorito, onde X (leste) e Y (norte).....	33
Figura 2.5. Histograma da variável $P_2O_5$ para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio bebedourito. ....	34
Figura 2.6. Histograma da variável $P_2O_5$ para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio foscorito. ....	34
Figura 2.7. Histograma da variável CaO para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio bebedourito. ....	35
Figura 2.8. Histograma da variável CaO para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio foscorito. ....	35
Figura 2.9. Gráfico de dispersão no qual é possível analisar a correlação entre as variáveis $P_2O_5$ e CaO para o domínio do (a) bebedourito e (b) foscorito. ...	37
Figura 2.10. Histograma das variáveis de (a) $P_2O_5$ e (b) CaO no espaço gaussiano para o domínio do bebedourito. ....	39
Figura 2.11. Histograma das variáveis de (a) $P_2O_5$ e (b) CaO no espaço gaussiano para o domínio do foscorito.....	39
Figura 2.12. Correlogramas experimentais para a variável $P_2O_5$ no domínio do bebedourito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de	

continuidade espacial (N45°Dip0°), (b) direção intermediária (N135°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical). ..... 42

Figura 2.13. Correlogramas experimentais para a variável CaO no domínio do bebedourito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N45°Dip0°), (b) direção intermediária (N135°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical). ..... 43

Figura 2.14. Correlogramas experimentais cruzados para as variáveis CaO e P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma cruzado utilizado (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical)..... 44

Figura 2.15. Variogramas experimentais para a variável P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical). ..... 46

Figura 2.16. Variogramas experimentais para a variável CaO no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical). ..... 47

Figura 2.17 Variogramas experimentais cruzados para as variáveis CaO e P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma cruzado utilizado (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical). ..... 48

Figura 2.18. Variância das médias para (a) P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> e (b) CaO no domínio do bebedourito. .... 55

Figura 2.19. Variância das médias para (a) $P_2O_5$ e (b) CaO no domínio do foscorito.....	55
Figura 2.20. Verificação da estatística para as 50 realizações (linhas pretas) comparando-as aos histogramas acumulados dos dados amostrais desagrupados (linha vermelha) para as variáveis (a) $P_2O_5$ e (b) CaO no domínio do bebedourito.....	56
Figura 2.21. Verificação da estatística para as 50 realizações (linhas pretas) comparando-as aos histogramas acumulados dos dados amostrais desagrupados (linha vermelha) para as variáveis (a) $P_2O_5$ e (b) CaO no domínio do foscorito. ....	56
Figura 2.22. Modelo de correlograma utilizado para realizar as simulações (linha laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável $P_2O_5$ no domínio do bebedourito (linhas pretas).....	57
Figura 2.23. Modelo de correlograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável CaO no domínio do bebedourito (linhas pretas). ....	58
Figura 2.24. Modelo de correlograma cruzado utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial no domínio do bebedourito (linhas pretas). ....	58
Figura 2.25. Modelo de variograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável $P_2O_5$ no domínio do foscorito (linhas pretas).....	59
Figura 2.26. Modelo de variograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável CaO no domínio do foscorito (linhas pretas). ....	59

Figura 2.27. Modelo de variograma cruzado utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial no domínio do foscorito (linhas pretas). .....	60
Figura 3.1. Representação da função de transferência. (adaptado de Rossi e Deutsch, 2014). .....	63
Figura 3.2. Método tradicional (modelo determinístico ou singular) <i>versus</i> a integração da análise do risco (estocástico) para as etapas do projeto mineiro, tais como, modelagem de reservas, planejamento da produção e sequenciamento de lavra, e avaliação dos indicadores-chave do projeto (Adaptado de Ramazan <i>et al.</i> , 2007). .....	64
Figura 3.3. Representação esquemática de uma série de cavas aninhadas calculadas a partir de uma série de valores para a receita do bloco (Diedrich, 2012). .....	68
Figura 3.4. Fluxograma dos passos tradicionais para desenvolvimento de um plano de lavra. ....	69
Figura 3.5. Distribuição da incerteza do indicador chave do projeto (VPL), com ganho e perda potencial com relação ao ponto de referência MAR. ....	73
Figura 4.1. Fluxograma da definição dos domínios de minério e estéril para a litologia do bebedourito. ....	76
Figura 4.2. Fluxograma da definição dos domínios de minério e estéril para a litologia do foscorito. ....	77
Figura 4.3. Cava final pré-definida, considerando restrições físicas e parâmetros geotécnicos. ....	79
Figura 4.4. Seção A A' da cava final com exagero vertical de 1,5 vezes. A sequência de lavra dos blocos é apresentada de acordo com o ano de extração ao longo da vida da mina. ....	80
Figura 4.5. Seção B B' da cava final com exagero vertical 1,5 vezes. A sequência de lavra dos blocos é apresentada de acordo com o ano de extração ao longo da vida da mina. ....	80

Figura 4.6. Quantificação dos blocos para diferentes intervalos de RCP.....	85
Figura 4.7. Metodologia utilizada para construir a distribuição de probabilidade para os cenários de sequenciamento de lavra gerados. ....	86
Figura 4.8. Avaliação das incertezas do VPL para cada sequenciamento de lavra gerado dadas as incertezas dos teores nos blocos. ....	88
Figura 4.9. Análise do VPL utilizando a sequência de extração dos blocos de lavra obtido pelo E-type. A linha em azul é o VPL do E-type. A linha em laranja é o VPL da sequência escolhida para o E-type, mas com os modelos de teores de cada realização. ....	89
Figura 4.10. Escolha dos cenários (circulados em azul) para análise pelo índice de classificação. O primeiro quartil deve estar acima de 15 bilhões de reais. .	91
Figura 4.11. Índice calculado para o benefício dos blocos lavrados anualmente ao longo da vida da mina. O <i>down</i> representa o potencial risco de perda e o <i>up</i> o potencial risco de ganho econômico. ....	93
Figura 4.12. Índice calculado para o VPL dos blocos lavrados anualmente ao longo da vida da mina. O <i>down</i> representa o potencial risco de perda e o <i>up</i> o potencial risco de ganho econômico. ....	93

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1. Estatística dos dados originais e dos dados com corte. ....	36
Tabela 2.2. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável $P_2O_5$ (%) no domínio bebedourito. ....	51
Tabela 2.3. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável $CaO$ (%) no domínio bebedourito. ....	52
Tabela 2.4. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável $P_2O_5$ (%) no domínio foscorito. ....	53
Tabela 2.5. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável $CaO$ (%) no domínio foscorito. ....	54
Tabela 2.6. Correlação entre as variáveis co-simuladas com o mesmo caminho aleatório para o domínio do bebedourito. Ao lado do nome de cada variável é apresentado o respectivo número da realização dentre as 50 totais. ....	60
Tabela 2.7. Correlação entre as variáveis co-simuladas com o mesmo caminho aleatório para o domínio do foscorito. Ao lado do nome de cada variável é apresentado o respectivo número da realização dentre as 50 totais. ....	61

## Índice

Capítulo 1 .....	17
1. Introdução .....	17
1.1. Meta da dissertação .....	19
1.2. Objetivos específicos da dissertação .....	19
1.3. Metodologia.....	20
1.4. Organização da dissertação.....	20
Capítulo 2 .....	22
2. Simulação estocástica e aplicação em estudo de caso .....	22
2.1. Justificativa do uso das técnicas de simulação estocástica .....	22
2.2. Modelo de incerteza .....	24
2.3. Métodos de Simulação .....	25
2.4. Simulação por bandas rotativas .....	27
2.4.1. Co-Simulação: informação de dados secundários.....	29
2.5. Mudança de suporte.....	30
2.6. Estudo de caso .....	31
2.6.1. Geologia Local.....	31
2.6.2. Banco de dados.....	32
2.6.3. Definição do tamanho dos blocos utilizado na simulação.....	37
2.6.4. Transformação gaussiana .....	38
2.6.5. Análise da continuidade espacial.....	39
2.6.6. Verificação da multinormalidade.....	49
2.6.7. Geração dos modelos simulados.....	54

2.6.8. Validação das simulações .....	55
2.6.9. Tratamento dos dados simulados.....	61
2.7. Comentários finais.....	61
Capítulo 3.....	62
3. Conceitos de planejamento de lavra de longo prazo e definição de um índice de classificação .....	62
3.1. Função de transferência.....	62
3.2. Planejamento de lavra.....	64
3.2.1. Definição do teor de corte.....	65
3.2.2. Otimização de cava .....	66
3.2.3. Sequenciamento de lavra .....	70
3.3. Quantificação do risco.....	71
3.3.1. Índice de classificação.....	72
3.4. Considerações finais.....	74
Capítulo 4.....	75
4. Estudo de caso para a definição de um sequenciamento de lavra de longo prazo com base nas incertezas dos teores .....	75
4.1. Planejamento de lavra.....	75
4.2. Definição de minério e estéril .....	76
4.3. Função benefício.....	77
4.4. Cava final .....	78
4.5. Sequenciamento de longo prazo.....	81
4.6. Avaliação dos cenários sequenciados e aplicação do índice de classificação .....	85
4.6.1. Análise das distribuições e critérios de escolha .....	90



4.6.2. Índice de classificação.....	92
4.7. Considerações finais.....	94
Capítulo 5.....	95
5. Conclusões e Recomendações.....	95
5.1. Conclusões.....	95
5.2. Trabalhos futuros.....	96

## Capítulo 1

### Introdução

O sequenciamento de lavra e a previsão da flutuabilidade dos teores são fundamentais no planejamento de empreendimentos de mineração. O planejamento lida com a gestão eficaz da produção e dos fluxos de caixa de uma mina na ordem de milhões e/ou bilhões de dólares. O sequenciamento da produção a longo prazo, via de regra, é usado para maximizar o valor presente líquido (VPL) do projeto e centra-se no sequenciamento do minério a ser lavrado no espaço ao longo do tempo, respeitando limitações técnicas, financeiras e ambientais do empreendimento. A importância de incorporar incertezas e os riscos oriundos das fontes geológicas, mineiras e técnicas no sequenciamento de produção da mina é bastante relevante nos atuais projetos de mineração (adaptado de Dimitrakopoulos; Ramazan, 2004).

Existem incertezas em todas as etapas de um empreendimento mineiro. Diversas são as fontes dessas incertezas, desde os erros associados às análises químicas realizadas nas amostras obtidas por sondagem, passando pelas definições dos contatos em um modelo geológico e chegando a problemas de reconciliação na planta. Além disso, incertezas podem causar eventos não planejados que resultam em perdas financeiras e diminuem a chance de viabilidade do projeto (Li *et al.*, 2008).

Entende-se que a incerteza geológica tem crucial importância para o não atingimento das expectativas de um projeto, e engloba tanto a incerteza de contatos litológicos quanto a incerteza dos teores. Neste trabalho, o termo incerteza geológica refere-se apenas às incertezas dos teores.

A quantificação e o correto gerenciamento das incertezas dos teores permite que decisões tomadas no planejamento de longo prazo sejam incorporadas e executadas ao longo de todas as etapas de mineração. Ao quantificar as incertezas geológicas envolvidas durante o processo de estimativa, torna-se possível avaliar os riscos presentes nas etapas subsequentes do projeto, tais como configurações de cava, sequenciamento de

lavra e previsão de fluatibilidade dos teores que servirá para alimentação da usina, possibilitando a redução de custos durante o processo de beneficiamento de minério e uma maior recuperação de metal contido.

Tradicionalmente, métodos de interpolação (krigagem, polígonos, inverso do quadrado da distância) têm sido utilizados para representar a distribuição espacial dos teores e outros atributos de interesse em um modelo de blocos, para ser usado nas operações subseqüentes de controle de teores e planejamento de lavra. A principal desvantagem desses métodos de estimativa, é que eles são incapazes de reproduzir a variabilidade *in situ* dos teores do depósito, levando a uma expectativa de produção diferente do real (Dimitrakopoulos *et al.*, 2002).

Ao contrário da krigagem, o método de simulação geoestatística condicional (Journel, 1974) tem como objetivo reproduzir a variabilidade *in situ*, e a continuidade espacial dos dados originais, pela geração de imagens equiprováveis, condicionadas aos dados, que reproduzem as características estatísticas de 1ª e 2ª ordem dos dados amostrais. Deste modo, o grau de incerteza associado às estimativas pode ser avaliado (Goovaerts, 1997).

Os modelos obtidos pela simulação condicional possibilitam uma delimitação da amplitude de variação da distribuição dos teores (conhecido como espaço de incerteza) pela geração de cenários igualmente prováveis. Tais cenários vão alimentar funções de transferência com diferentes graus de complexidade (adaptado de Costa, 1997).

Os processos envolvidos em uma operação de lavra podem ser vistos como funções de transferência, que são modelos utilizados para descrição das operações ou sistemas reais (Godoy, 1997). Com isso, os modelos gerados pela simulação condicional geoestatística são considerados como possíveis cenários de lavra para definição do contorno de cava final e do sequenciamento de lavra para cada representação da realidade.

Neste contexto, esta dissertação estuda uma estratégia para definição de um sequenciamento de lavra levando em consideração a variabilidade dos teores baseada em dados oriundos de co-simulações geoestatísticas condicionais em um depósito de fosfato. Para o sequenciamento de lavra, são

considerados parâmetros econômicos, restrições físicas e operacionais. Por fim, é realizada uma comparação entre o cenário de sequenciamento obtido pela técnica proposta aqui e a metodologia utilizada tradicionalmente na indústria baseada em interpolação (krigagem), representada pelos teores médios dos blocos obtidos a partir das simulações.

### **1.1. Meta da dissertação**

A meta do presente estudo consiste em estudar uma metodologia que inclua a incerteza geológica no planejamento de lavra de longo prazo a fim de definir um cenário de sequenciamento de lavra que garanta determinado valor mínimo de retorno quanto ao investimento realizado.

### **1.2. Objetivos específicos da dissertação**

Por meio de um estudo de caso de um depósito de fosfato localizado na região sudoeste do estado de Minas Gerais, esta dissertação propõe atingir a sua meta cumprindo os seguintes objetivos específicos:

- avaliar a incerteza dos teores medindo a variabilidade *in situ* das variáveis de interesse utilizando o algoritmo de co-simulação por bandas rotativas;
- investigar o impacto das incertezas dos teores no sequenciamento de lavra a partir de cenários equiprováveis gerados pela simulação para os teores de fosfato, de modo a analisar a influência sobre o planejamento de lavra de longo prazo;
- estudar um sequenciamento de lavra através de uma abordagem probabilística com a utilização de um índice de classificação que quantifica os potenciais ganhos e riscos de perda associados;
- avaliar o cenário escolhido comparando-o ao procedimento de planejamento de lavra de longo prazo tradicionalmente utilizado pela indústria.

### **1.3. Metodologia**

A primeira etapa para o desenvolvimento da metodologia consiste em revisar o banco de dados, seguida da análise exploratória das variáveis de interesse. Em sequência, um número determinado de cenários equiprováveis é gerado para os teores de  $P_2O_5$  e  $CaO$ , a partir do uso de co-simulação por bandas rotativas. Os resultados são analisados e discutidos.

Utilizando cada cenário simulado como a possível representação de um cenário real do depósito, é realizada a valorização dos blocos para cada teor simulado através da aplicação de uma função benefício estabelecida. Esses blocos valorizados são sequenciados a partir da mesma cava final utilizando um software de otimização, gerando um sequenciamento de lavra para cada simulação de teores utilizada como dado de entrada. Após obtidos os cenários sequenciados, estes são avaliados através da distribuição dos possíveis valores de VPL (um para cada sequenciamento de lavra associado aos cenários gerados pela técnica de simulação).

Assim, é proposto o desenvolvimento de uma abordagem para escolha de um cenário para sequenciamento de lavra estocástico de longo prazo relativo a um atributo qualquer (teor, massa, metal, etc.), visando minimizar os riscos e os desvios das metas que estão relacionados aos principais indicadores de produção no processo.

Por fim, o cenário de sequenciamento escolhido é comparado com o modelo de planejamento tradicional utilizado pela indústria, representado pelo cenário de teores referente às médias das simulações (E-type).

### **1.4. Organização da dissertação**

Os capítulos seguintes dessa dissertação estão organizados da seguinte maneira:

- (i) O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica das técnicas de simulação geoestatística e a apresentação do estudo de caso, mostrando os detalhes da área de aplicação do estudo, com seus resultados e validações.

- (ii) O Capítulo 3 revisa, em geral, as técnicas de otimização de cava e sequenciamento de lavra aplicadas no planejamento de longo prazo.
- (iii) O Capítulo 4 inclui o estudo de caso, mostrando os dados utilizados e os procedimentos realizados para a geração de diferentes cenários sequenciados. A análise dos resultados é feita sobre a definição do sequenciamento de lavra que maximiza os potenciais ganhos e minimiza o risco de perda para o cenário escolhido. Ainda, uma comparação com o sequenciamento de lavra tradicionalmente utilizado mostra as vantagens potenciais ao se considerar incertezas no planejamento de lavra para etapas posteriores.
- (iv) O Capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas pelo trabalho e recomendações para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### **Simulação estocástica e aplicação em estudo de caso**

Este capítulo apresenta uma revisão dos conceitos matemáticos utilizados na geoestatística para mapear a distribuição da incerteza dos teores *in situ* das variáveis de interesse. Primeiramente, serão revistos os conceitos das técnicas de simulação estocástica. Em seguida, será apresentado o estudo de caso, cuja técnica utilizada foi a de co-simulação por bandas rotativas para gerar cenários equiprováveis de teores dos atributos de interesse  $P_2O_5$  e  $CaO$ .

#### **2.1. Justificativa do uso das técnicas de simulação estocástica**

O algoritmo de estimativa linear por krigagem proporciona à estimativa  $Z^*(u)$  em um ponto não amostrado de coordenadas  $u$  com base na informação dos  $n$  pontos vizinhos. Essa técnica se caracteriza por minimizar a variância do erro de estimativa, o que envolve a suavização das dispersões reais, com a subestimativa de valores altos e a superestimativa de valores baixos (Journel; Huijbregts, 1978). Essa suavização, não é específica da krigagem, mas é uma característica de todos os algoritmos de interpolação, não sendo uniforme, pois é zero nos pontos amostrais e vai aumentando à medida que se distancia destes (Goovaerts, 1997).

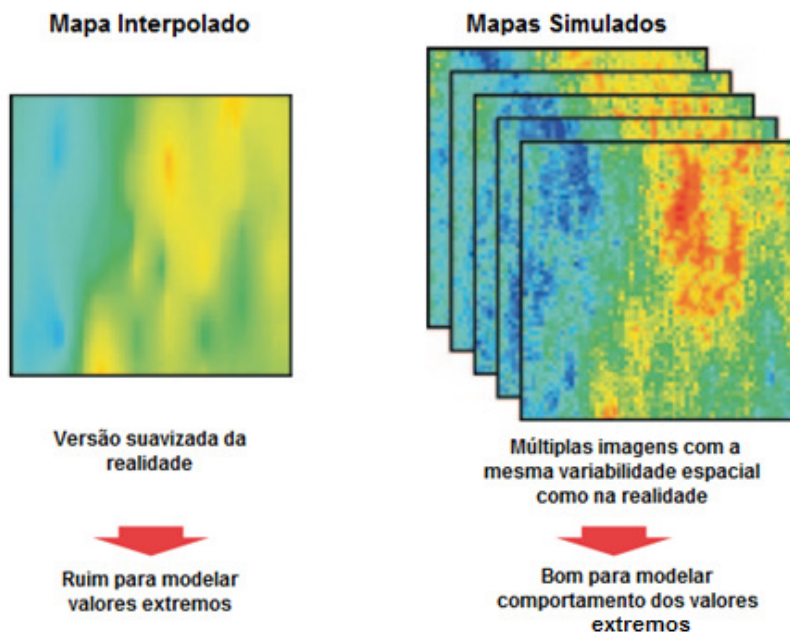
A simulação estocástica foi a solução adotada pelos geoestatísticos para resolver o problema da suavização da krigagem (Olea, 1999). Contudo, segundo o autor, com a simulação ganha-se em precisão global em detrimento da precisão local. Além disso, é a ferramenta utilizada para modelar a incerteza associada à estimativa (Deutsch, 2011), uma vez que a variância de krigagem foi reconhecida apenas como índice de configuração espacial dos pontos vizinhos próximos (Journel; Rossi, 1989). O conjunto de realizações de

cenários equiprováveis obtidos pela simulação estocástica proporciona uma medida visual e quantitativa da incerteza espacial (Goovaerts, 1997).

A estimativa fornece um valor que é, em média, tão próximo quanto possível do valor real (desconhecido), com base na definição de algumas premissas e/ou qualidade da amostra. A estimativa não apresenta viés, tem erro quadrático mínimo, usa combinações lineares dos dados disponíveis, e tem um efeito de suavização inevitável. Também, honra dados locais, é localmente mais precisa, e tem um efeito de suavização adequada para a visualização de tendências, mas é inadequada para reprodução de valores extremos e não fornece avaliação de incerteza local.

Modelos simulados fornecem valor médio similar ao modelo de blocos estimado, mas, além disso, eles combinados também oferecem um modelo conjunto de incertezas (Deutsch, 2011). Um modelo de recurso não deve incluir apenas um teor estimado, ou até mesmo uma distribuição estimada, mas também uma avaliação mais detalhada da incerteza e de suas consequências (Dimitrakopoulos, 1997). A simulação também honra os dados locais, mas, além disso, reproduz o histograma, a variabilidade espacial e é capaz de fornecer uma avaliação da incerteza. Isto implica que os valores extremos da distribuição original são preservados (Figura 2.1). O modelo de incerteza também fornece as ferramentas para análise de risco quando se aplica a ele uma função de transferência.





**Figura 2.1. Comparativo de mapas interpolados e simulados. Adaptado de Rossi e Deutsch (2014).**

## 2.2. Modelo de incerteza

Incerteza e risco devem ser distinguidos, uma vez que grandes incertezas, em alguns casos, não necessariamente podem conduzir a riscos significativos. Risco considera o impacto da incerteza sobre a aplicação que está sendo avaliada (Deutsch e Rossi, 2014). As incertezas estão associadas a todas as etapas de um projeto de mineração, destacando-se as incertezas geológicas e econômicas. Para mapear essas incertezas, se faz necessário a construção de um modelo de incerteza, através de algoritmos de simulações geoestatísticas, sendo essa técnica capaz de reproduzir estatisticamente as características do depósito.

A previsão da fluatuabilidade e das incertezas dos teores é uma aplicação onde a análise de risco é utilizada diretamente para tomar uma decisão econômica. Neste caso, as consequências do grau da incerteza estarão avaliando diretamente a melhor escolha com base no lucro máximo ou no menor risco de perda quanto ao não atingimento de determinada expectativa

econômica do projeto, utilizando-se de modelos probabilísticos e não apenas determinísticos.

Técnicas de simulação e os modelos resultantes de incerteza dependem fortemente da estacionariedade; tendências e desvios de estacionariedade afetam significativamente o modelo de incerteza, sua qualidade e utilidade.

A estacionariedade é verificada na prática quando os dois primeiros momentos estatísticos (média e covariância) são considerados, por isso a hipótese assumida é chamada estacionariedade de segunda ordem (Armstrong, 1998).

Um modelo não consegue reproduzir todas as possíveis fontes de incerteza, nem existe um modelo objetivo ou verdadeiro de incerteza: a incerteza é dependente do modelo. Isto foi discutido por autores como Journal e Kyriakidis (2004), Goovaerts (1997), entre outros. Normalmente, as simulações de modelos não podem capturar todas as possíveis fontes de incerteza que existem em um modelo de recurso.

A construção de modelos simulados é baseada no conjunto de dados. A discrepância entre os dois é conhecida como flutuações ergódicas (Deutsch e Journal, 1998).

### **2.3. Métodos de Simulação**

Segundo Goovaerts (1997), Deutsch e Journal (1998) a extensão ou o tamanho do espaço de incerteza depende de vários fatores, como:

- da quantidade de dados condicionantes e da qualidade das informações de entrada disponíveis;
- da função de transferência a ser utilizada para avaliar o risco;
- do algoritmo específico utilizado para gerar as realizações;
- do número de realizações: Deustch e Journal (1998) estabelecem que esse número deve ser tal que permita mapear a incerteza do parâmetro de estudo;

- dos parâmetros do variograma e das dimensões do tamanho do campo simulado (*grid*);

Os métodos de simulação existentes procuram determinar aleatoriamente a componente de erro com base no conhecido método de Monte Carlo. Assim, como o processo é aleatório, as realizações serão diferentes entre si, mas honrando a reprodução do histograma e da continuidade espacial do fenômeno, que é conhecido como precisão global (Deutsch; Journel, 1992).

Existem métodos de simulação para variáveis contínuas e discretas (ou categóricas), com abordagens gaussianas e dos indicadores, tais como simulação sequencial gaussiana (Isaaks, 1990) e simulação sequencial dos indicadores (Alabert, 1987). O primeiro é mais simples e mais rápido, embora mais restritivo em seus pressupostos básicos. O último é mais complicado, com base em várias técnicas de krigagem dos indicadores, e requer a definição de vários pontos de corte. Um modelo de blocos onde foi aplicado simulação condicional em múltiplas realizações resulta em um conjunto de valores ou realizações para cada bloco. Essas realizações, todas equiprováveis pela construção do modelo, descrevem o modelo de incerteza para cada bloco, ou seja, fornecem a função cumulativa de distribuição condicional (*ccdf*) para esse bloco. Um grande número de simulações é necessário para descrever essa *ccdf*. No entanto, um número menor é geralmente utilizado devido às limitações práticas, e entre 20 e 50 simulações são geralmente suficientes para caracterizar a gama de possíveis valores para a incerteza dos valores simulados (Deutsch e Rossi, 2014).

Devido à simplicidade de execução, os métodos sequenciais de simulação tornaram-se os algoritmos mais comuns e populares para a reprodução da distribuição espacial e da incerteza de diferentes variáveis nas ciências da Terra (Soares, 2001). Os métodos sequenciais têm por objetivo a geração das várias realizações conjuntas de  $N$  variáveis aleatórias condicionadas ao conjunto de dados (Goovaerts, 1997). Além destes, existem métodos de simulações não sequenciais, como é o caso do algoritmo de simulação por bandas rotativas.

## 2.4. Simulação por bandas rotativas

O método de simulação por bandas rotativas foi usado pela primeira vez por Chentsov (1957), em um caso especial de funções aleatórias Brownianas. A apresentação do método para uso em simulação geoestatística foi feita por Matheron (1973) sendo desenvolvido por Journel (1974).

O método é um gerador de números aleatórios no espaço para simulação de campos aleatórios correlacionados (Bras e Rodríguez-Iturbe, 1985), a partir de múltiplas simulações 1D, realizadas ao longo de linhas que podem ser rotacionadas em um espaço tridimensional. Este é o único modo capaz de gerar simulações não condicionais tridimensionais (Deutsch e Rossi, 2014).

Para utilizar o método, é necessário que os dados originais sejam transformados para o espaço gaussiano, com média zero e variância um.

A Figura 2.2 representa as linhas de varredura no plano, etapa que consiste nas simulações dos campos aleatórios independentes. O valor da simulação no ponto  $x$  do plano é a soma dos valores assumidos nas projeções de  $x$  nas diferentes linhas através das simulações unidimensionais correspondentes (Chilès e Delfiner, 1999).

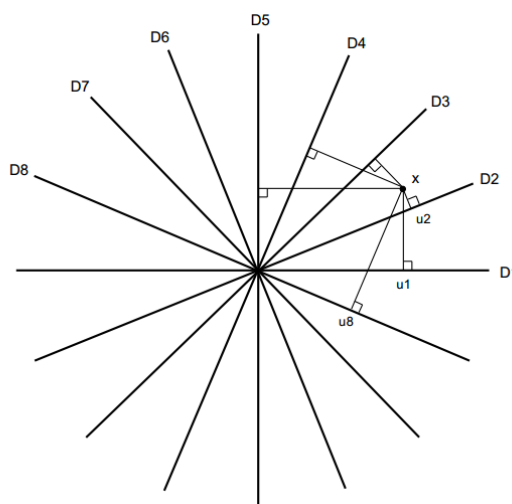


Figura 2.2. - Projeção das linhas simuladas pelo algoritmo de bandas rotativas.

Fonte: Chilès e Delfiner (1999).

A realização de um campo simulado em um ponto  $x$  é dado pela Equação 2.1 (Journel e Huijbregts, 1978; Lantuéjoul, 2002):

$$Z^s(x_i) = \frac{1}{\sqrt{Q}} * \sum_{q=1}^Q Z(x_{qi}) \quad (2.1)$$

Onde:

$Z^s(x_i)$  : é o ponto simulado  $Z$  no espaço tridimensional na localização  $x_i$ ;

$Z(x_{qi})$ : é o ponto simulado  $Z$  no local da projeção ortogonal de  $x_i$  na  $q$ -ésima linha;

$Q$ : número total de linhas que dividem o espaço.

Journel (1974) e Lantuéjoul (2002) explicam o método com mais detalhes.

As etapas gerais para o desenvolvimento do método estão listadas abaixo:

- linhas aleatórias (bandas) são geradas, com diferentes azimutes em torno de um centroide;
- simulações não condicionais dos dados transformados para o espaço gaussiano são realizadas ao longo de cada linha honrando o histograma e o variograma dos dados transformados;
- valores ao longo das linhas são linearmente interpolados para os nós da malha, quanto mais linhas menos interpolações são realizadas;
- condicionamento dos dados: realizado somando a estimativa de krigagem, condicionada aos dados, com o mapa residual obtido através da subtração dos valores interpolados não condicionais com os valores estimados condicionados aos valores simulados não condicionais nos locais dos dados;
- retro-transformação dos dados gaussianos nos respectivos valores do espaço original.

Além disso, é importante ressaltar que o número de bandas (linha) é parâmetro essencial para garantir a qualidade das simulações.

Os métodos de simulação geoestatística são importantes para a modelagem da incerteza e análise de risco, que servirá de base para definições no planejamento de lavra. A seleção do algoritmo a ser utilizado depende

essencialmente da aplicabilidade e da confiabilidade dos resultados da metodologia empregada. O método de simulação por bandas rotativas foi utilizado neste estudo para mapear as incertezas dos atributos de interesse, devido ao ganho no tempo computacional quando comparado com outros métodos.

#### **2.4.1. Co-Simulação: informação de dados secundários**

A simulação de múltiplas variáveis correlacionadas utilizando o algoritmo de bandas rotativas tem metodologia semelhante à simulação de uma variável independente por bandas rotativas, conforme explicado anteriormente. Inicialmente, o algoritmo de co-simulação realiza as simulações não condicionais das variáveis no espaço gaussiano. Em seguida, o condicionamento dos dados é realizado da seguinte maneira: somam-se os resultados da estimativa por cokrigagem (condicionada aos dados) com o mapa residual. Este é proveniente da subtração entre os valores simulados não condicionais e os valores estimados usando as variáveis simuladas não condicionadas, disponíveis nos locais coincidentes com os dados amostrais. Por fim, realiza-se a retro-transformação dos valores simulados para o espaço original e valida-se os resultados (Deutsch e Rossi, 2014).

Os modelos de continuidade espacial utilizados na co-simulação devem conter modelos diretos e cruzados e respeitar o modelo linear de correogionalização. Goovaerts (1997) detalha o método da cokrigagem e suas peculiaridades.

##### **2.4.1.1. Semivariograma cruzado:**

O semivariograma cruzado, ferramenta utilizada para obter o modelo de continuidade espacial entre duas ou mais variáveis, é definido como a semi esperança matemática do produto dos incrementos das variáveis  $z_i(u)$ ,  $z_i(u + h)$  e  $z_j(u)$ ,  $z_j(u + h)$  separados por um vetor  $h$ , ou seja,

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [Z_i(u_\alpha) - Z_i(u_\alpha + h)] \cdot [Z_j(u_\alpha) - Z_j(u_\alpha + h)] \quad (2.2)$$

O semivariograma cruzado é simétrico, pois é calculado a partir dos incrementos das variáveis, não sendo afetado pela mudança no sentido do vetor de separação  $h$ .

## 2.5. Mudança de suporte

Os blocos ou SMUs (unidade seletiva de lavra) são as menores unidades seletivas utilizadas no planejamento e operações de lavra. Segundo Journel e Huijbregts (1978), em cada realização, o valor do bloco corresponde à média dos valores simulados nos pontos (ou locais) que discretizam o respectivo bloco. Assim, o tamanho de suporte utilizado para as realizações das simulações deve garantir o acesso aos valores dos blocos do depósito para os diferentes atributos, de maneira que seja possível a obtenção da função de distribuição acumulada condicional (ccdf) para cada bloco.

De acordo com a relação de Krige (Journel e Huijbregts, 1978), a variância da distribuição dos valores dos blocos deve ser menor que a variância da distribuição dos pontos simulados. A variância da distribuição de blocos pode ser calculada de acordo com a Equação 2.3:

$$\sigma^2 \left( \frac{p}{A} \right) = \sigma^2 \left( \frac{B}{A} \right) + \sigma^2 \left( \frac{p}{B} \right) \quad (2.3)$$

onde:

$\sigma^2 \left( \frac{p}{A} \right)$  = variância dos pontos (p) em todo depósito (A);

$\sigma^2 \left( \frac{B}{A} \right)$  = variância dos blocos (B) em todo depósito (A);

$\sigma^2 \left( \frac{p}{B} \right)$  = variância dos pontos (p) dentro de cada bloco (B).

Sabe-se a variância dos pontos em todo depósito ( $\sigma^2 \left( \frac{p}{A} \right)$ ) obtida pela variância dos dados amostrais, e a variância dentro do bloco ( $\sigma^2 \left( \frac{p}{B} \right)$ ), encontrada considerando o modelo de continuidade espacial para os valores do atributo e o número de pontos dentro de cada bloco (B) (Journel e Huijbregts, 1978; Isaaks e Srivastava, 1989). Com isso, pode-se encontrar a variância dos blocos em todo o depósito ( $\sigma^2 \left( \frac{B}{A} \right)$ ).

A variância dos blocos ao longo do depósito deve ser reproduzida nos cenários simulados (considerando as flutuações ergódicas). Assim, a média dos pontos simulados dentro do bloco é considerada representativa do valor do bloco e o número de nós simulados dentro de cada bloco é considerado suficiente (Koppe, 2009).

## **2.6. Estudo de caso**

O estudo de caso desta dissertação foi realizado com os dados provenientes do depósito de fosfato do corpo mineral Salitre, localizado na região de Patos de Minas, Triângulo Mineiro/Alto Parnaíba, no estado de Minas Gerais. O depósito pertence à companhia Vale Fertilizantes.

A área de estudo possui aproximadamente 4 km de extensão na direção leste-oeste e 6 km de extensão na direção norte-sul, com profundidade máxima de 300 metros. A mina não está em operação. A previsão para iniciar a produção é 2017.

Para a parte de análise exploratória dos dados e a realização das simulações foi utilizado o *software* Isatis® (Bleines et al., 2001).

### **2.6.1. Geologia Local**

O complexo mineral Salitre se caracteriza por ser uma estrutura dômica, cujo topo sofreu um aplainamento extensivo, formando uma superfície laterizada, com cotas ao redor de 1200m, que marcam a superfície Sul Americana.

O complexo de Salitre (ou Salitre I) apresenta duas intrusões satélites denominadas Salitre II e Salitre III, e possui uma forma oval distorcida, com dimensões de 7 km na direção norte-sul e 5 km na direção leste-oeste aproximadamente. A intrusão mais nova, que ocupa a parte centro-norte do domo é bebedourítica-carbonatítica – foscorítica e fortemente mineralizada em fosfatos e titânio. A rocha principal dessa intrusão é o bebedourito, intrudido por carbonatitos e foscoritos, na porção central do domo. A mais antiga ocorre na



parte sul do domo e é bem definida pelos anéis de quartzito que a cercam. Nessa área podem ser mapeadas rochas fenitizadas (resultantes do metassomatismo de contato devido a intrusões alcalinas e carbonáticas) e bebedouritos intemperizados.

### **2.6.2. Banco de dados**

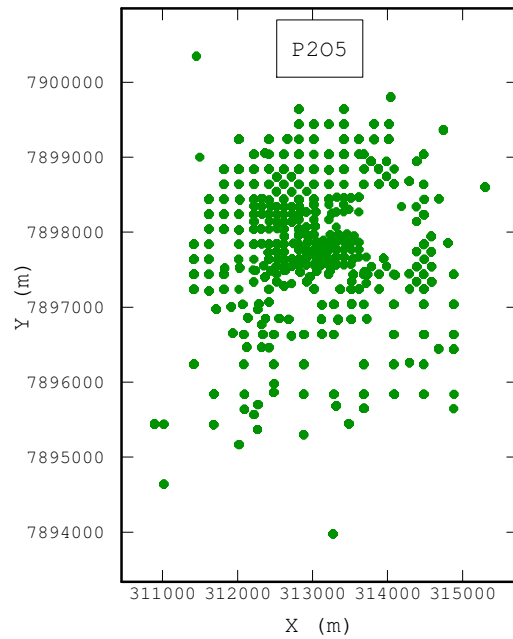
O banco de dados possui 5858 amostras e foi dividido em dois grandes domínios de minério (bebedourito e foscorito) para a análise e realização das simulações. Os bebedouritos são rochas de estrutura média e grossa, tendo por constituintes principais a olivina, anfibólios, a apatita e a magnetita-titanita. O carbonato desta rocha é muito variável. Os foscoritos são rochas plutônicas, ultramáficas, compostas por magnetita e um dos silicatos, forsterita, diopsídio ou flogopita. O teor de apatita e magnetita varia bastante, ora um predominando sobre o outro. As amostras são regularizadas em 5 metros.

Os furos de sondagem foram realizados em uma malha com três espaçamentos regulares distintos. A distância entre as amostras varia de 400m, 200m e 150m nas direções leste e norte. As variáveis analisadas são os teores de  $\text{Al}_2\text{O}_3(\%)$ ,  $\text{CaO}(\%)$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3(\%)$ ,  $\text{MgO}(\%)$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5(\%)$ ,  $\text{SiO}_2(\%)$  e  $\text{TiO}_2(\%)$ . O  $\text{P}_2\text{O}_5$  é a variável de interesse da exploração mineral e sua correlação com o composto contaminante  $\text{CaO}$  deve ser levada em consideração, conforme será detalhado ao longo da dissertação.

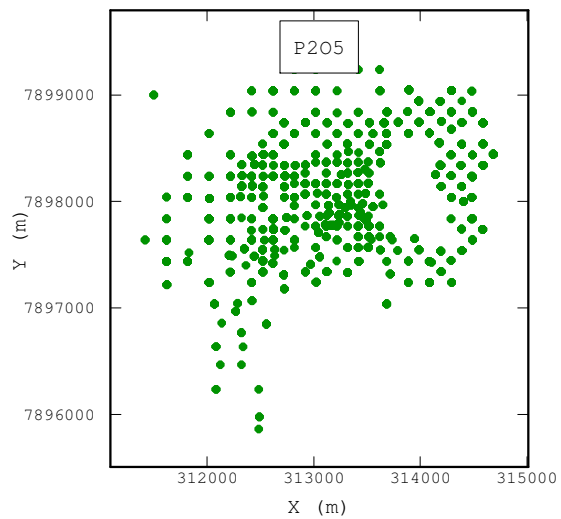
#### **2.6.2.1. Análise exploratória dos dados**

O depósito de fosfato do corpo mineral Salitre está localizado no Distrito de Salitre de Minas, município de Patrocínio/ MG, a 430 km a oeste de Belo Horizonte.

Para fins deste estudo não se utilizou as amostras que não pertenciam as litologias de minério consideradas. O mapa de localização das amostras de  $\text{P}_2\text{O}_5$  pode ser visto na Figura 2.3 e na Figura 2.4 para o domínio do bebedourito e do foscorito, respectivamente.



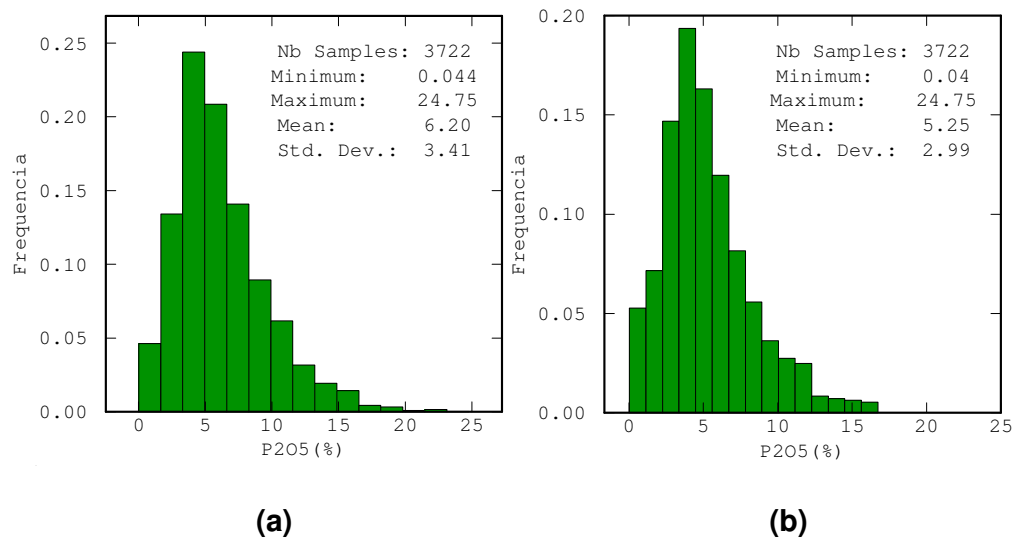
**Figura 2.3. Mapa de localização das amostras de  $P_2O_5$  para o domínio do bebedourito, onde X (leste) e Y (norte).**



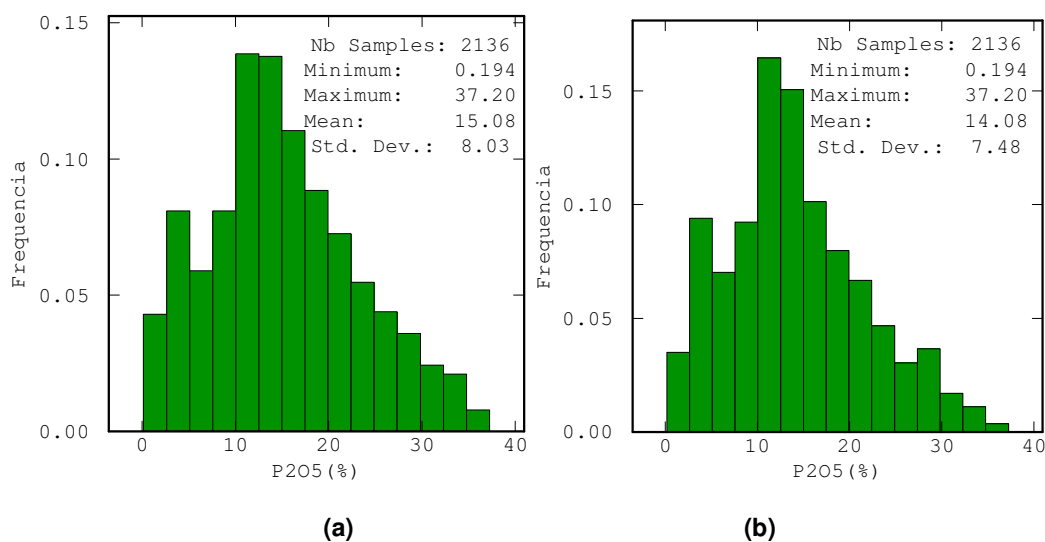
**Figura 2.4. Mapa de localização das amostras de  $P_2O_5$  para o domínio do foscrito, onde X (leste) e Y (norte).**

Como a amostragem não foi realizada de forma regular, é necessário realizar o desagrupamento amostral. O desagrupamento amostral foi realizado utilizando o método das células móveis (Isaaks e Srivastava, 1989).

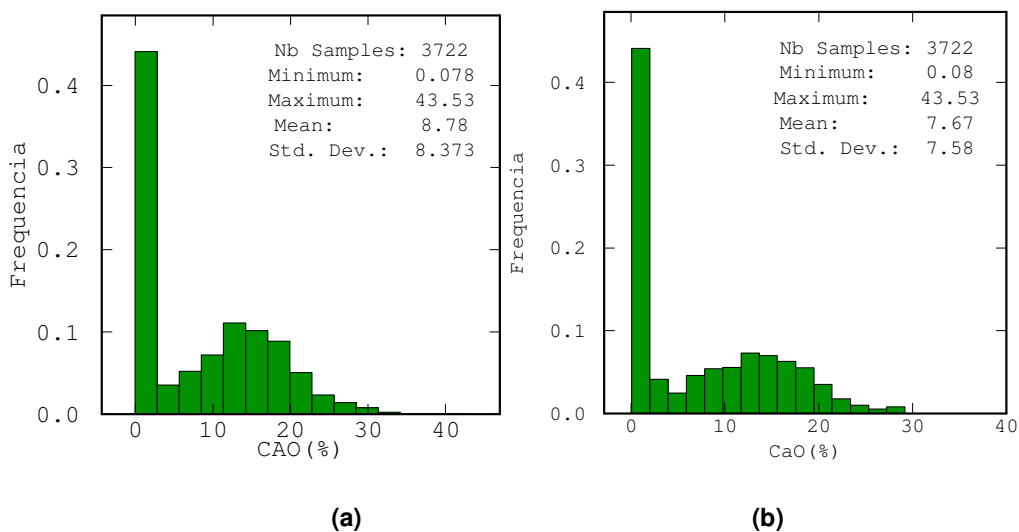
As Figuras 2.5 a 2.8 apresentam os histogramas de frequências e as estatísticas dos dados originais (a) e dos dados desagrupados (b) para os domínios do bebedourito e foscorito para as variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$ .



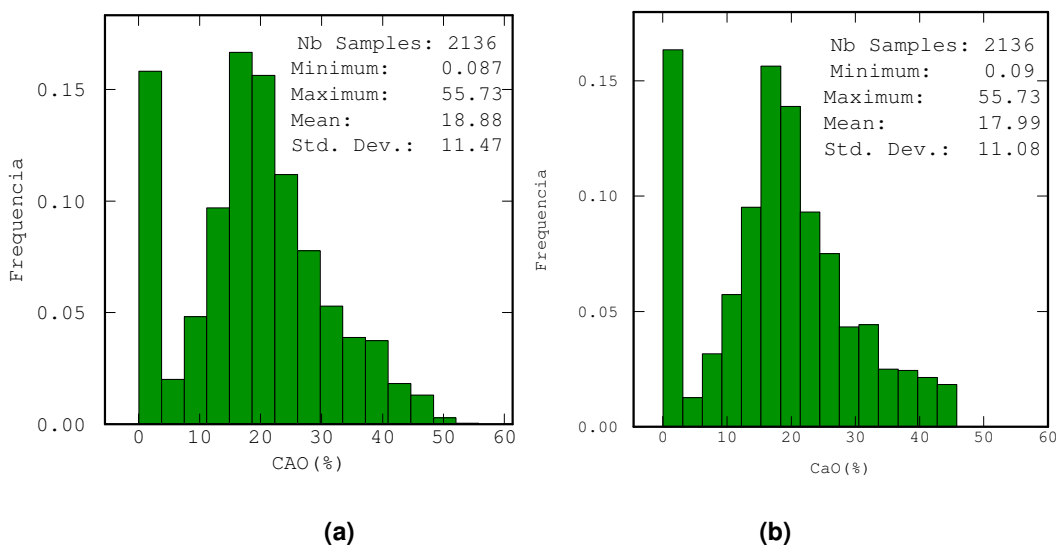
**Figura 2.5. Histograma da variável  $P_2O_5$  para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio bebedourito.**



**Figura 2.6. Histograma da variável  $P_2O_5$  para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio foscorito.**



**Figura 2.7. Histograma da variável CaO para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio bebedourito.**



**Figura 2.8. Histograma da variável CaO para os (a) dados originais e (b) desagrupados no domínio foscorito.**

Conforme é possível observar nas figuras acima, o atributo CaO possui a presença de duas populações tanto para o domínio do bebedourito quanto para o domínio do foscorito. Essas amostras de teor quase zero de CaO não formam um domínio divisível, devido à disposição espacial das amostras presentes em cada população.

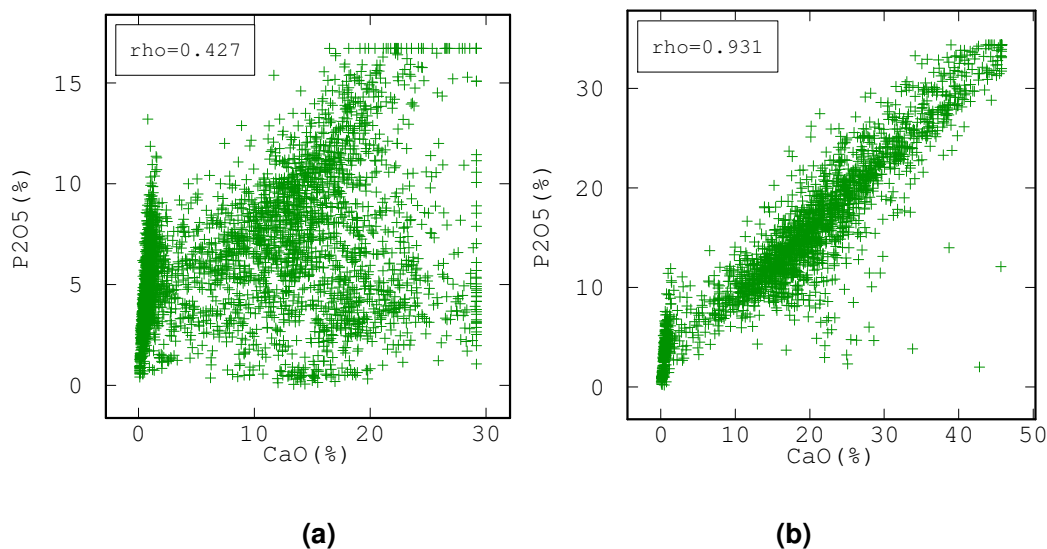
Após a análise inicial do banco de dados, foi realizada uma análise quanto à presença de valores extremos, aplicando um corte superior para limitar os teores das variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$ . O método para escolha do valor a ser limitado foi baseado no gráfico de probabilidade acumulada. A Tabela 2.1. Estatística dos dados originais e dos dados com corte. compara as estatísticas dos dados originais com os dados limitados pelo quantil 99, teor ao qual 99% dos dados estão abaixo de determinado valor.

**Tabela 2.1. Estatística dos dados originais e dos dados com corte.**

Estatística dos dados com corte	Dados Originais				Dados com Corte			
	Bebedourito		Foscorito		Bebedourito		Foscorito	
	$P_2O_5$	CaO	$P_2O_5$	CaO	$P_2O_5$	CaO	$P_2O_5$	CaO
<b>Núm. Amostras</b>	3722	3722	2136	2136	3722	3722	2136	2136
<b>Média</b>	6,2	8,78	15,08	18,88	6,18	8,75	15,07	18,86
<b>Mínimo</b>	0,04	0,08	0,19	0,09	0,04	0,08	0,19	0,09
<b>Máximo</b>	24,75	43,54	37,20	55,73	16,72	29,17	34,37	45,77

### 2.6.2.2. Estatística bivariada

A relação entre as variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$  é de extrema importância para prever a recuperação no beneficiamento mineral. Devido a isso, a correlação entre essas duas variáveis deve ser levada em consideração durante a simulação dos teores. A Figura 2.9 apresenta o gráfico de espalhamento entre os atributos de interesse com a correlação para cada domínio. Nota-se, que existe um comportamento diferente dos teores próximo a zero do atributo  $CaO$ , não apresentando correlação com os atributos de  $P_2O_5$ . Tal fato se deve, possivelmente, a mistura de populações do atributo  $CaO$ , conforme mencionado anteriormente, bem como a processos de alteração ocorridos (laterização).



**Figura 2.9.** Gráfico de dispersão no qual é possível analisar a correlação entre as variáveis P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> e CaO para o domínio do (a) bebedourito e (b) foscorito.

É possível observar que a correlação entre os atributos de interesse P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> e CaO é baixa para o domínio do bebedourito, ao contrário da correlação apresentada para o domínio do foscorito. Com o objetivo de honrar a correlação entre os domínios litológicos analisados, a co-simulação foi aplicada para ambas litologias.

### 2.6.3. Definição do tamanho dos blocos utilizado na simulação

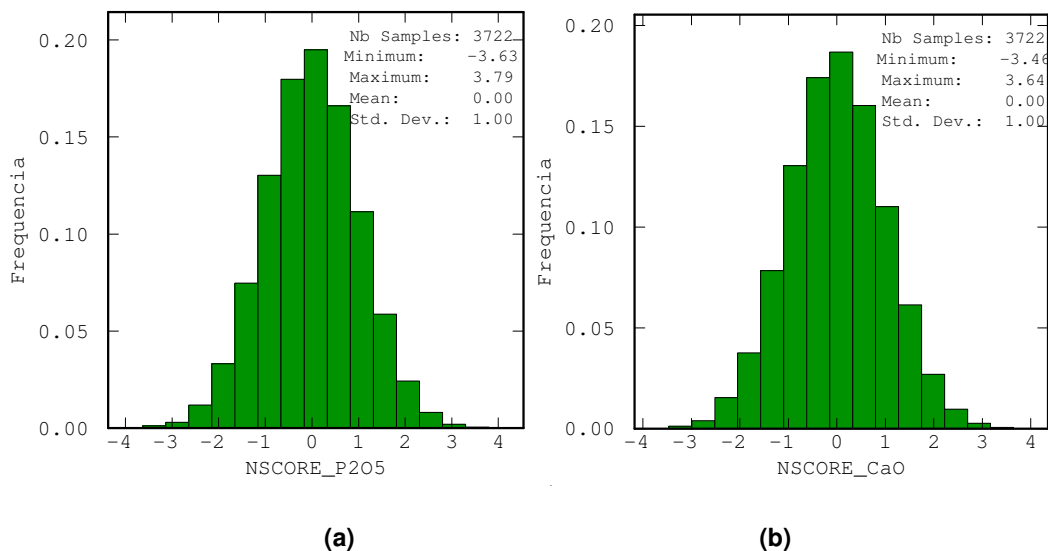
O tamanho de bloco considerado durante a lavra tem dimensões de 25m x 25m x 10m. Pelo fato de a simulação requerer um suporte pontual, as realizações foram criadas utilizando pontos espaçados em um modelo de blocos com dimensões de 6,25m x 6,25m x 5m. Portanto, cada bloco utilizado na lavra foi discretizado em 32 pontos. Este espaçamento foi escolhido pelo ganho de tempo computacional com relação a tamanhos menores, além disso, é suficiente para se obter a função de distribuição acumulada condicional (*ccdf*) do bloco.

#### 2.6.4. Transformação gaussiana

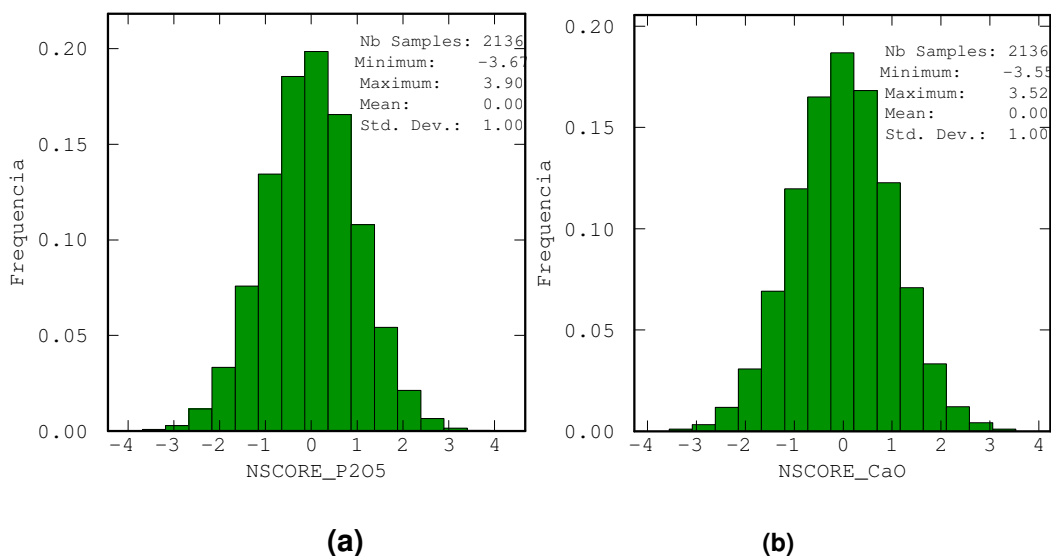
Na simulação por bandas rotativas, a ideia é derivar um valor de uma distribuição baseada na teoria associada às funções randômicas multigaussianas. O modelo multigaussiano assume, entre outras coisas, que para um atributo cuja distribuição dos valores apresenta um histograma normal padrão, qualquer combinação de valores desse atributo apresenta distribuição normal. A distribuição condicional local acumulada de probabilidade é estimada por meio da krigagem simples, a qual define a média e a variância da distribuição. Journel e Huijbregts (1978) descrevem com detalhes os conceitos teóricos sobre o modelo multigaussiano.

A utilização do modelo multigaussiano para construção das distribuições normais assume que o atributo em estudo seja normal padrão. Entretanto, na maioria dos casos em geociências, a distribuição experimental original não apresenta um comportamento multigaussiano. Assim, a distribuição experimental das  $n$  informações  $z(u\alpha)$  ( $\alpha=1,\dots,n$ ) é transformada em uma distribuição de  $n$  valores  $y(u\alpha)$  ( $\alpha=1,\dots,n$ ) por meio da função de transformação normal (Goovaerts, 1997).

A transformação dos dados originais para o espaço gaussiano das variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$  para cada domínio está apresentada na Figura 2.10 e 2.11.



**Figura 2.10.** Histograma das variáveis de (a)  $P_2O_5$  e (b) CaO no espaço gaussiano para o domínio do bebedourito.



**Figura 2.11.** Histograma das variáveis de (a)  $P_2O_5$  e (b) CaO no espaço gaussiano para o domínio do foscorito.

### 2.6.5. Análise da continuidade espacial

A etapa seguinte à normalização dos dados consiste da análise da continuidade espacial do fenômeno através de ferramentas específicas (neste trabalho são utilizados: correlograma e variograma). Goovaerts (1997)



descreve com detalhe os conceitos de variograma, de correlograma e os ajustes matemáticos para a análise da continuidade espacial. Além destes, existem outras funções para medir a continuidade espacial, as quais não serão consideradas neste estudo.

Baseado na hipótese de estacionariedade de 2ª ordem, que assume a existência da variância, e, portanto, de uma variância a *priori* finita (Journel; Huijbregts, 1978) pode-se descrever a continuidade espacial de uma variável por meio do variograma/correlograma experimental constituído a partir dos valores amostrados.

O estudo da continuidade espacial teve início com o cálculo do variograma/correlograma ao longo do furo, no qual obtém-se o efeito pepita que será usado no resto da modelagem da continuidade espacial. Foi utilizado este tipo de metodologia para obtenção do efeito pepita, pois, através dele podemos medir as diferenças quadráticas médias entre amostras em distâncias muito pequenas (5 metros). Com o objetivo de construir um modelo que capture as principais características espaciais do atributo em estudo, parte-se para a determinação dos variogramas/correlogramas direcionais. Através da modelagem dos mesmos, podemos determinar o comportamento espacial do fenômeno com as direções de maior, intermediária e menor continuidade espacial.

#### **2.6.5.1. Variograma dos dados no espaço original**

A análise da continuidade espacial para os dados no espaço original é realizada primeiramente, pois a validação das simulações será realizada com os mesmos. Os dados podem apresentar uma menor continuidade espacial quando comparados aos dados transformados para o espaço gaussiano, porém as direções de continuidade espacial são as mesmas.

Para ambos os domínios geológicos (bebedourito e foscorito), foram realizadas a co-simulação por bandas rotativas, sendo necessário modelar os variogramas/correlogramas diretos e cruzados para as variáveis de interesse ( $P_2O_5$  e  $CaO$ ).

Existem diversas maneiras de modelar as covariâncias simples e cruzadas, entre eles destaca-se o modelo linear de correionalização (Journel e Huijbregts, 1978) utilizado para construção dos modelos da continuidade espacial nos dois domínios geológicos citados neste trabalho. Basicamente, ao se utilizar o modelo linear de correionalização, a condição imposta na equação da cokrigagem é respeitada, ou seja, as variáveis primárias e secundárias apresentam matriz de covariância positiva definida. Para isso, os modelos dos variogramas/correlogramas diretos e cruzados devem apresentar o mesmo modelo básico, isto é, possuir as mesmas estruturas e os mesmos alcances (Isaaks e Srivastava, 1989).

O resultado da modelagem do correlograma pode ser verificado nas Equações 2.4 a 2.6, e nas Figuras 2.12 a 2.14 para as variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$  respectivamente, para o domínio do bebedourito.

Modelo de correlograma para o domínio do bebedourito para a variável  $P_2O_5$ :

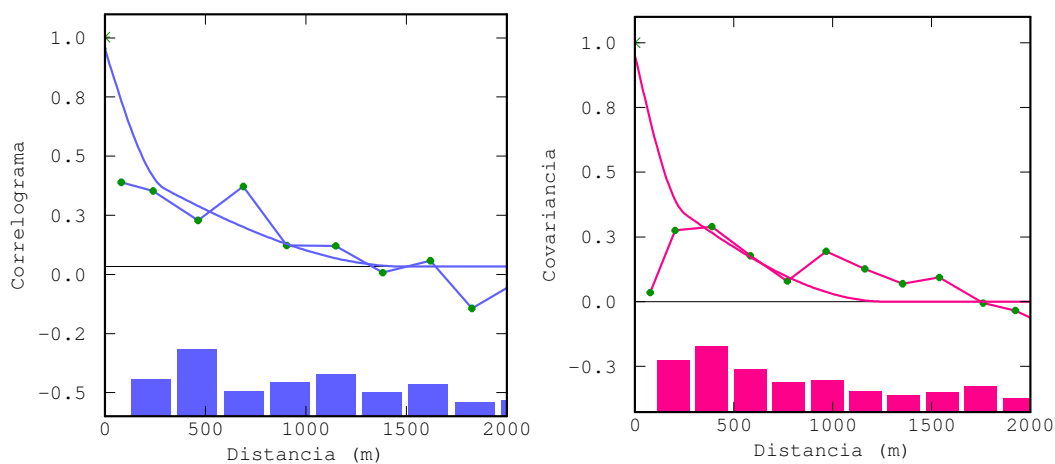
$$\gamma(h)=0.05+0.47\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{300m}+\frac{N135^\circ}{300m}+\frac{\text{vert}}{60m}\right)+0.48\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{1500m}+\frac{N135^\circ}{1400m}+\frac{\text{vert}}{70m}\right) \quad (2.4)$$

Modelo de correlograma para o domínio do bebedourito para a variável  $CaO$ :

$$\gamma(h)=0.05+0.43\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{300m}+\frac{N135^\circ}{300m}+\frac{\text{vert}}{60m}\right)+0.52\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{1500m}+\frac{N135^\circ}{1400m}+\frac{\text{vert}}{70m}\right) \quad (2.5)$$

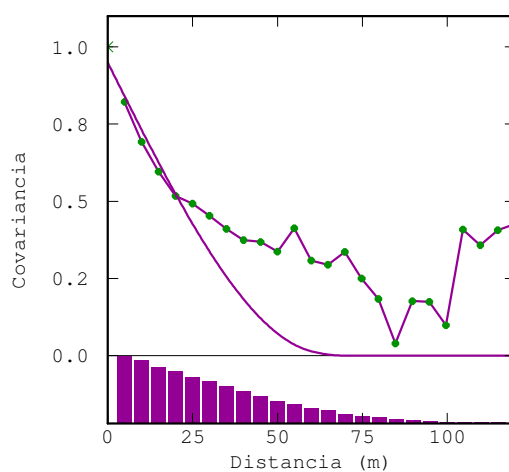
Modelo de correlograma cruzado para o domínio do bebedourito para a variável  $P_2O_5$  e  $CaO$ :

$$\gamma(h)=0.05+0.17\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{300m}+\frac{N135^\circ}{300m}+\frac{\text{vert}}{60m}\right)+0.20\times\text{Sph}\left(\frac{N45^\circ}{1500m}+\frac{N135^\circ}{1400m}+\frac{\text{vert}}{70m}\right) \quad (2.6)$$



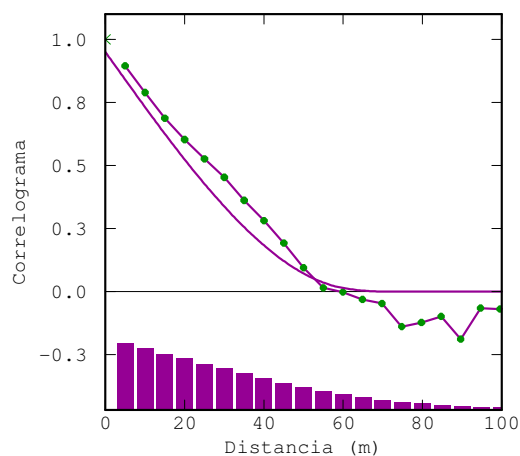
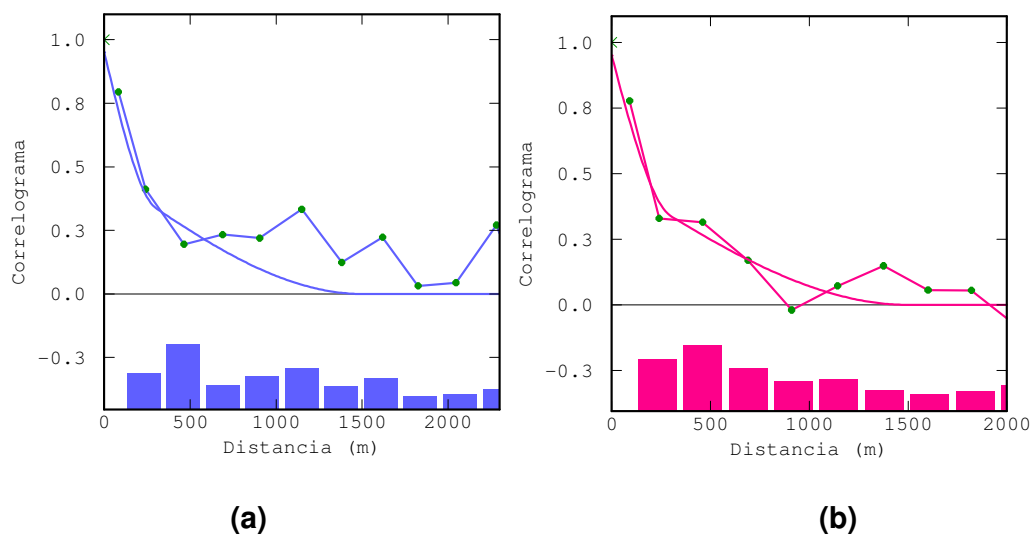
(a)

(b)

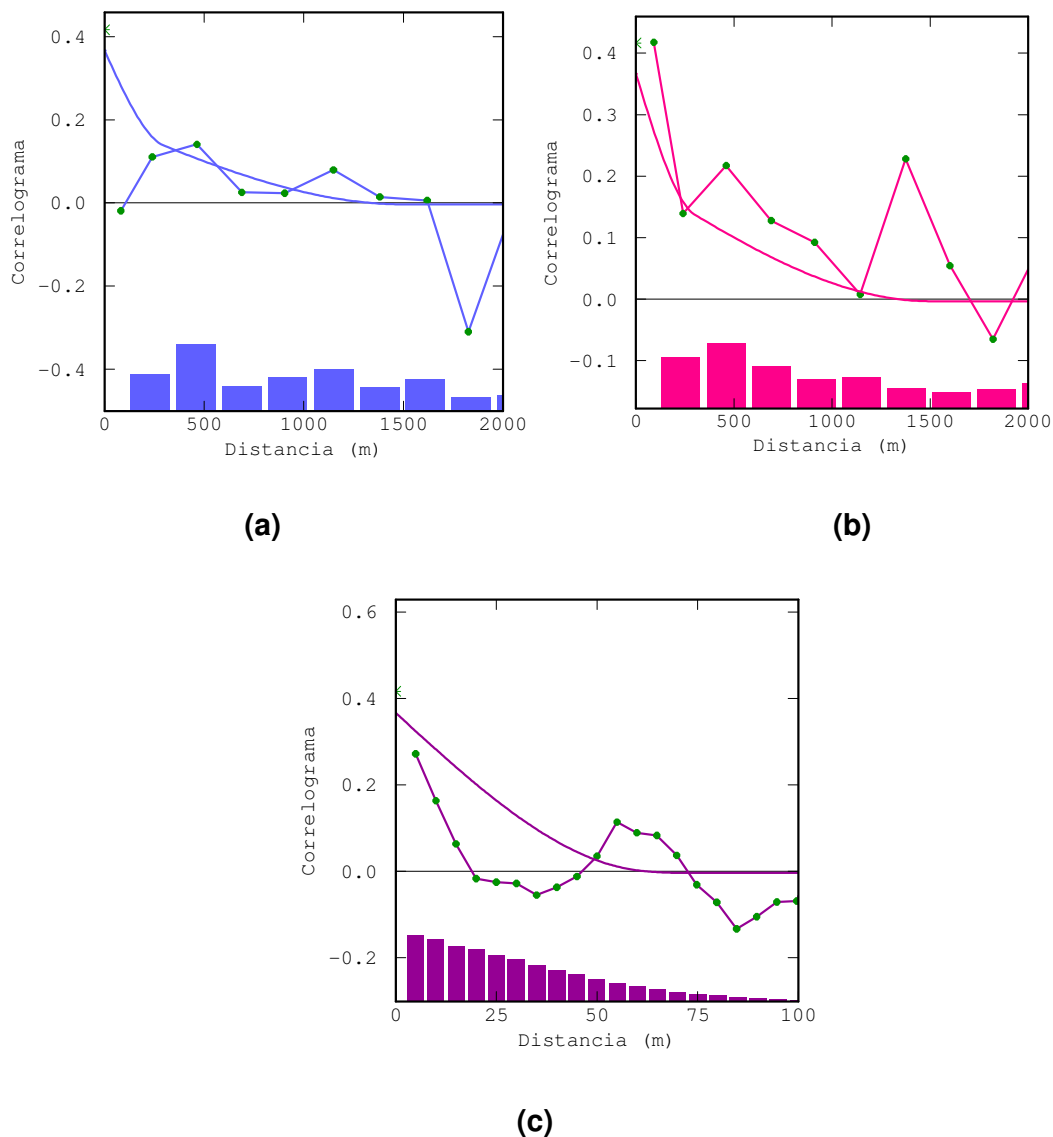


(c)

**Figura 2.12. Correlogramas experimentais para a variável  $P_2O_5$  no domínio do bebedourito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial ( $N45^\circ Dip0^\circ$ ), (b) direção intermediária ( $N135^\circ Dip0^\circ$ ) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**



**Figura 2.13. Correlogramas experimentais para a variável CaO no domínio do bebedourito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial ( $N45^{\circ}Dip0^{\circ}$ ), (b) direção intermediária ( $N135^{\circ}Dip0^{\circ}$ ) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**



**Figura 2.14. Correlogramas experimentais cruzados para as variáveis CaO e  $P_2O_5$  no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de correlograma cruzado utilizado (linha contínua). Os correlogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial ( $N135^\circ Dip0^\circ$ ), (b) direção intermediária ( $N45^\circ Dip0^\circ$ ) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**

Verifica-se que o modelo de correlograma definido para o domínio do bebedourito apresenta comportamento praticamente isotrópico. A direção de maior continuidade espacial definida como azimuth  $N135^\circ$  e mergulho (*dip*)  $0^\circ$  é adotada devido aos furos de sondagem estarem alinhados com esta direção e, também, por definições referentes à geologia do depósito.

O resultado da modelagem do variograma para o domínio do foscorito pode ser verificado nas Equações 2.7 a 2.9, e nas Figuras 2.15 a 2.17 apresentadas abaixo.

Modelo variográfico para o domínio do foscorito para a variável  $P_2O_5$ :

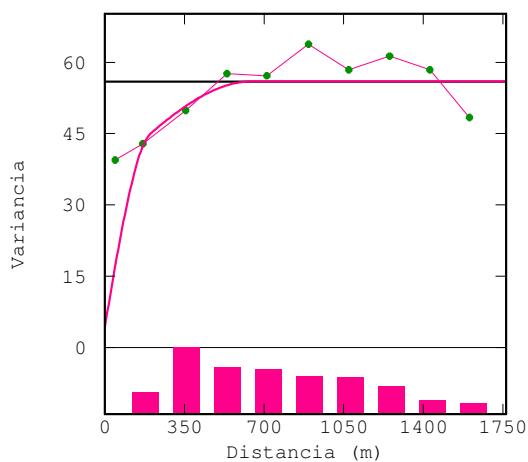
$$\gamma(h) = 4.3 + 31.7 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{200m} + \frac{N45^\circ}{150m} + \frac{\text{vert}}{55m} \right) + 20 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{650m} + \frac{N45^\circ}{470m} + \frac{\text{vert}}{60m} \right) \quad (2.7)$$

Modelo variográfico para o domínio do foscorito para a variável  $CaO$ :

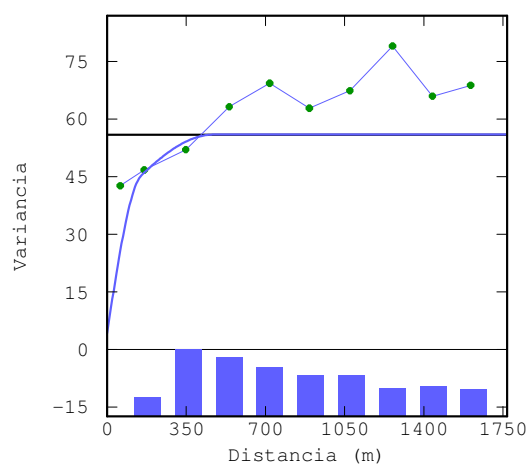
$$\gamma(h) = 10 + 67 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{200m} + \frac{N45^\circ}{150m} + \frac{\text{vert}}{55m} \right) + 45 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{650m} + \frac{N45^\circ}{470m} + \frac{\text{vert}}{60m} \right) \quad (2.8)$$

Modelo variográfico cruzado para o domínio do foscorito para as variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$ :

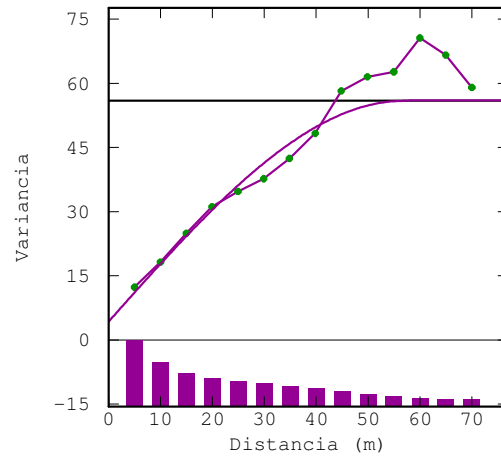
$$\gamma(h) = 6 + 42 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{200m} + \frac{N45^\circ}{150m} + \frac{\text{vert}}{55m} \right) + 28 \times \text{Sph} \left( \frac{N135^\circ}{650m} + \frac{N45^\circ}{470m} + \frac{\text{vert}}{60m} \right) \quad (2.9)$$



(a)

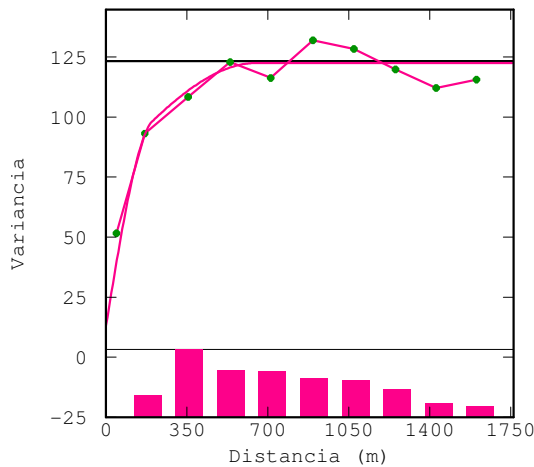


(b)

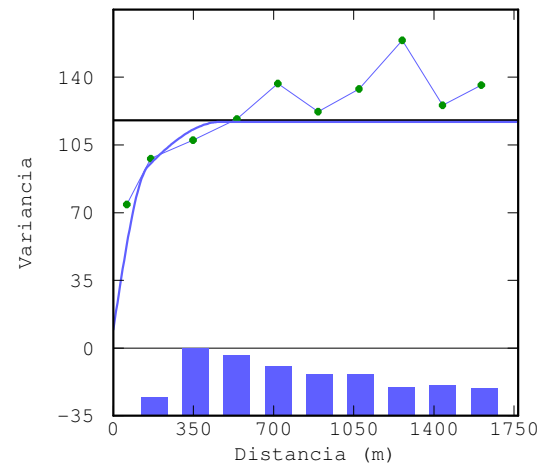


(c)

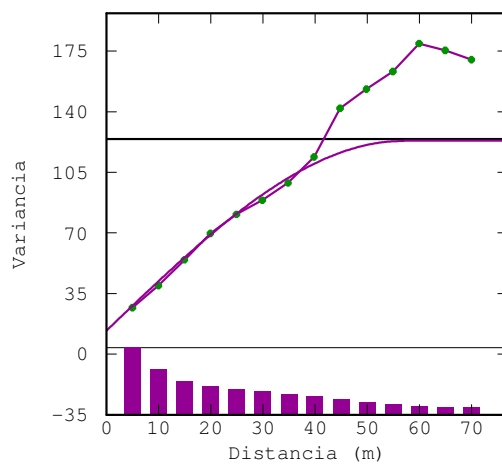
**Figura 2.15. Variogramas experimentais para a variável  $P_2O_5$  no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial ( $N135^\circ Dip0^\circ$ ), (b) direção intermediária ( $N45^\circ Dip0^\circ$ ) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**



(a)

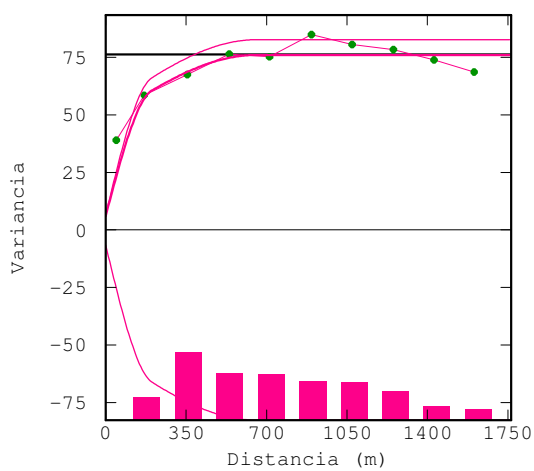


(b)

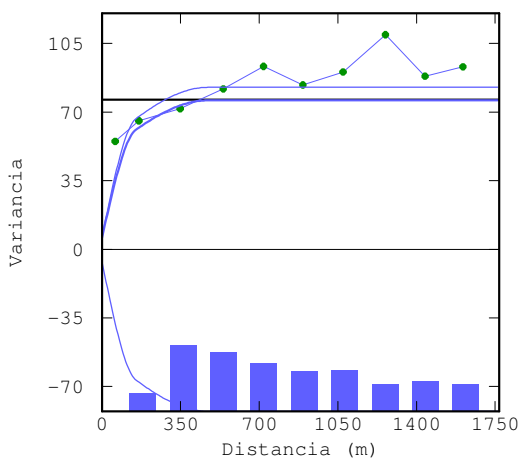


(c)

**Figura 2.16. Variogramas experimentais para a variável CaO no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma utilizado dessa variável (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**

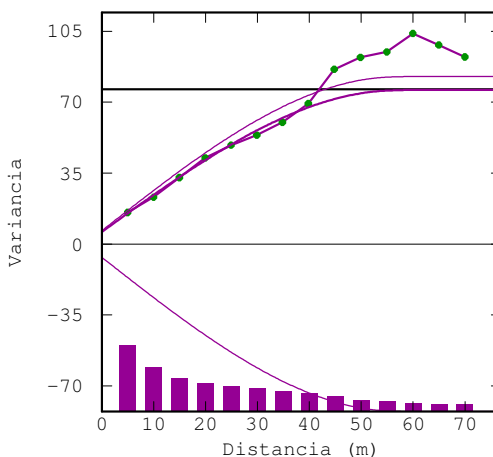


(a)



(b)





(c)

**Figura 2.17 Variogramas experimentais cruzados para as variáveis CaO e P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> no domínio do foscorito (círculos/linha tracejada) e modelo de variograma cruzado utilizado (linha contínua). Os variogramas representam: (a) maior direção de continuidade espacial (N135°Dip0°), (b) direção intermediária (N45°Dip0°) e (c) direção de menor continuidade espacial (vertical).**

### 2.6.5.2. Variograma dos dados no espaço gaussiano

Os variogramas/correlogramas dos dados transformados para o espaço gaussiano apresentaram as mesmas direções de continuidade espacial dos dados no espaço original. Os resultados dos modelos de continuidade espacial utilizados para o domínio do bebedourito estão apresentados nas Equações 2.10 a 2.12, e nas Equações 2.13, 2.14 e 2.15 para o domínio do foscorito.

Modelo de correlograma para o domínio do bebedourito para a variável P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>:

$$\gamma(h) = 0.05 + 0.47 \times \text{Sph} \left( \frac{N45^\circ}{300\text{m}} + \frac{N135^\circ}{300\text{m}} + \frac{\text{vert}}{60\text{m}} \right) + 0.48 \times \text{Sph} \left( \frac{N45^\circ}{1600\text{m}} + \frac{N135^\circ}{1500\text{m}} + \frac{\text{vert}}{70\text{m}} \right) \quad (2.10)$$

Modelo de correlograma para o domínio do bebedourito para a variável CaO:

$$\gamma(h) = 0.05 + 0.52 \times \text{Sph} \left( \frac{N45^\circ}{300\text{m}} + \frac{N135^\circ}{300\text{m}} + \frac{\text{vert}}{60\text{m}} \right) + 0.43 \times \text{Sph} \left( \frac{N45^\circ}{1600\text{m}} + \frac{N135^\circ}{1500\text{m}} + \frac{\text{vert}}{70\text{m}} \right) \quad (2.11)$$

Modelo de correlograma cruzado para o domínio do bebedourito para a variável  $P_2O_5$  e  $CaO$ :

$$\gamma(h)=0.05+0.17\times Sph\left(\frac{N45^\circ}{300m}+\frac{N135^\circ}{300m}+\frac{vert}{60m}\right)+0.20\times Sph\left(\frac{N45^\circ}{1600m}+\frac{N135^\circ}{1500m}+\frac{vert}{70m}\right) \quad (2.12)$$

Modelo variográfico para o domínio do foscorito para a variável  $P_2O_5$ :

$$\gamma(h)=0.12+0.65\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{180m}+\frac{N45^\circ}{120m}+\frac{vert}{70m}\right)+0.23\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{800m}+\frac{N45^\circ}{500m}+\frac{vert}{80m}\right) \quad (2.13)$$

Modelo variográfico para o domínio do foscorito para a variável  $CaO$ :

$$\gamma(h)=0.12+0.5\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{180m}+\frac{N45^\circ}{120m}+\frac{vert}{70m}\right)+0.38\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{800m}+\frac{N45^\circ}{500m}+\frac{vert}{80m}\right) \quad (2.14)$$

Modelo variográfico cruzado para o domínio do foscorito para as variáveis  $P_2O_5$  e  $CaO$ :

$$\gamma(h)=0.1+0.52\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{180m}+\frac{N45^\circ}{120m}+\frac{vert}{70m}\right)+0.26\times Sph\left(\frac{N135^\circ}{800m}+\frac{N45^\circ}{500m}+\frac{vert}{80m}\right) \quad (2.15)$$

### 2.6.6. Verificação da multinormalidade

A simples transformação dos dados para o espaço gaussiano não garante que os dados sejam uma função aleatória multinormal. Esse procedimento garante apenas a normalidade univariada da distribuição condicional local de probabilidade (*dclp*), sendo necessária então a verificação de normalidade nos demais estados da *dclp*. Ao se constatar a binormalidade, através de procedimentos de verificação, fica assumida como válida a hipótese do modelo multivariado gaussiano. A relação entre madograma (Euclidiano) e a raiz quadrada do variograma será utilizada como procedimento de verificação. A Equação 2.16 apresenta essa relação cujo resultado deve se aproximar à constante 0,564 e deve ser verificada para diversas distâncias  $h$  (*lags*), nas localizações  $u$  definidas, onde:

$$\frac{\gamma_1(h)}{\sqrt{\gamma_2(h)}} = 0,564 \quad (2.16)$$

onde :

$$\gamma_1(h) = E\{ | Y(u+h) - Y(u) | \}$$

$$\gamma_2(h) = E\{ | Y(u+h) - Y(u) |^2 \}$$

As Tabelas 2.2 e 2.3 apresentam os resultados do teste para o domínio do bebedourito. As Tabelas 2.4 e 2.5 apresentam os resultados do teste para o domínio do foscorito. A relação foi realizada a partir dos variogramas omnidirecionais, utilizando distâncias  $h$  (*lags*) de 200 metros.

**Tabela 2.2. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável  $P_2O_5$  (%) no domínio bebedourito.**

<b>Número de Pares</b>	<b>Distância Média (m)</b>	<b>Madograma/Raiz Quadrada do Variograma</b>
31587	42	0,537
193974	216	0,564
330932	406	0,568
425146	599	0,564
525799	802	0,567
554558	1002	0,565
618879	1202	0,565
604857	1401	0,563
576375	1600	0,567
568754	1799	0,568
490716	1999	0,565
440937	2198	0,565
362579	2399	0,565
292733	2600	0,564
244703	2801	0,567
183224	3002	0,565
144842	3196	0,565
103819	3398	0,560
78171	3599	0,564
51414	3795	0,566
33623	3992	0,578
19648	4188	0,579
12645	4403	0,583
9417	4590	0,567
5559	4801	0,593

**Tabela 2.3. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável CaO(%) no domínio bebedourito.**

<b>Número de Pares</b>	<b>Distância Média (m)</b>	<b>Madograma/Raiz Quadrada do Variograma</b>
31686	42	0,517
194466	216	0,554
331434	406	0,558
425983	599	0,561
526515	802	0,563
555188	1002	0,567
619788	1202	0,565
605840	1401	0,564
577190	1600	0,565
569394	1799	0,564
490977	1999	0,562
441148	2198	0,563
362763	2399	0,563
292767	2600	0,564
244747	2801	0,565
183224	3002	0,568
144892	3196	0,575
103819	3398	0,574
78171	3599	0,576
51448	3795	0,576
33623	3992	0,575
19648	4188	0,580
12645	4403	0,575
9417	4590	0,571
5559	4801	0,579

**Tabela 2.4. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável  $P_2O_5$  (%) no domínio foscorito.**

<b>Número de Pares</b>	<b>Distância Média (m)</b>	<b>Madograma/Raiz Quadrada do Variograma</b>
11669	27	0,518
70398	166	0,547
103792	305	0,556
155818	454	0,556
165603	601	0,558
186629	750	0,562
212149	899	0,563
208950	1047	0,562
196327	1198	0,564
188223	1347	0,569
152989	1497	0,572
138269	1649	0,572
116000	1799	0,574
98199	1942	0,570
86557	2095	0,569
59978	2244	0,568
42290	2394	0,561
31974	2547	0,563
20485	2697	0,563
15972	2839	0,571

**Tabela 2.5. Teste de binormalidade baseado na Equação 2.16 para a variável CaO (%) no domínio foscorito.**

<b>Número de Pares</b>	<b>Distância Média (m)</b>	<b>Madograma/Raiz Quadrada do Variograma</b>
11669	27	0,515
70398	166	0,547
103792	305	0,560
155818	454	0,558
165603	601	0,560
186629	750	0,564
212149	899	0,564
208950	1047	0,564
196327	1198	0,566
188223	1347	0,569
152989	1497	0,569
138269	1649	0,571
116000	1799	0,574
98199	1942	0,569
86557	2095	0,564
59978	2244	0,563
42290	2394	0,560
31974	2547	0,564
20485	2697	0,561
15972	2839	0,567

### **2.6.7. Geração dos modelos simulados**

Para este estudo, foram realizadas 50 simulações utilizando o algoritmo de simulação por bandas rotativas para cada domínio (bebedourito e foscorito). O número de cenários simulados deve ser suficiente para garantir acesso ao espaço de incerteza do fenômeno e depende de seu uso. Para verificar se o número de simulações geradas é suficiente, foi construído um gráfico com o número de realizações *versus* variância das médias de cada simulação, conforme metodologia proposta por Costa (1997) e Bonato (2000). O número de cenários para o qual a variância das médias torna-se aproximadamente estável foi considerado o número mínimo de cenários para mapear o espaço de incerteza.

As Figuras 2.18 e 2.19 apresentam a variância das médias para o domínio do bebedourito e do foscorito, respectivamente. Pode-se observar pelas figuras

abaixo que o intervalo de incerteza, representado pelas oscilações, torna-se pouco significativo a partir de 20 realizações. Sendo assim, o número de realizações geradas foi considerado suficientemente para mapear a incerteza associada à estimativa do atributo geológico.

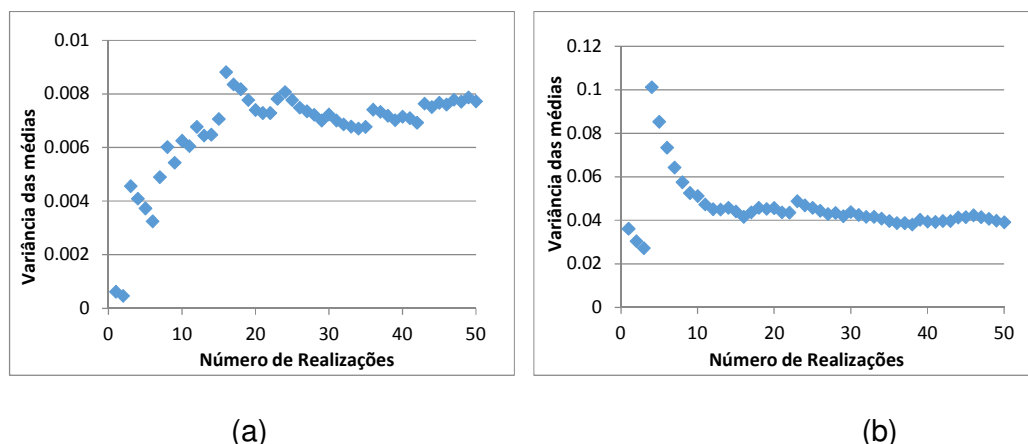


Figura 2.18. Variância das médias para (a)  $P_2O_5$  e (b)  $CaO$  no domínio do bebedourito.

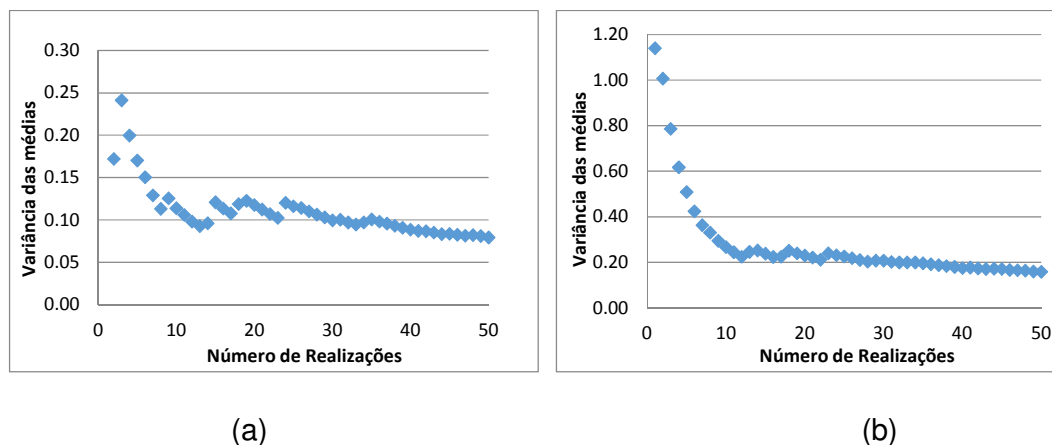


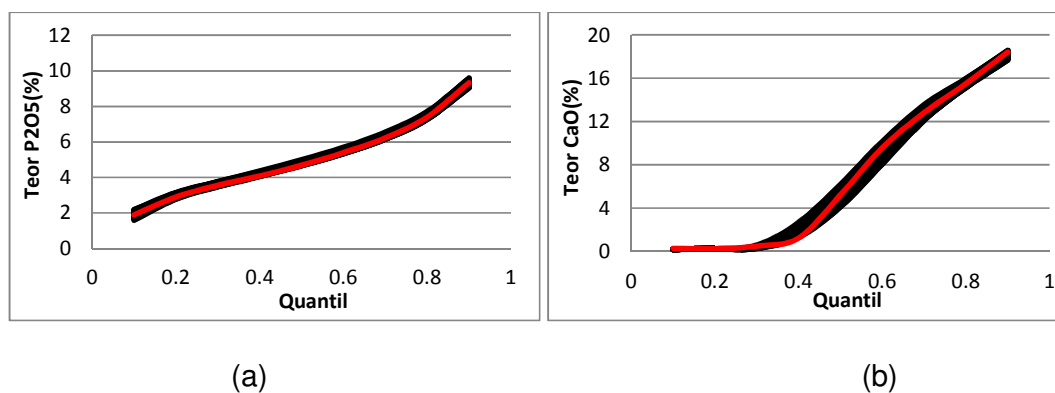
Figura 2.19. Variância das médias para (a)  $P_2O_5$  e (b)  $CaO$  no domínio do foscorito.

### 2.6.8. Validação das simulações

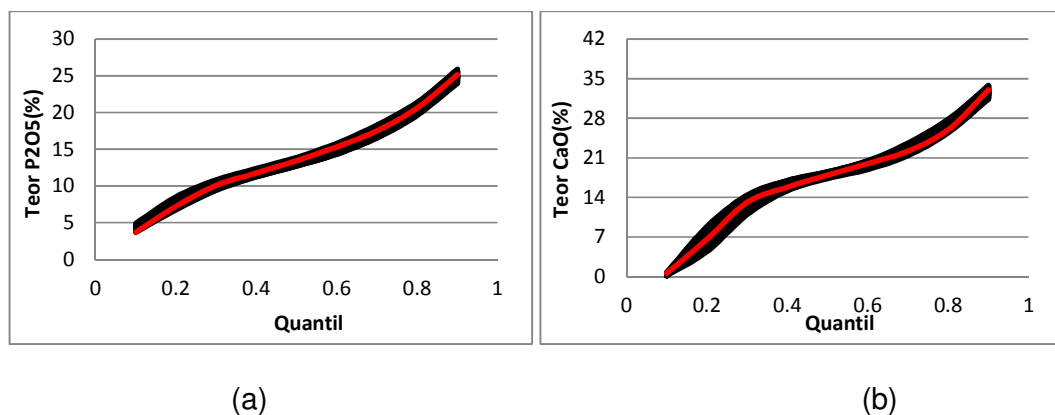
A validação das simulações geradas foi realizada para verificar a reproducibilidade do histograma e do modelo de continuidade espacial, características de estacionariedade de segunda ordem. A validação é apresentada para os dados retro-transformados para o espaço original.



As Figuras 2.20 e 2.21 apresentam a validação das estatísticas das simulações com os dados amostrais. Os histogramas acumulados foram gerados pela análise dos quantis de cada realização em comparação com os dados amostrais para o domínio do bebedourito e do foscorito, respectivamente. Verifica-se uma boa reproducibilidade dos modelos em ambos os casos.



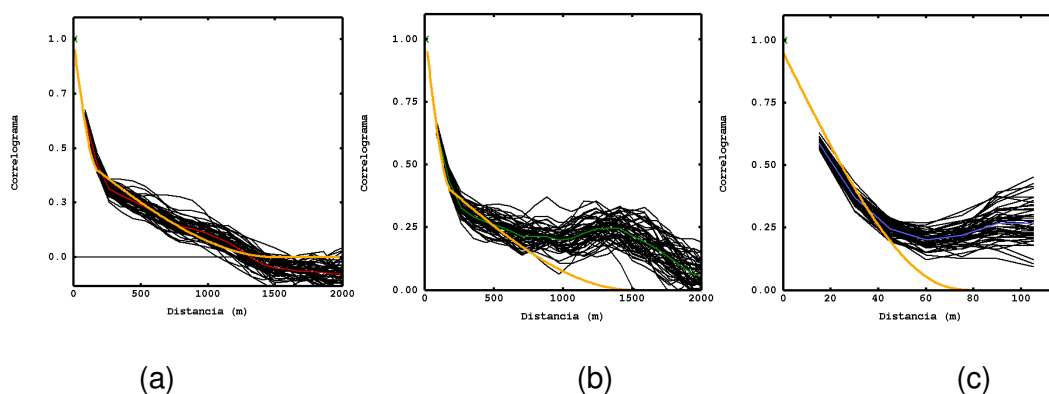
**Figura 2.20. Verificação da estatística para as 50 realizações (linhas pretas) comparando-as aos histogramas acumulados dos dados amostrais desagrupados (linha vermelha) para as variáveis (a)  $P_2O_5$  e (b) CaO no domínio do bebedourito.**



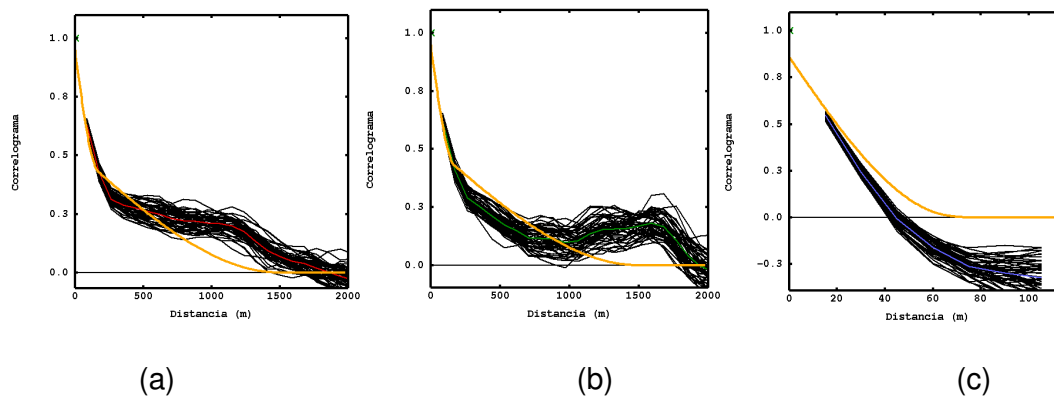
**Figura 2.21. Verificação da estatística para as 50 realizações (linhas pretas) comparando-as aos histogramas acumulados dos dados amostrais desagrupados (linha vermelha) para as variáveis (a)  $P_2O_5$  e (b) CaO no domínio do foscorito.**

A validação da continuidade espacial foi realizada comparando-se os variogramas/correlogramas experimentais obtidos para cada realização com os

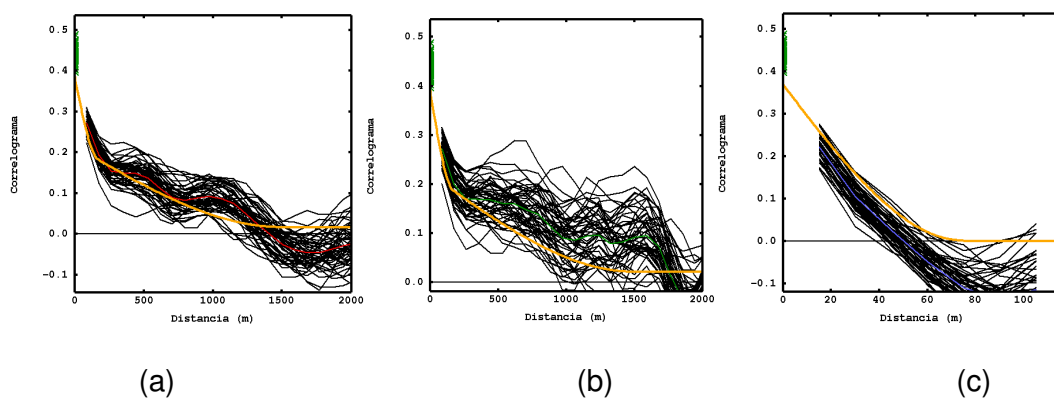
modelos de continuidade espacial baseados nos dados amostrais. As Figuras 2.22 a 2.24 mostram os modelos de correlograma diretos e cruzados utilizados para realizar as simulações e flutuações ergódicas nas simulações para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável no domínio do bebedourito. Nas Figuras 2.25 a 2.27 são apresentados os variogramas diretos e cruzado para o domínio do foscorito. Pela análise das figuras abaixo, percebe-se que os variogramas/correlogramas simulados honraram a continuidade espacial dos dados amostrais.



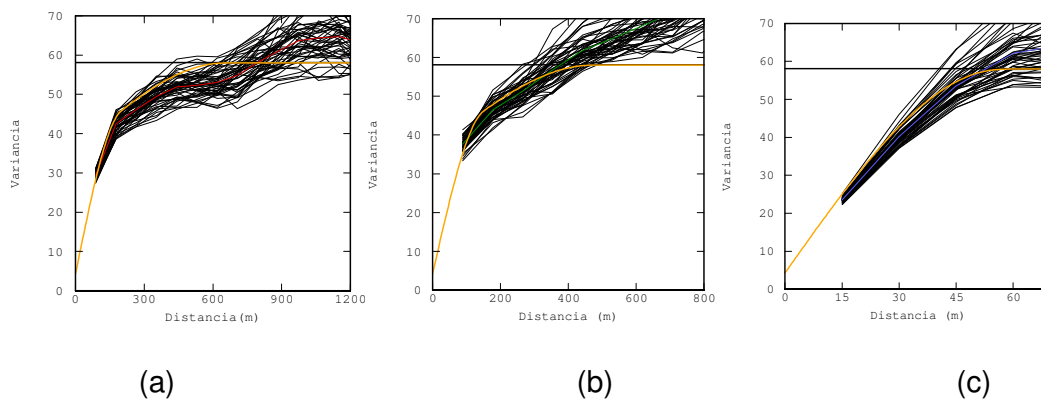
**Figura 2.22. Modelo de correlograma utilizado para realizar as simulações (linha laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável  $P_2O_5$  no domínio do bebedourito (linhas pretas).**



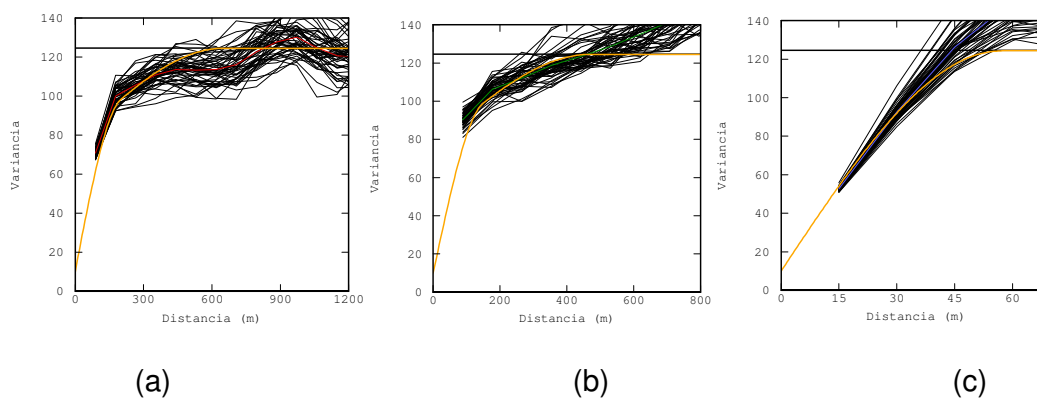
**Figura 2.23. Modelo de correlograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável CaO no domínio do bebedourito (linhas pretas).**



**Figura 2.24. Modelo de correlograma cruzado utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial no domínio do bebedourito (linhas pretas).**



**Figura 2.25. Modelo de variograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável  $P_2O_5$  no domínio do foscorito (linhas pretas).**



**Figura 2.26. Modelo de variograma utilizado para realizar as simulações (linhas laranja) e flutuações ergódicas para as direções de (a) maior continuidade, (b) continuidade intermediária e (c) menor continuidade espacial para a variável  $CaO$  no domínio do foscorito (linhas pretas).**



**Tabela 2.7. Correlação entre as variáveis co-simuladas com o mesmo caminho aleatório para o domínio do foscorito. Ao lado do nome de cada variável é apresentado o respectivo número da realização dentre as 50 totais.**

Variável	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _001	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _015	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _023	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _030	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _037	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _046	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _050
CaO_001	0,91	-	-	-	-	-	-
CaO_015		0,90	-	-	-	-	-
CaO_023			0,90	-	-	-	-
CaO_030				0,92	-	-	-
CaO_037					0,90	-	-
CaO_046						0,89	-
CaO_050							0,91

### 2.6.9. Tratamento dos dados simulados

Por fim, foi realizada a transferência dos dados simulados utilizando suporte pontual (6,25x6,25x5m) para o tamanho de blocos (25x25x10m) que é utilizado nas etapas seguintes durante o planejamento de lavra. Tal procedimento é explicado no tópico sobre mudança de suporte. Com isso, espera-se que a variância das simulações seja suavizada devido ao aumento do volume no suporte de blocos considerado.

Além disso, foi gerado o modelo E-type (médio dos teores) das simulações, para comparação com os cenários simulados nas etapas subsequentes.

## 2.7. Comentários finais

Neste capítulo, foi apresentada a técnica de simulação por bandas rotativas e sua aplicação em um depósito de fosfato, sendo realizada a co-simulação com o objetivo de manter a correlação entre as variáveis de interesse, para geração de cenários equiprováveis das variáveis P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> e CaO ao longo da área em estudo. Em sequência, os modelos simulados foram validados de forma a garantir a reprodução das características dos dados originais do modelo.

No capítulo 4, esses modelos obtidos pela simulação serão utilizados para a etapa de planejamento de lavra.

## Capítulo 3

### Conceitos de planejamento de lavra de longo prazo e definição de um índice de classificação

Este capítulo apresenta uma revisão geral envolvendo todas as etapas do planejamento de lavra de longo prazo. Essa revisão é estendida à definição de um cenário alternativo para o sequenciamento de lavra combinado a incerteza de teores, com a finalidade de minimizar os riscos de não atingimento de uma expectativa de determinado parâmetro do projeto e maximizar os lucros da produção. Para isso, é apresentado um índice de classificação de cenários estocásticos que permite a definição do cenário com maior probabilidade de ocorrer, minimizando os riscos potenciais, baseando-se em fatores estabelecidos pelo responsável do projeto.

#### 3.1. Função de transferência

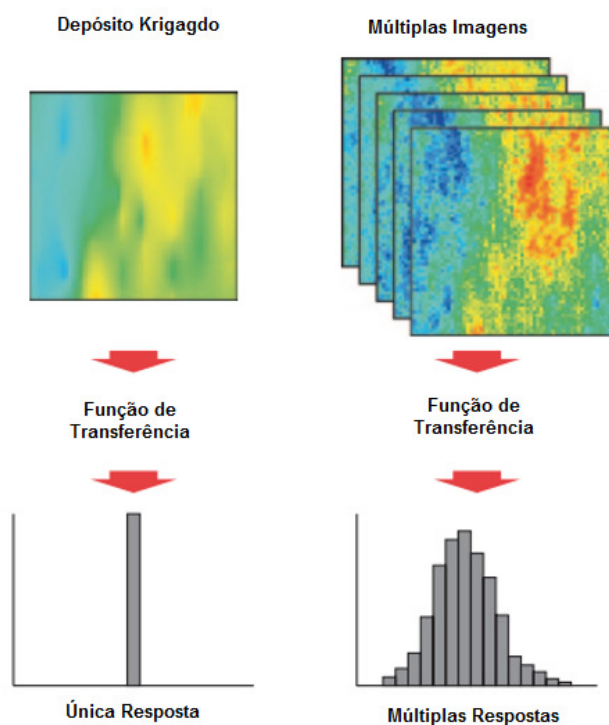
A função de transferência é uma representação matemática da relação entre a entrada e a saída de uma operação ou sistema real. Diversas operações mineiras podem ser modeladas por funções de transferência, pois certos parâmetros de interesse são processados para se obter uma distribuição de respostas. São exemplos:

- a otimização de cava final (Rossi e Van Brunt, 1997);
- controle de teores (Glacken, 1996; Srivastava *et al.*, 1992; Godoy, 2003);
- custos de diluição mediante variações de parâmetros de lavra (Dimitrakopoulos, 1997);
- planejamento de curto prazo (Costa *et al.*, 1997) e,
- reservas recuperáveis (Costa, 1997).

Para realizar o mapeamento dos riscos associados ao empreendimento é necessário que o modelo de incerteza (representado pelas simulações) seja

processado através de uma função de transferência para, assim gerar uma distribuição de respostas que defina o espaço de incerteza. Os valores de resposta são indicadores de desempenho geralmente chaves do projeto, como o valor presente líquido (VPL) a tonelagem ou os teores, e podem envolver todas as etapas de um planejamento de mina, incluindo o sequenciamento de lavra do minério e beneficiamento ao longo da vida da mina (Jewbali e Dimitrakopoulos, 2009).

A Figura 3.1 mostra a diferença obtida quanto à possibilidade de mapear o espectro de incertezas associadas às realizações, em comparação com o cenário de estimativa tradicional, normalmente realizado com o uso da técnica de krigagem (Matheron, 1973).



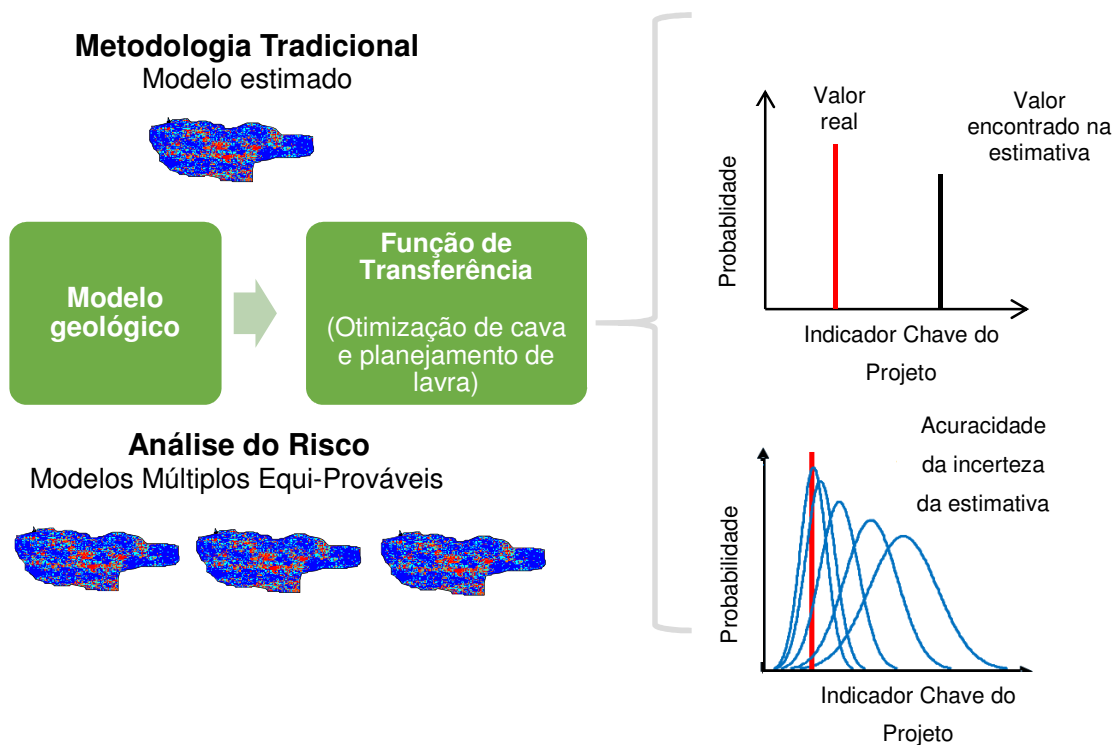
**Figura 3.1. Representação da função de transferência. (adaptado de Rossi e Deutsch, 2014).**



### 3.2. Planejamento de lavra

Devido ao grande número de parâmetros considerados, o planejamento de mina está associado a inúmeras fontes de incerteza. Torna-se necessário compreender e identificar tais fontes para mensurar e controlar os riscos. (Dimitrakopoulos *et al.*, 2007). Estes, compreendem incertezas internas, como a incerteza geológica, proveniente do corpo mineral, e externas, dependentes de fatores externos, tais como incerteza econômica e sócio-política.

A metodologia tradicional de estimativa de recursos e planejamento de lavra, que vem sendo utilizada ao longo dos anos na indústria mineira, foi estabelecida para lidar com a modelagem da distribuição espacial de atributos de um depósito mineral, a otimização de cava e o planejamento de lavra. Nos últimos anos, uma metodologia diferente da tradicional tem sido pesquisada e está descrita na Figura 3.2.



**Figura 3.2. Método tradicional (modelo determinístico ou singular) versus a integração da análise do risco (estocástico) para as etapas do projeto mineiro, tais como, modelagem de reservas, planejamento da produção e sequenciamento de lavra, e avaliação dos indicadores-chave do projeto (Adaptado de Ramazan *et al.*, 2007).**

Ao invés de utilizar um modelo único de teores como dados de entrada para a otimização e uma correta avaliação dos indicadores chaves do projeto, um conjunto de modelos igualmente prováveis do depósito mineral pode ser utilizado. Estes modelos são condicionados aos dados amostrais do depósito e reproduzem as características estatísticas dos mesmos, conforme explicado no capítulo anterior. A utilização de modelos igualmente prováveis de um depósito mineral permite avaliar a sensibilidade da otimização de cava e do sequenciamento de lavra de longo prazo devido à incerteza geológica (Kent *et al.*, 2007). Além disso, a identificação de tais fatores possibilita planejar a otimização de cava e o sequenciamento da produção com valor presente líquido substancialmente mais realístico. Em Godoy e Dimiktrakopoulos (2004), um estudo de caso é apresentado, aplicado a uma mina de ouro, onde uma avaliação estocástica conduz a uma melhora acentuada de 28% do VPL ao longo da vida da mina, em comparação com as técnicas tradicionais de estimativa de recursos, considerando o mesmo limite de cava final. Esse cenário demonstra não necessariamente uma expectativa de ganho para todos os casos considerados, mas uma apreciação de que o modelo médio utilizado tradicionalmente na indústria (krigagem) pode estar distante do real considerando o espectro de incerteza das variáveis geológicas de um dado depósito mineral.

### **3.2.1. Definição do teor de corte**

O teor de corte é definido como o teor que é utilizado para distinguir o que é minério do que é estéril durante a vida da mina. As minas a céu aberto são projetadas e planejadas utilizando teores de corte que são calculados através da análise econômica de equilíbrio, ou seja, é o teor mínimo de corte que paga os custos de lavra e processamento do material (*Break Even Cut Off Grade - BCOG*) (Lane, 1988; Hustrulid e Kuchta, 1995; Rendu, 2008). O uso do teor de corte de equilíbrio durante o planejamento da mina resulta em sequenciamentos que maximizam os lucros não descontados (Dagdelen, 1992). O teor de corte que maximiza o VPL dos fluxos de caixa não é apenas uma função de parâmetros econômicos, mas também de parâmetros da lavra,

beneficiamento e limitações da capacidade de refino, bem como a distribuição do teor dentro do depósito mineral.

Considerando-se que a capacidade de extração não é restrição na mina, o BCOG pode ser reduzido a um teor de corte marginal (*Marginal Cut Off Grade - MCOG*). A diferença do MCOG para o BCOG é que os custos de lavra são excluídos do cálculo do MCOG, pois considera-se que o bloco que está dentro da sequência de produção será extraído de qualquer maneira. Como anteriormente este seria tratado como estéril, é acrescentado no cálculo um elemento chamado de custo incremental (Rendu, 2008) que se dá pela diferença de custo de lavar o minério e o estéril. Esta diferença é normalmente expressa pela variação da distância de transporte entre os dois destinos (se houver).

Lane (1964) propôs um algoritmo para determinar o teor de corte que maximiza o VPL de um projeto considerando a lavra, os processos de usina e restrições de capacidade de refino. A estratégia de teor de corte utilizada que maximiza o VPL para um determinado projeto começa com teores de corte mais elevados durante os anos iniciais da produção. Com o passar do tempo, os teores de corte tendem a diminuir gradativamente ao valor do BCOG. Vários softwares comerciais são desenvolvidos usando o algoritmo de Lane (Lane, 1988; Dagdelen, 1992; Whittle, 1999).

### **3.2.2. Otimização de cava**

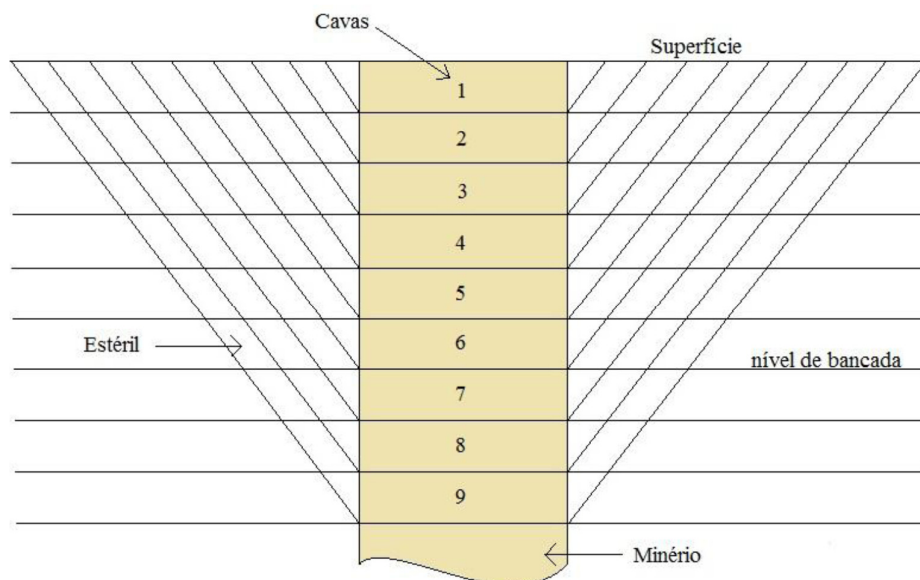
O processo de planejamento de mina inicia com o cálculo matemático de cava final. Este depende do modelo econômico ou da função benefício para cada bloco. Tal função valoriza economicamente os blocos com base no teor contido nos mesmos. O cálculo da função benefício é realizado considerando as receitas menos os custos para cada bloco. Este valor é calculado de forma diferente para os blocos de minério, minério marginal e estéril (Halatchev, 1999), pois cada etapa da cadeia produtiva tem seus próprios custos associados e sua capacidade limite (principalmente se houverem diferentes processos de lavra, beneficiamento e diferentes produtos). As receitas

dependem basicamente do teor de cada bloco, da recuperação e do preço de venda do produto.

A otimização matemática da cava final, usualmente é realizada utilizando o algoritmo de Lerchs e Grossmann (Lerchs e Grossmann, 1965) ou outro algoritmo de otimização (Kim, 1979). Tal procedimento faz uso de uma função objetivo, que visa a maximização do lucro gerado pela cava, calculada com o valor líquido acumulado de todo o material extraído (minério e estéril). A inclusão ou exclusão do material que fará parte do esboço da cava otimizada depende necessariamente de variáveis de decisão e restrições geométricas (ângulo do talude e espaço físico – limites de decretos de direitos minerários) que devem ser obedecidas para que haja a cava no processo de otimização matemática (Diedrich, 2012).

A função objetivo é uma expressão matemática que define a solução em função das variáveis de decisão. Estas, por sua vez, são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. Pode haver uma ou mais variáveis de decisão em um problema de otimização. Além disso, para realizar a otimização é necessário respeitar as restrições que são um modo de levar em conta as limitações físicas do sistema, ou seja, o modelo deve incluir restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou viáveis). As variáveis de restrição consideradas para a definição da cava final são: o ângulo final de talude, a taxa anual de desconto, a superfície topográfica inicial e os limites de lavra.

Das várias técnicas utilizadas para definição da cava final com o desenvolvimento de uma sequência de extração a céu aberto, a mais comum é a geração de cavas aninhadas, em que um fator variando de 0 a 1 é aplicado sucessivamente na receita da função benefício (Whittle, 2011). O resultado é uma família de cavas, das quais as primeiras cavas incrementais possuem o minério mais atrativo economicamente (ou mais acessível) e as últimas cavas incrementais o minério menos atrativo (ou mais profundo). Vale salientar que quanto mais baixos os preços de venda utilizados para o minério, menores serão as cavas geradas (Hustrulid e Kuchta, 1995). A Figura 3.3 ilustra um exemplo de comparação entre a geração das cavas aninhadas e o processo de lavra por bancos.



**Figura 3.3. Representação esquemática de uma série de cavas aninhadas calculadas a partir de uma série de valores para a receita do bloco (Diedrich, 2012).**

A geração das cavas aninhadas, ou família de cavas, não leva em conta o valor monetário no tempo. Elas são geradas assumindo valor não descontado dos blocos.

Quando os custos de remoção do material estéril somados aos custos de extração e beneficiamento do minério forem maiores do que a receita proveniente da venda do bem mineral, a cava terá atingido sua profundidade final.

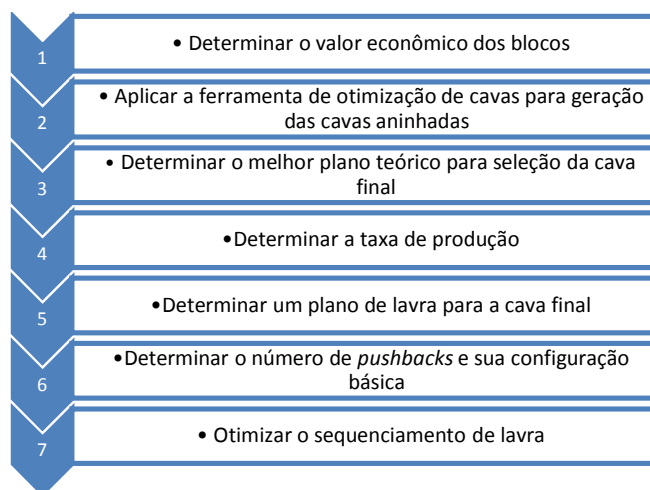
Muitas vezes a cava final escolhida para o projeto de mineração não é a mesma cava final matemática; ou seja, a última cava gerada pelo método de cavas aninhadas. Neste ponto existem diferentes metodologias para a definição da cava ótima gerada pelo algoritmo de Lerchs e Grossmann. Uma metodologia amplamente difundida é através do sequenciamento destas cavas incrementais ao longo dos anos, onde os blocos lavrados seguem a ordem de economicidade da família de cavas (Kim e Zhao, 1994).

A partir deste sequenciamento inicial para a decisão da cava ótima podem ser realizados diferentes tipos de gráficos para auxiliar na decisão de qual cava incremental será considerada como a cava final. Entre eles, os gráficos Cava

*versus* VPL acumulado e Cava *versus* REM (relação estéril minério) incremental plotados juntos é uma boa ferramenta para a decisão da cava ótima.

A cava ótima é escolhida quando o VPL acumulado não apresenta mais acréscimo significativo de valor e a REM apresenta um padrão errático. Além disso, é necessário verificar o quanto de minério está sendo recuperado em relação à máxima cava gerada com fator igual a 1 (um).

Os passos típicos para criação de um plano de lavra a céu aberto estão apresentados na Figura 3.4, contendo as etapas da escolha da cava final e o processo de planejamento de mina.



**Figura 3.4. Fluxograma dos passos tradicionais para desenvolvimento de um plano de lavra.**

Além do método tradicional para a definição da cava final otimizada, muitos estudos estão sendo realizados para aplicação de simulação condicional na otimização de cavas. Tais estudos são detalhados em David *et al.*, (1974), Dowd e Sarac (1994), Rossi e Van Brunt (1997), Dimitrakopoulos (2001) e Farrelly (2002).

### 3.2.3. Sequenciamento de lavra

A próxima etapa, em sequência a definição da cava final, é a geração de *pushbacks* ou avanços de lavra. Um avanço de lavra é uma fase na expansão da mina, que deve ser desenvolvida sob algumas restrições (ângulo de talude, largura de bermas, taxa de alimentação da usina, espaço de operação, etc.) com a finalidade de garantir com que a sequência de lavra seja executada adequadamente.

A relação de quantidade dos materiais para a sequência de lavra adotada é definida como a proporção de estéril a ser retirada permitindo expor e lavar economicamente uma unidade de minério do depósito (REM – relação estéril/minério). Essa também pode ser uma relação parcial, referente a um período, um avanço operacional (*pushback*) ou um painel de lavra (Diedrich, 2012).

Posteriormente a geração dos *pushbacks*, é iniciada a etapa de sequenciamento de lavra, que, para minas a céu aberto, consiste em definir uma ordem de extração dos blocos ou painéis ao longo da vida mina (LOM – *Life of Mine*). A vida útil da mina pode ser representada através de um cronograma de produção que tem como objetivo otimizar ou balancear a sequência de extração com relação as quantidades de minério e estéril extraído em cada período a fim de obter o maior valor presente líquido (VPL), considerando parâmetros operacionais pré-determinados.

A programação de produção através do sequenciamento de lavra utilizada tradicionalmente desconsidera a incerteza geológica, pois é realizada com modelos determinísticos, apresentando significativas diferenças entre os valores calculados e a realidade executada.

Alguns conceitos sobre análise de risco utilizando técnicas de simulação estocástica foram discutidos por Ravenscroft (1994) no contexto de avaliação do impacto da incerteza e da variabilidade *in situ* dos teores em projetos a céu aberto através de cronogramas de produção e avaliações econômicas.

A disponibilidade de técnicas de simulação estocástica de teores para quantificação da incerteza geológica levou ao desenvolvimento de técnicas de

programação para integrar a incerteza no processo de planejamento de mina. Dimitrakopoulos e Ramazan (2004) desenvolveram uma formulação de otimização introduzindo um novo conceito de programação de produção, com desconto de risco geológico. Ramazan e Dimitrakopoulos (2007) desenvolveram um modelo de programação estocástica inteira que usa múltiplas realizações simuladas para minimizar os desvios no sequenciamento da produção de minério no período de vida útil da mina, apresentando os benefícios financeiros.

### **3.3. Quantificação do risco**

A ideia principal para o sequenciamento da produção que leva em consideração a incerteza dos teores é relativamente simples. Os otimizadores convencionais trabalham com modelos determinísticos por construção e avaliam um conjunto de blocos, de modo a decidir quando parar a lavra, quais blocos extrair, e assim por diante, assumindo que os valores econômicos dos blocos lavrados (dados de entrada para o otimizador) são os valores reais.

Um otimizador estocástico, também por construção, avalia um conjunto de blocos, em simultâneo através de todas as combinações possíveis de valores econômicos dos blocos no agrupamento considerado.

Como resultado, uma quantidade considerável de informação local é utilizada para mapear a incerteza, levando a sequenciamentos de lavra mais robustos que também podem maximizar o potencial do depósito (por exemplo, aumento de produção de metal e VPL) e, ao mesmo tempo minimizar o risco (por exemplo, não cumprimento de metas de produção e perdas relacionadas).

Para considerar a incerteza dos teores no sequenciamento de lavra dispondo de otimizadores convencionais, e, com isso, incorporar os riscos associados a atingir determinado valor de VPL, foi utilizada uma variação do índice de classificação, proposto inicialmente por Ramazan *et al*, (2007).

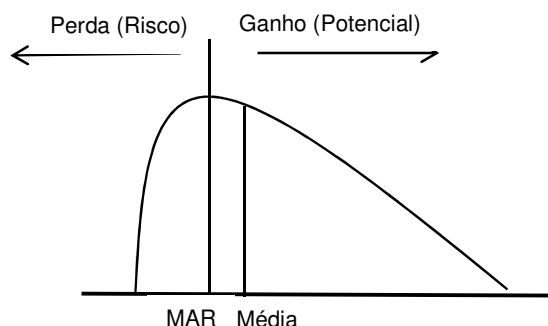


### 3.3.1. Índice de classificação

O índice de classificação proposto inicialmente por Ramazan *et al.* (2007) foi chamado de *maximum upside and minimum downside potential*. Este tem a finalidade de quantificar a incerteza geológica através da geração de realizações que representem o corpo de minério (simulação estocástica). Basicamente, o índice foi utilizado para definição do melhor desenho de cava final considerando os riscos envolvidos no projeto mineiro e as premissas definidas.

A análise do risco foi realizada considerando os diferentes desenhos de cavas gerados e *pushbacks* para cada cenário simulado por ano de produção. As distribuições podem ser geradas para qualquer indicador do projeto, como tonelagem, quantidade de minério que a usina de beneficiamento consegue processar por ano, demanda de mercado, etc. Com essa análise de indicadores inicial, já é possível destacar alguns dos cenários gerados.

Por fim, utiliza-se o índice para definição do cenário final, considerando as distribuições dos possíveis valores indicadores do projeto para cálculo do *upside potential and downside risk* aplicado a um ponto de referência (por exemplo, o retorno mínimo aceitável - MAR). Denomina-se *downside risk*, quando o objetivo é analisar o risco de perda e *upside potential*, quando se analisa a possibilidade de ganho. A Figura 3.5 apresenta o conceito de incerteza da distribuição dos indicadores chaves do projeto, como, por exemplo, o VPL, com o possível ganho ou perda em relação ao ponto de referência – MAR.



**Figura 3.5. Distribuição da incerteza do indicador chave do projeto (VPL), com ganho e perda potencial com relação ao ponto de referência MAR.**

Para este trabalho, uma metodologia de classificação foi elaborada baseada nesse índice apresentado, de modo que fosse possível determinar um cenário de sequenciamento de lavra, baseado no mapeamento das incertezas geológicas utilizando simulação estocástica, para quantificar o risco de perda ou possibilidade de ganho quanto ao valor presente líquido previsto inicialmente para cada cenário. Esta metodologia foi desenvolvida juntamente com o Eng. Paulo Mello (Mello, 2015).

O índice baseia-se fundamentalmente na análise de distribuição dos teores para cada cenário sequenciado a partir de uma cava final pré-estabelecida de acordo com o utilizado na indústria, a partir do modelo krigado. Com isso, tem-se a análise dos possíveis valores de VPL para cada cenário.

As equações 3.1 e 3.2, apresentam o índice para quantificar o potencial de ganho e de perda respectivamente:

$$IC_{+} = \sum_{i=n}^n ((X_i - Vm) * P_i * C_i) * R_{+} \quad (3.1)$$

$$IC_{-} = \sum_{i=n}^n ((Vm - X_i) * P_i * C_i) * R_{-} \quad (3.2)$$

Onde:

$IC_{+}$  : o índice que classifica o potencial do retorno ser igual ou maior que o valor mínimo;

$IC_{-}$  : o índice que classifica o risco de se obter um retorno menor que valor mínimo esperado;

$X_i$ : valor médio das simulações no ano;

$Vm$ : valor mínimo definido como o objetivo;

$P_i$ : probabilidade do valor  $X_i$  ser maior que o valor mínimo;

$C_i$ : indicador que define se o valor  $X_i$  está dentro do intervalo de confiança;

$R_+$ : probabilidade definida pelo número de observações acima do  $Vm$ ;

$R_-$ : probabilidade definida pelo número de observações abaixo do  $Vm$ .

O que difere este índice de classificação é que foi adicionado um intervalo de confiança de 90%, considerando os valores maiores que o percentil 5 (P5) e menores que o percentil 95 (P95) da distribuição da variável analisada, controlando a influência de valores extremos na distribuição. Além disso, foi considerada a probabilidade definida pelo número de observações acima ou abaixo do MAR. Um exemplo do índice será detalhado no capítulo 4, com a apresentação do estudo de caso.

### **3.4. Considerações finais**

Neste capítulo, foram apresentados os conceitos teóricos necessários para a compreensão das etapas envolvidas durante o planejamento de lavra de longo prazo. Também, foi apresentado um índice de classificação quantitativo de cenários estocásticos que permite a definição do cenário com maior probabilidade de ocorrer, minimizando os riscos potenciais de não atingimento de determinada expectativa de um projeto e maximizando os lucros de produção estabelecidos pelo planejador ou equipe de planejamento estratégico.

## Capítulo 4

### **Estudo de caso para a definição de um sequenciamento de lavra de longo prazo com base nas incertezas dos teores**

Este capítulo apresenta um estudo de caso contemplando as etapas de planejamento de lavra para o depósito de fosfato do corpo mineral Salitre, apresentado no capítulo 2. Também, será realizado um estudo com o índice de classificação, conforme apresentado no capítulo 3, para seleção de um cenário de sequenciamento de lavra considerando as incertezas dos teores, onde é realizada uma comparação do cenário escolhido com o modelo médio das simulações (E-type) que representaria o modelo escolhido pela metodologia tradicional em uso na indústria.

#### **4.1. Planejamento de lavra**

Muitas variáveis são levadas em consideração no planejamento de lavra, apresentando-se como um sistema complexo devido as suas inter-relações. Algumas dessas variáveis são as condições da superfície, seletividade das operações de lavra, razão de produção, localização dos níveis de aquífero, geometria e continuidade do depósito, relação estéril/minério, seleção de equipamentos, além de fatores externos, como clima e restrições políticas.

A partir do uso de co-simulação por bandas rotativas, foram geradas 50 realizações para os teores de  $P_2O_5$  e de CaO do depósito em estudo. A etapa seguinte foi considerar cada modelo de teores como *input* ao planejamento de lavra, na qual foi gerado, para cada realização, os modelos econômicos com base na função benefício construída para o planejamento de longo prazo.

## 4.2. Definição de minério e estéril

A classificação utilizada para definição do que seria minério ou estéril foi baseada no teor de  $P_2O_5$  e na relação cálcio-fosfato (RCP). A RCP é calculada pela divisão do teor de cálcio pelo teor de fosfato. O teor de corte de 5% de  $P_2O_5$  foi estabelecido para os domínios geológicos, ou seja, os blocos com teor abaixo deste valor são classificados como estéril, independente da relação cálcio-fosfato. O critério utilizado está apresentado nos fluxogramas das Figuras 4.1 e 4.2.

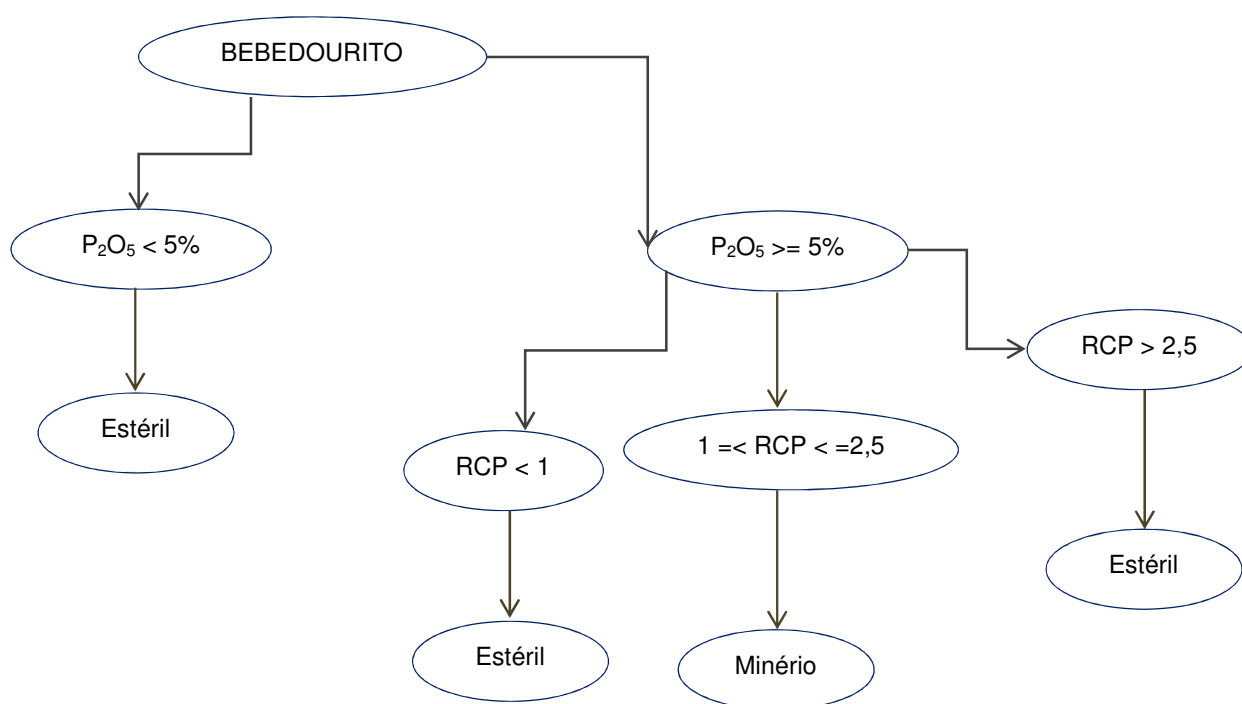
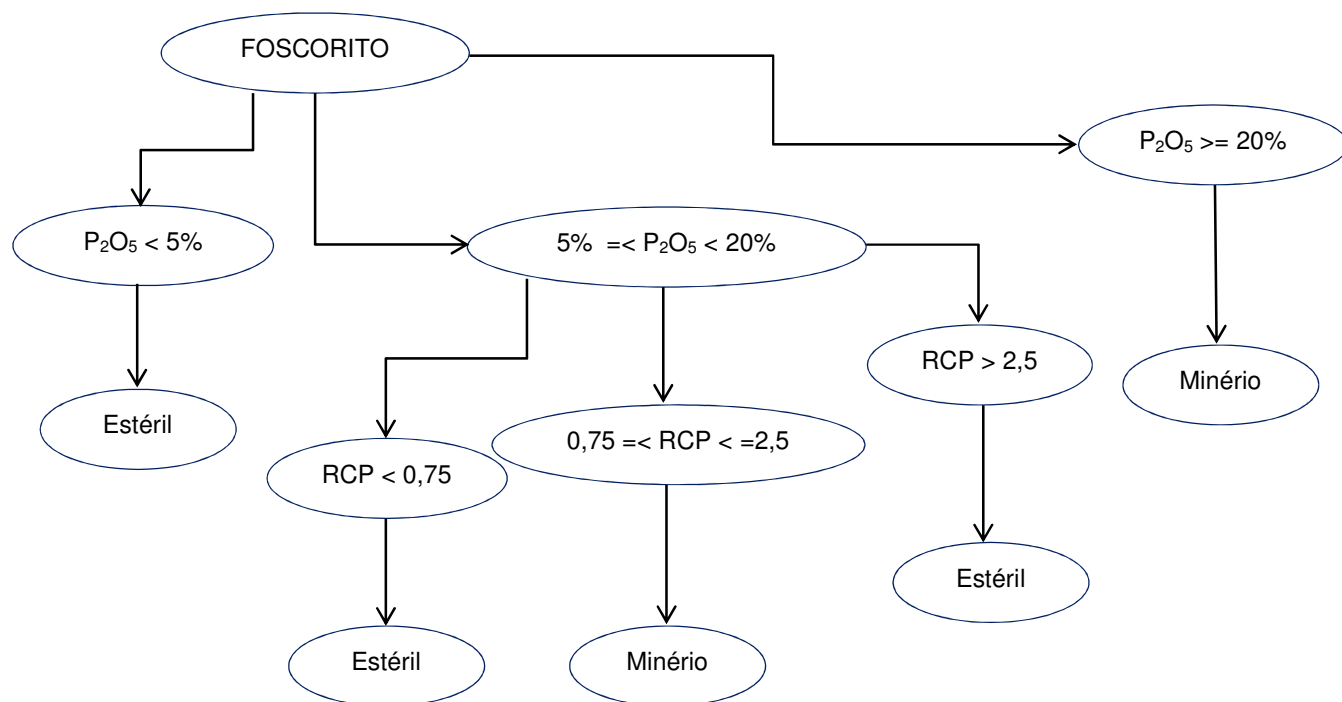


Figura 4.1. Fluxograma da definição dos domínios de minério e estéril para a litologia do bebedourito.



**Figura 4.2. Fluxograma da definição dos domínios de minério e estéril para a litologia do foscrito.**

### 4.3. Função benefício

Após a definição dos domínios de minério e estéril, foi aplicada uma função de transferência cuja finalidade foi atribuir valor econômico aos blocos de lavra, para ambos domínios.

Para os blocos de estéril, a função benefício representa apenas custos. Para os blocos de minério, além dos custos, adiciona-se à função as receitas a serem obtidas pela venda do minério contido no bloco.

Para cálculo das receitas, foram considerados todos os parâmetros utilizados na indústria, que não serão mencionados em detalhe a fim de garantir a confidencialidade dos dados da empresa.

Outras variáveis químicas entraram no cálculo das receitas obtidas com a finalidade de penalizar a receita do bloco. Esses elementos foram simplificados estimados nos blocos pelo método da krigagem ordinária.

Basicamente, as receitas foram calculadas através da multiplicação do preço de venda pelos produtos, onde o preço de venda é representado em

reais por tonelada de concentrado e o produto é definido como toneladas de produtos gerados no bloco. Para isso, considera-se a recuperação mássica em relação ao teor de alimentação de  $P_2O_5$  para dois produtos gerados, o concentrado convencional e o concentrado ultrafino. O preço de venda considerado é o utilizado na indústria para estudos de longo prazo para esse tipo de depósito mineral.

Para a questão dos custos de lavra, a distância média de transporte foi diferente na função benefício de cada domínio. Os custos considerados são:

- custos de escavação e transporte;
- custos de equipamentos de apoio;
- custos de perfuração e desmonte;
- custos da administração de mina;
- custos de usina de beneficiamento;
- custo de transporte;
- custo de investimento corrente;
- custos da indústria química.

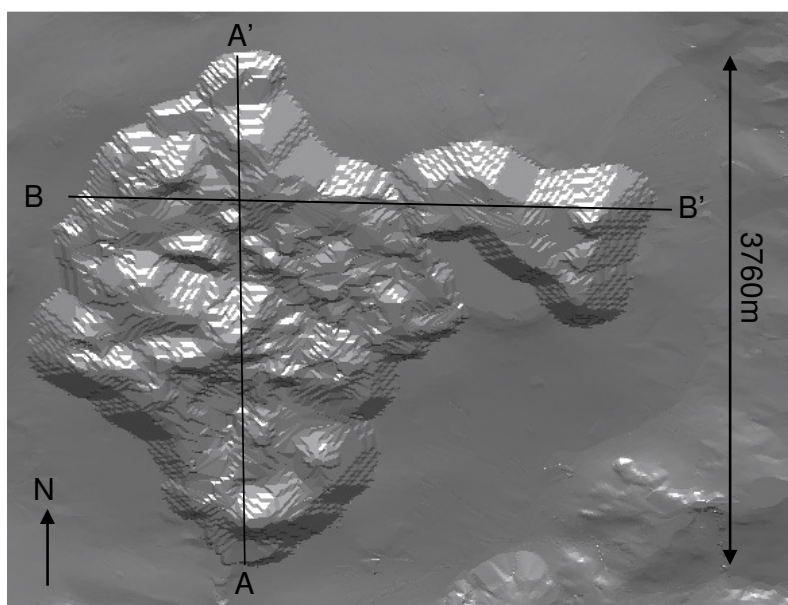
A partir desta etapa o modelo econômico foi utilizado para a definição de *pushbacks* e do sequenciamento de lavra utilizando uma cava final pré-definida. O objetivo principal foi apresentar o impacto no planejamento de lavra da incerteza geológica obtida na variação dos teores de  $P_2O_5$  utilizando simulação estocástica.

#### **4.4. Cava final**

A cava final utilizada foi pré-definida pela empresa e foi calculada com base no algoritmo de Lerchs e Grossmann. O critério utilizado para geração da cava foi o de maximização do VPL (Valor Presente Líquido) da mina. O resultado desta operação é uma família de cavas onde a cava de máximo valor tipicamente é a cava ótima. As principais informações de entrada para o software foram dadas por: topografia inicial, modelo de recursos, densidade, dados geotécnicos, preço de venda de longo prazo da rocha fosfática e as estimativas dos custos de processo.

A taxa anual de desconto usada foi de 7,8% ao ano. A produção anual para efeito de desconto foi de 6,5 milhões de toneladas por ano (Mtpa) de ROM. Esses parâmetros são os mesmos adotados pela equipe de planejamento da empresa. Adotou-se o método *Profit Model*, onde o bloco apresenta valor definido e um fator de penalização variável sobre a receita para geração das fases (família de cavas).

Foram respeitados parâmetros geotécnicos e restrições físicas impostas na sequência de lavra. As restrições foram os limites do modelo geológico (restrição física) e dos decretos de lavra (restrição legal). Utilizou-se um ângulo inter-rampa de  $29^\circ$  para toda a mina. A cava final utilizada é apresentada na Figura 4.3. As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam, respectivamente, as seções A-A' e B-B' da cava final com mensuração da profundidade.



**Figura 4.3. Cava final pré-definida, considerando restrições físicas e parâmetros geotécnicos.**



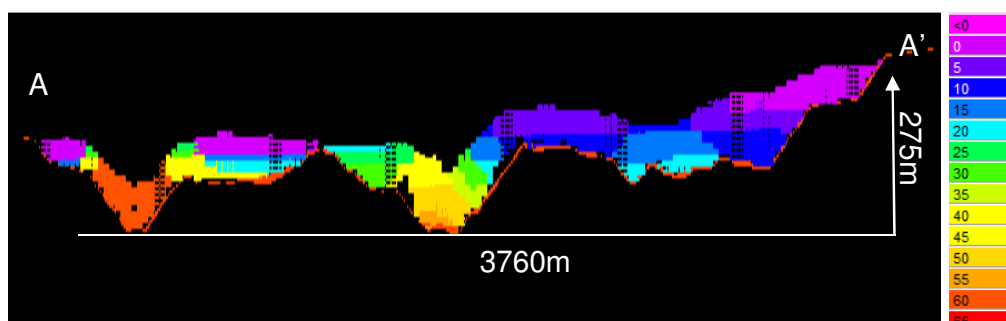


Figura 4.4. Seção A A' da cava final com exagero vertical de 1,5 vezes. A sequência de lavra dos blocos é apresentada de acordo com o ano de extração ao longo da vida da mina.

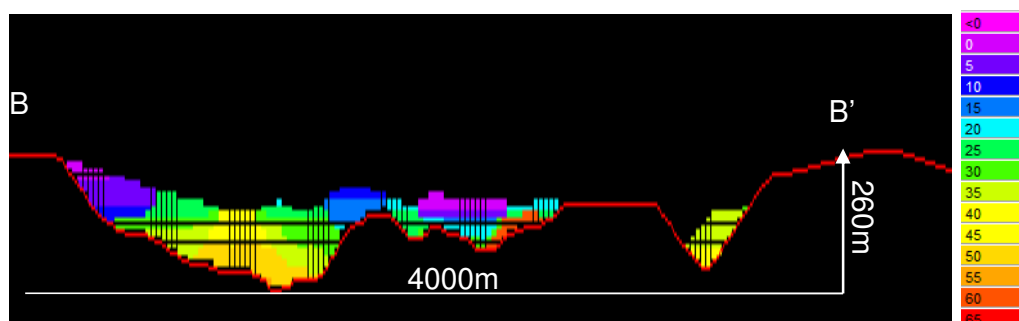


Figura 4.5. Seção B B' da cava final com exagero vertical 1,5 vezes. A sequência de lavra dos blocos é apresentada de acordo com o ano de extração ao longo da vida da mina.

Optou-se por não gerar uma cava final para cada cenário simulado, pois este trabalho tem como objetivo analisar a incerteza de teores no sequenciamento de lavra de longo prazo. Para isso, a cava final foi definida através da metodologia tradicional praticada na indústria, utilizando-se os teores do modelo estimado por krigagem ordinária. Mello (2015) apresenta metodologia utilizada para definição de geometria final de *stopes* em um depósito de ouro. Esta, pode ser investigada para aplicação em depósitos de lavra a céu aberto a partir da definição da cava final incorporando a incerteza dos teores.

A Tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos para a cava otimizada.

**Tabela 4.1. Resultados da cava final utilizada. Os valores apresentados são obtidos a partir do modelo do E-type.**

Variável	Cava
Valor Líquido (bilhões de reais)	79,335
VPL (7,8%) (bilhões de reais)	14,716
Minério (milhões de toneladas)	535,898
Estéril (milhões de toneladas)	710,030
Movimentação total (milhões de toneladas)	1.246
REM ( t/t)	1,32

#### 4.5. Sequenciamento de longo prazo

A próxima etapa, para dar início a definição da sequência de extração dos blocos, é a geração de avanços operacionais (*pushbacks*). Esses são definidos como o estágio na fase de expansão da mina que pode ser desenvolvido na prática e minerado de acordo com a sequência de extração, respeitando parâmetros geométricos determinados (Peroni, 2002).

Para gerar os *pushbacks* é necessário definir as condições de acesso, ou seja, determinar a distância mínima entre um avanço e seu predecessor. Além disso, são definidas configurações e restrições possíveis para a geração dos avanços operacionais, apresentadas na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2. Parâmetros para geração dos *pushbacks*.**

Descrição	Parâmetros
Número máximo de <i>pushbacks</i>	20
Último <i>pushback</i> atinge a cava final	sim
Avanços contínuos com precedentes	sim
Espaço de acesso entre avanços (m)	30
Massa de minério para cada avanço (Mt)	13

Após a geração dos *pushbacks*, foram definidos os parâmetros para o sequenciamento de lavra. Foi informada a massa de minério a ser lavrada por ano (6,5 milhões de toneladas) e o objetivo primário do sequenciamento,

maximização do VPL. Ainda, buscou-se a estacionarização da relação estéril/minério entre 0,5 e 2,0. Quando não foi possível atingir essa estacionariedade, devido maior presença de estéril nos anos iniciais, essa relação foi sendo atenuada ao longo dos anos, apresentando-se mais alta durante os anos iniciais de produção.

Para cada cenário simulado, foi gerado uma sequência de extração dos blocos na lavra ao longo da vida da mina. A fim de garantir uma igualdade de condições para os resultados gerados em todos os cenários analisados, mantiveram-se as configurações e restrições para todos os casos. O cenário do E-type também foi sequenciado para efeitos de comparação com os cenários simulados. A Tabela 4.3 apresenta os resultados do sequenciamento de longo prazo acumulados ao longo dos anos com a vida útil de mina para cada cenário analisado.

**Tabela 4.3. Resultado do sequenciamento de longo prazo para cada cenário simulado e para o E-type.**

<b>Sequenciamento</b>	<b>Vida útil de mina (anos)</b>	<b>VPL (Milhões de R\$)</b>	<b>REM (t/t)</b>
<b>Simulação 1</b>	69	15.150	1,79
<b>Simulação 2</b>	70	14.599	1,77
<b>Simulação 3</b>	70	15.483	1,77
<b>Simulação 4</b>	68	15.374	1,86
<b>Simulação 5</b>	68	15.392	1,82
<b>Simulação 6</b>	68	15.535	1,83
<b>Simulação 7</b>	67	15.403	1,88
<b>Simulação 8</b>	69	14.888	1,80
<b>Simulação 9</b>	68	15.640	1,82
<b>Simulação 10</b>	69	15.183	1,82
<b>Simulação 11</b>	68	15.737	1,85
<b>Simulação 12</b>	69	15.886	1,79
<b>Simulação 13</b>	67	15.179	1,89
<b>Simulação 14</b>	71	15.451	1,73

<b>Simulação 15</b>	70	15.116	1,77
<b>Simulação 16</b>	71	15.441	1,72
<b>Simulação 17</b>	70	15.161	1,75
<b>Simulação 18</b>	67	15.735	1,89
<b>Simulação 19</b>	69	15.539	1,78
<b>Simulação 20</b>	69	14.963	1,78
<b>Simulação 21</b>	70	15.990	1,77
<b>Simulação 22</b>	69	15.269	1,80
<b>Simulação 23</b>	69	15.413	1,82
<b>Simulação 24</b>	70	14.865	1,74
<b>Simulação 25</b>	69	15.712	1,79
<b>Simulação 26</b>	69	15.522	1,81
<b>Simulação 27</b>	68	14.855	1,84
<b>Simulação 28</b>	72	15.827	1,70
<b>Simulação 29</b>	67	15.739	1,86
<b>Simulação 30</b>	69	15.313	1,78
<b>Simulação 31</b>	70	15.694	1,76
<b>Simulação 32</b>	70	15.124	1,77
<b>Simulação 33</b>	71	14.893	1,74
<b>Simulação 34</b>	67	15.653	1,86
<b>Simulação 35</b>	70	15.400	1,74
<b>Simulação 36</b>	70	15.774	1,76
<b>Simulação 37</b>	70	15.428	1,77
<b>Simulação 38</b>	70	15.227	1,75
<b>Simulação 39</b>	69	15.534	1,80
<b>Simulação 40</b>	70	15.538	1,76
<b>Simulação 41</b>	72	15.318	1,69
<b>Simulação 42</b>	69	15.348	1,78
<b>Simulação 43</b>	71	15.520	1,71
<b>Simulação 44</b>	72	14.986	1,69
<b>Simulação 45</b>	71	15.124	1,72
<b>Simulação 46</b>	69	15.093	1,80
<b>Simulação 47</b>	69	15.455	1,80

<b>Simulação 48</b>	71	15.571	1,73
<b>Simulação 49</b>	70	15.490	1,76
<b>Simulação 50</b>	70	15.182	1,76
<b>E-type</b>	83	14.716	1,32

Analisando a tabela acima, verifica-se que o cenário do E-type apresenta uma vida útil de mina aproximadamente 18% maior que os cenários simulados, devido a maior quantidade de blocos de minério presente neste cenário. Tal fato decorre da relação cálcio-fosfato que fica sempre próxima aos valores exigidos para classificar o bloco como minério, causada pelo efeito de suavização dos teores para o cenário do E-type.

Além disso, é importante salientar que o VPL obtido para este cenário é de 14,716 bilhões de reais. Era de se esperar, que como o cenário do E-type possui maior quantidade de blocos de minério, o VPL fosse maior quando comparado aos outros cenários. No entanto, verificou-se que o VPL é o menor dentre os analisados. Isso pode ser explicado, pois apesar de haver mais blocos de minério, os teores são mais suavizados, resultando em menores ganhos monetários.

A Figura 4.6 mostra um gráfico que contém a quantificação dos possíveis blocos de minério para cada cenário (simulados e E-type). Para isso, o gráfico foi construído considerando todos os blocos com teor de  $P_2O_5$  maior ou igual a 5% e classificando de acordo com o RCP que varia de 0,5 a 2,5. É possível verificar que há uma maior quantidade de blocos classificados como minério para o cenário do E-type (linha vermelha) devido à suavização dos teores para ambas variáveis, resultando em um percentual maior de valores de RCP dentro da faixa considerada de classificação de minério, comprovando o que foi visto na Tabela 4.3.

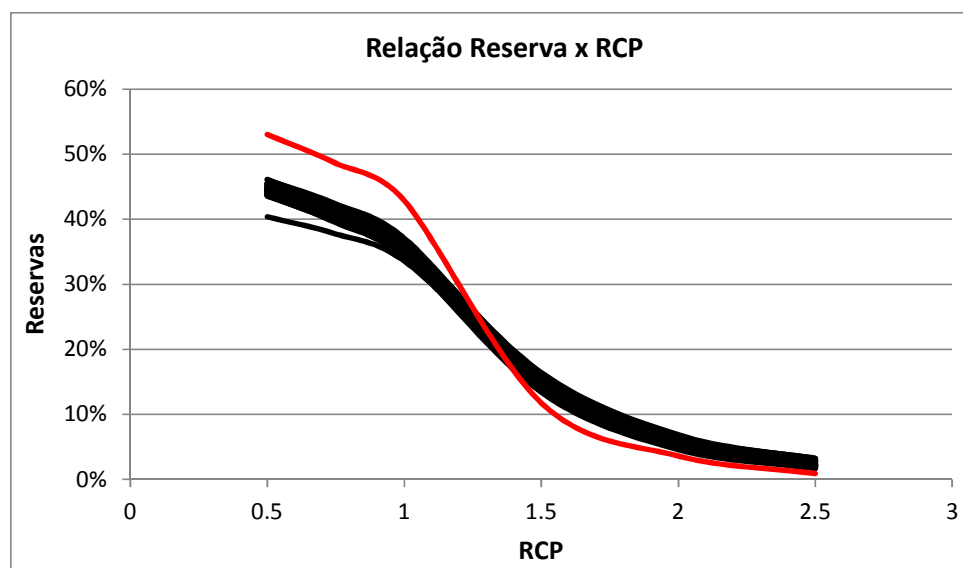


Figura 4.6. Quantificação dos blocos para diferentes intervalos de RCP.

#### 4.6. Avaliação dos cenários sequenciados e aplicação do índice de classificação

Com a definição de um sequenciamento de lavra para cada realização, a próxima etapa do estudo foi analisar as incertezas dos teores para cada cenário sequenciado. O sequenciamento de lavra gerado para cada realização, é a melhor sequência de extração dos blocos para o cenário de teores que o gerou. No entanto, o comportamento desse sequenciamento é *a priori* desconhecido para os outros cenários de teores possíveis. Para isso, torna-se necessário a construção das distribuições de probabilidades do VPL para cada sequenciamento de lavra gerado, de modo a avaliar esta sequência para diferentes cenários de teores.

Tomando como base Dimiktrakoupoulos e Ramazan (2007), em cada cenário de sequenciamento gerado foram avaliadas as 50 realizações analisando o VPL de cada uma, ou seja, a sequência de extração dos blocos foi mantida constante, e, cada realização foi avaliada dentro dessa sequência, analisando o VPL para cada cenário simulado. Isto foi realizado em todos os sequenciamentos gerados, e para todos os cenários obtidos por simulação.

A Figura 4.7 apresenta a metodologia utilizada para construir as distribuições de probabilidade para cada cenário de sequenciamento de lavra obtido.

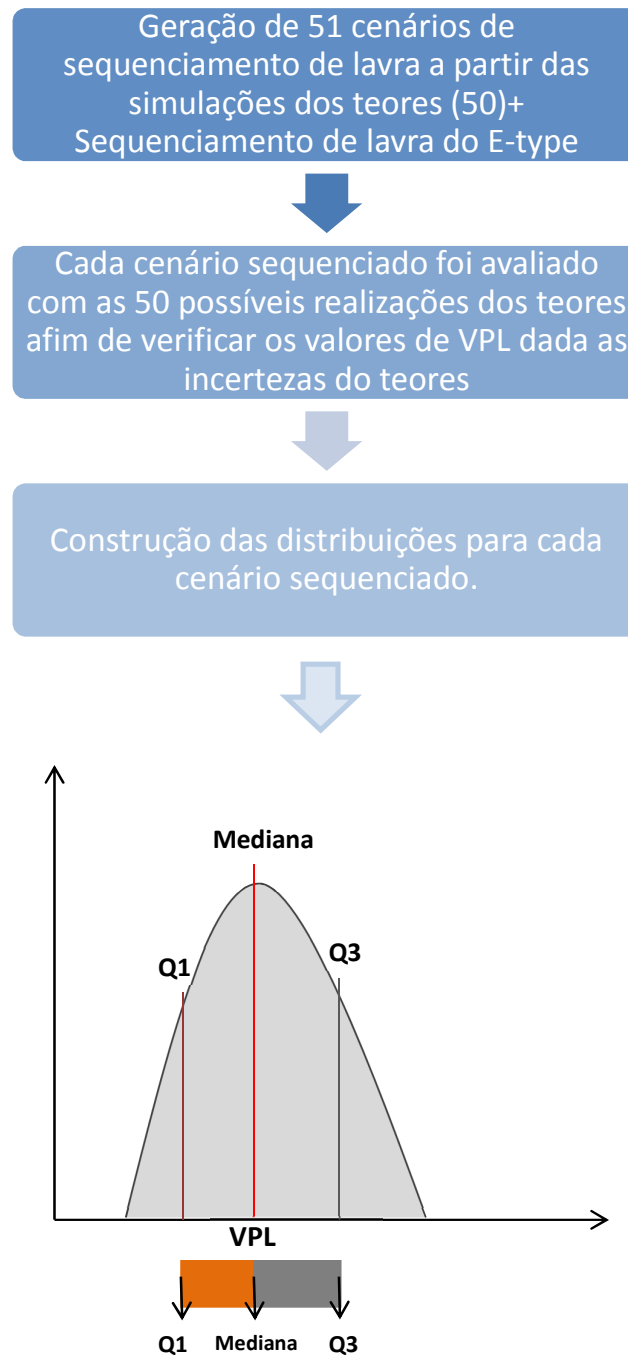


Figura 4.7. Metodologia utilizada para construir a distribuição de probabilidade para os cenários de sequenciamento de lavra gerados.

O resultado da avaliação está apresentado na Figura 4.8, na qual estão plotados os valores de VPL das 50 simulações para cada sequenciamento de lavra gerado, na forma de *boxplot*. O *boxplot* é um diagrama utilizado para entender como os valores da distribuição de probabilidades estão espaçados ao longo do conjunto. Ele é formado com cinco informações dos dados: valor mínimo, primeiro quartil, segundo quartil, terceiro quartil e valor máximo. Assim, é possível visualizar a dispersão dos dados em torno da média.



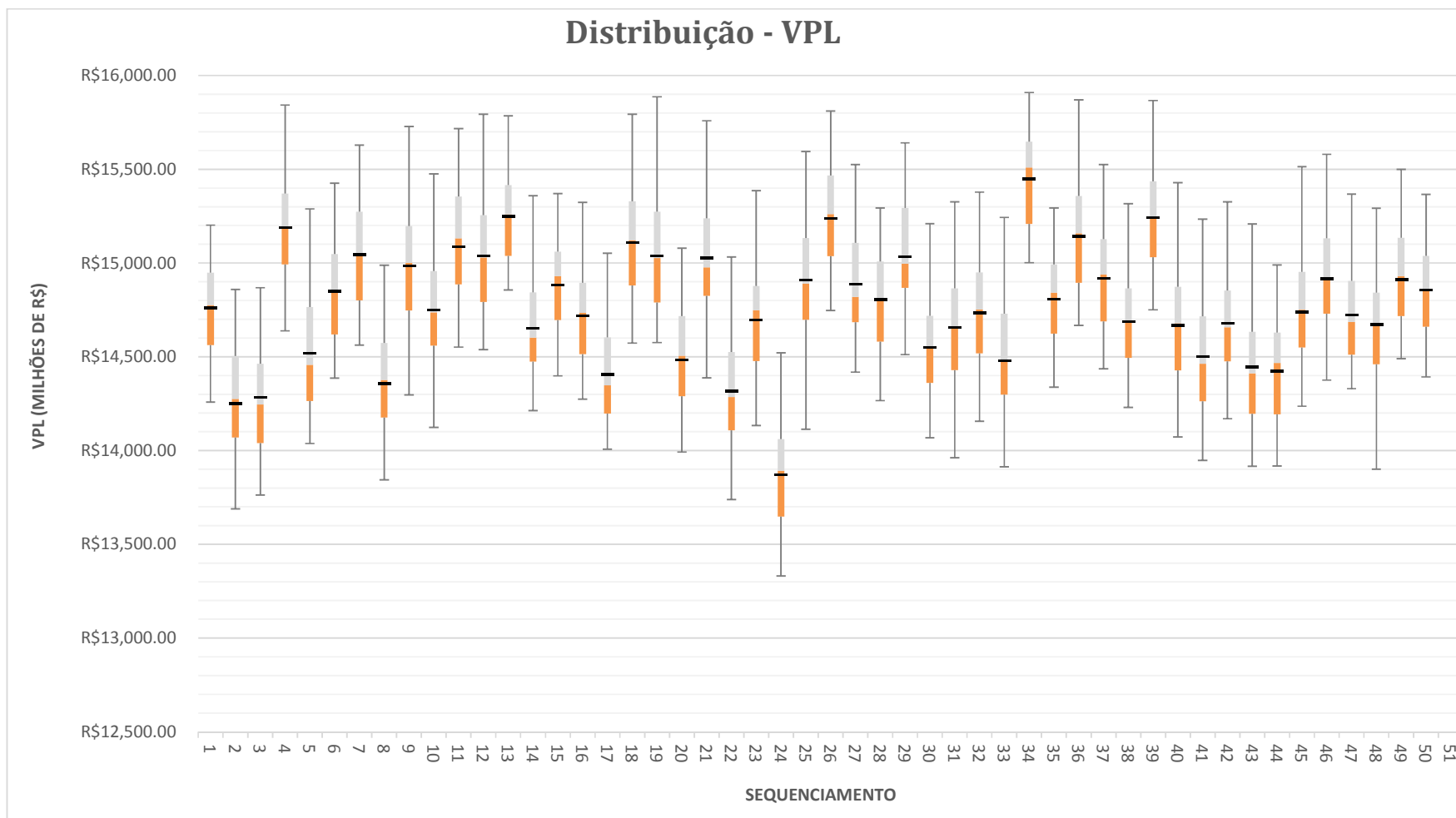
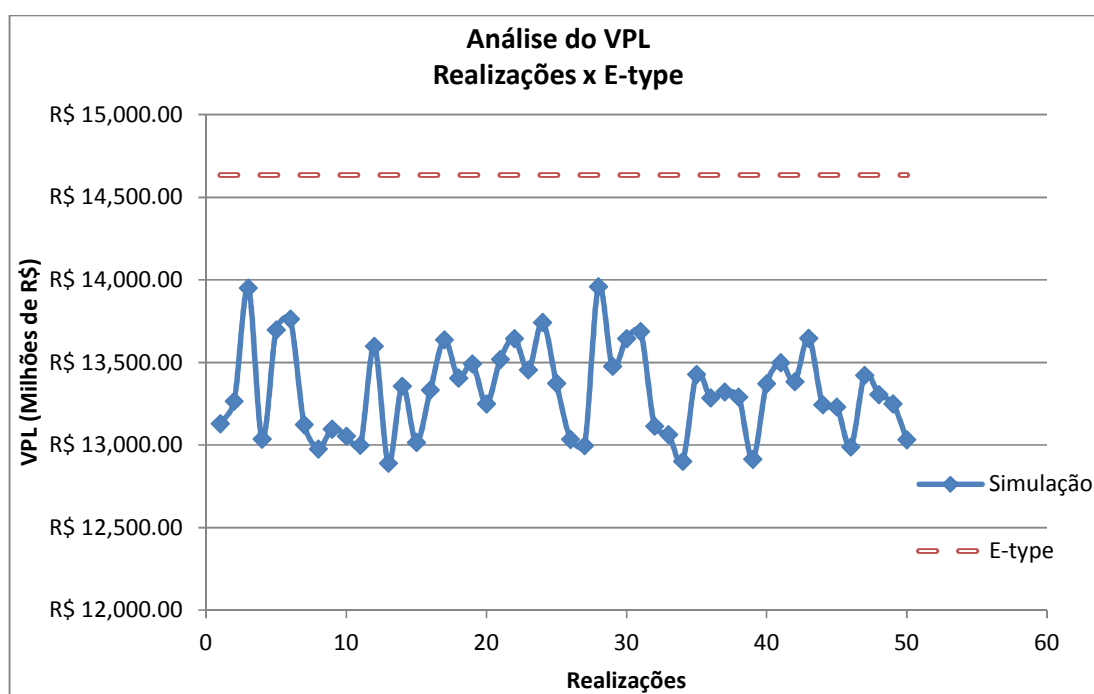


Figura 4.8. Avaliação das incertezas do VPL para cada sequenciamento de lavra gerado dadas as incertezas dos teores nos blocos.

Analisando a Figura 4.8 acima, nota-se a variação do VPL para cada cenário de sequenciamento de lavra gerado inicialmente. Com isso, é possível obter uma análise da incerteza econômica do projeto associada a cada cenário de sequenciamento escolhido.

Além disso, foi realizada a análise do cenário de sequenciamento e do valor de VPL obtido utilizando o E-type como referência, ou seja, utilizando o sequenciamento de lavra gerado pelo E-type, neste cenário, foram avaliadas as 50 realizações com seus 50 VPLs (Figura 4.9).



**Figura 4.9. Análise do VPL utilizando a sequência de extração dos blocos de lavra obtido pelo E-type. A linha em azul é o VPL do E-type. A linha em laranja é o VPL da sequência escolhida para o E-type, mas com os modelos de teores de cada realização.**

Verifica-se que o VPL obtido pelo E-type tem 0% de probabilidade de ocorrer, pois os VPLs de todas as realizações estão abaixo do proposto com o modelo de teores médio. Assim, o valor de VPL previsto pelo cenário do E-type, que seria o método utilizado pela indústria, está superestimando o valor real.

#### 4.6.1. Análise das distribuições e critérios de escolha

Com as construções das distribuições de probabilidade para os possíveis valores de VPLs para todos os cenários, é necessário definir alguns critérios para que apenas um cenário seja escolhido e utilizado para o planejamento de lavra. O primeiro critério escolhido foi a análise do comportamento do VPL para cada cenário ao longo da vida da mina.

A partir das distribuições geradas, definiu-se como primeiro critério para a escolha dos possíveis cenários a serem analisados, um valor mínimo para o primeiro quartil de 15 bilhões de reais de VPL, ou seja, a barra de cor laranja do *boxplot* deverá ser superior a 15 bilhões de reais no eixo vertical do gráfico. Esse valor foi definido como sendo o valor mínimo de retorno que um investidor espera obter com esse projeto. Com isso, muitos cenários já são eliminados, não sendo necessária suas avaliações pelo índice de classificação, conforme pode ser visto na Figura 4.10.

Após avaliar quais cenários atingiram a meta mínima estabelecida, foram escolhidos cinco, dentre os cinquenta cenários, para continuar com o processo metodológico para seleção de um único cenário de sequenciamento de lavra. Os cenários escolhidos estão circulados na Figura 4.10 e são os cenários sequenciados de número 4, 13, 25, 34 e 39.

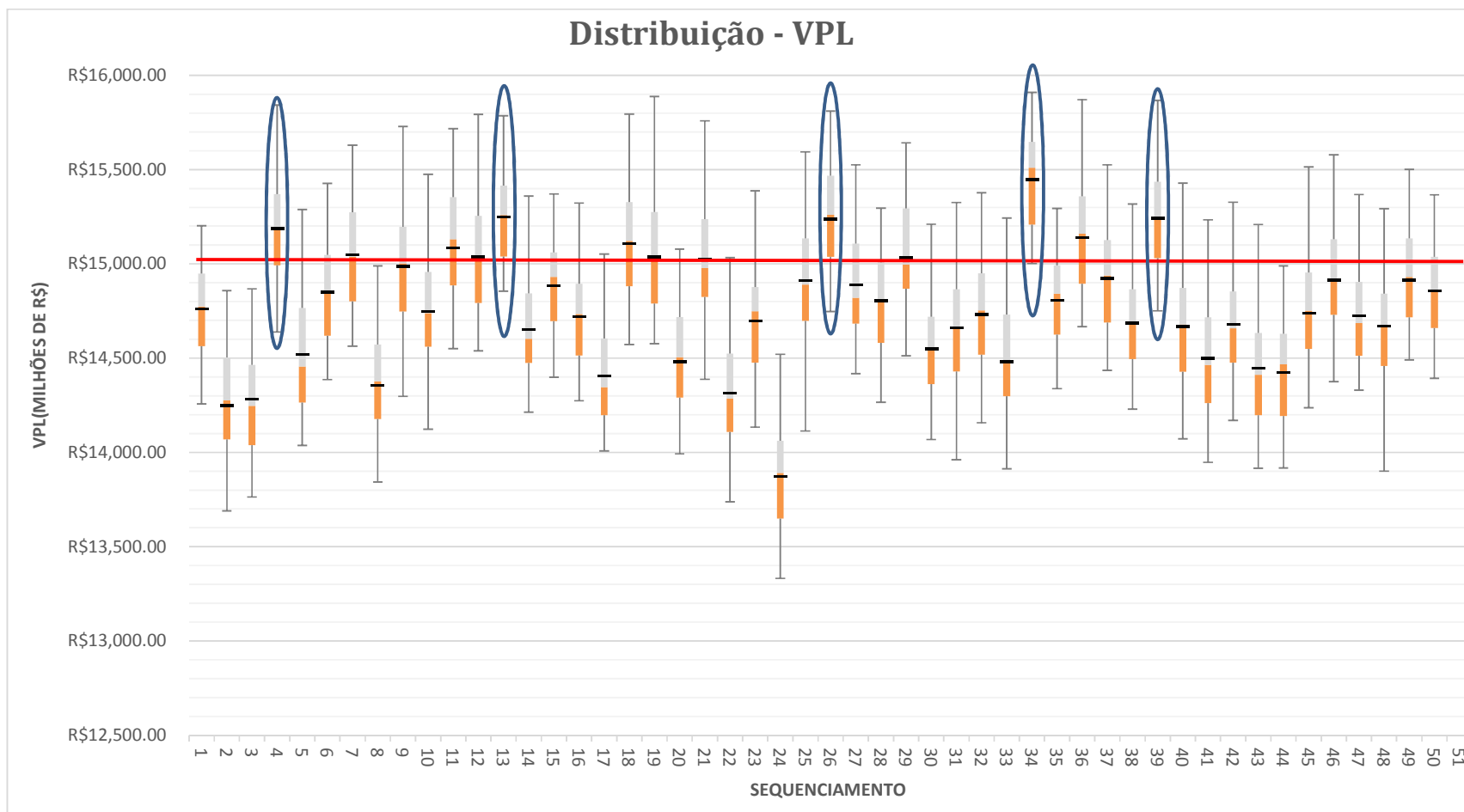


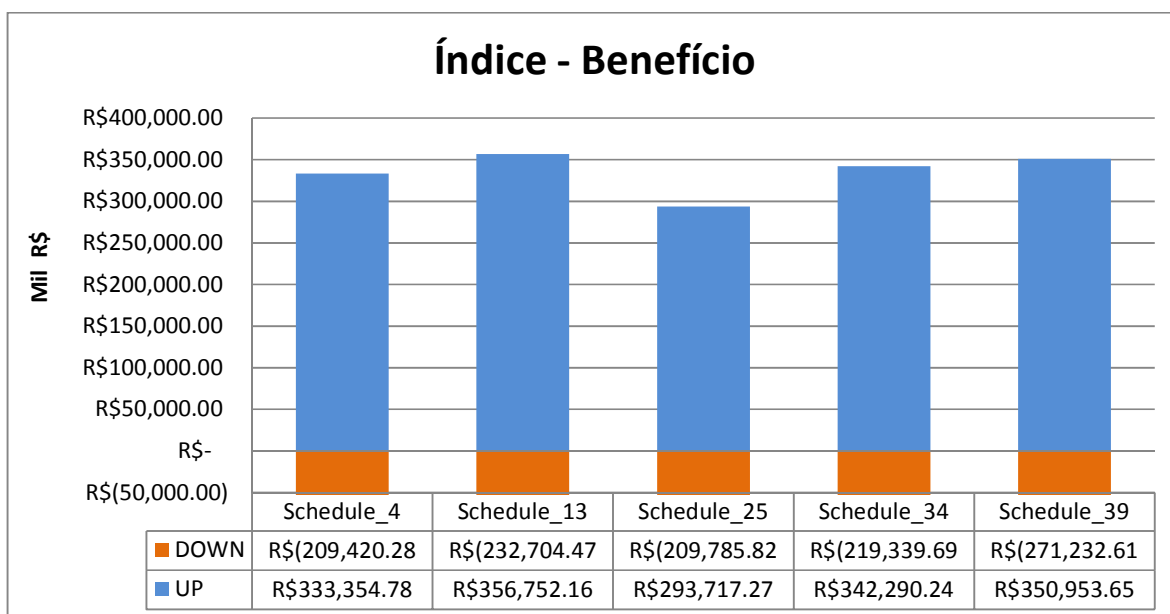
Figura 4.10. Escolha dos cenários (circulados em azul) para análise pelo índice de classificação. O primeiro quartil deve estar acima de 15 bilhões de reais.

#### 4.6.2. Índice de classificação

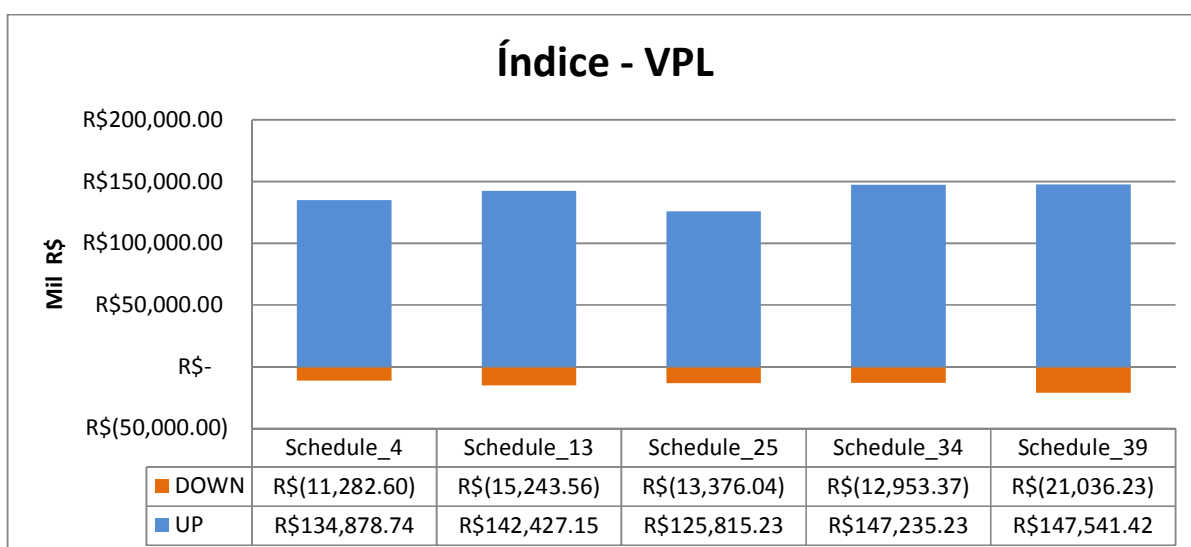
Com a avaliação dos possíveis valores de VPL para cada cenário de sequenciamento de lavra gerado, torna-se necessário quantificar o risco associado a incerteza de teores para cada cenário analisado. Isto foi realizado, através da definição do sequenciamento que maximiza o potencial de ganho e reduz o risco para atingir as metas econômicas estabelecidas. Para isso, foi utilizado o índice de classificação apresentado no capítulo anterior, seção 3.3.

Para aplicação do índice é necessário definir o valor mínimo de retorno (MAR), que é o valor mínimo esperado para avaliação dos potenciais ganhos e riscos associados ao projeto. O MAR pode ser qualquer valor definido pelo planejador de acordo com a estratégia da empresa e o objetivo do estudo. Para este estudo de caso, foram realizadas duas aplicações do índice, ambas para analisar o comportamento do potencial ganho e risco de perda associado ao benefício e ao VPL para os cenários escolhidos. Com isso, o MAR foi definido como sendo o benefício gerado ao longo de um ano de lavra, com teores médios do domínio do bebedourito. Primeiro, foi calculado o benefício para um bloco e, em seguida, esse valor foi multiplicado pelo número médio de blocos lavrados no ano.

As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam o resultado do índice considerando o benefício e o VPL, respectivamente, para os cinco cenários analisados, com seus potenciais ganhos e perdas associados.



**Figura 4.11. Índice calculado para o benefício dos blocos lavrados anualmente ao longo da vida da mina. O *down* representa o potencial risco de perda e o *up* o potencial risco de ganho econômico.**



**Figura 4.12. Índice calculado para o VPL dos blocos lavrados anualmente ao longo da vida da mina. O *down* representa o potencial risco de perda e o *up* o potencial risco de ganho econômico.**

Para analisar as figuras acima, primeiramente é necessário saber que quanto maior o valor obtido para o *down*, ou seja mais próximo de zero, menor o risco. Já para o *up*, quanto maior o valor, maior o potencial ganho econômico.

Analisando os gráficos acima, verifica-se que considerando o benefício dos blocos lavrados anualmente ao longo da mina, o sequenciamento de número 4 se torna mais vantajoso, pois tem menor risco associado e um potencial ganho praticamente igual ao maior valor obtido. Quando se analisa o VPL, também é constatado que o sequenciamento de número 4 é o que se apresenta mais vantajoso, pelos mesmos motivos do caso anterior.

As análises realizadas e apresentadas neste trabalho foram realizadas utilizando o sequenciamento de longo prazo. Assim, tem-se uma ideia global da diferença que existe entre a utilização de um cenário de teores médio e quando se utiliza modelos simulados para a realização do planejamento de lavra, mostrando-se de crucial importância o uso dos cenários simulados para planejar a vida da mina.

#### **4.7. Considerações finais**

Neste capítulo, foi apresentado um estudo de caso contemplando as etapas realizadas durante o planejamento de lavra de longo prazo. Ainda, foi definido um sequenciamento de lavra a partir de cenários estocásticos utilizando um índice de classificação para os mesmos, que quantificam os riscos potenciais de não atingir determinada expectativa econômica de um projeto.

Por fim, foi realizada uma comparação entre o cenário desenvolvido tradicionalmente na indústria (baseado na krigagem) e os cenários obtidos pela simulação, sendo possível identificar uma discrepância nas informações previstas, ao não se levar em consideração as incertezas dos teores para as etapas subsequentes.

## Capítulo 5

### Conclusões e Recomendações

Neste capítulo, é apresentado o conjunto de conclusões obtidas sobre a metodologia e sua aplicabilidade. Também são apresentadas algumas recomendações de trabalhos futuros.

#### 5.1. Conclusões

A co-simulação dos teores dos elementos fosfato e cálcio realizada pelo algoritmo de bandas rotativas demonstrou ser um método eficaz e necessário para quantificar as incertezas dos teores no depósito em estudo. É uma técnica robusta e que deve ser incluída, quando possível, para as etapas subsequentes, como o planejamento de lavra e beneficiamento de minério, pois é capaz de reproduzir a variabilidade *in situ* dos teores no depósito mineral, possibilitando realizar o mapeamento e o correto planejamento do sequenciamento de lavra, conforme o comportamento do fenômeno.

A incorporação da incerteza dos teores no planejamento de lavra é um assunto que está sendo cada vez mais pesquisado, com diversos estudos e aplicações em depósitos a céu aberto. Contudo, a incorporação das incertezas combinada de variáveis múltiplas não possui muitas abordagens na literatura e é uma das contribuições desta dissertação.

Além disso, este estudo demonstrou um modo alternativo ao convencional utilizado na indústria para seleção de um cenário de sequenciamento de lavra baseando-se nas co-simulações geradas. O resultado observado é que o cenário tradicional, devido a não linearidade dos parâmetros utilizados na função benefício, superestima a quantidade de minério e a vida útil da mina ao longo dos anos. Além disso, o valor de VPL para o cenário tradicional não condiz com os possíveis valores de VPL que serão obtidos dado a variabilidade *in situ* dos teores, não considerando variação de outros parâmetros, como preço de venda, custos, etc.



Ainda, foi proposto um índice capaz de quantificar o potencial de ganho e o risco presente em cada cenário sequenciado, dada as incertezas dos teores. Este índice serviu para reforçar a ideia obtida no *boxplot* apresentado no capítulo 4, pois o sequenciamento de número 4 se sobressai aos demais. Com a utilização do índice proposto foi possível quantificar a incerteza e retificar a escolha do sequenciamento diante da análise da sua distribuição de resultados. É importante salientar que para outros estudos de casos, nos quais os valores de análises obtidos são mais próximo entre si, o índice pode ser considerado o fator faltante para a tomada de decisão. Outro fator importante a ser ressaltado sobre o índice, é que foram analisados dois valores de MAR (benefício e VPL) para a tomada de decisão, contudo, o MAR é um valor que pode ser escolhido pelo planejador e/ou equipe de trabalho de acordo com o objetivo a ser analisado.

Por fim, a definição de um cenário alternativo a metodologia tradicional utilizada na indústria apresenta-se uma boa ferramenta de auxílio para tomada de decisão considerando a incerteza dos teores, através da análise do VPL para o cenário escolhido. Em relação ao E-type ou modelo krigado apresenta-se como um modelo suavizado, incapaz de fornecer a real variabilidade e comportamento do fenômeno. Basear o plano de lavra e as etapas de planejamento subsequentes em um modelo suavizado, produz erros consideráveis que são visíveis no final do projeto. Utilizando um modelo com análise probabilística, os riscos controláveis (exceto políticos e sociais) podem ser mapeados antecipadamente e assim, as metas podem ser pré-definidas e atingidas pela empresa, tornando o projeto de lavra eficaz e confiável.

## **5.2. Trabalhos futuros**

Recomenda-se a incorporação de outras incertezas na análise do sequenciamento de lavra, tais como, preço de venda da *commoditie*, custos envolvidos no projeto, blendagem de materiais e taxas de produção. Com isso, o teor de corte deve variar, e as reservas serão variáveis. Essas incertezas devem ser incorporadas para ser possível obter-se o melhor cenário de

sequenciamento de lavra com base de uma avaliação completamente estocástica sobre o planejamento de mina.

Além disso, sugere-se que a metodologia seja analisada com variações no MAR, analisando outros fatores que não sejam econômicos.

Por fim, seria interessante incorporar este estudo para o planejamento de curto e médio prazo, ligados a outros fatores além do econômico, a fim de verificar o comportamento do índice de classificação para períodos menores de tempo.

## Referências

ALABERT, F.G., 1987. **Stochastic imaging of spatial distributions using hard and soft information**. 197p. M.Sc. thesis, Stanford University, Stanford.

ARMSTRONG, M., 1998. **Basic Linear Geostatistics**. Springer, Berlim, 153p.

BLEINES, C., DERAISME, J., GEFFROY, F., PERSEVAL, S., RAMBERT, F., RENARD, D., TOUFFAIT, Y., 2001. **ISATIS software manual**. Geovariances and École des Mines de Paris, 531p.

BONATO, F.S., 2000. **Planejamento de lavra com auxílio de simulação geoestatística**. 87p. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e Materiais (PPGEM).

BRAS, R.L., RODRIGUEZ-ITURBE, I., 1985. **Random functions and hydrology**. Dover, New York, 559p.

CHENTSOV, N.N, 1957. **Levy Brownian motion for several parameters and generalized white noise**. Theory of Probability and Its Applications, 2, pp 265-266.

CHILÈS, J.P., DELFINER, P., 1999. **Geostatistics: modeling spatial uncertainty**. Wiley- Interscience, USA, 695p.

COSTA, J.F., KOPPE, J.C., ZINGANO, A.C., 1997. **Uncertainty analysis of stripping ratio and enhanced coal mine planning**. In: Proceedings, MinelT'97 - First International Conference on Information Technologies in the Minerals Industry (Internet), Athens, Greece.

COSTA, J.F., 1997. **Developments in recoverable reserves estimation and ore body modelling**. 333p. Ph.D. Thesis, WH Bryan Mining Geology Research Centre, The University of Queensland, Australia.

DAVID, M., DOWD, P., KOROBOV, S., 1974. **Forecasting departure from planning in open pit design and grade control**. 12th APCOM Symposium, SME-AIME, Colorado School of Mines, pp.F131-F153.

DAGDELEN, K., 1992. **Cutoff grade optimization**. In: Proceedings of 23<sup>th</sup> APCOM, University of Arizona, Tucson, Arizona, pp.157-165.

DEUTSCH, C.V., JOURNEL, A.G., 1992. **GSLIB: Geostatistical software library and user's guide**. Oxford University Press, New York, 340p.

DEUTSCH, C.V., JOURNEL, A.G., 1998. **GSLIB: Geostatistical software library and user's guide**. Oxford University Press, New York, 2<sup>a</sup> Edição, 369p.

DEUTSCH, C.V., 2011. **Guide to best practice in geostatistics**. Draft Version 1.0. Edmonton: Centre for Computacional Geostatistics, 101p.

DEUSTCH, C.V., ROSSI, M., 2014. **Mineral resource estimation**. Alberta: Springer. 332p.

DIEDRICH, C., 2012. **Incorporação da variabilidade dos teores para análise de risco de recursos minerais e sequenciamento de lavra**. 188p. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

DIMITRAKOPOULOS, R., 1997. **Conditional simulations: tools for modeling uncertainty in open pit optimisation**. Optimizing with Whittle. Whittle Programming Pty Ltd, Perth, pp.31–42

DIMITRAKOPOULOS, R., FARRELLY, C.T., GODOY, M., 2002. **Moving forward from traditional optimisation: grade uncertainty and risk effects in open pit mine design**. Transcript of the Institute of Mining and Metallurgy, Volume Section A: Minerals Industry, Number 111, pp.A82-A89.

DIMITRAKOPOULOS, R., RAMAZAN, S., 2004. **Uncertainty based production scheduling in open pit mining**. SME Transactions, vol. 316, pp.106-112.

DIMITRAKOPOULOS, R., MARTINEZ, L., RAMAZAN, S., 2007. **A maximum upside / minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine desgin**. Journal of Mining Science. v.43. pp.73-82.

DOWD, P.A., SARAC, C. 1994., **An extension of the LU decomposition method of simulation.** In: Geostatistical Simulations, M. Armstrong and P. A. Dowd, eds. Kluwer, Dordrecht, Netherlands, pp.23-36.

FARRELLY, C.T., 2002. **Risk quantification in ore reserve estimation and open pit mine planning.** 150p. M.Sc. thesis, The University of Queensland, Brisbane.

GLACKEN, I.M., 1996. **Change of support by direct conditional block simulation.** 130p. M.Sc. thesis, Stanford University, Stanford.

GODOY, M.C., 1997. **Minimização de perdas em operações de lavra seletiva incorporando a incerteza da estimativa no controle de teores.** 91p. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

GODOY, M.C., DIMITRAKOPOULOS, R., COSTA, J.F., 2001. **Economic functions and geostatistical simulation applied to grade control.** In: Edwards, A.C. (Ed.) Mineral Resource and Ore Reserve Estimation - The AusIMM Guide to Good Practice. AusIMM., Melbourne, pp. 591-599.

GODOY, M.C., 2003. **The effective management of geological risk in long-term production scheduling of open pit mines.** 256p. PhD thesis, The University of Queensland, Brisbane.

GODOY, M.C., DIMITRAKOPOULOS, R., 2004. **Managing risk and waste mining in long-term production scheduling.** SME Trans. 316 pp. 43-50.

GOOVAERTS, P., 1997. **Geostatistics for natural resources evaluation.** Oxford University Press, New York, 483p.

HALATCHEV, R., 1999. **Company strategy – a basis for production scheduling of an open pit complex.** Whittle – Strategic Mining Planning, Perth, Whittle Programing Pty. Ltd., pp. 81-95.

HUSTRULID, W., KUCHTA, M., 1995. **Open pit mine planning and design.** Rotterdam, A. A. Balkema. 636p.

ISAAKS, E.H., 1990. **The application of monte carlo methods to the analysis of spatially correlated data.** 213p. PhD. Thesis, Stanford University, USA.

JEWBALI, A., DIMITRAKOPOULOS, R., 2009. **Stochastic mine planning: example and value from integrating long- and short-term mine planning through simulated grade control.** In: Orebody modelling and strategic mine planning 2009, Perth, pp. 327–334.

JOURNEL, A.G., 1974. **Geostatistics for conditional simulation of ore bodies.** *Economic Geology*, Vol. 69, N<sup>o</sup> 5, pp. 673-687.

JOURNEL, A.G., HUIJBREGTS, C.J., 1978. **Mining geostatistics.** Academic Press, London, 600p.

JOURNEL, A.G., KYRIAKIDIS, P., 2004. **Evaluation of mineral reserves, a simulation approach.** Oxford University Press, 216p.

KENT, M., PEATTIE, R., CHAMBERLAIN, V., 2007. **Incorporating grade uncertainty in the decision to expand the main pit at the Navachab gold mine, Namibia, through the use of stochastic simulation.** The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series.

KIM, Y.G., 1979. **Open pit limit analysis,** SME-AIME, pp. 297-303.

KIM, Y., ZHAO, Y., 1994. **Optimum open pit production sequencing - the current state of the art,** in Proceedings SME Annual Meeting, 1994, Preprint Littleton, CO, pp.94-224.

KOPPE, V.C., 2009. **Metodologia para comparar a eficiência de alternativas para disposição de amostras.** 236p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

LANE, K.F., 1964. **Choosing the optimum cutoff grade.** Colorado School of Mines: Quarterly, Vol 59, No 4, pp.811-829.

LANE, K., 1988. **The economic definition of ore.** London: Mining Journal Books, 149p.

LANTUÉJOUL, C., 2002. **Geostatistical simulation: models and algorithms**. Springer, Berlin, 256p.

LERCHS, H., GROSSMANN, L.F., 1965. **Optimum design of open pit mines**. CIM Bulletin, vol. 58, January, pp.47-54.

LI, S., KNIGHTS, P., DUNN, D., 2008. **Geological uncertainty and risk: implications for the viability of mining projects**. Journal of coal science and engineering, China, pp.176-180.

MATHERON, G., 1973. **The intrinsic random functions and their applications**. Advances in Applied Probability, N° 5, pp.439-468.

MELLO, P.R.G., 2015. **Planejamento de lavra sob a incerteza de teores aplicado à lavra subterrânea**. 162p. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

OLEA, R.A., 1999. **Geostatistics for engineers and earth scientists**. Boston : Kluwer Academic Publishers, 303p.

PERONI, R.L., 2002. **Análise de sensibilidade do sequenciamento de lavra em função da incerteza do modelo geológico**. 126p. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

RAMAZAN, S., DIMITRAKOPOULOS, R., 2007. **Stochastic optimization of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation**. In: Orebody Modelling and Strategic Mine Planning: Uncertainty and risk management 185 models, The Australian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum vol. 14, 2nd Edition, pp.385-392.

ROSSI, M.E., VAN BRUNT, B.H., 1997. **Optimizing conditionally simulated orebodies with Whittle 4D**. Optimizing with Whittle 97, Perth, Whittle Programming Pty Ltd, pp.119-128.

RAVENS-CROFT, P.J., 1994. **Conditional simulation for mining: practical implementation in an industrial environment**. In Armstrong, M. and Dowd, P.

(Eds.) Geostatistical Simulations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp.79-87.

SOARES, A., 2001. **Direct sequential simulation and co simulation.** Mathematical Geology, pp.911-926.

SRIVASTAVA, R.M., HARTZELL, D.R., Davis, B.M., 1992. **Enhanced metal recovery through improved grade control.** 23rd APCOM Symposium, Littleton, pp.243- 249.

WHITTLE, J., 1999. **A decade of open pit mine planning and optimization - the craft of turning algorithms into packages.** In: 28Th APCOM Proceedings - Colorado School of Mines, Golden, CO, 1999, pp.15-23

WHITTLE, D., 2011. **Open-pit planning and design.** In: Peter, Darling, 3<sup>rd</sup> edition. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (U.S). Mining Engineering Handbook, pp.877-901.