

Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras

(Liquidity constraint for portfolio selection models)

Gabriel Matos Pereira*

Leonardo Riegel Sant'Anna**

Tiago Pascoal Filomena***

João Luiz Becker****

Resumo:

A liquidez é um fator importante no âmbito da gestão de carteiras. Em 2012, no Brasil, a CVM começou a exigir que instituições mantenham um controle da liquidez de seus ativos/carteiras. O objetivo deste trabalho é incorporar a liquidez de forma endógena a um modelo de seleção de carteiras visando a sua utilização no mercado de capitais brasileiro. A restrição proposta considera questões práticas de forma endógena: valor da carteira, volume monetário negociado, percentual do total negociado máximo, prazo para liquidação e nível de liquidação. Além de propor uma nova restrição para liquidez em problemas de carteira, o modelo ainda apresenta uma aplicação no mercado brasileiro. Nessa aplicação, verifica-se que os parâmetros escolhidos possuem influência nos níveis de liquidação da carteira.

Palavras-chave: seleção de carteiras, liquidez, restrição de liquidez, gestão de portfólios.

Classificação JEL: G11, G29

Submetido em 18 de março de 2015. Reformulado em 21 de agosto de 2015. Aceito em 31 de agosto de 2015. Publicado on-line em 5 de novembro de 2015. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Newton Carneiro Affonso da Costa Jr.

*UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: gabrielmatos@gmail.com

**UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: lrsantanna@outlook.com

***UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: tpfilomena@ea.ufrgs.br

****UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: jlbecker@ea.ufrgs.br

Rev. Bras. Finanças (Online), Rio de Janeiro, Vol. 13, No. 2, April 2015, pp. 288–324

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

©2015 Sociedade Brasileira de Finanças, under a Creative Commons Attribution 3.0 license -

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>

Abstract:

Liquidity is an important issue in portfolio management. In 2012, the Brazilian market regulatory agency (CVM) started to require all banks and brokerages to maintain liquidity control of their portfolios. This study presents a liquidity constraint which is endogenously incorporated to portfolio optimization to Brazilian Financial Institutions. The proposed constraint incorporates endogenously some practical issues such as: portfolio value, monetary volume traded, maximum percentage of monetary value, liquidation term date and liquidation level. This constrain is applied to the Brazilian Stock Market. The selected constraint parameters have high influence on the liquidity level of the portfolio.

Keywords: portfolio management, liquidity, liquidity constraints.

1. Introdução

Ao se efetuar um investimento, trabalha-se com expectativas, usando-se estimativas futuras sobre o benefício que a alocação de capital em determinado investimento pode proporcionar ao investidor. É feita, durante o processo de decisão, uma análise comparativa entre os investimentos disponíveis ponderando elementos tanto referentes às suas características como perspectivas futuras. Sendo assim, a análise de investimentos, além de uma tarefa de comparação, também é uma tarefa de análise individual de cada uma das opções disponíveis. Dentro do escopo de análise, quatro atributos se destacam: o retorno esperado, o risco potencial ao qual se estará exposto, o prazo que se estará disposto a permanecer na posição e a possibilidade de saída da posição. Logo, a análise de um investimento envolve basicamente a estimação de sua rentabilidade, de seu grau de risco e de sua liquidez.

É comum que modelos de otimização de carteira considerem apenas relações de risco e retorno (Markowitz, 1952; Fama e French, 1992). Normalmente, modelos de otimização desconsideram a questão de liquidez e possibilidade de um único agente afetar consideravelmente os preços de mercado (Bank e Baum, 2004). A não observância de restrições de liquidez pode trazer efeitos negativos para o investidor. Apesar de o mercado, de certa forma, já precificar a liquidez do ativo (Amihud e Mendelson, 1991), fato que foi também comprovado no mercado brasileiro (Machado e Medeiros, 2011), o investidor pode se expor desnecessariamente a riscos futuros se não considerar o impacto que a liquidez dos ativos exerce durante a formação da carteira. Além disso, a questão de liquidez e sua relevância são também tratados fora do campo

de otimização de carteiras, como fazem por exemplo Gourinchas e Parker (2002) e Haliassos e Michaelides (2003), sobre liquidez no mercado de imóveis e dinâmicas de consumo individual.

No Brasil, a Comissão de Valores Imobiliários (CVM), autarquia responsável por disciplinar, normalizar e fiscalizar a atuação dos diversos integrantes do mercado, tem alertado nos últimos anos para a importância do controle das ferramentas que os fundos utilizam para gerenciar a liquidez. Em instrução n. 522 de 08/maio/2012 (CVM, 2012), a CVM reformou as regras dos fundos de investimento, buscando dar mais transparência ao investidor. A seção IV-B da referida instrução delibera sobre o “gerenciamento do risco de liquidez”. Nessa seção, o Art. 65-B dispõe que “o administrador deve adotar as políticas, práticas e controles internos necessários para que a liquidez da carteira seja compatível com os prazos previstos no regulamento para pagamento dos pedidos de resgate e o cumprimento das obrigações”.

A penalização potencial à rentabilidade de um fundo/carteira em caso de não haver tempo hábil para estruturar uma estratégia de vendas de ativos que não impacte (ou impacte pouco) no preço e, em casos mais drásticos, a impossibilidade de se desfazer desses ativos para honrar sua responsabilidade frente aos quotistas, torna importante a consideração da liquidez dos papéis ao se trabalhar com gestão de carteiras. A recente ação imposta pela CVM, para forçar um aumento no controle do nível de liquidez das carteiras, ratifica a importância da utilização desses controles ao se trabalhar no atual mercado de capitais brasileiro.

O objetivo deste artigo é incorporar a liquidez de forma endógena a um modelo de seleção de carteiras visando a sua utilização no mercado de capitais brasileiro. O volume monetário negociado durante um determinado período será a medida de liquidez utilizada para construção do modelo. A restrição proposta considera questões práticas de forma endógena: valor da carteira, volume monetário negociado, percentual do total negociado máximo, prazo para liquidação e nível de liquidação. Além de propor uma nova restrição para liquidez (inédita) em problemas de carteira, o modelo é validado no mercado brasileiro. Na aplicação de validação, verifica-se que os parâmetros escolhidos possuem influência nos níveis de liquidação da carteira. Os níveis de liquidação também são significativamente maiores quando comparados aos de carteiras obtidas sem a restrição de liquidez. Também não se percebeu influência no uso da média móvel ou suavização exponencial simples para previsão futura de liquidez diária.

O artigo inicia com uma discussão de liquidez em seleção de carteira. Na Seção 3, é proposta a restrição de liquidez para ser usada de forma endógena em seleção de carteiras. Na mesma seção também é apresentado o modelo de seleção de carteira a ser utilizado, assim como formas para estimação do volume monetário negociado. A restrição é testada no mercado brasileiro na Seção 4, na qual também são apresentados os resultados. As considerações finais encerram o estudo.

2. Revisão da literatura

Para construção da base teórica, apresentam-se inicialmente os principais índices de liquidez de carteira baseados em preços e volume. Na sequência, discutem-se formas de restrição de liquidez apresentados na literatura; a mais simples é a filtragem prévia (Seção 2.2.1), sendo também discutidas a média ponderada da carteira (Seção 2.2.2) e a restrição por ativos individuais (Seção 2.2.3).

2.1. Índices baseados em preço e volume

Os índices de liquidez de ativos podem ser divididos em dois grandes grupos: preço e volume. Em índices baseados em preços, é inferida a liquidez de um ativo (ou mercado) analisando-se diretamente a variação de preços ou a diferença de *bid* e *ask* (Hasbrouck e Seppi, 2001). Dentre os diversos índices baseados em preços, pode-se citar o índice de liquidez de Marsh e Rock (1986) e a taxa de variância. A taxa de liquidez de Marsh e Rock (1986) estabelece uma relação entre a variação percentual do preço e o número total absoluto de transações. Já a taxa de variância relaciona variações de longo e de curto prazo no preço (Hasbrouck e Schwartz, 1988; Gabrielsen, Marzo e Zagaglia, 2011). Outras abordagens para índices de liquidez baseados em preços podem ser encontradas em Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011).

No que tange aos indicadores baseados em volume, é intuitivo pensar que quanto mais transacionado é um ativo e quanto maior o volume dessas transações, mais líquido ele é. Essa faceta da liquidez pode ser bem capturada medindo-se simplesmente o valor total de ações transacionadas em um período t . Sendo, então definida como:

$$\begin{aligned}
 l_{it} &= \text{Volume monetário transacionado do ativo } i \text{ em } t \\
 &= \text{Valor das ações } i \text{ transacionadas em } t \\
 &= P_{it}V_{it},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

onde P_{it} é o preço médio do ativo i em t e V_{it} o número total de ativos i transacionados em t .

O volume transacionado, assim como os índices derivados desse volume, pode ser considerado uma medida robusta apesar da simplicidade de seu cálculo. Alguns pesquisadores, entretanto, consideram essas medidas inapropriadas para liquidez, visto que elas fazem uma dupla contagem (tanto pelo lado da compra quanto da venda). Sendo assim, uma mesma transação pode ser contada mais de uma vez (Gabrielsen, Marzo e Zagaglia, 2011).

Porém, em que pese essas objeções para medidas baseadas em volume, a ampla disponibilidade de dados facilita a sua utilização em praticamente qualquer cenário. Ademais, já foi demonstrado (Blume, Easley e O'hara, 1994) que o volume transacionado é um fator determinante na estrutura de preço, contendo, em si, informações que não podem ser extraídas de outras medidas estatísticas.

Outra possibilidade é o uso do *turnover* (Lo e Wang, 2000), estabelecendo uma relação entre volume total transacionado e o total de ativos emitidos, gerando um novo indicador de volume. O cálculo pode ser feito da seguinte forma:

$$\text{turnover}_{it} = \frac{l_{it}}{N^{\circ} \text{ de ações } i \text{ existentes em } t * \text{ Preço médio da ação } i \text{ em } t} \quad (2)$$

A obtenção de dados para seu cálculo no mercado de ativos não enfrenta dificuldade, permitindo sua aplicação de forma direta.

A taxa de liquidez convencional (LR) é, provavelmente, uma das medidas mais utilizadas na análise de liquidez (Gabrielsen, Marzo e Zagaglia, 2011). Ela expressa a variação marginal no volume transacionado induzido por uma variação marginal no preço de um ativo. No seu cálculo, além do volume transacionado, o preço do ativo é utilizado como elemento base. Ela pode ser calculada da seguinte forma:

$$LR_{iT} = \frac{\sum_{t=1}^T l_{it}}{\sum_{t=1}^T |P_{it} - P_{i,t-1}|} \quad (3)$$

O numerador expressa o volume total transacionado no período T , acumulando volumes transacionados em subperíodos t , $l_{it} = P_{it}V_{it}$. O denominador representa a acumulação das variações absolutas de preços do ativo nos subperíodos considerados.

De acordo com Gabrielsen, Marzo e Zagaglia (2011), o cálculo desse índice é usualmente feito para o período de um mês, com variações de acordo com a necessidade. Esses autores ainda salientam ser comum que o cálculo seja feito para um conjunto de ativos agregados em grupos com características similares. A liquidez do ativo, ou do grupo de ativos, será expressa de forma direta em relação ao índice, ou seja, maior LR_{IT} implica maior liquidez do ativo.

Outra medida de liquidez para ativos é a taxa de liquidez de Hui e Heubel (1984), que relaciona os volumes transacionados e seus impactos nos preços. Essa taxa de liquidez pode ser calculada da seguinte forma:

$$LR_{HH} = \frac{\left[\frac{P_{max} - P_{min}}{P_{min}} \right]}{\left[\frac{V}{S * \bar{P}} \right]} \quad (4)$$

sendo P_{max} e P_{min} os preços máximo e mínimo do ativo dentro de um período de 5 dias, V o volume total transacionado do ativo nesse período, S o número total de ações emitidas e \bar{P} o preço médio do ativo nesse período.

O denominador é o *turnover* do ativo para um período de 5 dias. Algumas considerações sobre o LR_{HH} já foram identificadas, como o fato de 5 dias ser um tempo longo demais para o índice capturar algumas anomalias, visto que os preços dos ativos podem rapidamente se ajustar a problemas de liquidez (Gabrielsen, Marzo e Zagaglia, 2011).

Não existe consenso em relação à forma ideal de mensuração da liquidez de um ativo. Portanto, impõe-se a necessidade da escolha de uma medida que a represente de forma satisfatória. Hasbrouck e Seppi (2001) ponderam que o volume como referência para liquidez pode ser problemático, pois choques de preços podem ser motivados por componentes de liquidez ou também informacionais, como efeitos relacionados ao calendário de impostos ou previsões privadas sobre variáveis macroeconômicas, como alterações em taxas de juros básicas, que afetam a economia como um todo. Já Bonami e Lejeune (2009) baseiam-se em volume negociado como referência para liquidez na modelagem de otimização de carteiras com restrição estocástica, tangenciando os objetivos deste artigo, o que motiva o uso de liquidez fundamentada em volume.

Considerando que o volume monetário transacionado é um fator determinante na estrutura de preço (Blume, Easley e O'hara, 1994) e que

essa é a medida comumente utilizada por bancos e corretoras na gestão de liquidez de seus fundos (informação obtida com a realização de contatos por parte dos autores com uma amostra de instituições financeiras, conforme mencionado na seção 2.2.3), optou-se por utilizá-la como índice de mensuração para liquidez nesse trabalho. Além disso, estudos como o de Huberman e Halka (2001) sugerem que o uso de diferentes *proxies* para liquidez (incluindo volume de ações e de valor negociados) têm resultados similares no estudo de movimentos de preços de ações. Assim, neste trabalho, o índice de liquidez é definido por l_{it} (ver equação (1)).

2.2. Restrições de liquidez

Na medida em que se estabeleceu o índice de liquidez a ser utilizado no estudo, esse deve se tornar uma restrição no modelo de seleção de carteira. Três formas de incluir esse índice como restrição são encontradas na literatura: filtragem prévia, média ponderada da carteira e restrição individual no ativo.

2.2.1. Filtragem prévia

Conforme Lo, Petrov e Wierzbicki (2003), a ideia principal nessa técnica é filtrar previamente a amostra. Para isso, é definido um nível de corte l_0 , e somente os ativos de liquidez acima desse nível são selecionados para entrar no modelo. Definindo o conjunto de todos os ativos disponíveis para a formação da carteira ótima por U , U_0 será o subconjunto de U em que as medidas de liquidez individuais dos ativos sejam superiores ao nível de corte ($l_i \geq l_0$).

$$U_0 = \{i \in U: l_i \geq l_0\} \quad (5)$$

Essa não é uma restrição que fica integrada ao modelo de seleção de carteira na medida em que a filtragem independe do peso e do valor do ativo na carteira investida. Ou seja, não é uma restrição ativa no momento da seleção da carteira, funcionando apenas como um pré-processamento antes da seleção da carteira.

2.2.2. Média ponderada da carteira

Outra abordagem utiliza a média ponderada da carteira. Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) definem a liquidez de uma carteira como a soma

ponderada da liquidez de cada ativo na carteira. Logo, dada uma carteira de ativos p , sendo o vetor de pesos dos ativos expresso por $\mathbf{x}_p = [x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_N}]'$, o vetor de liquidez dos ativos expresso por $\mathbf{l}_p = [l_{p_1}, l_{p_2}, \dots, l_{p_N}]'$, considerando que não há venda a descoberto e que a soma dos pesos de todos os ativos seja igual a 1, é possível definir a liquidez total da carteira l_{pt} como a liquidez ponderada pelos pesos dos ativos, ou seja:

$$l_p = \mathbf{x}_p' \mathbf{l}_p = \sum_{i=1}^N x_{p_i} l_{p_i} \quad (6)$$

Essa métrica de liquidez de carteiras pode ser utilizada para diversas medidas individuais de liquidez, incluindo o volume transacionado. Adotaremos, neste trabalho, esse índice como medida de liquidez de portfólio (Lo, Petrov e Wierzbicki, 2003).

Apesar da medida de liquidez proposta ser interessante por ser de fácil aplicação na otimização de portfólios, algumas considerações relativas a fatores limitantes dessa definição devem ser colocadas. Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) salientam algumas delas. Ao se utilizar essa medida, assume-se que não há interações entre os ativos. Assim, acaba-se desconsiderando uma potencial inter-relação em relação à liquidez dos ativos. Pode-se, por exemplo, perceber dois ativos de mesmo setor industrial com métricas individuais de liquidez semelhantes significando que eles individualmente compartilham níveis de liquidez próximos; entretanto, quando combinados em uma mesma carteira, podem apresentar maiores dificuldades de serem transacionados do que originalmente esperado analisando apenas suas medidas individuais de liquidez. Esse comportamento pode ser desencadeado devido à interpretação dos investidores sobre esses ativos, ao considerá-los substitutos entre si. Uma opção, para suavizar o impacto dessa suposição simplificadora, é trabalhar com restrições em relação ao peso que os ativos de cada setor pode representar em cada carteira.

Outra consideração a ser feita é que as medidas de liquidez apresentadas para carteiras não levam em consideração os volumes financeiros de cada uma delas, ancorando-se apenas no peso individual de cada ativo. Considere-se, por exemplo, dois portfólios p e q , ambos tendo em suas composições 20% do ativo a , mas p apresentando um VTC (valor total da carteira, ou valor financeiro total) quinhentas vezes maior que o VTC de q . É fácil perceber que o impacto da liquidez do ativo a em cada um dos portfólios não deveria ser igual: afinal, se o investidor

quiser “zerar” a posição do ativo a nas duas carteiras, em termos de liquidez, seria diferente vender, por exemplo, R\$50.000 referente ao ativo a na carteira q e R\$25.000.000 na carteira p . Uma possibilidade para amenizar essa insensibilidade do índice de liquidez ao VTC seria incluir uma parametrização para a liquidez em função do volume total. Ao se incorporar, entretanto, uma nova dependência na avaliação de liquidez em modelos de otimização de carteiras, a dificuldade de resolução do problema pode ser expressivamente aumentada.

A última dificuldade de se trabalhar com um modelo ponderado de liquidez é a dificuldade do gestor visualizar essa métrica de forma integrada. No entanto, a análise individual de cada ativo pode facilitar bastante a tarefa do gestor.

2.2.3. Restrições por ativos individuais

Ao se considerar apenas o peso do ativo na medição de liquidez total da carteira, não é possível estabelecer uma relação entre a posição da carteira em um determinado ativo e sua respectiva liquidez. Para conseguir relacionar ambos, deve-se levar em consideração o valor absoluto alocado nesse ativo dentro da carteira e relacioná-lo com a sua liquidez individual. Essa relação é calculada fazendo-se a relação entre o produto do peso do ativo na carteira e o VTC e a liquidez individual do ativo (l_i):

$$x_i VTC \leq l_i \quad (7)$$

O que se busca é não possuir posição em um determinado ativo que, no caso da necessidade de sua liquidação, tenha seu preço impactado significativamente pelo movimento de venda. Com a exigência da CVM de implantação de sistemas de monitoramento e controle de liquidez, e sob orientação da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (ANBIMA) em seu documento “Diretrizes de liquidez das carteiras dos fundos de investimento” (Anbima, 2013), corretoras e bancos criaram manuais de gerenciamento de liquidez. Esses são responsáveis por definir políticas internas que possibilitem gerenciar a liquidez das carteiras dos fundos por elas geridos. A Tabela 1 apresenta um resumo das políticas de gerenciamento de riscos de liquidez de uma amostra de bancos, fundos e corretoras brasileiros, obtidas a partir de contatos pessoais de um dos autores.

Tabela 1

Percentual limite do total negociado e cálculo da média do volume do total negociado utilizado por algumas corretoras e bancos brasileiros.

Corretora/Banco	Percentual limite do total negociado	Cálculo do volume médio diário negociado
Corretora/Banco 1	25%	Média móvel de 5 dias
Corretora/Banco 2	20%	Média móvel de 30 dias
Corretora/Banco 3	20%	Média móvel de 20 dias
Corretora/Banco 4	30%	Menor valor entre a média móvel de 10 dias e a média móvel de 30 dias
Corretora/Banco 5	25%	Média móvel de 30 dias
Corretora/Banco 6	20%	Média móvel de 5 dias
Corretora/Banco 7	20%	Média móvel de 5 dias
Corretora/Banco 8	20%	Média móvel de 5 dias
Corretora/Banco 9	15%	Média móvel de 5 dias
Corretora/Banco 10	30%	Não definido

Fonte: elaborado pelos autores.

Na maioria dos casos, os manuais desenvolvidos pelos bancos e corretoras descrevem de forma detalhada a sistemática de controles de liquidez implementados na gestão de seus respectivos fundos e carteiras.¹ Apesar de não haver uma diretriz específica em relação à metodologia a ser utilizada, quando analisados os manuais de controles de liquidez das corretoras e bancos, é possível perceber algum alinhamento na forma como é feita a gestão de liquidez em seus fundos.

Os manuais expõem que a liquidez é controlada, basicamente, com base em três indicadores: o percentual limite do volume total negociado, o prazo para liquidação, e o nível de liquidação aceitável.

- i. O percentual limite do total negociado (pl_{max}) é o valor percentual máximo considerado de modo que o preço de venda não sofrerá penalização caso haja uma liquidação completa da posição;
- ii. O prazo para liquidação da posição ($ppzo_{max}$), contado em dias, é o tempo aceitável para que, após a efetiva decisão pela liquidação, todos os ativos sejam vendidos;
- iii. O nível de liquidação aceitável (pnl_{min}) é usado para permitir uma liquidação da carteira em um patamar menor do que 100% dentro do prazo máximo de liquidação.

O percentual limite do total negociado é a fração máxima do total médio transacionado de um determinado ativo em que se acredita que, no

¹ Na medida em que essa amostra é mantida sob sigilo, não vamos citar aqui os exemplos de manuais dos bancos/corretoras pesquisados.

caso de um encerramento de posição, a venda desses ativos não irá impactar o seu preço. Assim considerando, ao se respeitar esse limite e, no caso da necessidade de vender a totalidade de um determinado ativo da carteira, isso não acarretará perdas devido à degradação no preço causada por esse movimento de venda. Conforme a Tabela 1, bancos e corretoras consideram aceitável ter posição em carteira de um determinado ativo em um total não superior a 15% a 30% da média diária. Não se obteve nenhuma referência na literatura para esses indicadores de mercado.

A média diária de volume monetário utilizada como parâmetro pelos bancos, corretoras e fundos para balizar a quantidade máxima possível de alocação individual de cada ativo é medida através de uma média móvel (Tabela 1). O período utilizado para o cálculo dessa média, entretanto, não é unânime entre as diferentes instituições financeiras. Percebe-se uma divisão clara, com algumas corretoras optando por trabalhar com o cálculo da média móvel dos volumes negociados da última semana (5 dias), algumas utilizando períodos entre 10 e 30 dias para o cálculo da média, e um caso com forma de cálculo não revelada.

O prazo para liquidação da posição é o período máximo para que o total de um determinado ativo seja liquidado. Ao se admitir prazos maiores, também se permite, implicitamente, uma maior alocação de recursos dos respectivos ativos dentro da carteira, pois a eventual liquidação será diluída no tempo. A definição do prazo para liquidação é orientada pelo perfil do fundo ou do investidor.

O nível de liquidação aceitável permite que a gestão de liquidez aceite alocações maiores nos ativos do que quando se considera apenas o percentual limite do total negociado e o prazo para liquidação. Isso representa uma flexibilização da exigência da liquidação total da posição, permitindo a aceitação de uma carteira quando apenas parte da posição possa ser liquidada sem um impacto maior no preço dos ativos. Com base na amostra representada na Tabela 1, o parâmetro nível de liquidação aceitável não é utilizado pela maioria dos bancos e corretoras brasileiros.

Para os propósitos deste artigo, trilharemos o caminho de modelagem de restrições de liquidez por ativos individuais, em contraposição à média ponderada da carteira proposta por Lo, Petrov e Wierzbicki (2003). A média ponderada da carteira possui a vantagem de considerar a composição da carteira como um todo, mas não apresenta de forma direta os volumes financeiros da carteira e do ativo, que aumentariam consideravelmente a complexidade matemática do modelo

de otimização se fossem integrados na forma de restrição. Portanto, a restrição por ativos individuais parece mais adequada. Entretanto, para que o gestor da carteira possa utilizá-la de forma alinhada com suas políticas de gestão de riscos de liquidez, essa restrição deve englobar, além do volume monetário do ativo, (i) o percentual limite do total negociado, (ii) o prazo para liquidação da posição e (iii) o nível de liquidação aceitável de forma integrada. A próxima seção concentra-se na construção do modelo de análise.

3. Modelo com restrição integrada para liquidez

Esta seção inicia com a construção de uma restrição integrada para liquidez. A restrição apresentada utiliza o volume transacionado de cada ativo como medida de liquidez e representa uma restrição genérica, aplicável em qualquer modelo de otimização de carteira que tenha, como variável de decisão, o peso individual de cada ativo na carteira. Adicionalmente, na Seção 3.2 discute-se o modelo utilizado para realização subsequente de algumas simulações.

3.1. Representação das restrições de liquidez

Considerando o volume médio (por unidade de tempo) negociado de cada um dos potenciais ativos (l_i) e os parâmetros percentual do total negociado máximo (pl_{max}), prazo para liquidação ($ppzo_{max}$) e nível de liquidação ($pnvl_{min}$), é possível calcular, para cada ativo, o valor máximo da sua respectiva posição em uma carteira através do seguinte quociente:

$$\eta_i = \frac{pl_{max} * ppzo_{max} * l_i}{pnvl_{min}} \quad (8)$$

O quociente, calculado para cada um dos potenciais ativos na carteira, pode ser utilizado para impedir posições que superem o valor total máximo aceitável. Ou seja, o valor monetário total alocado em um ativo i não poderá ser maior que η_i . Em termos das variáveis de decisão para a otimização de carteiras, x_i , a restrição toma a forma:

$$x_i * VTC \leq \eta_i \quad (9)$$

Dado que o valor de η_i é formado por três parâmetros únicos no modelo (pl_{max} , $ppzo_{max}$ e $pnvl_{min}$) e pela liquidez individual do ativo i , é possível separar esse termo de parâmetros em uma constante β :

$$\eta_i = \beta * l_i \quad (10)$$

onde

$$\beta = \frac{pl_{max} * ppzo_{max}}{pnvl_{min}} \quad (11)$$

Pode-se então reescrever a restrição (9) como:

$$x_i * VTC \leq \beta * l_i \quad (12)$$

Com essa restrição, é possível afirmar que todos os ativos alocados na carteira atendem aos quesitos de liquidez estabelecidos pela política de risco de liquidez dos administradores da carteira. A restrição, além de ser endógena ao modelo de otimização, mantém um significado econômico, na medida em que relaciona as métricas utilizadas nas políticas de risco de liquidez de bancos e corretoras. Um ativo com baixo volume financeiro diário (l_i) terá um peso (x_i) muito penalizado na carteira, particularmente para *VTC*s elevados.

Definindo uma variável binária u_i com valor 1 para ativos selecionados na carteira e valor 0 para ativos não selecionados na carteira, e somando a restrição (12) para todos os ativos, tem-se:

$$VTC \leq \beta * \sum_{i=1}^N u_i l_i \quad (13)$$

Essa restrição tem certa semelhança com a restrição proposta por Lo, Petrov e Wierzbicki (2003, p. 58), muito embora possa-se estabelecer algumas diferenças fundamentais entre as abordagens. A primeira é que Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) utilizam o *turnover* e o *bid/ask spread* como métricas de liquidez. Essas métricas não são de uso comum no mercado brasileiro, como já descrito na Seção 2.2.3. A utilização do volume como métrica de restrição de liquidez permite a definição do parâmetro β na equação (11), que é construído com base em métricas já amplamente utilizadas no mercado de capitais brasileiro: volume médio negociado de cada um dos potenciais ativos (l_i) e os parâmetros percentual do total negociado máximo (pl_{max}), prazo para liquidação ($ppzo_{max}$) e nível de liquidação ($pnvl_{min}$). Outra diferença é que Lo, Petrov e Wierzbicki (2003) tratam da liquidez da carteira como um todo e o presente estudo trata os ativos de forma individual. Ainda assim, a restrição (12) faz com que a questão da liquidez seja endógena ao modelo de otimização, e não somente uma filtragem prévia de ativos anterior à

otimização da carteira. Nesse sentido, a restrição de liquidez proposta neste estudo contribui de forma significativa à literatura.

3.2. Integrando a restrição de liquidez a um modelo de seleção de carteiras

A restrição de liquidez proposta não é específica para um modelo em particular de seleção de carteira. Acredita-se que ela pode ser usada em modelos de média-variância (Markowitz, 1952), modelos fatoriais (Fama e French, 1992), de mínima-variância (Caldeira, Moura e Santos, 2013), de otimização estocástica (Filomena e Lejeune, 2012; 2014) entre outros. A restrição também não é específica para um tipo de ativo, podendo ser adaptada tanto para ações, renda fixa, moeda, entre outros, desde que o modelo escolhido seja projetado para esse contexto.

Para atingir os objetivos do artigo, será escolhido o clássico modelo de média-variância de Markowitz (1952). É importante salientar que os testes serão realizados com respeito apenas ao nível de liquidação da carteira, avaliando a performance da gestão quanto a esse ponto, e não ao desempenho econômico do modelo. Nesse sentido, a seleção do modelo torna-se irrelevante. Foi feita apenas uma adaptação do trabalho original de Markowitz para melhorar a performance computacional do modelo. Será utilizado o modelo de Konno e Suzuki (1992), posteriormente adaptado por Filomena e Lejeune (2012) para um ambiente estocástico. Nessa adaptação, não é necessária a construção explícita da matriz de variância-covariância, o que aumenta bastante o desempenho computacional do modelo.

Sendo M o número de períodos de treino do modelo, x_i o peso do ativo i e μ_{it} o retorno do ativo i no período t , tem-se a seguinte função objetivo:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M b_t^2 \quad (14)$$

É necessário agregar uma restrição complementar para que se mantenha a equivalência entre os modelos (Filomena e Lejeune, 2012). Essa restrição define a variável b_t da seguinte forma:

$$b_t - \sum_{i=1}^N \left[\mu_{it} - \left(\frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \mu_{it} \right) \right] x_i = 0 \quad (15)$$

Ao objetivo principal e a essa restrição complementar, é agregada a restrição relacionada com o retorno desejado (carteira com retorno maior ou igual a um retorno mínimo desejado r_C). Para isso, o retorno da carteira é calculado com base no peso de cada ativo que a compõe (x_i), ponderados pelos retornos diários de cada ativo (μ_i). A restrição será:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i x_i \geq r_C \quad (16)$$

Além disso, coloca-se como premissa que será sempre usado todo o capital disponível (Restrição 17) e que não haverá venda a descoberto (Restrição 18).

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (17)$$

$$x_i \geq 0 \quad (18)$$

Por fim, inclui-se a equação (12) como restrição de liquidez da carteira. Assim, o modelo leva em consideração métricas comumente utilizados por bancos e corretoras. Resta, entretanto, determinar o processo de estimação de l_i , o que é feito na Seção 3.3 a seguir.

Nota-se que as restrições descritas acima não levam em consideração custos de transação de forma explícita. Porém, apesar de não haver controle direto desses custos, é possível verificar que, indiretamente, esses custos e seu controle ao longo do tempo são abordados. Uma análise de referências contemporâneas que empregam custos de transação permite dar embasamento a essa afirmação.

No estudo de Zagst e Kalin (2007), por exemplo, verifica-se que há dois tipos de custos considerados: custos explícitos de transação e custos intrínsecos. Em relação aos custos explícitos, esses tendem a ser muito baixos relativamente ao tamanho das transações que se lidam geralmente. Ao tratar de transações de volume considerável, automaticamente, minimizam-se de forma indireta os custos explícitos de transação, por serem desprezíveis. Em relação aos custos implícitos, Zagst e Kalin (2007) destacam quatro fatores centrais que influenciam esses custos: volatilidade do preço da ação, tamanho da transação, volume diário médio de transação e tamanho relativo de pacote (do inglês, *Relative Package Size*). O presente estudo lida indiretamente com essas questões. Em relação ao tamanho da transação, o modelo utiliza o parâmetro pl_{max} , que penaliza portfólios/transações na medida em que limita

transações muito grandes penalizando-as por terem a tendência de afetar os preços de ativos. Em relação ao volume diário médio de transação e tamanho relativo de pacote, esses pontos são atacados através dos parâmetros $ppzo_{max}$ e $pnvl_{min}$. Com esses dois parâmetros, realiza-se uma minimização intrínseca dos custos associados ao volume diário médio e tamanho relativo do pacote, pois portfólios de menor liquidez (com $ppzo_{max}$) são punidos e define-se qual o nível aceitável de liquidação de nossas carteiras (com $pnvl_{min}$). Pode-se ainda destacar que esses parâmetros citados estão relacionados com o β do modelo, que por sua vez foi definido com base em uma pesquisa com bancos/corretoras, de forma que condições práticas encontradas no mercado são utilizadas.

Outros dois exemplos de trabalhos que incluem custos de transação são Jana, Roy e Mazumder (2009) e Borkovec e Serbin (2013). O estudo de Jana, Roy e Mazumder (2009) possui foco em uma modelagem de otimização para portfólios dinâmicos, e assim os autores realizam controle de *turnover* das carteiras e impõem custos sobre essa informação. Nesse caso, essa abordagem não se adequa ao presente estudo, na medida em que se realiza o controle de liquidez de cada portfólio independentemente das carteiras anterior ou posterior; logo, a ênfase não consiste em realizar uma análise dinâmica, mas sim em realizar o controle de liquidez de cada portfólio separadamente, atendendo a especificações impostas pelo mercado acionário. Por sua vez, Borkovec e Serbin (2013) tratam de custos de transação através de controle de variações nos preços de ativos decorrentes de transações de alto volume. O presente estudo lida com essa questão ao usar o parâmetro pl_{max} e a definição de β , na medida em que esses parâmetros controlam transações de alto volume para limitar possíveis impactos desses volumes elevados sobre os preços dos ativos.

Dessa forma, mesmo considerando que o presente estudo trata da análise e entendimento do impacto do uso de restrição de liquidez em um modelo de otimização de portfólio, pode-se considerar que a questão de custos de transação está sendo abordada indiretamente no estudo, principalmente através do parâmetro β e seus componentes. Ademais, deve-se considerar que o tratamento desse parâmetro é feito com base em levantamento realizado com agentes do mercado financeiro, o que dá à abordagem adotada um caráter bastante prático e de acordo com a realidade brasileira.

3.3. Estimação de l_t

Em linha com a prática no mercado, a medida de liquidez de cada ativo (l_i) ancorou-se no seu volume total negociado. Manteve-se, em dois cenários, as medidas mais presentes no cotidiano das corretoras e bancos brasileiros: média móvel de 5 e de 30 dias (conforme Tabela 1). Como um contraponto, optou-se pela utilização, para fins de comparação, de uma média móvel ponderada com suavização exponencial simples.

Para cálculos das médias móveis de 5 e de 30 dias, usou-se:

$$5 \text{ dias: } l_i^{(5)} = \frac{1}{5} \sum_{j=T-5}^{T-1} l_{ij} \quad (19)$$

$$30 \text{ dias: } l_i^{(30)} = \frac{1}{30} \sum_{j=T-30}^{T-1} l_{ij} \quad (20)$$

onde l_{ij} representa a liquidez (volume total negociado) do ativo i no dia j .

O cálculo da liquidez individual dos ativos por meio da média móvel ponderada com suavização exponencial exige a definição de uma constante de suavização (α). O método utilizado para definir o valor de α é o da minimização dos erros quadrados para o período anterior. Dado que foram feitas simulações ano a ano, α foi definido a cada ano como o valor da constante de suavização que minimiza a soma dos erros quadrados (erros de previsão) para todos os ativos conjuntamente no ano anterior.

Mais precisamente, α foi determinado para cada ano resolvendo o seguinte problema de minimização: encontrar α de modo a

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^N \sum_{j=di}^{df} (l_{ij} - \hat{l}_{ij}(\alpha))^2 \quad (21)$$

onde $\hat{l}_{ij}(\alpha)$ representa a previsão de liquidez (volume total negociado) pela suavização exponencial simples do ativo i no dia j (que é uma função de α), di é o primeiro dia com mercado aberto no ano anterior, enquanto df é o último dia de transações no ano anterior.

A operacionalização desse modelo pode ser feita substituindo-se $\hat{l}_{ij}(\alpha)$ em função dos volumes negociados do ativo i nos dias anteriores a

j , $\gamma_{i(j-k)}$, para $k = 1, 2, \dots, j-1$. Substituindo-se $\hat{l}_{ij}(\alpha)$ pela sua forma geral, tem-se o seguinte modelo: encontrar α de modo a

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^N \sum_{j=di}^{df} \left\{ l_{ij} - \left[(1-\alpha)^{j-2} l_{i1} + \alpha \sum_{k=1}^{j-2} (1-\alpha)^{k-1} l_{i(j-k)} \right] \right\}^2 \quad (22)$$

Fixado o valor de α , a medida de liquidez de cada ativo (l_i) é estimada com base na suavização exponencial seguindo a seguinte estrutura:

$$l_i^{(SES(\alpha))} = (1-\alpha)^{T-2} l_{i1} + \alpha \sum_{k=1}^{T-2} (1-\alpha)^{k-1} l_{i(T-k)} \quad (23)$$

Esperam-se resultados pouco díspares entre as médias móveis de 5 e de 30 dias, com tendência de melhores resultados para a média móvel de 5 dias pela sua capacidade de reação mais rápida face a mudanças mais bruscas nos volumes negociados em períodos mais recentes. Em relação aos resultados decorrentes da aplicação da média móvel ponderada com suavização exponencial simples, também não se espera grande melhoria na qualidade das previsões feitas (Adam, 1973; Armstrong, 1978; Elton e Gruber, 1972; Kirby, 1966). A discussão do impacto de diferentes formas de estimação do volume diário também é uma contribuição direta deste estudo para a literatura.

4. Aplicação do modelo

O modelo a ser aplicado é formado pelas equações (12) e (14) até (18). A estimação de l_i seguirá a média móvel de 5 dias (equação 19), de 30 dias (equação 20) e suavização exponencial (equação 23). Os objetivos da aplicação são verificar (i) se o método de estimação de l_i influencia o nível de liquidação da carteira, e (ii) qual o impacto dos parâmetros de retorno mínimo exigido (r_c), valor total da carteira (VTC) e percentual máximo do volume projetado para o dia seguinte de cada

ativo aceito na carteira (β) sobre o resultado das variáveis em questão. O parâmetro r_c não é de interesse direto da pesquisa, mas seu valor, se muito elevado, pode inviabilizar a formação de carteiras, e portanto acaba impactando indiretamente na liquidação das carteiras.

Para apresentação das aplicações do modelo, a seção 4.1 descreve a base de dados adotada, a seção 4.2 expõe as simulações realizadas, a seção 4.3 apresenta os resultados obtidos e a seção 4.4 realiza uma comparação dos resultados das simulações com e sem uso da restrição de liquidez nos portfólios.

4.1. Dados

Os dados primários para a execução do modelo são os preços diários de fechamento dos ativos e respectivos volumes diários dos anos 2009 a 2012, obtidos no software Economatica. A preocupação principal em relação aos dados centrou-se em seu tratamento e geração de dados secundários, derivados dos dados originais através de um pré-processamento.

Inicialmente, coletaram-se os dados de volume total transacionado e preço de cada um dos ativos negociados na BOVESPA entre janeiro de 2009 e dezembro de 2012. A filtragem primária orientou-se por excluir os ativos nitidamente pouco líquidos. Aplicou-se um critério de seleção em que se permitiu como potenciais ativos na carteira apenas aqueles que tivessem sido transacionados pelo menos uma vez em cada um dos dias do período total. Essa seleção excluiu 414 ativos, dos 599 inicialmente possíveis. Apenas os 185 ativos restantes, comprovadamente com transações diárias, foram utilizados para as simulações. A opção por esse tipo de filtragem evita que sejam formadas carteiras que tenham ativos potencialmente inviáveis de serem vendidos em alguma data, garantindo que, mesmo sob uma penalização de preço, toda a carteira possa ser liquidada.

Dados secundários também passaram por pré-processamento para agilizar, computacionalmente, a otimização. O retorno diário de cada ativo consiste na variação percentual diária de cada ativo, calculada com os respectivos preços de fechamento. Foram calculados, antecipadamente, o retorno médio de cada ativo em cada uma das datas, sendo esse definido como uma simples média aritmética do retorno absoluto de cada ativo por um período de 200 dias anteriores à data base. Os índices de liquidez identificados como mais corriqueiros nas

corretoras/bancos brasileiros (Tabela 1) – médias móveis do volume transacionado de 5 e 30 dias – também foram computados para cada um dos ativos em cada período. O índice de liquidez por ativo por data foi calculado com a suavização exponencial simples (SES) do volume diário transacionado; esse índice, entretanto, traz consigo a necessidade da utilização da constante de suavização que, conforme já exposto, é resultante de um processo de minimização de erros.

As constantes de suavização que minimizam os erros quadrados em cada um dos anos mantêm-se em valores relativamente semelhantes. Em 2009, a constante com melhor qualidade nas previsões foi 0,209. Para as simulações no ano de 2011, utilizou-se o valor de α com o melhor nível de acertos no ano de 2010: 0,196. Os valores de α que minimizaram os erros em 2011 e 2012 ficaram muito próximos, respectivamente 0,227 e 0,228. Escolheram-se períodos anuais para a definição de cada uma dessas constantes. Por consequência, o cálculo por meio de SES ocorreu dentro de períodos anuais.

4.2. Simulações

Para verificar o desempenho de cada uma das medidas de liquidez, foram feitas simulações com base no mercado passado. De forma simplificada, essas simulações, para cada uma das datas analisadas, formam carteiras com base nos dados anteriores às suas respectivas datas base e, no dia posterior, tentam liquidá-las por completo. O resultado de cada simulação diária é o percentual liquidado da carteira formada no dia anterior. A seguir, será descrito o processo utilizado para estruturar e executar as simulações.

Os parâmetros para a definição de β são determinados por cada corretora/banco de forma particular. O percentual limite do total negociado (pl_{max}) é o valor percentual máximo considerado de modo que, caso haja uma liquidação completa da posição, o preço de venda não sofrerá penalização por esse movimento específico de venda; esse parâmetro, usualmente, é definido para todos os fundos operados pela corretora/banco. Os outros dois parâmetros utilizados na definição de β são usualmente particulares de cada fundo ou operação de cada corretora/banco. São eles o prazo para liquidação da posição ($ppzo_{max}$), definido como o tempo (dias) aceitável para que, após a efetiva decisão pela liquidação, todos os ativos sejam vendidos, e o nível de liquidação

aceitável ($pnvl_{min}$), usado para permitir uma liquidação parcial da carteira dentro do prazo máximo de liquidação.

O período das simulações é de janeiro de 2010 a dezembro de 2012. Os dados do ano de 2009 foram utilizados como parâmetro para o cálculo dos índices de liquidez: média móvel de 5 dias, média móvel de 30 dias e suavização exponencial simples do volume negociado de cada ativo. As simulações começaram no primeiro dia útil de 2010. Com base nesse dia foram, então, formadas as carteiras iniciais, sendo uma utilizando o índice de liquidez de cada ativo definido pela média móvel de 5 dias do volume negociado nos dias anteriores, outra pela média móvel de 30 dias e uma terceira pela média móvel ponderada com suavização exponencial simples. O valor da constante de suavização (α) utilizada para o cálculo dos índices de liquidez durante o ano de 2010 é de 0,209; esse é o valor que minimiza os erros quadrados das previsões feitas pela SES no ano treino (2009). Após a formação das 3 carteiras, avança-se um dia (ou seja, a simulação passa para o segundo dia útil de 2010). Nesse momento, é feita a tentativa de liquidar cada uma das 3 carteiras formadas no período anterior, sendo então armazenados os percentuais liquidados para esse dia. Simultaneamente, são geradas mais 3 carteiras que serão liquidadas no dia posterior. A simulação se desenvolve dessa forma durante todos os dias úteis do ano em questão. Na virada de cada ano é necessário fazer um ajuste na constante de suavização utilizada na SES. Verifica-se então a constante α que minimiza os erros quadrados das previsões do ano anterior, calculam-se as novas médias móveis ponderadas com SES e inicia-se novamente o processo de formação-liquidação de carteiras para o ano subsequente.

O modelo exige a definição de três parâmetros: o retorno mínimo mensal (r_C), o valor total da carteira (VTC) e o percentual máximo do volume projetado para o dia seguinte de cada ativo aceito na carteira (β). O parâmetro r_C é o limiar mínimo de retorno esperado para que a carteira seja aceita; maior r_C deverá resultar em menor percentual da carteira que conseguirá ser liquidada no dia seguinte; VTC é o valor financeiro que se está disposto a investir na formação do portfólio – espera-se que, quanto maior for esse valor, menor será o percentual da carteira possível de se liquidar no dia subsequente.

Foram gerados cenários com diferentes parâmetros, sendo que a variação foi definida em três níveis para cada um deles. Os patamares de r_C foram 0,5% (baixo), 1,5% (médio) e 3% (alto). Foi constatado que, a partir de r_C acima de 3,5%, houve dificuldade na formação de carteiras

factíveis, sendo inviabilizadas em mais de 20% das ocorrências. Os valores financeiros das carteiras utilizadas na simulação foram de R\$2 milhões (baixo), R\$20 milhões (médio) e R\$100 milhões (alto); uma tentativa de se utilizar carteiras de R\$200 milhões foi feita, mas somente em pouco mais da metade das resoluções do modelo foi possível encontrar carteiras válidas, e essa instância foi descartada das simulações finais. O parâmetro β foi estabelecido com base na pesquisa feita entre algumas corretoras brasileiras (Tabela 1), com valores definidos em 10%, 20% e 30%. É importante salientar que β é função do percentual do total negociado máximo, prazo para liquidação e nível de liquidação. Definiu-se 20% como o máximo de participação que um único ativo pode ter na carteira.

A partir da variação em 3 níveis de r_c , VTC e β , foram gerados 27 diferentes cenários (descritos na Tabela 2, colunas 2, 3 e 4). Para cada cenário, foram feitas 3 simulações anuais referente aos anos de 2010, 2011 e 2012, com o processo de formação-liquidação de carteira dia a dia.

4.3. Resultados

Uma análise inicial foi feita na tentativa de identificar se a utilização de alguma medida de liquidez específica influencia o nível de liquidação das carteiras. A Tabela 2 apresenta as médias do nível de liquidação das carteiras para cada uma das medidas de liquidez simuladas – média móvel de 5 dias (MM5d), média móvel de 30 dias (MM30d) e suavização exponencial simples (SES) do volume diário negociado de cada ativo – em cada um dos 27 cenários. Outras estatísticas descritivas encontram-se na Tabela A.1.

Tabela 2

Média do nível de liquidação das carteiras formadas para cada um dos cenários utilizando, como medida de liquidez, média móvel de 5 dias (MM5d), média móvel de 30 dias (MM30d) e suavização exponencial simples (SES) do volume diário negociado de cada ativo.

Cenário	Parâmetros do modelo por cenário			Tipo de média utilizada		
	r_c	VTC (R\$)	β	MM5d	MM30d	SES
1	0,50%	2 milhões	0,1	86,58%	84,04%	85,45%
2	0,50%	2 milhões	0,2	89,07%	87,16%	88,14%
3	0,50%	2 milhões	0,3	90,67%	88,92%	89,83%
4	0,50%	20 milhões	0,1	81,55%	81,24%	81,58%
5	0,50%	20 milhões	0,2	82,53%	81,46%	82,24%
6	0,50%	20 milhões	0,3	82,99%	81,47%	82,41%
7	0,50%	100 milhões	0,1	80,30%	80,45%	80,65%
8	0,50%	100 milhões	0,2	81,56%	81,65%	81,82%
9	0,50%	100 milhões	0,3	81,86%	81,93%	82,12%
10	1,50%	2 milhões	0,1	86,85%	84,32%	85,78%
11	1,50%	2 milhões	0,2	89,47%	87,63%	88,55%
12	1,50%	2 milhões	0,3	90,99%	89,45%	90,22%
13	1,50%	20 milhões	0,1	81,96%	81,61%	81,97%
14	1,50%	20 milhões	0,2	82,87%	81,81%	82,60%
15	1,50%	20 milhões	0,3	83,44%	81,97%	82,84%
16	1,50%	100 milhões	0,1	80,07%	80,30%	80,46%
17	1,50%	100 milhões	0,2	81,53%	81,61%	81,77%
18	1,50%	100 milhões	0,3	82,02%	82,08%	82,26%
19	3,00%	2 milhões	0,1	88,39%	86,41%	87,46%
20	3,00%	2 milhões	0,2	91,07%	89,27%	90,29%
21	3,00%	2 milhões	0,3	92,57%	91,18%	91,94%
22	3,00%	20 milhões	0,1	82,74%	82,55%	82,72%
23	3,00%	20 milhões	0,2	84,00%	83,11%	83,68%
24	3,00%	20 milhões	0,3	84,92%	83,30%	84,28%
25	3,00%	100 milhões	0,1	79,57%	79,86%	79,92%
26	3,00%	100 milhões	0,2	81,02%	81,22%	81,25%
27	3,00%	100 milhões	0,3	82,32%	82,50%	82,56%

Fonte: elaborado pelos autores.

Identificou-se que as 3 medidas testadas pouco se diferem em relação à média e desvio padrão. A utilização da média móvel de 5 dias apresenta resultado levemente superior às demais, conseguindo uma

liquidação das carteiras em torno de 1% maior na maior parte dos cenários, quando comparada com a média móvel de 30 dias, e de 0,5%, quando comparada com a suavização exponencial.

Conforme teste estatístico descrito na Tabela A.2, todas as três médias são fortemente correlacionadas ao nível de significância de 99%. O menor coeficiente de correlação linear ocorre entre a média móvel de 5 dias e de 30 dias com o valor de 0,874. O maior coeficiente, igual a 0,966, é estabelecido entre a suavização exponencial (SES) e a média móvel de 5 dias. O coeficiente entre a SES e a média móvel de 30 dias também apresenta forte correlação linear (0,930).

Considerando a proximidade entre as médias e o alto nível de correlação linear entre as medidas analisadas, optar-se-á pela utilização da média móvel de 5 dias nos testes seguintes. Além dessa medida apresentar resultados tão bons quanto a SES e ser fortemente correlacionada a essa, a simplicidade em seu cálculo e, principalmente, em seu entendimento, a coloca como a melhor opção. A escolha por essa abordagem também se apoia na prática atual do mercado, identificada nos controles de liquidez conduzidos pelas corretoras pesquisadas (Tabela 1).

A análise dos resultados decorrentes das simulações realizadas foi concentrada em três variáveis: número de dias em que não foi possível a formação de carteiras, nível de risco das carteiras formadas e nível de liquidação das carteiras formadas. Para isso, foi analisada a relação entre os parâmetros r_c , VTC e β e o resultado das variáveis em questão.

A não formação de carteira em algumas das instâncias do modelo, dadas as restrições aplicadas, é uma possibilidade que deve ser considerada. Espera-se que quanto mais rigorosas forem as restrições impostas ao modelo, maior será o número de dias em que carteiras serão inviabilizadas. A elevação de r_c diminui a quantidade de ativos possíveis de fazer parte de cada carteira. Conforme se eleva o valor total de carteira, força-se uma alocação em um maior número de ativos, visto que o valor máximo a ser alocado em cada ativo é o percentual β da projeção do volume total negociado para o próximo dia. A Tabela 3 identifica o número de dias em que foi possível a formação de carteiras em cada um dos anos em função de r_c , VTC e β .

Tabela 3

Número de dias em que foi possível a formação de carteira em função da variação dos parâmetros do modelo.

Cenário	Parâmetros do modelo por cenário			Ano			TOTAL
	r_c	VTC (R\$)	β	2010	2011	2012	
1	0,50%	2 milhões	0,1	247	249	246	742
2	0,50%	2 milhões	0,2	247	249	246	742
3	0,50%	2 milhões	0,3	247	249	246	742
4	0,50%	20 milhões	0,1	247	249	246	742
5	0,50%	20 milhões	0,2	247	249	246	742
6	0,50%	20 milhões	0,3	247	249	246	742
7	0,50%	100 milhões	0,1	247	249	246	742
8	0,50%	100 milhões	0,2	247	249	246	742
9	0,50%	100 milhões	0,3	247	249	246	742
10	1,50%	2 milhões	0,1	247	249	246	742
11	1,50%	2 milhões	0,2	247	249	246	742
12	1,50%	2 milhões	0,3	247	249	246	742
13	1,50%	20 milhões	0,1	247	249	246	742
14	1,50%	20 milhões	0,2	247	249	246	742
15	1,50%	20 milhões	0,3	247	249	246	742
16	1,50%	100 milhões	0,1	247	242	246	735
17	1,50%	100 milhões	0,2	247	249	246	742
18	1,50%	100 milhões	0,3	247	249	246	742
19	3,00%	2 milhões	0,1	247	249	246	742
20	3,00%	2 milhões	0,2	247	249	246	742
21	3,00%	2 milhões	0,3	247	249	246	742
22	3,00%	20 milhões	0,1	247	220	246	713
23	3,00%	20 milhões	0,2	247	228	246	721
24	3,00%	20 milhões	0,3	247	229	246	722
25	3,00%	100 milhões	0,1	244	114	232	590
26	3,00%	100 milhões	0,2	247	172	244	663
27	3,00%	100 milhões	0,3	247	205	246	698

Fonte: elaborado pelos autores.

Enquanto o retorno mínimo exigido é mantido abaixo de 1,5%, a formação de carteiras é possível em praticamente todas as datas testadas (com exceção do cenário 16, em que carteiras não puderam ser formadas em 7 dias em 2011). Com a elevação de r_c para 3%, restringe-se

consideravelmente o número de ativos com potencial para compor as carteiras, que deixam de ser formadas mesmo com cenários pouco restritivos de VTC (20 milhões) e β (0,1), principalmente em 2011. No cenário 25 (caso mais restritivo), nota-se dificuldade de formar carteiras nos três anos de análise, com total de 152 dias sem carteiras válidas. Percebe-se um grande impacto de uma variação de r_C no número de dias em que não é possível a formação de carteiras.

O nível de risco da carteira, medido pela variância total dos portfólios construídos, foi verificado em cada uma das datas simuladas para todos os cenários propostos. O parâmetro VTC tem uma relação direta com o risco da carteira. Partindo-se da restrição de existência de um valor total máximo possível de compra de cada ativo, pode-se explicar essa relação ao se observar a forma de alocação do capital nos ativos durante a formação das carteiras. Pelas carteiras formadas, notou-se que o modelo tende a alocar inicialmente máximos valores possíveis em ativos que atendam a restrição de retorno mínimo e que tenham o menor risco. À medida que as quotas desses ativos são preenchidas, o modelo, necessitando alocar todo o recurso disponível, é forçado a incorporar na carteira ativos com maior risco, elevando assim o risco total da carteira.

Já entre o nível de risco e o percentual máximo do volume projetado para o dia seguinte de cada ativo aceito na carteira (β), há uma relação inversa. Dado que β restringe o valor máximo possível de compra de cada ativo, sua redução pressiona a alocação em um maior número de ativos que, normalmente, possuem um risco maior. A incorporação desses ativos eleva o risco total da carteira.

Constata-se também uma relação direta entre o nível de risco da carteira e r_C . Maior r_C obriga a alocação em ativos com potencial de retorno maior e, na maioria dos casos, maior risco. A elevação da exigência de retorno mínimo para níveis acima de 3% ao mês mostrou-se fortemente relacionada à impossibilidade de formar carteiras, devido à falta de uma combinação de ativos que satisfaça a restrição de r_C para um dado β e um determinado VTC .

Conforme Tabela A.3, a variação dos parâmetros de r_C , VTC e β na formação das carteiras explicam em torno de 16% da variação do percentual total liquidado da carteira no dia seguinte. A influência desses três parâmetros no total liquidado das carteiras é significativa tanto quando analisados de forma isolada, quanto quando consideradas suas

interações. Apenas as interações entre β e r_C e entre VTC , β e r_C não são significantes.

Percebe-se na Tabela A.3 que quanto maior o VTC , menor é o percentual total da carteira liquidada. Carteiras com valor de 2 milhões, em média, conseguem um índice de liquidação 6,5% maior que carteiras com valor de 20 milhões; e, quando comparadas com carteiras de 100 milhões, conseguem uma liquidação em média 8,5% melhores. A principal explicação para isso perpassa a análise dos ativos formadores dos diferentes tipos de carteiras em relação ao VTC . Conforme já citado, as carteiras tendem a concentrar seus recursos inicialmente nos ativos mais líquidos. Mas, como há um limite no valor máximo a ser comprado ($\beta * l_i$) para cada ativo da carteira, ao se aumentar o valor total a ser investido, exige-se a alocação em novos e diferentes ativos que, muitas vezes, apresentam uma variação relativa maior no seu volume negociado (l_i). Quanto maior a carteira, maior será sua exposição a ativos de maior volatilidade, impactando negativamente em seu possível índice de liquidação.

De forma oposta, quanto maior o valor de β , maior será o provável percentual liquidado da carteira formada. Carteiras com β igual a 0,3 têm sua liquidação, em média, 1% maior que carteiras com β igual a 0,2. Se comparadas com carteiras com β igual a 0,1, sua liquidação é 2,5% maior. A variação em β influencia diretamente o valor máximo a ser alocado em cada ativo ($\beta * l_i$), sendo que menores valores de β fazem diminuir esse valor máximo para cada ativo. Assim, passa-se a gerar carteiras com uma maior diversidade de ativos com menores valores absolutos em cada ativo. A diferença no índice de liquidação provavelmente ocorre porque, na composição de carteiras com valores baixos de β , essas são formadas pelos mesmos ativos presentes nas correspondentes carteiras com maiores valores de β com acréscimo de outros ativos que tendem a ter maior variação de volume negociado (l_i). A liquidação desses ativos exclusivos de carteiras com valores baixos de β é provavelmente o fator redutor do índice de liquidação dessas carteiras.

Por fim, a Tabela A.3 mostra que a relação entre o retorno mínimo exigido (r_C) e o índice de liquidação das carteiras é positiva e estatisticamente significativa. Porém, não fica evidente o comportamento dessa relação nos testes, visto que não há diferença significativa entre os índices de liquidação com carteiras construídas com r_C de 0,5% e 1,5%. Pela Tabela 3, uma diferença considerável só se apresenta quando são

comparadas carteiras com retornos mínimos mais baixos (0,5% e 1,5%) e carteiras formadas com r_c igual a 3%.

4.4. Comparação de Resultados com e sem Uso da Restrição de Liquidez

A fim de elucidar o impacto do uso da restrição de liquidez na otimização dos portfólios, a Tabela 4 mostra os resultados da execução das simulações de carteiras ótimas formadas sem restrição de liquidez em comparação com as formadas com restrição de liquidez. Para fins de simplificação, a Tabela 4 descreve apenas os resultados das simulações com média móvel de 5 dias e parâmetro $r_c = 1,50\%$, em um total de nove cenários (para cada cenário são formadas mais de 700 carteiras). Os outros cenários seguiram comportamento similar.

Tabela 4

Estatísticas do nível de liquidação das carteiras (Média, Mínimo, Máximo e Desvio Padrão) com e sem restrição de liquidez, utilizando média móvel de 5 dias (MM5d) e $r_c = 1,5\%$.

VTC (R\$ milhões)	β	Carteiras com restrição de liquidez				Carteiras sem restrição de liquidez			
		Média	Mínimo	Máximo	D. Padrão	Média	Mínimo	Máximo	D. Padrão
2	0.1	86,85%	49,29%	99,90%	8,38%	50,03%	7,91%	96,45%	27,40%
2	0.2	89,47%	49,55%	99,92%	8,25%	53,75%	8,12%	98,69%	29,62%
2	0.3	90,99%	53,52%	100,00%	7,68%	55,35%	8,32%	100,00%	30,60%
20	0.1	81,96%	36,68%	99,08%	9,22%	28,55%	4,08%	67,30%	15,78%
20	0.2	82,87%	37,01%	99,89%	9,16%	36,28%	5,24%	80,79%	19,93%
20	0.3	83,44%	38,96%	99,97%	8,98%	40,29%	6,03%	87,65%	22,07%
100	0.1	80,07%	26,13%	98,64%	9,45%	13,72%	1,49%	36,73%	7,81%
100	0.2	81,53%	29,65%	98,54%	9,05%	19,22%	2,51%	47,01%	10,74%
100	0.3	82,02%	30,98%	99,00%	8,79%	23,05%	3,28%	58,02%	12,82%

Fonte: elaborado pelos autores.

O impacto do uso da restrição de liquidez no nível de liquidação da carteira fica evidente na Tabela 4. Considerando um valor de carteira (VTC) de R\$ 100 milhões e um β de 0,1, percebe-se que o nível médio de liquidação da carteira é muito discrepante. Enquanto 80,07% das carteiras formadas com restrição de liquidez são liquidadas, em média, apenas 13,72% das carteiras formadas sem restrição de liquidez são liquidadas, em média. Os níveis máximos e mínimos de liquidação das carteiras formadas com e sem restrição de liquidez também diferem

muito. Em alguns períodos, o nível de liquidação das carteiras sem restrição chega a cair para 1,49% contra 26,13% das carteiras com restrição. Isso demonstra quanto ilíquida a carteira sem restrição pode tornar-se em alguns períodos. Essas diferenças se mantêm com alguma variação para diferentes β 's. Na medida em que o *VTC* é reduzido, as diferenças caem. No entanto, as diferenças continuam muito significativas mesmo para carteiras com baixíssimo patrimônio. Por exemplo, para *VTC* de R\$ 2 milhões e um β de 0,1, a média de liquidação das carteiras formadas com restrição de liquidez é de 86,85% contra 50,03% para carteiras formadas sem a restrição de liquidez. Percebem-se, ainda, grandes diferenças nos níveis de liquidação mínimos e nos desvios padrões das carteiras com baixo patrimônio. Portanto, a restrição de liquidez proposta possui um forte impacto sobre os níveis de liquidação das carteiras.

Nota-se que nesse caso, da mesma forma que nos testes mencionados na seção anterior, não se fez uma análise de retorno dos portfólios, ou uma comparação de *trade-off* entre risco e retorno. A não avaliação dessas questões justifica-se pelo fato de que, ao retirar a restrição de liquidez, a alocação da carteira tende a seguir para ativos de volatilidade bem mais baixa e retornos mais altos. No entanto essa menor volatilidade não necessariamente significa menor risco. É provável que essa baixa volatilidade ou maior retorno esteja mais relacionada com a falta de liquidez do que com o efetivo perfil de risco-retorno do ativo. Ou seja, carteiras formadas sem a restrição de liquidez podem apresentar menor risco ou maior retorno devido a sua baixa liquidez. Na Tabela 5, apresenta-se um perfil de volume médio de negociação diária dos ativos disponíveis para o experimento com base no mês de Junho de 2012.

Tabela 5

Perfil de liquidez dos ativos disponíveis para o experimento com base no mês de Junho de 2012 (faixa de volume financeiro médio negociado, número de ativos por faixa e proporção de cada faixa sobre o total).

Volume - R\$(x1000)	Número de Ativos	Proporção
0 - 500	24	13,0%
500 - 1.000	11	5,9%
1.000 - 2.000	18	9,7%
2.000 - 5.000	22	11,9%
5.000 - 1.0000	22	11,9%
1.0000 - 20.000	32	17,3%
20.000 - 50.000	31	16,8%
50.000 - 100.000	13	7,0%

100.000 – 1.000.000	12	6,5%
Total	185	100%

Fonte: elaborado pelos autores.

Com base na Tabela 5, salienta-se novamente que são considerados no estudo 185 ativos transacionados na BM&FBovespa, e boa parte desses ativos possui baixíssima liquidez. Em Junho de 2012, 18,9% desses ativos negociavam menos de R\$ 1 milhão por dia e mais da metade (52,4%) negociavam em média menos de R\$ 10 milhões por dia. Portanto, os preços de boa parte desses ativos possuem pouco significado em termos transacionais. Quando a restrição de liquidez é eliminada do modelo, o volume financeiro deixa de ser considerado na composição da carteira, e para muitos ativos o baixo volume de negociação torna o preço corrente do ativo uma *proxy* não confiável para uma possível compra ou venda. Portanto, não parece razoável comparar tanto a volatilidade quanto o retorno das carteiras formadas sem a restrição de liquidez com as formadas com a restrição de liquidez, na medida em que os níveis de liquidez das carteiras podem ser muito discrepantes.

Nesse sentido, a inclusão de restrição para controle de liquidez busca justamente considerar a relação do volume médio negociado de cada um dos potenciais ativos (l_i) e os parâmetros percentual do total negociado máximo (pl_{max}), prazo para liquidação ($ppzo_{max}$) e nível de liquidação (pnl_{min}). Naturalmente, ao se adicionar controle de liquidez, a alocação da carteira migra para ativos de maior volume transacionado, essencialmente ativos componentes do índice Ibovespa (que é baseado em liquidez das ações). Logo, o uso dessa restrição de liquidez é significativamente relevante, na medida em que considera de forma endógena a dinâmica da liquidez na carteira.

5. Conclusões

O problema de otimização de carteiras é bem conhecido e pesquisado, e a literatura propõe vários modelos para a sua solução. A incorporação de restrições de liquidez a esses modelos, entretanto, é um tópico mais recente.

A dificuldade de solução do modelo original proposto por Markowitz (1952) não apresenta uma oneração computacional grande. Entretanto, a solução de um número grande de problemas, caso específico desse trabalho (com 60.102 instâncias), demanda um tempo computacional bastante razoável. Agrega-se, como fator de dificuldade, a

necessidade de cálculo de uma nova matriz de covariância dos retornos médios dos ativos para cada uma das instâncias a ser executada. Para solucionar esse problema computacional, usou-se o modelo proposto por Filomena e Lejeune (2012), equivalente ao modelo original de Markowitz, porém dispensando o cálculo explícito das matrizes de covariância.

No Brasil, bancos, corretoras e fundos começaram a idealizar e utilizar controles de liquidez mais rígidos há poucos anos. Apenas em meados de 2012 entrou em vigência a exigência da efetiva implementação de controles de liquidez pelos atores do mercado. Essa exigência, ainda que muito vaga (em relação a controles), forçou os bancos e corretoras a desenvolver controles internos de liquidez. Neste trabalho, foi desenvolvida uma restrição de liquidez adequada para o mercado brasileiro que sintetiza a prática atual das corretoras e pode ser computado de forma endógena a um problema de seleção de carteira. A restrição desenvolvida consegue modelar em um único elemento os diversos controles hoje em operação nos bancos e corretoras do país, sendo adequada à realidade brasileira.

A constatação de que várias corretoras e bancos brasileiros pesquisados utilizam medidas de liquidez baseadas no volume total negociado de cada ativo foi de fundamental importância para a escolha dessa métrica de liquidez baseada em volume como base para os testes. As simulações de formação-liquidação de carteiras indicaram, na prática, indiferença em relação ao uso de média móvel de 5 dias, 30 dias ou uma SES do volume total negociado de um ativo para definição de seu índice de liquidez.

A análise do índice de liquidação das carteiras em relação aos parâmetros do modelo (r_C , VTC e β) mostrou um bom nível de explicação da liquidação em função de variações desses parâmetros. Observou-se a existência dessa relação, de forma mais forte, principalmente em VTC e β . Sob a ótica do modelo, nota-se que esses dois parâmetros encontram-se na restrição de liquidez, ratificando a qualidade da restrição proposta. Além disso, carteiras formadas com a restrição de liquidez apresentaram um nível de liquidação muito superior quando comparadas a carteiras formadas sem a restrição de liquidez.

A pesquisa limitou-se à aplicação de restrições de liquidez no mercado brasileiro de capitais. Essa limitação torna-se importante pelas características específicas desse mercado em comparação a mercados mais consolidados, como o mercado americano. A amostra de ativos

selecionada para os testes (dados os critérios adotados para filtro da amostra e exclusão de ativos) é composta por 185 ações; no mercado americano, pelos mesmos critérios, formar-se-iam amostras superiores a 1.000 ações. Assim, o mercado brasileiro, de certa forma, potencializa o efeito da restrição de liquidez desenvolvida, ao incorporar o valor total da carteira em sua composição.

A análise do impacto dos parâmetros do modelo (r_C , VTC e β) no risco total da carteira pode ser mais aprofundada. A limitação ocorreu pela pouca variação dos parâmetros do modelo sob a perspectiva dessa avaliação. Esses cenários restritos, sob a ótica do estudo da variância da carteira, se devem ao fato dessa análise não ser o objetivo principal do estudo, apresentando-se apenas como um resultado secundário.

O estudo de parâmetros que impactam no nível de liquidação das carteiras pode ser ampliado. Estudos futuros poderiam ser centrados na supressão desses fatores limitantes citados. A aplicação do modelo proposto em um mercado de capitais mais líquido e a análise, de forma comparativa, com a sua aplicação no mercado brasileiro pode revelar resultados interessantes. A incorporação de uma variável exógena na análise do nível de liquidação das carteiras poderá complementar os 16% de explicação já encontrados pela variação dos parâmetros do modelo (r_C , VTC e β). Os restantes 84% de explicação em relação ao nível de liquidação podem estar, em parte, relacionados diretamente com a variação da liquidez sistêmica. A captura dessa parcela de explicação poderia ser desenvolvida ao se incorporar uma medida que represente a variação da liquidez do mercado.

Outro ponto que pode ser explorado no futuro é a questão dos custos de transação. O presente estudo considera de forma implícita os custos de transação. No entanto, poderia de forma endógena também considerar os custos explícitos e implícitos de transação. A integração de ideias do presente estudo com os trabalhos de Arenas, Bilbao e Rodríguez-Uría (2001), Vath, Mnif, Pham (2007), Zagst e Kalin (2007), Jana, Roy e Mazumber (2009), Borkovec et al. (2010), Borkovec e Serbin (2013) pode levar a novos resultados relacionados a seleção de carteiras, liquidez e custos de transação.

Referências

Adam, Everett E. (1973). Individual item forecasting model evaluation. *Decision Sciences*, 4(4):458-470.

- Amihud, Yakov & Mendelson, Haim (1991). Liquidity, asset prices and financial policy. *Financial Analysts Journal*, 47(6):56-66.
- Anbima (2014). Diretrizes de liquidez das carteiras dos fundos de investimento. Disponível em: http://www.anbima.com.br/circulares/arqs/2010000032_diretrizes%20liquidez.pdf. Acesso em: 06/09/2015.
- Armstrong, Jon S. (1985). Long-range forecasting: from crystal ball to computer. *Wiley*, New York, 687 pp.
- Bank, Peter & Baum, Dietmar (2004). Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader. *Mathematical Finance*, 14(1):1-18.
- Blume, Lawrence, Easley, David & O'hara, Maureen (1994). Market statistics and technical analysis: the role of volume. *The Journal of Finance*, 49(1):153-181.
- Bonami, Pierre & Lejeune, Miguel (2009). Portfolio optimization problems under stochastic and integer constraints. *Operations Research*, 57(3):650-670.
- Borkovec, Milan, Domowitz, Ian, Kiernan, Brian & Serbin, Vitaly (2010). Portfolio optimization and the cost of trading. *The Journal of Investing*, 19(2): 63-76.
- Borkovec, Milan & Serbin, Vitaly (2013). Create or Buy: A comparative analysis of liquidity and transaction costs for selected US ETFs. *The Journal of Portfolio Management*, 39(4):118-131.
- Caldeira, João F., Moura, Guilherme V. & Santos, André A. P. (2013). Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*, 67(1):45-65.
- CVM (2012). Comissão de Valores Mobiliários – Instrução 522 de 08 de maio de 2012. <http://www.cvm.gov.br/export/sites/cvm/legislacao/inst/anexos/500/inst522consolid.pdf>. Acesso em: 06/09/2015.
- Elton, Edwin J. & Gruber, Martin J. (1972). Earnings estimates and the accuracy of expectational data. *Management Science*, 18(8):409-424.
- Fama, Eugene F. & French, Kenneth R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, 47(2):427-465.

- Filomena, Tiago P. & Lejeune, Miguel A. (2012). Stochastic portfolio optimization with proportional transaction costs: convex reformulations and computational experiments. *Operations Research Letters*, 40:212-217.
- Filomena, Tiago P. & Lejeune, Miguel A. (2014). Warm-start heuristic for stochastic portfolio optimization with fixed and proportional transaction costs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 161: 308-329.
- Gabrielsen, Alexandros, Marzo, Massimiliano & Zagaglia, Paolo (2011). Measuring market liquidity: an introductory survey. Working paper (University Library of Munich).
- Gourinchas, Pierre-Olivier & Parker, Jonathan A. (2002). Consumption over the life cycle. *Econometrica*, 70(1): 47-89.
- Haliassos, Michael & Michaelides, Alexander (2003). Portfolio choice and liquidity constraints. *International Economic Review*, 44(1): 143-177.
- Hasbrouck, Joel & Schwartz, Robert A. (1988). Liquidity and execution costs in equity markets. *The Journal of Portfolio Management*, 14(3):10-16.
- Hasbrouck, Joel & Seppi, Duane J. (2001). Common factors in prices, order flows, and liquidity. *Journal of Financial Economics*, 59:383-411.
- Huberman, Gur & Halka, Dominika (2001). Systematic liquidity. *The Journal of Financial Research*, 24(2):161-178.
- Hui, Baldwin & Heubel, Barbara (1984). Comparative liquidity advantages among major US stock markets. *Data Resources Inc.*, Lexington, 22 p.
- Jana, P., Roy, T. K. & Mazumder, S. K. (2009). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228:188-196.
- Kirby, Robert M. (1966). A comparison of short and medium range statistical forecasting methods. *Management Science*, 13(4):202-210.
- Konno, Hiroshi & Suzuki, Ken-ichi. (1992). A fast algorithm for solving large scale mean-variance models by compact factorization of covariance matrices. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 35(1):93-104.

- Lo, Andrew W., Petrov, Constantin & Wierzbicki, Martin (2003). It's 11pm - do you know where your liquidity is? The mean-variance-liquidity frontier. *Journal of Investment Management*, 1(1):55-93.
- Lo, Andrew W. & Wang, Jiang (2000). Trading volume: definitions, data analysis, and implications of portfolio theory. *The Review of Financial Studies*, 13(2):257-300.
- Machado, Márcio A. V. & Medeiros, Otávio R. (2011). Modelos de precificação de ativos e o efeito liquidez: evidências empíricas no mercado acionário brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, 9(3):383-412.
- Markowitz, Harry (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77-91.
- Marsh, Terry & Rock, Kevin (1986). Exchange listing and liquidity: a comparison of the american stock exchange with the NASDAQ national market system. *American Stock Exchange*, 24 p.
- Arenas, Mar P., Bilbao, Amelia T. & Rodríguez-Uría, Maria V. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 133: 287-297.
- Vath, Vathana L., Mnif, Mohamed & Pham, Huyên (2007). A model of optimal portfolio selection under liquidity risk and price impact. *Finance and Stochastics*, 11: 51-90.
- Zagst, Rudi & Kalin, Dieter (2007). Portfolio optimization under liquidity costs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 39(2):217-233.

Apêndice

Tabela A.1

Estatísticas descritivas dos níveis de liquidação das carteiras formadas utilizando, como índice de liquidação, suavização exponencial simples (SES), média móvel de 5 dias (MM5d) e média móvel de 30 dias (MM30d) do volume diário negociado.

	MM5d	MM30d	SES
Nº Observações	19638	19638	19638
Nº Observações Falhas	0	0	0
Média	0,84624	0,83699	0,84313
Mediana	0,86019	0,85055	0,85668
Moda	1,00000	1,00000	1,00000
Assimetria	-1,035	-1,047	-1,092
Assimetria – Desvio Padrão	0,017	0,017	0,017
Curtose	1,882	2,031	2,169
Curtose – Desvio Padrão	0,035	0,035	0,035

Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela A.2

Correlação entre os valores dos níveis de liquidação das carteiras formadas utilizando suavização exponencial simples (SES), média móvel de 5 dias (MM5d) e média móvel de 30 dias (MM30d) do volume diário negociado.

	MM5d	MM30d	SES	
MM5d	Correlação de Pearson	1	0,874**	0,966**
	Sig. (Bicaudal)		0.000	0.000
	Nº Observações	19638	19638	19638
MM30d	Correlação de Pearson	0,874**	1	0,930**
	Sig. (Bicaudal)	0.000		0.000
	Nº Observações	19638	19638	19638
SES	Correlação de Pearson	0,966**	0,930**	1
	Sig. (Bicaudal)	0.000	0.000	
	Nº Observações	19638	19638	19638

** Correlação é significativa 1% (Bicaudal).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela A.3

Análise de variância tendo, como variável dependente, o nível de liquidação quando utilizando como índice de liquidez a média móvel de 5 dias (MM5d) do volume diário total negociado e, como variáveis independentes, retorno mínimo exigido da carteira (r_c), valor total da carteira (VTC) e percentual máximo do volume projetado para o dia seguinte de cada ativo aceito na carteira (β).

Fonte	Tipo III Soma dos Quadrados	Df	Média Quadrática	F	Sig.
Modelo Corrigido	28,818(a)	26	1,108	142,619	0,000
Intercepto	13998,588	1	13998,588	1801221,796	0,000
VTC	25,404	2	12,702	1634,420	0,000
Beta	2,318	2	1,159	149,161	0,000
Retorno	0,392	2	0,196	25,248	0,000
VTC* β	0,387	4	0,097	12,450	0,000
VTC*Retorno	0,319	4	0,080	10,254	0,000
β *Retorno	0,28	4	0,007	0,916	0,453
VTC* β *Retorno	0,017	8	0,002	0,272	0,975
Erro	152,411	19611	0,008		
Total	14244,359	19638			
Total Corrigido	181,229	19637			

(a) R Quadrado=0,159; R Quadrado Ajustado=0,158.

Fonte: Elaborado pelos autores.

