

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DISPERSÃO VERTICAL  
TURBULENTA EM UMA CAMADA LIMITE ESTÁVEL**

por

***ANGELA BEATRICE DEWES MOURA***

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Professor Orientador:  
Dr. MARCO TÚLLIO M. B. DE VILHENA

Porto Alegre  
1995

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DISPERSÃO VERTICAL TURBULENTA  
EM UMA CAMADA LIMITE ESTÁVEL

por

*ANGELA BEATRICE DEWES MOURA*

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos dos Transportes

Aprovada por :

Profa. Dra. Elaine Streck

Prof. Dr. Gervázio Degrazia

Prof. Dr. Osvaldo Moraes

Prof. Dr. Horácio Vielmo

Coordenador do Promec

Porto Alegre . 17 de agosto de 1995

... estático diante do alvo, colocado ao fundo da sala escura, os olhos do arqueiro obstinadamente fixavam a meta. Alguns segundos após, a flexa rasgava o ar e atingia violentamente o compacto bloco de palha. Ansiosamente o arqueiro percorre a sala para verificar a precisão daquele tiro. Retorna com o alvo nas mãos e um sorriso que denunciava um lance certo, quando então o mestre se manifesta: "o orgulho em seus olhos afronta todas as suas honrosas tentativas anteriores...jamais esqueça que elas foram o meio de crescimento como arqueiro, sendo assim, são tão ou mais importantes que um tiro certo... muitas pessoas podem fazê-lo, porém somente os verdadeiros arqueiros irão adquirir a sabedoria da arte... "

ensinamentos da doutrina Zen

*Aos meus pais, Léo e Martha,  
ao Roberto,  
ao Marcelo,  
e a Ariela.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, de forma especial, ao Prof. Dr. Marco Túllio de Vilhena, não só pela oportunidade de compartilhar da sua competência e experiência profissional, mas pelo grande incentivador e amigo que sempre tem sido.

A CAPES e a PROPESP/UFRGS, pelo suporte financeiro.

Ao PROMEC, coordenação e funcionários, pelo inestimável apoio.

Ao Prof. Dr. Gervásio Degrázia pelo estímulo na realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Elaine Streck e ao Prof. Augusto Cardona pelo apoio e amizade.

Aos colegas e amigos do PROMEC, pelo auxílio, carinho e amizade.

Às amigas Magda e Alice.

A todos os familiares e amigos que sempre torceram pelo sucesso na realização deste trabalho.

Ao Roberto, pela colaboração, pelo companheirismo e paciência, mas sobretudo pelo amor.

Ao Marcelo, um novo sentido a minha vida, pela alegria.

Aos meus pais, Leo e Martha, por tudo... desde o princípio.

Ao Criador.

## **RESUMO**

Neste trabalho é apresentada uma solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável, para uma fonte área instantânea. Esta solução é obtida pela aplicação da transformada de Laplace na variável temporal da equação de difusão e também foi usado um coeficiente de dispersão derivado das teorias de similaridade local e da difusão estatística. A transformada inversa é obtida através do esquema numérico de quadratura Gaussiana.

São apresentadas várias simulações para diversas alturas da fonte área e os resultados obtidos apresentaram boa comparação com os resultados disponíveis na literatura.

## **ABSTRACT**

In this work is presented an analytical solution for vertical pollutant dispersion of a instantaneous area source in an atmospheric stable boundary layer. This solution is obtained by the application of Laplace Transform on the time-dependent, one dimensional diffusion equation and using the dispersion coefficient derived from local similarity and statistical diffusion theories. The Inverse of the Transform is achieved through numerical scheme of Gaussian quadrature.

Numerical simulations and comparisons are reported for several heights of the source and the results attained a good concordance with other results .

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_i$  - Coeficientes da solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$A_n$  - termo tabelado da fórmula de inversão de Quadratura Gaussiana

$a$  - constante empírica genérica

$B_i$  - Coeficientes da solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$b$  - constante empírica genérica

$C$  - concentração média de contaminantes passivos

CL - Camada Limite

CLC - Camada Limite Convectiva

CLE - Camada Limite Estável

CR - Camada Residual

CS - Camada Superficial

$C_i(z,t)$  - concentração genérica de um poluente passivo na altura  $z$  e tempo  $t$

$C_i(z,0)$  - concentração genérica de um poluente passivo na altura  $z$  e tempo zero

$c_e$  - constante empírica

$E_A(n)$  - intensidade espectral discreta ou energia da variável  $A$

$F_A(n)$  - transformada de Fourier complexa discreta de frequência  $n$  da variável  $A$

$|F_A(n)|^2$  - Frequência de Nyquist

$F_{\text{real}}(n)$  - parte real da transformada de Fourier complexa discreta de frequência  $n$

$F_{\text{imag}}(n)$  - parte imaginária da transformada de Fourier complexa discreta de freq.  $n$

$f$  - frequência reduzida

$(f_m)_{n,i}$  - frequência do pico espectral na estratificação neutra

$G_A(n)$  energia espectral da transformada de Fourier desdobrada

$g$  - força da gravidade



$h$  - altura da CLE  
- escala de comprimento da CLE  
 $h_0$  - altura de inversão da Camada Limite  
 $h_f$  - altura de emissão de um contaminante passivo  
 $i$  - seção genérica  
 $i'$  - seção genérica onde ocorre a emissão  
 $L$  - comprimento de Monin-Obukhov  
 $K$  - difusividade genérica  
 $K_i$  - valor de  $K$  para uma altura de referência  $z_i$   
 $K_x$  - coeficiente de difusão longitudinal  
 $K_y$  - coeficiente de difusão lateral  
 $K_z$  - coeficiente de difusão vertical  
 $K_{zz}$  - coeficiente de difusividade vertical obtido por Degrazia  
 $K_{yy}$  - coeficiente de difusividade lateral obtido por Degrazia  
 $K_\theta$  - difusividade turbulenta genérica  
 $n$  - frequência cíclica  
- parâmetro contador genérico  
 $p_n$  - termo tabelado da fórmula de inversão de Quadratura Gaussiana  
 $Q$  - fonte instantânea  
 $q$  - função de estabilidade  
 $q_*$  - fluxo de calor  
 $r$  - coeficiente de correlação genérico  
 $R_a$  - parâmetro genérico  
 $R_i$  - parâmetro genérico  
 $S$  - fonte de contaminante passivo  
 $S_i(n)$  - Espectro de energia genérico  
 $S_v(n)$  - Espectro de energia lateral  
 $S_w(n)$  - Espectro de energia vertical  
 $T_*$  - temperatura de referência  
 $T_L$  - escala de tempo integral Lagrangeana

**t** - tempo genérico  
**U** - velocidade média do vento na direção x  
**U<sub>\*</sub>** - velocidade de fricção local  
**u** - componente do vento médio na direção x  
**u<sub>i</sub>** - valor de u para uma altura de referência z<sub>i</sub>  
**u<sub>\*</sub>** - tensão superficial  
**v** - componente do vento médio na direção y  
**v<sub>\*</sub>** - velocidade de fricção  
**V<sub>g</sub>** - velocidade de deposição  
**w** - componente do vento médio na direção z  
**w<sub>\*</sub>** - escala de velocidade convectiva  
**X** - distância adimensional na CLC  
**x** - coordenada cartesiana  
**y** - coordenada cartesiana  
**z** - coordenada cartesiana  
**z** - altura genérica  
**z<sub>i</sub>** - altura da primeira inversão  
     - altura da CLC

$\bar{c}$  - componente média da concentração

$c'$  - componente turbulenta da concentração

$\bar{u}$  - componente média do vento na direção x

$\overline{u'c'}$  -fluxo turbulento de um contaminante passivo na direção longitudinal

$\overline{u'q'}$  - fluxo turbulento de um contaminante passivo na direção longitudinal

$\overline{u'w'}$  - fluxo turbulento de momentum U na vertical

$\bar{v}$  - componente média do vento na direção y

$\overline{v'c'}$  - fluxo cinemático de um contaminante passivo na direção transversal

$\overline{v'q'}$  - fluxo turbulento de um contaminante passivo na direção transversal

$\overline{w}$  - componente média do vento na direção z

$\overline{w'c'}$  -fluxo turbulento de um contaminante passivo na direção vertical

$\overline{w'q'}$  -fluxo turbulento de um contaminante passivo na direção vertical

$\overline{w'\theta'}$  - fluxo turbulento de temperatura potencial na direção vertical

$(\overline{w'\theta'})_0$  -fluxo de calor turbulento superficial

$\overline{T}$  - temperatura de referência média

#### GREGOS:

$\alpha_1$  - constante empírica na determinação do comprimento de Monin-Obukhov

$\alpha_2$  - constante empírica na determinação do comprimento de Monin-Obukhov

$\beta_0$  - parâmetro de empuxo

$\beta_v$  - taxa de escala de tempo Euleriana

$\beta_w$  - taxa de escala de tempo Lagrangeana

$\delta$  - função generalizada Delta de Dirac

$\epsilon$  - taxa de dissipação de energia cinética turbulenta

$\epsilon_0$  - parâmetro empírico da variável adimensional z/L

$\theta$  - temperatura potencial média

$\theta_*$  - escala de temperatura turbulenta genérica

$\kappa$  - constante de Von Kármán

$\Lambda$  - comprimento de Monin-Obukhov local

$\pi$  - pi

$\rho$  - densidade

$\sigma^2$  - variância genérica

$\sigma_v$  - desvio padrão das velocidades turbulentas na direção transversal a do vento médio.

$\sigma_w$  - desvio padrão das velocidades turbulentas na direção vertical a do vento médio.

$\sigma_y$  - desvio padrão da distribuição de concentração na direção lateral y

$\sigma_A^2$  - variância total da série temporal original da variável A

$\sigma_v^2$  - variância das velocidades turbulentas laterais

$\sigma_w^2$  - variância das velocidades turbulentas verticais

$\tau$  - escala de tempo de correlação, escala de tempo turbulenta

- tensão de cisalhamento

$\tau_0$  - tensão de cisalhamento superficial

$\tau(z)$  - tensão de Reynolds local

$\Phi_\epsilon$  - função de dissipação adimensional

$\chi$  - concentração de um contaminante passivo

## SUMÁRIO

RESUMO . . . . .	.iv
ABSTRACT . . . . .	v
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	.vi
1      INTRODUÇÃO . . . . .	3
2      CAMADA LIMITE PLANETÁRIA . . . . .	10
2.1      Camada Limite Convectiva - CLC . . . . .	13
2.2      Camada Residual - CR . . . . .	16
2.3      Camada Estável Noturna - CLE . . . . .	17
3      MODELOS DE DIFUSÃO. . . . .	20
3.1      Modelo De Pluma Gaussiano . . . . .	26
3.2      Modelos k. . . . .	29
3.3      Outros Modelos . . . . .	31

4	DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA . . . . .	34
5	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	43
6	CONCLUSÕES . . . . .	53
7	ANEXO A . . . . .	56
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	61
APÊNDICE A	Teoria Da Similaridade . . . . .	66
	A Teoria Da Similaridade Na Camada Estável . . . . .	68
APÊNDICE B	Espectro De Turbulência . . . . .	70
	O Espectro De Velocidade Turbulento Na CLE . . . . .	72
APÊNDICE C	Coefficiente De Difusão Da Teoria Estatística . . . . .	75

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos mais importantes objetivos da ciência é atingir a capacidade de prever o comportamento futuro de um certo sistema. Exemplos bem concretos são os serviços de previsão de tempo, terremotos e tempestades bem como a dispersão de poluentes. Os cientistas formulam modelos matemáticos, levando em conta aspectos fundamentais do sistema em estudo, e analisam a variação deste sistema no tempo, sua evolução dinâmica.

As leis que regulamentam a qualidade do ar estão se tornando cada vez mais exigentes e detalhadas. Por isso são necessários novos modelos que forneçam resultados mais rápidos, reais e precisos de forma que, juntamente com suas medidas de precisão, se possa estimar realisticamente as ações necessárias para manter o ar dentro de padrões adequados.

A modelagem completa da camada limite planetária (CLP) tanto do ponto de vista da meteorologia quanto para o estudo da dispersão de contaminantes é um processo extremamente difícil, onde se deve levar em conta os forçantes atuantes, que podem ser: aquecimento solar, resfriamento radiativo, mudanças de fase da água, provocando expansão e concentração de massas de gás, e correntes convectivas, que envolvem conversões de energia de uma forma para outra.

Na CLP temos turbulência sempre presente e pode-se classificá-la segundo processos físicos que nela ocorrem em três condições limites: camada convectiva, camada neutra e camada estável, que serão vistas com maiores detalhes no capítulo 2.

Experimentos têm mostrado a existência de uma estrutura de similaridade local para a CLE (Camada Limite Estável). Este caráter local de turbulência sugere a possibilidade de formulação de uma teoria que descreve a CLE noturna. Moraes(1988) e Degrazia & Moraes(1992) desenvolveram um modelo para o cálculo de difusividade turbulenta pelo emprego da teoria de similaridade local (ver Apêndice C).

A importância do transporte turbulento de momento, calor, vapor d'água e contaminantes foi identificada há muito tempo, como o maior gargalo no estudo da CLE. Um modo simplificado e fisicamente razoável para descrever este transporte é importante para a previsão de jatos de baixa intensidade, fog, formação de granizo e qualidade do ar. As equações básicas para a descrição deste processo são bem conhecidas, mas sua utilização completa não é operacional tanto do ponto de vista analítico quanto numérico.

Na prática ela tem como resultado alguns tipos de soluções rápidas representados por modelos fechados e parametrização associada de ordem dos grandes momentos. Além disso, mesmo após suposições simplificativas, as equações resultantes ainda não são facilmente resolvidas por análise numérica, até mesmo nos últimos tempos quando a velocidade e tamanho da memória dos computadores se tornaram significativamente grandes.

Segundo o último Workshop "Objectives for Next Generation of Practical Short-Range Atmospheric Dispersion Models"(1992), observou-se que a busca de soluções analíticas para os problemas de dispersão é atualmente uma das três direções principais da pesquisa nesta área. Esta necessidade de novos modelos é devido ao fato que em muitos casos os velhos modelos não fornecem resultados confiáveis e se espera dos novos modelos resultados com menos incertezas que os antigos e que possibilitem o cálculo destas incertezas. A investigação da dispersão e do transporte de poluentes na camada limite planetária é um fator importante em problemas que envolvem a qualidade do ar. Para este fim, um modelo de dispersão atmosférico deve ser capaz de reproduzir os principais padrões das distribuições espaciais de concentrações de poluentes.



A vantagem da solução analítica é que todos os parâmetros do problema aparecem explicitamente na solução, de forma que sua influência pode ser facilmente investigada. Uma solução analítica também pode ser usada para checar métodos numéricos.

A dispersão de contaminantes passivos em um meio turbulento é normalmente descrita, no caso mais geral, pela seguinte equação da difusão (Monin e Yaglom, 1971; Pasquill, 1974):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + S \quad , (1.1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas espaciais,  $C$  a concentração média de contaminantes passivos, e  $u$ ,  $v$  e  $w$  os componentes do vento médio nas três direções,  $S$  é o termo de fonte e  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$  são os coeficientes de difusão turbulenta longitudinal, lateral e vertical, respectivamente.

Os coeficientes de difusão turbulenta (com seus componentes  $K_x$ ,  $K_y$ , e  $K_z$ ) modelam a dispersão pela turbulência. A homogeneidade horizontal é normalmente assumida para as variáveis meteorológicas, de forma que a velocidade do vento e o coeficiente  $K$  sejam funções somente da altura  $z$ , do vento médio em uma só direção; Considera-se ainda o vento vertical médio como zero.

Ainda não é conhecida nenhuma solução de (1.1) exata, abrangente para todos estes parâmetros. Entretanto, com poucas expressões simples para a velocidade do vento e os coeficientes  $K$  como funções da altura, uma solução analítica pode ser encontrada.

Roberts(1923) apresentou uma solução bidimensional, somente para fontes superficiais, nos casos em que tanto a velocidade do vento ( $u$ ) quanto o coeficiente de difusão vertical  $K_z$  seguem a lei de potência como função da altura. Rounds (1955) obtém

difusão vertical  $K_z$  seguem a lei de potência como função da altura. Rounds (1955) obtém uma solução bidimensional válida somente para fontes elevadas, mas somente para perfis lineares de  $K_z$ .

Smith (1957 a) resolveu a equação bidimensional do transporte e da difusão com  $u$  e  $K_z$  sendo funções de potência da altura com os expoentes destas funções seguindo a lei conjugada de Schmidt (que é: 'exp. do vento' = 1 - 'exp.  $K_z$ '). Smith (1957 b) também apresentou uma solução para o caso de  $u$  constante, mas com o seguinte  $K_z$  :

$$K_z = K_0 Z^a (H-z)^b \quad , \quad (1.2)$$

onde  $K_0$  é uma constante e  $a$  e  $b$  são valores arbitrários dependentes da altura  $z$  dentro de uma CLA (camada limite atmosférica) de altura  $H$ .

Scriven e Fisher (1975) propõe uma solução com  $u$  e  $K_z$  constante do tipo:

$$K_z \sim z \quad \text{para} \quad 0 \leq z \leq z_i,$$

$$K_z = K_z(z_i) \quad \text{para} \quad z_i \leq z \leq H,$$

onde  $z_i$  é uma altura pré-determinada (geralmente a altura da Camada Superficial). Esta solução tem, como uma condição de contorno, o fluxo bruto de material em direção ao solo:

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = V_g C \quad , \quad (1.3)$$

onde  $V_g$  é a velocidade de deposição. A solução de Scriven e Fisher foi amplamente utilizada no Reino Unido para o transporte de longa escala de emissão de poluentes.

Yeh e Huang (1975) apud Tirabassi(1989) e Berlyand (1975) apud Tirabassi(1989) publicaram soluções bidimensionais para fontes elevadas com  $u$  e  $K_z$  seguindo os perfis de potência, mas para uma atmosfera sem contorno (ou seja,  $K_z (\partial C / \partial z) = 0$  em  $z = \infty$ ). Demuth (1978) coloca uma solução para as mesmas condições, mas para uma CL limitada verticalmente ( $K_z (\partial C / \partial z) = 0$  em  $z = H$ ).

Com a aplicação da teoria da similaridade de Monin-Obukhov para a difusão, van Ulden (1978) derivou uma solução para a difusão vertical somente para fontes contínuas próximas ao solo e supondo que  $u$  e  $K_z$  seguem o perfil de potência. Seus resultados são similares aos de Roberts. Mais tarde, ele apresentou um modelo para fontes não superficiais, mas aplicável à fontes dentro da camada superficial (CS.).

Nieuwstadt (1980b) apresentou uma solução, utilizando os polinômios de Legendre, que foi um caso particular de Smith (1975 b), acima citado. Subsequentemente, Haan e Nieuwstadt (1981) estenderam esta solução (dada em termos de polinômios de Jacoby) prevendo aí o caso do crescimento da altura da CL.. Catalano (1983), por sua vez, estendeu esta solução para o caso de um perfil de vento médio vertical diferente de zero.

Entretanto, poucas destas soluções foram adotadas em modelos para aplicações reais. As exceções são o uso da aproximação analítica de Scriven e Fisher, acima citados. Embora fornecendo uma representação relativamente rude dos perfis dos coeficientes de difusão turbulentos, esta solução pode ser usada seguramente para deposições secas (Fisher, 1978).

Os modelos usados na URSS eram soluções analíticas para uma atmosfera sem limite superior. Em particular Berlyand (1975) propôs três diferentes parametrizações para a difusão vertical. Entretanto, em todas elas os coeficientes de troca vertical são lineares com a altura e assumidos como independentes da intensidade de turbulência.

Mais recentemente Lupini e Tirabassi (1982) propõem uma solução da equação de difusão-advecção pelo método, por eles chamado, do momento. Este método utiliza-se de uma fórmula de expansão do tipo de Gram-Charlier para o campo de concentração, e é válido para fontes pontuais e estruturas de camada limite horizontalmente homogêneas.

Tirabassi et al.(1986) e Tirabassi (1996) propõem modelos de dispersão baseados nas soluções de Demuth e de Yeh e Huang, respectivamente, revisadas, mas ainda com os perfis de difusão do tipo perfis de potência.

Como se vê, os modelos de difusão analíticos usam uma solução da equação de difusão e advecção para poluição do ar na atmosfera, que é essencialmente uma proposição de conservação de um material suspenso, como é mostrada em (1.1). Uma revisão dos modelos de difusão empregados é mostrada no capítulo 3.

Um modelo bem conhecido e amplamente utilizado para sua resolução, é o modelo gaussiano para o qual a solução da equação acima baseia-se em que tanto os ventos como os coeficientes de difusão são assumidos constantes. A solução do modelo gaussiano é forçada a representar uma atmosfera não homogênea através de parâmetros empíricos de dispersão, assim chamados "sigmas".

Observa-se também que, para a maioria das soluções analíticas de (1.1), o coeficiente  $K$  é assumido ser função de uma lei de potência da altura. Expressões deste tipo podem ser encontradas em Monin e Yaglom (1971) e Pasquill(1974). Entretanto, um coeficiente  $K$ , em termos da lei de potência não é realístico para a Camada Limite Atmosférica. Para fluxos turbulentos na camada limite planetária (CLP) estes coeficientes são funções do espaço e devem encerrar obrigatoriamente os principais parâmetros meteorológicos descrevendo a estrutura física da baixa atmosfera.

O objetivo deste trabalho é propor uma solução analítica para a dispersão vertical, a partir de uma fonte área instantânea, em uma camada limite planetária estável (CLE) de profundidade  $h$ , utilizando-se de um coeficiente de difusividade vertical derivado da teoria de similaridade local (Nieuwstadt, 1984) e da teoria de difusão estatística. Nesta aproximação, os termos associados à dispersão turbulenta são parametrizados pela hipótese de transferência por gradiente, onde os fluxos turbulentos de concentração são relacionados à concentração média via um coeficiente de difusão turbulento. Mantém-se assim a simplicidade da forma dos modelos  $K$ . Além disso assumimos a difusão como Fickiana .

A CLE analisada neste trabalho apresenta uma turbulência contínua mantida pelo cisalhamento vertical da velocidade média do vento. Esta situação pode ocorrer mesmo durante a noite quando o fluxo de calor negativo tende a suprimir a atividade turbulenta (Venkatran e Palme, 1985). Investiga-se a dispersão de uma fonte área localizada na superfície e no topo da CLE para dois diferentes tempos de evolução.

Para este caso uma solução analítica de (1.1) é apresentada (Moura et al., 1995) envolvendo um perfil mais realístico de K cuja dedução é mostrada no apêndice C. A solução é derivada no capítulo quatro. Nos capítulos cinco e seis são mostrados os resultados numéricos e conclusões (No Anexo A são mostrados também os resultados obtidos numericamente por Campos Velho, 1992, e outra solução exata de Nieuwstadt, 1980, que faz uso dos polinômios de Legendre e da lei de potência para o coeficiente K).

## 2 CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

A superfície da terra estabelece um limite para o domínio da atmosfera. Processos de transporte modificam as camadas inferiores entre 100 e 3000 m da atmosfera, criando o que é chamado de camada limite planetária. A parte restante da troposfera<sup>1</sup> é chamada de atmosfera livre. A natureza da atmosfera percebida pela maioria dos indivíduos é baseada nas características peculiares encontradas nesta pequena porção superficial de ar. Desta maneira define-se camada limite atmosférica como a parte da troposfera que é diretamente influenciada pela presença da superfície da terra, e que responde aos forçantes superficiais com uma escala de tempo de cerca de uma hora ou menos. Estes forçantes incluem o cisalhamento do vento, os fluxos de umidade e calor, a emissão de poluentes e os efeitos de topografia. A espessura da camada limite é muito variável com o tempo e espaço, desde dezenas de metros a alguns poucos quilômetros.

A camada limite apresenta uma variação diurna de temperatura, o que não ocorre na atmosfera livre. Esta variação não é causada pela radiação solar diretamente, mas sim pelo aquecimento da superfície (que absorve 90% da radiação incidente) e daí por processos de transporte, aquece a camada limite. O mais importante destes processos é a transferência turbulenta ( Stull, 1988 ).

Sobre a superfície da terra, em regiões de alta pressão, a camada limite tem uma estrutura bem definida que se desenvolve com o ciclo diurno, podendo ser imaginada em três situações limites principais (de acordo com os processos físicos e de mistura que nela

---

<sup>1</sup>Troposfera = parte da atmosfera que se estende da superfície da Terra até cerca de 12 Km e na qual ocorrem fenômenos de convecção, e onde as nuvens são usualmente encontradas.

ocorrem), que são: uma camada convectiva diurna muito turbulenta, uma camada residual noturna menos turbulenta, contendo ar da camada de mistura anterior, e uma camada limite estável noturna com turbulência esporádica (ver figura 2.1).

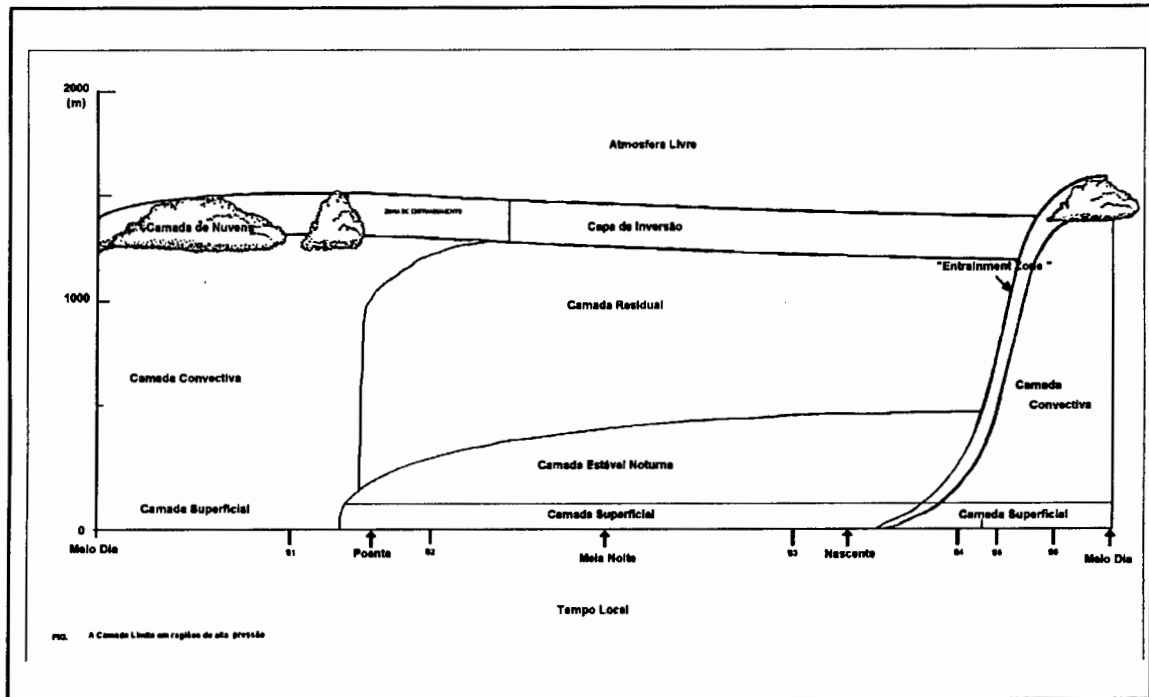


Figura 2.1 - Estrutura de uma Camada Limite Típica de regiões de alta pressão (Stull, 1988).

Ainda pode ser definida uma outra camada bem próxima ao solo, na base da camada limite, chamada de camada superficial. Nela os fluxos e tensões turbulentos variam em menos de 10% de sua magnitude total (fluxos praticamente constantes) e os efeitos da turbulência mecânica são sempre dominantes, independentemente se a camada é diurna ou noturna.

Na camada limite o transporte de espécies como umidade, calor, "momentum", e poluentes, é dominado na horizontal pelo vento médio e na vertical pela turbulência. Portanto os ventos médios são responsáveis pelo transporte horizontal rápido, também chamado advecção. Ventos horizontais da ordem de 2 a 10 m/s são comuns na camada limite. Próximo ao solo, devido ao mecanismo de fricção, a velocidade do vento médio

é menor. Os ventos médios verticais são muito mais fracos e da ordem de milímetros a centímetros por segundo.

As ondas que são frequentemente observadas na camada limite noturna transportam pouco calor, umidade e outros escalares como poluentes, mas são eficientes no transporte de "momentum" e energia. Elas são geradas localmente pelo cisalhamento dos ventos médios e pelo fluxo médio sobre obstáculos, ou propagadas de fontes distantes como explosões e tempestades. Algumas vezes, o fenômeno das ondas atmosféricas pode ser associado ao transporte turbulento de calor e poluição, quando, em regiões localizadas, elas provocam um aumento no cisalhamento do vento, embora sem a turbulência elas não sejam eficientes em tal transporte ( Stull, 1988 ).

A ocorrência de turbulência próxima ao solo é uma das características que fazem com que a camada limite seja diferente do resto da atmosfera. Fora desta camada existe uma turbulência primária próxima aos jatos devido ao forte cisalhamento destes ventos (CAT-clear air turbulence).

Uma aproximação freqüente tanto no estudo de ondas, como no de turbulência é separar as variáveis como temperatura e vento, em uma parte média e uma parte perturbada. A parte média representa os efeitos da temperatura e dos ventos médios, enquanto a parte perturbada representa tanto o efeito das ondas, como o da turbulência que são sobrepostos ao vento médio.

Assim, esta técnica de partição (teoria estatística da turbulência) pode ser aplicada às equações do movimento criando novos termos. Alguns destes termos que se constituem do produto de variáveis perturbadas, descrevem interações não lineares entre as variáveis e são associados à turbulência. Estes termos são usualmente negligenciados quando o movimento das ondas é o interesse principal; por outro lado, os outros termos contendo somente uma variável perturbada, descrevem movimentos lineares que são associados às ondas e podem igualmente ser desprezados quando a turbulência é a ênfase.

A turbulência pode ser imaginada como constituída de muitos turbilhões ("eddies") de tamanhos diferentes, sobrepostos uns aos outros, sendo que, as maiores



escalas de turbilhões são da ordem da altura da camada limite, ou seja, de 100 a 3000m de diâmetro. As intensidades relativas a estas diferentes escalas de turbilhões definem o espectro de turbulência.

A maior parte da turbulência da camada limite é gerada por forçantes da superfície como o aquecimento solar (que provoca o aparecimento de termas que são massas de ar quente em ascensão) e o cisalhamento provocado pelos ventos. É a turbulência que permite que a camada limite responda rapidamente às variações dos forçantes de superfície.

## **2.1 Camada Limite Convectiva - CLC**

A fonte básica de energia turbulenta na CLC é o fluxo de calor sensível turbulento da superfície para a atmosfera. Assim turbulência na camada limite convectiva é originada pela convecção térmica. Os forçantes convectivos incluem transferência de calor da superfície terrestre aquecida e o resfriamento radiativo do topo da camada de nuvens. A primeira situação gera as chamadas termas que, como já foi definido anteriormente, são massas de ar quente que se elevam a partir do solo, enquanto a segunda gera as termas de ar frio, que descem do topo das nuvens em direção ao solo. Ambas geralmente ocorrem simultaneamente.

Em dias de céu limpo e sem nuvens o crescimento da CLC é devido principalmente ao aquecimento do solo. Por volta de meia hora após o alvorecer, a altura da CLC turbulenta começa a crescer atingindo a sua altura máxima à tarde. Esta CLC é caracterizada por uma mistura intensa em uma situação estaticamente instável, na qual termas de ar quente sobem a partir da superfície.

A turbulência resultante tende a misturar calor, umidade e "momentum", de maneira uniforme na vertical. O perfil resultante da temperatura potencial virtual, taxa de

mistura, concentração da poluição e velocidade do vento é frequentemente como é mostrado na figura.2.2. Da figura vê-se que o perfil de temperatura potencial virtual é adiabático na porção intermediária da CLC e superadiabático na camada superficial adjacente ao solo ( Stull, 1988).

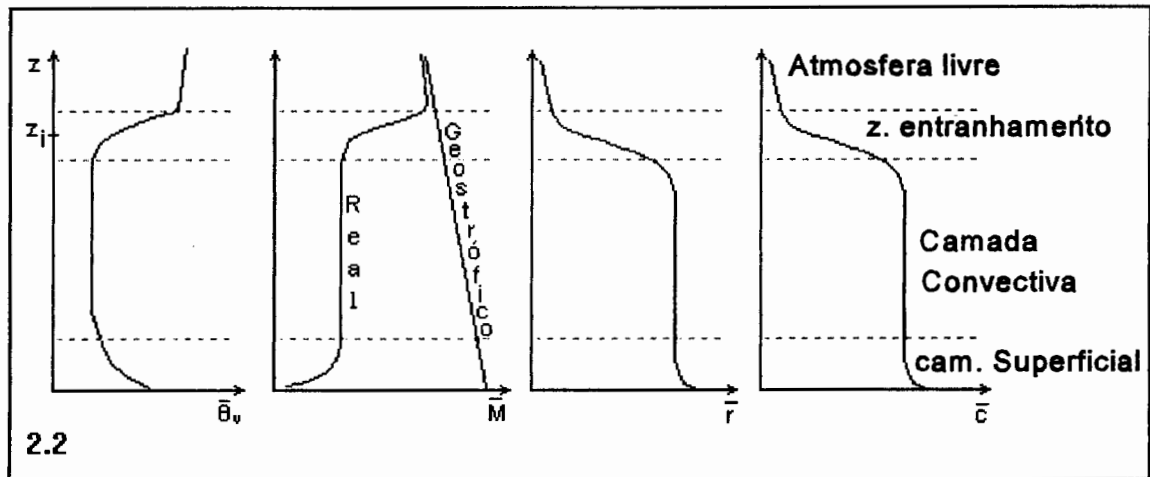


Figura 2.2 - Perfis típicos da Camada Convectiva Diurna de temperatura potencial virtual  $\bar{\theta}_v$ , do vento médio  $\bar{M}$  (onde  $\bar{M}^2 = u^2 + v^2$ ), da taxa de vapor misturado  $\bar{r}$  e da concentração de poluentes  $\bar{c}$ .

A camada estável no topo da CLC atua como um tampão, para as termas ascendentes, restringindo assim o domínio da turbulência (Venkatran e Wyngaard, 1988). É a chamada zona interfacial, ou zona de entranhamento (entrainment zone).

Às vezes, esta camada interfacial estável é forte o suficiente para ser classificada como uma camada de inversão (temperatura absoluta aumenta com a altura). Por isso ela é frequentemente também chamada de camada de inversão.

A velocidade dos ventos é subgeostrófica<sup>2</sup> através da CLC, com as direções dos ventos cruzando as isóbaras, formando um pequeno ângulo na direção da baixa pressão. Na porção intermediária da CLC, frequentemente encontramos ventos com velocidades e direções aproximadamente constantes. Próximo a superfície, esta velocidade diminui

<sup>2</sup> subgeostrófica = abaixo dos níveis geostróficos.

gradativamente até zero, resultando um perfil aproximadamente logarítmico na altura, dentro da camada superficial.

A maioria das fontes poluidoras está próxima a superfície. Desta forma, a concentração de poluentes pode aumentar na CLC. Os poluentes são transportados pelos turbilhões ("eddies") e pelas termas.

Ao longo do dia as termas alcançam alturas cada vez maiores. Por outro lado, a existência de nuvens reduz a insolação ao nível do solo, acabando por reduzir a intensidade das termas. Nestes dias a CLC pode exibir um crescimento menor que em outros e até mesmo tornar-se não turbulenta ou até estratificada se as nuvens forem suficientemente espessas.

Do que foi visto, podemos definir a camada limite convectiva (CLC) como sendo aquela região da atmosfera que estende-se do solo ( $z \approx 0$ ) até a base da primeira inversão elevada ( $z \approx z_i$ ) e é caracterizada por uma forte mistura vertical, impulsionada pelo fluxo de calor turbulento positivo. Várias investigações numéricas e experimentais revelaram a estrutura detalhada desta camada limite e mostraram que os parâmetros de escalas mais importantes na sua descrição são  $z_i$  (altura da base da primeira inversão) também denominada altura da CLC, e  $w_*$ , que é a escala de velocidade convectiva, sendo definida como:

$$w_* = [ (g/\theta) \overline{(w'\theta')}_0 z_i ]^{1/3}, \quad (2.1.1)$$

onde,  $\overline{(w'\theta')}_0$  é o fluxo de calor turbulento superficial,  $\theta$  é a temperatura potencial média e  $g$  a força da gravidade.

Na CLC, o desvio padrão das velocidades turbulentas nas direções transversal e vertical à do vento médio,  $\sigma_v$  e  $\sigma_w$ , respectivamente, na região acima da camada limite superficial (CLS) são proporcionais a  $w_*$ . A altura da CLS, que normalmente encerra a

turbulência de origem mecânica, é de  $z \approx |L|$ , onde  $L$  é o comprimento de Monin-Obukhov definido por:

$$L = - u_*^3 / [\kappa (g/\theta) (\overline{w'\theta'})_0] . \quad (2.1.2)$$

Aqui  $u_*$  é a velocidade de fricção na superfície e  $\kappa$  é a constante de von Kármán. Para uma CLC bem desenvolvida,  $|L| \approx 10\text{m}$  (Panofsky & Dutton, 1984).

Como a maioria dos turbilhões energéticos na CLC tem dimensões  $z_i$ , a escala de tempo relevante para a difusão é proporcional a  $z_i/w_*$ . Esta escala de tempo é aproximadamente o tempo necessário para que os poluentes, depois do abandono, tornem-se bem misturados através da profundidade da CLC. Esta interpretação auxilia a compreensão da definição de distância de viagem adimensional  $X$ , mostrada abaixo, onde  $x$  é a distância real da fonte poluente e os outros parâmetros já foram definidos anteriormente.

$$X = \frac{x/\bar{u}}{z_i/w_*} = \frac{xw_*}{z_i \bar{u}} . \quad (2.1.3)$$

## 2.2 Camada Residual - CR

Por volta de meia hora antes do por do sol, cessa a formação de termas, levando ao decaimento da turbulência convectiva. Durante a noite, na ausência da advecção, traços passivos dispersados na CLC durante o dia permanecerão na camada residual (CR). A CR é estratificada neutralmente, sendo que o resultado disso é que a intensidade da turbulência é praticamente igual para todas as direções. Em vista disto, as plumas de fumaça emitidas na CR tendem a dispersarem-se igualmente em todas as direções,

originando o perfil em forma de cone na saída das chaminés. Os poluentes podem, muitas vezes, reagir com outros constituintes durante a noite, originando novos compostos.

### 2.3 Camada Estável Noturna - CLE

A medida que a noite avança, a porção abaixo da CR é transformada pelo seu contato com o chão em uma camada limite estável noturna (CLE), que se caracteriza por conter ar estaticamente estável e turbulência esporádica. Embora o vento ao nível do solo tornar-se frequentemente calmo e fraco, na noite, os ventos acima da camada podem sofrer acelerações até velocidades supergeostróficas (entre 10 a 30 m/s), ocasionando um fenômeno chamado jato de baixo nível ou jato noturno. O ar estaticamente estável tende a suprimir a turbulência, enquanto o jato noturno acentua o cisalhamento, gerando turbulência localizada. Como resultado, a turbulência pode ocorrer em alguns pontos ou períodos, provocando uma mistura localizada na camada limite estável. Durante os períodos sem turbulência o fluxo torna-se essencialmente desacoplado da superfície (ver figura 2.3).

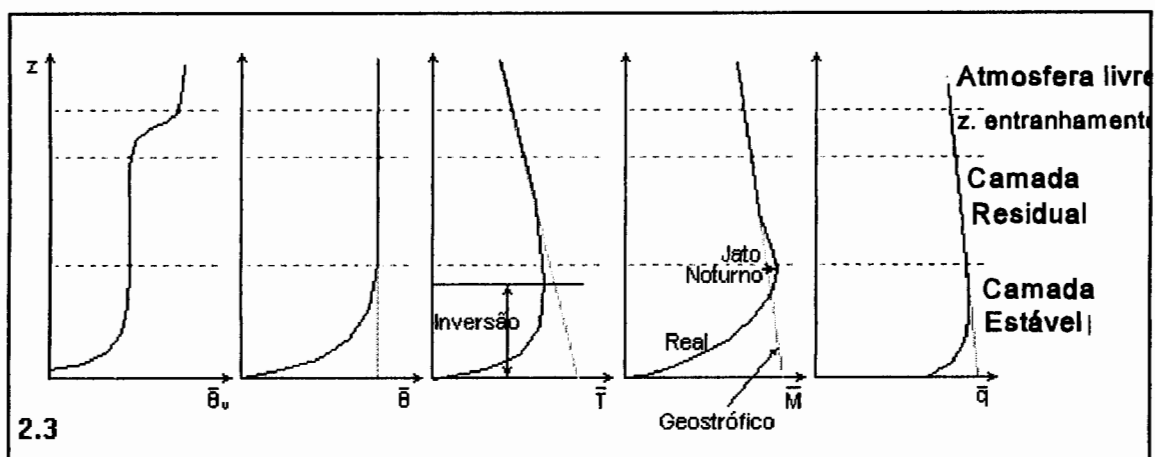


Figura 2.3 - Perfis típicos da Camada Estável Noturna das temperatura potencial virtual  $\bar{\theta}_v$ , da temperatura potencial  $\bar{\theta}$ , da temperatura absoluta média  $\bar{T}$ , da velocidade média do vento  $\bar{M}$  e da umidade específica  $\bar{q}$ .

Diferentemente da CLC diurna, o topo na CLE não é claramente definido, e se confunde com a CR acima (Venkatran e Wyngaard, 1988; Stull, 1988). O topo da CLE é então definido como a altura onde a intensidade de turbulência é uma fração muito pequena do seu valor na superfície (normalmente 5% dos valores superficiais).

A camada limite estável noturna (CLE) ainda é considerada um desafio para os pesquisadores. A baixa intensidade da turbulência, geralmente próxima aos limites de ruído dos instrumentos de medida, a intermitência e a coexistência de ondas de gravidade dificultam a modelagem simplificada desta camada. Além disto, a forte sensibilidade a não homogeneidade locais, geradas por terrenos ainda que levemente inclinados e o esfriamento radiativo em longos comprimentos de onda fazem com que diversos autores duvidem da possibilidade de uma modelagem simples para o regime turbulento estável. Apesar disto, os dados apresentados por Caughey et alii (1979) e analisados por Sorbjan (1986), bem como dados analisados por Nieuwstadt (1984) dos experimentos de Cabauw, exibem uma estrutura de similaridade local da CLE. Na estratificação estável as forças de empuxo suprimem o movimento turbulento de modo que os turbilhões tornam-se pequenos e independentes da distância à superfície. Assume-se que em um regime estável na presença de um vento forte, sobre um terreno homogêneo, a turbulência possa ser caracterizada como contínua, com os valores locais da tensão de Reynolds  $\tau(z)$ , do fluxo turbulento de calor  $\overline{w'\theta'}(z)$  e do comprimento local de Monin Obukhov  $\Lambda(z)$  dados, respectivamente por :

$$U_*^2(z) = \tau(z) = (1 - z/h)^{\alpha_1} u_*^2, \quad (2.3.1)$$

$$\overline{w'\theta'}(z) = (1 - z/h)^{\alpha_2} \overline{w'\theta'}_0, \quad (2.3.2)$$

$$\Lambda(z) = (1 - z/h)^{[(3/2 - \alpha_1) - \alpha_2]} L. \quad (2.3.3)$$

Nas equações anteriores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes empíricas que dependem do estado de desenvolvimento temporal, inclinação do terreno, da baroclinicidade e de outros fatores que influenciam a estrutura da CLE. A escala de comprimento  $h$ , que é fixada como a altura da CLE, expressa a profundidade da CLE turbulenta, ou seja, a turbulência existe mesmo na presença de fluxo negativo de calor.

As medidas realizadas logo após o por do sol em Minnesota, quando os processos evolutivos não estacionários na transição da CLC para a CLE ainda existem, sugerem valores  $\alpha_1=2$  e  $\alpha_2=3$ , já nas medidas realizadas 2 a 3h após o por do sol em Cabauw, em condições bem mais estacionárias,  $\alpha_1= 3/2$  e  $\alpha_2= 1$ .

Poluentes emitidos dentro da CLE se dispersam lentamente na vertical, e mais rapidamente na horizontal (efeito dos ventos).

Uma CLE também pode formar-se durante o dia, quando a superfície for mais fria que o ar acima dela, isto ocorre frequentemente durante a passagem de uma frente quente ou perto do litoral.

### 3            **MODELOS DE DIFUSÃO**

Pequenas partículas lançadas na atmosfera se dispersam ou se separam umas das outras pela influência da turbulência. Este fenômeno é conhecido como difusão turbulenta e pode-se dizer como primeira aproximação que ele tende a ser na direção da "diminuição do gradiente" da espécie a ser transportada. Entretanto, a difusão turbulenta na atmosfera não foi até agora, unicamente formulada. Ainda não foi proposto um modelo físico básico simples que explique todos os aspectos significantes do problema. Apesar disso, existem duas alternativas de aproximação, as quais algumas vezes se sobrepõe. Elas são a teoria de transporte por gradiente e os modelos estatísticos de dispersão. A difusão em um ponto fixo na atmosfera, de acordo com a teoria de transporte é proporcional à concentração local das espécies. Conseqüentemente ela pode ser dita euleriana, a medida que as propriedades do movimento do fluido são consideradas relativas a um sistema de coordenadas fixo espacialmente.

Por outro lado a abordagem estatística considera os movimentos seguindo as partículas de fluido individuais e pode ser descrita como lagrangeana.

Na abordagem por transferência de gradiente assume-se que a turbulência causa um movimento líquido de material no sentido da diminuição do gradiente de concentração de espécie, a uma taxa, que é proporcional à magnitude do gradiente. O fator de proporcionalidade é análogo ao coeficiente de viscosidade ou condutividade das leis de transferência de molecular de momentum ou calor em escoamentos laminares.

A equação diferencial, que é o ponto de partida da maioria dos tratamentos matemáticos de difusão a partir de fontes, é uma generalização da equação clássica da



condução de calor em um sólido e é, essencialmente, uma afirmação da conservação de um material suspenso.

Chamando-se a concentração local de  $c$  [massa por unidade de volume de fluido] e assumindo o fluido como incompressível, a equação da continuidade pode ser escrita :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left( \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} \right) , \quad (3.1)$$

onde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $c$  são representados como a soma de uma quantidade média e uma quantidade turbulenta e são substituídos na equação (3.1). Os termos são expandidos, obtendo-se:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial(\overline{u'c'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'c'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'c'})}{\partial z} \right) . \quad (3.2)$$

Os termos do fluxo turbulento podem ser parametrizados via aproximação de transporte por gradiente, de modo que a equação 3.2 passa ser escrita como :

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) . \quad (3.3)$$

Esta equação permite a separação da difusividade turbulenta nas direções dos componentes, no caso da difusão anisotrópica ou também variações espaciais destas difusividades. Se o coeficiente de difusão ( $K$ ) é constante e independente de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ ,

a difusão segue a lei de Fick e é chamada de Fickiana. Assim, no caso unidimensional, a lei de Fick para a difusão turbulenta é:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

Para um meio estacionário:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

que é a equação de difusão, unidimensional, dependente do tempo e sem advecção.

No caso com transporte, a equação (3.4) pode ser reescrita da forma:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

Onde há transporte por advecção em uma só dimensão, com  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ . O primeiro termo do lado esquerdo representa a alteração da concentração média em um ponto selecionado fixo no espaço. O segundo termo representa a advecção da concentração média pela velocidade média  $\bar{u}$ . Se  $\bar{u}$  é zero, a equação se reduz à equação (3.5). Entretanto, a mesma equação resulta ao mover o sistema de coordenadas ao longo do fluxo a uma velocidade média  $\bar{u}$ . Considerando-se uma fonte puntual e medindo-se a concentração relativamente ao centro do ponto, a solução resultante é idêntica à do caso estacionário.

Para resolver a equação (3.4), é necessário especificar as condições de contorno para a fonte puntual de poluente (Lyons e Scott, 1990), ou seja :

- (i) a concentração em todos os pontos tende a zero com o passar do tempo ( $t \rightarrow \infty$ ) após a largada do poluente.  $\bar{c} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  ( $-\infty < x < +\infty$ )
- (ii) a concentração é zero para todos os pontos exceto a fonte quando  $t \rightarrow 0$ .  
 $\bar{c} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$  ( para todo  $x$  exceto  $x=0$  )
- (iii) A massa total de poluente presente é igual a quantidade liberada.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{c} dx = Q \quad , \quad (3.7)$$

desta forma  $Q$  é a intensidade da fonte, ou seja, é o total liberado de  $\bar{c}$  a partir da fonte localizada em  $x=0$ .

A solução deste problema é uma função Gaussiana de forma geral:

$$\bar{c} = \frac{1}{at^{1/2}} \exp\left(-\frac{bx^2}{t}\right) \quad , \quad (3.8)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes determinadas a partir das condições de contorno.

A solução da equação (3.4) para uma fonte puntual instantânea de intensidade  $Q$  é

$$\frac{\bar{c}}{Q} = \frac{1}{(4Kt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right) \quad . \quad (3.9)$$

Esta solução se aplica a uma atmosfera onde  $\bar{u}$  é constante e as coordenadas são tomadas conforme estivessem se movendo com o vento médio  $\bar{u}$  ; além disso as velocidades médias nas outras direções cartesianas são iguais a zero.

A equação (3.9) pode ser estendida para três dimensões:

$$\frac{\bar{c}(r,t)}{Q} = \frac{1}{(4\pi Kt)^{3/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{4Kt}\right) . \quad (3.10)$$

Com  $K = K_x = K_y = K_z$  e  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Generalizando para o caso da difusão não isotrópica (isto é  $K_x \neq K_y \neq K_z$ ):

$$\frac{\bar{c}(x,y,z,t)}{Q} = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}(K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{4t} \left( \frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z} \right)\right] . \quad (3.11)$$

Estas equações representam o bloco fundamental da teoria Gaussiana ou de Fick. A integração espacial de uma fonte puntual instantânea produz equações para fontes de volume instantâneo, enquanto que a integração no tempo dá uma solução para uma fonte puntual contínua (Pasquill, 1974).

A suposição de uma difusividade turbulenta constante, embora de uso considerável na atmosfera livre, dificilmente pode ser aplicado a camada limite planetária devido ao cisalhamento pronunciado do vento médio e da grande variação dos gradientes de temperatura vertical devido ao fluxo de calor.

A equação (3.3) pode ser simplificada se assumirmos condições estacionárias, tomando-se uma fonte infinita, linear, transversal ao vento, para a qual efetivamente:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) = 0 , \quad (3.12)$$

com vento médio soprando ao longo do eixo x de forma que  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ , e assumindo que o transporte em x pelo fluxo médio excede em muito o fluxo turbulento naquela direção. Sob estas condições a equação (3.3) se reduz a :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}) \quad (3.13)$$

Para a atmosfera mais baixa, em condições adiabáticas, tem-se observado que a velocidade do vento varia com o logaritmo da altura. Mesmo esta variação revelou-se matematicamente intratável para uso na equação acima. Uma forma mais tratável pode ser obtida adotando-se uma forma de lei de potência do perfil do vento (Lyons e Scott, 1990), onde se assume que :

$$K_z(z) = K_1(z/z_1)^n \quad (3.14.a)$$

e

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_1(z/z_1)^m \quad (3.14.b)$$

onde  $\bar{u}_1$  e  $K_1$  são valores de  $\bar{u}$  e  $K_1$  a uma altura de referência fixada em  $z_1$ . Desta forma a equação (3.14.1) é analiticamente solucionável. Em particular, para um vento constante em z ( $m=0$ ) e K variando linearmente com a altura ( $n=1$ ). Desta forma:

$$K = \kappa u_* z \quad (3.15)$$

A solução da equação (3.13) é :

$$\bar{c} = \frac{Q}{\kappa u_* x} \exp\left(\frac{-\bar{u} z}{\kappa u_* x}\right) \quad (3.16)$$

Por outro lado, a abordagem estatística estuda a história do movimento de uma parcela de fluido individual e tenta determinar a partir disto as propriedades necessárias para representar a difusão.

### 3.1 Modelo De Pluma Gaussiano

A função de distribuição Gaussiana ou normal fornece uma solução fundamental para a equação de difusão de Fick, e tem sido assumida como um modelo de difusão com fonte contínua por muitos pesquisadores.

A combinação da suposição Gaussiana com a expressão para a difusão de partícula média quadrada mostra que:

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \overline{y^2} = 2Kt \\ \sigma_y^2 &= \sigma_v^2 t^2 \\ \text{ou} \\ \sigma_y &= \sigma_v t f_i(t/Tl),\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

onde  $f_i$  é uma função de difusão universal. Estas equações formam a base da maioria das formulações práticas para a difusão de pluma .

Estritamente falando, o modelo de difusão Gaussiano se aplica somente para tempos grandes de difusão e condições estacionárias, homogêneas, para a qual o problema de difusão pode ser estabelecido na forma da simples equação diferencial de Fick. Ainda assim, a função Gaussiana, como Batchelor (1949) conjecturou, pode fornecer uma descrição geral de uma pluma de difusão média, devido a natureza essencialmente aleatória deste fenômeno, por analogia com o teorema estatístico do limite central.

Assume-se uma fonte puntual instantânea de material de intensidade  $Q$  [gramas], se difundindo em três direções; a concentração  $c$  [g/m<sup>3</sup>] como função de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , coordenadas cartesianas usuais, e do tempo  $t$ . Assumindo-se também que a fonte está em uma origem fixa e  $t$  é o tempo de viagem de uma pluma a partir do seu relaxamento instantâneo. Se  $\sigma^2$  é a variância da distribuição da nuvem de dispersão e for assumido que a difusão é isotrópica, a fórmula Gaussiana para uma fonte puntual instantânea é:

$$\bar{c}(x,y,z,t) = \frac{Q}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.1.2)$$

*onde,*

$$r^2 = (x - \bar{u}t)^2 + y^2 + z^2 .$$

Na atmosfera, a difusão não é isotrópica e sob esta condição a solução Gaussiana se torna:

$$\bar{c}(x,y,z,t) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) . \quad (3.1.3)$$

O caso de uma chaminé emitindo poluente pode ser aproximado considerando-se a pluma contínua como uma superposição de um grande número de puffs. Ou seja, a pluma é considerada como resultante da adição de um número infinito de puffs médios sobrepostos, carregados ao longo do eixo  $x$  pelo vento médio  $\bar{u}$ . Cada puff é composto, na realidade, pela média de um conjunto de puffs com tempo de difusão  $t$ . Matematicamente isto corresponde a integração da equação (3.1.3) com respeito a  $t$ , a partir de 0 a  $\infty$ . Esta integração não é conveniente, porque, como os valores de  $\sigma$  dependem de  $t$  e também de  $x$ , ( $x = \bar{u}t$ ) De um modo prático, a difusão ao longo do eixo  $x$  é negligenciada pela comparação com o transporte bruto (em grande quantidade) ao

longo do eixo x, pelo vento médio. Com esta simplificação a integração da equação (3.1.3) fica:

$$\bar{c}(x,y,z) = \frac{Q}{2\pi \sigma_y \sigma_z u} \exp\left(-\left(\frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)\right), \quad (3.1.4)$$

onde Q é agora a intensidade da fonte contínua [g/s], e  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  podem ser considerados funções de x.

Apesar da formulação simples dos modelos gaussianos, eles foram usados amplamente e frequentemente com bons resultados. Embora assumindo  $K_z$  constante com a altura, não se assume que ele seja constante com o tempo ou distância de viagem. Ou seja, a formulação gaussiana está apta a especificar corretamente um aumento na difusividade a medida que a pluma cresce, devido a ampla faixa de turbilhões atuando na dispersão da pluma.

Os modelos gaussianos frequentemente dão boas estimativas para os níveis de concentração de poluição, mas o seu uso é limitado para outras situações como ventos leves ou condições variáveis. Os parâmetros de dispersão  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  mostram um espalhamento considerável nos estudos descritos acima. Os modelos gaussianos serviriam bem para áreas com rugosidade de superfície constante, fazendo-se  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  dependentes dela. Entretanto para áreas com rugosidade de superfície variável, quando não se pode ocupar o modelo gaussiano, outros métodos devem ser encontrados.



### 3.2 Modelos K

Os modelos da teoria K são baseados na equação abaixo.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad , \quad (3.2.1)$$

que assume que a hipótese do transporte de gradiente é válida. Ou seja, os fluxos turbulentos são assumidos como proporcionais ao gradiente médio de  $c$ :

$$\overline{w'c'} = -K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad . \quad (3.2.2)$$

Estes fluxos turbulentos surgem da derivação da equação do transporte de gradiente quando se usa suposições da forma ( $C = \bar{c} + c'$ ), advindo daí o aparecimento de termos incógnitos de segunda ordem como  $\overline{w'c'}$ ,  $\overline{v'c'}$  na equação da continuidade. Pela hipótese em (3.22), agora o valor médio de  $c$  é a única incógnita da equação uma vez que a difusividade  $K_z$  é assumidamente conhecida, por isso esse método é um fechamento de primeira ordem.

É importante ressaltar que certas escalas de tempo estão implícitas na equação da difusão. Os componentes do vento médio ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ) e a concentração média representam média ao longo da escala espacial. As flutuações de velocidade com escalas de tempo e espaço menores que estes valores são considerados turbulência e estão implicitamente incluídos nos coeficientes K. Existem algumas objeções teóricas ao uso desta equação; Corrsin (1974) apud Lyons e Scott (1990), estabeleceu que em uma camada limite simulada em laboratório, as escalas de tempo e comprimento da ação do

transporte deveria ser suficientemente uniforme e pequena comparada com as escalas de tempo e comprimento da variação das componentes médias dos gradientes de uma propriedade sujeita a tal transporte. Ele notou posteriormente que a partir de similaridades básicas de Camada limite estratificadas neutralmente tanto em laboratório como na atmosfera não seria de surpreender se as mesmas condições não fossem violadas na atmosfera também. Apesar desta objeção o método é conhecido por dar bons resultados para a transferência de momentum na camada limite atmosférica (Lyons e Scott, 1990).

Uma outra objeção teórica é que a seção transversal da pluma afetada por turbilhões maiores não pode ser descrita pela relação transferência de gradiente. Para uma atmosfera estável, entretanto, os turbilhões são pequenos, especialmente quando ocorre o desacoplamento da camada superficial, de forma que a relação transferência de gradiente pode ser usada justificadamente.

A flexibilidade do modelo K pode ser apreciada imaginando-se que  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$  podem ser especificados como uma função não somente da estabilidade, mas também da rugosidade da superfície, do tempo e do espaço. Neste caso as soluções não podem ser encontradas analiticamente, e sim por métodos numéricos.

Vários modelos já foram propostos simplificando um ou outro termo.

A vantagem do modelo K é que em condições realísticas (variação tridimensional dos campos de vento e difusividade) podem ser simulados. Simplificações apropriadas podem ser introduzidas desprezando-se um ou mais termos. A desvantagem deste modelo é que ele não reconhece um aumento de  $K_z$  com o tempo de viagem da pluma, em virtude do aumento do tamanho da pluma. Assim, perto da fonte de dispersão ele é superestimado, embora sob condições estáveis isto é minimizado devido ao pequeno tamanho dos turbilhões. A equação da difusão e da advecção, na qual os fluxos turbulentos de matéria são parametrizados como proporcionais aos gradientes de concentração, a teoria K, é uma aproximação frequentemente usada no estudo do transporte e difusão turbulenta de poluentes na atmosfera. Embora este modelo não seja estritamente válido na descrição do

processo de difusão turbulenta (Hunt 1982) ela tem sido empregada com relativo sucesso por vários pesquisadores.

No caso de poluentes abandonados por fontes pontuais contínuas elevadas, o processo de difusão turbulento em regiões próximas a fonte é distinto daquele que ocorre a grandes distâncias.

Não é necessário o uso de simulação numérica para a resolução da equação de difusão que tem solução analítica. Com o uso do  $K$  apropriado.

É muito bem conhecido que a equação da difusão turbulenta assumida pela teoria  $K$  descreve a dispersão de um aditivo passivo de concentração e é estritamente válida para variações pequenas de  $C$  ao longo da distância comparadas às dimensões dos vórtices dominantes. Assim, por exemplo, não descreve com precisão o comportamento de uma pluma perto da fonte quando os gradientes são grandes. Seu uso em uma camada limite convectiva, instável é evitado. Variações rápidas na concentração conduzem a fenômenos interessantes, por exemplo, fluxos em sentido contrário dos gradientes.

A teoria  $K$  ainda continua ser bem empregada como um meio prático na estimativa de dispersão de contaminantes na atmosfera. Quando as condições estacionárias prevalecem, o problema pode ser tratado do ponto de vista da teoria de Sturm Liouville. Para camadas estáveis, onde a teoria  $K$  pode ser esperada ser feita com sucesso, uma dependência de altura parabólica para o coeficiente de difusão é frequentemente assumida, mas um perfil quadrático também tem sido usado.

### **3.3 Outros Modelos**

Detalhes do processo de modelagem tem sido muito explorados em conferências e "workshops" e em inúmeros artigos e experimentais. Isto considera uma avaliação prática do desvio padrão com a aproximação estatística, modelo de pluma gaussiano e

teoria K. Efeitos extremos, de não gradiente, simulados usando um modelamento de ordem de fechamento superior de difusão na atmosfera tem recebido muita atenção. Nesta aproximação por transferência de gradiente não é feita, mas as equações do "momentum" superiores são usadas. Por exemplo, em um fechamento de 2ª ordem, uma segunda equação de "momentum", expressando a derivada total no tempo do fluxo em termos de outra, de 2ª e 3ª "momentum" da flutuação de turbulência, é usada. A questão é fazer sua solução possível através de um modelamento apropriado destes outros termos.

Os modelos de fechamento de segunda ordem têm-se mostrados como fechamentos mais apropriados para a simulação numérica da camada limite planetária. Eles agrupam a facilidade numérica com a descrição física mais básica dos processos turbulentos. Vários modelos de fechamento simulam a CBL, mas para a SBL é uma coisa mais difícil. Isto certamente explica porque a SBL tem sido numericamente menos simulada do que a CBL. A maior dificuldade é fazer a escolha adequada da escala de turbulência principal que vai levar a uma adequada parametrização dos termos indeterminados nas equações para a evolução dos momentos de segunda ordem. O ponto fraco comum aos modelos de fechamento é a escolha adequada de comprimento característicos e no fato em que se admite que um comprimento de escala é suficiente genericamente para uma descrição adequada do fenômeno de transporte turbulento. Alguns autores mesmo duvidam sobre a possibilidade de determinação de escala de comprimento característica adequada para finalidade geral. Este fato, indica a necessidade de um critério mais geral para suportar uma seleção adequada nos referidos comprimentos de escala.

Modelos numéricos de Mesoscala tem sido usados para especificar a consistência física dos campos de fluxo e dispersão de poluentes incorporados, isto, através de técnicas de difusão de passo randômico. Tais modelos superam muitas das limitações da teoria gaussiana mas requerem instalações computacionais extensas e até agora não foram aceitas como aplicação oficial.

Uma alternativa de aproximação para resolver os problemas de difusão atmosférica são fornecidos por métodos de colocação pseudo espectral e ortogonal.

Elas usam essencialmente a teoria K e resolvem a equação (3.21). Embora bons avanços tenham sido encontrados com outros modelos, parece haver um grande número de dificuldades a superar, tais como dificuldades numéricas, e o uso de várias condições de contorno aperiódicas. Tais modelos não parecem ter mais potencial que os modelos de fechamento de ordem superior.

À parte das aproximações teóricas baseadas na equação da conservação da massa, existem muitos modelos empíricos que são específicos de cada localidade.

## 4 DESENVOLVIMENTO DO PROBLEMA

A difusão de contaminantes passivos é descrita pela equação da conservação da massa. Um caso especial ocorre na dispersão de uma fonte área instantânea, isto é, a dispersão vertical de uma distribuição de concentração média de área, ficando a equação simplificada para:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right), \quad 0 < z < h; \quad (4.1)$$

Aqui  $\bar{c}$  representa a concentração média de poluentes,  $Q$  a intensidade da fonte área de altura  $h_f$ ,  $h$  é a altura da Camada Limite Estável e  $K_{zz}$  o coeficiente de difusão obtido por Degrazia & Moraes(1992) como:

$$\frac{K_{zz}}{u_* h} = \frac{0.33 (1 - z/h)^{1.1} z/h}{1 + 3.7 (z/h) (h/\Lambda)} \quad (4.2)$$

Como hipótese básica deste trabalho, supõe-se  $K_{zz}$  constante para permitir a resolução da equação (4.1) de forma analítica, por analogia com a equação do calor (Özisic, 1980). Considerou-se a atmosfera na Camada Limite Estável (CLE), de altura  $h$ , como sendo uma superfície multicomposta conforme apresentado na figura (4.1). A atmosfera é tomada como uma parede composta por diversos meios  $i$  (com  $i$  variando de

1 até  $M=40$ ). O problema de difusão vertical é resolvido sendo a fronteira constituída da superfície da Terra e da altura da camada limite para além das quais, por suposição não há passagem de qualquer poluente. São portanto fronteiras isoladas. Em função de problemas computacionais dividiu-se a altura total ( $h=400\text{m}$ ) em quarenta regiões de 10m cada, imaginando-se também contato perfeito entre elas. A questão da variação do parâmetro  $K_{zz}$  é aí contornada tomando-se um  $K_{zz}$  médio para cada região. Em vista disso, passaremos a chamar o coeficiente de difusão  $K_{zz}$  médio de  $K_i$ , uma vez ser ele dependente do meio considerado.

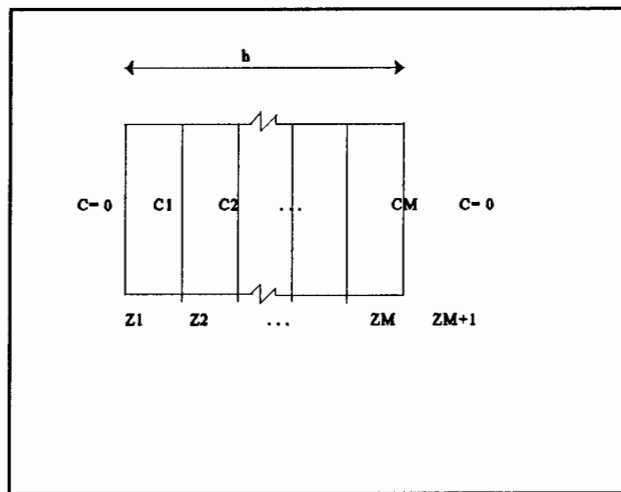


Figura 4.1 - Desenho esquemático do modelo

A equação básica que descreve este problema de difusão da poluição é escrita como:

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2}(z,t) = \frac{1}{K_i} \frac{\partial C_i}{\partial t}(z,t) \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

com  $i = 1, 2, \dots, M$ , ( $M = 40$ ).

Sujeita as seguintes condições de contorno:

$$K_i \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h , \quad (4.3.a)$$

$$C_i = C_{i+1} , \quad (4.3.b)$$

$$K_i \frac{\partial C_i}{\partial z} = K_{i+1} \frac{\partial C_{i+1}}{\partial z} , \quad (4.3.c)$$

e à condição inicial:

$$C_i(z,0) = Q \delta(z-hf) . \quad (4.3.d)$$

Esta condição inicial representa uma emissão instantânea de uma fonte área, onde  $C_i(z,0)$  representa a concentração média de poluentes no instante  $t$  igual a zero,  $Q$  a intensidade da fonte área lançada a uma altura  $hf$ ,  $\delta$  é a função generalizada delta de Dirac e  $h$  é a altura da Camada Limite Estável (CLE).

A função generalizada delta de Dirac, que aparece na condição inicial não será aproximada neste trabalho porque o método de solução proposto é analítico, o que não ocorre no caso em que a solução é encontrada por método numérico (Campos Velho, 1992).



Aplicando-se a Transformada de Laplace ao problema (4.3) na variável temporal como propõe Vilhena e Sefidvash (1990) obtemos :

$$\frac{s}{K_i} C_i(z,s) - \frac{1}{K_i} C_i(z,0) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_i(z,s) \quad , \quad (4.4)$$

$$K_i \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h \quad , \quad (4.4.a)$$

$$C_i = C_{i+1} \quad , \quad (4.4.b)$$

$$K_i \frac{dC_i}{dz} = K_{i+1} \frac{dC_{i+1}}{dz} \quad , \quad (4.4.c)$$

$$C_i(z,0) = Q \delta(z-hf) \quad . \quad (4.4.d)$$

Definindo-se  $R_i$  e  $R_a$  como:

$$R_i = \pm \sqrt{s/K_i} \quad \text{e} \quad R_a = \pm \sqrt{s.K_i} \quad ,$$

e  $i'$  como sendo a seção onde ocorre a emissão.

Então a solução do problema (4.4) pode ser expressa como:

$$C_i(z',s) = A_i e^{-R_i z'} + B_i e^{R_i z'} + \frac{e^{-R_i z'}}{2R_a} \int_{z_i}^z C_i(z,0) e^{-R_i z} dz$$

$$- \frac{e^{R_i z'}}{2R_a} \int_{z_i}^z C_i(z,0) e^{R_i z} dz \quad (z \in i', z > hf) , \quad (4.5)$$

e

$$C_i(z,s) = A_i e^{-R_i z} + B_i e^{R_i z} \quad (z \in i' e z \leq hf, z \notin i') . \quad (4.6)$$

Cumpramos observar que uma das vantagens do Método Analítico decorre do fato de que as integrais que aparecem na equação (4.5) podem ser calculadas analiticamente usando-se a propriedade da função generalizada delta de Dirac, dispensando assim a necessidade de aproximação da mesma, o que seria necessário se fosse utilizado um Método Numérico.

Aplicando-se a condição inicial, descrita como:

$$\begin{aligned} C_{i'} &= 0 & z &\leq hf \\ C_{i'} &= Q\delta(z - hf) & z &> hf \\ C_i &= 0 & i &\neq i' \end{aligned} \quad (4.7)$$

na solução (4.5); e valendo-se ainda da propriedade de integração da função generalizada delta de Dirac:

$$\int_{z_i}^z C_{i'}(z',0) e^{-R_i z'} dz' = -Q e^{-R_i hf} \quad (z \in i' e z > hf) . \quad (4.8)$$

E da mesma forma:

$$\int_{z_i}^z C_i(z', 0) e^{R_i z'} dz' = -Q e^{R_i hf} \quad (z \in i' \text{ e } z > hf) \quad (4.9)$$

Obtêm-se desta maneira:

$$C_i(z', s) = A_i e^{-R_i z'} + B_i e^{R_i z'} + \frac{Q}{2R_i} (e^{-R_i(z-hf)} - e^{R_i(z-hf)}) \quad (4.10)$$

Nesta equação o último termo do lado direito corresponde à solução particular (SP) do problema proposto e os dois primeiros à solução homogênea.

Agora aplicando-se as condições de interface (4.4.b) e (4.4.c), resulta o seguinte sistema linear para coeficientes constantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & b_{12} & a_{22} & b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{13} & b_{13} & a_{23} & b_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} & b_{24} & a_{34} & b_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{25} & b_{25} & a_{35} & b_{35} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,2n-1} & b_{n-1,2n-1} & a_{n,2n-1} & b_{n,2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,2n} & b_{n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \vdots \\ A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I^* \\ I^{**} \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

onde os elementos da matriz e vetor são definidos como:

$$I^* = I_{2i} = -SP$$

$$I^{**} = I_{2i+1} = SP'$$

$$a_{11} = -R_1 \exp(-R_1 Z_1)$$

$$b_{11} = R_1 \exp(-R_1 Z_1)$$

$$a_{12} = a_{24} = a_{n-1,2n-2} = \exp(-R_{n-1}, Z_n)$$

$$b_{12} = b_{24} = b_{n-1,2n-2} = \exp(-R_{n-1}, Z_n)$$

$$a_{22} = a_{34} = a_{n,2n-2} = -\exp(-R_n, Z_n)$$

$$b_{22} = b_{34} = b_{n,2n-2} = -\exp(R_n, Z_n)$$

$$a_{13} = a_{25} = a_{n-1,2n-1} = -K_{n-1}.R_{n-1}.\exp(-R_{n-1}, Z_n)$$

$$b_{13} = b_{25} = b_{n-1,2n-1} = K_{n-1}.R_{n-1}.\exp(R_{n-1}, Z_n)$$

$$a_{23} = a_{35} = a_{n,2n-1} = K_n.R_n.\exp(-R_n, Z_n)$$

$$b_{23} = b_{35} = b_{n,2n-1} = -K_n.R_n.\exp(-R_n, Z_n)$$

$$a_{n,2n} = a_{40,80} = -R_{40}.\exp(-R_{40}, Z_{41})$$

$$b_{n,2n} = b_{40,80} = R_{40}.\exp(R_{40}, Z_{41})$$

$$SP = (Q/2Ra) . (\exp(-R_i(Z_{i+1} - hf)) . -\exp(R_i(Z_{i+1} - hf)))$$

$$SP' = (Q/2) . (\exp(-R_i(Z_{i+1} - hf)) . \exp(R_i(Z_{i+1} - hf)))$$

Então, como se vê, têm-se, neste caso, uma matriz de 80x80 elementos e dois vetores com 80 elementos cada.

Este sistema linear tem a variável  $s$  complexa participando do cálculo dos coeficientes  $A_i$  e  $B_i$ . Estes coeficientes devem ser colocados nas equações (4.4) e a função

$C_i(z,t)$ , solução do problema (4.3), é encontrada pela fórmula de inversão da Transformada de Laplace. Neste trabalho utiliza-se o cálculo desta integral de inversão por quadratura Gaussiana, substituindo-se a variável complexa  $s$  pelos valores dos pontos da Quadratura.

A solução do problema é conseguida através da fórmula de Quadratura Gaussiana apropriada, que segundo Heydarian e Mullineaux (1989), é:

$$C_i(z,t) = \sum_{n=1}^8 A_n \frac{P_n}{t} \overline{C}_i(z, \frac{P_n}{t}) \quad (4.11)$$

Com isto chega-se às soluções mostradas abaixo :

$$C_i(z,t) = \sum_{n=1}^8 A_n \frac{P_n}{t} ( A_i e^{-\sqrt{P_n/tK_i} z} + B_i e^{\sqrt{P_n/tK_i} z} ) \quad (4.12)$$

e

$$C_i(z,t) = \sum_{n=1}^8 A_n \frac{P_n}{t} [ A_i e^{-\sqrt{P_n/tK_i} z'} + B_i e^{\sqrt{P_n/tK_i} z'} + \frac{Q}{2\sqrt{P_n K_i' / t}} ( e^{-(z'-hf)\sqrt{P_n/tK_i'}} - e^{(z'-hf)\sqrt{P_n/tK_i'}} ) ] \quad (4.13)$$

Sendo que a expressão (4.13) é válida para a região onde ocorre a emissão e com um  $z' > hf$ .

Com esta substituição de  $s$  por  $P_n/t$ , pode-se agora calcular a concentração  $C_i(z,t)$ . Os termos  $A_n$  e  $P_n$  já se encontram tabelados para até  $n=30$  em Stroud e Secret (1966). Neste trabalho foi usado  $n=8$ , que apresenta comprovadamente os melhores resultados (Barichello, 1992; Vilhena e Barichello, 1991; Vilhena e Streck, 1992). Desta forma, fica claro que são necessárias somente oito inversões da matriz para calcular a concentração em qualquer tempo ou posição.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Partindo-se do modelo de difusão descrito no capítulo 4, estudou-se o processo de transporte turbulento ocorrendo em dois estágios da evolução temporal de uma camada limite estável noturna. Analisou-se aqui um caso de transporte turbulento para o início da noite e um caso de transporte turbulento para tempos mais avançados da noite.

Para simular o primeiro caso escolhe-se na equação (4.2) os seguintes valores  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = 3$ , extraídos das medidas de Minnesota, quando processos evolutivos não estacionários ainda estavam presentes. As medidas em Minnesota foram realizadas durante o período de transição de uma camada limite convectiva para uma estável.

No segundo caso, escolheu-se na equação (4.2) os parâmetros  $\alpha_1 = 3/2$  e  $\alpha_2 = 1$ , resultados de medidas realizadas em Cabauw, quando a CLE já tinha atingido condições mais estacionárias. As medidas em Cabauw foram realizadas aproximadamente três horas após o pôr do sol, evitando-se assim o período de transição. Quando se fala em processos estacionários, é no sentido de que os fluxos turbulentos não dependam do tempo.

Os coeficientes de dispersão estacionários, usados neste trabalho, determinados a partir dos dados dos experimentos de Cabauw e Minnesota estão representados graficamente na figura (5.1). Observa-se que a camada limite planetária superficial de Minnesota e a de Cabauw apresentam a mesma intensidade de turbulência vertical. Para regiões mais elevadas, o caráter mais neutro da camada limite de Minnesota exhibe uma maior intensidade da turbulência.

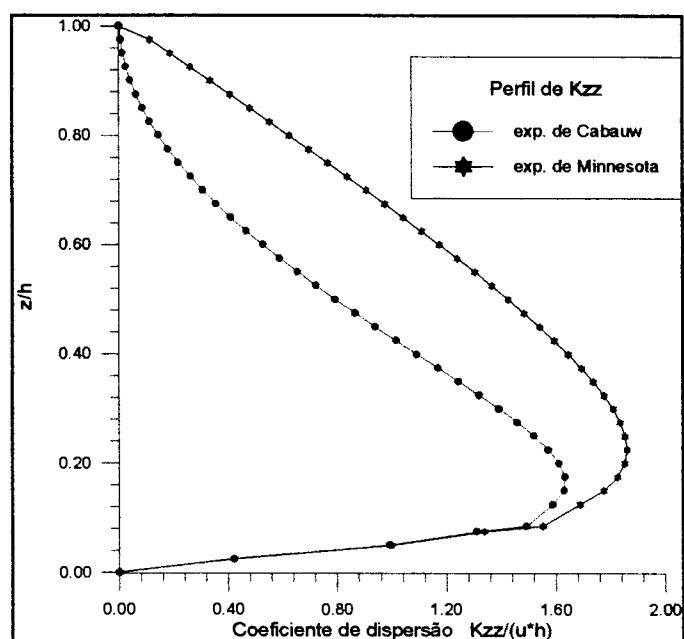


Figura 5.1 - Perfil médio de  $K_{zz}$  para os experimentos de Cabauw e Minnesota.

Para simular os casos descritos abaixo, os seguintes parâmetros foram utilizados:

- $L = 116 \text{ m}$  - dado obtido a partir do experimento de Minnesota ;
- $Q = 400 \text{ g/m}^2$  - a intensidade da fonte área;
- $h = 400 \text{ m}$  - a altura da CLE, obtido dos dados dos experimentos de Cabauw e Minnesota;
- $u_* = 0,31 \text{ m/s}$  - a tensão superficial, extraída dos dados dos experimentos de Cabauw e Minnesota;

As figuras 5.2 e 5.3 mostram a evolução temporal do perfil vertical de concentração de contaminantes abandonados por uma fonte área, de altura 12,5m, localizada respectivamente, na camada limite estável de Minnesota e Cabauw. Observa-se que a concentração em ambas as figuras não é refletida a partir do topo das CLEs. Com o passar do tempo, o contaminante desloca-se de baixo para cima e preenche lentamente



a CLE. Este resultado é provocado pelo decréscimo gradual da turbulência à medida que o topo da camada limite é alcançado.

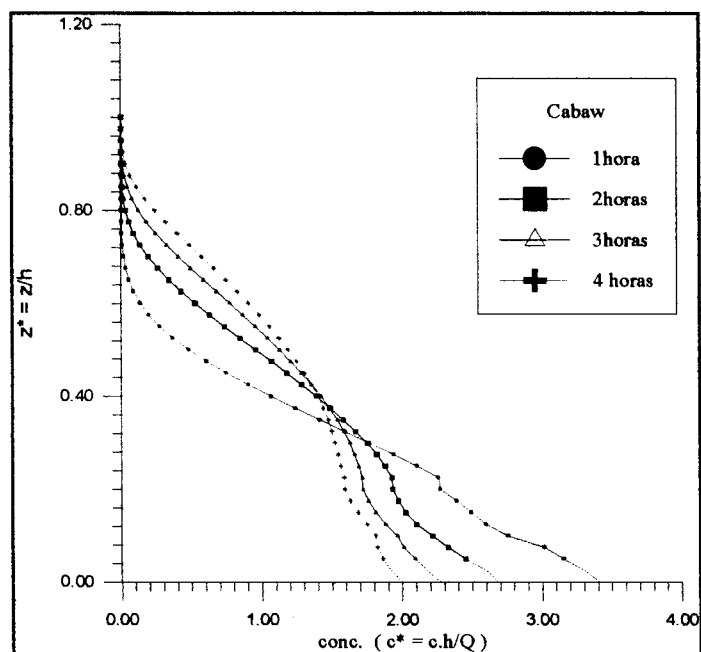


Figura 5.2 - Perfil vertical de concentração para diferentes tempos, fonte área a 12,5m com  $K_{zz}$  a partir de dados de Cabauw.

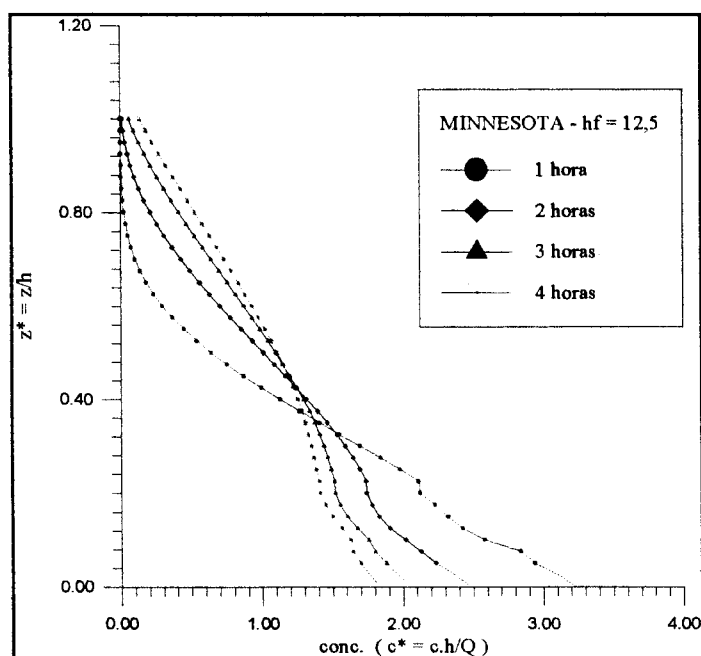


Figura 5.3 - Perfil vertical de concentração para diferentes tempos, fonte área a 12,5m e com  $K_{zz}$  a partir dos dados de Minnesota.

Os resultados próximos ao ponto de lançamento foram extrapolados e apresentados nestes gráficos e em outros que se seguem na forma pontilhada devido a singularidade gerada pela não aproximação da função generalizada delta de Dirac, neste método. A impossibilidade do uso de algoritmos universais para inverter a Transformada de Laplace é consequência do fato de que a transformada inversa não é estável sob certas perturbações consideráveis. Não se pode filtrar oscilações extremas ou comportamentos de pico (como no nosso caso) de uma função no tempo em termos de valores numéricos da função em  $s$  (Bellman e Roth, 1984).

Os perfis da escala de mistura turbulenta vertical  $l_w$  e da variância da velocidade vertical  $\sigma_w$ , tendem para zero em regiões próximas ao topo da CLE. As concentrações superficiais são maiores no caso de Cabauw. Este comportamento é provocado pelo fato de existir em Minnesota uma maior mistura turbulenta na metade superior da camada limite, ou seja, em Minnesota, diferentemente de Cabauw, a maior turbulência envia uma maior quantidade de poluentes para as regiões superiores da CLP, e conseqüentemente, a homogeneidade da concentração é obtida mais rapidamente para a camada limite de Minnesota.

Esta diferença no processo de mistura entre estes dois estágios de desenvolvimento da Camada Limite, torna-se mais evidente nas figuras 5.4 e 5.5, que exibem a evolução temporal da concentração para diferentes alturas. As figuras em questão, indicam claramente que o contaminante abandonado na CLP de Minnesota atinge mais rapidamente a homogeneidade do que aquele abandonado em Cabauw, como já foi visto nas figuras anteriores. Tanto para a CLP de Cabauw como para a de Minnesota, o processo de difusão turbulenta é relativamente lento quando comparado a processos de transporte em camadas limite neutra e instável, onde as escalas de tempo do transporte turbulento são menores. Percebe-se que a mistura vertical limitada no caso da CLE é a principal responsável pelo caráter não estacionário observado nos diferentes parâmetros nesta camada.

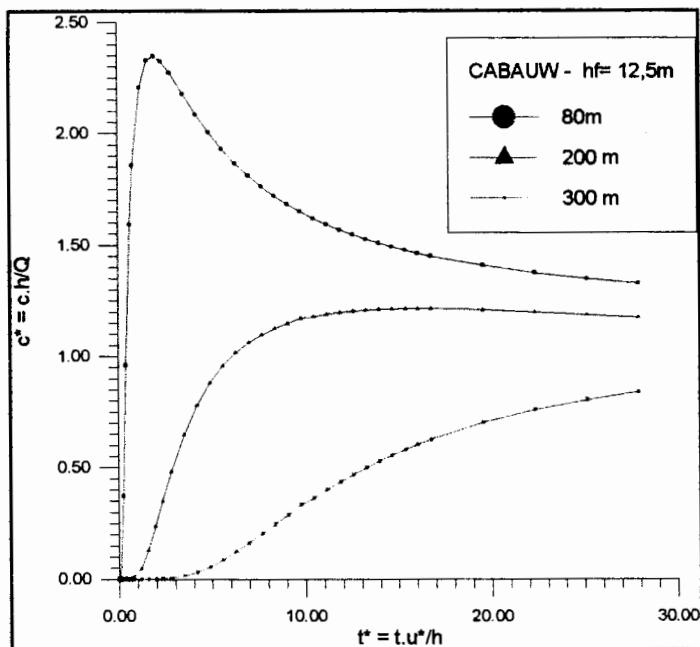


Figura 5.4 - Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 12,5 m do solo e  $K_{zz}$  a partir de Cabauw

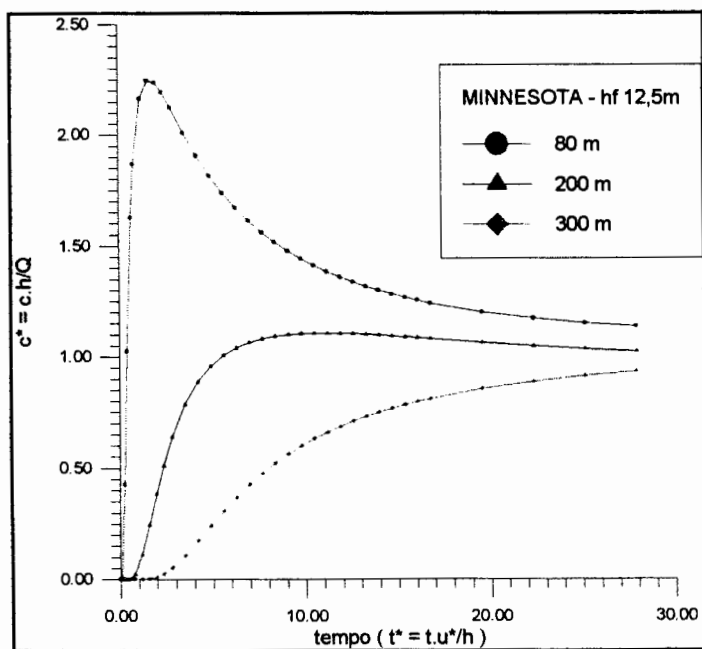


Figura 5.5 - Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 12,5m e  $K_{zz}$  a partir de Minnesota

Na figura 5.6 e 5.7, mostra-se o perfil vertical de concentração de contaminantes abandonados por uma fonte área localizada na altura de 300m na CLE de Cabauw. Observa-se que mesmo para grandes tempos o poluente tende a se manter na altura da fonte. Este comportamento pode ser atribuído ao pequeno tamanho dos turbilhões e à baixa intensidade da turbulência presente nestas alturas. Os contaminantes abandonados em regiões onde os gradientes  $dl_w/dz$  e  $d\sigma_w/dz$  são muito pequenos, difundem-se lentamente sob a influência dos pequenos turbilhões. Estes produzem um campo turbulento quase homogêneo de modo que apenas em grandes tempos, os contaminantes podem perceber o caráter mais difusivo e não homogêneo da turbulência presente em regiões mais baixas da CLE.

As figuras 5.8 e 5.9 expressam a evolução temporal do perfil vertical de concentração para uma fonte área localizada a 300m do solo. Observa-se mais uma vez, nas figuras que não há uma eficiente excursão de contaminantes no sentido das regiões inferiores da camada limite estável. Para o caso de Minnesota, representado na figura 5.9 o processo de difusão de contaminantes no sentido do solo, apesar de lento, chega a apresentar, para grandes tempos, um perfil homogêneo (em função da magnitude dos coeficientes de difusão envolvidos).

Os contaminantes abandonados em regiões elevadas da CLE, onde o gradiente de  $d\omega^2/dz$  é muito pequeno, difundem-se lentamente sob a influência dos pequenos turbilhões. Estes produzem um campo turbulento quase homogêneo de modo que as partículas de poluentes podem permanecer durante grandes tempos em alturas elevadas sem perceber o caráter mais difusivo e não homogêneo da turbulência presente em regiões mais baixas da CLE.

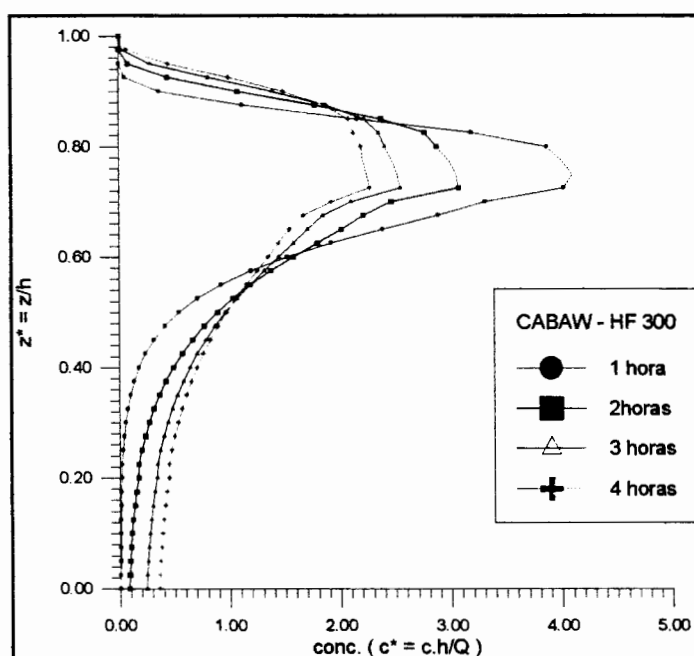


Figura 5.6 - Perfil vertical de concentração para diferentes tempos, com fonte área a 300m e  $K_{zz}$  a partir de Cabauw.

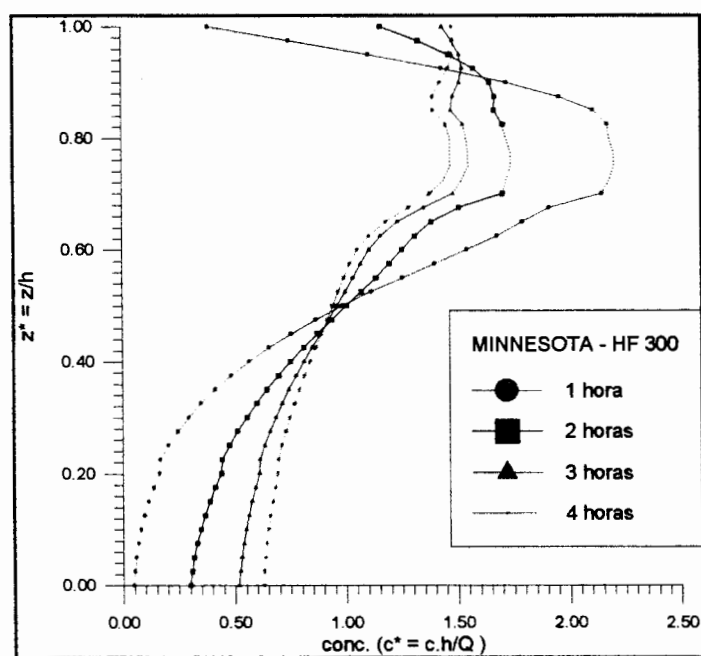


Figura 5.7 - Perfil vertical de concentração para diferentes tempos, com fonte área a 300m e  $K_{zz}$  a partir de Minnesota.

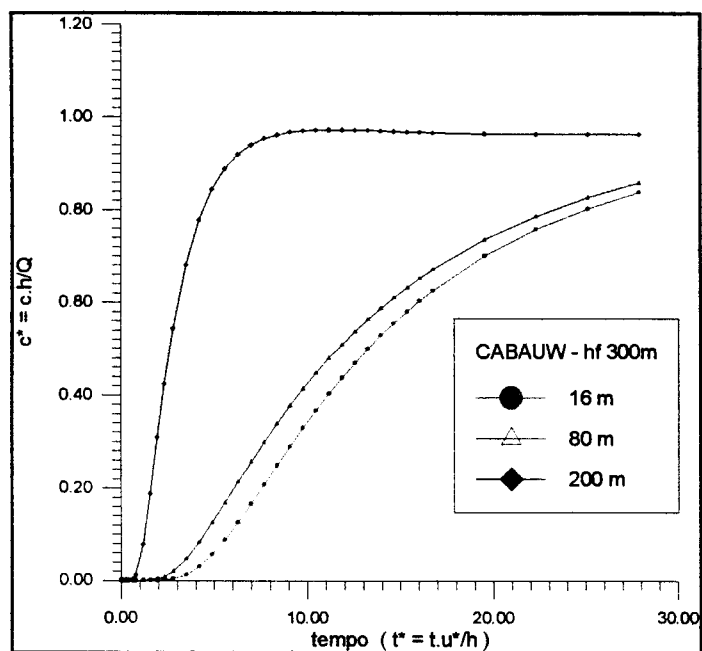


Figura 5.8 - Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 300m do solo e  $K_{zz}$  a partir de dados de Cabauw.

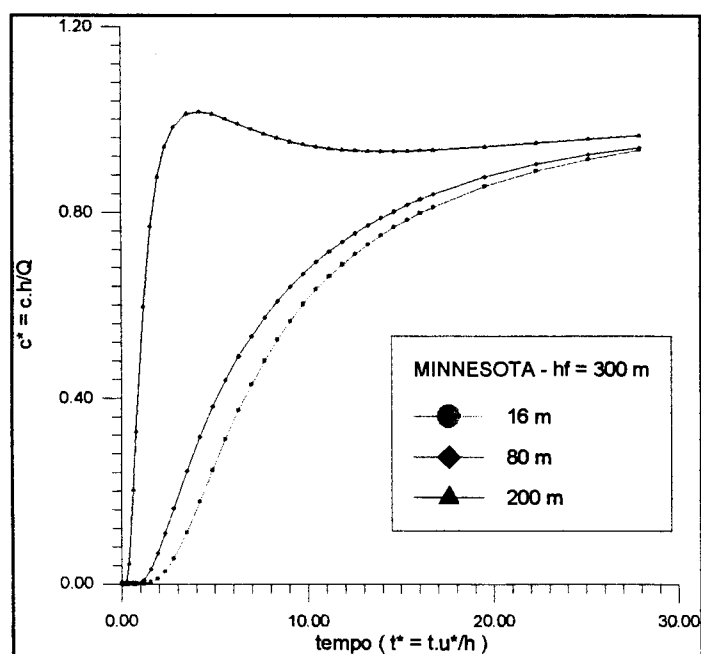


Figura 5.9 - Evolução Temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 300m do solo e  $K_{zz}$  a partir de Minnesota.

Nas figuras 5.10 e 5.11 é mostrada a concentração próxima ao solo como função do tempo para diferentes alturas de fonte área.

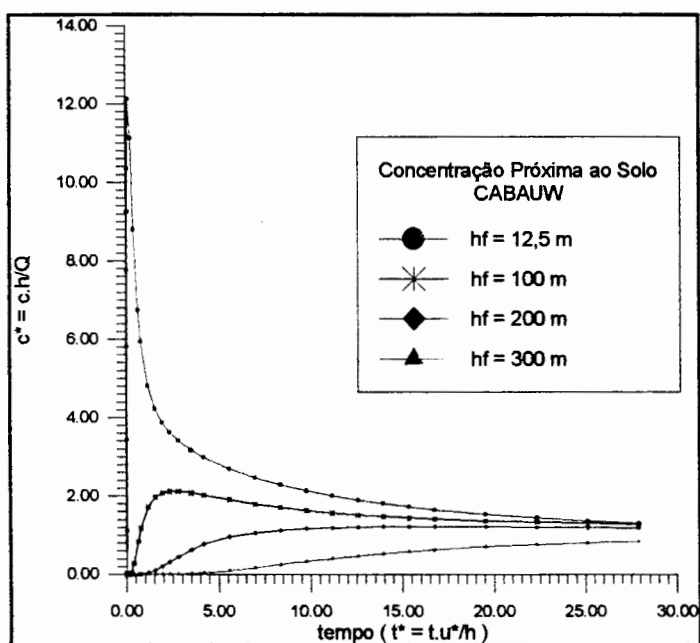


Figura 5.10 - Concentração Próxima ao solo para diferentes alturas de fonte área com  $K_{zz}$  a partir de dados de Cabauw

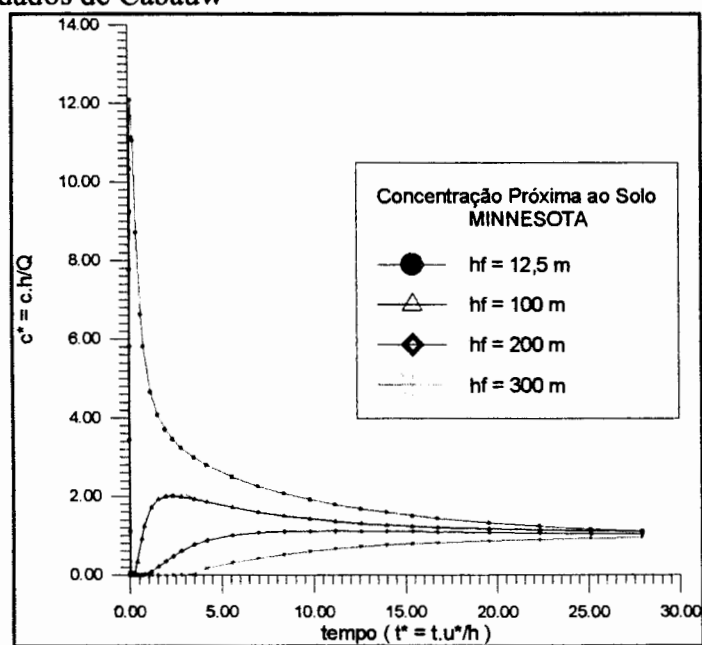


Figura 5.11 - Concentração próxima ao solo para diferentes alturas de fonte área com  $K_{zz}$  a partir de Minnesota.

Observa-se que os contaminantes emitidos por fontes área localizadas na metade inferior da camada limite difundem-se mais rapidamente no sentido do solo. Este efeito é devido a forma do perfil de  $K_{zz}$ , que apresenta valores mais elevados próximo ao solo em comparação com os valores encontrados na parte superior da camada (ver figura 5.1).



## 6 CONCLUSÕES

Para a difusão vertical foram feitas simulações da dispersão de fontes área em diversas alturas. As investigações centraram-se basicamente em dois períodos de desenvolvimento da CLE noturna. Num caso o coeficiente de difusão selecionado foi representativo de uma CLE próximo ao período de transição, onde os processos estacionários estavam ocorrendo (Minnesota). No outro caso a difusividade era uma característica de uma CLE mais estacionária (Cabauw).

Este modelo simples revela que o transporte em ambos os períodos de evolução da CLE é um processo lento, quando comparado às camadas limites convectivas. A pequena mistura vertical presente nas CLEs é o mecanismo responsável por esta situação.

Na camada limite estável, a simulação analítica da concentração de poluentes abandonados de fontes áreas, realizada neste trabalho, reproduz satisfatoriamente a limitada mistura vertical observada. Os parâmetros de escala locais são consistentes com a descrição da difusão turbulenta em termos de uma teoria K. Embora no regime turbulento estável não exista a presença de transporte organizado de grande escala, o caráter não homogêneo da turbulência vertical influencia fortemente a difusão de contaminantes. A altura da fonte em relação à profundidade da mistura turbulenta estável é de crucial importância na avaliação do impacto ambiental causado por poluentes abandonados de fontes elevadas. Esta posição relativa determina a evolução da altura da máxima concentração superficial.

Cumpra também observar o caráter assimétrico de todas as curvas de concentração obtidas, o que é explicado pela forma assimétrica do coeficiente de difusão do modelo considerado.

Os resultados obtidos por este método apresentam boa coincidência com os resultados numéricos obtidos por diferenças finitas por Campos Velho (1992) e Nieuwstadt (1984), mostrados no anexo A, que este trabalho, por apresentar uma solução analítica para a concentração em qualquer tempo, elimina deste modo o erro acumulado inerente aos métodos numéricos de integração no tempo.

E concluindo, o objetivo deste trabalho foi atingido, uma vez que o método apresentou a Solução Analítica do problema de dispersão de poluentes em uma dimensão; bem como acreditamos que este método pode ser estendido para problemas multidimensionais, transformando-se o problema multidimensional em problemas unidimensionais, de maneira análoga ao que é feito no Método Nodal (Zabada, 1994).

Como sugestões para futuros trabalhos podemos citar:

1. Testar outros métodos numéricos (Dubner-Abate, polinômios de Legendre) de inversão.
2. Utilização de computação simbólica para inversão da matriz dos coeficientes para obtenção de uma expressão analítica para os mesmos.
3. Estender o método a problemas de duas ou três dimensões, bem como, incluir a advecção.
4. Usar método "multigrid" para melhorar resultados próximos à fonte.
5. Testar o método para Camada Limite Convectiva.
6. Resolver o mesmo problema aplicando a Transformada de Liénard, que permite que equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes variáveis possam ser transformadas em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com

coeficientes constantes. Restaria assim só a aproximação na inversão da transformada de Laplace ( Genndining, 1994 ).

## 7 ANEXO A

Aqui são apresentados os resultados de outros trabalhos. Em primeiro lugar, estão os de Campos Velho(1992), que fez uma simulação numérica da dispersão unidimensional de concentração, para as mesmas condições usadas neste trabalho.

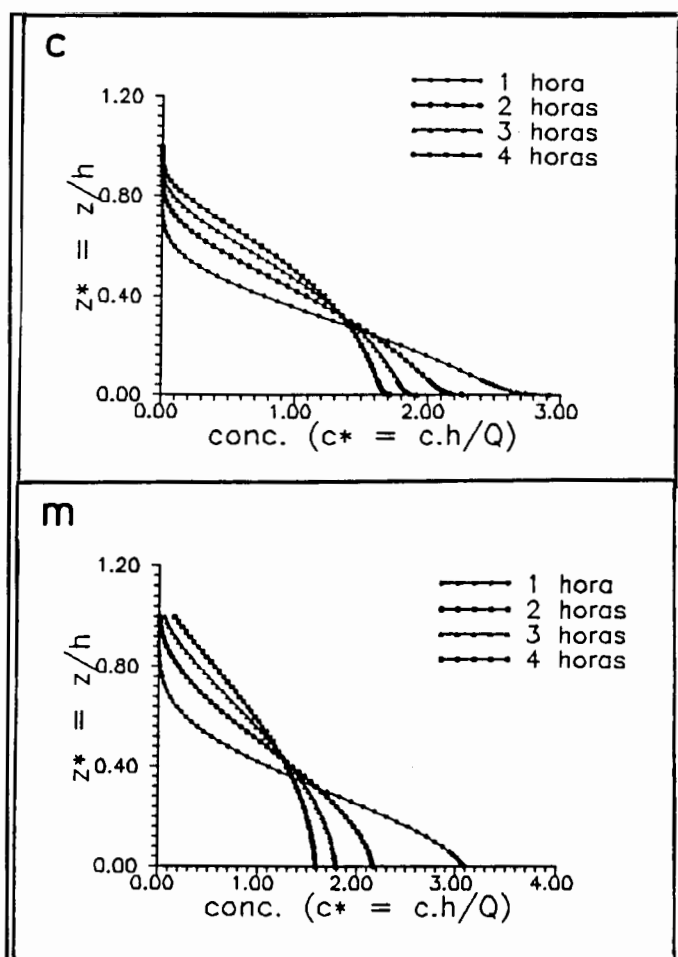


Fig. AN1 - Perfis verticais de concentração para as condições de Cabauw (c) e Minnesota (m) e uma altura de fonte de 12,5m.

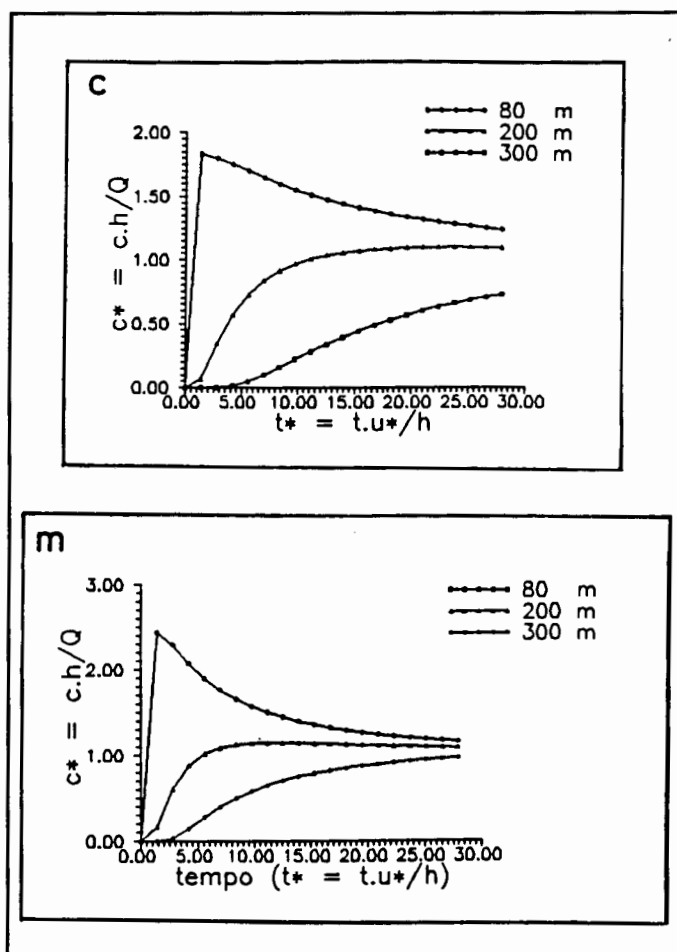


Fig. AN2 - Evolução Temporal da concentração para as condições de Cabauw (c) e Minnesota (m) e uma altura de fonte de 12,5m.

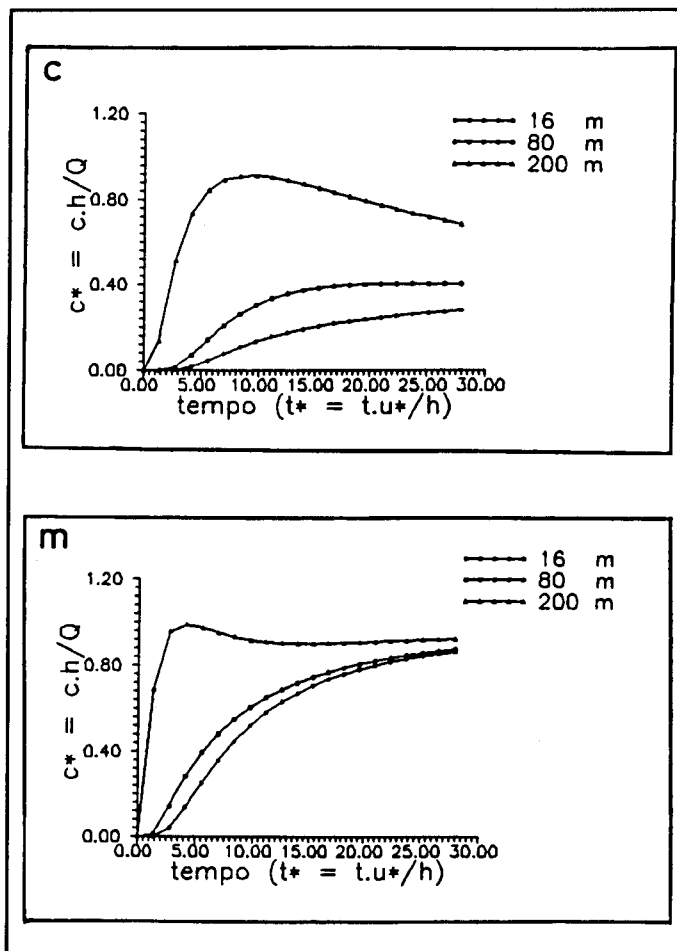


Fig. AN3 - Evolução Temporal da concentração para as condições de Cabauw (c) e Minnesota (m) e altura da fonte de 300m.

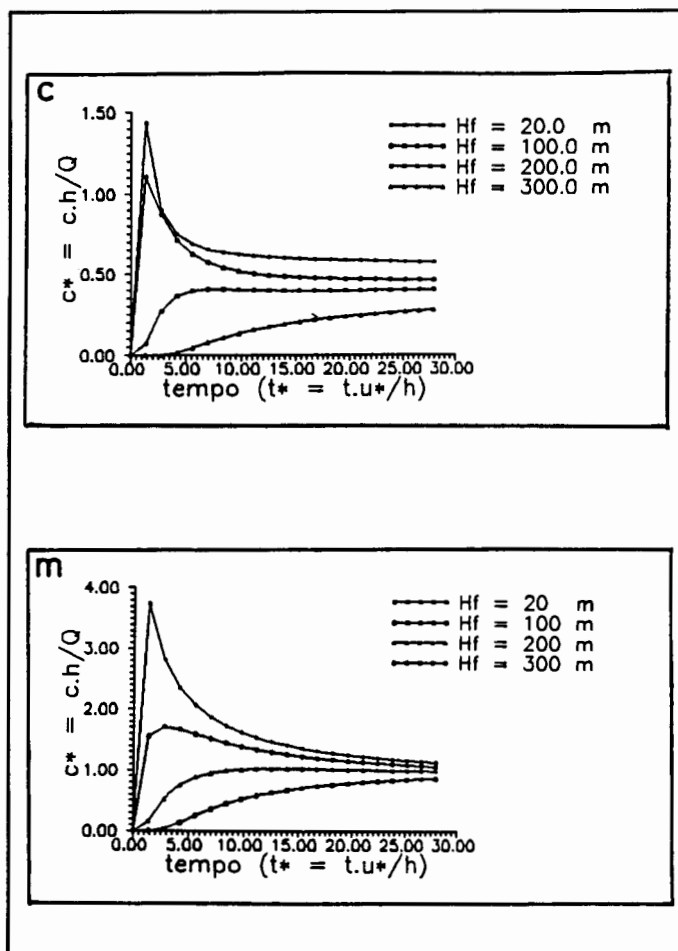


Fig. AN4 - Concentração próxima ao solo, para as condições de Cabauw (c) e Minnesota (m) e diferentes alturas de fonte .

A seguir, os resultados apresentados por Nieuwstadt (1980), onde A (—) é a solução encontrada por Nieuwstadt baseada em polinômios de Legendre que aí é comparada com a solução de Demuth (1978) representada por B (-----), baseada por sua vez em funções de Bessel.

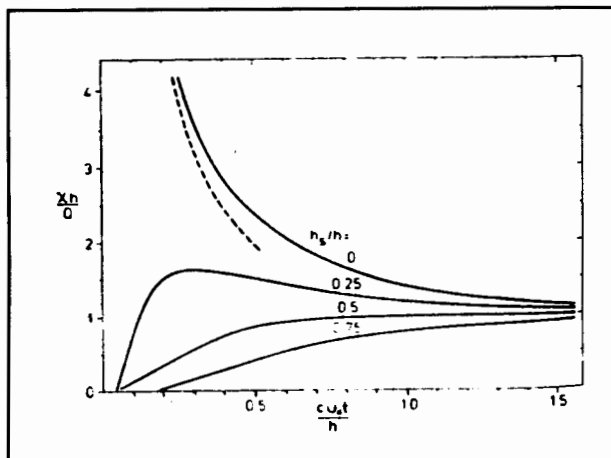


Fig. AN5 - Concentração adimensional  $\chi h/Q$  ao nível do solo, pelo tempo adimensional  $cu.t/h$  para diversas alturas de fonte para a sol. analítica A (—)

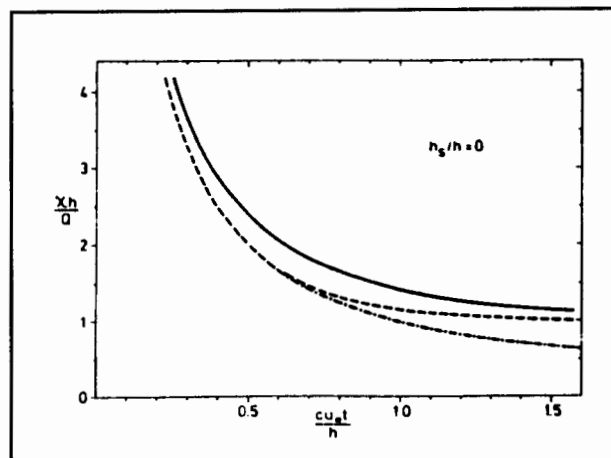


Fig. AN6 - Comparação da evolução temporal da concentração ao nível do solo, para altura de fonte  $h_s/h=0$ , entre as soluções analíticas A (—) e B (-----).

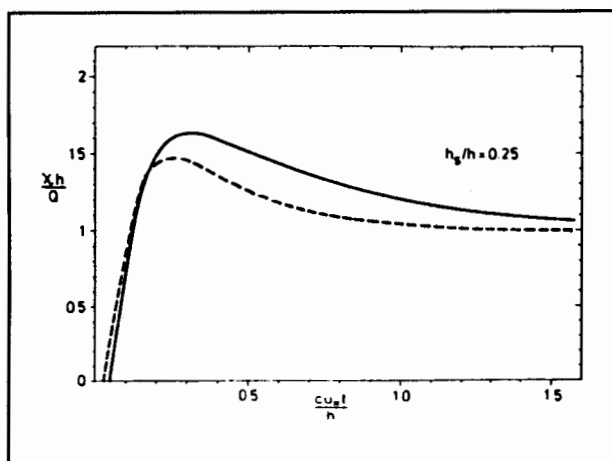


Fig. AN7 - Comparação da evolução temporal da concentração ao nível do solo, para altura de fonte  $h_s/h=0,25$ , entre as soluções analíticas A (—) e B (-----).

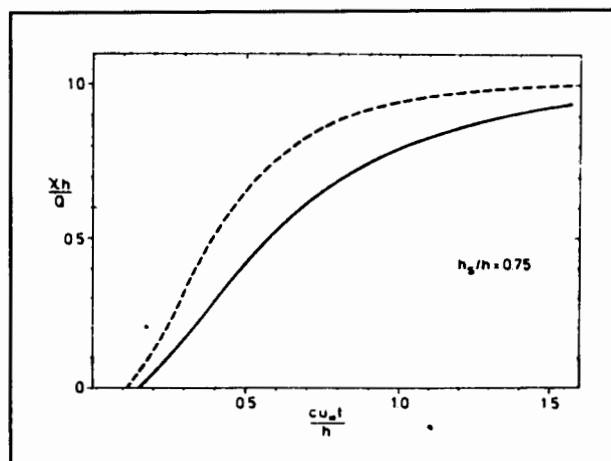


Fig. AN8 - Comparação da evolução temporal da concentração ao nível do solo para altura de fonte  $h_s/h=0,75$  entre as soluções analíticas A (—) e B (-----).



## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADOMIAN, G. Analytic solutions for nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computation**, v.26, p.77-87, 1988a.
- ADOMIAN, G. A Review of the decomposition method in applied mathematics. **Journal of Mathematical Analysis Applications**, v.135, n.2, p.501-543, nov. 1988b.
- ADOMIAN, G.; RACH, R.; ELROD, M. On the solution of partial differential equations with specified boundary conditions. **Journal of Mathematical Analysis Applications**, v.140, n.2, p.569-581, jun. 1989.
- BARICHELLO, Liliane Basso. **Formulação analítica para solução do problema de ordenada discreta unidimensional**. Porto Alegre, 80p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- BATCHELOR, G. K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. **Aust. J. Sci. Res.**, v.2, p.437, 1949.
- BELLASIO, R.; LANZANI, G.; TAMPONI, M. et. al. Boundary layer parametrization for atmospheric diffusion models by meteorological measurements at ground level. **Il Nuovo Cimento**, v.17c, n.2, p.163-174, 1994.
- BELLMAN, Richard E.; ROTH, Robert S. **The Laplace transform**. Farrer Road : World Scientific, 1984. 158p.
- CAMPOS VELHO, Harold Fraga de. **Matriz não-modal em integração e inicialização num modelo barotrópico e um estudo numérico da dispersão vertical turbulenta**. Porto Alegre, 92p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2992.
- CAUGHEY, S. J.; WYNGAARD, J. C.; KAIMAL, J. C. Turbulence in the evolving stable boundary-layer. **J. Atmos. Sci**, v.36, p.1041- 1052, 1979.

- CHURCHILL, Ruel V. **Operational mathematics**. 2nd. ed. New York : McGraw-Hill, 1958. 337p.
- CSANADY, G. T. **Turbulent diffusion in the environment**. Reidel, 1973. 248p.
- DEGRAZIA, G. A. **Anwendung von ahnlichkeit verfahren auf die turbulence diffusion in der konfektiven und stabilen grenzschicht**. Karlsruhe Tese (Doutorado) - Institut für Meteorologie und Klimaforschung, Universität Karlsruhe, 1988.
- DEGRAZIA, G. A.; MORAES, Osvaldo L. L. A Model for eddy diffusivity in a stable boundary layer. **Boundary-Layer Meteorol.**, v.58, p.205-214, 1992a.
- DEGRAZIA, Gervásio A.; MORAES, Osvaldo L. L. Uma Revisão da teoria estatística da difusão turbulenta. **Ciência e Natura**, v.14, p.65-70, 1992b.
- DEGRAZIA, Gervásio A.; MORAES, Osvaldo L. L. Simulação numérica da dispersão de poluentes em camadas limites planetárias convectiva e estável. **Revista Brasileira de Meteorologia**, v.4, n.1, p.275-287, 1989.
- DEGRAZIA, Gervásio A.; MORAES, Osvaldo L. L.; CAMPOS VELHO, H. F. et al. **Difusividade numa camada limite estável: um estudo numérico da dispersão vertical turbulenta**. (a ser publicado)
- DEGRAZIA, G. A.; OLIVEIRA, A. P. de; GOEDERT, J. Multiple master length scales for stable atmospheric boundary layer. **Il Nuovo Cimento**, v.15c, n.4, p.409-416, lugl./ago. 1992.
- DEMUTH, C. A contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources. **Atmospheric Environment**, v.12, p. 1255-1258, 1978.
- DUDERSTAD, J. J.; MARTIN, W. R. **Transport theory**. New York : John Wiley & Sons, 1973.
- FISHER, B. E. A. **Atmospheric Environment**, v.13, p.453, 1978.
- GENDINNING, Paul. **Stability, instability and chaos**. Cambridge : Cambridge University, 1994.
- GRYNING, S. E.; HOLTSLAG, A. A. M.; IRWING, J. S. et al. Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters. **Atmospheric Environment**, v.21, n.1, p.79-89, 1987.

- HEYDARIAN, M; MULLINEAUX, N. Solution of parabolic partial differential equations. **Appl. Math. Modelling**, v.5, p.448-449, 1981.
- LATHI, B. P. **Sistemas de comunicação**. Rio de Janeiro : Guanabara Dois, 1979. 401p.
- LUPINI, R.; TIRABASSI, T. Solution of the advection-diffusion equation by the moments method. **Atmospheric Environment**, v.17, n.5, p.965-971, 1983.
- LYONS, T. J.; SCOTT, W. D. **Principles of air pollution meteorology**. New York : Belhaven Press, 1990. 224p.
- MONIN, A.S.; YAGLOM, A. M. **Statistical fluid mechanics**. Cambridge: Mit Press, 1971. 769p.
- MORAES, O. L. L. The Velocity spectra in the stable boundary layer. **Boundary-Layer Meteorol.**, v.43, p.223-230, 1988.
- MOURA, A. B. D.; VILHENA, M. T.; DEGRAZIA, G. A. **Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em um camada limite estável**. 1994. 6p. (Trabalho aprovado para publicação no COBEM/95)
- NIEUWSTADT, F. T. M. An analytical solution of the time-dependent, one-dimensional diffusion equation in the atmospheric boundary layer **Atmospheric Environment**, v.14, p.1361-1364, 1980a.
- NIEUWSTADT, F. T. M. Application of mixed-layer similarity to the observed dispersion from ground-level source. **J. Appl. Meteorology**, v.19, p.156-162, 1980b.
- NIEUWSTADT, F. T. M.; HAAN, B. J. An analytic solution of the one-dimensional diffusion equation in a non-stationary boundary layer with an application to the inversion rise fumigation. **Atmospheric Environment**, v.15, p.845-851, 1981.
- NIEUWSTADT, F. T. M. Some aspects of the turbulent stable boundary-layer. **Boundary-Layer Meteorol.**, v.30, p.31-55, 1984a.
- NIEUWSTADT, F. T. M. The Turbulent structure of the stable nocturnal boundary layer. **J. Atmos. Sci.**, v.41, p.2202-2216, 1984b.
- ÖZISIC, M. NECATI. **Heat Conduction**. New York : John Wiley & Sons, 1980.

- PANOFSKY, H. A.; DUTTON, J. A. **Atmospheric Turbulence**. New York : John Wiley & Sons, 1984.
- PASQUILL, F. **Atmospheric Diffusion**. 2nd. ed. New York : John Wiley & Sons, 1974.
- RITGER, Paul D.; ROSE, Nicholas J. **Differential equations with applications**. New York : McGraw-Hill, 1968. 545p.
- ROBSON, R. E. **Turbulent dispersion in a stable layer with a quadratic exchange coefficient**. s.l, s.d. 17p.
- ROUNDS, W. Solutions of the two-dimensional diffusion equation. **Transactions American Geophysical Union**, v.36, p.395-405, 1955.
- SCHLICHTING, Hermann. **Boundary layer theory**. 7th. ed. New York: McGraw-Hill, 1979. 817p.
- SCRIVEN, R. A.; FISHER, B. E. A. The long range transport of airborne material and its removal by deposition and washout-II. The effect of turbulent diffusion. **Atmospheric Environment**. v.9, p.59-68, 1975.
- SMITH, F. B. The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent Atmosphere. **J. Fluid Mech.**, v.2, p.49-76, 1957.
- SORBJAN, Z. Local similiraty of spectral and cospectral characteristics in stable-continuous boundary layer. **Boundary-Layer Meteorol.**, v.35, p.257-275, 1986 a.
- SORBJAN, Z. On similiraty in atmospheric boundary layer. **Boundary-Layer Meteorol.**, v.34, p.377-397, 1986 b.
- STROUD, A. H.; SECREST, D. **Gaussian quadrature formulas**. New Jersey : Prentice Hall, 1966.
- STEWART, H. J. Kinematics and dynamics of fluid flow. In: BERRY, F. A.(Ed.); BOLLAY, E.(Ed.); BEERS, N. R.(Ed.) **Handbook of meteorology**. New York : McGraw-Hill, 1945. sec. VI.
- STULL, Roland B. **An Introduction to boundary layer metereology**. Dordrecht : Kluwer Academic, 1988. 345p.
- TIRABASSI, T. Analytical air pollution advection and diffusion models. **Water, Air, and Soil Pollution**, v.47, p.19-24, 1989.

- TIRABASSI, T.; RIZZA, U. An Analytical model for a screen evaluation of the environmental impact from a single point source. **Il Nuovo Cimento**, v.15c, n.2, p.181-190, 1992.
- TIRABASSI, T.; RIZZA, U. Applied dispersion modelling for ground-level concentrations from elevated sources. **Atmospheric Environment**, v.28, n.4, p.611-615, 1994.
- TIRABASSI, T.; TAGLIAZUCCA, M.; GALLIANI, G. Easy to use air pollution model for turbulent shear flow. **Environmental Software**, v.2, n.1, p.37-44, 1987.
- VAN ULDEN, A. P. Simple estimates for vertical dispersion from sources near the ground. **Atmospheric Environment**, v.12, p.2115-2129, 1978.
- VENKATRAM, Akula(Ed.); WYNGAARD, John C.(Ed.) **Lectures on air pollution modeling**. Boston : American Meteorological Society, 1988. 388p.
- VENKATRAM, A.; PAINE, R. A model to estimate dispersion of elevated releases into a shear-dominated boundary layer. **Atmospheric Environment**, v.19, p.797, 1985.
- VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. A General analytical approach to the one group, one dimensional transport equation. **Kerntechnik**, v.58, n.3, p.182-184, 1983.
- VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. A New analytical approach to solve the neutron transport equation. **Kerntechnik**, v.56, n.5, p.334-336, 1991.
- VILHENA, M. T.; STRECK, E. E. An Approximate analytical solution of the one-group neutron transport equation. **Kerntechnik**, v.57, n.3, p.196-198, 1992.
- VILHENA, M. T. ; SEFIDVASH, F. Solution of heat conduction equation for fluidized bed nuclear reactor. **Kerntechnik**, v.55, n.2, p.108-111, 1990.
- WORKSHOP OF OBJECTIVES FOR NEXT GENERATION OF PRACTICAL SHORT-RANGE ATMOSPHERIC DISPERSION MODELS. 1992, Riso, Denmark. **Proceedings...** Roskilde: National Environmental Research Institute, 1992. 262 p.
- ZABADAL, JORGE R. S. **Solução analítica da equação de ordenadas discretas multidimensional**. Porto Alegre, 148p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

## APÊNDICE A

### Teoria Da Similaridade

A teoria da similaridade de Monin Obukhov é hoje uma das teorias clássicas para descrever a turbulência, pois teve grande sucesso em descrever a camada superficial da camada limite planetária. A camada superficial ocupa cerca de 10% da altura total da CL a partir da superfície.

A hipótese na teoria de Monin-Obukhov é que as quantidades relevantes para a descrição da estrutura da camada dependam de alguns parâmetros físicos. Como consequência, a velocidade de fricção ou dinâmica ( $u_* = \sqrt{\tau_s/\rho}$ ), o fluxo de calor ( $q_* = \overline{w'\theta'}|_{z=0}$ ) e o parâmetro de convecção ( $\beta_c = g/\bar{T} - g/\bar{\theta}$ ) poderiam formar escalas de velocidade, comprimento e temperatura, como segue:

$$u_* ; \quad L = - \frac{u_*^2}{\kappa \beta_c q_*} ; \quad \theta_* = - \frac{q_*}{\kappa u_*} ; \quad (\text{A.1})$$

onde  $\kappa \approx 0,4$  é a constante de von Kármán. Como  $v_* > 0$ , o sinal de  $q_*$  determina os

sinais de  $L$  e  $\theta_*$ . Pode-se definir através das escalas (Campos Velho, 1992), o tipo de estratificação:

- *instável*:  $q_* > 0$  ,  $L < 0$  ,  $\theta_* < 0$  .
- *estável*:  $q_* < 0$  ,  $L > 0$  ,  $\theta_* > 0$  .
- *neutra*:  $q_* \rightarrow 0$  ,  $|L| \rightarrow \infty$  ,  $|\theta_*| \rightarrow 0$  .

A parte fundamental da hipótese de Monin-Obukhov é a auto similaridade dos perfis verticais de  $\bar{u}$  e  $\bar{\theta}$  :

$$\frac{d(\bar{u}/u_*)}{d(z/L)} = h\left(\frac{z}{L}\right) , \quad \frac{d(\bar{\theta}/\theta_*)}{d(z/L)} = h_\theta\left(\frac{z}{L}\right) ; \quad (\text{A.2})$$

e pode ser reescrita numa forma mais conveniente:

$$\frac{\kappa_z d\bar{u}}{u_* dz} = \epsilon\left(\frac{z}{L}\right) , \quad \frac{z d\bar{\theta}}{\theta_* dz} = \epsilon_0\left(\frac{z}{L}\right) ; \quad (\text{A.3})$$

onde  $\epsilon$  e  $\epsilon_0$  são equações universais da variável adimensional  $z/L$ , determinada experimentalmente.

A fórmula fundamental da teoria semi-empírica :

$$-\overline{u'w'} = \frac{\tau}{\rho} = u_*^2 = K \frac{d\bar{u}}{dz} , \quad (\text{A.4})$$

que, combinada com a equação anterior (2.4.3), resulta nas difusividades:

$$K = \frac{\kappa u_*^2}{\epsilon (z/L)} , \quad K_\theta = \frac{\kappa u_*^2}{\epsilon_0 (z/L)} ; \quad (\text{A.5})$$

## A Teoria Da Similaridade Na Camada Estável

Embora nas duas últimas décadas a compreensão da camada convectiva (instável) ter sido bem estabelecida, a camada limite estável (CLE) é bem menos conhecida, pois outros fenômenos interferem no processo, como ondas de gravidade.

Entretanto, a modelagem da CLE noturna tem sofrido grande avanço com as informações extraídas de alguns experimentos, revelando uma similaridade local dos fluxos turbulentos.

A teoria da similaridade é adaptada ao caso da CLE, onde a parametrização dependerá de outras quantidades no lugar das grandezas superficiais  $u_*$  e  $\theta_*$ .



Assume-se que as escalas apropriadas dependem dos valores locais do comprimento de Monin-Obukhov local<sup>1</sup>  $\Lambda$ , do fluxo de calor  $\overline{w'\theta'}$ (z) e da tensão  $\tau$ (z) de modo que:

$$\frac{\Lambda}{L} = (1 - z/h)^{[(3/2)\alpha_1] - \alpha_2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\overline{w'\theta'}}{(\overline{w'\theta'})_0} = (1 - z/h)^{\alpha_2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = (1 - z/h)^{\alpha_1}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $\tau_0 = u_*^2 = -\overline{u'w'}$  é a tensão superficial, h é a altura da camada limite turbulenta estável, z é a altura acima do solo, L é o comprimento de Monin-Obukhov e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes a serem determinadas por experimentos. Esta hipótese é aplicável em regimes estáveis sobre terreno homogêneo, onde a turbulência é contínua e não dominada por ondas de gravidade.

---


$$\Lambda \equiv - \frac{\tau^{3/2}}{k (g/T) \overline{\omega'\theta'}}$$

## APÊNDICE B

### Espectro De Turbulência

De um sinal turbulento, usando-se ferramentas matemáticas e físicas, pode-se separar a contribuição de cada turbilhão para a energia cinética de turbulência, conforme o tamanho dos mesmo. Uma tomada de energia em função do período, de um sinal turbulento (por exemplo do vento) fornece o que chamamos de espectro, que é a soma das contribuições de todos os turbilhões. Pequenos turbilhões têm menores períodos que os grandes; os picos mostram quais os turbilhões que mais contribuem para a energia cinética. Para desdobrarmos o sinal em termos das diferentes frequências, que é proporcional ao tamanho do turbilhão, usaremos a Transformada de Fourier.

Para tanto, lembramos que o quadrado da norma da Transformada de Fourier complexa para uma frequência  $n$  é :

$$|F_A(n)|^2 = |F_{real}(n)|^2 + |F_{imag}(n)|^2 . \quad (B.1)$$

Como  $|F_A(n)|^2$  é a soma ao longo das frequências de  $n=1$  a  $n=N-1$ , o resultado é igual a variância total (total biased variance) da série temporal original:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k - \bar{A})^2 = \sum_{n=1}^{N-1} |F_A(n)|^2 . \quad (\text{B.2})$$

Assim pode-se interpretar  $|F_A(n)|^2$  como a porção da variância justificada por ondas de frequência  $n$ . Note que a soma ao longo das frequências não inclui  $n=0$  porque  $|F_A(n)|^2$  é um valor médio e não contribui com nenhuma informação sobre a variação do sinal em torno da média.

Para simplificar a notação para uso posterior definimos  $G_A(n) = |F_A(n)|^2$ . A taxa  $G_A(n)/\sigma_A^2$  representa a fração da variância justificada pelo componente  $n$  e é muito parecida com o quadrado do coeficiente de correlação,  $r^2$ .

Os valores para frequências maiores que a frequência de Nyquist,  $|F_A(n)|^2$ , são iguais aos correspondentes às frequências mais dobradas, pois a transformada de Fourier para as frequências mais altas é a mesma que a das frequências mais baixas, exceto para um sinal em frente a sua parte imaginária. Além disso, como as frequências mais altas que a de Nyquist não podem ser resolvidas, os valores de  $|F_A(n)|^2$  devem ser obtidos somando-se os valores de frequências mais baixas. Assim a intensidade espectral discreta (ou energia)  $E_A(n)$  é definida como :

$$E_A(n) = 2|F_A(n)|^2 \quad (\text{B.3})$$

para  $n=1$  a  $nf$  com  $N=\text{par}$ , e

$$E_A(n) = 2|F_A(n)|^2 \quad (\text{B.4})$$

para  $N = \text{ímpar}$ , com frequências de  $n=1$  a  $nf-1$  além da frequência de Nyquist, com  $E_A(n) = |F_A(n)|^2$ .

Esta apresentação é chamada de espectro da variância discreta (ou energia) e pode ser usada para qualquer variável como tempo, velocidade ou umidade para separar a variância total em suas componentes  $E_A(n)$  relacionadas às diferentes frequências.

Para as variáveis como temperatura e umidade, entretanto, não se pode associar o espectro resultante com os conceitos de movimento dos turbilhões, por que variações destas variáveis podem persistir na atmosfera em fluxos não turbulentos como "pegadas" de turbulência propriamente dita.

A variância da flutuação da velocidade  $u'$  tem a mesma unidade da energia cinética de turbulência por unidade de massa. Assim o espectro de velocidade é chamado de espectro discreto de energia. Como definido acima, o nome espectro de energia é muitas vezes usado para todo o espectro de variâncias.

Decompondo-se uma série de medidas em seus componentes de frequências, números de onda, se observa como os turbilhões de diferentes escalas de tempo e espaço contribuem para o estado geral da turbulência.

## **O Espectro De Velocidade Turbulento Na CLE**

Recentemente Sorbjan(1985) mostrou que as variâncias e covariâncias da velocidade do vento e da temperatura seguem as previsões da teoria de similaridade local. Disto, se espera que o espectro de energia e o coespectro também devam seguir as leis de escala local. Estas observações levam a hipótese de que as densidades espectrais e coespectrais, quando escaladas adequadamente por parâmetros locais (basicamente a referência para a velocidade do vento é a velocidade  $U_* = \tau^{1/2}$ , e a

referência de temperatura é  $T_* = -\overline{w\theta}/\tau^{1/2}$ ) deveriam permanecer como somente uma função do parâmetro adimensionalizado  $z/\Lambda$  e da frequência reduzida  $f(f=nz/U)$ , onde  $z$  é a altura acima do solo,  $\Lambda$  é o comprimento de Monin-Obukhov local,  $n$  é a frequência cíclica e  $U$  é a velocidade média do vento. Perfis espectrais para a CLE tem sido propostos no contexto da teoria de similaridade local por vários autores (Degrazia 1988; Sorbjan 1986; Moraes, 1988). Degrazia (1988) desenvolveu as equações do espectro universais para velocidades turbulentas, em termos das escalas locais apresentadas acima. A equação para o espectro de velocidade lateral  $v$  e o vertical  $w$  é:

$$\frac{nSi(n)}{U_*^2} = 0.6(c_\epsilon)^{2/3} \left(\frac{f}{q}\right) / [(fm)_{n,i}^{5/3} + 1.5\left(\frac{f}{q}\right)^{5/3}] , \quad (\text{B.5})$$

onde  $i = v$  ou  $w$ . Nesta equação  $f = nz/U$  é a frequência reduzida,  $n$  é a frequência cíclica,  $U$  é a velocidade do vento média na direção  $x$ ,  $(fm)_{n,i}$  é a frequência do pico espectral na estratificação neutra,  $q$  é a função de estabilidade dada por:

$$q = 1 + 3.7\left(\frac{z}{h}\right)\left(\frac{h}{\Lambda}\right) . \quad (\text{B.6})$$

Como  $\Phi_\epsilon$  é a função de dissipação adimensional dada por (Sorjan, 1986):

$$\Phi_\epsilon = c_\epsilon(1 + 3.7z/\Lambda) , \quad \text{com } c_\epsilon = 1.25 . \quad (\text{B.7})$$

Considera-se aqui, de acordo com Sorbjan(1986),  $(fm)_{n,v} = 0.22$  e  $(fm)_{n,w} = 0.22$ .

Integrando  $S_i(n)$  para todas as frequências, pode-se obter a variância para velocidades turbulentas vertical e lateral. E assim para o caso vertical, pode-se escrever:

$$\sigma_w^2 = 3.8 \left(\frac{z}{Uq}\right) \left(\frac{\Phi_\epsilon}{q}\right)^{2/3} U_*^2 \int_0^\infty \frac{dn}{1 + 9.5 (z/Uq)^{5/3} n^{5/3}} \quad (\text{B.8})$$

e obter:

$$\sigma_w = 1.5 U_* \quad (\text{B.9})$$

Esta equação mostra uma clara dependência de  $\sigma_w$  com  $z/h$ .

Procedendo-se de forma similar chega-se:

$$\sigma_v = 1.7 U_* \quad (\text{B.10})$$

## APÊNDICE C

### Coefficiente De Difusão Da Teoria Estatística

Na teoria estatística da difusão de Taylor é apontado que a difusão turbulenta difere entre as regiões próximas e distantes da fonte. Na proximidade da fonte, as partículas retêm a memória de seu meio turbulento inicial. Para longos tempos de viagem ( $t \gg T_L$ ), onde  $T_L$  é a escala de tempo integral Lagrangeana, esta memória é perdida e as partículas seguem as propriedades locais da turbulência somente. Distante da fonte, o desvio padrão da pluma na vertical  $\sigma_z$  é dado por  $\sigma_z^2 = 2 \sigma_w^2 T_L t$ , que é consistente com a variação no tempo de  $\sigma_z$  como é dado pela teoria do transporte de gradiente ou teoria K, ou seja  $\sigma_z \sim t^{1/2}$ . Uma difusividade turbulenta pode ser definida, no limite para grandes tempos ( $t \gg T_L$ ), da teoria de Taylor como  $K_{zz} = \sigma_w^2 T_L$ , mas isso somente tem significado para a turbulência homogênea. Para a turbulência não homogênea, uma expressão similar pode ser dada, mas com  $T_L$  substituído por  $\tau$ , que pode ser considerado uma escala de tempo de correlação, ou simplesmente, uma escala de tempo turbulenta definida como  $\tau \sim \sigma_w^2 / \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é a taxa de dissipação de energia. Para uma CL não homogênea, a relação  $K_{zz}$ , dada acima, é válida somente quando

$\tau \ll h/u_*$  : a desigualdade significa que a partícula difundindo-se alcança deslocamentos independentes enquanto viaja através da CL. A restrição  $\tau \ll h/u_*$  é válida para CLE mas não para a CLC onde  $\tau \sim h/w_*$ .

A teoria do Transporte de Gradiente, ou teoria K, que é usada na equação de difusão para descrever o campo de concentração média de contaminantes, cai próximo a fontes pontuais e é válida somente para grandes tempos de viagem. A introdução da difusividade como função do tempo de viagem leva a uma descrição da difusão em campos próximos, intermediários e distantes da fonte. Csanady(1973) sugeriu um coeficiente de difusividade  $K_{zz}$  como uma função da distância da fonte (ou tempo de viagem) e da coordenada vertical  $z$ .

Para obter um  $K_{zz}$  dependente do tempo, inicia-se com as equações para o desvio padrão  $\sigma_z$  e  $\sigma_y$  dados por Pasquill e Smith (1983):

$$\sigma_z^2 = \sigma_w^2 t^2 \int_0^{\infty} S_w(n) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi t/\beta_w)}{n\pi t/\beta_w} \right]^2 dn \quad (C.1)$$

e

$$\sigma_y^2 = \sigma_v^2 t^2 \int_0^{\infty} S_v(n) \left[ \frac{\text{sen}(n\pi t/\beta_v)}{n\pi t/\beta_v} \right]^2 dn \quad (C.2)$$

Aqui  $S_w(n)$  e  $S_v(n)$  denotam o espectro de energia vertical e lateral, respectivamente,  $\beta_w$  e  $\beta_v$  são as taxas de escala de tempo Lagrangeana e Euleriana. As quantidades  $\beta_w$  e  $\beta_v$  aumentam com o aumento da estabilidade. Wandel e Kofoed-Hansen (1962) apud Degrazia e Moraes(1992) mostrou que:



$$\beta_i = \frac{(\pi)^{1/2} U}{4 \sigma_i} . \quad (C.3)$$

Uma expressão para os coeficientes de difusividade dependentes do tempo vertical e lateral,  $K_{zz}$  e  $K_{yy}$  foram derivados por Batchelor (1949):

$$K_{zz} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_z^2}{dt} . \quad (C.4)$$

E assim, a partir das equações anteriores se obtém:

$$K_{zz} = \frac{\sigma_w^2 \beta_w}{2\pi} \int_0^\infty S_w(n) \frac{\text{sen}(2\pi nt/\beta_w)}{n} dn . \quad (C.5)$$

O comportamento assintótico da equação acima para grandes tempos de viagem de difusão ( $\lim t \rightarrow \infty$ ) quando os coeficientes de transporte perderam a sua memória das condições iniciais, é (Degrazia e Moraes, 1992):

$$K_{zz} = \frac{1}{4} [\sigma_w^2 \beta_w S_w(0)] . \quad (C.6)$$

Destas equações Degrazia e Moraes(1992) ainda concluem que a difusão para grandes tempos de viagem depende do comportamento do espectro próximo da origem. Por outro lado, como  $S_w(0)$  e  $S_v(0)$  é proporcional a  $(z/Uq)$ , pode-se ver que a difusão é dependente também da estabilidade e da altura acima do solo.

Uma limitação do  $K_{zz}$  acima é a sua dependência do tempo de difusão ( $t$ ). Como discutido por Csanady(1973):..."se duas fontes contínuas, por exemplo, são simultaneamente mantidas em um campo turbulento, uma um pouco antes da outra, seus campos combinados pode ser obtido por uma simples superposição linear. Em um ponto onde ambas as nuvens contribuem para as concentrações, as duas difusividades diferentes devem ser empregadas para calcular o campo. Isto permitiu a Taylor(1959) rotular a noção de uma difusividade turbulenta aparente como um conceito ilógico. Indubitavelmente, seu uso indiscriminado pode levar a conclusões sem sentido." Em contraste com a parte dependente do tempo de  $K_{zz}$ , seus valores assintóticos para grandes tempos, são de importância na modelagem de dispersão de fontes área na CLE.

Os coeficientes acima contém as quantidades físicas que são importantes para a descrição da difusão de poluentes nas camadas limites atmosféricas. A mistura vertical e lateral representada por  $K_{zz}$  e  $K_{yy}$  é somente dependente de características dimensionais dos turbilhões e da distribuição de energia entre os vários tamanhos de turbilhões contidos no escoamento.

Estas características são descritas pelo espectro e pelas variâncias corretas. Um outro fato importante é que a não homogeneidade da turbulência, expressa pela dependência das variâncias e das escalas de tempo turbulentas na altura é responsável pelo transporte organizado.

Juntando-se as equações dos coeficientes (2.6.6) com a equação espectral (2.6.1) e considerações anteriores, chega-se à difusividade:

$$\frac{K_{zz}}{u_* h} = \frac{0.207 (\tau/\tau_0)^{1/2} (z/h)}{1 + 3.7 (z/h) (z/\Lambda)} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} [ 5.564 q (h/z) (\tau/\tau_0)^{1/2} X' n' ]}{[1 + (n')^{5/3}] n'} dn' , \quad (C.7)$$

ou, finalmente como é usado neste trabalho, para grandes tempos segundo Degrazia e Moraes(1992):

$$\frac{K_{zz}}{u_* h} = \frac{0.33(1 - (z/h))^{0.1/2} (z/h)}{1 + 3.7(z/h)(h/\Lambda)} \quad (C.8)$$