

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise elasto-plástica com não linearidade geométrica
usando uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana
(ALE)**

Hermann Rigoberto Segovia Lohse

Porto Alegre

Junho 2015

Hermann Rigoberto Segovia Lohse

**ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA COM NÃO
LINEARIDADE GEOMÉTRICA USANDO UMA
FORMULAÇÃO ARBITRÁRIA
LAGRANGEANA-EULERIANA (ALE)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico.

Porto Alegre

Junho 2015

CIP - Catalogação na Publicação

Segovia Lohse, Hermann Rigoberto

Análise estática de problemas com alta não linearidade usando elementos hexaédricos com um ponto de integração e uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE) / Hermann Rigoberto Segovia Lohse. -- 2015.

124 f.

Orientadora: Armando Miguel Awruch.

Coorientadora: Alexandre Luis Braun.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. ALE. 2. Distorção de malha. 3. B-Splines. 4. Integração reduzida. 5. Controle de modos espúrios. I. Awruch, Armando Miguel, orient. II. Braun, Alexandre Luis, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

HERMANN RIGOBERTO SEGOVIA LOHSE

**Análise elasto-plástica com não linearidade geométrica
usando uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana
(ALE)**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 12 de Junho 2015

Prof. Armando Miguel Awruch
Dr. COPPE/UFRJ, Brasil
Orientador

Prof. Alexandre Luis Braun
Dr. PPGEC/UFRGS, Brasil
Coorientador

Prof. Armando M. Awruch
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Eduardo Bittencourt(PPGEC/UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Inácio Morsch(PPGEC/UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Rodrigo Rossi(PROMEC/UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal de Santa Catarina

*Mi País no necesita dinero,
mi País necesita Gloria!*

ODD

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Pupi e Rigo, meus irmãos H1, H2, H4 e H5, e a minha cunhada Nieves, a todos eles pelo carinho e suporte de sempre.

Ao meu sobrinho Ignácio, não estive presente nas tuas primeiras engatinhadas, mas acompanhei todo o processo e seguirei acompanhando todos teus passos.

Aos meus orientadores Armando Awruch e Alexandre Braun, aos professores e colegas da pós.

Ao PPGEC e à UFRGS por aceitarem-me como aluno.

À Capes e CNPq pelo financiamento.

RESUMO

SEGOVIA LOHSE, H.R. **Análise elasto-plástico com não linearidade geométrica usando uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE)**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre

Apresenta-se uma formulação de adaptação de malha para problemas com grandes deformações. A formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE) permite manter a qualidade dos elementos finitos durante o processo de cálculo através de rearranjo ou movimento de malha independente do movimento material. Nas formulações Lagrangeanas a malha fica “colada” ao corpo durante toda a análise, logo quando este sofre grandes deformações diferenciais o mesmo se reproduz numa malha distorcida. A formulação ALE desacoplada consta de dois passos: O passo Lagrangeano onde são aplicados os incrementos de carga, a malha permanece “colada” à matéria durante a análise. E cada certo “tempo” o passo Euleriano onde “descola-se” a malha da matéria e efetua-se o movimento de malha que se ajusta melhor ao corpo deformado. São apresentados assim métodos de realocação da malha e transferência ou atualização das variáveis necessárias para, depois do passo Euleriano, continuar a análise com a nova malha sem grandes distorções dos elementos.

Os problemas de grandes deformações e deslocamentos são acompanhados de não linearidades físicas e geométricas, assim, são abordados os métodos para o tratamento destas não linearidades. Trabalha-se com o elemento hexaédrico tri-linear com integração reduzida e controle dos modos espúrios que tem demonstrado um bom comportamento frente a grandes não linearidades geométricas assim como para as não linearidades físicas.

A formulação ALE tem ganhando seu espaço na mecânica dos sólidos, em problemas de conformação mecânica e impacto, devido às grandes deformações e na última década está abrindo-se passo na área da geomecânica tratando problemas recalque e penetração de fundações em solos.

Key-words: ALE, Distorção de malha, B-Splines, Movimento de malha, Integração reduzida, Controle de modos espúrios.

ABSTRACT

SEGOVIA LOHSE, H.R. **Elastoplastic analysis with geometric nonlinearity using an Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) method.** 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre

This work presents remeshing techniques for finite element simulation and investigates their performance for large deformation problems. Lagrangian formulation generally results in excessive mesh distortion owing to its attachment to the material. Meanwhile, the Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation allows to keep the finite element quality through the arbitrarily rearrangement or movement of the mesh, to optimize the element's shape. The decoupled Arbitrary Lagrangian-Eulerian approach consists in a sequence of Lagrangian and Eulerian steps. The mesh is "coupled" to the material during the Lagrangian steps. From step to step, mesh is decoupled from the system material (Eulerian step), the nodes corresponding to free boundaries are relocated using an analytical approach, remeshing is performed and finally the state variables are remapped. Rearrangements methods for the element's node are presented, as well as the variables remapping algorithms at the new quadrature points, in order to continue with the finite element analysis without altering the element topology of the original mesh.

Special attention is given to methods dealing with geometric and physical nonlinearities. A trilinear hexahedral element is used with reduced integration and hourglass control. This combination has shown well behavior in front of large geometric and physical nonlinearities.

ALE formulation field has considerably grown in geotechnical research, especially in impact and mechanical extrusion problems. Over the last decade, geomechanics is dealing with settlement problems and foundation penetration in soils.

Key-words: ALE, Mesh distortion, B-Splines, Mesh movement, Reduced integration, Hourglass control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Descrições cinemáticas. (a) Lagrangeana; (b) Euleriana; (c) Arbitrária Lagrangeana Euleriana (ALE). Fonte Donea et al. (2004).	27
Figura 2.1 – Foças atuantes sobre um corpo	34
Figura 2.2 – Elemento hexaédrico de 8 nós.	36
Figura 2.3 – Modos espúrios em flexão de viga com elementos hexaédricos lineares.	37
Figura 2.4 – Modos espúrios do o elemento hexaédrico com um ponto de integração: (a) 6 modos de flexão; (b) 3 modos de torção; (c) 3 modos não físicos. Fonte Zhu e Cescotto (1996).	38
Figura 3.1 – Configuração nos instantes $t = t_n$, $t = t_{n+1/2}$ e $t = t_{n+1}$. Fonte Liu et al. (1998).	49
Figura 3.2 – Descomposição do incremento de deslocamento: $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{def} + \Delta \mathbf{u}^{rot}$. Fonte Liu et al. (1998).	50
Figura 3.3 – Algoritmos de solução: (a) Método de Newton-Raphson; (b) Método de Newton-Raphson Modificado.	55
Figura 3.4 – Comportamento elástico ou plástico na descarga.	58
Figura 3.5 – Direção da deformação plástica para material elásto-plástico com regra associada.	59
Figura 3.6 – Comportamento de materiais: (a) Elasto-plástico perfeito; (b) Elasto-plástico com encruamento linear.	61
Figura 3.7 – Curva $\sigma \times \epsilon$ com solitação uniaxial de materiais elasto-plásticos com encruamento.	62
Figura 3.8 – Modelos matemáticos para representação do comportamento elasto-plástico dos materiais: (a) plástico perfeito; (b) com endurecimento isótropo; (c) com endurecimento cinemático; (d) com endurecimento misto. Fonte Owen e Hinton (1980).	62
Figura 3.9 – Representação geométrica das superfícies de escoamento de Tresca e von Mises: (a) no espaço das tensões principais; (b) No plano perpendicular ao eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Fonte Owen e Hinton (1980).	64
Figura 3.10–Evolução das tensões em um ponto para um material elasto-plástico com ponto, na configuração de referência em estado: (a) plástico ; (b) elástico. Fonte Owen e Hinton (1980).	68
Figura 3.11–Processo refinado da redução das tensões à superfície de plastificação. Fonte Owen e Hinton (1980).	69
Figura 4.1 – Esquema da formulação ALE desacoplada utilizado no presente trabalho.	71
Figura 4.2 – Exemplo da aplicação da formulação ALE: (a) Malha inicial (545 nós e 256 elementos); (b) Deslocamento material com análise elasto-plástica; (c) Malha depois do movimento de malha. Fonte Nazem et al. (2006).	72

Figura 4.3 – Simplificações de modelos: (a) Modelado em simetria; (b) Modelado em EPD.	73
Figura 4.4 – Movimento dos nós de contorno sobre uma linha. Fonte Vavourakis et al. (2013a).	74
Figura 4.5 – Esquema da formulação α -geral: (a) curva com CRMNC i_d ; (b) parcela da curva com nós $i \leq i_d$; (c) parcela da curva com nós $i \geq i_d$.	76
Figura 4.6 – Representação de curvas: (a) Por interpolação; (b) Por aproximação. Fonte Piegl e Tiller (1996).	78
Figura 4.7 – Representação paramétrica de uma superfície.	79
Figura 4.8 – Curvas de <i>Bézier</i> : (a) Linear; (b) Quadrática; (c) Cúbica.	80
Figura 4.9 – Funções de base $N_{i,p}$ para o vetor de nós $U = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ para; (a) $p = 0$; (b) $p = 1$; (c) $p = 2$. Fonte Cottrell et al. (2009).	81
Figura 4.10–Interpolação global de uma superfície. (a) Pontos dados; (b) interpolação do pontos na direção u ; (c) interpolação dos pontos na direção v através dos pontos interpolados na direção u ; (d) Superfície interpolada com os pontos de controles obtidos. Fonte Piegl e Tiller (1996).	84
Figura 4.11–Esquema do movimento de um nó interno por IDA.	86
Figura 4.12– <i>Célula tipo</i> definida para: (a) Caso bidimensional; (b) Caso tridimensional.	88
Figura 4.13–(a) Malha deformada - <i>malha antiga</i> ; (b)Malha realocada - <i>nova malha</i> ; (c) Superposição das malhas.	90
Figura 4.14–Processo da interpolação por IFF (a) Extrapolação das variáveis de estado desde os PG aos nós da <i>malha antiga</i> ; (b) <i>nova malha</i> ; (c) Interpolação desde os nós da <i>malha antiga</i> para os pontos de Gauss da <i>nova malha</i> .	91
Figura 4.15–Elementos influentes na interpolação: (a) Caso Tridimensional; (b) Caso estado plano de deformações (bidimensional).	93
Figura 5.1 – Realocação de nós numa curva: (a) Configuração inicial ; (b) configuração deformada; (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) configuração deformada, vista dos movimentos de nós.	95
Figura 5.2 – Estudo do grau das funções de base p : (a) $p = 1$; (b) $p = 2$; (c) $p = 4$.	96
Figura 5.3 – Realocação de nós numa superfície: (a) configuração inicial da malha (placa); (b) configuração deformada (superfície suposta); (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) superposição das configurações deformadas, com e sem realocação de nós.	97
Figura 5.4 – Realocação de nós numa superfície: (a) configuração inicial; (b) configuração deformada; (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) superposição das configurações deformadas, com e sem realocação de nós.	98
Figura 5.5 – Malhas do prisma: (a) malha 1; (b) malha 2.	99
Figura 5.6 – Prisma deformado: (a) malhas deformadas superpostas. Malha 1: linhas azuis, malha 2: linhas pretas; (b) fator de carga x deslocamentos para o ponto 'P' indicado.	99

Figura 5.7 – Cubo 3 : 3 : 3 para teste IFF.	101
Figura 5.8 – Placa quadrada sujeita a carga concentrada, modelo de 1/4 da placa.	102
Figura 5.9 – Resultados: Carga concentrada x deslocamento vertical no centro da placa.	102
Figura 5.10–Vistas das malhas para uma configuração deformada, com formulação Lagrangeana (malhas pretas) e formulação ALE (malhas azuis).	103
Figura 5.11–Modelos de fundação rígida em solo não drenado: (a) Modelo de Nazem et al. (2006) e Nazem et al. (2009), elementos triangulares de 6 nós; (b) Modelo de Vavourakis et al. (2013a), elementos triangulares de 6 e elementos quadriláteros de 8 nós; (c) Modelo de Vavourakis et al. (2013b), elementos triangulares de 6 nós.	104
Figura 5.12–Esquema da malha: (a) Geometria, distribuição e condições de contorno da malha, $B = 1m$; (b) Malha utilizada.	104
Figura 5.13–Comparação entre formulação Lagrangeana (1) e formulação ALE (2) para níveis de deslocamento (δ) quanto a integridade da malha: (a) $\delta/B = 0.17$; (b) $\delta/B = 0.26$; (c) $\delta/B = 0.41$; (d) $\delta/B = 0.45$	106
Figura 5.14–Comparação da distribuição de tensões entre a formulação Lagrangeana e formulação ALE para o deslocamento vertical $\delta/B = 0.26$	107
Figura 5.15–Comparação da distribuição de tensões entre a formulação Lagrangeana e formulação ALE para o deslocamento vertical $\delta/B = 0.45$	108
Figura 5.16–Curvas normalizadas de carga-deslocamento para penetração de fundação rígida em solo com modelo Tresca (Fonte Nazem et al. (2006) para dados de outros autores).	109
Figura 5.17–Últimos passos do processo incremental.	109
Figura B.1 – Descomposição da normal à superfície.	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação clássica das análises não lineares. (Bathe, 1996)	46
Tabela 2 – Tensão efetiva e tensão de escoamento equivalente para os critérios de plastificação incluídos no algoritmo elasto-plástico. Fonte Owen e Hinton (1980).	65
Tabela 3 – Constantes definindo a superfície de plastificação. Fonte Owen e Hinton (1980).	65
Tabela 4 – Diferenças relativas das variáveis de estado interpoladas em relação a variáveis de estado calculadas.	100
Tabela 5 – Fundação rígida em solo não drenado - Dados iniciais.	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ALE	Arbitrária Lagrangeana-Euleriana. [CRMNC]Centro de referência para movimento dos nós de contorno
EPD	Estado plano de deformações.
EPP	Elasto-plástico perfeito.
FEM	Método dos elementos finitos.
IC	Integração completa.
IDA	Método da inversa da distância.
IFF	Interpolação por funções de forma.
IR	Integração reduzida uniforme.
IS	Integração reduzida seletiva.
MPIV0	Método da média ponderada por inversa do volume inicial.
MPIV1	Método da média ponderada por inversa do volume inicial com influência da variação do volume.
MGCD	Método geral de controle de deslocamentos.
NR	Newton-Raphson.
ORT	Otimização da ortogonalidade.
PNI	Planos com nós internos.
RBPIF	Interpolação por função radial.
SNC	Superfície natural de contorno.
TL	Lagrangeana total.
UL	Lagrangeana atualizada.

LISTA DE SÍMBOLOS

Maiúsculas Romanas

B, \bar{B}	Matriz gradiente.
\tilde{B}	Matriz gradiente correspondente à parte de dilatação do vetor de deformações.
\hat{B}	Matriz gradiente correspondente à parte desviadora do tensor de deformações.
$B_{i,n}$	Polinômio de <i>Bernstein</i> de grau n .
C^e	Matriz constitutiva para um material elástico linear e isotrópico.
C^{ep}	Matriz constitutiva para um material elasto-plástico.
$C(u)$	Vetor de coordenadas parametrizadas, parâmetro ' u '.
C_1, C_2, C_3	Constantes para definir superfícies de plastificação.
E	Módulo de elasticidade logitudinal.
\mathbf{E}	Matriz de estabilização.
H	Módulo plástico no início do escoamento.
I_1, I_2, I_3	Invariantes do tensor de tensões.
J_1, J_2, J_3	Invariantes do tensor desviador de tensões.
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana.
$\mathbf{J}(0)$	Matriz Jacobiana, avaliada no ponto central do elemento.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez.
\mathbf{L}	Gradiente espacial de velocidade.
M_C	Matriz de massa consistente.
M_D	Matriz de massa discreta.
N	Funções de forma do elemento (funções de interpolação do elemento).
N	Número de segmentos em que está dividida uma curva ou corda.
$N_{i,p}$	Funções de base.
\mathbf{P}	Vetor de cargas externas.
P_i	Pontos de controle.
Q_i	Pontos discretos.

\mathbf{R}	Matriz rotação, do sistema global ao sistema corrotacional.
S	Superfície externa do domínio.
S_e	Superfície das faces do elemento.
$\mathbf{S}(u, v)$	Superfície parametrizada, parâmetros ' u ' e ' v '.
$\mathbf{U}^{(e)}$	Vetor de deslocamentos nodais do elemento e .
\mathbf{U}	Vetor de nós.
V	Volume total do domínio.
V_e	Volume do elemento.
δW^{int}	Trabalho virtual interno.

Minúsculas Romanas

a	Derivada da função de plastificação em relação às tensões.
a	Contador para nós de um elemento.
b	Vetor de forças de volume.
b_1, b_2, b_3	Componentes das sub-matrizes gradientes.
b	Derivada da função de fluxo em relação às tensões.
c	Em subscripto ou sobrescrito indica que a variável está sendo avaliada no centro do elemento.
c	Em subscripto ou sobrescrito indica que a variável está sendo avaliada no sistema corrotacional.
d	Indica diferencial, quando acompanhado à direita do valor que está sendo diferenciado.
d	Distância Euclidiana entre dois pontos.
d	Taxa de deformação.
e	Em sobrescrito e em parêntesis, indica referimento ao elemento ' e '.
f	Vetor de forças internas do elemento.
f	Função de escoamento, superfície de escoamento.
g	Função de fluxo.
hg	Em subscripto ou sobrescrito faz referência a controle dos modos espúrios (<i>hourglass</i>).
h_i	Vetores de representação dos modos espúrios.
i_d	Índice do CRMNC.

int	Em subscripto ou sobrescrito faz referência a 'interna'.
i, j, k, l	Em subscripto, contadores.
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vetores unitários nas direções x, y e z , respectivamente, no sistema de coordenadas globais.
$j_0, j(0)$	Determinante da matriz Jacobiana avaliada no centro do elemento.
k	Parâmetro de percentagem.
p	Grau do polinômio de interpolação.
p	Fator de ponderação.
\bar{p}	Vetor de cargas de superfície aplicadas sobre a superfície S .
r	Vetores auxiliares no sistema de coordenadas global.
s	Tensor desviador.
s	Forças residuais.
t	Em sobrescrito indica transposição ou tempo.
tol	Valor da tolerância.
u	Vetor de deslocamento.
u_a	Vetor de deslocamentos do nó 'a'.
u, v	Coordenadas paramétricas.
v	Velocidade do movimento material.
v^r	Velocidade do movimento da malha.
x, y, z	Coordenadas espaciais.
x_a	Coordenadas do nó 'a'.
x^{PG}	Coordenadas dos pontos de gauss.

Maiúsculas Gregas

Δ	Indica variação ou um incremento pequeno da variável o acompanha à direita.
Ψ	Função que representa variáveis de estado.
Ω	Indica referência a uma determinada configuração geométrica.

Minúsculas Gregas

α	Relação entre o comprimento de um trecho de curva com o total da curva.
γ	Vetores de estabilização.

δ	Indica ação virtual, quando acompanhado na direita de uma variável.
δ	Comprimento de uma corda ou um trecho de corda.
δ_{ij}	Delta de <i>Kronecker</i> .
$\kappa_1, \kappa_2, \dots$	Parâmetros experimentais.
ϵ	Tensor de deformações.
θ	Ângulo.
λ	Constante de <i>Lamé</i> , módulo de corte ou elasticidade transversal.
μ	Constante de <i>Lamé</i> , módulo de incompressibilidade do material.
ν	Coefficiente de <i>Poisson</i> .
ξ, η, ζ	Coordenadas naturais.
ρ	Raio.
σ	Tensor de tensões.
$\sigma^{\nabla T}$	Taxa de tensão de <i>Truesdell</i> .
$\dot{\sigma}^{Lie}$	Taxa de tensão de <i>Lie</i> .
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva.
σ_y	Tensão de escoamento equivalente.
σ_e	Tensão de escoamento para teste uniaxial.
ω	Tensor taxa rotação.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Motivação	27
1.2	Formulação ALE na mecânica de sólidos	28
1.3	Não Linearidade	30
1.4	Elemento hexaédrico com integração reduzida	31
1.5	Objetivo	32
1.6	Organização do texto	33
2	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	34
2.1	O princípio dos trabalhos virtuais	34
2.2	Formulação do elemento hexaédrico de 8 nós	36
2.3	Controle dos modos espúrios	37
2.4	Matriz de rigidez de estabilização	40
2.5	A matriz de estabilização 'E'	43
2.6	A matriz de rotação	44
2.7	Tensões nodais	44
3	ANÁLISE DAS NÃO LINEARIDADES	46
3.1	A não linearidade geométrica	46
3.1.1	Formulação corrotacional	47
3.1.1.1	Tensões e deformações corrotacionais	48
3.1.1.2	Incremento de deformações no sistema corrotacional	48
3.1.2	Equações constitutivas incrementais	51
3.1.3	Matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas	54
3.1.4	Algoritmo de solução Newton-Raphson (NR)	54
3.1.5	Critério de convergência	56
3.2	A não linearidade física	57
3.2.1	Elasto-plasticidade	57
3.2.1.1	Decomposição da deformação elasto-plástica	58
3.2.1.2	Leis constitutivas	58
3.2.1.3	Critério de escoamento	58
3.2.1.4	Regra de fluxo	59
3.2.1.5	Equação de consistência	60
3.2.1.6	Lei de encruamento-amolecimento	60
3.2.2	Critérios de plastificação	63
3.2.2.1	Critério de plastificação de Tresca (1864)	63
3.2.2.2	Critério de plastificação de von Mises (1913)	64

3.2.2.3	Aplicação computacional dos critérios de plastificação	64
3.2.3	Integração da relação constitutiva	66
3.2.4	Determinação do estado de tensão	66
4	FORMULAÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA-EULERIANA - ALE	70
4.1	Processo geométrico - Movimento de malha	71
4.1.1	Realocação dos nós de contorno	72
4.1.1.1	Superfícies <i>B-Splines</i>	78
4.1.2	Realocação dos nós internos	84
4.1.2.1	Método da inversa da distância - IDA	85
4.1.2.2	Métodos da média ponderada - MPIV0 e MPIV1	86
4.1.2.3	Otimização da ortogonalidade dos elementos - ORT	87
4.2	Processo físico - transferência das variáveis de estado	89
4.2.1	Interpolação por funções de forma - IFF	90
4.2.2	Interpolação por função radial - RBPIF	91
4.2.3	Método da inversa da distância - IDA	93
4.2.4	Verificação da admissibilidade das tensões e equilíbrio	94
5	APLICAÇÕES	95
5.1	Verificação do movimento de nós nos contornos	95
5.1.1	Movimento de nós sobre uma curva	95
5.1.2	Movimento de nós sobre superfícies	96
5.2	Validação da interpolação	98
5.2.1	Estudo especial para o método de interpolação IFF	100
5.3	Exemplos de aplicação	101
5.3.1	Placa quadrada com carga concentrada	101
5.3.2	Fundação rígida sobre solo não drenado	103
6	CONCLUSÕES	110
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	111
	REFERÊNCIAS	112
	ANEXOS	117
	ANEXO A – MAPEAMENTO INVERSO DO ELEMENTO	118
	ANEXO B – MAPEAMENTO INVERSO DA SUPERFÍCIE <i>B-SPLINE</i>	120

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Usualmente, os algoritmos utilizados na descrição cinemática de meios contínuos estão baseados em duas descrições clássicas: a descrição Lagrangeana e a Euleriana. A descrição apresentada e utilizada neste trabalho é a Arbitrária Lagrangeana-Euleriana ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*), que combina as vantagens de cada uma destas descrições cinemáticas clássicas enquanto tenta minimizar as desvantagens das mesmas.

Em mecânica de sólidos é geralmente utilizado a descrição Lagrangeana. O sistema de referência está ligado ao corpo (referência material), de tal forma que cada nó da malha de elementos finitos esteja associado ao mesmo ponto material durante todo o processo. A descrição Lagrangeana tem maior facilidade de trabalhar com superfícies livres, interfaces entre materiais diferentes e de tratar meios que possuem relações constitutivas dependentes da história de deformação. Em contrapartida, problemas com grandes deformações e distorções se traduzem, muitas vezes, em malhas distorcidas que podem levar a instabilidades computacionais e com isto a resultados com baixa precisão, resultados não físicos ou comprometer a convergência da solução.

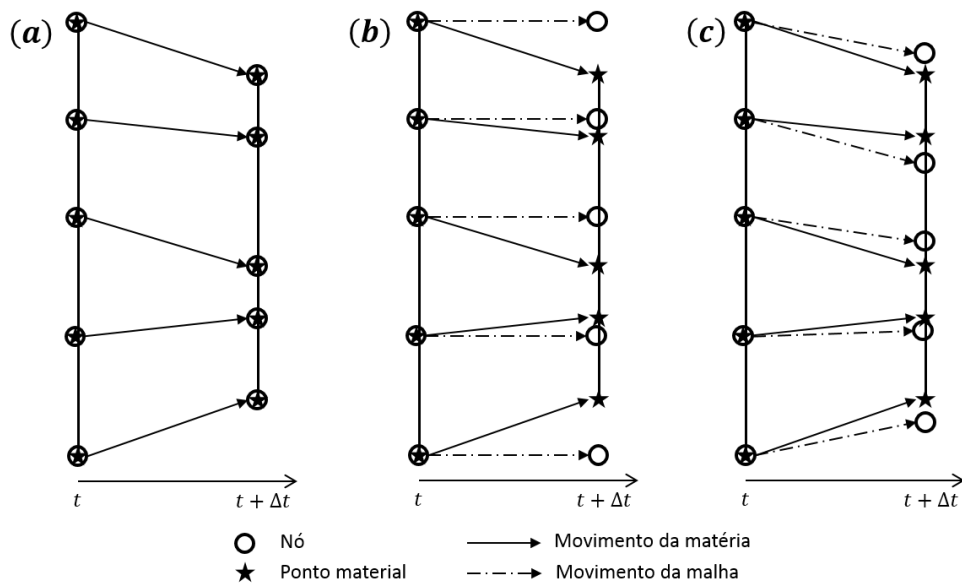


Figura 1.1 – Descrições cinemáticas. (a) Lagrangeana; (b) Euleriana; (c) Arbitrária Lagrangeana Euleriana (ALE). Fonte Donea et al. (2004).

Algoritmos com descrição Euleriana são geralmente utilizados em mecânica de fluidos. O sistema de referência é fixo no espaço (referência espacial) e como a malha não está aderida ao meio estudado, as faces ou lados dos elementos não tem a restrição de pertencer ao contorno do corpo. Grandes distorções no movimento do meio contínuo são analisadas com certa facilidade, embora com custos de precisão na definição de interfaces, detalhes dos fluxos, e dificuldade no

tratamento de contato entre materiais diferentes.

A formulação ALE, na mecânica de sólidos, se desenvolveu em atenção às limitações da formulação Lagrangeana para problemas com grandes deformações, introduzindo o movimento da malha independente do corpo (realocação dos nós) de maneira a obter uma malha de melhor qualidade mantendo a quantidade, tipologia e conectividade dos elementos.

O desenvolvimento deste trabalho é feito combinando a descrição ALE com o método de elementos finitos utilizando um elemento hexaédrico de oito nós com interpolação tri-linear e um ponto de integração (integração reduzida). Por ser um elemento tri-linear, o mesmo apresenta bom comportamento em problemas com alta não linearidade, tanto física como geométrica.

Elementos finitos com integração completa (IC) garantem, em geral, a convergência e estabilidade da solução com o refinamento de malha. O uso da IC, principalmente com elementos tridimensionais, implica altos custos computacionais nas diversas etapas do processo de solução, além de apresentarem travamento volumétrico (*volumetric locking*) para materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis, e travamento de cisalhamento ou de membrana (*shear locking* ou *membrane locking*) em estruturas finas sujeitas à flexão (Zienkiewicz e Taylor, 1994a), (Zienkiewicz e Taylor, 1994b).

Uma solução para estes problemas é a integração reduzida seletiva (IS), na qual a integração completa e a integração reduzida são aplicadas em diferentes termos para formar a matriz rigidez do elemento. Esta alternativa apresenta bons resultados em casos onde a IC apresenta dificuldades, embora seja computacionalmente mais custoso que uma IR.

Elementos finitos com integração reduzida uniforme (IR), principalmente com um ponto de integração, são os elementos mais eficientes quanto ao custo computacional. Porém, resultados obtidos através destes elementos podem perder o significado físico pelo surgimento modos espúrios. Estes modos correspondem a deformações não constantes no interior do elemento e são conhecidos como instabilidades de malha, modos cinemáticos, modos de energia nula, modos espúrios ou *hourglass*, os quais podem levar à singularidade da matriz rigidez global (Oñate, 1995). O uso de IR requer a aplicação de um eficiente controle dos modos espúrios do elemento.

1.2 FORMULAÇÃO ALE NA MECÂNICA DE SÓLIDOS

Em diversos campos da engenharia são analisados casos que envolvem grandes deformações. Na procura da solução utilizando o FEM existem três abordagens possíveis: Lagrangeana Total, TL (do acrônimo em inglês: *Total Lagrangian*), Lagrangeana Atualizada, UL (*Updated Lagrangian*) e, mais recentemente, Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE). Na abordagem TL é preciso empregar o primeiro ou o segundo tensor de tensões de Piola - Kirchhoff conjuntamente com as suas deformações conjugadas, para levar em conta grandes deformações, seja por exemplo o tensor gradiente de deformação ou o tensor de deformação de Green - Lagrange. A configuração

de referência corresponde à configuração indeformada, ou seja, durante todo o processo a deformação é dada em relação ao corpo indeformado e a malha acompanha o movimento do corpo. Na abordagem UL aproveitam-se os incrementos de deslocamentos durante a análise para calcular-se incrementos de deformações em relação à última configuração conhecida do corpo. Assim é possível o uso dos tensores de tensões e deformações de Cauchy combinados com o uso de taxas de tensão objetiva em uma formulação hipoeelástica (Bathe, 1996).

Observa-se que os métodos TL e UL são duas formas alternativas para a obtenção da deformação atual do corpo e ambas deveriam convergir na mesma solução do problema. Em teoria, ambos métodos podem ser usados para problemas com grandes deformações e deslocamentos. O principal inconveniente das abordagens TL e UL reside no fato de que em algum ponto da análise pode-se ter distorções dos elementos tão excessivas que cheguem a produzir instabilidades numéricas graves. Isto acontece com maior frequência para os problemas que envolvem relações constitutivas não lineares. O método ALE foi proposto com o objetivo de superar o problema da distorção da malha, adequando a mesma mediante o desacoplamento do movimento de malha ao do movimento da matéria (Vavourakis et al., 2013a), (Nazem et al., 2006).

O conceito básico do método ALE foi proposto inicialmente por Noh et al. (1964) definindo com os termos *Quasi-Eulerian* e *Coupled Eulerian-Lagrangian*, Trulio (1966) e Hirt (1970) propuseram o nome de ALE, em seguida Hirt et al. (1974) trataram problemas hidrodinâmicos com movimento de fluido no contorno em 2D. Todos estes trabalhos foram desenvolvidos empregando-se diferenças finitas.

O uso de ALE com o FEM foi proposto por Donea et al. (1977) para modelagem de problemas de mecânica dos fluidos na iteração sólido-estrutura com superfície livre. Belytschko e Kennedy (1978) estudaram fluidos em canais estreitos e no trabalho de Hughes et al. (1979) foi introduzido o método *operator splitting* que mais adiante se consolidou com o nome de *operator split*. O *operator split* basicamente separa em duas etapas o processo ALE: a etapa Lagrangeana, em seguida, a etapa Euleriana.

Belytschko et al. (1980) apresentaram análises em iteração fluido estrutura, definindo o método como *Quasi-Eulerian* para estado plano e problemas axissimétricos. Hughes et al. (1981) deram a primeira formulação ALE para fluidos viscosos incompressíveis, também já com a denominação ALE dentro do FEM.

A formulação ALE foi utilizada inicialmente na mecânica dos sólidos para simular problemas não lineares com propagação de trincas, problemas de contato com fricção, impacto, explosões e processos de fabricação de materiais. As grandes deformações que caracterizam estes problemas levaram investigadores a incorporar a metodologia ALE em vez da formulação clássica Lagrangeana. Entre os primeiros trabalhos com ALE na mecânica dos sólidos se podem citar: Haber (1984) que modelou problemas de contato com atrito e exemplos clássicos da mecânica da fratura limitado a materiais elásticos lineares; Haber e Koh (1985) onde ampliaram o estudo

da propagação de trincas; Liu et al. (1986) que desenvolveram detalhadamente a aplicação de ALE em materiais não lineares; Schreurs et al. (1986) que aplicaram ALE para estudar processos de conformação de materiais elásticos lineares isotrópicos mediante axissimetria.

Devido a sua capacidade de lidar com problemas que envolvem materiais altamente não-lineares, a abordagem ALE se tornou muito popular nos últimos anos particularmente no campo da engenharia geotécnica. Um dos primeiros trabalhos a empregar uma formulação ALE nesta área pode ser encontrado em Van der Berg e Huétink (1996), que simularam um cone de penetração em material coesivo com atrito. No entanto, deve-se a Nazem e Sheng (2004) a aplicação de ALE em problemas de consolidação e deformação de solos devidos a cargas sobre fundações. Nazem et al. (2006) e Sheng et al. (2009) demonstraram a superioridade em desempenho e precisão do método ALE sobre os métodos TL e UL na análise de fundações sobre argila utilizando o modelo elasto-plástico perfeito de Tresca e o modelo Cam-Clay modificado. Também no trabalho Nazem et al. (2006) foi desenvolvida uma metodologia na qual o remalhamento é realizado em dois passos, no primeiro passo são realocados os nós dos contornos e no segundo os nós internos.

São raros os trabalhos com abordagem ALE para problemas tridimensionais em mecânica de sólidos, pode-se citar os trabalhos de Bittencourt e Creus (1995), onde o movimento de malha é aplicado nos nós internos do corpo não assim nos nós do contorno e Aymone (2000), que apresenta um algoritmo de realocação dos nós do contorno. No trabalho de Aymone (2000) o algoritmo de movimento dos nós de contorno (realocação nodal do contorno) é mais apropriado para malhas regulares igualmente espaçadas.

1.3 NÃO LINEARIDADE

A mecânica de sólidos elásticos lineares tem como premissas básicas as seguintes hipóteses (Zienkiewicz e Taylor, 1994b):

- Forma linear das relações deformação - deslocamentos (linearidade geométrica),
- Forma linear das relações tensão - deformação (linearidade física).

Muitos problemas importantes não apresentam as condições necessárias para poder ser considerados como lineares, estes são considerados *não lineares*. Em mecânica dos sólidos, a plasticidade, fluência ou outras relações constitutivas complexas são exemplos de casos nos quais devem ser desenvolvidos processos numéricos que permitam considerar a não linearidade do problema.

Cabe ressaltar que em problemas lineares a solução é sempre única, o que não acontece na maioria dos problemas não lineares. Assim, obtendo-se uma solução, esta pode não ser a solução procurada (solução fisicamente correta). Para obter resultados com sentido físico, é primordial ter uma formulação que permita representar a natureza do problema, faz-se isto

através de procedimentos incrementais - iterativos em passos. O procedimento incremental - iterativo em pequenos passos se torna fundamental para problemas cujas leis constitutivas de tensão-deformação dependem da história de deformação.

Neste trabalho a não linearidade física considerada é devida unicamente à plasticidade, na análise por elementos finitos será necessário integrar as relações constitutivas para obter os incrementos de tensão. Essas relações definem um conjunto de equações diferenciais ordinárias e os métodos para integrá-las são usualmente classificados como explícitos ou implícitos. A solução adotada no presente trabalho para a integração numérica da lei constitutivas elasto-plástica é, em essência, o algoritmo *predictor-corrector* de Owen e Hinton (1980).

1.4 ELEMENTO HEXAÉDRICO COM INTEGRAÇÃO REDUZIDA

Na escolha de um elemento finito tridimensional para a sua aplicação, segundo Belytschko et al. (2000), os tetraedros não apresentam um bom desempenho em problemas envolvendo materiais incompressíveis, restando assim os elementos hexaédricos como a melhor alternativa para análise de problemas não-lineares.

As simulações numéricas de problemas não lineares possuem um alto consumo de tempo de processamento computacional, devido ao fato do algoritmo precisar de iterações para satisfazer as condições de equilíbrio mecânico. A matriz de rigidez e vetores de força interna devem ser atualizadas regularmente, para fazê-lo é necessário um esquema numérico para integrar as equações constitutivas no processo incremental. Trabalhando com o FEM é comum utilizar técnicas de quadratura para avaliar numericamente matrizes de rigidez dos elementos e vetores de forças, com isto, o trabalho computacional a cada iteração é multiplicado pelo número de pontos de quadratura (ou pontos de Gauss) utilizados.

O uso de IR otimiza o custo computacional no processo de solução, mas se deve implementar o elemento com um esquema de controle de modos espúrios.

Liu et al. (1994) desenvolveram uma formulação utilizando 4 pontos de integração para o elemento hexaédrico de 8 nós. Neste método a matriz \mathbf{B} (matriz gradiente de deformação) é dada em forma explícita. Para evitar o travamento de cisalhamento, o vetor de deformações generalizado é desenvolvido em um sistema co-rotacional e certos termos não constantes nas componentes de deformação de cisalhamento são omitidos. O travamento volumétrico é resolvido fazendo-se com que a parte dilatacional da matriz gradiente seja sub-integrada e avaliada apenas no ponto central do elemento. Justifica-se o emprego de 4 pontos de integração para melhorar a precisão com relação aos elementos, que adotam apenas um ponto de integração e para poder capturar frentes plásticas na malha durante carga e descarga na análise elastoplástica. Mas a vantagem computacional é parcialmente perdida. Estes elementos apresentaram bons resultados em problemas de cascas finas.

Hu e Nagy (1997), baseados na formulação Liu et al. (1994), propuseram reduzir este elemento a um ponto de integração. No centro do elemento, os vetores de deformações e tensões são expandidos em série de Taylor até os termos bi-lineares. Os termos constantes são usados para calcular o vetor de forças internas do elemento e os termos lineares e bi-lineares para formar o vetor de forças de estabilização dos modos espúrios, que são removidos de forma seletiva da matriz gradiente, aqueles modos associados com o travamento volumétrico e de cisalhamento, sem afetar a estabilidade do elemento. São adotados os vetores gradientes uniformes propostos por Belytschko e Binderman (1991) ao invés dos avaliados no ponto central do elemento, garantindo-se que o elemento passe no *patch test*.

Reese (2005) estudou a estabilização para materiais elasto-plásticos obtendo um valor ótimo para a constante de Lamé, única responsável da matriz de estabilização. E uma correção na estabilização para materiais elasto-plásticos perfeitos.

O presente trabalho pode ser considerado como a continuação de trabalhos que vem sendo desenvolvidos no Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM) da UFRGS empregando-se a formulação com hexaedros de um ponto de integração. Duarte-Filho (2002) implementou o elemento hexaédrico de oito nós com IR proposto por Hu e Nagy (1997) com bom desempenho em problemas de placas e cascas para análise estática e dinâmica com não linearidade geométrica. Ampliado para materiais compósitos por Andrade (2005). Esta formulação foi estendida por Schmidt (2006) introduzindo o estudo de não linearidade física com os modelos de plasticidade de von Mises e Mohr-Coulomb. Braun (2007) implementou o elemento para iteração fluido estrutura combinada com uma descrição ALE no fluido. Braun e Awruch (2013a, 2013b) estudaram problemas de iteração solo estruturas com modelos clássicos de plasticidade e modelos de estados críticos.

1.5 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação ALE desacoplada para a análise de corpos sólidos sujeitos a grandes deformações usando o método dos elementos finitos.

Trabalhos anteriores desenvolvidos no CEMACOM deram base para a formulação ALE aqui desenvolvida. Destes trabalhos (citados no item anterior) foram adotadas:

- A formulação do elemento hexaédrico tri-linear com um ponto de integração e controle dos modos espúrios,
- A formulação Lagrangeana corrotacional, e
- A formulação da análise para a elastoplasticidade.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O **capítulo 2** apresenta o princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao método dos elementos finitos, o desenvolvimento do elemento hexaédrico com um ponto de integração, o controle dos modos espúrios, a matriz de rotação do elemento desde o sistema global ao sistema local ou corrotacional do elemento.

No **capítulo 3** são discutidas as não linearidades levadas em conta no presente trabalho. Está claramente dividido em duas partes. Na primeira parte apresenta-se a não linearidade geométrica, define-se a formulação corrotacional em cujo sistema (sistema de referência corrotacional) as tensões de Cauchy são objetivas com o tensor de deformações, apresenta-se o processo incremental e o algoritmo de solução de Newton-Raphson implementado. A segunda parte aborda a não linearidade física com um breve resumo da elasto-plasticidade, os modelos elasto-plásticos implementados e o algoritmo de integração das tensões.

O **capítulo 4** apresenta o algoritmo desenvolvido para a formulação ALE desacoplada. Na primeira parte, apresenta-se o movimento ou realocação dos nós da malha, são apresentados os esquemas de movimentos de dos nós sobre as superfícies de contorno e dos nós internos. Na realocação dos nós de superfícies são utilizadas superfícies *B-splines* mediante as quais as superfícies são parametrizadas. Uma seção é dedicada às superfícies *B-splines*, na qual se apresentam as definições básicas e o algoritmo para sua obtenção. A segunda parte aborda a atualização das variáveis de estado, que são as magnitudes necessárias para poder continuar com o processo de cálculo, logo após o movimento da malha. São apresentados os métodos de interpolação estudados.

O **capítulo 5** apresenta as aplicações numéricas, uma primeira parte dedicada à verificação do movimento sobre superfície *B-Spline* e validação dos métodos de interpolação. A segunda parte com exemplos de aplicações.

Nas **Conclusões** apresentam-se comentários finais sobre pontos importantes tratados ao longo do processo de aplicação da formulação ALE com um elemento de integração reduzida.

2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

2.1 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

As equações de equilíbrio para um volume elementar de um contínuo tridimensional qualquer, podem ser escritas em função das componentes do tensor de tensões (simétrico):

$$\text{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

onde $\text{div}()$ representa o operador divergente, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ é o tensor de tensões e \mathbf{b} é o vetor de forças de volume. Transformando a equação 2.1 em sua forma fraca, o que equivale ao uso do método de resíduos ponderados, chega-se à equação dos trabalhos virtuais:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^t \mathbf{b} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{p}} dS = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.2)$$

onde t indica transposição, $\delta \mathbf{u}$ é vetor das componentes de deslocamento virtual, \mathbf{b} é o vetor de forças de volume, $\bar{\mathbf{p}}$ é o vetor de cargas aplicadas sobre S , $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor com as componentes do tensor de tensões do elemento, e $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor das componentes do tensor de deformações virtuais devido a $\delta \mathbf{u}$ (ver Figura 2.1). O trabalho virtual interno é dado por $\delta \mathbf{W}_e^{int}$:

$$\delta \mathbf{W}_e^{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.3)$$

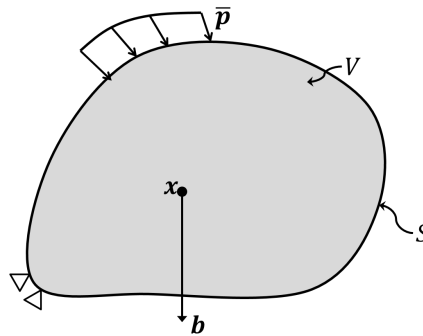


Figura 2.1 – Forças atuantes sobre um corpo

No método dos elementos finitos, o deslocamento de um ponto qualquer \mathbf{u} , dentro de um elemento e , é calculado por interpolação dos deslocamentos nodais $\mathbf{U}^{(e)}$ utilizando as funções de forma \mathbf{N} do elemento (também chamadas funções de interpolação do elemento):

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{U}^{(e)t} \mathbf{N}^t \quad \rightarrow \quad \delta \mathbf{u}^t = \delta \mathbf{U}^{(e)t} \mathbf{N}^t, \quad (2.4)$$

e as componentes de deformações $\boldsymbol{\epsilon}$ são obtidas por:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (2.5)$$

em que $\overline{\mathbf{B}}$ é a matriz gradiente que contém as derivadas das funções de forma \mathbf{N} , armazenadas da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

Considerando a relação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}^{(e)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{C}^e \overline{\mathbf{B}} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (2.7)$$

sendo \mathbf{C}^e o tensor de quarta ordem que contém os módulos elásticos do material. Para um material isotrópico o tensor \mathbf{C}^e tem a seguinte forma (Malvern, 1969):

$$C_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.8)$$

sendo δ_{ij} é o delta de *kroncker*, λ é o módulo de corte ou elasticidade transversal, μ é o módulo de incompressibilidade do material. λ e μ são conhecidas como constantes de Lamé e são obtidas a partir do módulo de elasticidade longitudinal E e do coeficiente de Poisson ν através das seguintes relações:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.9)$$

Substituindo-se 2.4 e 2.6 em 2.3 obtém-se o trabalho virtual interno a nível de elemento:

$$\delta \mathbf{W}_e^{int} = \delta \mathbf{U}^{(e)t} \left\{ \int_{V_e} \overline{\mathbf{B}}^t \mathbf{C}^e \overline{\mathbf{B}} dV \right\} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (2.10)$$

Na equação 2.2, para todos os elementos do domínio, pode-se escrever a seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (2.11)$$

com

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V_e} \overline{\mathbf{B}}^t \mathbf{C}^e \overline{\mathbf{B}} dV, \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{P} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV + \sum_e \int_{S_e} \mathbf{N}^t \overline{\mathbf{p}} dS, \quad (2.12b)$$

sendo V_e é o volume do elemento, S_e é a superfície do elemento. \mathbf{K} é a matriz de rigidez global e \mathbf{P} o vetor de cargas externas.

2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO HEXAÉDRICO DE 8 NÓS

Considerando-se o elemento hexaédrico de 8 nós com função de forma tri-linear isoparamétrico indicado na Figura 2.2, as coordenadas espaciais x_i e as componentes dos deslocamentos u_i são aproximadas a partir das coordenadas e deslocamentos nodais x_{ia} e u_{ia} , utilizando-se:

$$x_i = \sum_{a=1}^8 N_a x_{ia}, \quad (2.13)$$

$$u_i = \sum_{a=1}^8 N_a u_{ia}, \quad (2.14)$$

sendo:

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta), \quad (2.15)$$

na qual i indica o eixo do sistema coordenado global (x, y, z) variando de 1 a 3, a refere-se aos nós do elemento, variando de 1 a 8. As coordenadas naturais ξ , η e ζ do nó a são referenciadas por ξ_a , η_a e ζ_a respectivamente.

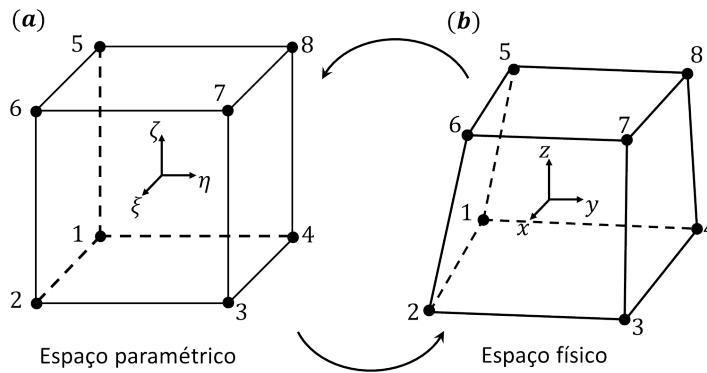


Figura 2.2 – Elemento hexaédrico de 8 nós.

Para apresentar a formulação empregada no controle dos modos espúrios devido à integração reduzida, definem-se os seguintes vetores para as coordenadas nodais no sistema global e no sistema de eixos naturais:

$$\mathbf{x}_1^t = \mathbf{x}^t = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8], \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{x}_2^t = \mathbf{y}^t = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8], \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{x}_3^t = \mathbf{z}^t = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8], \quad (2.16c)$$

$$\boldsymbol{\xi}^t = [-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1], \quad (2.16d)$$

$$\boldsymbol{\eta}^t = [-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1], \quad (2.16e)$$

$$\boldsymbol{\zeta}^t = [-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1]. \quad (2.16f)$$

2.3 CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS

O uso de integração reduzida introduz um fenômeno de instabilidade na solução, conhecido por *hourglass* ou modos espúrios. Determinadas configurações de carregamento produzem perturbações espúrias (não físicas) causadas pelo mau condicionamento induzido nas matrizes, resultantes de deformações não constantes devido ao emprego de integração reduzida (Liu et al., 1994, apud Liu et al., 1998), como se mostra na Figura 2.3.

Com o objetivo de identificar os padrões dos modos espúrios, definem-se as sub-matrizes gradiente $\mathbf{B}_a(0)$ avaliadas no ponto central ($\xi = \eta = \zeta = 0$) e os vetores \mathbf{h}_i , onde i varia de 1 a 4:

$$\mathbf{B}_a(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a(0)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1a} \\ b_{2a} \\ b_{3a} \end{bmatrix}, \quad (a = 1, 2, \dots, 8), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{h}_1^t = [+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1], \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{h}_2^t = [+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1], \quad (2.18b)$$

$$\mathbf{h}_3^t = [+1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1], \quad (2.18c)$$

$$\mathbf{h}_4^t = [+1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1]. \quad (2.18d)$$

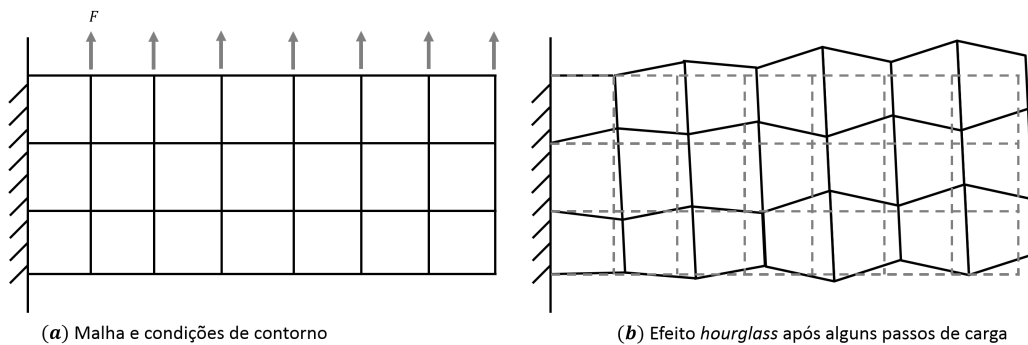


Figura 2.3 – Modos espúrios em flexão de viga com elementos hexaédricos lineares.

A Figura 2.4 mostra alguns dos modos de energia nula associados ao elemento hexaédrico com apenas um ponto de integração. Neste caso, são 12 modos espúrios, sendo 6 modos de flexão, 3 modos de torção e 3 modos não físicos, caracterizados por $\{\mathbf{h}_i^t, 0, 0\}$, $\{0, \mathbf{h}_i^t, 0\}$ e $\{0, 0, \mathbf{h}_i^t\}$ com i de 1 a 4.

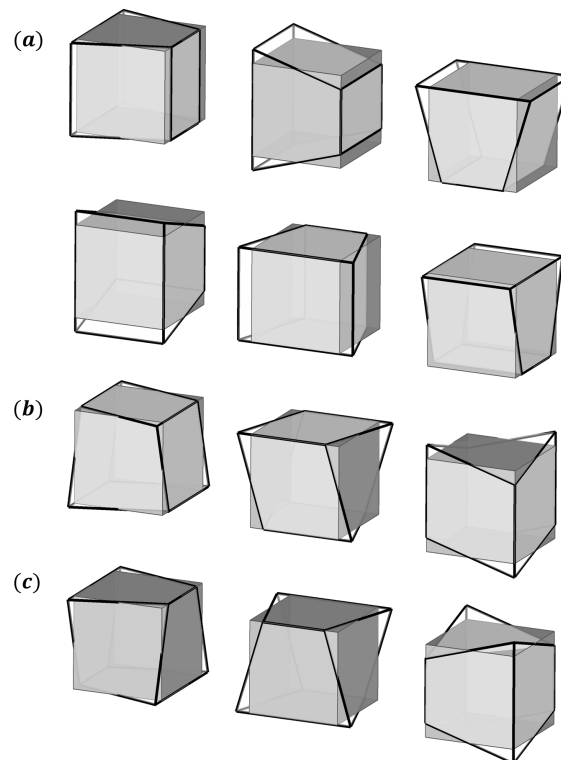


Figura 2.4 – Modos espúrios do o elemento hexaédrico com um ponto de integração: (a) 6 modos de flexão; (b) 3 modos de torção; (c) 3 modos não físicos. Fonte Zhu e Cescotto (1996).

A matriz Jacobiana, também avaliada no ponto central, é dada por:

$$\mathbf{J}(0) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \xi^t x & \xi^t y & \xi^t z \\ \eta^t x & \eta^t y & \eta^t z \\ \zeta^t x & \zeta^t y & \zeta^t z \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

cujo determinante, Jacobiano, é dado por:

$$j_o = j(0) = \det|\mathbf{J}(0)| = \frac{1}{512} \begin{vmatrix} \xi^t x & \xi^t y & \xi^t z \\ \eta^t x & \eta^t y & \eta^t z \\ \zeta^t x & \zeta^t y & \zeta^t z \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

O determinante da matriz Jacobiana pode também ser escrito como sendo a oitava parte do volume do elemento:

$$j_o = \frac{1}{8} V_e, \quad (2.21)$$

onde V_e é o volume do elemento.

Os vetores gradientes no ponto central ficam definidos por:

$$\mathbf{b}_1 = \{b_{1a}\} = \frac{1}{8}[D_{11}\xi + D_{12}\eta + D_{13}\zeta], \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{b}_2 = \{b_{2a}\} = \frac{1}{8}[D_{21}\xi + D_{22}\eta + D_{23}\zeta], \quad (2.22b)$$

$$\mathbf{b}_3 = \{b_{3a}\} = \frac{1}{8}[D_{31}\xi + D_{32}\eta + D_{33}\zeta], \quad (2.22c)$$

onde D_{ij} são os termos da matriz inversa do Jacobiano.

O uso da quadratura de Gauss para a integração do trabalho virtual interno (2.10) resulta em **travamento volumétrico**. Para evitar este fenômeno, faz-se uso da integração reduzida com a formulação proposta por Hughes (1980). A matriz gradiente $\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta)$ é decomposta na forma:

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\mathbf{B}}(0) + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.23)$$

sendo $\tilde{\mathbf{B}}(0)$ a matriz gradiente correspondente à parte de dilatação do vetor de deformações, avaliada apenas no centro do elemento, $\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta)$ a matriz gradiente correspondente à parte desviadora do tensor de deformações.

Assim, a expressão para o trabalho virtual interno 2.10 pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{W}_e^{int} = \delta \mathbf{U}^{(e)t} \int_{V_e} [\tilde{\mathbf{B}}^t(0) + \hat{\mathbf{B}}^t(\xi, \eta, \zeta)] \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.24)$$

Expandindo o tensor de deformações, avaliados no centro do elemento, em uma série de Taylor até termos bi-lineares, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\xi, \eta, \zeta) = & \boldsymbol{\epsilon}(0) + \boldsymbol{\epsilon}_{,\xi}(0)\xi + \boldsymbol{\epsilon}_{,\eta}(0)\eta + \boldsymbol{\epsilon}_{,\zeta}(0)\zeta + \\ & + 2\boldsymbol{\epsilon}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\boldsymbol{\epsilon}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\boldsymbol{\epsilon}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

o primeiro termo é o vetor de deformações constante avaliado no centro do elemento e os demais são termos lineares e bi-lineares. Na equação 2.25, as notações $\boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}(0)$ e $\boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha\beta}(0)$ representam:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}(0) = \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(0)}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{e} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha\beta}(0) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\epsilon}(0)}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (2.26)$$

Como a parte volumétrica do vetor de deformações é válida no centro de elemento (ver 2.23), os termos lineares e bi-lineares correspondem apenas à parte desviadora. Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\xi, \eta, \zeta) = & \boldsymbol{\epsilon}(0) + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi}(0)\xi + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\eta}(0)\eta + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\zeta}(0)\zeta + \\ & + 2\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta, \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = & \mathbf{B}(0) + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}(0)\xi + \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}(0)\eta + \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}(0)\zeta + \\ & + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

As primeiras e segundas derivadas da matriz gradiente $\overline{\mathbf{B}}$ avaliadas no centro do elemento são estabilizadas por vetores obtidos por Flanagan e Belytschko (1981). O uso destes vetores de estabilização é requerido para suprimir os modos espúrios (*hourglass*) mostrados na Figura 2.4. O desenvolvimento da matriz gradiente $\overline{\mathbf{B}}$ pode-se encontrar no trabalho de Duarte-Filho (2002).

O vetor de tensões é também aproximado através de uma expansão em série de Taylor, como feito para o vetor de deformações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta, \zeta) = & \boldsymbol{\sigma}(0) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0)\xi + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0)\eta + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0)\zeta + \\ & + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo-se as equações 2.28 e 2.29 na 2.24 e integrando-se, tem-se a expressão para o trabalho interno virtual do elemento:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W}_e^{int} = & \delta \mathbf{U}^{(e)t} [\mathbf{B}^t(0)\boldsymbol{\sigma}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0) + \\ & + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0)]V_e. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Todos os termos da equação 2.30 são avaliados no centro do elemento, sendo o primeiro o trabalho interno virtual e os restantes os responsáveis da estabilização do elemento.

2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ESTABILIZAÇÃO

Como a avaliação das tensões e deformações é feita apenas no ponto central, o vetor de forças internas do elemento pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}^c = \overline{\mathbf{B}}^t(0)\boldsymbol{\sigma}(0)V_e, \quad (2.31)$$

e a equação constitutiva como:

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}(0). \quad (2.32)$$

O vetor de forças internas do elemento pode ser também escrito como:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{K}^c \mathbf{U}, \quad (2.33)$$

sendo \mathbf{K}^c a matriz de rigidez do elemento dada por:

$$\mathbf{K}^c = \overline{\mathbf{B}}^t(0)\mathbf{C}^e\overline{\mathbf{B}}(0)V_e. \quad (2.34)$$

O posto (*rank*) da matriz \mathbf{K}^c é apenas seis, devido às seis componentes do tensor de deformações avaliadas no centro do elemento. Existem seis modos de corpo rígido possíveis: três modos de translação e três de rotação. Esses modos correspondem a um campo de deformações constante e, por isso, são necessários para um elemento ser considerado completo. Subtraindo-se o posto

da matriz \mathbf{K}^c (6) e o número de modos de corpo rígido (6) do número de graus de liberdade do hexaedro de 8 nós (24), obtém-se o valor 12 ($24 - 6 - 6 = 12$). Este é o número de modos espúrios correspondentes à força interna zero no elemento quando avaliado com 1 ponto de integração (ver Figura 2.4).

Para eliminar esses modos espúrios, adicionam-se forças resistentes, \mathbf{f}^{hg} , no vetor de forças internas do elemento (Hu e Nagy, 1997), então:

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^c + \mathbf{f}^{hg}. \quad (2.35)$$

Das equações 2.30, 2.31 e 2.35, pode-se definir \mathbf{f}^{hg} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{hg} = & \left[\frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0) \right] V_e. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pode-se também definir a matriz rigidez de estabilização do elemento como:

$$\mathbf{f}^{hg} = \mathbf{K}^{hg} \mathbf{U}. \quad (2.37)$$

Esta matriz é adicionada à matriz de rigidez do elemento, \mathbf{K}^c , para compensar a instabilidade gerada pela adoção de integração reduzida. Então, a matriz de rigidez resultante apresenta posto suficiente e vem dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^c + \mathbf{K}^{hg}. \quad (2.38)$$

Como o emprego de relações constitutivas do material para o cálculo das derivadas de tensões pode levar a um excesso de tarefas computacionais para determinados materiais, emprega-se aqui a mesma técnica utilizada por Hu e Nagy (1997), a qual consiste em tomar as seguintes relações constitutivas:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi} & , & & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\eta} & , & & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\zeta}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi\eta} & , & & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\eta\zeta} & , & & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{,\xi\zeta}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Com o propósito de controlar os modos espúrios do elemento, \mathbf{E} não é necessariamente a matriz de elasticidade do material e pode ser escolhida a partir de matrizes mais simples. Desta forma, prefere-se denominar $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}$ e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}$ como 'vetores tensão de estabilização' ao invés de derivadas do vetor de tensão, pois estes são apenas usados para computar o vetor de forças resistentes aos modos espúrios.

Substituindo-se 2.39 na 2.36 e com 2.37, obtém-se a matriz rigidez de estabilização na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{hg} = & \left[\frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}(0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}(0) \right] V_e. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Portanto, precisa-se escolher uma matriz \mathbf{E} apropriada para que todos os modos espúrios de \mathbf{K}^c sejam suprimidos, conforme apresentado no item

Segundo Hu e Nagy (1997), o vetor de forças internas do elemento desenvolvido até aqui não está adequadamente avaliado, se os elementos são bastantes distorcidos. Além disso, aqueles modos associados com o travamento de cisalhamento em flexão não foram removidos. Para solucionar estes problemas, Hu e Nagy (1997) utilizaram os mesmos procedimentos apresentados por Liu et al. (1994, apud Hu e Nagy, 1997), que consiste em adotar um sistema de coordenadas corrotacional. Para tal são necessárias as seguintes modificações:

- Substituir os vetores gradientes \mathbf{b}_i , avaliados no centro do elemento (2.22), por vetores gradientes uniformes $\tilde{\mathbf{b}}_i$, definidos por Flanagan e Belytschko (1981):

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{N}_{,i}(\xi, \eta, \zeta) dV, \quad (2.41)$$

então, a matriz gradiente passa a ser:

$$\tilde{\mathbf{B}}_a(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{a,x}(0) \\ \mathbf{N}_{a,y}(0) \\ \mathbf{N}_{a,z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{1a} \\ \tilde{b}_{2a} \\ \tilde{b}_{3a} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

- Cada componente de deformação de cisalhamento é interpolada linearmente em apenas uma direção no sistema de coordenadas referencial; desta forma, remove-se os modos responsáveis pelo travamento de cisalhamento:

$$\epsilon_{xy}(\xi, \eta, \zeta) = \epsilon_{xy}(0) + \hat{\epsilon}_{xy,\zeta}(0)\zeta, \quad (2.43a)$$

$$\epsilon_{yz}(\xi, \eta, \zeta) = \epsilon_{yz}(0) + \hat{\epsilon}_{yz,\xi}(0)\xi, \quad (2.43b)$$

$$\epsilon_{xz}(\xi, \eta, \zeta) = \epsilon_{xz}(0) + \hat{\epsilon}_{xz,\eta}(0)\eta, \quad (2.43c)$$

o que implica em:

$$\hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\zeta}(0) = 0, \quad (2.44a)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\zeta}(0) = 0, \quad (2.44b)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\zeta}(0) = 0, \quad (2.44c)$$

onde $\hat{\mathbf{B}}_{xy}$, $\hat{\mathbf{B}}_{yz}$ e $\hat{\mathbf{B}}_{xz}$ são as matrizes gradientes correspondentes às componentes de deformação desviadoras $\hat{\epsilon}_{xy}$, $\hat{\epsilon}_{yz}$ e $\hat{\epsilon}_{xz}$ respectivamente.

Nas equações 2.43a-c, cada componente de deformação de cisalhamento consiste em um termo constante e apenas um termo não constante. Os modos de deformação associados com o travamento de cisalhamento, os quais estão embutidos nos termos linear e bi-linear, são removidos. Os termos constantes e todos os não constantes são mantidos para as componentes de deformação normal. Como é sabido que os vetores de estabilização requeridos para suprimir os modos espúrios estão incluídos nestas matrizes gradiente, a matriz de rigidez do elemento resultante terá posto suficiente.

2.5 A MATRIZ DE ESTABILIZAÇÃO 'E'

A performance do elemento obtido até aqui depende da matriz estabilização \mathbf{E} , a qual é utilizada para calcular as tensões resistentes aos modos espúrios. A matriz \mathbf{E} desejada deve preencher os seguintes requisitos: (a) a matriz de rigidez do elemento resultante deve ter posto suficiente; (b) o travamento volumétrico e o travamento de cisalhamento devem ser evitados; (c) não devem ser necessários parâmetros especificados pelo usuário.

Então, adotando-se \mathbf{E} como uma matriz diagonal, dependente apenas da constante de Lamé μ do material, estes requisitos são cumpridos e obtém-se a forma mais simples possível para a matriz (Hu e Nagy, 1997):

$$\mathbf{E}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

sendo:

$$\mathbf{e}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2\mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^* \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Para materiais elásticos $\mu^* = \mu$. Como a matriz de estabilização \mathbf{E} não depende da outra constante de Lamé (λ , ver expressões 2.9), o elemento desenvolvido não apresentará travamento volumétrico quando o material torna-se incompressível.

O comportamento de materiais elasto-plásticos ou com dano é caracterizado por uma súbita diminuição da rigidez quando um certo limite de tensão é atingido, para prevenir rigidez excessiva e melhorar o comportamento destes materiais, Reese (2005) propôs o uso de um parâmetro otimizando para $\mu^* = \mu^{opt}$ na matriz de estabilização. O fator μ^{opt} pode ser visto como o menor parâmetro que proporciona força resistente suficiente para inibir os modos espúrios. O parâmetro otimizado pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\mu^{opt} = \mu \frac{H}{E + H}, \quad (2.47)$$

sendo E o módulo de elasticidade, H o módulo plástico no início do escoamento. Valores menores podem não prover de estabilização suficiente e valores maiores podem levar de novo a travamento volumétrico.

Para o caso de materiais elasto-plásticos perfeitos ($H = 0$), o valor obtido pela equação 2.47 é $\mu^{opt} = 0$, anulando assim a matriz de estabilização. De acordo aos exemplos e valores observados no trabalho de Reese (2005), no presente trabalho adota-se uma porcentagem do valor de μ quando o material tem comportamento elasto-plástico perfeito, trocando μ da matriz de estabilização (2.46) por μ^* :

$$\mu^* = k\mu, \quad 0.15 \leq k \leq 0.40. \quad (2.48)$$

2.6 A MATRIZ DE ROTAÇÃO

Conforme já foi mencionado, para cada elemento deve ser definido um sistema de coordenadas corrotacional. Utiliza-se uma matriz de rotação \mathbf{R} desde o sistema global (x, y, z) ao sistema corrotacional $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Os vetores corrotacionais de base devem estar alinhados com os eixos de referência do elemento (ξ, η, ζ) . Segundo Belytschko e Binderman (1993), quando os lados do elemento não permanecem paralelos após a deformação, a rotação pode ser feita apenas de forma aproximada.

Definem-se vetores no sistema de coordenadas global, \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , que coincidam com os eixos de referência ξ e η do elemento:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{1i} &\equiv \xi^t \mathbf{x}_i \\ \mathbf{r}_{2i} &\equiv \eta^t \mathbf{x}_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.49)$$

Adiciona-se um termo de correção \mathbf{r}_c a \mathbf{r}_2 , de forma que:

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c) = 0, \quad (2.50)$$

o que se consegue quando

$$\mathbf{r}_c = -\frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{r}_1. \quad (2.51)$$

Obtém-se uma base ortogonal fazendo-se o seguinte produto vetorial:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c). \quad (2.52)$$

Normalizando os vetores de base, encontra-se os elementos da matriz de rotação \mathbf{R} :

$$R_{1i} = \frac{r_{1i}}{\|\mathbf{r}_1\|}, \quad R_{2i} = \frac{r_{2i} + r_{ci}}{\|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_c\|}, \quad R_{3i} = \frac{r_{3i}}{\|\mathbf{r}_3\|}. \quad (2.53)$$

2.7 TENSÕES NODAIS

O cálculo das tensões nodais é feito por extrapolação das tensões nos pontos de Gauss. Pela natureza da formulação empregada no método dos elementos finitos, a continuidade nos nós é exigida nas deformações não assim nas tensões.

Por ser um elemento com um ponto de integração (tensões constantes no domínio do elemento) a descontinuidade de tensões nos nós é mais abrupta comparada com um elemento com integração completa. Empregou-se uma função para suavização das tensões (Oñate, 1995).

Seja σ_e^* a tensão num ponto qualquer do elemento 'e' obtido por interpolação de valores nodais de tensão $\bar{\sigma}$ com as funções de forma \mathbf{N} do elemento. Seja σ_e o valor da tensão avaliada no ponto central do elemento 'e'.

Por mínimos quadrados:

$$F = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_e)^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\boldsymbol{\sigma}_e^* - \boldsymbol{\sigma}_e)^2 dV, \quad (2.54)$$

minimizando F , tem-se:

$$\delta F = \int_{V_e} (\boldsymbol{\sigma}_e^* - \boldsymbol{\sigma}_e) \delta \boldsymbol{\sigma}_e^* dV = \int_{V_e} (\delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{N})(\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_e) dV = 0, \quad (2.55)$$

que resulta:

$$\left[\int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \right] \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \int_{V_e} \mathbf{N}^t dV \right\} \boldsymbol{\sigma}_e, \quad (2.56)$$

ou

$$\mathbf{M}_c \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.57)$$

onde:

$$\mathbf{M}_c = \left[\int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \right], \quad \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \int_{V_e} \mathbf{N}^t dV \right\} \boldsymbol{\sigma}_e. \quad (2.58)$$

Para evitar resolver o sistema de equações, trabalha-se com a matriz de massa diagonal discreta \mathbf{M}_D (com massa específica unitária consiste em uma matriz diagonal com $1/8$ do volume em cada componente da diagonal), assim:

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \frac{\sum_{i=1}^m V_i \boldsymbol{\sigma}_i}{\sum_{i=1}^m V_i}, \quad (2.59)$$

onde o somatório é realizado sobre os m elementos que contém o nó N .

3 ANÁLISE DAS NÃO LINEARIDADES

As descrições Lagrangeana Total (LT) e Lagrangeana Atualizada (LA) são as abordagens clássicas para enfrentar problemas com não linearidades. Bathe (1996) resume na tabela 1) as abordagens usuais de acordo ao tipo de análise que se deseja estudar assim como as medidas das tensões e deformações que devem ser levadas em conta.

Tabela 1 – Classificação clássica das análises não lineares. (Bathe, 1996)

Tipo de análise	Formulação típica utilizada	Medidas das tensões e deformações
Somente não linearidade do material	Material não linear (MNO)	Tensões e deformações de Engenharia (Cauchy)
Grandes deslocamentos e rotações, pequenas deformações	Lagrangiano Total (TL)	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff, deformação Green-Lagrange
	Lagrangiano Atualizado (UL)	Tensões de Cauchy, deformação de Almansi
Grandes deformações, deslocamentos e rotações	Lagrangiano Total (TL)	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff, deformação Green-Lagrange
	Lagrangiano Atualizado (UL)	Tensões de Cauchy, deformação logarítmica

No presente trabalho emprega-se outro tipo de formulação cinemática para contemplar a não linearidade geométrica que é a formulação corrotacional. Segundo Liu et al. (1998), o uso do sistema corrotacional é bastante eficiente em análises não-lineares, além de contribuir na eliminação do travamento de cisalhamento (que já foi visto na Seção 2.4).

3.1 A NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Quando são consideradas as hipótese de deformações e rotações infinitesimais, os deslocamentos (U) são funções lineares do vetor de cargas P :

$$K(U)U = P(U). \quad (3.1)$$

Sob esta hipótese, as integrais para avaliar a matriz de rigidez K e o vetor de cargas P são desenvolvidas sobre o volume original dos elementos, a matriz gradiente B de cada elemento é constante e independente dos deslocamentos. Com isto, a simples resolução do sistema de equações 3.1 fornece a resposta estática linear para um determinado carregamento. No entanto,

quando a análise envolve não linearidade geométrica, a equação 3.1 deve ser avaliada e satisfeita através de procedimentos incrementais-iterativos. O problema básico consiste em encontrar o estado de equilíbrio de um corpo para diferentes níveis de carga, os quais são definidos incrementalmente até que a carga máxima seja atingida. Para a análise considera-se que a solução para um tempo discreto t é conhecida e deseja-se a solução para o tempo $t + \Delta t$. De acordo com Bathe (1996) a condição de equilíbrio em elementos finitos é dada por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int} = 0, \quad (3.2)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}$ é o vetor de forças externas aplicadas em $t + \Delta t$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int}$ é o vetor de forças internas em $t + \Delta t$, que pode ser escrito como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int} = {}^t\mathbf{f}_{int} + \Delta\mathbf{f}_{int}, \quad (3.3)$$

onde $\Delta\mathbf{f}_{int}$ é o incremento no vetor de forças nodais correspondente ao incremento de deslocamentos e tensões no intervalo $[t, t + \Delta t]$. Este vetor pode ser aproximado utilizando-se a matriz de rigidez \mathbf{K} , a qual corresponde à configuração geométrica no tempo t :

$$\Delta\mathbf{f}_{int} = {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}, \quad (3.4)$$

onde $\Delta\mathbf{U}$ é o vetor incremento de deslocamentos nodais, ${}^t\mathbf{K}$ é a derivada do vetor de forças internas ${}^t\mathbf{f}_{int}$ em relação aos deslocamentos nodais ${}^t\mathbf{U}$:

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{f}_{int}}{\partial {}^t\mathbf{U}}. \quad (3.5)$$

Com as equações 3.4 e 3.3 em 3.2, obtém-se:

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^t\mathbf{f}_{int}, \quad (3.6)$$

calculando $\Delta\mathbf{U}$, tem-se uma aproximação para os deslocamentos em $t + \Delta t$,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}. \quad (3.7)$$

Como é apenas uma aproximação para os deslocamentos em $t + \Delta t$, tal solução está sujeita a erros significativos e, dependendo do tamanho do passo de carga, pode tornar-se instável na convergência. Para isto, é necessário iterar até que a solução da equação 3.2 seja obtida com suficiente precisão. Emprega-se neste trabalho método de Newton-Raphson (NR) como algoritmo para o processo de solução incremental-iterativo, que será discutido na Seção 3.1.4.

3.1.1 Formulação corrotacional

A representação do campo de deslocamento total do meio contínuo pode ser decomposto matematicamente em duas parcelas, uma associada a movimentos de corpo rígido e outra associada à deformação pura. No FEM, esta decomposição pode ser realizada em nível de elemento.

Isolando o campo de deslocamentos dos movimentos do corpo rígido, a deformação pura será sempre uma pequena quantidade em relação às dimensões dos elementos se a discretização for suficiente.

A formulação corrotacional é usada para avaliar as forças internas e a matriz rigidez geométrica. Logo após serem calculadas, devem ser levadas para o sistema global para a obtenção da solução do sistema de equações de equilíbrio.

3.1.1.1 Tensões e deformações corrotacionais

A formulação corrotacional é definida para cada elemento por meio de um sistema de coordenadas cartesianas que gira com cada um dos elementos de forma independente. Como o tensor de tensões de Cauchy σ calculado no sistema corrotacional (chamado tensor de tensões de Cauchy em componentes corrotacionais σ^c) não muda por efeitos de movimento de corpo rígido (rotações e traslações do corpo), esta medida de tensão é considerada objetiva.

Com o tensor de tensões de Cauchy corrotacional é possível utilizar a equação constitutiva elástica definida no sistema corrotacional:

$$\sigma_{ij}^c = C_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^c, \quad (3.8)$$

onde ϵ^c é o tensor de pequenas deformações em componentes corrotacionais e C^e o tensor de quarta ordem já definido (ver 2.8).

Os tensores corrotacionais σ^c e ϵ^c podem ser obtidos a partir dos respectivos tensores globais σ e ϵ , com as seguintes transformações objetivas:

$$\sigma^c = \mathbf{R}\sigma\mathbf{R}^t, \quad \epsilon^c = \mathbf{R}\epsilon\mathbf{R}^t, \quad (3.9)$$

onde, \mathbf{R} é a matriz de rotação do sistema global ao corrotacional, vista na secção 2.6.

As componentes do tensor de deformação corrotacional ϵ_{ij}^c são também obtidas a partir do campo de deslocamentos no sistema corrotacional u_i^c :

$$\epsilon_{ij}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^c}{\partial x_j^c} + \frac{\partial u_j^c}{\partial x_i^c} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.10)$$

onde x_i^c são as coordenadas corrotacionais segundo a direção i dos eixos locais.

3.1.1.2 Incremento de deformações no sistema corrotacional

A taxa de deformação no sistema corrotacional d^c fica definida por:

$$d_{ij}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i^{c(def)}}{\partial x_j^c} + \frac{\partial \dot{u}_j^{c(def)}}{\partial x_i^c} \right), \quad (3.11)$$

sendo $\dot{u}_i^{c(def)}$ as componentes do vetor de velocidades, no sistema corrotacional, referentes unicamente à parcela de deformação do campo de deslocamentos. Segundo Liu et al. (1998), se é conhecida a deformação inicial tem-se:

$$\epsilon^c(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \epsilon^c(\mathbf{X}, t_n) + \int \mathbf{d}^c(\mathbf{X}, \tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Para o cálculo da integração do tensor taxa de deformação são feitas algumas hipóteses relativas à evolução de \mathbf{d}^c ao longo do tempo. Para a presente formulação foi utilizado o método apresentado por Hughes (1984, apud Liu et al., 1998), que considera a velocidade de deformação corrotacional constante e o valor é obtido na configuração intermediária entre t_n e t_{n+1} :

$$\Delta \mathbf{d}_{ij}^c = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{d}^c d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i^{c(def)}}{\partial x_{jn+1/2}^c} + \frac{\partial \Delta u_j^{c(def)}}{\partial x_{in+1/2}^c} \right), \quad (3.13)$$

no sistema corrotacional observa-se que:

$$\mathbf{d}^c \simeq \dot{\epsilon}^c. \quad (3.14)$$

Assim, a atualização da deformação no sistema corrotacional é:

$$\epsilon^c(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \epsilon^c(\mathbf{X}, t_n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i^{c(def)}}{\partial x_{jn+1/2}^c} + \frac{\partial \Delta u_j^{c(def)}}{\partial x_{in+1/2}^c} \right). \quad (3.15)$$

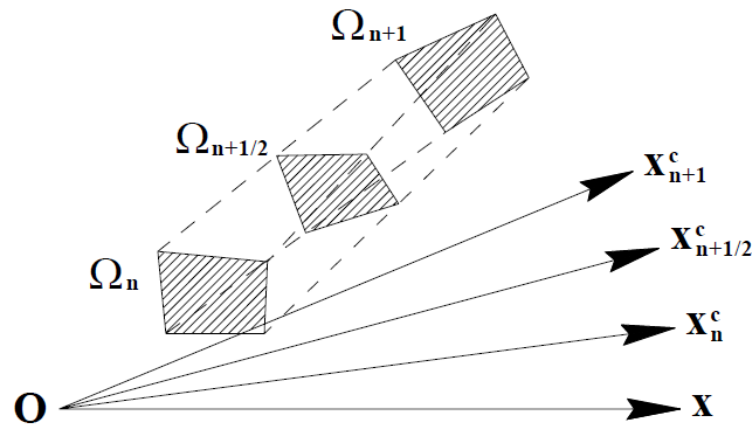


Figura 3.1 – Configuração nos instantes $t = t_n$, $t = t_{n+1/2}$ e $t = t_{n+1}$. Fonte Liu et al. (1998).

Na Figura 3.1 pode-se observar as configurações instantâneas de um corpo durante seu movimento no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Em um sistema de coordenadas cartesiano fixo $O\mathbf{x}$, com as coordenadas \mathbf{x}_n e \mathbf{x}_{n+1} correspondentes às configurações Ω_n e Ω_{n+1} respectivamente, obtém-se as respectivas coordenadas corrotacionais, $O\mathbf{x}_n^c$ e $O\mathbf{x}_{n+1}^c$, com as transformações:

$$\mathbf{x}_n^c = \mathbf{R}_n \mathbf{x}_n, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{x}_{n+1}^c = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}, \quad (3.16b)$$

rígido, o passo de $\hat{\Omega}_n$ para $\hat{\Omega}_{n+1}$ é devido exclusivamente à parcela de deformação do campo incremental. E desde $\hat{\Omega}_{n+1}$ para a configuração final Ω_{n+1} se tem uma segunda rotação de corpo rígido. As rotações podem ser expressas a partir das equações:

$$\Delta \mathbf{u}_1^{rot} = \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}_n^c - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^t \mathbf{x}_n^c - \mathbf{x}_n, \quad (3.19)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^{rot} = \mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^c = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t \mathbf{x}_{n+1}^c. \quad (3.20)$$

Assim, o incremento de deslocamentos de rotação total pode ser colocado como:

$$\Delta \mathbf{u}^{rot} = \Delta \mathbf{u}_1^{rot} + \Delta \mathbf{u}_2^{rot} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n - \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c) = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c). \quad (3.21)$$

Finalmente, com as equações 3.21 e 3.18 obtem-se o valor da parcela de deformação referente à configuração $\Omega_{n+1/2}$:

$$\Delta \mathbf{u}^{def} = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^{rot} = \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c). \quad (3.22)$$

O incremento de deslocamentos de deformação no sistema corrotacional $\mathbf{O}_{n+1/2}^c$ é obtido através da transformação objetiva de vetores:

$$\Delta \mathbf{u}_{def}^c = \mathbf{R}_{n+1/2}^t \Delta \mathbf{u}^{def}. \quad (3.23)$$

Com o incremento de deformação no sistema corrotacional calculado, as atualizações dos tensores de deformação e de tensão, referidas à configuração intermediária $\Omega_{n+1/2}$, são obtidas por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\epsilon}_n^c + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1/2}^c, \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^c = \boldsymbol{\sigma}_n^c + \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1/2}^c. \quad (3.25)$$

Os tensores de deformação e de tensão no sistema global são obtidos a partir da transformação objetiva desde o sistema corrotacional:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{R}^t \boldsymbol{\epsilon}^c \mathbf{R}, \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}^t \boldsymbol{\sigma}^c \mathbf{R}. \quad (3.27)$$

3.1.2 Equações constitutivas incrementais

O tensor de tensões de Cauchy no sistema corrotacional é uma grandeza objetiva já que as medidas de tensões não são afetadas pelo movimento de corpo rígido, mas a taxa de tensões

de Cauchy não é. Para garantir o princípio de invariância referencial em taxas, utiliza-se neste trabalho a taxa de tensões de Truesdell $\sigma^{\nabla T}$:

$$\sigma^{\nabla T} = \dot{\sigma} - \mathbf{L}\sigma - \sigma\mathbf{L}^t + \sigma \text{tr}(\mathbf{d}), \quad (3.28)$$

onde $\text{tr}(\mathbf{d})$ indica o traço da taxa de deformação, \mathbf{L} é o gradiente espacial de velocidade que decomposto em suas matrizes simétrica e anti-simétrica:

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}, \quad (3.29)$$

onde \mathbf{d} é a parte simétrica de \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ (tensor taxa de rotação) é a parte anti-simétrica de \mathbf{L} :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.30)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.31)$$

Substituindo-se as equações 3.29, 3.30 e 3.31 na equação 3.28 obtém-se a taxa de Truesdell, que em forma indicial fica:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e d_{kl} + \sigma_{im} \omega_{jm} + \sigma_{jm} \omega_{im} + \sigma_{ik} d_{jk} + \sigma_{jk} d_{ik} - \sigma_{ij} d_{kk}, \quad (i, j, k, l, m = 1, 2, 3), \quad (3.32)$$

sendo, C_{ijkl}^e a matriz constitutiva de constantes elásticas já definida.

Hughes e Winget (1980) apresentam uma forma compacta para a equação 3.32, na qual se despreza o último termo $\sigma_{ij} d_{kk}$:

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl}^e + \hat{C}_{ijkl} \right) d_{kl} + V_{ijkl} \omega_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.33)$$

em que:

$$\hat{C}_{ijkl} = -\sigma_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{jk} \delta_{il}), \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.34)$$

e:

$$V_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jj} + \sigma_{jl} \sigma_{ik} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jk} \delta_{il}), \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (3.35)$$

Ao ser dispensado o último termo da expressão 3.32 a matriz $\hat{\mathbf{C}}$ torna-se simétrica, chegando à formulação da taxa de Truesdell empregada no presente trabalho:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}^e + \hat{\mathbf{C}})\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{V}\boldsymbol{\omega} = \left[(\mathbf{C}^e + \hat{\mathbf{C}}) \quad \mathbf{V} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

sendo:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

e:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33}-\sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

O último termo da taxa de Truesdell pode ser levado em conta em forma de força interna. O ordenamento para os vetores de taxa de deformação e de rotação para a expressão 3.36 é:

$$\{\mathbf{d} \ \boldsymbol{\omega}\}^t = \{d_{11} \ d_{22} \ d_{33} \ 2d_{12} \ 2d_{23} \ 2d_{31} \ 2\omega_{12} \ 2\omega_{23} \ 2\omega_{31}\}. \quad (3.39)$$

Aqui a equação 3.35, com $\hat{\mathbf{C}}$ e \mathbf{V} dados pelas equações 3.37 e 3.38, representa o tensor de taxas de tensões de Lie $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{Lie}$, ou a derivada de Lie do tensor de tensões de Kirchhoff. O trabalho interno vem dado por:

$$\delta \mathbf{W}^{int} = \{\delta \mathbf{d} \ \delta \boldsymbol{\omega}\}^t \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^e + \hat{\mathbf{C}}) & \frac{1}{2}\mathbf{V} \\ \frac{1}{2}\mathbf{V}^t & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} = \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^t \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.40)$$

com

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ -\frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

A matriz $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$, que relaciona incrementos de tensões com incrementos de deformações específicas e rotações, pode também ser escrita como:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{(6 \times 6)} & \mathbf{0}_{(6 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 6)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.42)$$

sendo $\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma})$ a matriz de tensões iniciais que é dada por:

$$\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{12}}{2} & 0 & -\frac{\sigma_{13}}{2} \\ 0 & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & 0 & -\frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{4} & \frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{33}-\sigma_{22}}{4} & \frac{\sigma_{12}}{4} \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{33}+\sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{4} \\ \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{23}}{4} & \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ 0 & \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{33}-\sigma_{22}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{4} & \frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{4} \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas

Levando a equação de equilíbrio incremental (equação 3.6) ao sistema corrotacional (aqui o sistema corrotacional vem simbolizado por $\hat{\cdot}$):

$$\hat{\mathbf{K}}_{i-1} \Delta \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{s}}_i = \hat{\mathbf{P}}_i - \hat{\mathbf{f}}_{i-1}, \quad (3.43)$$

sendo i o número de iteração, $\hat{\mathbf{K}}_{i-1}$ a matriz de rigidez obtida com a configuração geométrica da iteração $i - 1$, $\hat{\mathbf{s}}_i$ as forças residuais do passo iterativo i , $\hat{\mathbf{f}}_{i-1}$ o vetor de forças internas nodais obtidas na iteração $i - 1$, dadas por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{i-1} = \int_{\hat{V}_{i-1}} \hat{\mathbf{B}}^t (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{T}}_{i-1}) \hat{\mathbf{B}} d\hat{V}, \quad (3.44)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{i-1} = \int_{\hat{V}_{i-1}} \hat{\mathbf{B}}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{i-1} d\hat{V}. \quad (3.45)$$

Tanto a matriz de rigidez tangente como o vetor de forças desequilibradas na iteração i ($\hat{\mathbf{s}}_i$) são transformados para o sistema global por:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i^t \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{R}_i, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{R}_i^t \hat{\mathbf{s}}_i. \quad (3.47)$$

3.1.4 Algoritmo de solução Newton-Raphson (NR)

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais empregados na literatura técnica para soluções de sistemas de equações não-lineares (Bathe, 1996). No processo incremental iterativo em problemas estáticos ou quase-estáticos, onde não são considerados efeitos inerciais ou o efeito do tempo (visco-elasticidade, visco-plasticidade), pode-se considerar um pseudo-tempo como parâmetro para o incremento de carga.

Admitindo por hipótese que o vetor \mathbf{U}_i , que representa o campo de deslocamentos da iteração i do incremento de carga em tempo t , constitui uma solução aproximada da equação de equilíbrio 3.2, pode-se escrever:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_i^{ext} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_i^{int} \neq 0, \quad (3.48)$$

onde, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_i$ representa o vetor de forças residuais que se deseja minimizar, e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_i^{ext}$ a força externa aplicada no pseudo-tempo $t + \Delta t$. A não linearidade considera que todos os termos são dependentes do campo de descolamento \mathbf{U}_i .

Se existe a solução exata para $\mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_{i+1}$, então um desenvolvimento em série de Taylor conduz à igualdade:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_i + \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{s}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} \right)_i \delta \mathbf{U}_{i+1} + \dots = 0. \quad (3.49)$$

Linearizando o sistema de equações ao reter apenas os dois primeiros termos da série, resulta:

$$\delta \mathbf{U}_{i+1} = ({}^{t+\Delta t} \mathbf{K})^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_i), \quad (3.50)$$

que define o vetor corretivo dos deslocamentos $\delta \mathbf{U}_{i+1}$ correspondente à seguinte iteração $i + 1$.

A matriz de rigidez tangente ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_i$ vem definida em 3.49 pela relação:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_i = - \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{s}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} \right)_i = \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{int}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} \right)_i - \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} \right)_i, \quad (3.51)$$

e com a hipótese de carregamento conservativo (carga externa independente do campo de deslocamentos), chega-se a mesma matriz de rigidez já definida na equação 3.5, agora em termos incrementais:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_i = \left(\frac{{}^{t+\Delta t} \partial \mathbf{f}_{int}}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} \right)_i. \quad (3.52)$$

Com a matriz rigidez da expressão 3.52 na equação 3.51, é obtida uma melhor aproximação para o incremento de deslocamentos, dado por:

$${}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}_{i+1} = {}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_{i+1}. \quad (3.53)$$

O processo iterativo é repetido até que a precisão desejada seja atingida. Uma vez chegada a convergência, o deslocamento total do passo é dado pela equação 3.7:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}. \quad (3.54)$$

Na Figura 3.3 se observa graficamente o processo iterativo para um passo de carga ou pseudo-tempo.

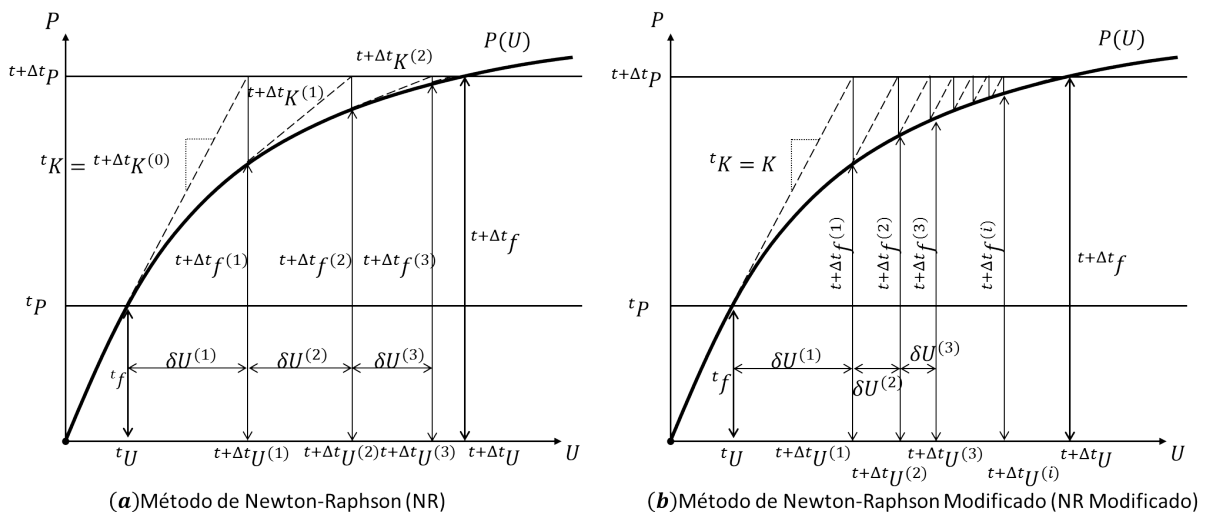


Figura 3.3 – Algoritmos de solução: (a) Método de Newton-Raphson; (b) Método de Newton-Raphson Modificado.

Pode-se observar na equação 3.50 que é necessário inverter a matriz rigidez tangente para obter o vetor corretivo dos deslocamentos.

É usual a utilização de versões modificadas do método de Newton-Raphson, estas modificações são feitas principalmente na obtenção ou definição da matriz tangente para o passo iterativo.

No presente trabalho é utilizada uma versão modificada do Método de Newton-Raphson, onde a matriz rigidez somente é calculada e invertida na primeira iteração de cada incremento de carga (Bathe, 1996). Na Figura 3.3 pode-se ver a diferença entre o método clássico e o modificado, adotado neste trabalho.

3.1.5 Critério de convergência

Todo processo iterativo-incremental necessita de um critério de convergência que permita encerrar o processo quando a solução obtida tem precisão suficiente, sendo o erro menor do que uma tolerância escolhida tol , de maneira tal que pode-se avançar para o próximo passo de carga.

Segundo Bathe (1996) os critérios de convergência mais comumente utilizados em problemas não lineares são: (a) em termos de deslocamentos; (b) em termos de forças; (c) em termos energéticos.

1. Em termos de deslocamentos:

$$\frac{|\Delta U^{(i)}|}{|{}^{t+\Delta t}\Delta U|} \geq tol, \quad (3.55)$$

onde, $|\quad|$ representa a norma euclidiana, $\Delta U^{(i)}$ é o vetor incremento de deslocamentos na iteração atual i e ${}^{t+\Delta t}\Delta U$ é o vetor deslocamentos atual. Este critério pode não funcionar bem em problemas não lineares com grandes deslocamentos, pois a medida que aumentam os deslocamentos, o critério torna-se frouxo.

2. Em termos de forças:

$$\frac{|{}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int}^{(i)}|}{|{}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^t\mathbf{f}_{int}|} \geq tol, \quad (3.56)$$

onde, o numerador é o vetor resíduo das forças ${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}$ (ver 3.48) na iteração atual, o denominador é o vetor de forças não equilibradas no início do passo de carga atual. É o critério mais recomendado para problemas com alta não linearidade geométrica. Porém, por não levar em conta deslocamentos em seu cálculo, pode indicar convergência quando os deslocamentos ainda apresentam incrementos significativos.

3. Em termos de energia:

$$\frac{[\Delta U^{(i)}]{}^t[{}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int}^{(i)}]}{[\Delta U^{(1)}]{}^t[{}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{int}]} \geq tol, \quad (3.57)$$

compara o trabalho realizado pelo vetor resíduo de forças no passo iterativo com o trabalho correspondente verificado no início do passo de carga. Apresenta a vantagem de levar em conta o processo de convergência tanto em deslocamentos como em resíduo de forças.

O critério adotado no presente trabalho é em termos de forças.

3.2 A NÃO LINEARIDADE FÍSICA

No presente trabalho, a não linearidade física é devida ao comportamento elasto-plástico dos materiais empregados. De acordo com Zienkiewicz e Taylor (1994b), a plasticidade em escala macroscópica poderia ser caracterizada pela ocorrência de deformações irreversíveis uma vez que deixam de atuar sobre o corpo forças externas.

Segundo Liu et al. (1998), com o uso de um sistema corrotacional, a integração das relações constitutivas elasto-plásticas com deformações finitas assume uma forma mais simples, tal qual na teoria das pequenas deformações. Como foi mencionado na primeira parte do capítulo, a integração das relações constitutivas é realizada em nível de elemento no sistema corrotacional.

Para este trabalho, a solução adotada para a integração numérica da lei constitutiva elasto-plástica segue o algoritmo 'preditor-corretor' (*'elastic predictor - plastic corrector algorithm'*) apresentado por Owen e Hinton (1980) (ver Seção 3.2.4).

3.2.1 Elasto-plasticidade

Considerando um ensaio unidirecional, não é possível saber se um material tem comportamento elástico ou plástico só com o processo de carga, inclusive conhecendo as relações não lineares. Quando se faz a descarga imediatamente é identificada a diferença entre material elástico e plástico. Em um gráfico tensão-deformação (Figura 3.4), a descarga do material segue a mesma curva do processo de carga, sendo que um material plástico segue uma curva diferente dependente da história de deformação.

Segundo Neto et al. (2008), um modelo elasto-plástico deve estar constituído de:

1. *Decomposição da deformação elasto-plástica:* A deformação sofrida pelo material é dividida em componentes elástica e plástica;
2. *Equação constitutiva:* Define o comportamento do material quanto a evolução das tensões do corpo;
3. *Critério de escoamento:* O critério de escoamento é dado geralmente por uma função de escoamento f que define os limites do domínio de tensões do material.
4. *Regra de fluxo:* Define a evolução da deformação plástica ou, de forma mais generalizada, a evolução das variáveis internas do material, responsáveis pelo caráter dissipativo do fenômeno;
5. *Equação de consistência:* Condição necessária a ser verificada para que as tensões e sua evolução sejam admissíveis.
6. *Lei de encruamento-amolecimento:* Determina a evolução do limite de escoamento do material assim como a evolução das variáveis de encruamento.

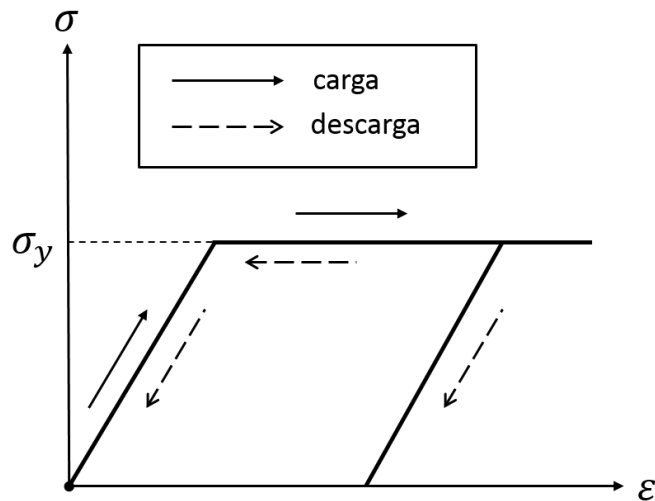


Figura 3.4 – Comportamento elástico ou plástico na descarga.

3.2.1.1 Decomposição da deformação elasto-plástica

Para os modelos utilizados no presente trabalho, a taxa de deformação total no sistema corrotacional $\dot{\epsilon}_c = \mathbf{d}_c$ (o subíndice c indica que as grandezas estão referidas ao sistema corrotacional) é descomposta de forma aditiva em duas parcelas, elástica ($\dot{\epsilon}_c^e$) e plástica ($\dot{\epsilon}_c^p$):

$$\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_c^e + \dot{\epsilon}_c^p, \quad \text{ou} \quad d\epsilon_c = d\epsilon_c^e + d\epsilon_c^p. \quad (3.58)$$

3.2.1.2 Leis constitutivas

O comportamento elasto-plástico é representado utilizando um modelo hipoeelástico dado pela expressão:

$$\dot{\sigma}_c = \mathbf{D}\dot{\epsilon}_c, \quad \text{ou} \quad d\sigma_c = \mathbf{D}d\epsilon_c, \quad (3.59)$$

onde $\dot{\sigma}_c$ é o tensor taxa de tensão de Cauchy, $\dot{\epsilon}_c$ é o tensor de velocidades de deformação, e \mathbf{D} é o tensor de quarta ordem que contém as relações constitutivas. Para o caso de regime elástico $\mathbf{D} = \mathbf{C}^e$ definido na equação 2.8 e para o regime elasto-plástico $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{ep}$.

3.2.1.3 Critério de escoamento

A relação 3.59 com $\mathbf{D} = \mathbf{C}^e$ supõe deformações totalmente elásticas, mas, com a introdução de um material elasto-plástico adota-se uma função de escoamento f que delimita o domínio elástico do material.

Definida esta função f , serão admissíveis apenas os estados de tensão localizados dentro do domínio elástico ou em sua fronteira (superfície de plastificação). Logo, para qualquer estado de tensão válido, verifica-se a condição:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_i) \leq 0, \quad (3.60)$$

conhecida como o critério de escoamento, onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy e κ_i são variáveis internas do material. Chama-se superfície de escoamento ou superfície de plastificação à superfície definida por $f = 0$. O critério de escoamento define o estado do material em um instante dado:

$$\text{Se } f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad d\boldsymbol{\epsilon}_c = d\boldsymbol{\epsilon}_c^e, \quad (3.61a)$$

$$\text{Se } f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_i) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d\boldsymbol{\epsilon}_c = d\boldsymbol{\epsilon}_c^e + d\boldsymbol{\epsilon}_c^p. \quad (3.61b)$$

3.2.1.4 Regra de fluxo

A regra de fluxo define a evolução das variáveis internas que caracterizam o efeito dissipativo do fenômeno da plastificação. A evolução das variáveis é dada pelo multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ e uma função potencial plástico g , tal que:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_c^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{ou} \quad d\boldsymbol{\epsilon}_c^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.62)$$

O multiplicador plástico adota um valor positivo ($\dot{\lambda} > 0$) quando o material sofre plastificação e é igual a zero ($\dot{\lambda} = 0$) quando o material possui uma resposta elástica (quando as tensões se encontram dentro do domínio da superfície de escoamento).

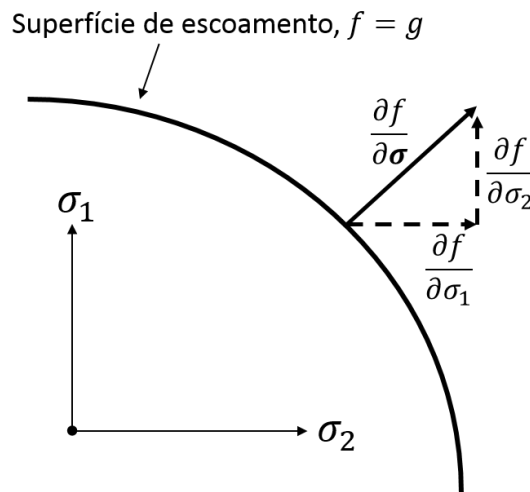


Figura 3.5 – Direção da deformação plástica para material elasto-plástico com regra associada.

A regra de fluxo pode ser associada ou não associada. No presente trabalho é empregada a regra de fluxo associada, na qual a função potencial plástico é igual à função de escoamento, $f = g$, ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_c^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{ou} \quad d\boldsymbol{\epsilon}_c^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.63)$$

Portanto, para uma regra associada, a deformação plástica tem direção normal à superfície de

escoamento (ver Figura 3.5):

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.64)$$

onde \mathbf{n} é o vetor com direção normal à superfície de escoamento na qual a deformação plástica e as variáveis internas evoluem enquanto que a magnitude é fornecida pelo multiplicador plástico $\dot{\lambda}$. O multiplicador plástico também define a deformação plástica efetiva, $\bar{\epsilon}$, um escalar igual à deformação plástica acumulada:

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}} = \int_0^t |\dot{\epsilon}_c^p| dt. \quad (3.65)$$

3.2.1.5 Equação de consistência

Para todos os efeitos, durante o escoamento:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (3.66)$$

que satisfaz a condição de complementariedade (ver Neto et al. (2008)):

$$f \dot{\lambda} = 0, \quad (3.67)$$

o que implica as seguintes condições vistas nas relações 3.61a-b. Com estas define-se o que é chamado de condição de carregamento/descarregamento, que estabelece quando ocorre o escoamento:

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (3.68)$$

quando $\dot{\lambda} \geq 0$, necessariamente tem que ser verificada a equação de consistência:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa_l} \dot{\kappa}_l = 0. \quad (3.69)$$

Da equação 3.69 podem ser deduzidas a equação para o multiplicador plástico e a relação constitutiva para materiais elasto-plásticos (ver Neto et al. (2008), Owen e Hinton (1980)):

$$\dot{\lambda} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}}{(\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq}) - (\partial f / \partial \kappa_m) B_m(\sigma, \kappa)} = D_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.70)$$

e,

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijmn}^e (\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{klpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq})}{(\partial f / \partial \sigma_{mn}) C_{mnpq}^e (\partial g / \partial \sigma_{pq}) - (\partial f / \partial \kappa_m) B_m(\sigma, \kappa)} \quad (3.71)$$

em que B_m é uma função que deriva das leis de encruamento e verifica:

$$\dot{\kappa}_i = B_i(\sigma, \kappa) \dot{\lambda}, \quad \text{ou} \quad d\kappa_i = B_i(\sigma, \kappa) d\lambda. \quad (3.72)$$

3.2.1.6 Lei de encruamento-amolecimento

O conjunto dos materiais elasto-plásticos pode ser dividido em dois grandes grupos (ver Figura 3.6:

- Elasto-plásticos perfeitos: Em casos uniaxiais, materiais nos quais a tensão jamais excede uma tensão limite (tensão de escoamento σ_y). Uma vez que esta seja atingida e mantida, toda a deformação adicional é exclusivamente de natureza plástica. Para casos multiaxiais a tensão de escoamento é substituída pela função de escoamento f .
- Elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento: Em casos uniaxiais, uma vez atingida a tensão de escoamento, esta aumenta ou diminui observando-se o fenômeno do encruamento ou amolecimento. Depois de atingida, a tensão de escoamento, as deformações não são exclusivamente plásticas.

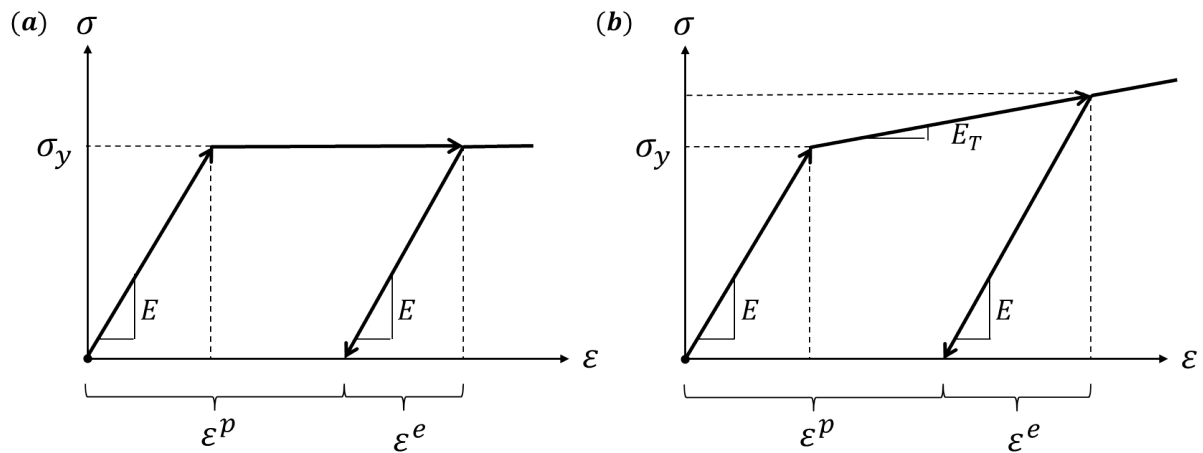


Figura 3.6 – Comportamento de materiais: (a) Elasto-plástico perfeito; (b) Elasto-plástico com encruamento linear.

Para materiais elasto-plásticos lineares, verifica-se (ver Figura 3.7):

$$\Delta\sigma = E_T\epsilon = E_T(\epsilon^e + \epsilon^p), \quad \Delta\sigma = E\epsilon^e, \quad (3.73)$$

onde E_T é o módulo elasto-plástico tangente no trecho de encruamento. Igualando as duas expressões acima:

$$\epsilon^e = \frac{E_T}{E - E_T}\epsilon^p, \quad (3.74)$$

substituindo na segunda equação de 3.65:

$$\Delta\sigma = \frac{E_T E}{E - E_T}\epsilon^p = H\epsilon^p, \quad H = \frac{E_T E}{E - E_T} \quad (3.75)$$

onde H é denominado módulo de endurecimento linear ou módulo de encruamento linear. Assim, para valores de tensão acima da tensão de escoamento, as curvas $\sigma \times \epsilon$ pode ser representada por:

$$\sigma = \sigma_y^0 + H\epsilon^p, \quad (3.76)$$

onde σ_y^0 é a tensão de escoamento inicial do material.

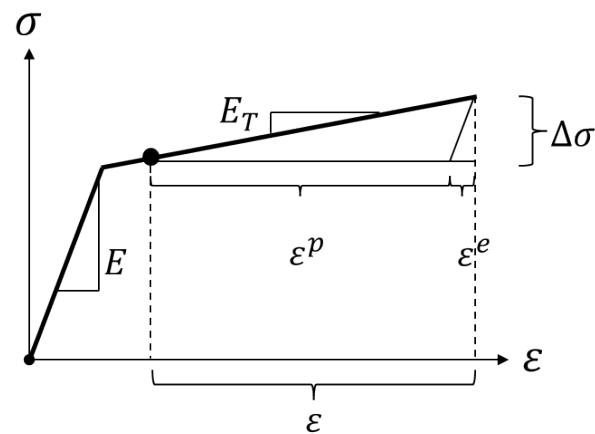


Figura 3.7 – Curva $\sigma \times \epsilon$ com sollicitação uniaxial de materiais elasto-plásticos com encruamento.

Existem três modelos de endurecimento possíveis:

- Isótropo: Quando ocorre uma expansão do intervalo elástico de modo simétrico ao seu centro, ou seja, uma dilatação uniforme da superfície de plastificação, em todas as direções do espaço de tensões. Neste caso o módulo plástico é denominado de isótropo ($E_{T,iso}$).
- Cinemático: Quando ocorre um deslocamento da superfície de plastificação no espaço de tensões devido às deformações plásticas, sem mudanças de volume nem alteração da sua forma. Neste caso o módulo plástico é denominado de cinemático ($E_{T,cin}$).
- Misto: Quando ocorre uma combinação das duas formas anteriores.

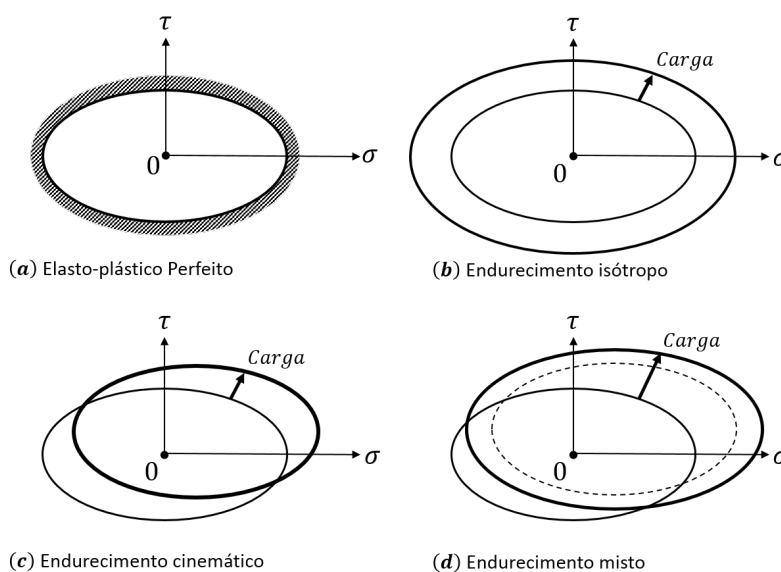


Figura 3.8 – Modelos matemáticos para representação do comportamento elasto-plástico dos materiais: (a) plástico perfeito; (b) com endurecimento isótropo; (c) com endurecimento cinemático; (d) com endurecimento misto. Fonte Owen e Hinton (1980).

No presente trabalho são utilizados materiais elasto-plásticos perfeitos e elasto-plásticos com encruamento isotrópico.

3.2.2 Critérios de plastificação

Existem muitos modelos desenvolvidos para representar o comportamento plástico dos materiais. O critério de plastificação (ou de escoamento) define os limites elásticos de um material sob um dado estado de tensão. O limite elástico ou tensão de escoamento é uma função do estado de tensões σ_{ij} . Consequentemente, a condição de escoamento vista em 3.60 é:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa_1, \kappa_2, \dots) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.77)$$

onde $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ são constantes do material e σ_{ij} são as tensões às quais está submetido o corpo. Todas estas devem ser determinadas experimentalmente. Para materiais isotrópicos, os valores das três tensões principais são suficientes para descrever o estado de tensão de forma única. É possível expressar as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 , como combinação dos três invariantes de tensão I_1, J_2 e J_3 , onde, I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões σ_{ij} , J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador s_{ij} . Como todo critério de escoamento deve ser independente do sistema de referência, deve poder ser escrito como função dos três invariantes de tensões:

$$f(I_1, J_2, J_3, \kappa_1, \kappa_2, \dots) = 0. \quad (3.78)$$

Em argilas não drenadas a resistência ao cisalhamento não depende do incremento da pressão hidrostática, este incremento é absorvido pela pressão intersticial. Assim, os critérios de plasticidade clássicos que possuem esta característica são os critérios de Tresca e von Mises.

Os critérios de Tresca e von Mises podem ser vistos como casos particulares dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, respectivamente (ver Owen e Hinton (1980)), quando a parcela friccional é suprimida e estes são amplamente utilizados para cargas imediatas em argilas não drenadas sem mudança de volume.

3.2.2.1 Critério de plastificação de Tresca (1864)

O critério estabelece que se dará início à plastificação de um ponto quando a máxima tensão tangencial que atue sobre o ponto atinja um valor crítico:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \bar{\sigma} = \sigma_y, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (3.79)$$

onde $\bar{\sigma}$ é chamada de tensão efetiva e σ_y é chamada de tensão de escoamento equivalente. Para o critério de Tresca a tensão de escoamento equivalente é igual à tensão de escoamento para um ensaio uniaxial (σ_y).

Uma forma gráfica de interpretar os critérios de plastificação é desenhando a função de plastificação (expressão 3.78) no espaço das tensões principais. Esta função de plastificação no espaço

das tensões principais gera uma superfície, daí porque os critérios de plastificação também são chamados de superfícies de plastificação.

O critério de Tresca no espaço das tensões principais é um prisma hexagonal regular reto, cujo eixo coincide com o eixo hidrostático, ou seja com a reta que contém os pontos $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, como se mostra na Figura 3.9.

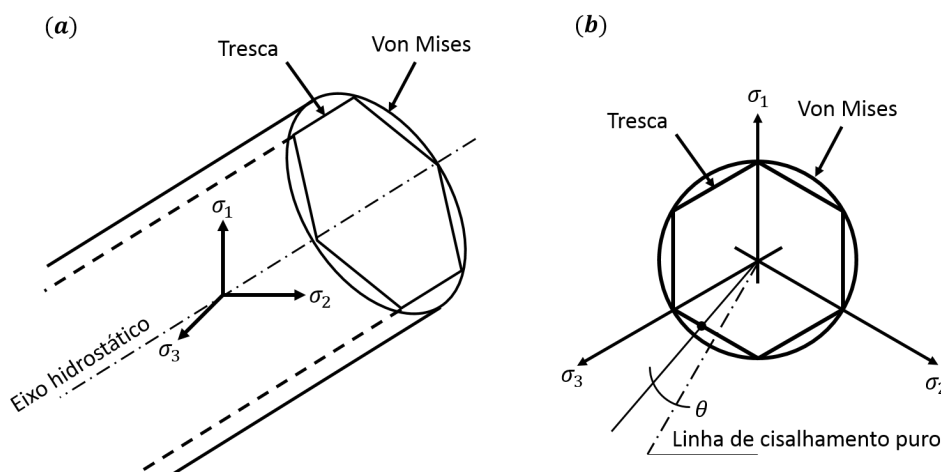


Figura 3.9 – Representação geométrica das superfícies de escoamento de Tresca e von Mises: (a) no espaço das tensões principais; (b) No plano perpendicular ao eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Fonte Owen e Hinton (1980).

3.2.2.2 Critério de plastificação de von Mises (1913)

De acordo com Owen e Hinton (1980), o critério de von Mises considera que o início do escoamento se produz quando a energia de distorção elástica (recuperável) atinge um valor crítico. Outra interpretação sugere que o escoamento se dá quando a tensão octaédrica de cisalhamento, τ_{oct} , atinge um determinado valor crítico:

$$\sqrt{\frac{2}{3}s_{ij}s_{ij}} = \bar{\sigma} = \sigma_y, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.80)$$

onde s_{ij} representa as tensões desviadoras. Para von Mises, igualmente ao critério de Tresca, a tensão de escoamento equivalente σ_y é igual à tensão de escoamento para um ensaio uniaxial σ_e .

A superfície de plastificação de von Mises no espaço das tensões principais é um cilindro circular reto de raio $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_y}$ cujo eixo coincide com o eixo hidrostático o qual pode-se ver na Figura 3.9.

3.2.2.3 Aplicação computacional dos critérios de plastificação

Para ter uma formulação mais conveniente do ponto de vista computacional Nayak (1971, apud Owen e Hinton, 1980) rescrevem as funções de escoamento clássicas em termos dos invariantes de tensão. A formulação permite um código computacional generalizado para função

de escoamento e regra de fluxo para os critérios de plasticidade. Basicamente, consiste em reescrever as leis de escoamento em função dos invariantes de tensão I_1 e J_2 , e o parâmetro θ . O significado físico de θ pode ser visto na Figura 3.9.

Na tabela 2 se observa a formulação das funções de plastificação. Pode-se notar que tanto Tresca como von Mises são independentes do primeiro invariante de tensão, I_1 , isto é coerente com o fato de que ambas superfícies de plastificação são cilindros retos cujo eixo coincide com o eixo hidrostático (superfície independente das tensões hidrostáticas).

Tabela 2 – Tensão efetiva e tensão de escoamento equivalente para os critérios de plastificação incluídos no algoritmo elasto-plástico. Fonte Owen e Hinton (1980).

Critério de plastificação	Tensão efetiva ($\bar{\sigma}$)	Tensão de escoamento equivalente (σ_y)
Tresca	$2\sqrt{J_2} \cos \theta$	σ_e
von Mises	$\sqrt{3J_2}$	σ_e

Para o cálculo da matriz elasto-plástica, é necessário expressar o vetor de fluxo $\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ de forma apropriada para aplicações computacionais (Owen e Hinton, 1980):

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3, \quad (3.81)$$

sendo:

$$\mathbf{a}_1^t = \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}, \quad (3.82a)$$

$$\mathbf{a}_2^t = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, 2s_{xy}, 2s_{yz}, 2s_{zx}\}, \quad (3.82b)$$

$$\mathbf{a}_3^t = \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ (s_{yy}s_{zz} - s_{yz}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_{xx}s_{zz} - s_{xz}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_{xx}s_{yy} - s_{xy}^2 + \frac{J_2}{3}), \right. \\ \left. 2(s_{yz}s_{xz} - s_{zz}s_{xy}), 2(s_{xz}s_{xy} - s_{xx}s_{yz}), 2(s_{xy}s_{yz} - s_{yy}s_{xz}), \right\} \quad (3.82c)$$

em que s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são as tensões desviadoras e C_1 , C_2 e C_3 são constantes encontradas na tabela 3.

Tabela 3 – Constantes definindo a superfície de plastificação. Fonte Owen e Hinton (1980).

Critério de plastificação	C_1	C_2	C_3
Tresca	0	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J_2 \cos \theta}$
von Mises	0	$\sqrt{3}$	0

3.2.3 Integração da relação constitutiva

Durante a análise de um problema não linear, as forças são aplicadas em incrementos e os correspondentes incrementos de deslocamentos nodais são obtidos a partir da solução do sistema de equações de equilíbrio. Uma vez conhecidos os incrementos de deslocamentos, são calculados os incrementos de deformação nos pontos de Gauss de cada elemento utilizando as relações deformação-deslocamento (equação 2.5). Quando o incremento de tensões associado ao incremento de deformação levam o material a atingir o escoamento, é necessário resolver um sistema de equações diferenciais ordinárias já vistas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \text{ou} \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.83a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \text{ou} \quad d\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} d\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.83b)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \{\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\sigma}_z, \dot{\tau}_{xy}, \dot{\tau}_{yz}, \dot{\tau}_{zx}\}^t$ é o vetor taxa de tensão, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}\}^t$ é o vetor taxa de deformação, \mathbf{C}^{ep} a relação constitutiva para materiais elasto-plásticos dada pela relação 3.71, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ é a taxa das variáveis internas do material e \mathbf{B} é uma função derivada da lei de encruamento.

Quando integrado o sistema de equações diferenciais ordinárias, dadas por 3.83, para determinar o estado de tensão devido a um dado incremento de deformação, a integração resulta em:

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \int_0^{\Delta \epsilon_{kl}} C_{ijkl}^{ep} d\epsilon \quad (3.84a)$$

$$\kappa_i^{t+\Delta t} = \kappa_i^t + \int_0^{\Delta \epsilon_{kl}} B_i(\sigma, \kappa) d\lambda = \kappa_i^t + \int_0^{\Delta \epsilon_{kl}} B_i(\sigma, \kappa) D_{kl}(\sigma, \kappa) d\epsilon_{kl}. \quad (3.84b)$$

O esquema de integração de 3.84 é *explícito* quando todas as variáveis dependentes das tensões e parâmetros de encruamento (\mathbf{C}^{ep} , \mathbf{B} , \mathbf{D}) são avaliadas com as tensões previamente conhecidas. Caso contrario, o esquema passa a ser *implícito*.

Para análises com grandes deformações, como foi visto na Seção 3.1.2, nas equações 3.83a-b é preciso substituir as taxas de tensões de Cauchy por taxas objetivas de tensão. Utilizando a taxa de Truesdell 3.28 obtém-se a integração das tensões de forma objetiva em grandes deformações:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \int_0^{\Delta \epsilon_{kl}} d\sigma_{ij} = & \sigma_{ij}^t + \int_0^{\Delta L_{kl}} (\sigma_{ik} dL_{jk} + \sigma_{jk} dL_{ik} - \sigma_{ij} dL_{kk}) \\ & + \int_0^{\Delta \epsilon_{kl}} C_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.2.4 Determinação do estado de tensão

O algoritmo para o cálculo do estado de tensões do presente trabalho segue o esquema apresentado por Owen e Hinton (1980). Resumidamente, o procedimento para a atualização do estado

de tensão para materiais elasto-plásticos correspondente à iteração ' i ' do incremento de carga ' n ' pode ser descrito da seguinte forma:

1. Com base no vetor incremento do estado de deformação, $\Delta\epsilon$ (equação 3.13), é estimado o acréscimo de tensão correspondente, supondo um incremento de tensões puramente elástico (preditor elástico):

$$\Delta\sigma_e = C^e \Delta\epsilon, \quad (3.86)$$

lembrando que para grandes deformações trabalha-se com taxas de tensão objetivas.

2. O estado de tensão é atualizado a partir da configuração de referência, a qual corresponde a última configuração convergida ($n - 1$) para linearização baseada no método de NR modificado ou, ainda, a configuração do último passo iterativo caso seja empregado o método NR clássico.

$$\sigma_e = \sigma^{(n-1)} + \Delta\sigma_e, \quad (3.87)$$

onde σ_e é a tensão obtida a partir preditor elástico.

3. Identifica-se o regime (elástico ou plástico) correspondente ao estado de tensão da configuração de referência $\sigma^{(n-1)}$, com base em:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n-1)} < \sigma_y^{(n-1)} &\rightarrow (n-1)\text{elástico} \\ \bar{\sigma}^{(n-1)} \geq \sigma_y^{(n-1)} &\rightarrow (n-1)\text{plástico} \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $\bar{\sigma}$ e σ_y mantêm os significados indicados na Seção 3.2.2 (tensão efetiva e tensão de escoamento equivalente respectivamente, ver também tabela 2).

4. Define-se a evolução do estado de tensão através das relações:

$$\begin{aligned} (n-1)\text{elástico} &\begin{cases} \bar{\sigma}_e < \sigma_y^{(n-1)} &\rightarrow (i)\text{elástico} \\ \bar{\sigma}_e \geq \sigma_y^{(n-1)} &\rightarrow (i)\text{plástico} \end{cases} \\ (n-1)\text{plástico} &\begin{cases} \bar{\sigma}_e < \bar{\sigma}^{(n-1)} &\rightarrow (i)\text{elástico} \\ \bar{\sigma}_e \geq \bar{\sigma}^{(n-1)} &\rightarrow (i)\text{plástico} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.89)$$

5. Para os casos (i) elástico, a nova tensão tem uma evolução elástica:

$$\sigma^{(i)} = \sigma_e. \quad (3.90)$$

Já para os casos (i) plástico, é preciso realizar a integração do incremento de tensão correspondente à parcela de deformação plástica. Definem-se as parcelas de tensão como:

$$\sigma^{(i)} = \sigma_e - R\Delta\sigma_e = \sigma^{(n-1)} + (1 - R)\Delta\sigma_e, \quad (3.91)$$

onde o parâmetro R depende do estado do ponto de Gauss na configuração de referência obtido por:

$$(n-1)\text{elástico} \rightarrow R = \frac{\bar{\sigma}_e - \sigma_y}{\bar{\sigma}_e - \bar{\sigma}^{(n-1)}} \quad \text{ou} \quad (n-1)\text{plástico} \rightarrow R = 1.0 \quad (3.92)$$

Na Figura 3.10 pode-se observar os dois casos de incremento (i) plástico.

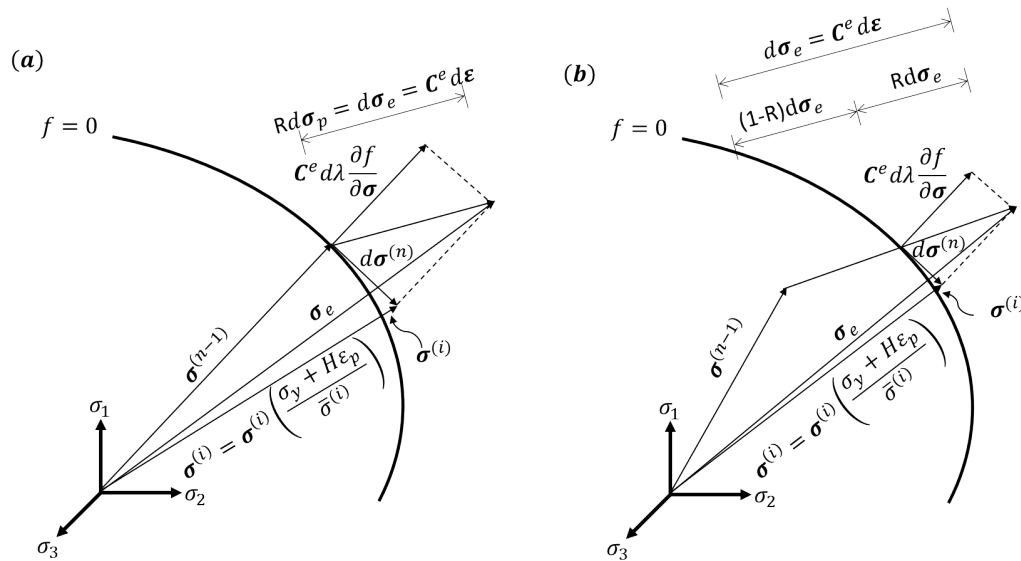


Figura 3.10 – Evolução das tensões em um ponto para um material elasto-plástico com ponto, na configuração de referência em estado: (a) plástico ; (b) elástico. Fonte Owen e Hinton (1980).

Como indicado na Figura 3.10, as tensões $\sigma^{(i)}$ estão ainda fora da superfície de plastificação. É possível levar as tensões até a superfície de plastificação fazendo uma correção de redução proporcional tal que:

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(i)} \left(\frac{\sigma_y + H\epsilon_p}{\bar{\sigma}^{(i)}} \right). \quad (3.93)$$

Para incrementos de tensões relativamente altos a correção dada por 3.93 não é muito precisa, principalmente se o ponto, no espaço de tensões, encontra-se próximo a grandes curvaturas da superfície de plastificação.

Para melhorar a precisão da relaxação das tensões Owen e Hinton (1980) propõem um refinamento feito em etapas do processo de redução das tensões. Na figura 3.11 apresenta o caso em que o excesso de tensão é dividido em 3 parcelas iguais e a redução é feita por incrementos de tensões destas parcelas, cada incremento é reduzido à superfície de plastificação. Após os incrementos verifica-se que as tensões estejam na superfície de plastificação e efetua-se a correção 3.93 se for necessária. Pode-se ver na figura que a diferença entre os pontos finais, sem o processo de correção incremental (D') e com o processo de correção incremental (E'), pode ser significativa. Quanto maior o número de passos em que é dividido o excesso de tensão, melhora a precisão. O número de passos adotados aqui é igual ao valor inteiro m mais próximo e menor a:

$$\frac{\bar{\sigma}_e - \sigma_y}{\sigma_y^0} 8 + 1, \quad (3.94)$$

onde σ_y^0 é o valor da tensão de escoamento equivalente inicial do material.

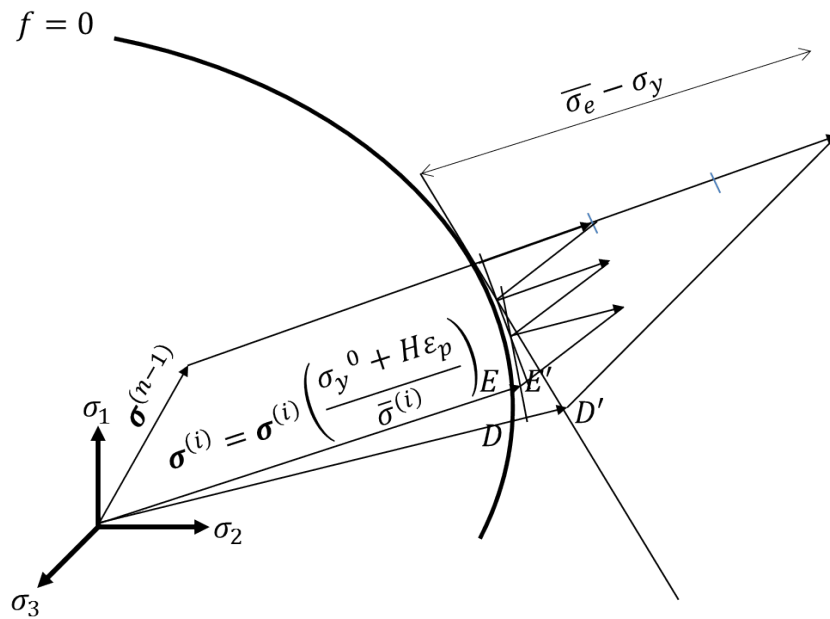


Figura 3.11 – Processo refinado da redução das tensões à superfície de plastificação. Fonte Owen e Hinton (1980).

4 FORMULAÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA-EULERIANA - ALE

Em formulações Lagrangeanas, os nós da malha de elementos finitos estão sempre associados aos mesmos pontos materiais do corpo durante a análise. Para problemas com grandes deformações e, principalmente deformações irregulares, pode-se dar o caso que só uma formulação Lagrangeana não seja suficiente para resolver o problema.

A ideia principal do método ALE é liberar a restrição de que a malha acompanhe o material (domínio do corpo), de maneira tal que quando houver grandes deformações no domínio, isto não afete em igual medida a configuração dos elementos, evitando grandes distorções de malha ou superposição de elementos. Na formulação ALE, a malha possui um comportamento que podemos chamar de *arbitrário* em relação à deformação do corpo, o movimento da malha tem que ser definido. A expressão fundamental que define a formulação cinemática ALE para atualização de variáveis dada por Hughes et al. (1981, apud Nazem et al., 2006) é:

$$\dot{\underline{\Psi}} = \dot{\Psi} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}^r) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.1)$$

onde Ψ representa uma variável de estado qualquer (tensão, deslocamento, etc.), \mathbf{v} é a velocidade do material, \mathbf{v}^r é a velocidade da malha, $\dot{\Psi}$ é a derivada temporal de Ψ em relação às coordenadas dos pontos da malha, $\dot{\underline{\Psi}}$ é a derivada temporal de Ψ em relação às coordenadas do material. O termo $(\mathbf{v} - \mathbf{v}^r)$ é chamado velocidade convectiva.

A equação de equilíbrio usando a descrição ALE de forma acoplada pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}^m \Delta \mathbf{U} + \mathbf{K}^r \Delta \mathbf{U}^r = \mathbf{P} - \mathbf{f}^{int}, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{K}^m é a matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos do material, \mathbf{K}^r é a matriz rigidez relativa ao deslocamento da malha, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos do material, \mathbf{U}^r é o vetor de deslocamentos da malha, \mathbf{P} é o vetor de forças externas e \mathbf{f}^{int} é o vetor de forças internas. Pode-se ver na equação 4.2 que agora tem-se o dobro de incógnitas ($\Delta \mathbf{U}$ e $\Delta \mathbf{U}^r$) em relação às equações. Assim, são necessárias equações adicionais para poder resolver o sistema.

Outra estratégia para abordar o problema usando a formulação ALE é utilizar a técnica ALE *operator-split*, que consiste em desacoplar o deslocamento da malha do deslocamento material (Benson, 1989). Esta técnica está claramente dividida em dois passos: (1) Passo Lagrangiano e (2) Passo Euleriano. Esta última abordagem ALE é a utilizada no presente trabalho.

O passo Lagrangiano não tem desacoplamento entre a malha e o material (o termo convectivo da equação 4.1 é desprezado), onde a solução em deslocamentos é obtida a partir de uma descrição cinemática Lagrangeana clássica. O passo Euleriano se executa logo após ser atingido o equilíbrio do corpo para um dado passo de carga. Pode-se executar este passo depois do equilíbrio de cada passo de carga, seguindo uma sequência, por exemplo, a cada 'p' passos de carga, ou tendo

algum tipo de controle da distorção da malha, de maneira a poupar tempo computacional. O passo Euleriano possui dois processos: (i) o geométrico ou de movimento de malha, na qual são realocados os nós da malha com o objetivo de minimizar as distorções dos elementos; (ii) o físico, que consiste na transferência ou atualização das variáveis de estado desde a malha antiga para a nova malha.

Para o processo geométrico onde ocorre o movimento de malha arbitrário, segue-se o esquema desenvolvido por Nazem et al. (2006), que divide o processo geométrico em duas partes. Primeiro são realocados os nós dos contornos para logo a seguir realocar os nós internos do domínio. Uma vez obtida a nova malha, é necessário atualizar ou remapear as variáveis de estado desde a antiga malha para a nova malha, o que é feito com o processo físico. Na Figura 4.1 é mostrado um esquema de aplicação da formulação ALE *operator-split*.

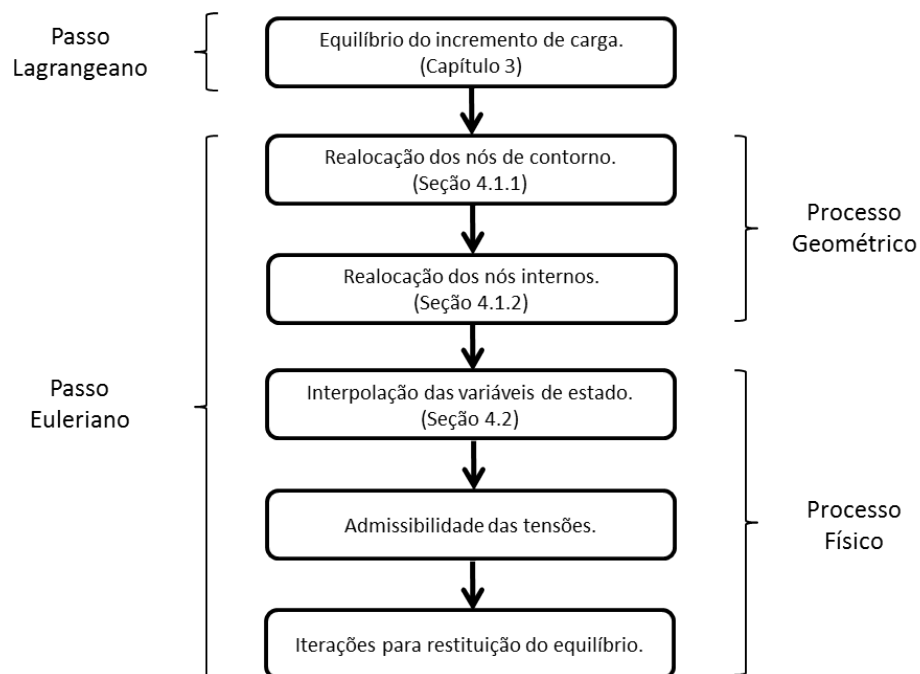


Figura 4.1 – Esquema da formulação ALE desacoplada utilizado no presente trabalho.

Na medida que as particularidades do passo Lagrangeano adotado no presente trabalho foram tratado nos capítulos 2 e 3, o restante do presente capítulo será dedicado ao passo Euleriano.

4.1 PROCESSO GEOMÉTRICO - MOVIMENTO DE MALHA

Logo ao ser atingido ao equilíbrio no passo Lagrangeano, os nós da malha são realocados para melhorar a configuração geométrica dos elementos (diminuindo as distorções), que deve ser controlada de maneira a não modificar nem a forma nem o volume do domínio cuja malha é modificada. Na Figura 4.2 pode-se apreciar a diferença entre a malha deformada e a malha realocada.

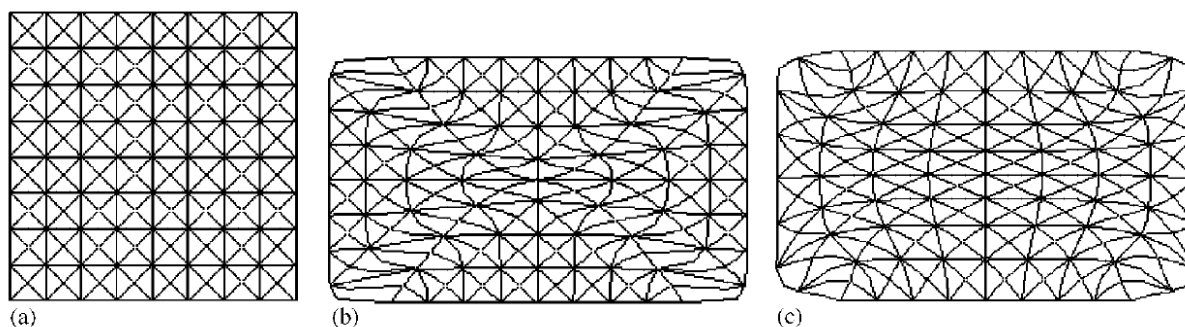


Figura 4.2 – Exemplo da aplicação da formulação ALE: (a) Malha inicial (545 nós e 256 elementos); (b) Deslocamento material com análise elasto-plástica; (c) Malha depois do movimento de malha. Fonte Nazem et al. (2006).

A seguir são descritas as duas partes do processo da realocação dos nós da malha, a realocação dos nós de contorno e realocação dos nós internos

4.1.1 Realocação dos nós de contorno

O objetivo deste procedimento é redistribuir os nós do contorno sem alterar a configuração do contorno, incluindo: o contorno do domínio, interfaces, cargas e deslocamentos impostos sobre contornos do domínio.

A formulação desenvolvida no presente trabalho é feita sobre um elemento tridimensional e por isto, os contornos considerados são superfícies. Muitos problemas tridimensionais possuem características que permitem simplificar a análise modelando-se só uma parte do mesmo ou ainda considerando apenas um modelo em duas dimensões. Na Figura 4.3 pode-se ver duas simplificações típicas. Para o modelo (a) aproveitou-se a simetria, modelando um quarto do problema onde os nós dos planos de simetria durante toda a análise permanecem no mesmo plano (condição de simetria). Para o modelo (b) um caso 3D é modelado em estado plano de deformações, modelando assim só uma fatia do domínio onde o problema fica restrito ao plano que contém as cargas.

Assim, dois tipos de superfícies de contorno podem ser identificadas:

- A primeira, são os contornos naturais do problema, que daqui em diante serão chamadas de *superfície natural de contorno* (SNC) ou simplesmente *superfície de contorno*. Os nós que compõem estas superfícies são nós externos ou nós em contato com materiais diferentes.
- A segunda, devido a artifícios, que podem ser planos de simetria ou os planos externos da fatia modelada em estado plano de deformação (EPD). Cabe ressaltar que os nós que pertencem a estas superfícies, que no modelo simplificado são nós externos, representam nós internos do domínio original e a matemática da sua realocação será feita de maneira

similar aos nós internos na Seção 4.1.2. Daqui em diante chamaremos a estas superfícies *planos com nós internos* (PNI).

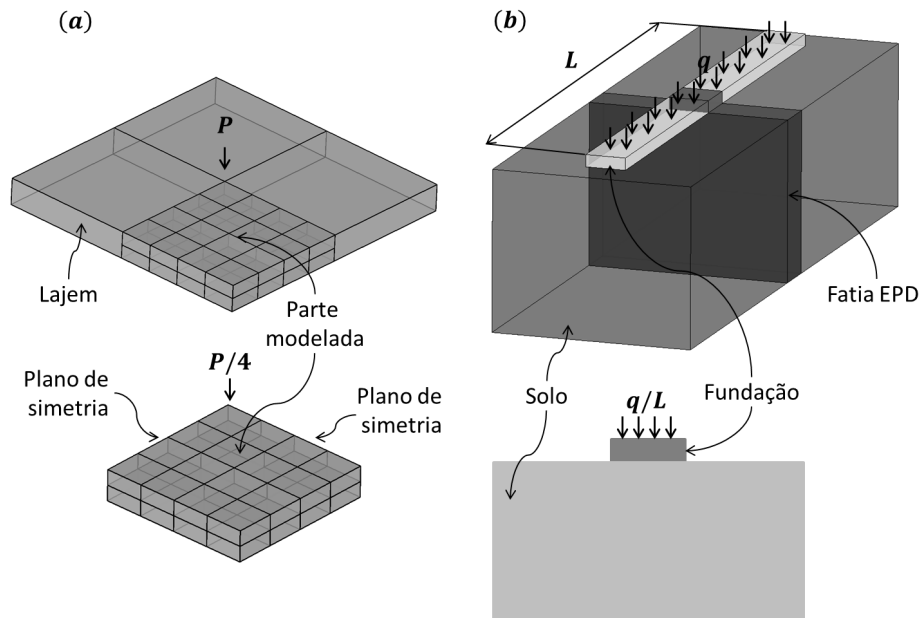


Figura 4.3 – Simplificações de modelos: (a) Modelado em simetria; (b) Modelado em EPD.

Daqui em diante entenda-se por *distância*; a distância euclidiana medida entre dois pontos referidos, e *comprimento*; a distância medida sobre a trajetória da curva ou corda.

No trabalho Vavourakis et al. (2013a) os autores apresentaram um algoritmo para a realocação de nós de contorno para elementos bidimensionais, sendo o contorno uma curva. O foco do algoritmo é, após a deformação, realocar os nós de contorno de forma tal que a distância relativa ao comprimento total da curva, desde um dos extremos ao nó a ser realocado se mantenha similar à distância relativa na configuração inicial. O extremo da curva desde o qual são avaliadas as distâncias relativas deve ser escolhido pelo usuário adequadamente. O esquema utilizado neste trabalho foi desenvolvido partindo do trabalho citado modificando-o tal que o ponto de partida para a medida das distâncias relativas não fique restrita aos extremos da curva e expandindo o algoritmo para sua aplicação em realocação de nós sobre superfícies.

A seguir se faz uma descrição básica do algoritmo para a realocação dos nós de contorno para uma curva, na Figura 4.4 observam-se partes do processo.

1. Adota-se um dos extremos como nó inicial (0), o critério para qual dos extremos escolher como nó inicial é aquele que sofrerá os maiores deslocamentos (centro de referência para

movimento dos nós de contorno - CRMNC).

2. Na configuração inicial (Figura 4.4a), calcula-se para o comprimento desde o nó inicial (0) até cada um dos nós (i), δ_i , assim como o comprimento total da curva δ^0 .
3. Calcula-se os comprimentos relativos de cada um dos nós em relação ao comprimento total da curva, $\alpha_i^0 = \delta_i / \delta^0$.
4. Na configuração deformada (Figura 4.4b), calcula-se o comprimento total da curva δ^k . Com os nós da curva, obtém-se uma representação da mesma em forma paramétrica no espaço $[0, 1]$ (a representação e parametrização da curva será discutida mais adiante).
5. Com os valores calculados de α_i^0 , δ^0 , δ^k e N são avaliados para cada nó, os valores $\alpha_i^{(k)}$:

$$\alpha_i^k = \alpha_i^0 \left[(i - 1) + (N - i) \frac{\delta^0}{\delta^k} \right] / (N - 1), \quad (4.3)$$

onde, N é o número de segmentos da, e α_i^k é diretamente a nova posição do nó i dentro do espaço paramétrico $[0, 1]$.

6. O comprimento entre o nó inicial e o nó i realocado pode ser calculado por $\delta_i^k = \alpha_i^k \delta^k$.
7. Com a representação paramétrica da curva e os valores de α_i^k obtém-se as coordenadas globais dos nós já realocados (Figura 4.4c).

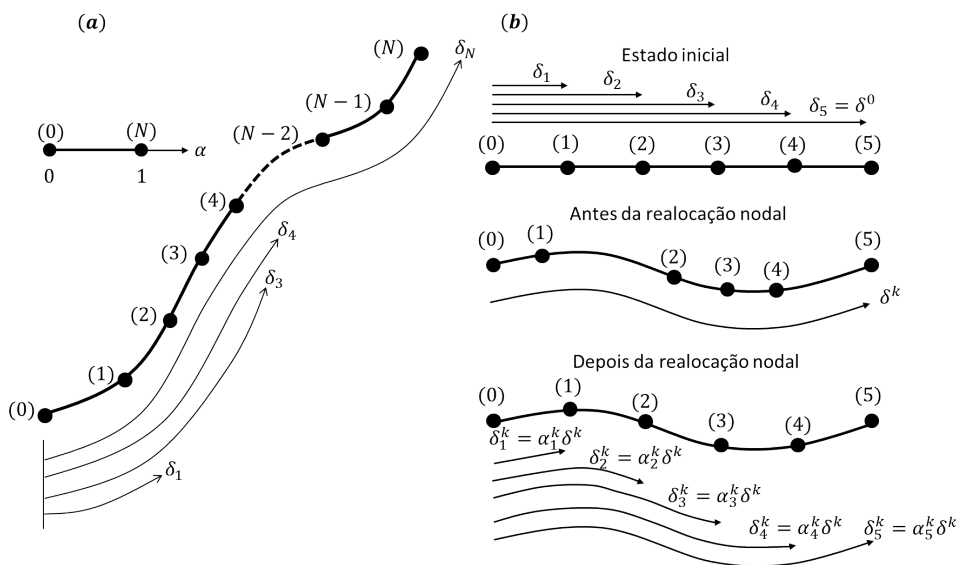


Figura 4.4 – Movimento dos nós de contorno sobre uma linha. Fonte Vavourakis et al. (2013a).

Supondo conhecida a equação da curva $y = y(x)$, o problema de encontrar a nova posição no nó k se resume em encontrar o valor de x tal que se verifique:

$$\delta_i^{(k)} = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx. \quad (4.4)$$

Uma interpolação para a curva pode ser feita utilizando-se os polinômios de Lagrange mediante os nós na configuração deformada. Segundo Nazem et al. (2006), este procedimento é pouco preciso e poderia levar a erros significativos. Os mesmos autores recomendam utilizar o método *splines* quadráticos, que dividem o contorno em varias funções quadráticas que apresentam uma certa ordem de continuidades entre si. Para n nós de um contorno arbitrário em coordenadas globais (x_i, y_i) , a curva pode ser escrita por k funções quadráticas como:

$$y = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \left(y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1, & x_1 \leq x \leq x_3, \\ \sum_{i=3}^5 \left(y_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^5 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2, & x_3 \leq x \leq x_5, \\ \vdots \\ \sum_{i=n-2}^n \left(y_i \prod_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) = A_k x^2 + B_k x + C_k, & x_{n-2} \leq x \leq x_n, \end{cases} \quad (4.5)$$

com

$$k = \frac{n - 1}{2} \quad (4.6)$$

De acordo com Vavourakis et al. (2013b), a equação 4.3 foi desenvolvida considerando um dos extremos como o CRMNC. Pode-se também observar que o domínio de $\alpha_i \in [0, 1]$.

Outra opção, adotada no presente trabalho, é parametrizar a curva para uma variável local u dentro do intervalo paramétrico $[0, 1]$ que coincide com o domínio de α_i . E com as funções de transformação, das coordenadas paramétricas (u_i) para as globais (x_i, y_i) , obtêm-se as coordenadas globais dos pontos realocados com os valores $\alpha_i^k = u_i$ calculados com 4.3.

Segue uma análise para poder considerar como CRMNC qualquer nó do contorno e não unicamente os nós extremos da curva (como é o caso do método proposto por Vavourakis et al. (2013b)).

Considerando o nó i_d da Figura 4.5a o nó CRMNC, a equação 4.3 deve ser modificada. Propõem-se as seguintes expressões:

$$\alpha_i^k = \alpha_i^k + \alpha_{id}^k - \alpha_{id}^k, \quad (4.7a)$$

$$\alpha_i^k = \alpha_{id}^k + (\alpha_i^k - \alpha_{id}^k), \quad (4.7b)$$

$$\Delta \alpha_i^k = \alpha_i^k - \alpha_{id}^k, \quad (4.7c)$$

$$\alpha_i^k = \alpha_{id}^k + \Delta \alpha_i^k. \quad (4.7d)$$

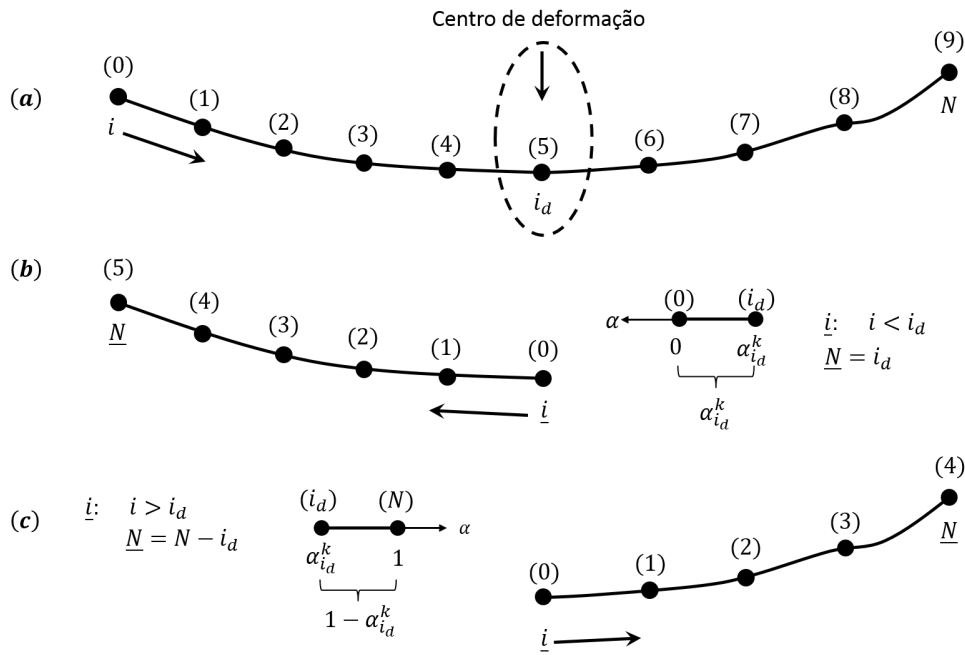


Figura 4.5 – Esquema da formulação α -geral: (a) curva com CRMNC i_d ; (b) parcela da curva com nós $i \leq i_d$; (c) parcela da curva com nós $i \geq i_d$.

Para o cálculo de $\Delta\alpha_{\underline{i}}^k$, divide-se a curva em duas partes, nós com $i < i_d$ e $i > i_d$ como pode-se observar nas Figuras 4.5b-c. Considerando agora, para cada uma das curvas divididas, o nó inicial i_d e utilizando a equação 4.5, obtém-se:

$$\Delta\alpha_{\underline{i}}^{(k)} = \Delta\alpha_{\underline{i}}^{(0)} \left[(\underline{i} - 1) + (\underline{N} - \underline{i}) \frac{\delta_{\underline{i} < i_d}^{(0)}}{\delta_{\underline{i} < i_d}^{(k)}} \right] / (\underline{N} - 1), \quad (4.8)$$

onde \underline{i} é o índice do nó considerado sobre a curva parcelada considerando i_d como nó inicial e \underline{N} a quantidade de segmentos da curva que verifica:

$$\text{para: } i < i_d, \quad \underline{i} = i_d - i, \quad \underline{N} = i_d, \quad (4.9)$$

$$\text{para: } i > i_d, \quad \underline{i} = i - i_d, \quad \underline{N} = N - i_d, \quad (4.10)$$

introduzindo 4.9 e 4.10 em 4.8:

$$\text{para: } i < i_d, \quad \Delta\alpha_{\underline{i}}^{(k)} = \alpha_{\underline{i} < i_d}^{(0)} \frac{\left[i_d - i - 1 + i \left(\frac{\delta_{\underline{i} < i_d}^{(0)}}{\delta_{\underline{i} < i_d}^{(k)}} \right) \right]}{i_d - 1}, \quad (4.11)$$

$$\text{para: } i > i_d, \quad \Delta\alpha_{\underline{i}}^{(k)} = \alpha_{\underline{i} > i_d}^{(0)} \frac{\left[i - i_d - 1 + (N - i) \left(\frac{\delta_{\underline{i} > i_d}^{(0)}}{\delta_{\underline{i} > i_d}^{(k)}} \right) \right]}{N - i_d - 1}, \quad (4.12)$$

onde $\delta_{\underline{i} < i_d}$ é o comprimento desde o nó i_d até o extremo $i = 0$ e $\delta_{\underline{i} > i_d}$ é comprimento desde o nó i_d até o extremo $i = N$.

Nas equações 4.11 e 4.12, $\alpha_{i < i_d}^{(0)}$ e $\alpha_{i > i_d}^{(0)}$ representam os comprimentos relativos medidos a partir do CRMNC i_d , ou seja, de $\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}$. Normalizado cada um pelo seu comprimento relativo, obtém-se:

$$\alpha_{i < i_d}^{(0)} = (0 + \alpha_{i_d}^{(k)}) \frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{0 + \alpha_{i_d}^{(0)}}, \quad (4.13)$$

$$\alpha_{i > i_d}^{(0)} = (1 - \alpha_{i_d}^{(k)}) \frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{1 - \alpha_{i_d}^{(0)}}. \quad (4.14)$$

Finalmente, substituindo 4.13, 4.14, 4.11 e 4.12 em 4.7, obtém-se as expressões que permitem considerar um nó interno à curva como CRMNC:

$$\alpha_i^k = \alpha_{i_d}^k + (\alpha_{i_d}^k) \left(\frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{\alpha_{i_d}^{(0)}} \right) \frac{\left[i_d - i - 1 + i \left(\frac{\delta_{i < i_d}^{(0)}}{\delta_{i < i_d}^{(k)}} \right) \right]}{i_d - 1}, \quad i < i_d, \quad (4.15)$$

$$\alpha_i^k = \alpha_{i_d}^k + (1 - \alpha_{i_d}^k) \left(\frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{1 - \alpha_{i_d}^{(0)}} \right) \frac{\left[i - i_d - 1 + (N - i) \left(\frac{\delta_{i > i_d}^{(0)}}{\delta_{i > i_d}^{(k)}} \right) \right]}{N - i_d - 1}, \quad i > i_d. \quad (4.16)$$

A definição do CRMNC (i_d) é fornecida pelo usuário como um dado de entrada. Cabe ressaltar que agora não só os nós dos extremos das curvas não são realocados, o nó i_d também permanece sem alteração durante o movimento da malha. Além, observar-se nas equações 4.15 e 4.16 que é necessário conhecer o valor $\alpha_{i_d}^k$, para o caso da superfície *B-Spline* o procedimento de mapeamento inverso para a obtenção do valor de $\alpha_{i_d}^k$ expõe-se no Anexo B.

Até aqui o contorno do domínio foi tratado como uma linha, que é válido para elementos planos (cujas fronteiras ou contornos são linhas), não assim para elementos tridimensionais, onde os contornos são superfícies.

O algoritmo para a realocação dos nós das SNC tem as seguintes restrições:

- Superfície de quatro lados,
- Mesma quantidade de elementos nos lados opostos,
- Todos os nós internos da superfície devem ser comuns a quatro elementos.

As SNC são parametrizadas utilizando-se superfícies *B-Splines* por interpolação. Na seção seguinte tem-se uma descrição do algoritmo para a obtenção das *B-Splines* e considerações para a utilização das equações 4.15 e 4.16 nas superfícies *B-Splines*.

4.1.1.1 Superfícies B-Splines

Dado um conjunto discreto de pontos que descrevem entidades geométricas como curvas ou superfícies, existem duas formas básicas de obter uma função contínua que consiga representar estas entidades, por *interpolação* e por *aproximação*. Na Figura 4.6 observa-se a diferença entre as duas formas de representação.

Na representação por *aproximação* a curva ou superfície não passa necessariamente pelos pontos discretos Q_i . Na representação por *interpolação* a curva ou superfície deve passar obrigatoriamente pelos pontos Q_i .

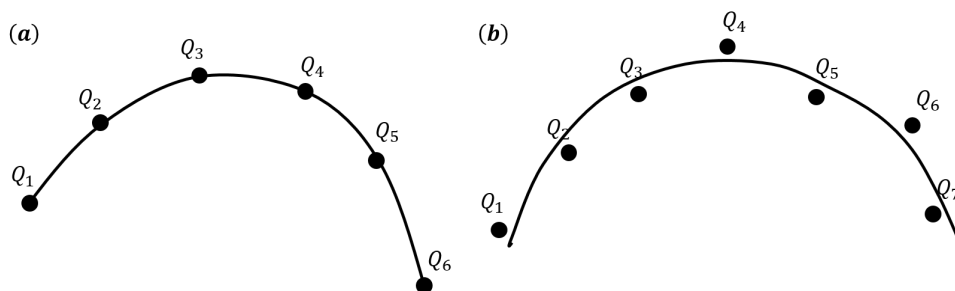


Figura 4.6 – Representação de curvas: (a) Por interpolação; (b) Por aproximação. Fonte Piegl e Tiller (1996).

Na realocação dos nós das SNC (superfícies naturais de contorno), estes devem permanecer na superfície de forma a não modificar o volume do domínio. Assim, utiliza-se a representação por *interpolação*.

Dados n pontos x_i^* que representam uma função $f(x)$, a função $y(x)$ usada para interpolar a função $f(x)$ pode pertencer a uma das seguintes famílias:

- Funções polinomiais, $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$,
- Série de Fourier, $y(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$,
- Funções exponenciais, $y(x) = ae^{bx}$,
- *Splines*, representação polinomial suave definida por trechos, dividindo o intervalo total em subintervalos e para cada um deles definir os polinômios interpoladores. A expressão 4.5 é uma representação *Spline* com polinômios de Lagrange de ordem quadrática.

No presente trabalho, a representação das superfícies é feita por *B-Splines*. Os *B-Splines* podem descrever curvas, superfícies e sólidos complexos em forma paramétrica, como se ilustra na Figura 4.7. Aqui serão utilizadas para representação de superfícies:

$$\mathcal{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad (4.17)$$

onde $S(u, v)$ representa a superfície parametrizada por u e v .

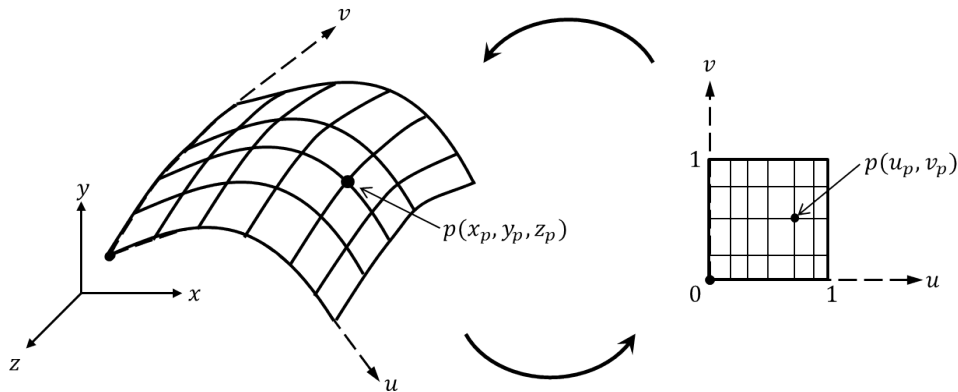


Figura 4.7 – Representação paramétrica de uma superfície.

Para poder descrever com clareza o algoritmo de parametrização da superfície, segue uma sequência bem básica de conceitos necessários. A presente seção está baseada completamente nos trabalhos de Piegl e Tiller (1996) e Cottrell et al. (2009).

A formulação *B-Splines* é uma generalização do método de *Bézier*, por isto primeiro serão definidas as curvas *Bézier* e suas componentes, depois passar às curvas *B-Splines* e, finalmente, tratar as superfícies.

Curvas de Bézier

Uma curva *Bézier* pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n} P_i \quad (4.18)$$

onde $C(u)$ define um vetor de coordenadas parametrizadas $\{x(u), y(u), z(u)\}^t$ na posição u do espaço paramétrico $[0, 1]$, P_i é o vetor de coordenadas $\{x, y, z\}^t$ dos *pontos de controle* (ver Figura 4.8) e $B_{i,n}$ representa os polinômios de *Bernstein* de grau n associados a cada um dos pontos de controle:

$$B_{i,n} = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.19)$$

Os pontos de controle P_i formam o chamado *polígono de controle*. O polígono de controle delimita a curva gerada (ou interpolada) através de um polígono convexo aberto. Este aproxima-se da forma da curva a medida que aumenta o número de pontos de controle.

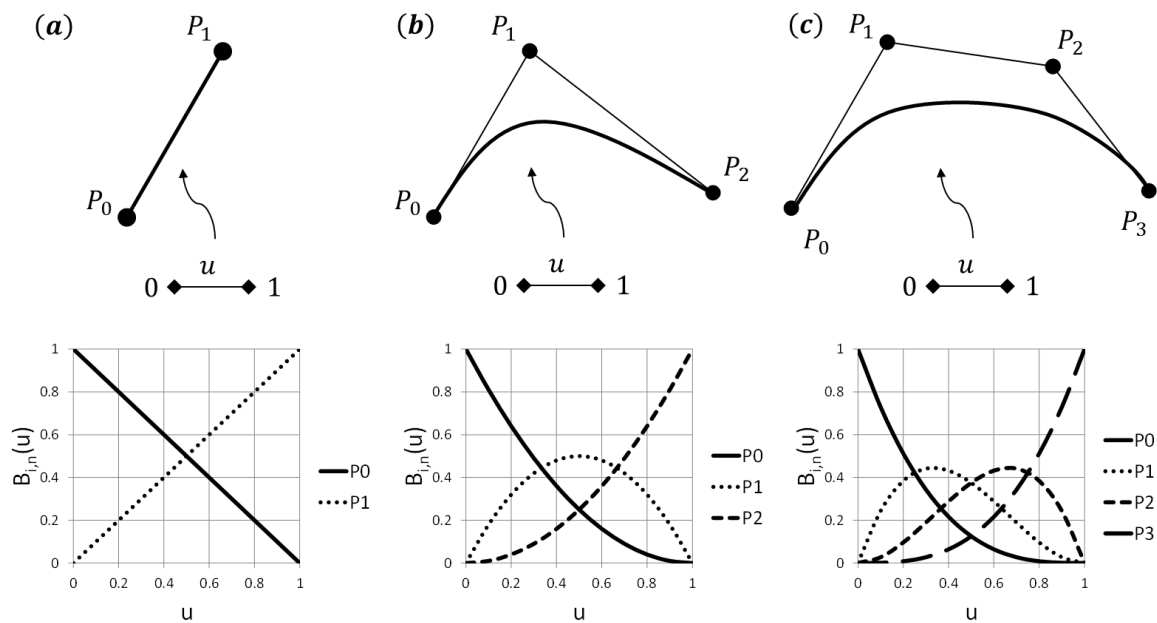


Figura 4.8 – Curvas de *Bézier*: (a) Linear; (b) Quadrática; (c) Cúbica.

O valor do polinômio de *Bernstein* para um ponto de controle pode ser entendido como o peso ou 'gravidade' que exerce este ponto sobre a curva para essa posição u dentro do espaço paramétrico. Na Figura 4.8 mostram-se curvas *Bézier* para diversos graus com as funções dos polinômios de *Bernstein* correspondentes.

Nas curvas *Bézier*, o grau do polinômio depende do número de pontos de controle e, observando as funções dos polinômios de *Bernstein*, nota-se que um ponto de controle tem efeito sobre todo o espaço paramétrico u (influência global).

Curvas *B-Splines*

A formulação *B-Spline* é uma generalização do método *Bézier*, onde o grau do polinômio é escolhido independentemente do número de pontos de controle. Os pontos de controle tem influência localizada, dando maior flexibilidade ao método.

Uma curva paramétrica *B-Spline* de grau p é uma curva polinomial por pedaços dada por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad (4.20)$$

onde, P_i são os pontos de controle, $N_{i,p}(u)$ são as funções de base, dadas por:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } \in [u_i, u_{i+1}], \\ 0 & \text{se } \notin [u_i, u_{i+1}], \end{cases} \quad (4.21)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u), \quad (4.22)$$

onde deve-se considerar que $0/0 = 0$ quando $u_i = u_{i+1}$

Define-se o chamado vetor de nós \mathbf{U} (*knot vector*). O vetor de nós $\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}^t$ é um conjunto de valores reais (u_i) que descreve as coordenadas dos nós no espaço paramétrico, em sucessão não-monótona crescente de valores, e define a extensão do domínio onde as funções de base associadas a cada um dos pontos de controle têm validade. Os intervalos $[u_i, u_{i+1})$ estabelecem os domínios dos pedaços do polinômio, sendo que para $u_i = u_{i+1}$ o intervalo apresenta comprimento nulo. Para curvas abertas tem-se que $m = n + p + 1$ e para curvas fechadas $m = n + p$.

Cada uma das funções de base $N_{i,p}(u)$ apresenta valores não nulos somente no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$. Assim, um ponto u em uma curva é influenciado por $p + 1$ pontos de controle, o que caracteriza a propriedade de controle local sobre a geometria da curva. As funções de base têm, em geral, continuidade C^{p+1} , a qual pode ser reduzida quando mais do que um nó é definido com o mesmo valor. Sendo k_i a multiplicidade de um dado nó u_i , a continuidade das funções de base nesta posição fica C^{p-k} . Para curvas abertas, de forma a forçar que elas passem pelos pontos de controle extremos, usa-se $k = p + 1$. Na Figura 4.9 pode-se observar as funções de base para $p = 0, 1, 2$.

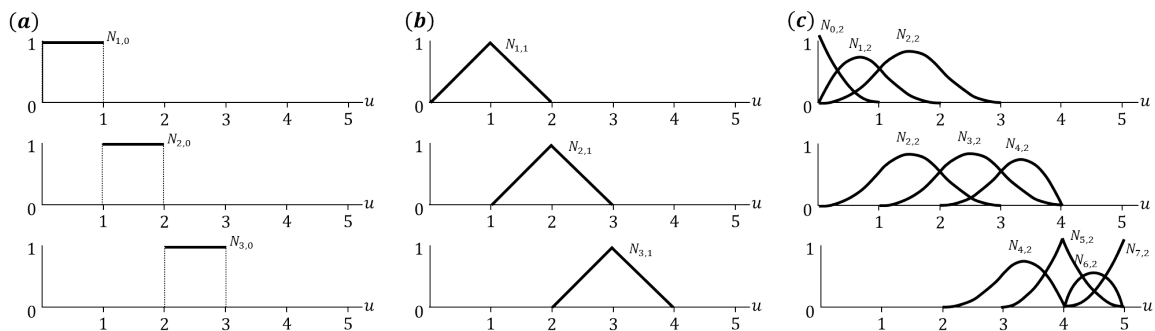


Figura 4.9 – Funções de base $N_{i,p}$ para o vetor de nós $\mathbf{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ para; (a) $p = 0$; (b) $p = 1$; (c) $p = 2$. Fonte Cottrell et al. (2009).

Interpolação de uma curva com *B-Splines*

Tendo uma sequência de pontos \mathbf{Q}_k , $k = 0, \dots, n$, que deseja-se interpolar por *B-Spline* de grau p , dando uma coordenada paramétrica, \bar{u}_k , para cada ponto k , e um vetor de nós $\mathbf{U} = \{u_0, \dots, u_m\}$

apropriado, obtém-se um sistema de equações linear de ordem $n + 1$:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i, \quad (4.23)$$

onde os pontos de controle \mathbf{P}_i são as incógnitas do sistema.

Existem várias formas de escolher os valores paramétricos \bar{u}_k e a distribuição de nós \mathbf{U} , isto afeta diretamente a forma e a parametrização da curva. Assume-se uma parametrização onde $u \in [0, 1]$. Os três métodos mais comuns para a distribuição de nós são (Piegl e Tiller, 1996):

1. Igualmente espaçado:

$$\bar{u}_0 = 0, \quad \bar{u}_n = 1, \quad \bar{u}_k = \frac{k}{n} \text{ com } k = 1, \dots, n-1, \quad (4.24)$$

não recomendado quando os dados não estão espaçados de forma uniforme.

2. Comprimento da curva:

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (4.25)$$

onde, $| \quad |$ representa a norma euclidiana, d é a comprimento total da curva e os valores \bar{u}_k são obtidos por:

$$\bar{u}_0 = 0, \quad \bar{u}_n = 1, \quad \bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d}, \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1. \quad (4.26)$$

O método comprimento da curva é o mais utilizado por produzir uma boa parametrização da curva no sentido de obter uma parametrização aproximadamente uniforme.

3. Método centrípeto:

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|} \quad (4.27)$$

e os valores \bar{u}_k são obtidos por:

$$\bar{u}_0 = 0, \quad \bar{u}_n = 1, \quad \bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d}, \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1, \quad (4.28)$$

Adequada quando os dados apresentam variação brusca em sua forma ou distribuição.

No presente trabalho é adotado o método de comprimento da curva.

O vetor de nós \mathbf{U} pode ser obtido com uma distribuição uniformemente espaçada:

$$\mathbf{U} = \underbrace{u_0, \dots, u_p}_{=0}, \dots, u_{j+p}, \dots, \underbrace{u_{m-p}, \dots, u_m}_{=1} \quad (4.29)$$

com

$$u_{j+p} = \frac{j}{n-p+1}, \quad j = 1, \dots, n-p, \quad (4.30)$$

segundo Piegl e Tiller (1996) uma distribuição uniforme dos nós não é recomendável conjuntamente com os métodos de comprimento da curva ou centrípeto. Os autores recomendam o uso da técnica da média, que consiste em substituir a equação 4.30 por:

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i, \quad j = 1, \dots, n-p, \quad (4.31)$$

com a qual o vetor de nós \mathbf{U} reflete a distribuição dos \bar{u}_k .

Extensão de *B-Splines* para uma superfície

Dado um conjunto de $(n+1) \times (m+1)$ pontos $\mathbf{Q}_{k,l}$ ($k = 0, \dots, n; l = 0, \dots, m$), tem-se:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j}. \quad (4.32)$$

Para obter a representação da superfície é necessário obter os valores de \bar{u}_k e \bar{v}_l , e os vetores de nós \mathbf{U} e \mathbf{V} . Fazendo uso do método comprimento da curva (equação 4.47) ou do método centrípeto (equação 4.49) são obtidos os parâmetros $\bar{u}_0^l, \dots, \bar{u}_n^l$ para cada l , para logo obter os valores de \bar{u}_k por média dos \bar{u}_k^l , $l = 0, \dots, m$:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \bar{u}_k^l, \quad k = 0, \dots, n, \quad (4.33)$$

a obtenção dos \bar{v}_l é análoga ao \bar{u}_k .

Uma vez obtidos os \bar{u}_k e \bar{v}_l são obtidos os vetores de nós \mathbf{U} e \mathbf{V} .

Solução do sistema - Pontos de controle

A equação 4.32 representa $(n+1) \times (m+1)$ equações lineares cujas variáveis são os pontos de controle $P_{i,j}$. Como $S(u, v)$ representa uma superfície de produto tensorial, $P_{i,j}$ podem ser obtidos por uma sequência de interpolação de curvas. Para um l fixo:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left(\sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n N_{j,q}(\bar{u}_k) R_{i,l}, \quad (4.34)$$

onde:

$$R_{i,l} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j}, \quad (4.35)$$

sendo $R_{i,l}$ os pontos de controle de $S(u, v)$ para $v = \bar{v}_l$. Fixando i e deixando l variar, $R_{i,l}$ torna-se uma interpolação de curva através dos pontos $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$ sendo $P_{i,0}, \dots, P_{i,m}$ os pontos de controle computados. Assim, o algoritmo para a obtenção de todos os pontos $P_{i,j}$ é (ver Figura 4.10c):

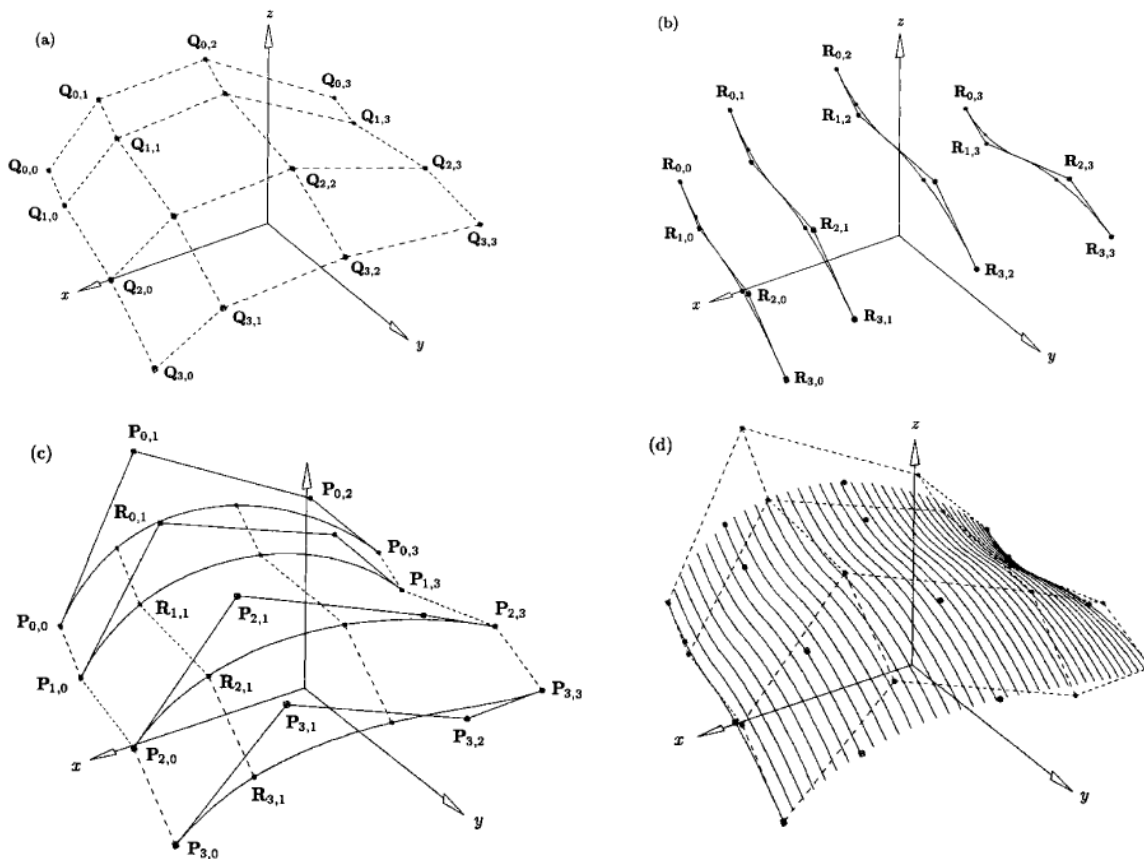


Figura 4.10 – Interpolação global de uma superfície. (a) Pontos dados; (b) interpolação dos pontos na direção u ; (c) interpolação dos pontos na direção v através dos pontos interpolados na direção u ; (d) Superfície interpolada com os pontos de controles obtidos. Fonte Piegl e Tiller (1996).

1. Usando o vetor de nós U e os \bar{u}_k , fazer $m + 1$ interpolações de curva usando $Q_{0,l}, \dots, Q_{n,l}$ para $(l = 0, \dots, m)$; obtêm-se assim os $R_{i,l}$ (ver Figura 4.10b),
2. usando o vetor de nós V e os \bar{v}_l , fazer $n + 1$ interpolações de curva usando $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$ para $(i = 0, \dots, n)$; obtêm-se assim os $P_{i,l}$ (ver Figura 4.10c).

Na Figura 4.10d observa-se a superfície interpolada. Piegl e Tiller (1996) mostram que o algoritmo é simétrico, ou seja, a interpolação independe da direção (u ou v).

Assim, fica definida a parametrização da Superfície 4.17 no espaço paramétrico (u, v) e as equações 4.15 e 4.16 são aplicadas para cada uma das direções paramétricas u e v de forma independente.

4.1.2 Realocação dos nós internos

Foram testadas e implementadas várias formulações para definir o movimento arbitrário de nós internos realizado durante um passo de realocação de malha.

1. Método da inversa da distância, IDA (do acrônimo em inglês *inverse distance algorithm*),
2. Métodos de média ponderada:
 - a) por inversa do volume inicial (MPIV0),
 - b) por inversa do volume inicial com influência da variação do volume (MPIV1),
3. Otimização da ortogonalidade dos elementos (ORT).

Cabe lembrar que existem superfícies planas externas do domínio computacional que são contornos do artificiais, de simetria ou de EPD, cujos nós são na verdade nós internos. Os nós pertencentes a estes plano, PNI (planos com nós internos), são realocados seguindo-se os métodos de realocação de nós internos.

Segue abaixo uma descrição detalhada de cada um dos métodos aqui utilizados para a realocação dos nós internos do domínio computacional e as considerações a serem levadas em conta para os nós que pertencem aos planos PNI.

4.1.2.1 Método da inversa da distância - IDA

Este método foi desenvolvido e apresentado por Shepard (1968) para a interpolação de funções irregulares, sendo implementado por Teixeira (2001), Braun (2002) e Braun (2007) na adaptação de nós em problemas de iteração fluido-estrutura.

No contexto da mecânica dos sólidos, a formulação é empregada considerando que o deslocamento de malha para os nós internos é obtido fazendo-se a média dos deslocamentos dos nós das superfícies externas (deslocamentos devido à realocação dos nós) ponderadas pela inversa da distância entre os nós, elevada a um expoente n previamente determinado:

$$\Delta u_k^i = \frac{\sum_{j=1}^{nsc} a_{ij} \Delta u_k^j}{\sum_{j=1}^{nsc} a_{ij}}, \quad (i = 1, \dots, nint; k = 1, 2, 3), \quad (4.36)$$

onde nsc é o número de nós sobre a superfície de contorno (SNC), $nint$ é o número de nós no interior do domínio do sólido e a_{ij} o peso de influência que exerce o nó de contorno j sobre a realocação do nó interno i , dado pela seguinte expressão:

$$a_{ij} = (d_{ij})^{-n}, \quad (4.37)$$

onde d_{ij} é a distância entre os nós i e j , e n um valor arbitrário positivo maior ou igual a 1 que controla determina o peso que deseja-se dar à inversa da distância. Quanto maior for o valor de n maior a influência dos nós com mais próximos ao nó que está sendo realocado. Na Figura 4.11 observam-se os elementos influentes para a realocação de um nó interno i .

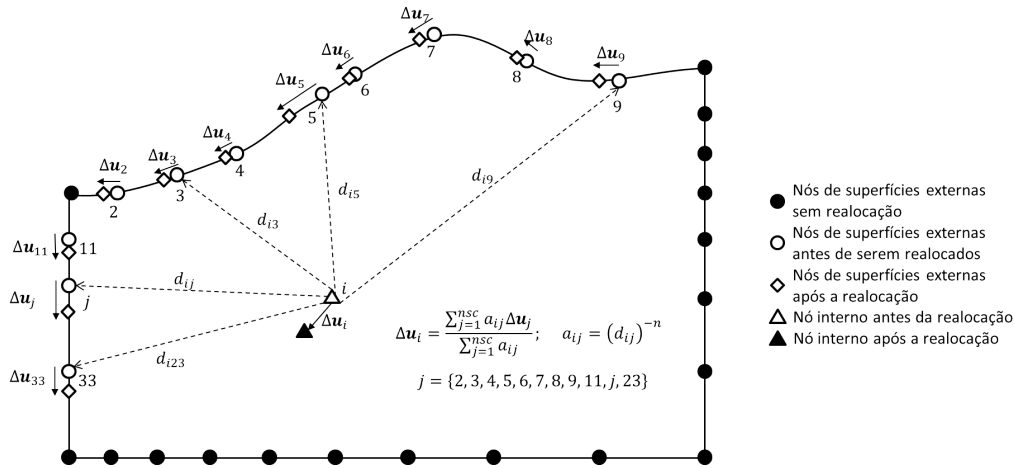


Figura 4.11 – Esquema do movimento de um nó interno por IDA.

Observação para os nós nos planos **PNI**, na equação 4.37, nsc passa a ser o número de nós das superfícies de contorno (SNC) que estão contidas no plano PNI considerado. Assim os nós são forçados a permanecer neste plano.

4.1.2.2 Métodos da média ponderada - MPIV0 e MPIV1

A coordenada do nó a realocar é obtida através da média ponderada das coordenadas do centro dos elementos que têm este nó em comum. Como o elemento empregado neste trabalho é um hexaedro com um ponto de integração, o ponto de integração (ponto de Gauss) coincide com o centro do elemento, que é calculado por:

$$\mathbf{x}_k^{PG} = \frac{1}{8} \sum_{a=1}^8 \mathbf{x}_{a,k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4.38)$$

onde a representa os nós do elemento.

As novas coordenadas dos nós internos podem ser obtidas por:

$$x_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{necn} p_j x_{j,k}^{PG}}{\sum_{j=1}^{necn} p_{j,k}} \quad (i = 1, \dots, nint; k = 1, 2, 3), \quad (4.39)$$

onde $x_{i,k}$ representa a coordenada k do nó interno i , $x_{j,k}^{PG}$ é a coordenada k do ponto de Gauss do elemento j , $necn$ é o número de elementos comuns ao nó que está sendo realocado, $nint$ é o número de nós no interior do domínio do sólido e p_j é o fator de ponderação. De acordo com o tipo de média ponderada utilizado, o fator de ponderação pode ser calculado usando-se as seguintes alternativas:

- MPIV0: O fator de ponderação é a inversa do volume inicial (V^{ini}):

$$p_j = \frac{1}{V_j^{ini}}. \quad (4.40)$$

A ponderação por inversa do volume inicial tenta manter a relação dos volumes igual à relação inicial.

- MPIV1: Ao fator de ponderação MPIV0 é acrescentada a relação entre o volume inicial e o volume atual (V^{atu}):

$$p_j = \frac{V_j^{atu}}{V_j^{ini}} \frac{1}{V_j^{ini}}. \quad (4.41)$$

Portanto, com a relação de volumes acrescenta-se um maior peso na ponderação aos elementos que sofreram menor variação de volume.

É importante destacar que a realocação dos nós é feita de maneira local. Além disso, a realocação de um nó afeta o volume de vários elementos e, conseqüentemente, interfere na realocação dos nós vizinhos. Para melhorar a aplicação deste método, o processo é repetido três vezes de maneira sequencial com o objetivo de obter-se uma distribuição suavizada de elementos.

Observação, para os nós nos planos **PNI**, o número de elementos que contém o nó que está sendo realocado ($necn$) é igual a 4 e, quando realocado, este nó é forçado a permanecer no plano.

4.1.2.3 Otimização da ortogonalidade dos elementos - ORT

Este método pode ser visto como uma simplificação do método de otimização apresentado por Carcaillet et al. (1986), onde um algoritmo de otimização global de vários critérios (ortogonalidade, relação de volume e forma do elemento) foi desenvolvido. O presente algoritmo toma para o procedimento de otimização apenas a parcela devida à ortogonalidade, fazendo isto de maneira local (nó por nó).

Considera-se o problema local ilustrado na Figura 4.1.2.3 para otimização de malha por ortogonização, a qual está representada por 8 elementos vizinhos no caso tridimensional (ou 4 elementos no caso bidimensional). Tomando-se primeiramente o caso bidimensional, para uma melhor visualização, utiliza-se uma *célula tipo* que é definida por todos os elementos que concorrem ao nó a realocar. Para uma *célula tipo* plana o centro é $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ e para uma *célula tipo* tridimensional $P_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$.

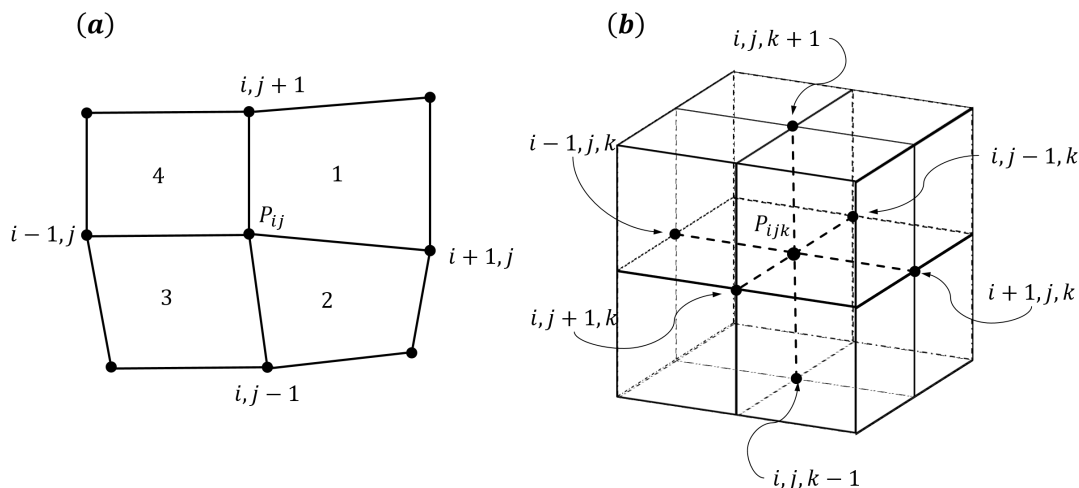


Figura 4.12 – *Célula tipo* definida para: (a) Caso bidimensional; (b) Caso tridimensional.

Calculam-se os vetores de cada uma das arestas que concorrem no nó central da *célula tipo*. No caso tridimensional são 6 vetores e 4 para o caso bidimensional, ou seja:

$$\mathbf{r}_{i,j+1} = (x_{i,j+1} - x_i, j)\hat{i} + (y_{i,j+1} - y_i, j)\hat{j}, \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{r}_{i+1,j} = (x_{i+1,j} - x_i, j)\hat{i} + (y_{i+1,j} - y_i, j)\hat{j}, \quad (4.42b)$$

$$\mathbf{r}_{i,j-1} = (x_{i,j-1} - x_i, j)\hat{i} + (y_{i,j-1} - y_i, j)\hat{j}, \quad (4.42c)$$

$$\mathbf{r}_{i-1,j} = (x_{i-1,j} - x_i, j)\hat{i} + (y_{i-1,j} - y_i, j)\hat{j}, \quad (4.42d)$$

onde \hat{i} e \hat{j} são os vetores direcionais unitários das direções x e y , respectivamente.

A magnitude que possui uma medida da ortogonalidade local da *célula tipo* é determinada pelo quadrado do produto escalar dos vetores que estão associados ao nó central. No caso bidimensional são 4 produtos escalares, isto é:

$$ORT_{i,j} = (\mathbf{r}_{i,j+1} \cdot \mathbf{r}_{i+1,j})^2 + (\mathbf{r}_{i+1,j} \cdot \mathbf{r}_{i,j-1})^2 + (\mathbf{r}_{i,j-1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j})^2 + (\mathbf{r}_{i-1,j} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j})^2, \quad (4.43)$$

para a *célula tipo* tridimensional são 12 produtos escalares, ou seja:

$$\begin{aligned} ORT_{i,j,k} = & (\mathbf{r}_{i,j+1,k} \cdot \mathbf{r}_{i+1,j,k})^2 + (\mathbf{r}_{i+1,j,k} \cdot \mathbf{r}_{i,j-1,k})^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i,j-1,k} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k})^2 + (\mathbf{r}_{i-1,j,k} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k})^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i,j+1,k+1} \cdot \mathbf{r}_{i+1,j,k+1})^2 + (\mathbf{r}_{i+1,j,k+1} \cdot \mathbf{r}_{i,j-1,k+1})^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i,j-1,k+1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k+1})^2 + (\mathbf{r}_{i-1,j,k+1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k+1})^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i,j+1,k-1} \cdot \mathbf{r}_{i+1,j,k-1})^2 + (\mathbf{r}_{i+1,j,k-1} \cdot \mathbf{r}_{i,j-1,k-1})^2 + \\ & + (\mathbf{r}_{i,j-1,k-1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k-1})^2 + (\mathbf{r}_{i-1,j,k-1} \cdot \mathbf{r}_{i-1,j,k-1})^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Derivando a função ORT em relação a \mathbf{x}_p (incógnita desejada de maneira tal que a função ORT seja mínima), igualando a 0 e fatorizando adequadamente obtém-se a função:

$$F(\mathbf{x}_p) = \delta \mathbf{x}_p^t \mathbf{A} \mathbf{x}_p + \delta \mathbf{x}_p^t \mathbf{B} = 0, \quad (4.45)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica positiva-definida que é função das variáveis \mathbf{x}_p e \mathbf{B} é o um vetor também função das variáveis \mathbf{x}_p . Assim obtém-se um sistema de equações não linear de ordem 3x3 que minimiza a função ORT :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{B} = 0, \quad (4.46)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_p = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix}, \quad (4.47)$$

com:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f\{x_p^2, y_p^2, z_p^2, x_p, y_p, z_p, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; & a_{12} &= \{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; \\ a_{22} &= f\{x_p^2, y_p^2, z_p^2, x_p, y_p, z_p, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; & a_{23} &= \{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; \\ a_{33} &= f\{x_p^2, y_p^2, z_p^2, x_p, y_p, z_p, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; & a_{13} &= \{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

e:

$$\begin{aligned} b_1 &= f\{y_p^2, z_p^2, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; \\ b_2 &= f\{x_p^2, z_p^2, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}; \\ b_3 &= f\{x_p^2, y_p^2, x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}\}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

sendo $x_{i,j,k}$, $y_{i,j,k}$ e $z_{i,j,k}$ as coordenadas dos nós que possuem uma aresta comum com o nó P .

Observação, para os nós nos planos PNI, os nós são tratados como centros de *células tipo* bidimensionais.

4.2 PROCESSO FÍSICO - TRANSFERÊNCIA DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

As variáveis de estado são todas as variáveis internas que possuem um papel no comportamento mecânico do material: tensões, tensão de escoamento, temperatura, pressão de poros, parâmetros de encruamento, entre outras. Em geral, existem dois conjuntos de variáveis de estado: as correspondentes aos pontos de Gauss (calculadas e armazenadas nos pontos de Gauss, como são as tensões) e as correspondentes aos nós dos elementos (como é a pressão de poros). Pelas leis constitutivas consideradas no presente trabalho, as variáveis de estado a serem transferidas desde a *malha antiga* para a *nova malha* são: tensões, tensões de escoamento e parâmetros de encruamento, todas estas correspondem aos pontos de Gauss.

Uma vez obtida a *nova malha* para o corpo em equilíbrio (passo geométrico), as variáveis de estado são transferidas desde a *malha antiga* para a *nova malha*. Na Figura 4.13 observam-se as configurações da malha antes e depois da realocação de nós.

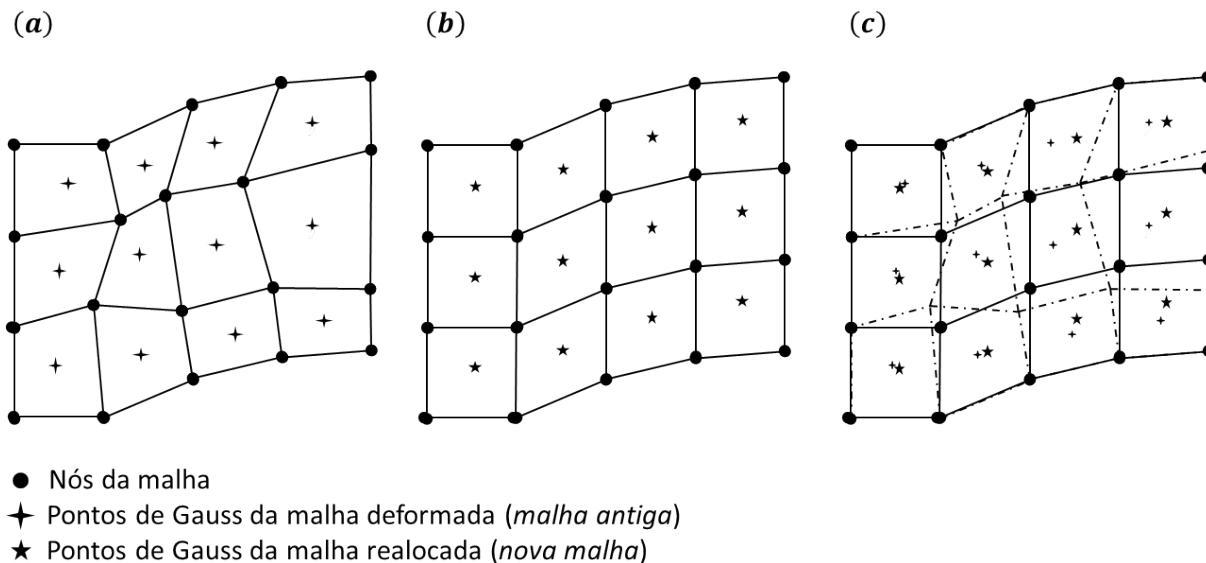


Figura 4.13 – (a) Malha deformada - *malha antiga*; (b) Malha realocada - *nova malha*; (c) Superposição das malhas.

Foram comparados inicialmente três métodos de transferência de variáveis para decidir qual delas fornece melhores resultados, tendo-se em conta a utilização de um elemento tridimensional com um ponto de integração. Os métodos empregados foram os seguintes:

1. Interpolação por funções de forma (IFF),
2. Interpolação por função radial (RBPIF - do acrônimo em inglês *Radial Basis Point Interpolation Functions*),
3. Método da inversa da distância (IDA - idem Seção 4.1.2.1).

4.2.1 Interpolação por funções de forma - IFF

O passo Euleriano é aplicado frequentemente, com o objetivo de evitar-se grandes distorções dos elementos, não deixando que a *malha nova* resulte uma configuração muito afastada da *malha antiga*. Considerando que o elemento adotado apresenta apenas um ponto de integração, assume-se que o ponto de Gauss da *nova malha* se encontra dentro do elemento correspondente na *malha antiga*.

Na Seção 2.7 foram obtidas as tensões nodais dos elementos, assim também podem-ser extrapoladas as demais variáveis de estado correspondentes as pontos de Gauss. Na Figura 4.14 observa-se o processo para a interpolação das variáveis de estado.

Com as coordenadas globais do ponto de Gauss do elemento na *nova malha* ${}^{nm}e$ e as coordenadas globais dos nós do elemento na *malha antiga* ${}^{ma}e$, por mapeamento inverso (ver Anexo A),

obtem-se as coordenadas paramétricas do novo ponto de Gauss (nPG) no elemento da *malha antiga* ξ_{ma}^{nPG} .

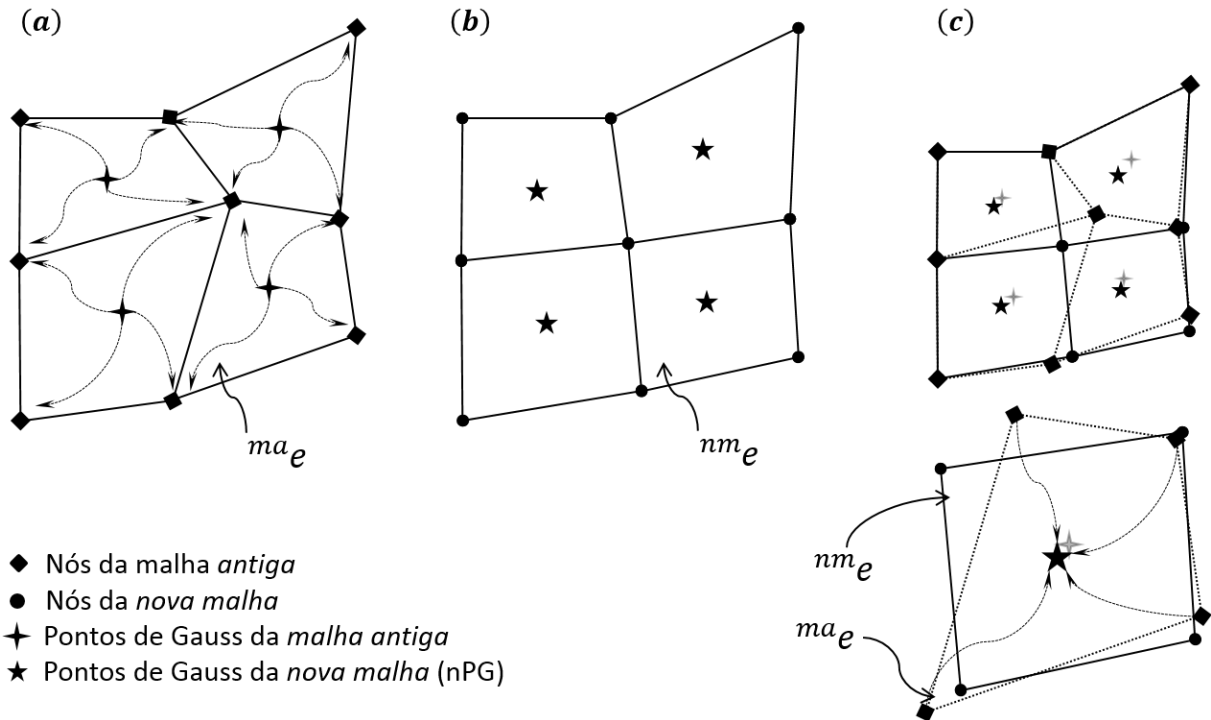


Figura 4.14 – Processo da interpolação por IFF (a) Extrapolação das variáveis de estado desde os PG aos nós da *malha antiga*; (b) *nova malha*; (c) Interpolação desde os nós da *malha antiga* para os pontos de Gauss da *nova malha*.

Com os valores das variáveis de estado nos nós do elemento ' e ' na *malha antiga* ' Ψ_a^{ma} ' e as coordenadas paramétricas ξ_{ma}^{nPG} , utilizando as funções de forma (funções de interpolação), obtém-se os valores das variáveis de estado por interpolação:

$$\Psi = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi_{ma}^{nPG}) \Psi_a^{ma}, \quad (4.50)$$

onde Ψ representa uma variável de estado no ponto de Gauss na *nova malha* e N_a são as funções de forma ou funções de interpolação do elemento (ver equação 2.15).

Aqui foi suposto que o novo ponto de Gauss, logo após a realocação de nós, se encontra dentro do elemento correspondente para a *malha antiga*. No algoritmo se verifica que após a operação de mapeamento inverso, os valores ξ_{ma}^{nPG} estão todos dentro dos limites $[-1, +1]$. Esta suposição é válida uma vez que sejam utilizados elementos com um ponto de integração.

4.2.2 Interpolação por função radial - RBPIF

Conhecendo-se os valores de uma função qualquer ' Ψ ' (variáveis de estado), distribuídas em n pontos $\mathbf{r}^{(j)} = \{x^{(j)}, y^{(j)}, z^{(j)}\}^t, j = 1, 2, \dots, n$ (pontos de Gauss da *malha antiga*), o método

RBPIF estima os valores em novos pontos $\mathbf{s} = \{x_s, y_s, z_s\}^t$ utilizando a função polinomial \mathbf{b} e a função radial de base \mathbf{b} :

$$\Psi(\mathbf{s}) = \mathbf{p}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{s}) + \mathbf{b}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{s}), \quad (4.51)$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetor de coeficientes de m e n componentes, respectivamente. O vetor \mathbf{p} são as funções de interpolação dadas, neste caso, por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}) = \{1, x_s, y_s, z_s, x_s y_s, x_s z_s, y_s z_s, x_s y_s z_s\}, \text{ com } m = 8. \quad (4.52)$$

Para garantir a unicidade da interpolação, deve ser satisfeita a seguinte equação:

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{s}) = 0. \quad (4.53)$$

Os coeficientes dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{c} da equação 4.51 são determinados forçando a função a passar pelos n pontos onde o valor da função Ψ é conhecida, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Psi \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{G} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Psi \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (4.54)$$

onde $\Psi = \{\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(n)}\}^t$ é o vetor das funções conhecidas $\Psi^{(l)}$ nos n pontos, e \mathbf{B} e \mathbf{P} são definidas como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{r})^{(1)} & b_2(\mathbf{r})^{(1)} & \dots & b_n(\mathbf{r})^{(1)} \\ b_1(\mathbf{r})^{(2)} & b_2(\mathbf{r})^{(2)} & \dots & b_n(\mathbf{r})^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(\mathbf{r})^{(n)} & b_2(\mathbf{r})^{(n)} & \dots & b_n(\mathbf{r})^{(n)} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = [\mathbf{p}(\mathbf{r}^{(1)}) \dots \mathbf{p}(\mathbf{r}^{(n)})], \quad (4.55)$$

com:

$$b_i(\mathbf{r}^{(j)}) = (d_i^2 + R^2)^{0.5}, \quad (4.56)$$

onde d_i é a distância euclidiana entre os pontos $\mathbf{r}^{(i)}$ e $\mathbf{r}^{(j)}$, R é um parâmetro igual à mínima distância entre os pares de vetores: $(\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(1)}) \dots (\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(n)})$.

Uma vez determinados os coeficientes dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{c} e considerando a função radial da equação, a interpolação para o ponto \mathbf{s} é calculada através de:

$$\Psi(\mathbf{s}) = \{\mathbf{b}^t(\mathbf{s}), \mathbf{p}^t(\mathbf{s})\} \cdot \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{r}^{(j)}) \cdot \begin{Bmatrix} \Psi(\mathbf{r}) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.57)$$

A interpolação é feita em nível local tomando-se os pontos de Gauss (na *malha antiga*) dos elementos que possuem pelo menos um nó em comum com o elemento (na *nova malha*) cujas variáveis de estado se deseja-se calcular, como se mostra na Figura 4.2.2.

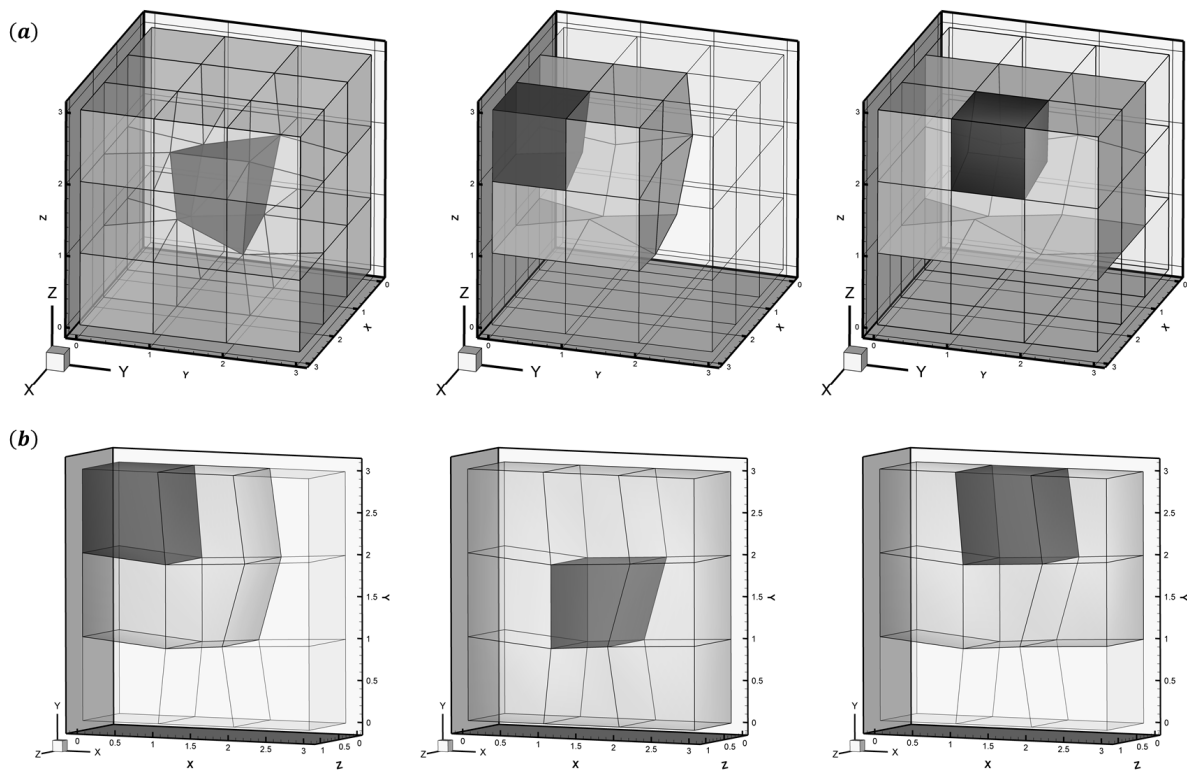


Figura 4.15 – Elementos influentes na interpolação: (a) Caso Tridimensional; (b) Caso estado plano de deformações (bidimensional).

4.2.3 Método da inversa da distância - IDA

A transferência das variáveis de estado segue a mesma interpolação descrita na Seção 4.1.2.1, para estabelecer o movimento arbitrário de nós internos. Continuando com a nomenclatura da seção anterior, reescrevendo a equação 2.59 para as variáveis de estado, obtém-se:

$$\Psi(s) = \frac{\sum_{i=1}^{nec} w_i \Psi_i}{\sum_{j=1}^{nec} w_j}, \quad (4.58)$$

onde $\Psi(s)$ é a variável de estado no novo ponto de Gauss s , nec é o número de elementos em contato com o elemento cujas variáveis estão sendo interpoladas e w_i é um coeficiente definida por:

$$w_i = (d_i)^{-c}, \quad (4.59)$$

sendo d_i a distância entre os pontos s e r , e c é um parâmetro que controla a influência ou o peso que se deseja dar à inversa da distância. Neste trabalho foi adotado o valor sugerido por Vavourakis et al. (2013a) de 3.5.

4.2.4 Verificação da admissibilidade das tensões e equilíbrio

Segundo Nazem et al. (2006), não se tem garantia de que a transferência de variáveis de estado seja objetiva, assim também, tanto o equilíbrio global como as condições de consistências locais podem estar sendo violadas. Os autores reconhecem que não é um problema simples e não se tem muita informação nas literaturas. Portanto, o equilíbrio global e as consistências locais devem ser conferidas novamente.

Se após a transferência das variáveis de estado não se verifica a condição de consistência nos novos pontos de integração, elas devem ser corrigidas. As correções das tensões são feitas de forma similar ao último passo da rotina para integração das tensões (ver Equação 3.93)

Para trazer o sistema de novo ao equilíbrio podem ser necessárias iterações adicionais com o processo de Newton-Raphson, Nazem et al. (2006) mencionam que conseguem bons resultados de tolerância para as forças desbalanceadas com 2 – 5 iterações, isto para elementos triangulares quadráticos com integração completa. Para o elemento empregado neste trabalho forma necessários maior número de iterações.

5 APLICAÇÕES

5.1 VERIFICAÇÃO DO MOVIMENTO DE NÓS NOS CONTORNOS

Nesta seção são apresentados exemplos do movimento de nós no contorno. A discretização das curvas e superfícies apresentadas é feita com poucos nós para interpretar melhor o movimento destes nós. Para todas as Figuras mantém-se o mesmo significado de cores; malha preta corresponde à configuração original (sem deformação), malha vermelha correspondem à configuração deformada (deformação fictícia) e malha azul corresponde à malha da configuração deformada após a realocação dos nós.

5.1.1 Movimento de nós sobre uma curva

Na Seção 4.1.1 foi descrito o movimento de malha sobre uma curva com CRMNC localizado num dos extremos da curva (apresentado por Vavourakis et al. (2013a)) e a generalização para os casos onde o CRMNC não se encontra sobre a mesma.

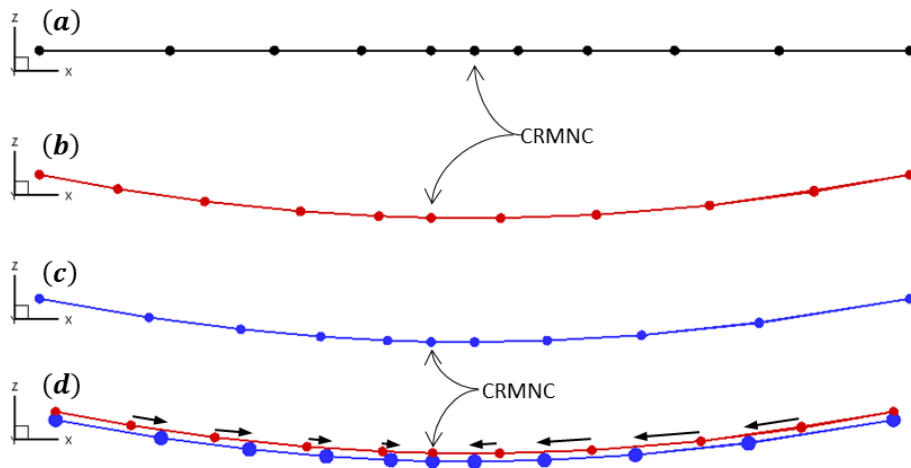


Figura 5.1 – Realocação de nós numa curva: (a) Configuração inicial ; (b) configuração deformada; (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) configuração deformada, vista dos movimentos de nós.

Na Figura 5.1 apresenta-se o movimento de nós sobre uma curva. Em linha preta a configuração inicial (linha reta) com uma distribuição não uniforme concentrando os nós no meio da curva, em linha vermelha uma deformação suposta (parábola) onde a distribuição de nós (também suposta) perdeu a distribuição relativa dos nós e em linha azul a configuração deformada com nos realocados. Nota-se que após a realocação, os nós tendem a tomar a distribuição relativa da malha original, sem realocação do nó considerado como CRMNC e sem perder a forma da curva.

Para a escolha do grau da função de base utilizada para a interpolação da superfície por *B-Spline*, supôs-se uma linha reta como configuração inicial e uma deformada suposta como se mostra na Figura 5.2. Observa-se a configuração inicial (malha preta), a configuração deformada (malha vermelha), a curva resultante da interpolação por *B-Spline* dos nós da curva para função de base de grau $p = 1, 2, 4$ (curva laranja) e a configuração deformada com os nós realocados (malha azul). Nota-se que é o *B-Spline* com grau de função base igual a 1 a opção que aproxima melhor a curva deformada, isto devido a que para funções de graus maiores as superfícies (ou curvas no caso do exemplo) resultantes devem verificar continuidade para suas derivadas até o grau $(p - 1)$ resultando uma curva mais suave, mas que perde a forma do contorno da malha deformada. Assim, o grau da função de base adotada para o trabalho é de $p = 1$ para a interpolação dos nós de contorno por superfícies *B-Spline*.

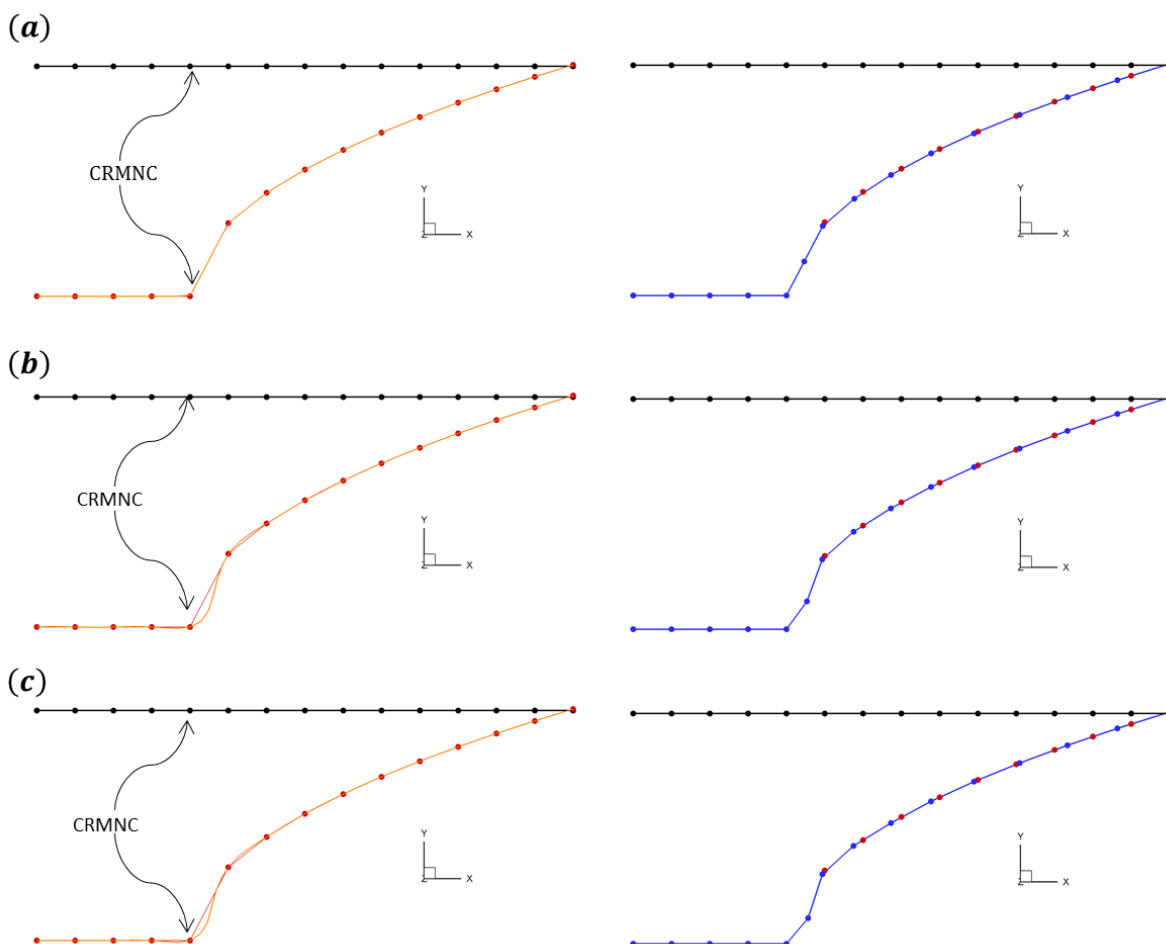


Figura 5.2 – Estudo do grau das funções de base p : (a) $p = 1$; (b) $p = 2$; (c) $p = 4$.

5.1.2 Movimento de nós sobre superfícies

Passando agora para o movimento de malha dos nós em superfícies, na Figura 5.3 apresenta-se uma placa como configuração não deformada (malha preta) com o CRMNC indicado num

canto da placa, uma superfície deformada suposta (malha vermelha) a modo de ilustrar o efeito de realocação dos nós sobre a superfície (malha azul), e vistas da superfície deformada com as malhas superpostas (com e sem realocação) a modo de notar que não se perde a forma da superfície com a realocação dos nós e a tendência de levar a malha a uma distribuição de nós similar (não idêntica) à distribuição inicial.

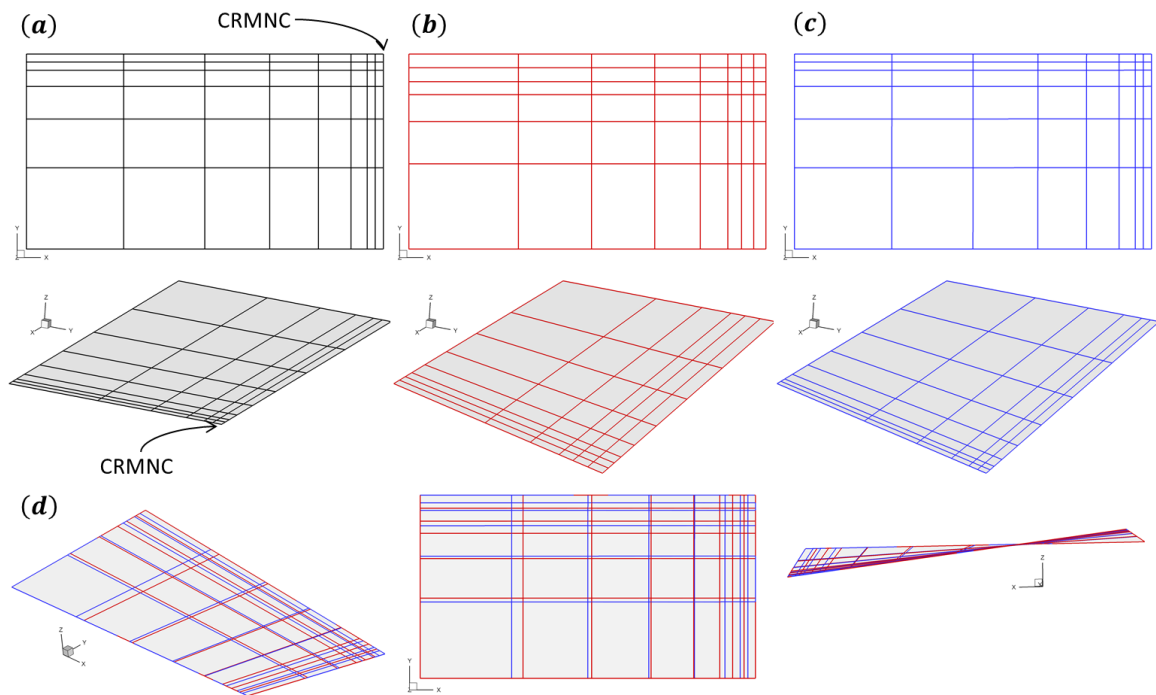


Figura 5.3 – Realocação de nós numa superfície: (a) configuração inicial da malha (placa); (b) configuração deformada (superfície suposta); (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) superposição das configurações deformadas, com e sem realocação de nós.

De forma similar apresenta-se na Figura 5.4 a seção de uma casca cilíndrica com CRMNC no centro da superfície, uma deformação suposta e a realocação dos nós sobre a superfície. Também aqui preserva-se a forma da superfície após a realocação dos nós e observa-se que o algoritmo tende a manter a distribuição de nós relativa similar à distribuição inicial da superfície.

Observa-se que também que o nó correspondente ao CRMNC não sofre realocação, não se perde o contorno da superfície deformada validando assim o algoritmo para utilizá-lo como realocação de nós de superfície sem que esta realocação modifique o volume total do sólido em estudo.

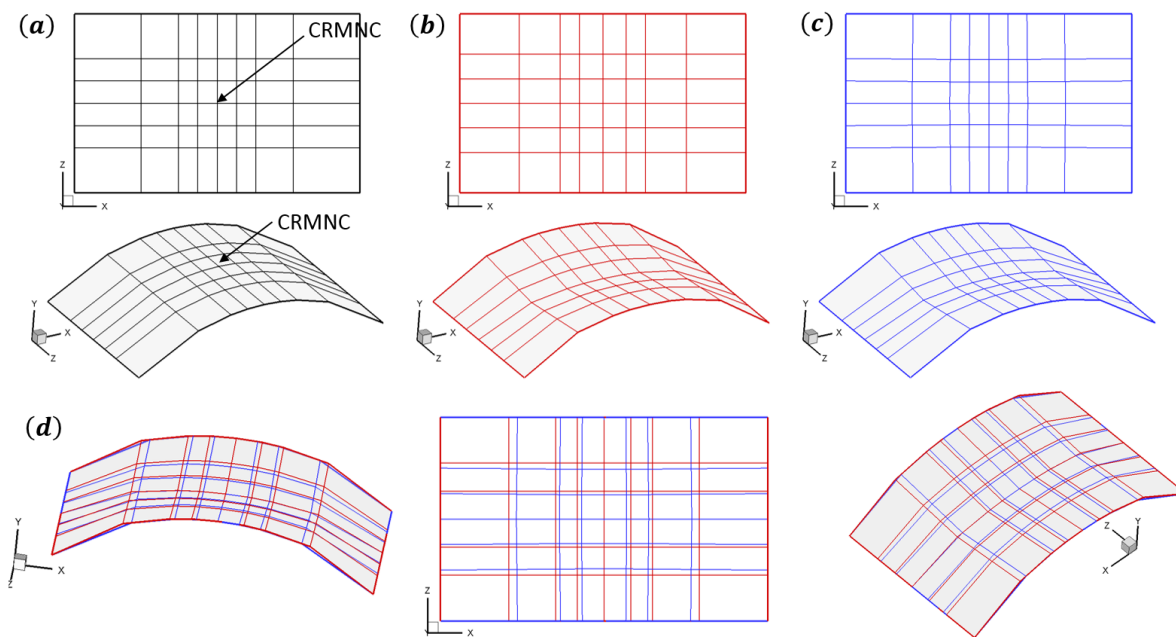


Figura 5.4 – Realocação de nós numa superfície: (a) configuração inicial; (b) configuração deformada; (c) configuração deformada com realocação dos nós; (d) superposição das configurações deformadas, com e sem realocação de nós.

5.2 VALIDAÇÃO DA INTERPOLAÇÃO

Na Seção 4.2 foram descritos três métodos para interpolação das variáveis de estado. O método da interpolação por funções de forma (IFF) é por definição a forma de interpolação de variáveis para qualquer ponto interno do elemento a partir dos valores nodais. Os métodos de interpolação por função radial (RBPIF) e inversa da distância (IDA) foram testados e implementados por Vavourakis et al. (2013a) para transferência de variáveis de estado em formulação ALE, apresentando bons resultados para elementos planos em materiais elasto-plásticos com regra de fluxo associada.

Para testar os métodos de interpolação e decidir qual deles utilizar, modelou-se um prisma retangular reto com duas malhas idênticas quanto ao número de elementos, número de nós, conectividades dos elementos e tipologia dos mesmos, sendo diferente apenas na distribuição, como pode-se observar na Figura 5.5.

O prisma tem dimensões $5m \times 5m \times 10m$ e está dividido em 54 elementos ($3 : 3 : 6$), engastado na face inferior e com carga $q = \{7.2, -14.4, 7.2\}^t N/m^2$ uniformemente distribuída na face superior. Adotou-se material de von Mises com módulo de elasticidade $E = 1000 N/m^2$, coeficiente de Poisson $\mu = 0.49$, tensão de escoamento equivalente $\sigma_y = 50 N/m^2$ e módulo de elasticidade tangencial $E_T = 50 N/m^2$. Na Figura 5.6 observam-se as configurações das duas malhas superpostas assim como a curva fator de carga x deslocamento para o ponto indicado P . A resposta obtida para ambas malhas, é praticamente idêntica.

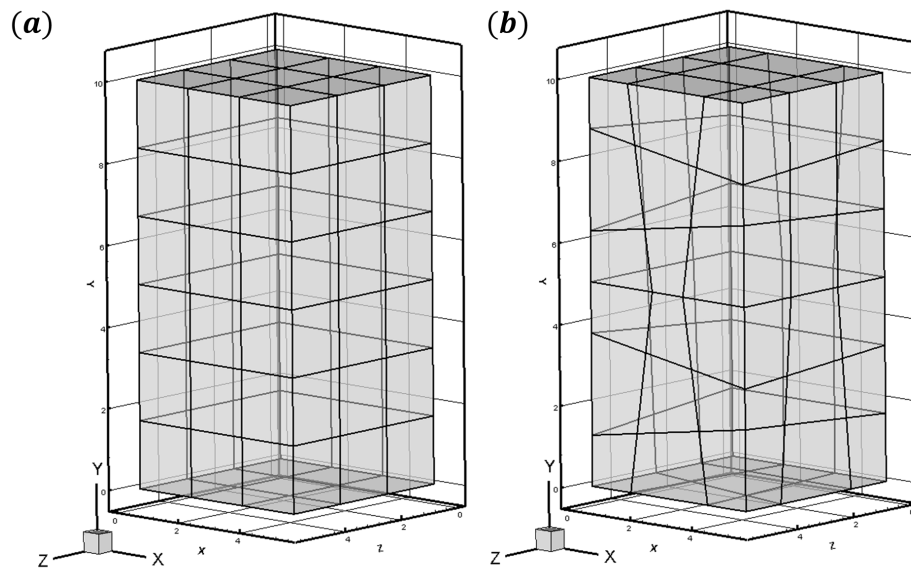


Figura 5.5 – Malhas do prisma: (a) malha 1; (b) malha 2.

Tem-se as variáveis de estado (tensões, tensão de escoamento e parâmetro de encruamento) calculadas nos pontos de Gauss da malhas 1 (Ψ_1) e 2 (Ψ_2). O teste consiste em interpolar as variáveis de estado desde uma das malhas para a outra malha e comparar os valores interpolados com os valores calculados. Assim, $\bar{\Psi}_1$ representam as variáveis de estado interpoladas nos pontos de Gauss da malha 1 partindo dos pontos de Gauss da malha 2 e $\bar{\Psi}_2$ representam as variáveis de estado interpoladas nos pontos de Gauss da malha 2 partindo dos pontos de Gauss da malha 1.

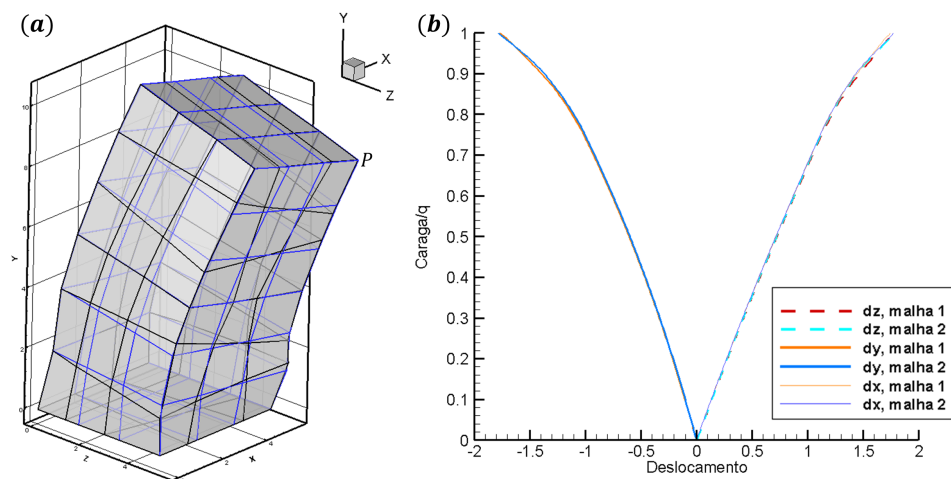


Figura 5.6 – Prisma deformado: (a) malhas deformadas superpostas. Malha 1: linhas azuis, malha 2: linhas pretas; (b) fator de carga x deslocamentos para o ponto 'P' indicado.

Adotando-se a malha 2 como malha de referência e a malha 1 como malha final após a realocação dos nós, para a configuração do corpo mostrado na figura 5.6, um método ideal de interpolação

forneceria valores $\bar{\Psi}_1$ que verifiquem $\bar{\Psi}_1 = \Psi_1$ porque é sabido que Ψ_1 são os valores que equilibram o corpo para a configuração com a malha 1. Considera-se então como método mais apropriado aquele que, por interpolação, tenha a menor diferença relativa com o valor calculado, definido como:

$$\Delta\Psi_1 = \frac{|\Psi_1 - \bar{\Psi}_1|}{\Psi_1}, \quad \Delta\Psi_2 = \frac{|\Psi_2 - \bar{\Psi}_2|}{\Psi_2}, \quad (5.1)$$

Apresenta-se na Tabela 4 as máximas e mínimas diferenças relativas obtidas $\Delta\Psi$, fazendo a interpolação tanto desde a malha 1 para a malha 2 como desde a malha 2 para a malha 1. Como o método IDA tem um expoente a ser definido previamente, foram testados 4 valores distintos do expoente de modo a verificar a influência nos resultados (número em parêntesis na Tabela 4, Vavourakis et al. (2013a) obtem bons resultados de interpolação com expoente 3.5.

Tabela 4 – Diferenças relativas das variáveis de estado interpoladas em relação a variáveis de estado calculadas.

	RBPIF	IDA ⁽²⁾	IDA ^(2.5)	IDA ^(3.5)	IDA ⁽⁴⁾
min $\Delta\Psi$	1.0 ⁻⁵	1.0 ⁻³	1.0 ⁻³	1.0 ⁻³	1.0 ⁻³
máx $\Delta\Psi$	5	15	30	40	60

Na Tabela 4 nota-se que o método de interpolação que deu valores com menos erros foi o RBPIF, para expoente maiores o erro com o método IDA aumenta e o método IFF deu valores muito variáveis e nada prometedores para a interpolação das variáveis de estado, então, na seção 5.2.1 fez-se um estudo particular para o caso da interpolação por IFF.

Vavourakis et al. (2013b) obtiveram melhores resultados com o método IDA em comparação ao método RBPIF para interpolação das variáveis de estado. No presente trabalho adotou-se RBPIF uma vez que o elemento hexaédrico com um ponto de integração apresentou melhor comportamento neste caso.

5.2.1 Estudo especial para o método de interpolação IFF

Para verificar o método IFF estudou-se um cubo de lados $3m \times 3m \times 3m$ com 3 elementos não uniformes por lado (3 : 3 : 3), conforme ilustrado na Figura 5.7.

Com uma função contínua $f(x, y, z)$ foram calculados valores nos 27 pontos de Gauss. Por extrapolação (Equação 2.59) foram obtidos os valores da função nos nós do elemento central do cubo (Figura 5.7) e por interpolação, com as funções de forma do elemento, calculou-se o valor interpolado para o ponto de Gauss original. Para funções lineares obteve-se erro na ordem de

10%, aumentando o erro para funções de ordens maiores.

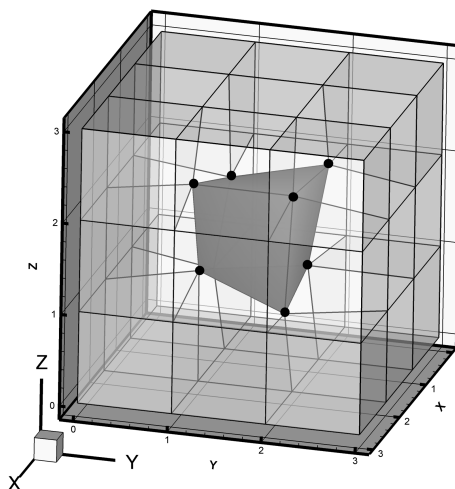


Figura 5.7 – Cubo 3 : 3 : 3 para teste IFF.

5.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os exemplos de aplicação foram realizados utilizando o elemento hexaédrico com um ponto de integração com controle de modos espúrios visto no Capítulo 2, as abordagens não lineares vistas no Capítulo 3 e a formulação ALE desenvolvida no Capítulo 4.

A formulação Lagrangeana à qual faz-se referência nos exemplos é a formulação Lagrangeana atualizada (UL) corrotacional, vista na seção 3.1.

5.3.1 Placa quadrada com carga concentrada

Para validação do conjunto de algoritmos que fazem parte da formulação ALE do presente trabalho, modelou-se uma placa quadrada de dimensões $L = 40m$ e espessura $e = 0.40m$ utilizada por Duarte-Filho (2002) e Schmidt (2006) para validação da formulação do elemento empregado. O material considerado segue o modelo de von Mises com endurecimento isotrópico linear. Os lados da placa são simplesmente apoiados e, devido à simetria, apenas um quarto da placa é modelada. A malha, formada por 600 elementos dispostos em forma 20 : 20 : 6 (6 elementos na espessura) uniformemente distribuídos, assim como os dados físicos e geométricos utilizados podem ser observados na Figura 5.8.

A solução deste exemplo com formulação Lagrangeana, embora apresente grandes deslocamentos, não apresenta distorções de malha fazendo desnecessário o uso da formulação ALE. A implementação do modelo ALE, neste exemplo, teve três alvos específicos: (a) Verificar o algoritmo de movimento de malha de superfície para deformações reais, (b) verificar o movimento de malha dos nós internos, e (c) comparar a resposta da aplicação da formulação ALE em um problema cuja solução é conhecida e válida para o elemento empregado.

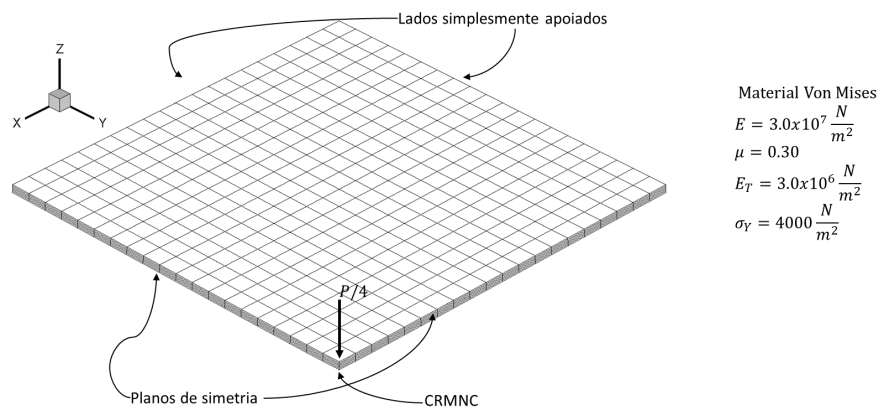


Figura 5.8 – Placa quadrada sujeita a carga concentrada, modelo de 1/4 da placa.

Os resultados obtidos, apresentados na Figura 5.9 estão expressos em forma de carga aplicada por deslocamento vertical do centro da placa. Percebe-se uma boa concordância entre as formulações Lagrangeana e ALE.

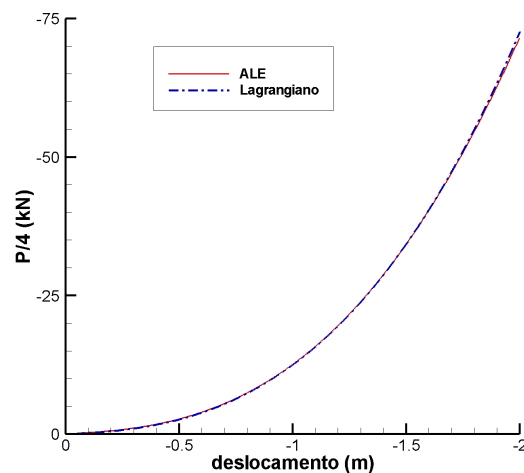


Figura 5.9 – Resultados: Carga concentrada x deslocamento vertical no centro da placa.

Na Figura 5.10a-b observam-se varias vistas da configuração deformada para o deslocamento do centro da placa $\delta \approx -2.5m$ com superposição das malhas para as soluções com formulação Lagrangeana (malha preta) e com formulação ALE (malha azul). Na Figura 5.10c apresentam-se as vistas superior das malhas com formulação Lagrangeana e ALE onde nota-se o efeito do movimento dos nós sobre as superfícies e na Figura 5.10d uma vista mais próxima ao CRMNC onde se mostram a superposição das malhas e, eliminando alguns elementos das camadas superiores, pode-se ver e comparar a configuração final dos nós internos entre as formulações Lagrangeana e ALE.

O exemplo da placa apresentado possui grandes deformações com alta não linearidade geométrica, mas sem grandes deformações plásticas que de certa forma são as responsáveis pelas distorções de malha (segundo (NAZEM et al., 2008), problemas com materiais elásticos isotrópicos não apresentam grandes distorções de malhas).

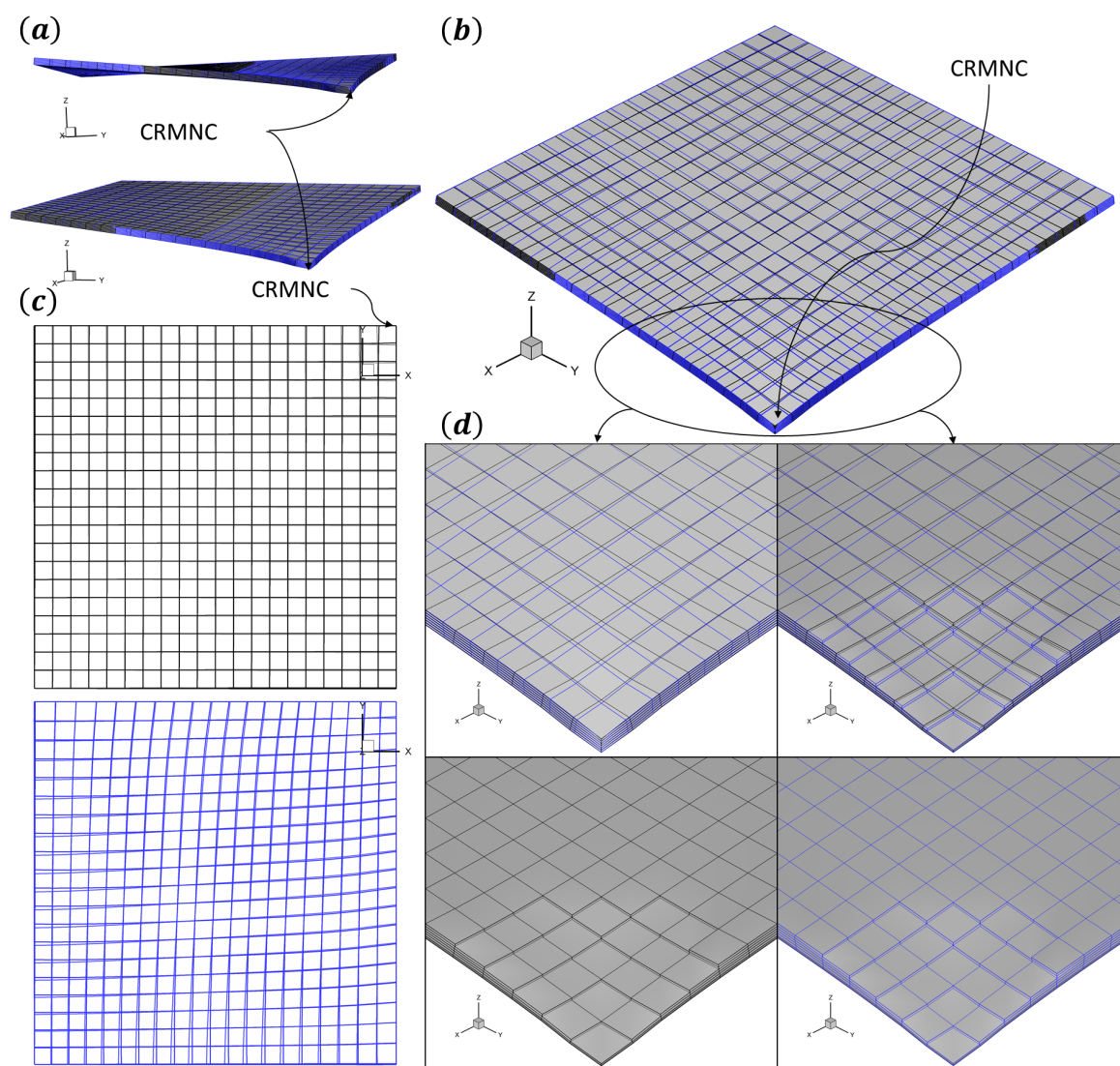


Figura 5.10 – Vistas das malhas para uma configuração deformada, com formulação Lagrangeana (malhas pretas) e formulação ALE (malhas azuis).

5.3.2 Fundação rígida sobre solo não drenado

O exemplo consiste em uma fundação superficial rígida de largura B e comprimento infinito sobre solo saturado não drenado, considerado-se o solo como um material elasto-plástico perfeito (EPP) representado pelo modelo de **Tresca** com regra de fluxo associada. São vários os trabalhos com formulação ALE para o estudo deste tipo de problema, na Figura 5.11 apresentam-se os modelos estudados por alguns autores, todos estes com formulação ALE e elementos planos.

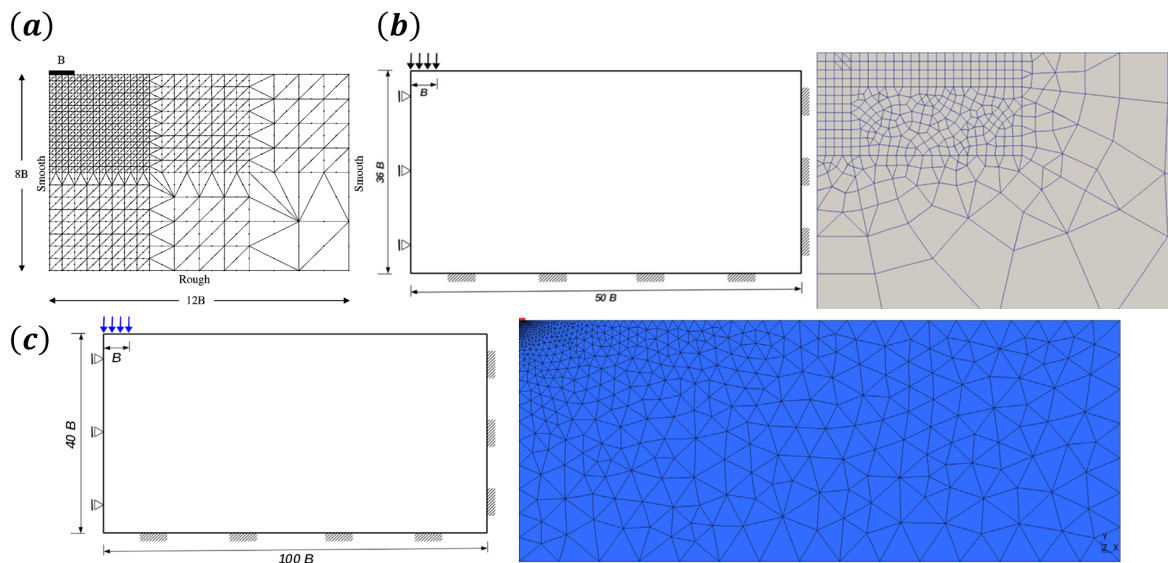


Figura 5.11 – Modelos de fundação rígida em solo não drenado: (a) Modelo de Nazem et al. (2006) e Nazem et al. (2009), elementos triangulares de 6 nós; (b) Modelo de Vavourakis et al. (2013a), elementos triangulares de 6 e elementos quadriláteros de 8 nós; (c) Modelo de Vavourakis et al. (2013b), elementos triangulares de 6 nós.

O problema é modelado em estado plano de deformações (EPD) e apenas o lado direito da fundação é representado pelas condições de simetria. Para representar o EPD com o elemento hexaédrico, é considerado um elemento na profundidade do modelo restringindo os deslocamentos nodais fora do plano. Na Figura 5.12 apresenta-se a geometria utilizada (idêntica aos modelos de Nazem et al. (2006) e Nazem et al. (2009)), o solo modelado por 30 : 25 : 1 elementos no comprimento, altura e profundidade respectivamente. A largura total da fundação $B = 1m$ com profundidade de todo o modelo igual a $0.1m$.

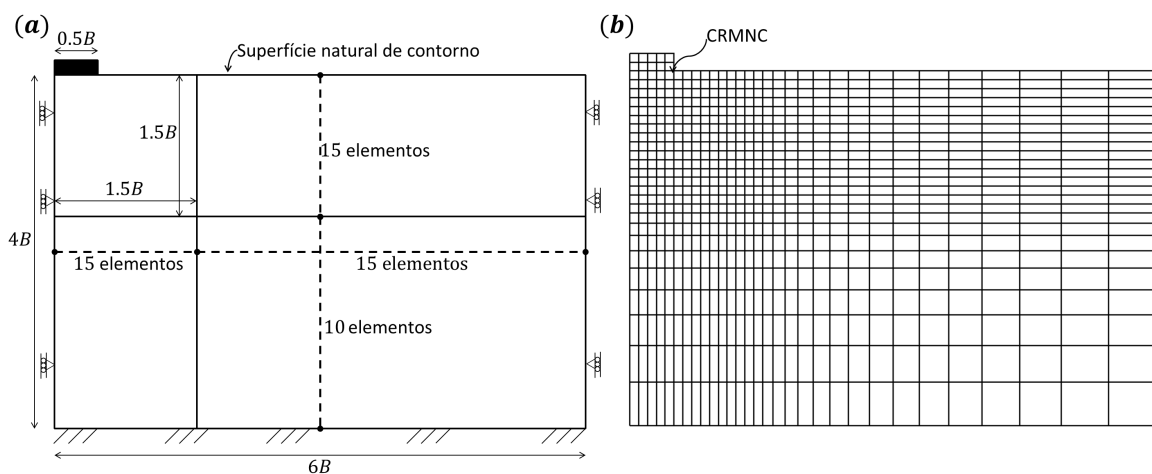


Figura 5.12 – Esquema da malha: (a) Geometria, distribuição e condições de contorno da malha, $B = 1m$; (b) Malha utilizada.

Para reproduzir uma fundação empregam-se 5 : 2 : 1 elementos no comprimento, altura e profundidade respectivamente. Valores de módulo de elasticidade e de tensão de escoamento elevados nos elementos correspondentes em comparação com os valores para o solo proporcionam à fundação a rigidez. Na tabela 5 indicam-se os dados iniciais considerados para os modelos, tanto para o solo como para a fundação.

A solução analítica para o mecanismo do presente problema, considerando-se uma abordagem em pequenas deformações, foi obtida por Prandtl (1921, apud Vavourakis et al., 2013b), sendo dada por $(\pi + 2)cB \approx 5.14cB$, em que c é a coesão do solo e B é a largura da fundação. Para grandes deformações, devido à penetração progressiva da fundação no solo, o material é deslocado ampliando progressivamente o mecanismo de falha e, com isto, a capacidade de carga. Este novo mecanismo é similar (mas não idêntico) ao mecanismo para fundações profundas desenvolvido por Meyerhof (1951, apud Vavourakis et al., 2013b), cujo valor teórico de falha é $(2\pi + 2)cB \approx 8.28cB$.

Tabela 5 – Fundação rígida em solo não drenado - Dados iniciais.

Tipo de material	Módulo de elasticidade $E (N/m^2)$	Módulo de Poisson μ	Módulo de elasticidade tangencial $E_T(N/m^2)$	Tensão de escoamento equivalente $\sigma_y (N/m^2)$	Coesão $c (N/m^2)$
Tresca (Solo)	100.000	0.49	0.0 (EPP)	2.000 ($2\tau_{max} = 2c$)	1.000 ($E/c = 100$)
von Mises (Fundação)	1.00E+9 (Rígida)	0.49	1.00E+8 (Rígida)	1.00E+8 (Rígida)	

O processo de solução é feito por incrementos de carga, onde o incremento inicial é de $\Delta\lambda c = 0.001c$. Foi implementado um controle simples de incrementos para evitar incrementos de carga excessivos que possam produzir perda de convergência no processo de Newton-Raphson modificado, que consiste em: 'Se em um passo de carga supera-se as 150 iterações, a partir do seguinte passo de carga, o incremento de carga passa a ser a metade do incremento anterior'. O controle é feito até o máximo de 4 vezes. Após isto, o incremento de carga permanece invariável independentemente do número de iterações necessárias.

Na formulação ALE, o passo Euleriano foi executado a cada 25 passos de carga. Em cada passo Euleriano foram efetuadas as seguintes operações:

- Processo Geométrico:
 - Realocação dos nós da superfície natural de contorno (ver Figura 5.12a) por *B-Splines* (Seção 4.1.1),

- A realocação dos nós internos é feita por uma combinação de dois esquemas apresentados:
 - * Realocação MPIV1 (Seção 4.1.2.2), por ser um sistema de realocação localizada, foi percorrida 3 vezes a totalidade dos nós internos,
 - * Suavização por ORT (Seção 4.1.2.3), por ser também um sistema localizado, foi percorrida 2 vezes a totalidade dos nós.
- Processo Físico:
 - Interpolação das variáveis de estado por RBPIF (Seção 4.2.2),
 - Verificação da admissibilidade das tensões e iterações para retorno ao equilíbrio sem incremento de carga (Seção 4.2.4).

Para comparar o efeito da formulação ALE com a formulação Lagrangeana, quanto a integridade da malha, fez-se uma análise Lagrangeana com o elemento empregado. O processo iterativo incremental foi feito pelo método geral de controle de deslocamentos (MGCD) proposto por Yang e Shich (1990, apud Duarte-Filho, 2002), uma vez que com o método de Newton-Raphson Modificado se tinha perda da convergência. Na Figura 5.13 apresenta-se uma comparação das malhas entre a formulação Lagrangeana e ALE para alguns níveis de deslocamento.

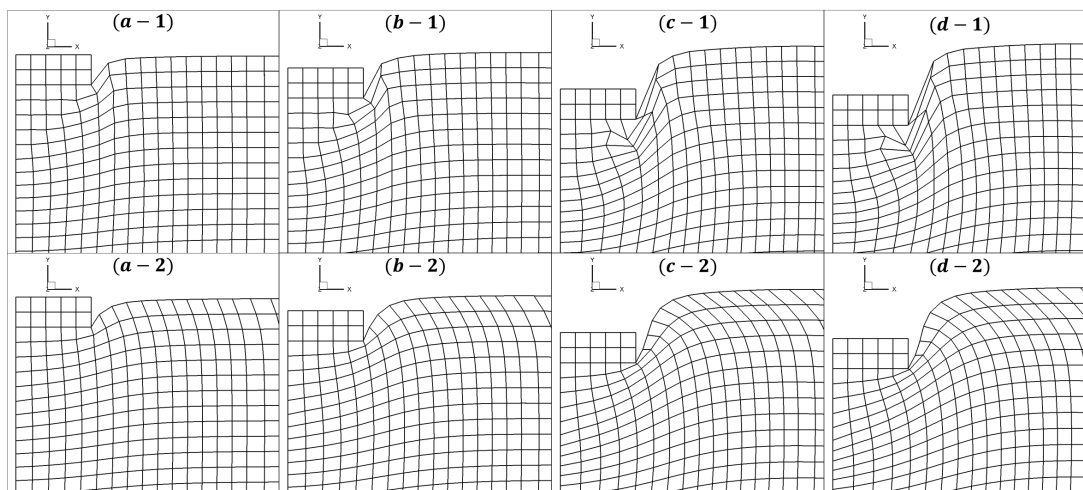


Figura 5.13 – Comparação entre formulação Lagrangeana (1) e formulação ALE (2) para níveis de deslocamento (δ) quanto a integridade da malha: (a) $\delta/B = 0.17$; (b) $\delta/B = 0.26$; (c) $\delta/B = 0.41$; (d) $\delta/B = 0.45$.

Nota-se claramente o efeito de acomodamento da malha à deformação do solo. As distorções da malha na formulação Lagrangeana são corrigidas com o movimento de malha, melhorando a discretização da superfície do solo e a distribuição dos nós internos. Para o nível de deslocamento $\delta/B = 0.45$, o espaço correspondente a 1 elemento na formulação Lagrangeana é coberto por quase 4 elementos.

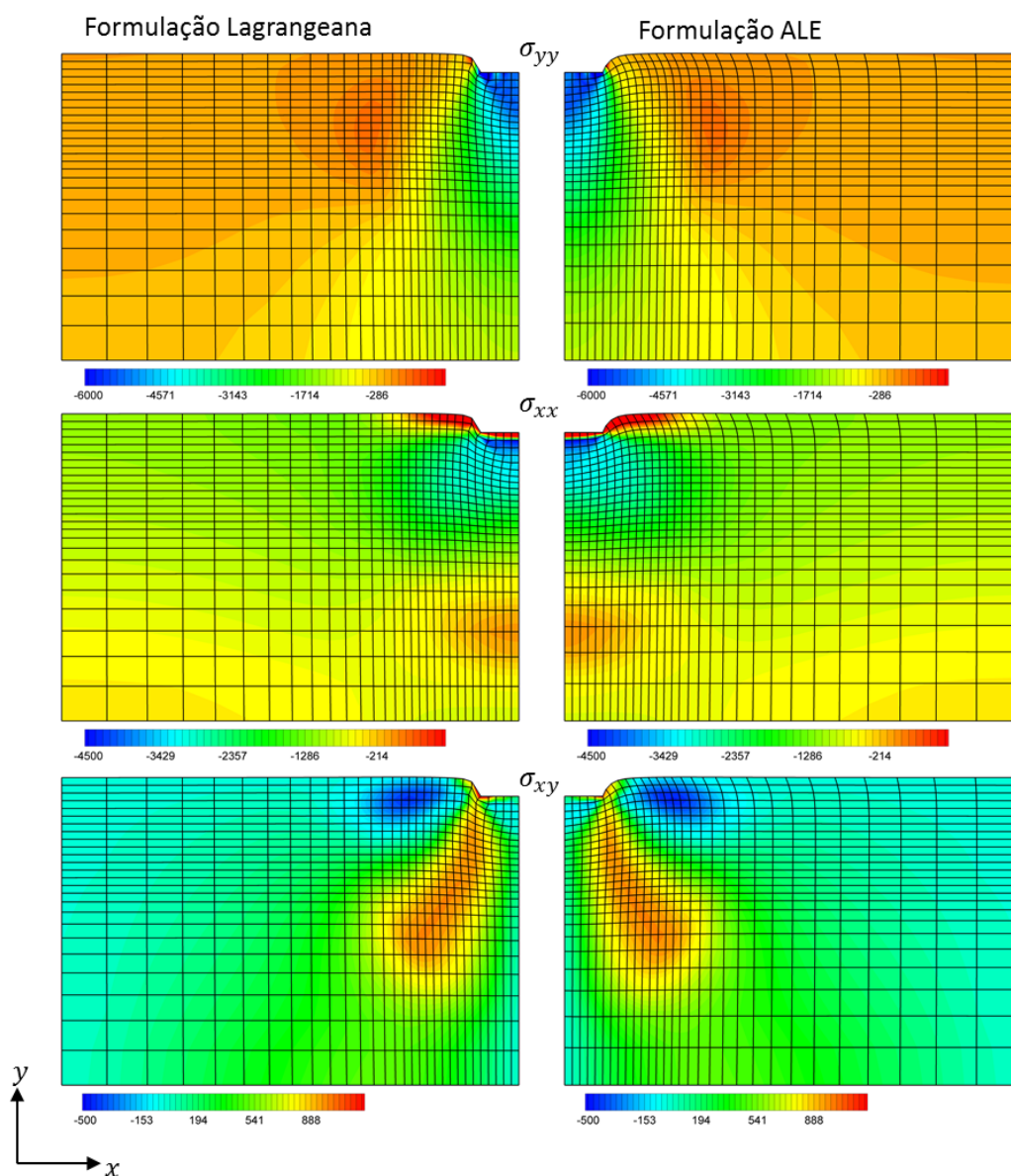


Figura 5.14 – Comparação da distribuição de tensões entre a formulação Lagrangeana e formulação ALE para o deslocamento vertical $\delta/B = 0.26$

Nas Figuras 5.14 e 5.15 são apresentadas comparações entre as distribuições de tensões para o exemplo estudado, com formulação Lagrangeana e com formulação ALE, quando para os deslocamentos verticais da fundação iguais a $\delta/B = 0.26$ e $\delta/B = 0.45$ respectivamente.

Na Figura 5.16 observa-se o resultado obtido no presente trabalho em relação ao deslocamento vertical do centro da fundação em função da carga aplicada normalizada assim como os resultados obtidos por outros autores, tanto para formulações ALE como para formulações Lagrangeanas.

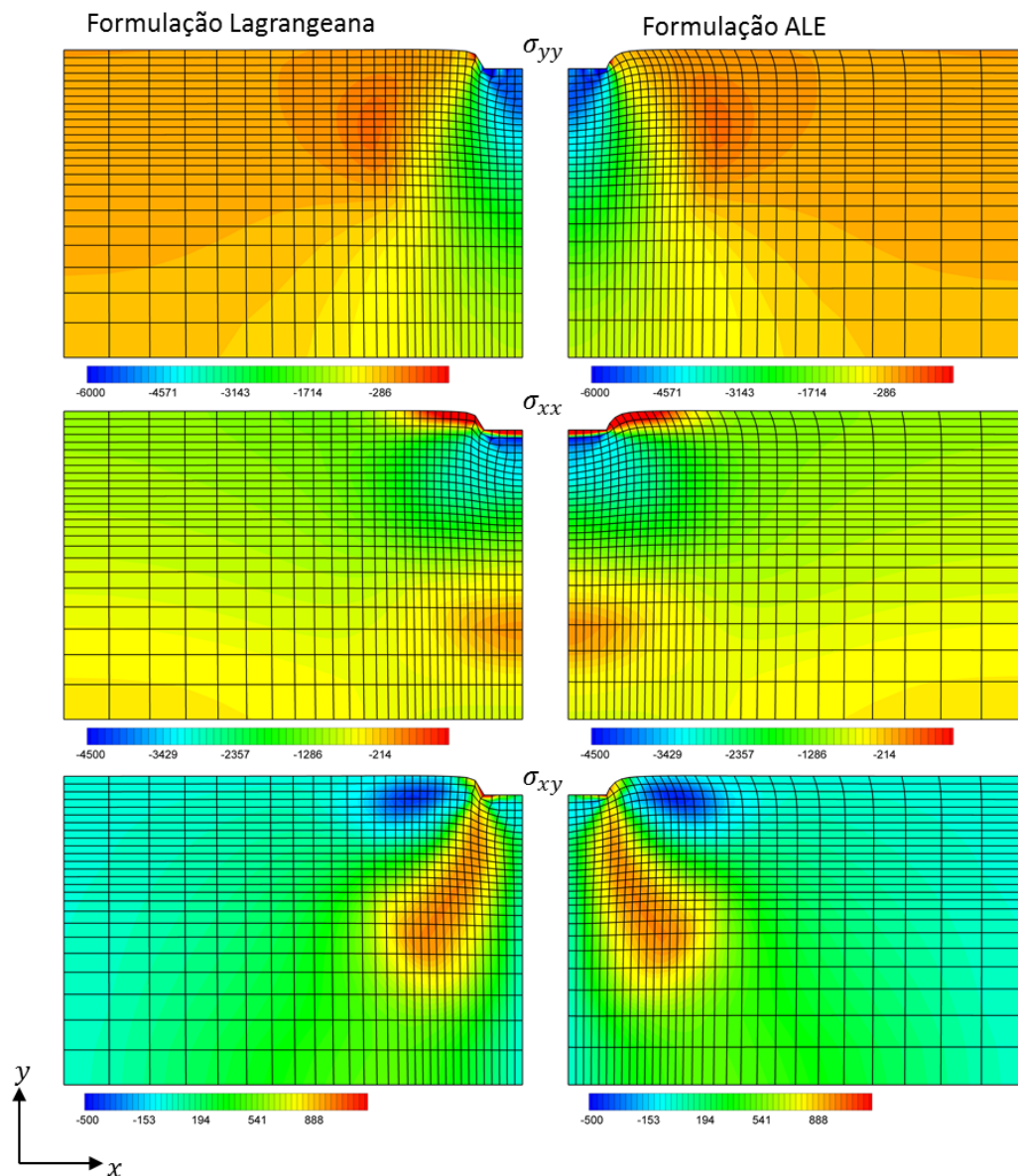


Figura 5.15 – Comparação da distribuição de tensões entre a formulação Lagrangeana e formulação ALE para o deslocamento vertical $\delta/B = 0.45$

A curva obtida acompanha bem aquelas obtidas por outros autores até um nível de deslocamento $\delta \approx 0.45$ correspondente a uma carga de $7.7cB$. Observa-se na Figura 5.13d-2 que a malha tem uma boa distribuição, embora os elementos com nó no vértice da fundação tendem a adotar uma forma triangular. Foram testados os métodos de movimento de malha para os nós internos apresentados na Seção 4.1.2, e combinações deles, sem conseguir evitar que os elementos percam a forma quadrilátera das faces. Cabe observar que todas as malhas da figura 5.11 possuem triângulos no vértice da fundação, que por sua versatilidade, conseguem ultrapassar os limites que o quadrilátero (ou hexaedro) apresenta.

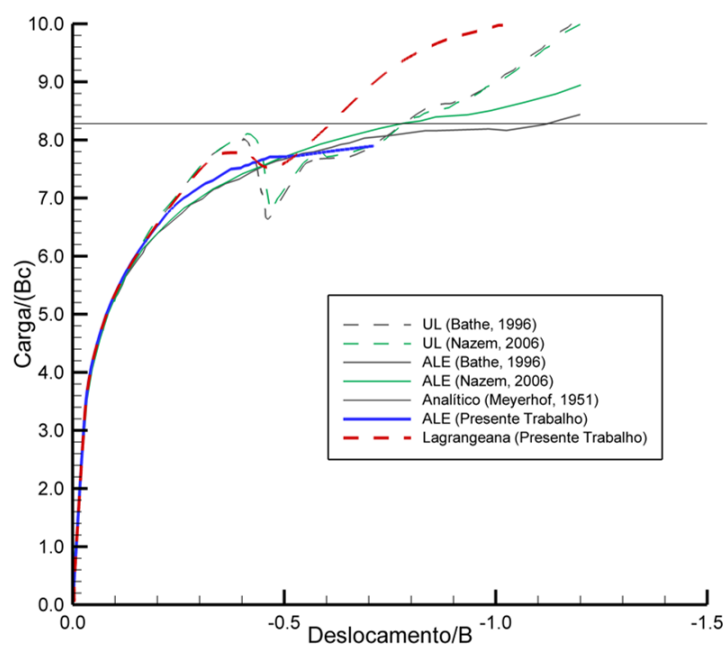


Figura 5.16 – Curvas normalizadas de carga-deslocamento para penetração de fundação rígida em solo com modelo Tresca (Fonte Nazem et al. (2006) para dados de outros autores).

Para concluir, apresentam-se as malhas dos últimos passos do processo incremental na Figura 5.17, onde se observa a degeneração dos elementos no vértice da fundação, perdendo-se o sentido físico da solução a partir do valor de carga $7.75cB$, sendo o valor analítico da falha $\approx 8.28cB$.

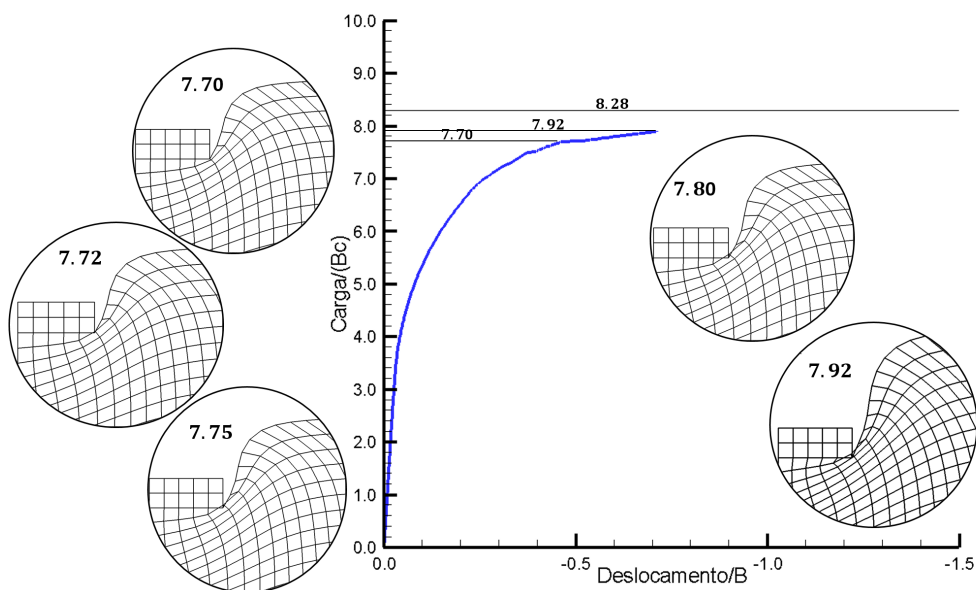


Figura 5.17 – Últimos passos do processo incremental.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi formulada uma descrição Arbitrária Lagrangeana Euleriana (ALE) desacoplada focada no elemento hexaédrico de 8 nós. O elemento implementado foi um hexaedro trilinear com integração reduzida a um ponto de integração, controle dos modos espúrios e foram consideradas as não linearidades física e geométrica.

A não linearidade geométrica foi abordada utilizando-se o sistema corrotacional de forma a trabalhar em um sistema onde as deformações de Cauchy são objetivas em grandes deformações. Empregou-se a taxa de tensão de Truesdell para manter a objetividade também nas taxas de tensões.

Para trabalhar com a não linearidade física, devida ao fenômeno da plasticidade, foi implementado o esquema de integração de tensões de Owen e Hinton (1980). As superfícies de plastificação utilizadas correspondem aos critérios de Tresca e von Mises.

A formulação ALE desacoplada na mecânica dos sólidos é uma opção eficiente para evitar grandes distorções de malha, porém, a malha tem que cumprir certas características de forma tal a poder acompanhar as deformações características do problema em estudo.

Ampliou-se a realocação de nós sobre uma linha para nós sobre uma superfície utilizando superfícies *B-Splines* com resultados favoráveis e positivos para aplicações com elementos tridimensionais de forma tal a manter a distribuição dos nós similar à distribuição inicial. Foram testados vários métodos de realocação de nós internos e adotada a média ponderada da inversa do volume com influência da deformação do elemento (MPIV1) com posterior suavização por ortogonalização local dos nós (ORT). Seria interessante ampliar o esquema de ortogonalização local (nó a nó) para um esquema global de ortogonalização.

Foram testados os métodos de interpolação das variáveis de estado, interpolação por funções de forma (IFF), interpolação por função radial (RBPIF) e interpolação por inversa da distância (IDA), usadas com êxito na literatura para interpolação de variáveis de estado em formulações ALE desacopladas. Para as características do hexaedro com um ponto de integração apenas o método RBPIF forneceu resultados satisfatórios e confiáveis. A extrapolação direta das variáveis de estado por mínimos quadrados desde os pontos de Gauss aos nós e posterior suavização é insuficiente para obter as variáveis nos nós do elemento hexaédrico quando se trabalha com um ponto de integração.

A interpolação das variáveis de estado para a nova malha não garante a satisfação do equilíbrio global nem a condição de consistência local, sendo necessárias iterações adicionais do processo de Newton-Raphson para atingir novamente o equilíbrio.

A formulação do movimento de malha e transferência de variáveis de estado desenvolvido neste trabalho apresentaram resultados satisfatórios, considerando o uso exclusivo de elementos

hexaédricos. A malha se adapta bem à deformada sem precisar de algoritmos de remalhado, mantendo as condições de contornos e as conectividades dos elementos inalteradas.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Paralelização do código.
- Adaptação do código para que possa ser implementado também os processos de incremento de deslocamentos e o método de controle de deslocamentos.
- Formulação da otimização da ortogonalidade global para implementar como movimento dos nós internos.
- Aprimorar o estudo das interpolações de variáveis de estado em forma quantitativa assim como a extrapolação das variáveis desde o ponto de Gauss aos nós.
- Implementar os elementos, prisma retos triangular e tetraedro para complementar o elemento hexaedro.
- Implementação de análise dinâmica.
- Implementar mecanismos de contato.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, L. G. de. *Análise estática e dinâmica de placas e cascas de materiais compósitos laminados usando elementos finitos hexaédricos de oito nós com integração reduzida*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, 2005. Citado na página 32.
- AYMONE, J. L. F. *Remanejamento de malhas em problemas tridimensionais de grandes deformações*. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2000. Citado na página 30.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 17, 29, 46, 47, 54 e 56.
- BELYTSCHKO, T.; BINDERMAN, L. Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 88(3), p. 311–340, 1991. Citado na página 32.
- BELYTSCHKO, T.; BINDERMAN, L. Assume strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 105, p. 225–260, 1993. Citado na página 44.
- BELYTSCHKO, T.; KENNEDY, J. Computer model for subassembly simulation. *Nuclear Engineering and Design*, v. 49, p. 17–38, 1978. Citado na página 29.
- BELYTSCHKO, T.; KENNEDY, J.; SCHOEBERLE, D. Quasi-eulerian finite element formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 102, p. 62–69, 1980. Citado na página 29.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 2000. Citado na página 31.
- BENSON, D. J. An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Mechanics and Engineering*, v. 72, p. 305–350, 1989. Citado na página 70.
- BITTENCOURT, E.; CREUS, G. Uso de uma formulação lagrangeana-euleriana na solução de problemas de conformação mecânica tridimensional. In: *Congresso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones*. Bariloche: [s.n.], 1995. p. 315–324. Citado na página 30.
- BRAUN, A.; AWRUCH, A. An efficient model for numerical simulation of the mechanical behavior of soils. part 1: Theory and numerical algorithm. *Soils and Rocks*, p. 159–169, 2013. Citado na página 32.
- BRAUN, A.; AWRUCH, A. An efficient model for numerical simulation of the mechanical behavior of soils. part 2: Applications. *Soils and Rocks*, p. 171–182, 2013. Citado na página 32.
- BRAUN, A. L. *Um modelo para simulação numérica da ação do vento sobre seções de ponte*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, 2002. Citado na página 85.
- BRAUN, A. L. *Simulação numérica na engenharia do vento incluindo efeitos de interação fluido-estrutura*. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 85.
- CARCAILLET, R.; SULIKRAVICH, G.; KENNON, S. Generation of solution-adaptive computational grids using optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, p. 279–295, 1986. Citado na página 87.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. *Isogeometric analysis toward integration of CAD and FEA*. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd., 2009. Citado 3 vezes nas páginas 14, 79 e 81.

DONEA, J.; FASOLI-STELLA, D.; GIULIANI, S. Lagrangian and eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. In: *Transactions of the 4th International Conference Structural Mechanics in Reactor Technology*. [S.l.: s.n.], 1977. B, n. 1/2, p. 1–12. Citado na página 29.

DONEA, J.; HUERTA, A.; PONTHOT, J.-P.; RODREZ-FERRAN, A. Arbitrary lagrangian-eulerian methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, p. 1:14, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.

DUARTE-FILHO, L. A. *Análise estática e dinâmica, linear e não-linear geométrica, através de elementos hexaédricos de oito nós com um ponto de integração*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 32, 40, 101 e 106.

FLANAGAN, D.; BELYTSCHKO, T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, p. 679–706, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.

HABER, F. B. A mixed eulerian-lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 43, p. 277–292, 1984. Citado na página 29.

HABER, R. B.; KOH, H. M. Explicit expressions for energy release rates using virtual crack extensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p. 301–315, 1985. Citado na página 29.

HIRT, C. An arbitrary lagrangian-eulerian computing technique. In: *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. [S.l.: s.n.], 1970. Citado na página 29.

HIRT, C.; AMSDEN, A.; COOK, J. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, v. 14, p. 227–253, 1974. Citado na página 29.

HU, Y.-K.; NAGY, L. A one-pint quadrature eight-node brick element with hourglass control. *Computers & Structures*, v. 65, p. 893–902, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 32, 41, 42 e 43.

HUGHES, T.; WINGET, J. Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, p. 1862–1867, 1980. Citado na página 52.

HUGHES, T. J. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, p. 1413–1418, 1980. Citado na página 39.

HUGHES, T. J. *Theoretical foundation for large-scale computations for nonlinear material behavior. Chapter II: Numerical Implementation of constitutive model: Rate-independent deviatoric plasticity*. [S.l.]: Martinus Nijhoff Publishers, 1984. Citado na página 49.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMANN, T. K. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 29, p. 329–349, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 70.

- HUGHES, T. J.; PISTER, K. S.; TAYLOR, R. L. Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 17/18, p. 159–182, 1979. Citado na página 29.
- LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; CHANG, H. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for path-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 58, p. 227–245, 1986. Citado na página 30.
- LIU, W. K.; GUO, Y.; TANG, S.; BELYTSCHKO, T. A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 154, p. 69–132, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 13, 37, 46, 49, 50 e 57.
- LIU, W. K.; HU, Y.-K.; BELYTSCHKO, T. Multiple quadrature underintegrated finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 3263–3289, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 37 e 42.
- MALVERN, L. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. [S.l.]: Englewood Cliffs, 1969. Citado na página 35.
- MEYERHOF. The ultimate bearing capacity of foundations. *Géotechnique*, v. 2, p. 301–332, 1951. Citado na página 105.
- NAYAK, G. C. *Plasticity and large deformation problems by finite element method*. Tese (Doutorado) — University of Wales, Swansea, 1971. Citado na página 64.
- NAZEM, M.; CARTER, J.; SHENG, D.; SLOAN, S. W. Alternative stress-integration scheme for large-deformation problems of solid mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 934–943, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 104.
- NAZEM, M.; SHENG, D. Alternative solution methods for large deformation in geomechanics. In: *Proceedings of the 9th Symposium on Numerical Models in Geomechanics-NUMOG IX*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 265–271. Citado na página 30.
- NAZEM, M.; SHENG, D.; CARTER, J. P. Stress integration and mesh refinement for large deformation in geomechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 65, p. 1002–1027, 2006. Citado 11 vezes nas páginas 13, 15, 29, 30, 70, 71, 72, 75, 94, 104 e 109.
- NAZEM, M.; SHENG, D.; CARTER, J. P.; SLOAN, S. W. Arbitrary lagrangian-eulerian method for large-strain consolidation problems. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 32, p. 1023–1050, 2008. Citado na página 103.
- NETO, E. de S.; PERIĆ, D.; OWEN, D. *Computational methods for plasticity. Theory and applications*. [S.l.]: Wiley, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.
- NOH, W.; ADLER, B.; FRENBACH, S.; ROTENBERG, M. Cel: A time-dependent two-space dimensional coupled eulerian-lagrangian code. *Methods in Computational Physics*, v. 3, 1964. Citado na página 29.
- OÑATE, E. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - Análisis estático lineal*. [S.l.]: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 44.

OWEN, D.; HINTON, E. *Finite element in plasticity: Theory and practice*. [S.l.]: Pineridge Press Limited, 1980. Citado 13 vezes nas páginas 13, 17, 31, 57, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69 e 110.

PIEGL, L. A.; TILLER, W. *The NURBS book (Monographs in visual communication)*. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 7 vezes nas páginas 14, 78, 79, 82, 83, 84 e 122.

PRANDTL, L. Hauptaufsatze: Uber die eindringungsfestigkeit (harte) plastischer baustoffe und die festgkeit von schneiden. *Zeitschrift fr Angewandte Mathematik un Mechanik 1*, p. 15–20, 1921. Citado na página 105.

REESE, S. On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 4685–4715, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 43.

SCHMIDT, D. *Análise elastoplástica com não-linearidade geométrica de estruturas através de elementos hexaédricos tri-lineares com um ponto de integração*. Dissertação (Mestrado) — UFRGS, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 101.

SCHREURS, P.; VELDPAUS, F.; BREKELMANS, W. Simulation of forming processes, using the arbitrary eulerian-lagrangian formualtion. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 58, p. 19–36, 1986. Citado na página 30.

SHENG, D.; NAZEM, M.; CARTER, J. P. Some computational aspects for solving deep penetration problems in geomechanics. *Computational Mechanics*, v. 44, p. 549–561, 2009. Citado na página 30.

SHEPARD, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: *Proceedings of the 23rd ACM national conference*. [S.l.: s.n.], 1968. p. 517–524. Citado na página 85.

TEIXEIRA, P. *Simulação numerica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e estruturas deformáveis usando o método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2001. Citado na página 85.

TRULIO, J. G. *Theory and structure of the afton codes, AFWL-TR-66-19*. [S.l.], 1966. Citado na página 29.

Van der Berg, P.; HUÉTINK, H. An eulerian finite element model for penetration in layered soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 20, p. 865–886, 1996. Citado na página 30.

VAVOURAKIS, V.; LOUKIDIS, D.; CHARMPIS, D.; PAPANASTASIOU, P. Assessment of remeshing and remapping strategies for large deformation elastoplastic finite element analysis. *Computers and Structures*, p. 133–146, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 14, 15, 29, 73, 74, 93, 95, 98, 100 e 104.

VAVOURAKIS, V.; LOUKIDIS, D.; CHARMPIS, D.; PAPANASTASIOU, P. A robust finite element approach for large deformation elastoplastic plane-strain problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 77, p. 1–15, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 15, 75, 100, 104 e 105.

YANG, Y.-B.; SHICH, M.-S. Solution method for nonlinear problems whit multiple critical points. *AIAA journal*, v. 28, p. 2110–2116, 1990. Citado na página 106.

ZHU, Y.; CESCOTTO, S. Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 129, p. 177–209, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 38.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. *El método de los elementos finitos. Formulación básica y problemas lineales*. Cuarta edición. [S.l.]: McGraw-Hill, 1994. v. 1. Citado na página 28.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. *El método de los elementos finitos. Mecánica de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad*. Cuarta edición. [S.l.]: McGraw-Hill, 1994. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 57.

Anexos

ANEXO A – MAPEAMENTO INVERSO DO ELEMENTO

Para a interpolação das variáveis de estado pelo método IFF (Interpolação por funções de forma, Seção 4.2.1) é necessário conhecer as coordenadas paramétricas do ponto de Gauss do elemento realocado (cujas coordenadas globais são conhecidas) no espaço paramétrico do mesmo elemento antes de este ser realocado.

Lembrando a equação de interpolação interna do elemento 2.14:

$$x_i = \sum_{a=1}^8 N_a x_{ia}, \quad (\text{A.1})$$

sendo:

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta), \quad (\text{A.2})$$

onde i denota o eixo do sistema coordenado global (x, y, z) variando de 1 a 3, a refere-se aos nós do elemento, variando de 1 a 8. As coordenadas naturais ξ , η e ζ do nó a são denotadas por ξ_a , η_a e ζ_a respectivamente.

Seja \mathbf{x}_p o vetor das coordenadas do ponto p cujas coordenadas paramétricas (incógnitas) são as componentes do vetor $\boldsymbol{\xi}_p$, verifica-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x}_p - \sum_{a=1}^8 N_a(\boldsymbol{\xi}_p) \mathbf{x}_a \approx 0. \quad (\text{A.3})$$

Para resolver pelo método de Newton-Raphson (ver 3.1.4), desenvolve-se a função \mathbf{R} em série de Taylor e linearizando-a:

$$R_x^{i+1} = R_x^i + \frac{\partial R_x^i}{\partial \xi_p} \Delta \xi_p + \frac{\partial R_x^i}{\partial \eta_p} \Delta \eta_p + \frac{\partial R_x^i}{\partial \zeta_p} \Delta \zeta_p, \quad (\text{A.4a})$$

$$R_y^{i+1} = R_y^i + \frac{\partial R_y^i}{\partial \xi_p} \Delta \xi_p + \frac{\partial R_y^i}{\partial \eta_p} \Delta \eta_p + \frac{\partial R_y^i}{\partial \zeta_p} \Delta \zeta_p, \quad (\text{A.4b})$$

$$R_z^{i+1} = R_z^i + \frac{\partial R_z^i}{\partial \xi_p} \Delta \xi_p + \frac{\partial R_z^i}{\partial \eta_p} \Delta \eta_p + \frac{\partial R_z^i}{\partial \zeta_p} \Delta \zeta_p, \quad (\text{A.4c})$$

Com a condição $\mathbf{R}^{i+1} = 0$ da relação A.3:

$$\begin{pmatrix} -R_x^i \\ -R_y^i \\ -R_z^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial R_x^i}{\partial \xi_p} & \frac{\partial R_x^i}{\partial \eta_p} & \frac{\partial R_x^i}{\partial \zeta_p} \\ \frac{\partial R_y^i}{\partial \xi_p} & \frac{\partial R_y^i}{\partial \eta_p} & \frac{\partial R_y^i}{\partial \zeta_p} \\ \frac{\partial R_z^i}{\partial \xi_p} & \frac{\partial R_z^i}{\partial \eta_p} & \frac{\partial R_z^i}{\partial \zeta_p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \Delta \xi_p \\ \Delta \eta_p \\ \Delta \zeta_p \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e invertendo a matriz jacobiana \mathbf{J} , chega-se a:

$$\begin{pmatrix} \Delta \xi_p \\ \Delta \eta_p \\ \Delta \zeta_p \end{pmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{pmatrix} -R_x^i \\ -R_y^i \\ -R_z^i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

As coordenadas paramétricas do ponto p são atualizadas a cada iteração por:

$$\xi^{i+1} = \xi^i + \Delta \xi, \quad (\text{A.7a})$$

$$\eta^{i+1} = \eta^i + \Delta \eta, \quad (\text{A.7b})$$

$$\zeta^{i+1} = \zeta^i + \Delta \zeta. \quad (\text{A.7c})$$

O valor das coordenadas paramétricas para o início do processo iterativo é $\xi^0 = \eta^0 = \zeta^0 = 0$ e o critério de convergência é a distância euclidiana do vetor $\{\Delta \xi_p, \Delta \eta_p, \Delta \zeta_p\}^t$.

ANEXO B – MAPEAMENTO INVERSO DA SUPERFÍCIE *B-SPLINE*

Para a realocação dos nós das SNC (superfícies naturais de contorno) dentro processo geométrico (ver Seção 4.1.1), foram desenvolvidas as equações 4.15 e 4.16:

$$\alpha_i^k = \alpha_{i_d}^k + (\alpha_{i_d}^{(k)}) \left(\frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{\alpha_{i_d}^{(0)}} \right) \frac{\left[i_d - i - 1 + i \left(\frac{\delta_{i < i_d}^{(0)}}{\delta_{i < i_d}^{(k)}} \right) \right]}{i_d - 1}, \quad i < i_d, \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_i^k = \alpha_{i_d}^k + (1 - \alpha_{i_d}^{(k)}) \left(\frac{\alpha_i^{(0)} - \alpha_{i_d}^{(0)}}{1 - \alpha_{i_d}^{(0)}} \right) \frac{\left[i - i_d - 1 + (N - i) \left(\frac{\delta_{i > i_d}^{(0)}}{\delta_{i > i_d}^{(k)}} \right) \right]}{N - i_d - 1}, \quad i > i_d, \quad (\text{B.2})$$

lembrando que δ é o comprimento da curva, N é a quantidade de segmentos em que está dividida a curva, i é a posição do nó que está sendo realocado (i inicia com o valor 0 e valor final N), i_d é a posição do nó considerado como CRMNC. Os sobrescritos (0) e (k) indicam que o parâmetro indicado corresponde à configuração inicial (de referência) ou à configuração atual, respectivamente, e α_i representam as coordenadas paramétricas.

A superfície é parametrizada mediante superfícies *B-Splines* (ver Seção 4.1.1.1, dado um conjunto de $(n + 1) \times (m + 1)$ pontos que representam a superfície, com a equação 4.32:

$$S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j}, \quad (\text{B.3})$$

onde $N_{i,p}$ e $N_{j,q}$ são as funções de base para as direções p e q , respectivamente, e conjuntamente com os pontos de controle $P_{i,j}$ determinam a parametrização da superfície no espaço paramétrico $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (\text{B.4})$$

Para poder obter as novas coordenadas paramétricas pelas equações B.1 e B.2 (4.15 e 4.16), deve ser conhecida a coordenada paramétrica atual do CRMNC ($\alpha_{i_d}^{(k)}$). Procedendo de forma similar ao Anexo A, sejam (x_d, y_d, z_d) as coordenadas globais e (u_d, v_d) as coordenadas paramétricas do ponto CRMNC d , verifica-se:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} Q_{ij}(u_p, v_p) P_{ij}}_{\approx 0} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad Q_{ij} = N_{i,p}(u_p) N_{j,q}(v_p). \quad (\text{B.5})$$

Expandido o sistema de equações não lineares (B.5) em serie de Taylor:

$$R_x^{i+1} = R_x^i + \frac{\partial R_x^i}{\partial u_d} \Delta u_d + \frac{\partial R_x^i}{\partial v_d} \Delta v_d, \quad (\text{B.6a})$$

$$R_y^{i+1} = R_y^i + \frac{\partial R_y^i}{\partial u_d} \Delta u_d + \frac{\partial R_y^i}{\partial v_d} \Delta v_d, \quad (\text{B.6b})$$

$$R_z^{i+1} = R_z^i + \frac{\partial R_z^i}{\partial u_d} \Delta u_d + \frac{\partial R_z^i}{\partial v_d} \Delta v_d, \quad (\text{B.6c})$$

fazendo $\mathbf{R}^{i+1} = 0$, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} -R_x^i \\ -R_y^i \\ -R_z^i \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial R_x^i}{\partial u_d} & \frac{\partial R_x^i}{\partial v_d} \\ \frac{\partial R_y^i}{\partial u_d} & \frac{\partial R_y^i}{\partial v_d} \\ \frac{\partial R_z^i}{\partial u_d} & \frac{\partial R_z^i}{\partial v_d} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{(3 \times 2)}} \begin{Bmatrix} \Delta u_d \\ \Delta v_d \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

A matriz \mathbf{J} é uma matriz (3x2) devido a que a transformação do sistema é feito desde um sistema de coordenadas globais espacial (x, y, z) para um sistema de coordenadas paramétrico bidimensional (u, v) como se ilustra na Figura B.1. Para poder inverter a matriz são escolhidas duas das três coordenadas globais e a terceira é consequência da superfície (conhecendo duas coordenadas do ponto e sabendo que pertence a uma superfície, o ponto é conhecido).

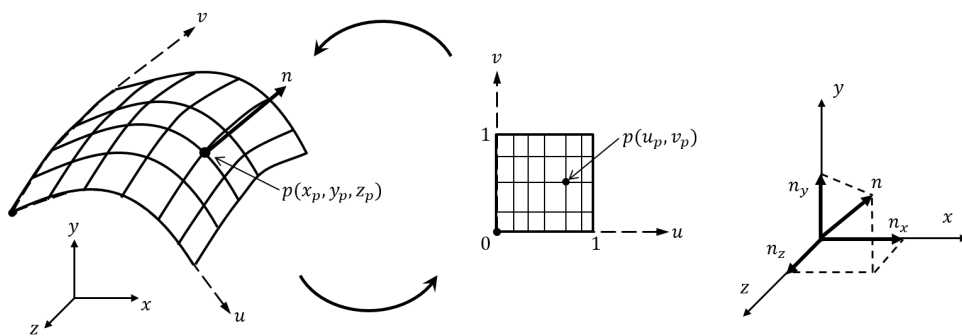


Figura B.1 – Decomposição da normal à superfície.

Para saber qual das três coordenadas deixar dependente das outras duas, estima-se a normal bnm da superfície no ponto P , calculam-se os cossenos diretores n_x, n_y, n_z e a coordenada a qual corresponda o maior dos cossenos diretores será a coordenada dependente. Para um ponto sobre uma superfície, quanto maior seja o cosseno diretor de um dos eixos, menor é a diferencia entre a coordenada do eixo entre o ponto com os pontos vizinhos.

Supondo que as duas coordenadas independentes são m e n , a equação B.7 fica:

$$\begin{Bmatrix} -R_m^i \\ -R_n^i \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial R_m^i}{\partial u_d} & \frac{\partial R_m^i}{\partial v_d} \\ \frac{\partial R_n^i}{\partial u_d} & \frac{\partial R_n^i}{\partial v_d} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{(2 \times 2)}} \begin{Bmatrix} \Delta u_d \\ \Delta v_d \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

e invertendo a matriz \mathbf{J} , obtém-se a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_d \\ \Delta v_d \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} -R_m^i \\ -R_n^i \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

As coordenadas paramétricas do ponto p são atualizadas a cada iteração por:

$$u^{i+1} = u^i + \Delta u, \quad (\text{B.10a})$$

$$v^{i+1} = v^i + \Delta v, \quad (\text{B.10b})$$

e a variável dependente é obtida com as novas coordenadas paramétricas de B.10 na equação da superfície B.3. O valor das coordenadas paramétricas para o início do processo iterativo podem ser as coordenadas calculada no passo anterior.

No trabalho de Piegl e Tiller (1996) encontram-se os algoritmos para a obtenção das derivadas das funções de base $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}\right)$.