

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DE UM MODELO SUBSTITUTO PARA OTIMIZAÇÃO  
ESTRUTURAL TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO E ESTIMATIVA DE  
*ERRO A POSTERIORI*

Guilherme Varella

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, junho de 2015

APLICAÇÃO DE UM MODELO SUBSTITUTO PARA OTIMIZAÇÃO  
ESTRUTURAL TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO E ESTIMATIVA DE  
ERRO A *POSTERIORI*

Guilherme Varella  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da  
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Ph. D. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Alexandre Molter, UFPEL

Prof. Dr. Carlos Eduardo de Souza, UFSM

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler, UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Rossi, UFRGS

Prof. Dr. Luiz A. O. Rocha  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, junho de 2015

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização topológica visando reduzir o volume de uma estrutura tridimensional sujeita a restrição de tensão. A análise estrutural é feita através do método dos elementos finitos, as tensões são calculadas nos pontos de integração Gaussiana e suavizadas. Para evitar problemas associados a singularidades na tensão é aplicado o método de relaxação de tensão, que penaliza o tensor constitutivo. A norma-p é utilizada para simular a função *máximo*, que é utilizada como restrição global de tensão. O estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu é usado para calcular o erro da tensão, que é considerado durante o cálculo da norma-p, tornando o processo de otimização mais robusto. Para o processo de otimização é utilizada o método de programação linear sequencial, sendo todas as derivadas calculadas analiticamente. É proposto um critério para remoção de elementos de baixa densidade, que se mostrou eficiente contribuindo para gerar estruturas bem definidas e reduzindo significativamente o tempo computacional. O fenômeno de instabilidade de tabuleiro é contornado com o uso de um filtro linear de densidade. Para reduzir o tempo dispendido no cálculo das derivadas e aumentar o desempenho do processo de otimização é proposto um modelo substituto (*surrogate model*) que é utilizado em iterações internas na programação linear sequencial. O modelo substituto não reduz o tempo de cálculo de cada iteração, entretanto reduziu consideravelmente o número de avaliações da derivada. O algoritmo proposto foi testado otimizando quatro estruturas, e comparado com variações do método e com outros autores quando possível, comprovando a validade da metodologia empregada.

Palavras-chave: otimização topológica, restrição de tensão, modelo substituto, estimador de erro.

## **ABSTRACT**

This work presents a methodology for stress-constrained topology optimization, aiming to minimize material volume. Structural analysis is performed by the finite element method, and stress is computed at the elemental Gaussian integration points, and then smoothed over the mesh. In order to avoid the stress singularity phenomenon a constitutive tensor penalization is employed. A normalized version of the p-norm is used as a global stress measure instead of local stress constraint. A finite element error estimator is considered in the stress constraint calculation. In order to solve the optimization process, Sequential Linear Programming is employed, with all derivatives being calculated analytically. A criterion is proposed to remove low density elements, contributing for well-defined structures and reducing significantly the computational time. Checkerboard instability is circumvented with a linear density filter. To reduce the computational time and enhance the performance of the code, a surrogate model is used in inner iterations of the Sequential Linear Programming. The present algorithm was evaluated optimizing four structures, and comparing with variations of the methodology and results from other authors, when possible, presenting good results and thus verifying the validity of the procedure.

**Keywords:** topology optimization, stress constraint, surrogate model, error estimator.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> .....	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo Estrutural</b> .....	<b>4</b>
2.1.1	Elasticidade linear infinitesimal .....	4
2.1.2	Método dos elementos finitos .....	5
2.1.3	Elemento não conforme de Taylor- Beresford -Wilson .....	7
2.1.4	Suavização de tensão.....	11
2.1.5	Estimador de erro .....	13
<b>2.2</b>	<b>Otimização Topológica</b> .....	<b>14</b>
2.2.1	Penalização de densidade intermediária.....	14
2.2.2	Instabilidade de tabuleiro de xadrez.....	17
2.2.3	Filtro de densidade .....	19
2.2.4	Dependência de malha .....	20
2.2.5	Remoção de elementos de baixa densidade .....	21
2.2.6	Relaxação de tensão .....	23
<b>2.3</b>	<b>Problema de otimização</b> .....	<b>24</b>
2.3.1	Programação linear sequencial.....	24
2.3.2	Limites móveis .....	26
2.3.3	Derivada da função objetivo .....	26
2.3.4	Medida global de tensão.....	27
2.3.5	Medida global de tensão normalizada.....	29
2.3.6	Derivada das restrições .....	30
2.3.7	Modelo substituto.....	34
<b>2.4</b>	<b>Implementação do algoritmo</b> .....	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>40</b>
<b>3.1</b>	<b>Caso 1 - Placa</b> .....	<b>40</b>
3.1.1	Avaliação do uso do modelo substituto .....	41
3.1.2	Penalização de densidade versus remoção de elementos de baixa densidade .....	43
<b>3.2</b>	<b>Caso 2 – “L”</b> .....	<b>46</b>
3.2.1	Malha 1.....	47
3.2.2	Efeito do estimador de erro .....	50
3.2.3	Malha 2.....	51
3.2.4	Comparação dos resultados.....	53
<b>3.3</b>	<b>Caso 3 - Caixa</b> .....	<b>54</b>
<b>3.4</b>	<b>Caso 4 - Viga</b> .....	<b>58</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>61</b>
<b>4.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> .....	<b>62</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do domínio .....	4
Figura 2.2 – Comportamento das funções conforme e não conforme.....	8
Figura 2.4 – Penalização do tensor constitutivo.....	15
Figura 2.5 – Penalização da densidade – equação 2.34.....	16
Figura 2.6 – Penalização da densidade – equação 2.35.....	17
Figura 2.7 – Instabilidade de tabuleiro .....	18
Figura 2.8 – Filtro de densidade .....	20
Figura 2.9 – Dependência de malha .....	21
Figura 2.10 – Programação linear sequencial.....	25
Figura 2.11 – Comportamento norma-p .....	28
Figura 2.12 – Comportamento da variável de projeto .....	35
Figura 2.13 – Fluxograma do processo de otimização .....	38
Figura 3.1 – Caso 1 – Geometria e condições de contorno .....	40
Figura 3.2 – Caso 1 – Comparação estrutura final (SLP x SLP + modelo substituo).....	41
Figura 3.3 – Caso 1 – Comparação da convergência da função objetivo (SLP x SLP + modelo substituo) .....	42
Figura 3.4 – Caso 1 – Comparação da convergência da tensão nodal máxima (SLP x SLP + modelo substituo) .....	43
Figura 3.5 – Caso 1 – Comparação estrutura final (penalização de densidade x remoção de elementos).....	44
Figura 3.6 – Caso 1 – Comparação da convergência da tensão nodal máxima (penalização de densidade x remoção de elementos) .....	44
Figura 3.7 – Caso 1 – Comparação da convergência da função objetivo (penalização de densidade x remoção de elementos) .....	45
Figura 3.8 – Caso 1 – Tempo de processamento (penalização de densidade x remoção de elementos) .....	46
Figura 3.9 – Caso 2 – Geometria e condições de contorno .....	46
Figura 3.10 – Caso 2 – Convergência da restrição $P=16$ .....	47
Figura 3.11 – Caso 2 – Densidade dos elementos $P=16$ .....	48
Figura 3.12 – Caso 2 –Tensão nodal máxima $P=16$ , 2475 elementos .....	49
Figura 3.13 – Caso 2 – Estrutura final suavizada $P=16$ , 2475 elementos.....	49
Figura 3.14 – Caso 2 – Comparação estimador de erro $P=16$ , 2475 elementos.....	50
Figura 3.15 – Caso 2 – Estrutura final suavizada $P=100$ , 4100 elementos .....	51
Figura 3.16 – Caso 2 – Tensão nodal máxima $P=100$ , 4100 elementos .....	52
Figura 3.17 – Caso 2 – Convergência da função objetivo $P=100$ , 4100 elementos.....	52
Figura 3.18 – Resultados da otimização da estrutura em “L” obtida por outros autores .....	53
Figura 3.19 – Caso 2 – Tempo de processamento $P=100$ , 4100 elementos .....	54
Figura 3.20 – Caso 3 –Geometria e condições de contorno .....	55
Figura 3.21 – Caso 3 –Estrutura final.....	56
Figura 3.22 – Caso 3 –Convergência da restrição .....	57
Figura 3.23 – Caso 3 – Convergência da função objetivo.....	57
Figura 3.24 – Caso 4 –Geometria e condições de contorno .....	58
Figura 3.25 – Caso 4 –Tempo de processamento .....	59
Figura 3.26 – Caso 4 –Convergência da restrição .....	59
Figura 3.27 – Caso 4 –Estrutura final.....	60

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Caso 1 - Parâmetros utilizados .....	41
Tabela 3.2 – Caso 2 - Parâmetros utilizados .....	47
Tabela 3.3 – Caso 3 - Parâmetros utilizados .....	55
Tabela 3.4 – Caso 4 - Parâmetros utilizados .....	58

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AMMF	<i>Approximation Model Management Framework</i>
KS	Kreisselmeier-Steinhauser
IWSF	<i>Individual weight spatial filter</i>
SIMP	<i>Solid isotropic microstructure with penalization</i>
SLP	Programação linear sequencial
SMF	<i>Surrogate Management Framework</i>
ZZ	Estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Parâmetro para penalização de densidade
$c^i$	Parâmetro para corrigir a diferença entre a tensão máxima na estrutura e o valor de tensão obtido pela norma-p
$\mathbf{c}$	Deslocamentos nodais
$\mathbf{C}$	Tensor constitutivo
$e_E$	Erro ZZ estimado em energia
$\mathbf{e}_\sigma$	Erro de cada componente da tensão
$e_{ZZ_n}$	Erro ZZ em tensão no nó
$E$	Módulo de Young
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
$\mathbf{f}$	Vetor de força
$J_e$	Jacobiano do elemento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{L}$	Matriz de derivada das funções de interpolação
$\mathbf{M}_e$	Matriz de massa do elemento
$\mathbf{N}$	Tensor que contém as funções de forma
$\eta_{BD}$	Critério para remoção de elementos
$n_c$	Função que penaliza o tensor constitutivo
$n_v$	Função que penaliza o volume
$n_t$	Função que penaliza a tensão
$p$	Expoente de penalização de densidade
$\rho$	Densidade
$\rho_e$	Densidade do elemento
$\rho^*$	Valor central da densidade para rodada de otimização
$\rho^{\text{inf}}$	Limite superior para otimização
$\rho^{\text{sup}}$	Limite inferior para otimização
$R_{max}$	Raio máximo para filtro de densidade

$\sigma$	Tensor de tensões
$\sigma_e$	Tensão do elemento
$\sigma_{vm_n}$	Tensão de von Mises no nó
$\sigma_{NP}$	Medida global de tensão
$\sigma_n$	Tensão extrapolada para o nó
$\tilde{\sigma}_i$	Tensão calculada no ponto de Gauss
$\sigma_p$	Tensão nodal suavizada
$\sigma_Y$	Tensão máxima permitida
$t$	Carregamento de superfície
$\mathbf{T}$	Componente que relaciona as tensões com os deslocamentos
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{u}_{e_c}$	Deslocamento associado à parte conforme
$\mathbf{u}_{e_{nc}}$	Deslocamento associado à parte não conforme
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\mathbf{V}$	Matriz com os termos para cálculo da tensão de von Mises
$\Omega$	Domínio
$\Omega_D$	Domínio em que estão aplicadas as condições de contorno de Dirchlet
$\Omega_N$	Domínio da superfície onde estão aplicados os carregamentos de superfície
$V_e$	Volume do elemento
$w$	Deslocamento virtual
$W$	Peso para filtro de densidade

## 1 INTRODUÇÃO

A otimização estrutural é uma ferramenta muito importante para auxiliar o projetista na elaboração de estruturas de melhor desempenho e menor consumo de material, influenciando diretamente no custo de produção de qualquer componente. Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1991] apresentam uma revisão de diversas metodologias com essa finalidade. Neste trabalho, é empregada uma formulação para otimização topológica com restrição de tensão. Esse problema de otimização visa a determinar a existência ou não de material para cada ponto de uma estrutura sujeita a certas cargas e restrições em um domínio definido, sendo a tensão o parâmetro de projeto utilizado como restrição.

Existe uma significativa dificuldade em solucionar problemas de otimização estrutural com restrição de tensão. A maior causa para tal dificuldade é o fato de que a tensão é uma variável local. Assim cada ponto da estrutura discretizada deve ter a tensão inferior à restrição imposta. Se cada tensão local for tratada como uma restrição na otimização, há um custo computacional muito grande. Uma maneira eficiente de reduzir o custo computacional, relativo ao número de restrições, é empregar uma medida global de tensão. Neste trabalho, é utilizada a norma-p como medida global de tensão para representar a função *máximo* conforme proposto por Yang e Chang [YANG e CHANG, 1996].

Entretanto, mesmo que se utilize uma medida global de tensão ainda é necessário calcular uma derivada da tensão de cada nó da estrutura em relação a cada um dos elementos. Por exemplo, se a malha for discretizada em 4.000 elementos e tiver cerca de 8.000 nós será necessário calcular 24.000.000 derivadas a cada iteração. Ainda que as derivadas sejam calculadas analiticamente, esse processo é responsável por grande custo computacional, e esse custo aumenta exponencialmente a medida que o problema for sendo mais discretizado.

Com um tempo computacional elevado a metodologia de otimização pode se tornar inviável para um aplicações práticas. Portanto um algoritmo de otimização deve idealmente ser robusto, a fim de obter bons resultados dentro das simplificações inerentes ao modelo, e ter o menor tempo de processamento e configuração possível.

A remoção de elementos de baixa densidade da estrutura durante o processo de otimização apresenta vantagens relacionadas à redução do tempo computacional, conforme apresentado por Xia [Xia *et al.*, 2011]. Para tal fim, neste trabalho propõem-se um critério para determinar a remoção de elementos da malha.

Um método muitas vezes usado na indústria aeroespacial para redução do tempo computacional, tornando viável a otimização de muitos problemas, é o modelo substituto (*surrogate model*) [Queipo *et al.*, 2005]. Ao invés de utilizar um modelo com alto custo computacional e que represente com alta precisão o problema em estudo, são criados modelos aproximados para o mesmo problema que não terão a precisão tão alta, mas que podem ser considerados válidos em certo intervalo.

Quando um modelo é utilizado para simular um comportamento físico, usualmente são feitas aproximação e simplificações. Assim, passa a existir uma diferença, ou erro, entre o resultado real e o modelado. A tensão que é o parâmetro utilizado como restrição neste trabalho, é crucial no projeto mecânico, pois se não for bem modelada pode causar falhas na estrutura. O estimador de erro proposto por Zienkiewicz e Zhu [Zienkiewicz e Zhu, 1987], é utilizado na determinação do erro da modelagem da tensão, para que ele seja considerado durante o processo de otimização, gerando estruturas menos suscetíveis a falhas.

## 1.1 Objetivos

Os objetivos deste trabalho, são relacionados à implementação da metodologia de otimização topológica, estimação do erro do cálculo da tensão e redução do tempo computacional:

- Implementar um método de otimização topológica para estruturas tridimensionais, baseado na formulação já utilizada por Le [Le *et al.*, 2010] e Silva [Silva, 2012], sendo os principais pontos: utilização do elemento de Taylor-Beresford-Wilson [Taylor *et al.*, 1976 *apud* Hughes, 2000]; aplicação de filtro de densidade; relaxação da tensão através da penalização do tensor constitutivo e da tensão; uso de medida global de tensão [Yang, 1996] como restrição para contornar problemas relacionados a concentradores de tensão;
- Propor um parâmetro para determinar a remoção de elementos da malha, de forma a reduzir o número de derivadas calculadas a cada iteração;
- Implementar um modelo substituto (*surrogate model*), que é uma formulação aproximada para o problema de otimização, reduzindo o fardo do cálculo das derivadas em cada iteração.

- Utilizar o erro estimado pelo método da norma da energia, proposto por Zienkiewicz e Zhu [Zienkiewicz e Zhu, 1987] e somar esse erro à tensão calculada nos elementos a cada iteração, de maneira a gerar estruturas menos suscetíveis a falhas.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Esta seção apresenta uma breve descrição dos métodos utilizados para resolução do problema estabelecido. Primeiramente, é apresentada a formulação do método dos elementos finitos, utilizada para solução das equações de equilíbrio da mecânica linear infinitesimal, e em seguida são descritos o elemento utilizado e sua formulação, e também o estimador de erro empregado.

São descritos procedimentos para lidar com problemas relativos à otimização topológica, como a penalização de densidades intermediárias, instabilidade de tabuleiro, filtro de densidade, remoção de elementos de baixa densidade e relaxação de tensão.

Na última parte da seção, são apresentadas a formulação do processo de otimização, fundamentada em uma modificação do algoritmo de programação linear sequencial, a medida global de tensão e as deduções das sensibilidades da função objetivo e da restrição.

### 2.1 Modelo Estrutural

#### 2.1.1 Elasticidade linear infinitesimal

É considerado um corpo de material isotrópico, homogêneo e elástico linear, submetido a um carregamento de superfície  $t$ , contido em um domínio  $\Omega$  no espaço  $\mathfrak{R}^3$  conforme a Figura 2.1, sendo que  $\Omega_D$  é a parte do domínio em que estão aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e  $\Omega_N$  o domínio da superfície onde estão aplicados os carregamentos de superfície [Atkin e Fox, 2005].

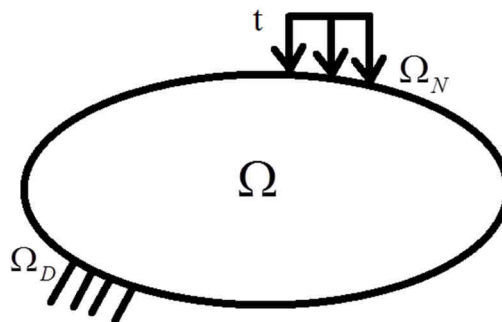


Figura 2.1 – Representação do domínio

O conjunto de equações constitutiva, cinemática e de equilíbrio relacionam o tensor constitutivo do material, o tensor de tensões, o tensor de deformações, o vetor de forças aplicadas no corpo e o vetor de deslocamento que são:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 2.1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad 2.2$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ para } \forall x \in \Omega \quad 2.3$$

As condições de contorno são definidas como:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}, \text{ para } \forall x \in \Omega_N \quad 2.4$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \forall x \in \Omega_D \quad 2.5$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformação;  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos; e  $\mathbf{C}$  o tensor constitutivo para material isotrópico, escrito com a notação de Voigt, com a seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 2.6$$

sendo  $E$  o módulo de Young, e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

### 2.1.2 Método dos elementos finitos

Neste trabalho, foi implementada uma formulação do método dos elementos finitos para solução das equações de equilíbrio da teoria linear infinitesimal, conforme apresentada por

Hughes [HUGHES, 2000]. O método dos elementos finitos é uma técnica utilizada para obter soluções aproximadas, envolvendo a divisão do domínio do problema em pequenos subdomínios, os elementos finitos, sendo uma ferramenta amplamente utilizada na solução de equações diferenciais.

A forma de apresentar o problema, conforme a equação 2.3, é chamada de forma forte, pela qual se busca encontrar um campo de deslocamento  $\mathbf{u}$ , que satisfaça a equação de estado, bem como, as condições de contorno em todos os pontos de  $\Omega$ .

Outra forma de apresentar o problema é em sua forma variacional, ou forma fraca. Para chegar a essa forma, multiplica-se a equação 2.3, uma função arbitrária  $w$ , que representa uma candidata à solução do problema:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0 \quad 2.7$$

Essa função  $w$  deve satisfazer as condições de contorno e ser uma função de quadrado integrável, ou seja, integrando o quadrado do seu módulo, e em um certo intervalo, a função deve convergir. O próximo passo é a integração por partes da equação 2.7, que resulta em:

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} \, d\Omega_N + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega = 0 \quad 2.8$$

Nessa equação,  $w$  é muitas vezes chamado de deslocamento virtual. A discretização em elementos finitos é feita pela seguinte forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{Nc} \quad 2.9$$

onde  $\mathbf{N}$  é um tensor que contém as funções de forma associadas aos nós do elemento finito e  $\mathbf{c}$  é o vetor que contém os deslocamentos nodais aproximados. Utilizando-se as equações 2.3 e 2.9 pode-se escrever que:

$$\nabla \mathbf{w} = \mathbf{Lc} \quad 2.10$$

que é equivalente a:



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad 2.11$$

sendo  $\mathbf{L}$  a matriz de derivada das funções de interpolação, que relaciona a deformação com o deslocamento. Substituindo-se as relações apresentadas nas equações 2.1, 2.9, 2.10 e 2.11, pode-se reescrever a equação 2.8 da seguinte forma:

$$\mathbf{c}^T \left( -\mathbf{u}^T \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \partial \Omega_e}_{\mathbf{K}_e} + \underbrace{\int_{\Omega_{N_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \partial \Omega_{N_e} + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \partial \Omega_e}_{\mathbf{f}_e} \right) = 0 \quad 2.12$$

O índice  $e$  se refere aos elementos. Considerando-se a solução não trivial,  $c \neq 0$ , a equação 2.12 pode ser escrita como:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} (\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e) = 0 \quad 2.13$$

Na forma matricial a equação 2.13 é escrita como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad 2.14$$

As únicas incógnitas nessa equação são os deslocamentos nodais.

### 2.1.3 Elemento não conforme de Taylor- Beresford -Wilson

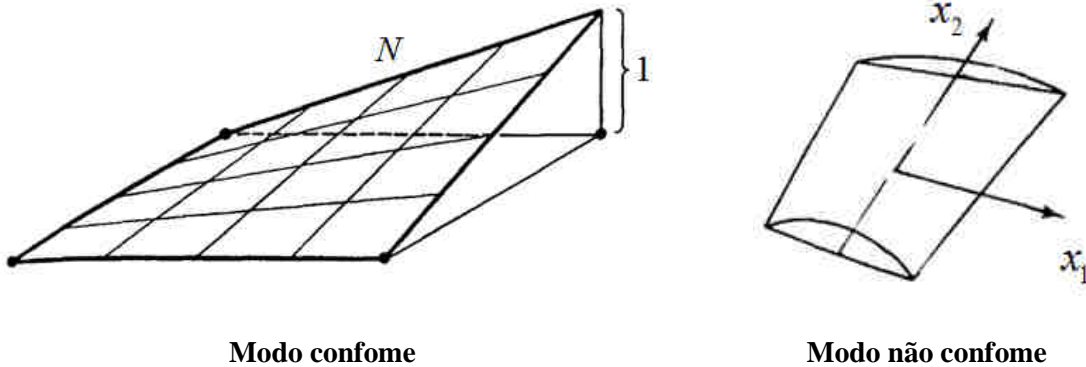
A primeira versão do elemento foi proposta por Wilson [Wilson et al., 1973<sup>1</sup>, *apud* Hughes, 2000]. Notou-se que quando o momento era aplicado a um único elemento quadrilateral de quatro nós, o elemento respondia com uma deformação cisalhante e não com uma flexão, como seria esperado, o que causa uma sobre estimativa da rigidez da estrutura. Para produzir o comportamento esperado, nessas situações, uma solução foi adicionar funções de deformação quadráticas, correspondentes aos modos de deformação sujeita a momento puro.

<sup>1</sup> Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J. *Incompatible displacement models*, **Numerical and computer models in structural mechanics**, p.43-57, 1973.

As funções de forma do elemento não conforme para um elemento hexaédrico de 8 nós são mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
 N_1(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + x_3)/8 \\
 N_2(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)/8 \\
 N_3(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1)(1 + x_2)(1 - x_3)/8 \\
 N_4(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)/8 \\
 N_5(x_1, x_2, x_3) &= (1 + x_1)(1 - x_2)(1 + x_3)/8 \\
 N_6(x_1, x_2, x_3) &= (1 + x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)/8 \\
 N_7(x_1, x_2, x_3) &= (1 + x_1)(1 + x_2)(1 - x_3)/8 \\
 N_8(x_1, x_2, x_3) &= (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)/8 \\
 N_9(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_1^2 \\
 N_{10}(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_2^2 \\
 N_{11}(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_3^2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde as primeiras oito funções são as funções usuais para o elemento tri linear, e as últimas três funções são relativas aos modos não conformes, também chamados de função bolha, e  $x_1, x_2, x_3$  representam as direções principais do elemento em coordenadas locais. A Figura 2.2 ilustra o comportamento das funções conforme e não conforme para um elemento em bidimensional.



Adaptado de Hughes, 2000.

**Figura 2.2 – Comportamento das funções conforme e não conforme**

Assim, o deslocamento no elemento pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^8 N_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{u}_{e_c} + \sum_{i=9}^{11} N_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{u}_{e_{NC}} \tag{2.16}$$

sendo que  $\mathbf{u}_{e_c}$  e  $\mathbf{u}_{e_{NC}}$  são vetores dos graus de liberdade associados às partes conforme e não conforme do deslocamento, respectivamente. Os componentes associados aos modos não conformes adicionam novos termos à matriz de derivada das funções de interpolação  $\mathbf{L}$ , que usualmente teriam dimensões de 6x24, passando de para 6x33:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3 \quad \mathbf{L}_4 \quad \mathbf{L}_5 \quad \mathbf{L}_6 \quad \mathbf{L}_7 \quad \mathbf{L}_8 \quad | \quad \mathbf{L}_9 \quad \mathbf{L}_{10} \quad \mathbf{L}_{11}] \quad 2.17$$

sendo que cada termo  $\mathbf{L}_i$  é uma matriz 6x3 e o índice  $i$  referente a cada uma das funções de forma  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad 2.18$$

A matriz de rigidez em cada elemento definida por

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} d\Omega \quad 2.19$$

fica com a forma:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A & \mathbf{K}_B \\ \mathbf{K}_B^T & \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \quad 2.20$$

Nota-se que  $\mathbf{K}_A$  é a matriz de rigidez 24x24, que seria obtida atrás das funções de forma do hexaedro de oito nós, sem o uso das funções não conformes,  $\mathbf{K}_B$  tem as dimensões 24x9, e  $\mathbf{K}_C$  tem dimensões 9x9.

Entretanto, os deslocamentos  $\mathbf{u}_{e_{NC}}$  devem ser removidos da matriz de rigidez, para que o método dos elementos finitos possa ser utilizado da forma usual. Considera-se que não há força associada aos graus de liberdade dos modos não conformes. Portanto:

$$\mathbf{K}_A \mathbf{u}_{e_C} + \mathbf{K}_B \mathbf{u}_{e_{NC}} = \mathbf{f}_e \quad 2.21$$

$$\mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_C} + \mathbf{K}_C \mathbf{u}_{e_{NC}} = \mathbf{0} \quad 2.22$$

É possível isolar  $\mathbf{u}_{e_{NC}}$  da equação 2.22:

$$\mathbf{u}_{e_{NC}} = -\mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_C} \quad 2.23$$

Substituindo a equação 2.23 na equação 2.21:

$$\mathbf{u}_{e_C} \left( \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B \mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \right) = \mathbf{f}_e \quad 2.24$$

Tal procedimento é conhecido como condensação estática. Os termos entre parênteses da equação 2.24 definem a matriz de rigidez dos elementos com dimensões 24x24:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B \mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \quad 2.25$$

Taylor [Taylor *et al.*, 1976<sup>2</sup> *apud* Hughes, 2000] argumentou que, com a formulação acima, o elemento teria um bom desempenho em geometrias como retângulos e paralelogramos; entretanto, para elementos quadrados, e por extensão cúbicos, ocorreriam descontinuidade no campo de deslocamento entre os elementos. Para superar esse problema, propôs modificações

---

<sup>2</sup> Taylor, R.L., Beresford, J.P., Wilson, E.L. *A Nonconforming Element for Solving the Elastic Problem*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p.1211-1219, 1976.

no cálculo da matriz de derivadas das funções de interpolação, de modo que os termos referentes à parte não conforme tivessem seu jacobiano calculado no ponto central do elemento, tornando assim os resultados válidos para qualquer geometria.

O elemento de Taylor-Beresford-Wilson representa melhor a flexão do que o elemento tri linear, mesmo quando somente um elemento é utilizado na espessura. Devido às funções de forma adicionais e à condensação estática, o elemento tem um custo computacional mais elevado que os elementos isoparamétricos tradicionais, mas por representar bem os campos de deslocamento, é amplamente utilizado em análises lineares [Hughes, 2000].

#### 2.1.4 Suavização de tensão

Quando se utiliza o método dos elementos finitos, principalmente empregando-se elementos de baixa ordem, como é o caso do elemento de Taylor-Beresford-Wilson, as derivadas das funções de interesse, nesse caso a tensão, apresentam descontinuidade entre os elementos. Essa descontinuidade pode levar a erros de interpretação em projetos de otimização [Hilton e Campbell, 1974<sup>3</sup> *apud* Silva, 2012].

A equação 2.19 não tem solução analítica, portanto é utilizada integração numérica. Os melhores pontos para cálculo da tensão em análises envolvendo integração numérica, são os pontos de integração Gaussiana.

A integração exata para polinômios de grau  $2n_{int}-1$  é obtida por  $n_{int}$  pontos de integração. A regra da quadratura Gaussiana para diversas dimensões é estendida, aplicando-se a regra para uma dimensão para cada coordenada, separadamente [Hughes, 2000].

Para o elemento de Taylor-Beresford-Wilson são necessários dois pontos de integração por dimensão, totalizando oito pontos com posição dada por:

---

<sup>3</sup> Hinton, E., Campbell, J.S. *Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, p.461-480, 1974.

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad 2.26$$

sendo que cada coluna representa as coordenadas locais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Portanto, as tensões são calculadas nos pontos de Gauss apresentados na equação 2.26, e interpolados para os nós, utilizando-se as primeiras oito funções de interpolação apresentadas na equação 2.15.

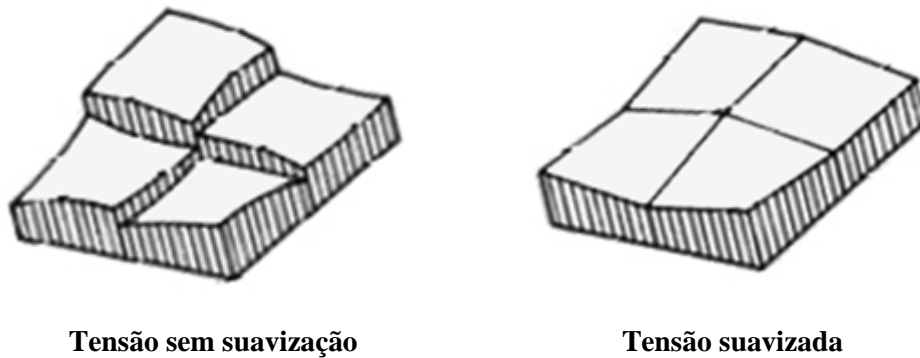
$$\sigma_n = \sum_{n=1}^{n_{nos}} \sum_{i=1}^{n_{pg}} \frac{N_n}{N_i} \tilde{\sigma}_i \quad 2.27$$

onde  $\sigma_n$  é a tensão extrapolada para o nó e  $\tilde{\sigma}_i$  é a tensão calculada no ponto de Gauss. Quando um nó for partilhado por mais de um elemento é feita a média de todos os valores para representar a tensão nodal:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n_{pg}} \frac{\sigma_n}{n_{pg}} \quad 2.28$$

sendo  $\sigma_p$  a tensão nodal suavizada e  $n_{pg}$  o número de tensões extrapolada para o mesmo nó.

A Figura 2.3 apresenta uma ilustração do efeito da suavização de tensão.



Tensão sem suavização

Tensão suavizada

Adaptado de Hilton e Campbell, 1974.

**Figura 2.3 – Suavização de tensão**

### 2.1.5 Estimador de erro

O erro  $e$  representa a diferença entre a solução exata do sistema  $u$  e a solução aproximada  $u_p$  obtida utilizando-se, nesse caso, o método dos elementos finitos. Esse erro é decorrente do particionamento do domínio e da escolha das funções de interpolação, pois é usado um número finito de graus de liberdade, para representar um número infinito de graus de liberdade no sistema real.

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p \quad 2.29$$

Mesmo quando a solução exata não é conhecida, é possível estimar quantitativamente o erro de discretização. Existem dois tipos de estimativa de erro de discretização: estimativas *a priori* e estimativa *a posteriori* [DUARTE, 1991]:

- Estimativa *a priori* é baseada no conhecimento de características da solução e fornece informações qualitativas quanto à magnitude do erro.
- Estimativa *a posteriori* utiliza informações obtidas durante o processo de solução e hipóteses sobre a solução, podendo fornecer medidas precisas do erro de discretização.

Neste trabalho foi utilizado estimador de erro *a posteriori*, de Zienkiewicz e Zhu [Zienkiewicz e Zhu, 1987]:

$$e_E = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_{\sigma}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_{\sigma} \partial\Omega} \quad 2.30$$

onde  $e_E$  é o erro estimado em energia, e  $\mathbf{e}_{\sigma}$  é dado por

$$e_{\sigma} = \sigma - \sigma_p \quad 2.31$$

sendo  $\sigma$  o vetor que contém as tensões locais, calculadas nos nós dos elementos, e  $\sigma_p$  o vetor da tensão suavizada no nó, que é simplesmente a média das tensões calculadas para o nó, a partir de cada elemento a que o nó pertence.

Cabe salientar que, quando o mesmo nó pertence a mais de um elemento, há uma estimativa de erro para aquele nó relacionada com cada elemento, nesse trabalho se optou pelo maior valor entre eles, a ser usado como estimativa de erro:

$$e_{ZZ_n} = \max \left( \sqrt{\int_{\Omega_e} \frac{(\sigma - \sigma_p)^T \mathbf{C} (\sigma - \sigma_p)}{\det(J_e)} \partial\Omega_e} \right) \quad 2.32$$

sendo  $e_{ZZ_n}$  o erro em tensão em cada nó, e  $\det(J_e)$  o determinante do jacobiano do elemento.

## 2.2 Otimização Topológica

### 2.2.1 Penalização de densidade intermediária

É introduzida uma densidade relativa  $\rho$  para cada elemento que compõe a estrutura. Desse modo, valores de  $\rho = 1$  correspondem a pontos onde há material, e valores de  $\rho = 0$  à ausência de material. Valores de  $\rho$  entre 0 e 1 indicam um densidade intermediária, não tendo um significado físico.

O processo de otimização topológica busca encontrar pontos da estrutura com material, ou sem material. A princípio, uma formulação com tal finalidade seria dita discreta. O método SIMP (*solid isotropic microstructure with penalization*) [Bendsoe, 2011] é utilizado para

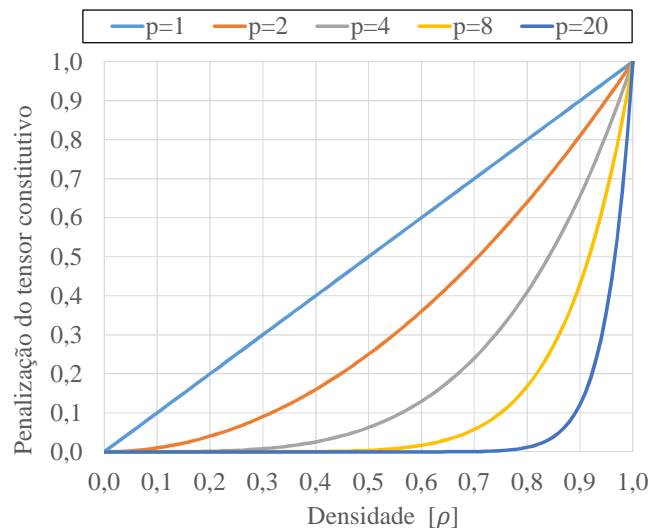


remover a natureza discreta do problema, introduzindo-se uma função de densidade contínua para a função objetivo. O domínio de alta densidade define a forma da estrutura, e densidades intermediárias são penalizadas de forma a tornaram a função contínua e diferenciável, através da introdução de uma função artificial de densidade  $\mu(x)$ :

$$\begin{aligned}
 & x \in \Omega \\
 & 0 \leq \mu(x) \leq 1 \\
 & p \gg 1 \\
 & C_{ijkl} = |\mu(x)|^p C_{ijkl}^0 \\
 & V = \int_{\Omega} \mu(x) dx
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

onde  $p$  é o expoente de penalização.

Com essa formulação, elementos de densidade intermediária têm uma rigidez baixa e de elevado custo, acabando por serem evitadas. Na Figura 2.4, pode-se observar a influência do expoente de penalização na relação entre o tensor constitutivo calculado e o original. Quando  $p$  é igual a 1, a relação é linear; entretanto, à medida que esse expoente cresce, o problema se aproxima da configuração 0-1.



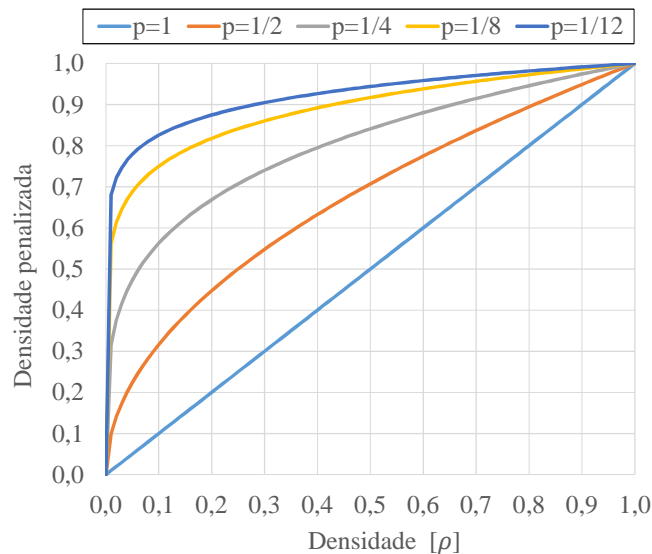
**Figura 2.4 – Penalização do tensor constitutivo**

Outra forma de minimizar a quantidade de elementos, com densidades intermediárias, é penalizar diretamente a função objetivo, como mostrado na Figura 2.5, ao invés do tensor constitutivo. Esse artifício é bastante aplicado em formulações de minimização de volume, e sua grande vantagem é o fato de mostrar, com clareza, a relação entre quantidade de material e densidade [Mosmann, 2003], [Silva, 2011] e [De Leon, 2012].

$$f(p) = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega$$

$$p \geq 1$$
2.34

Contudo, se por um lado esse método ajuda o algoritmo de otimização a encontrar soluções mais próximas de 0-1, ele também pode transformar a função objetivo em uma função não convexa. De maneira que o mínimo encontrado, que seria global, passe a ser um mínimo local [Mosmann, 2003].



**Figura 2.5 – Penalização da densidade – equação 2.34**

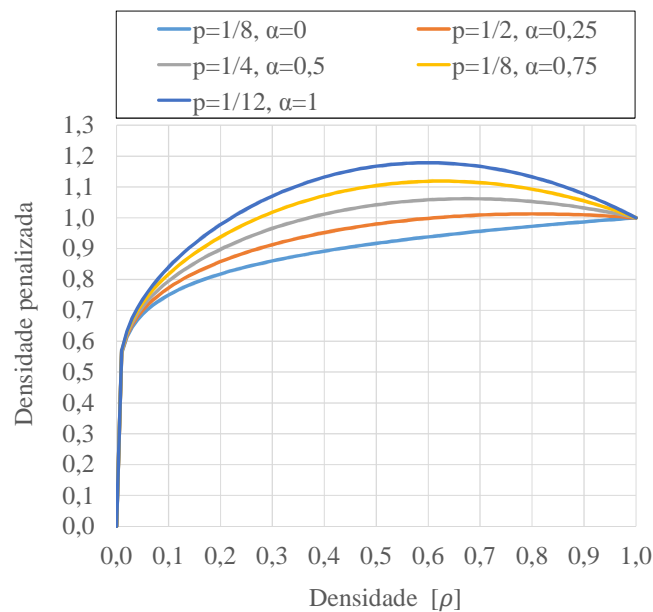
Para contornar esse problema, pode-se utilizar o Método da Continuação, que consiste em dividir o processo de otimização em duas etapas: na primeira, o expoente  $p$  da equação 2.34 é igual a 1, ou seja, não há penalização da função objetivo, mas garante que a solução encontrada será um mínimo, independentemente de a solução conter muitos elementos com

densidade intermediária; na segunda etapa, o valor do expoente  $p$  é reduzido, consequentemente reduzindo a quantidade de elementos com densidade intermediária [De Leon, 2011].

É possível penalizar, ainda mais, a densidade por meio da equação 2.35 [Souza, 2003]:

$$f(p) = \int_{\Omega} [\rho^p + \alpha\rho(1-\rho)] d\Omega \quad 2.35$$

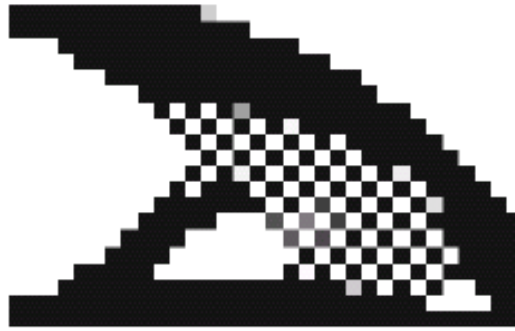
onde o parâmetro  $\alpha$  é escolhido heurísticamente. Na Figura 2.6 pode ser visto o comportamento da função objetivo, em função da densidade, para o caso da aplicação desta penalização.



**Figura 2.6 – Penalização da densidade – equação 2.35**

### 2.2.2 Instabilidade de tabuleiro de xadrez

A instabilidade de tabuleiro de xadrez é o aparecimento na malha de elementos, lado a lado, que se alternam, com e sem material, criando uma estrutura em partes semelhantes a um tabuleiro de xadrez. A Figura 2.7 mostra um problema, bastante comum, de ocorrer em otimização topológica de estruturas contínuas.



**Figura 2.7 – Instabilidade de tabuleiro**

Acreditava-se, no princípio, que a topologia gerada pela instabilidade de tabuleiro era uma microestrutura ótima. Entretanto, descobriu-se que a topologia formada, dotada de uma rigidez extra e artificial, não correspondia a uma microestrutura ótima, mas sim, a uma instabilidade que impossibilitava a formação de uma topologia adequada [Mosmann, 2003].

Esse fenômeno está relacionado a problemas numéricos, na convergência do método dos elementos finitos, sendo causado pelo mau condicionamento das soluções de equilíbrio. Pode-se mostrar que mesmo com a utilização do método da homogeneização, o problema continua sujeito ao aparecimento de tabuleiros de xadrez [Diaz e Sigmund, 1995<sup>4</sup>, apud Souza, 2003]. Na medida em que a diferença entre a ordem de interpolação dos deslocamentos e das densidades cresce, a ocorrência da instabilidade diminui. Sendo assim, a utilização de elementos de alta ordem podem prevenir tal fenômeno, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos.

Contudo, o emprego de elementos finitos, de alta ordem, causa um grande aumento no custo computacional. Neste trabalho, foi utilizado o elemento não conforme de Taylor, que apresenta um campo de deslocamento enriquecido pelas “funções bolha” e uma interpolação polinomial, de baixa ordem, não implicando em um grande aumento do custo computacional. A utilização desse elemento, aliada a técnicas de filtragem, pode prevenir o aparecimento da instabilidade de tabuleiro [Silva, 2012].

---

<sup>4</sup> Diaz, A.; Sigmund, O. *Checkerboard patterns in layout optimization*, **Structural Optimization**, v. 10, p. 40-45, 1995.

Outro método que pode ser utilizado, para evitar a instabilidade de tabuleiros, é a utilização de restrição de perímetro [Beckers, 1997]. Entretanto, esse método é de difícil implementação, ainda mais em problemas em três dimensões.

### 2.2.3 Filtro de densidade

O filtro de densidade é utilizado para evitar o fenômeno de instabilidade de tabuleiro e, também, tem a vantagem de eliminar a dependência de malha, de modo que a dependência é transferida para o raio utilizado para a filtragem.

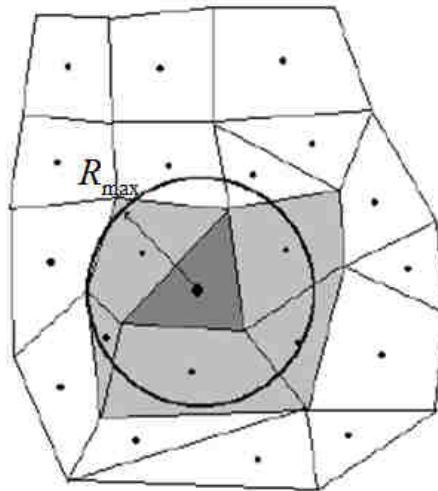
O modelo de filtro de densidade, utilizado neste trabalho, é chamado de IWSF (*individual weight spatial filter*) [Cardoso e Fonseca, 2003]. Tem a seguinte formulação:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\rho_e V_e + \sum_{j=1}^{nv} W_{ej} \rho_e V_e}{V_e + \sum_{j=1}^{nv} W_{ej} V_e} \quad 2.36$$

Onde:

$$W_{ej} = \frac{R_{\max} - R_{ij}}{R_{\max}} \quad 2.37$$

Nas equações acima,  $\hat{\alpha}$  é o valor filtrado,  $V_e$  é o volume do elemento  $i$ ,  $W$  é o peso,  $R_{\max}$  é raio determinado para filtragem, e  $nv$  é o número de elementos dentro do raio. Basicamente, esse filtro consiste em realizar uma média ponderada da densidade dos elementos, que estiverem dentro de um raio determinado, conforme pode ser visto na Figura 2.8. Outra vantagem da utilização do filtro de densidade IWSF é que este possibilita controlar a complexidade da topologia, sendo mais detalhada, utilizando-se valores menores para o raio do filtro e, menos detalhada, utilizando-se valores elevados.



Adaptado de Mosmann, 2003.

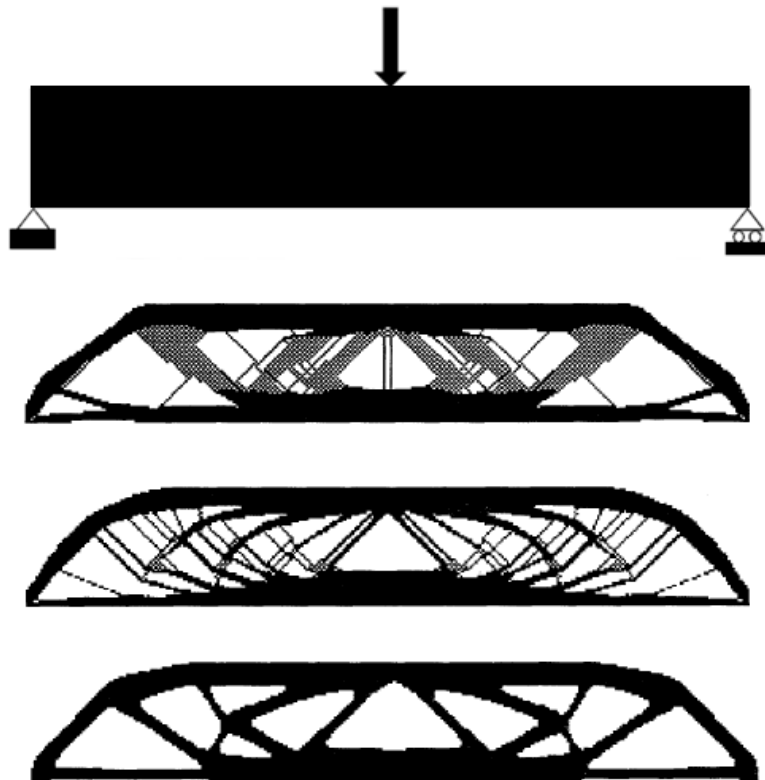
**Figura 2.8 – Filtro de densidade**

Uma desvantagem de empregar esse método de filtragem é que, como ele altera artificialmente a densidade dos elementos entre as iterações, a técnica de Limites Móveis tende a ter sua efetividade reduzida, visto que o código de otimização, neste trabalho é o SLP, deixa de ser o único responsável por modificar a densidade dos elementos entre as iterações. Assim, no mapeamento das últimas iterações, necessárias para o método dos Limites Móveis, uma alteração no sentido da variação da densidade pode ser devida ao filtro de densidades, e não à convergência do resultado.

Outro ponto que se deve levar em consideração, ao se utilizar esse tipo de filtro, é que, quanto maior for o raio utilizado para o filtro, maior também deve ser o limite de variação da densidade, permitido para o SLP, de modo que a variação artificial de densidade causada pelo filtro não seja superior à variação oriunda do processo de otimização.

#### **2.2.4 Dependência de malha**

A dependência de malha é um problema inerente à utilização do método dos elementos finitos, já que está estritamente ligada à discretização do domínio. O efeito é que para o mesmo problema de otimização topológica e mesmas condições de contorno, pode-se obter diferentes soluções, dependendo da discretização da malha, Figura 2.9.



Adaptado de Beckers, 1997.

**Figura 2.9 – Dependência de malha**

Intuitivamente, espera-se que, quanto maior o refino da malha de elementos finitos, a topologia ótima deve ser uma estrutura que descreva, com maior fidelidade, as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultante de uma malha mais grosseira [Souza, 2003].

### **2.2.5 Remoção de elementos de baixa densidade**

Durante o processo de otimização, que pode ocorrer com que a densidade de alguns elementos tenda a zero e, conseqüentemente, há um aumento da substancial na tensão local. Como a ideia de que densidades próximas de zero representem a ausência de material, esse fenômeno não é desejável.

Dessa maneira, se elementos de baixa densidade são utilizados para simular a ausência de material, mas para definição da medida global de tensão são considerados apenas materiais

sólidos, pode-se ter uma solução trivial ao problema de otimização. Por outro lado, se a medida global de tensão for definida, baseada nos elementos sólidos, e também nos de baixa densidade, pode ser necessário redefinir a tensão nos elementos de baixa densidade, para que ela seja inferior à dos elementos sólidos [Xia, et al., 2011].

Com o intuito de evitar os problemas, descritos anteriormente, foi implementado um código em que elementos de baixa densidade são removidos da estrutura. Essa remoção de elementos é empregada desde a primeira iteração, e a escolha dos elementos candidatos a serem removidos, é dada pela equação:

$$\rho_e \leq \text{média}(\rho) - (\text{média}(\rho) - \text{mínimo}(\rho))\eta_{BD} \quad 2.38$$

$\rho_e$  é a densidade do elemento avaliado,  $\text{média}(\rho)$  é a média da densidade de todos os elementos,  $\text{mínimo}(\rho)$  é a densidade do elemento de densidade mais baixa, e  $\eta_{BD}$  um critério pragmático para calibrar a remoção. A equação é válida para o intervalo  $0 \leq \eta_{BD} \leq 1$ , com  $\eta_{BD} = 1$  removendo apenas o elemento com densidade mínima e valores menores, aumentando a quantidade de elementos removidos.

Com a equação 2.38, apenas elementos, com densidade abaixo da média, vão ser considerados para remoção. Adicionalmente foi implementada uma restrição, para que os elementos somente sejam removidos se, após a sua remoção, a restrição de tensão,  $\sigma_Y$ , não seja ultrapassada em mais de 20%. Para isso foi utilizada a derivada da tensão para estimar a tensão nos demais elementos, após a remoção do elemento de baixa densidade:

$$\text{máx} \left( \frac{\sigma_P - \frac{\partial \sigma_P}{\partial \rho} \rho}{\sigma_Y} \right) \leq 1,2 \quad 2.39$$

Outra vantagem de remover elementos, de baixa densidade da estrutura, é a redução do tempo de processamento. Pois quando um elemento é removido da estrutura e consequentemente algum nó deixa de ser utilizado, o número de graus de liberdade da estrutura é reduzido, diminuindo também o custo computacional.



A desvantagem em utilizar esse método é que os elementos removidos não têm a possibilidade de serem repostos, portanto a função pode convergir para um mínimo local ao invés de um mínimo global.

### 2.2.6 Relaxação de tensão

O problema da singularidade da tensão surge quando a solução global não pertence a um domínio contínuo e, sim, a um subespaço degenerado. A abordagem para tratar da singularidade, relacionada aos concentradores de tensão, foi proposta por [Le et al., 2010]. Primeiramente, o problema de otimização discreto,  $\rho \in \{0,1\}$ , é relaxado para um problema de otimização contínuo,  $\rho \in [0,1]$ , que vai ser forçado a gerar resultados discretos, no final do processo de otimização. Para implementar essa estratégia, é necessário definir maneiras de interpolar a rigidez, o volume e a tensão, entre os seus valores mínimos e máximos.

Para penalizar o tensor constitutivo e tensão, são introduzidos os termos  $n_c$ ,  $n_v$  e  $n_t$ , respectivamente

$$\mathbf{C} = n_c(\rho)\mathbf{C}_0 \quad 2.40$$

$$V = \int_{\Omega} n_v(\rho)dv_0 \quad 2.41$$

$$\sigma_r = n_t(\rho)\mathbf{C}_0\boldsymbol{\varepsilon} \quad 2.42$$

sendo que o índice 0 refere-se ao valor inicial (sem penalização) das variáveis, e que devem satisfazer as seguintes restrições:

- $n_c$ ,  $n_v$  e  $n_t$  devem ser funções que crescem monotonicamente;
- $0 < n_c(\rho) \leq \rho$ ,  $0 < n_v(\rho) \leq \rho$  e  $0 < n_t(\rho) \leq \rho$  para  $0 < \rho < 1$ ;
- $n_c(1) = 1$ ,  $n_v(1) = 1$  e  $n_t(1) = 1$
- $n_c(0) = 0$ ,  $n_v(0) = 0$  e  $n_t(0) = 0$

A penalização da matriz de rigidez e do volume é responsável por reduzir a ocorrência de densidade intermediária. Por exemplo, considerando-se  $n_c(\rho) = \rho^p$  e  $n_v(\rho) = \rho$  é

equivalente a utilizar o método SIMP, descrito anteriormente, onde somente a rigidez é penalizada [Le et al., 2010].

## 2.3 Problema de otimização

### 2.3.1 Programação linear sequencial

O objetivo da utilização da programação linear sequencial é obter aproximações lineares de uma função objetivo e restrições não lineares; desse modo, a derivada da função objetivo será constante. Isso implica que o ponto máximo se encontra na fronteira do domínio utilizado. Na sua forma-padrão, a programação linear é apresentada como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f &= \mathbf{d}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a } \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad 2.43$$

onde  $\mathbf{d}$  é um vetor, com o número de variáveis de projeto;  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times m$ , sendo  $m$  o número de restrições e  $\mathbf{b}$  um vetor  $m \times 1$ .

As aproximações lineares da função objetivo e da restrição são obtidas mediante a utilização de expansão em série de Taylor, que tem a seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!} (x - x^*)^n \quad 2.44$$

onde  $x^*$  é um ponto conhecido próximo de  $x$ . Entretanto, a programação linear utiliza somente o primeiro e o segundo termos dessa expansão, ou seja, derivadas de ordem maior que um não são consideradas.

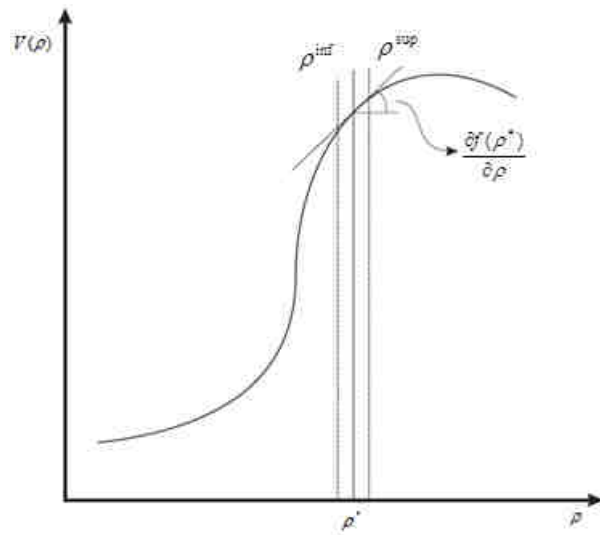
No caso, em estudo, a variável de projeto é a densidade dos elementos,  $\rho$ , e a função que está sendo minimizada é o volume  $V$ :

$$V(\rho) = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad 2.45$$

Dessa forma, o problema de otimização linear da geometria ilustrada na Figura 2.10, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } V(\rho) &= V(\rho^*) + (\rho - \rho^*) \frac{\partial V(\rho^*)}{\partial \rho} \\ \text{onde } \rho^{\text{inf}} &\leq \rho - \rho^* \leq \rho^{\text{sup}} \\ &\text{e } 0 \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad 2.46$$

onde  $\rho^{\text{inf}}$  e  $\rho^{\text{sup}}$  são os limites inferior e superior, respectivamente, que são atualizados a cada iteração.



**Figura 2.10 – Programação linear sequencial**

Entretanto, há também, a restrição de tensão, que depende da densidade dos elementos, que deve ser incorporada à formulação:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } V(\rho) &= V(\rho^*) + (\rho - \rho^*) \frac{\partial V(\rho^*)}{\partial \rho} \\ \text{sujeito a } \sigma(\rho^*) &+ (\rho - \rho^*) \frac{\partial \sigma(\rho^*)}{\partial \rho} \leq \sigma_Y \\ \text{onde } \rho^{\text{inf}} &\leq \rho - \rho^* \leq \rho^{\text{sup}} \\ &\text{e } 0 \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad 2.47$$

sendo  $\sigma_Y$  a tensão máxima permitida para qualquer elemento da estrutura.

### 2.3.2 Limites móveis

Os limites  $\rho^{\text{inf}}$  e  $\rho^{\text{sup}}$  serão diferentes a cada iteração, visto que o valor central,  $\rho^*$  (para o qual é calculado a função objetivo e restrições) irá sendo atualizado. Pode-se utilizar um valor fixo para o intervalo  $[\rho^{\text{inf}}, \rho^{\text{sup}}]$  ou o tamanho do intervalo pode ser alterado, baseado nas iterações anteriores, o que é chamado de limites móveis.

Foi avaliado o uso dos limites móveis, que são calculados, de uma maneira bastante simples, através da análise do histórico das três últimas iterações. Caso, após três iterações consecutivas, o sinal da sensibilidade permaneça inalterado, há um acréscimo de 20% no limite superior e decréscimo de 20% no limite inferior e, caso o sinal da sensibilidade se altere, há um decréscimo de 20% no limite superior e acréscimo de 20% no limite inferior.

Desse modo, quando se estiver próximo ao valor máximo de uma função, o intervalo englobado pelos limites irá diminuir, o que contribuirá para a convergência do resultado. Já em regiões distantes dos pontos máximos da função o intervalo aumenta, o que teoricamente reduzirá o número de iterações necessárias para se chegar ao ponto ótimo.

### 2.3.3 Derivada da função objetivo

A função objetivo é o volume, e já tem a variável de projeto explícita:

$$V = \sum_{i=1}^{n_e} \rho_e V_e \quad 2.48$$

Sendo  $\rho_e$  a densidade de cada elemento e  $V_e$  o volume. Assim, a derivada da função objetivo é constante e equivale ao volume de cada elemento:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^{n_e} V_e \quad 2.49$$

Caso seja considerada a densidade penalizada, apresentada na equação 2.35, a derivada da função objetivo tem a forma:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \sum_{i=1}^{n_e} [p(\rho_e^{p-1}) + \alpha(1 - 2\rho_e)] V_e \quad 2.50$$

Nota-se que, para  $p=1$  e  $\alpha=0$ , que é o caso sem penalização da densidade, as equações 2.49 e 2.50 são equivalentes.

### 2.3.4 Medida global de tensão

No problema de otimização topológica com restrição de tensão, utilizando-se o método dos elementos finitos idealmente, seria utilizada uma restrição de tensão para cada elemento da estrutura, conforme apresentado na equação 2.47. Isso implica que o número de restrições será bastante elevado, tanto quantos elementos houver na malha.

Existe uma significativa dificuldade em solucionar problemas de otimização estrutural com restrição de tensão. A maior causa para tal dificuldade é o fato de que a tensão é um parâmetro local; assim, cada ponto da estrutura estudada deve ter a tensão inferior à restrição imposta. Entretanto, se cada tensão local for tratada como uma restrição na otimização, haverá um custo computacional muito grande. Uma maneira eficiente de reduzir o custo computacional é empregar uma medida global de tensão. Contudo, apesar de uma medida global de tensão reduzir significativamente o custo computacional, também torna mais difícil o controle dos picos de tensão e concentradores de tensão [Xia, 2011].

Para definir uma medida global de tensão, primeiramente, considera-se o problema original, com uma restrição para cada elemento:

$$\sigma_e = \sigma_Y, e=1,2 \dots n \quad 2.51$$

onde  $\sigma_e$  é a medida de tensão do elemento, e  $n$  é o número total de elementos da estrutura. Essas  $n$  restrições podem ser reescritas em termos de, apenas, uma restrição:

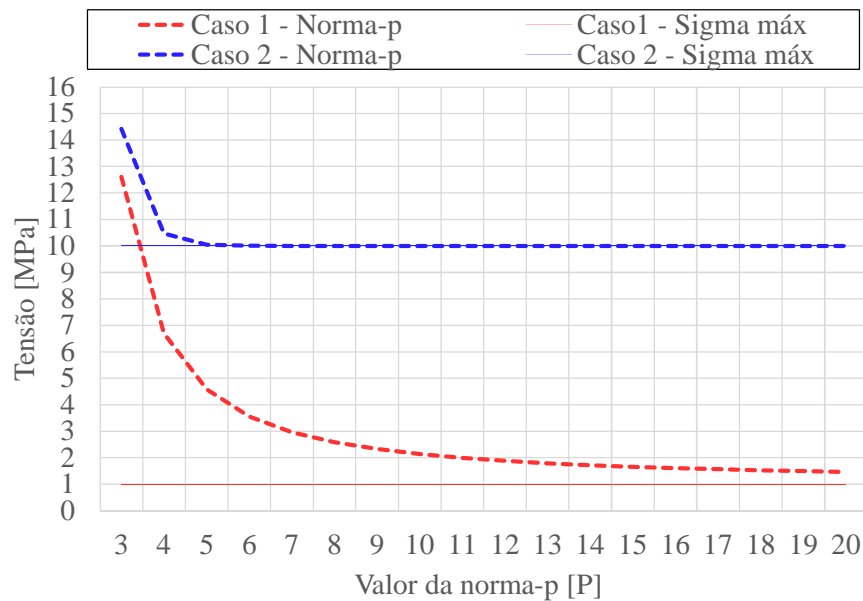
$$\max_{e=1..n} (\sigma_e(\rho)) \leq \sigma_Y \quad 2.52$$

Ou seja: se o elemento com a tensão mais elevada estiver respeitando a restrição, consequentemente todos os demais também o estarão. Entretanto, a função *máximo* não é diferenciável; assim, outras soluções devem ser consideradas como, por exemplo, a norma-p, ou as funções de Kreisselmeier-Steinhauser (KS). Neste trabalho, será utilizada a norma-p, conforme proposto por [Yang, 1996]:

$$\sigma_{NP} = \left( \sum_{e=1}^n \sigma_e^P \right)^{1/P} \leq \sigma_Y \quad 2.53$$

onde  $P$  é o valor da norma, e  $\sigma_{NP}$  a medida de tensão global. Quando  $P \rightarrow \infty$ , a tensão  $\sigma_{NP}$  tende ao valor máximo de tensão da estrutura,  $\sigma_{\max}$ , e não há suavização. Já no outro extremo, quando  $P \rightarrow 1$  há maior suavização; entretanto, a tensão  $\sigma_{NP}$  se distancia significativamente do valor máximo de tensão da estrutura. A Figura 2.11 mostra como varia  $\sigma_{NP}$  em relação ao expoente  $P$ :

- Caso 1 - 2000 elementos finitos, com tensão de 1 MPa,;
- Caso 2 - 1999 elementos finitos, com tensão de 1 MPa, e 1 elemento, com tensão de 10 MPa.



**Figura 2.11 – Comportamento norma-p**

Fica claro observar que é necessário um valor maior para  $P$ , a fim de modelar a tensão máxima, quando a tensão é homogênea. Entretanto, quando existem poucos elementos com tensão mais elevada que os demais, como no caso onde há concentradores de tensão, a tensão máxima consegue ser facilmente modelada por essa medida.

Conforme o processo iterativo vai ocorrendo, as tensões calculadas nos elementos tendem a se tornar mais homogêneas; dessa maneira, quanto maior o valor utilizado para norma-p, melhor vai ser a representação da tensão máxima e, por consequência, a sua derivada, que é utilizada como entrada para a programação linear sequencial.

### 2.3.5 Medida global de tensão normalizada

A norma-p da medida global de tensão não tem significado físico; assim, é inadequado impor uma restrição de tensão máxima, usando-se a norma-p, pois não há uma expressão matemática de  $\sigma_{\max}$  em termos de  $\sigma_{NP}$ . Para solucionar esse problema, Le et al. [Le et al., 2010] propuseram uma medida de tensão normalizada, para melhor aproximar a tensão máxima

$$\sigma_{\max} \approx c\sigma_{NP} \leq \sigma_Y \quad 2.54$$

onde  $c$  é calculado a cada iteração  $i \geq 1$  e é dado por:

$$c^i = \alpha^i \frac{\sigma_{\max}^i}{\sigma_{NP}^i} + (1 - \psi^i) c^{i-1} \quad 2.55$$

O parâmetro  $\psi^i \in (0,1]$  controla a variação de  $c^i$  entre as iterações. Fica evidente que  $c^i$  é um parâmetro para corrigir a diferença entre a tensão máxima na estrutura e o valor de tensão obtido pela norma-p.

Pode-se perceber que  $c\sigma_{NP} \leq \bar{\sigma}$  não é diferenciável, pois  $c$  varia de uma maneira descontínua e resulta em um problema ligeiramente diferente a cada iteração. Entretanto, conforme o processo de iteração converge, a diferença entre os sucessivos problemas diminui,

e, portanto,  $c$  converge, reduzindo assim o efeito da não diferenciabilidade e inconsistência [Le et al., 2010].

### 2.3.6 Derivada das restrições

Para reduzir o tempo computacional, é utilizada uma medida de tensão global, em vez de uma restrição local para cada nó, dada por:

$$\sigma_{NP} = c^i \left( \sum_{e=1}^{n_{nó}} \sigma_{vm_n}^P \right)^{1/P} \quad 2.56$$

Onde  $\sigma_{vm_n}$  é tensão de von Mises suavizada para posição do nó do elemento. Aplicando-se a regra da cadeia para derivar a equação 2.56 em relação à densidade dos elementos, chega-se a:

$$\frac{\partial \sigma_{NP}}{\partial \rho_i} = c^i \left( \sum_{n=1}^{n_{nó}} \sigma_{vm_n}^P \right)^{1/P-1} \left( \sum_{n=1}^{n_{nó}} \sigma_{vm_n}^{P-1} \frac{\partial \sigma_{vm_n}}{\partial \rho_i} \right) \quad 2.57$$

A tensão equivalente de von Mises é, usualmente, escrita em função das tensões nas direções principais:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{2}} \quad 2.58$$

Entretanto, uma formulação da equação de von Mises, baseada diretamente no vetor deslocamento, é mais adequada, pois facilita o cálculo da derivada [Sant`Anna, 2000; Guilherme, 2006; Silva, 2012]:

$$\sigma_{vm_e} = \sqrt{\mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{u}_e} \quad 2.59$$



em que  $\mathbf{u}_e$  é o vetor deslocamento de cada elemento, e  $\mathbf{M}_e$  é a matriz de massa do elemento, dada por

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{V} \mathbf{T} \quad 2.60$$

sendo que  $\mathbf{V}$  é a matriz com os termos para cálculo da tensão de von Mises:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad 2.61$$

e  $\mathbf{T}$  é o componente que relaciona as tensões com os deslocamentos:

$$\mathbf{T} = n_T(\rho) \mathbf{C}^0 \mathbf{L} \quad 2.62$$

os termos  $n_T(\rho) \mathbf{C}^0$  são a parametrização do tensor de tensão, conforme a equação 2.42, e  $\mathbf{C}^0$  tensor constitutivo não penalizado, conforme a equação 2.6. Substituindo-se as equações 2.60, 2.61 e 2.62 na 2.59, obtém-se:

$$\sigma_{vm_e} = \sqrt{n_T(\rho)^2 \mathbf{u}_e^T \mathbf{L}^T \mathbf{C}^0 \mathbf{V} \mathbf{C}^0 \mathbf{L} \mathbf{u}_e} \quad 2.63$$

A equação 2.63, relaciona a tensão de von Mises com a densidade, e é usada para calcular a sensibilidade. As tensões de von Mises são calculadas nos oito pontos de Gauss, no interior dos elementos; assim, é mais conveniente reorganizar a equação para:

$$\sigma_{vm_{kg}} = \sqrt{n_T(\rho)^2 \mathbf{u}_{eg}^T \mathbf{L}_g^T \mathbf{C}^0 \mathbf{V} \mathbf{C}^0 \mathbf{L}_g \mathbf{u}_{eg}} \quad 2.64$$

Derivando-se a equação 2.64 em relação à densidade de um elemento  $k$ :

$$\frac{\partial \sigma_{vm_{eg}}}{\partial \rho_k} = \frac{\frac{\partial [n_T(\rho)^2]}{\partial \rho_k} \mathbf{u}_{eg}^T \mathbf{L}_g^T \mathbf{C}^0 \mathbf{V} \mathbf{C}^0 \mathbf{L}_g \mathbf{u}_{eg} + 2n_T(\rho)^2 \mathbf{u}_{eg}^T \mathbf{L}_g^T \mathbf{C}^0 \mathbf{V} \mathbf{C}^0 \mathbf{L}_g \frac{\partial \mathbf{u}_{eg}}{\partial \rho_k}}{2\sqrt{n_T(\rho)^2 \mathbf{u}_{eg}^T \mathbf{L}_g^T \mathbf{C}^0 \mathbf{V} \mathbf{C}^0 \mathbf{L}_g \mathbf{u}_{eg}}} \quad 2.65$$

Nessa equação, aparece o termo  $\frac{\partial \mathbf{u}_{eg}}{\partial \rho_k}$  referente à derivada do deslocamento em relação à densidade. Na equação 2.16, foi apresentado que o deslocamento pode ser dividido em dois componentes: um referente à parte conforme das equações de interpolação do elemento, e outra referente à função bolha do elemento não conforme:

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{e_c} & | & \mathbf{u}_{e_{NC}} \end{bmatrix} \quad 2.66$$

O deslocamento dos modos não conformes é dado pela equação 2.23, e sua derivada tem a forma:

$$\frac{\partial u_{e_{NC}}}{\partial \rho_k} = - \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{C_e}^{-1}}{\partial \rho_k} \mathbf{K}_{B_e}^T \mathbf{u}_{e_c} + \mathbf{K}_{C_e}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{B_e}^T}{\partial \rho_k} \mathbf{u}_{e_c} + \mathbf{K}_{C_e}^{-1} \mathbf{K}_{B_e}^T \frac{\partial \mathbf{u}_{e_c}}{\partial \rho_k} \right) \quad 2.67$$

A penalização do tensor constitutivo é dada pela equação 2.40 e portanto

$$\mathbf{K}_{C_e} = n_c(\rho) \mathbf{K}_{C_e}^0 \quad 2.68$$

$$\mathbf{K}_{B_e} = n_c(\rho) \mathbf{K}_{B_e}^0 \quad 2.69$$

sendo que o índice 0 se refere a matriz de rigidez gerada utilizando um tensor constitutivo não penalizado. As derivadas dos tensores constitutivos podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{C_e}^{-1}}{\partial \rho_k} = \frac{\partial n_c(\rho)^{-1}}{\partial \rho_k} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} = - \frac{\partial n_c(\rho)}{\partial \rho_k} (n_c(\rho))^{-2} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \quad 2.70$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{B_e}^{-T}}{\partial \rho_k} = \frac{\partial n_c(\rho)}{\partial \rho_k} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \quad 2.71$$

Substituindo-se as equações 2.70 e 2.71, na equação 2.67:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{e_{NC}}}{\partial \rho_k} = & - \left( \frac{\partial n_c(\rho)}{\partial \rho_k} (n_c(\rho))^{-2} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \right) (n_c(\rho) \mathbf{K}_{B_e}^T) \mathbf{u}_{e_c} + \left( \frac{\partial n_c(\rho)}{\partial \rho_k} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \right) (n_c(\rho)^{-1} \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}}) \mathbf{u}_{e_c} \\ & + \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \frac{\partial \mathbf{u}_{e_c}}{\partial \rho_k} \end{aligned} \quad 2.72$$

Fica claro que os dois primeiros termos da equação se anulam; assim:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_{NC}}}{\partial \rho_k} = \mathbf{K}_{C_e}^{0^{-1}} \mathbf{K}_{B_e}^{0^T} \frac{\partial \mathbf{u}_{e_c}}{\partial \rho_k} \quad 2.73$$

A relação entre a densidade e o deslocamento é dada pela equação de equilíbrio. Sendo assim, os deslocamentos nodais do elemento são dados por

$$\mathbf{u}_{e_c} = \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad 2.74$$

onde  $\mathbf{L}_e$  é dado pela equação 2.17. A deriva da equação acima é

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_c}}{\partial \rho_k} = \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_k} \mathbf{f} \quad 2.75$$

Como  $\mathbf{K}$  é uma matriz quadrada, utilizando-se as propriedades da álgebra linear, a sua derivada é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_k} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_k} \mathbf{K}^{-1} \quad 2.76$$

Como  $\mathbf{K}$  é diretamente proporcional ao tensor constitutivo, pode-se finalmente escrever a derivada do deslocamento como

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e_c}}{\partial \rho_k} = \frac{\partial n_c(\rho)}{\partial \rho_k} \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}^{0^{-1}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad 2.77$$

### 2.3.7 Modelo substituto

A utilização de modelos substitutos tem o intuito de acelerar o processo de otimização através do emprego de modelos aproximados da função objetivo e das restrições, que teriam um custo computacional bastante inferior ao da função não aproximada. Muitas vezes os modelos substitutos também são chamados de superfície de resposta, dependendo da metodologia utilizada.

O modelo substituto é baseado em dados gerados por um modelo que apresente alta fidelidade ao problema proposto, sendo capaz de prover, rapidamente, aproximações da função objetivo e das restrições nos pontos em estudo, fazendo com que o custo computacional do cálculo das derivadas seja mais praticável [Queipo *et al.*, 2005]. Múltiplos modelos substitutos podem ser consistentes com os dados em análise. Para um dado problema pode haver preferência em se utilizar um ao outro, mas geralmente não se pode dizer *a priori* qual será o melhor modelo [Alexander *et al.*, 2009].

Os modelos substitutos podem ser separados em dois grupos principais:

- Paramétrico - utiliza um modelo para prever o comportamento global da função através de relações entre as variáveis de projeto e as respostas obtidas em pontos conhecidos;
- Não paramétrico - utiliza diversos modelos locais mais simples para prever o comportamento da função em regiões próximas aos pontos conhecidos.

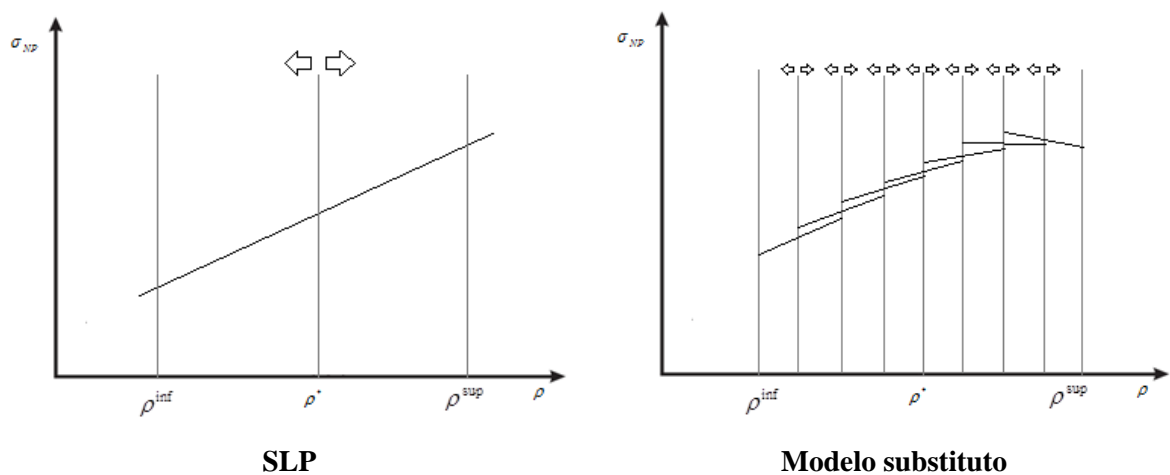
Neste trabalho é empregado um modelo substituto do tipo não-paramétrico. Há dois métodos não paramétricos bastante disseminados, onde a convergência para ótimos locais do problema original é mais provável. São chamados de: *Approximation Model Management Framework* (AMMF), que explora a utilização de intervalos de confiança próximas aos pontos onde os resultados são conhecidos; e o *Surrogate Management Framework* (SMF) que utiliza o método de busca de padrões (*pattern search*).

O método escolhido para ser utilizado é o AMMF, pela facilidade de implementação e pela garantia de convergência para ótimos locais. Esse método é geralmente associado ao uso de algoritmos que se baseiam em gradientes, e conta com a suposição de que o modelo

substituto é exato o suficiente para encontrar a direção que trará melhoras para o modelo original.

O método AMMF tem as mesmas propriedades de convergência dos métodos clássicos que utilizam intervalos de confiança. Utilizando aproximações de primeira ordem, o método é convergente para ótimos locais quando utilizado em funções contínuas e com condições de contorno corretamente aplicadas. Por mais que a garantia da convergência do algoritmo seja algo válido, isso vem com o custo de que é preciso o cálculo das derivadas a cada iteração [Queipo *et al.*, 2005].

Na maneira como é convencionalmente utilizado, o SLP usa um intervalo de confiança, permitido para a variação da densidade do elemento, tanto para cima quando para baixo, ou seja, a cada iteração a densidade dos elementos sai do valor central e se desloca para o valor máximo ou mínimo permitidos. Entretanto, esse seria o caso ideal, se houvesse apenas uma variável sendo otimizada. Como nesse caso são muitas variáveis de projeto, pode ser que a melhor solução para uma dada iteração não seja com as densidades indo para os limites máximos ou mínimos, mas ficando em algum ponto intermediário entre eles. Nesse ponto o emprego do modelo substituo permite subdivisões do intervalo de confiança, que tem como consequência que a variável de projeto ter efetivamente valores intermediárias. A Figura 2.12 ilustra o comportamento da variável de projeto no SLP e no modelo substituo.



**Figura 2.12 – Comportamento da variável de projeto**

Neste trabalho propõe-se que a cada iteração seja calculada a tensão, derivada da tensão e sensibilidades da função objetivo e da restrição conforme detalhado nas seções anteriores. Logo em seguida, são feita  $n_{it}$  subiterações, onde o modelo substituto.

O intervalo de confiança da densidade é particionado em  $n_{it}$  intervalos:

$$\rho^{it} = \left( \frac{\rho^{\text{sup}} - \rho^{\text{inf}}}{n_{it}} \right) \quad 2.78$$

Assim, dentro de cada iteração, vai haver  $n_{it}$  subiterações, mas o intervalo de confiança permanece tendo o mesmo tamanho do que com o uso do SLP tradicional. A variação de densidade, em cada subiteração é dada por

$$\left( \rho_{it-1}^* - \rho^{it} \right) \leq \rho_{it}^* \leq \left( \rho_{it-1}^* + \rho^{it} \right) \text{ para } it=1,2..n_{it} \quad 2.79$$

sendo que para  $it=1$ ,  $\rho_{i-1}^* = \rho^*$

O valor da tensão em cada elemento também é atualizado para a nova densidade  $\rho_{it}^*$ , a cada subiteração, utilizando uma aproximação linear a partir das derivadas já calculadas. Presume-se que no intervalo  $[\rho^{\text{inf}}, \rho^{\text{sup}}]$ , a derivada da tensão em relação a densidade dos elementos tem valor constante. Sendo assim

$$\sigma_{it} = \sigma^* + (\rho_{it}^* - \rho^*) \frac{\partial \sigma_{vm}(\rho^*)}{\partial \rho} \quad 2.80$$

Com as informações das equações 2.79 e 2.80, a sensibilidade da restrição é por

$$\frac{\partial \sigma_{itNP}}{\partial \rho_j} = \frac{\sigma_{it\text{max}}}{\sigma_{itNP}} \left( \sum_{n=1}^{n_{\text{no}}} \sigma_{itn}^P \right)^{1/P-1} \left( \sum_{n=1}^{n_{\text{no}}} \sigma_{itn}^{P-1} \frac{\partial \sigma_{vm_i}}{\partial \rho_j} \right) \quad 2.81$$

onde o índice  $it$  se refere à subiteração e o índice  $i$  à iteração.

Vale ressaltar que durante as subiterações do modelo substituto, o único parâmetro que permanece constante é a derivada da tensão em relação a densidade,  $\frac{\partial \sigma_{vm_i}}{\partial \rho_j}$ .

A programação linear sequencial é rodada  $n_{it}$  vezes dentro de cada iteração. Isso torna possível que as variáveis de projeto finalizem a iteração com valores intermediários de densidade, no intervalo  $[\rho^{\text{inf}}, \rho^{\text{sup}}]$ , e não somente os valores extremos.

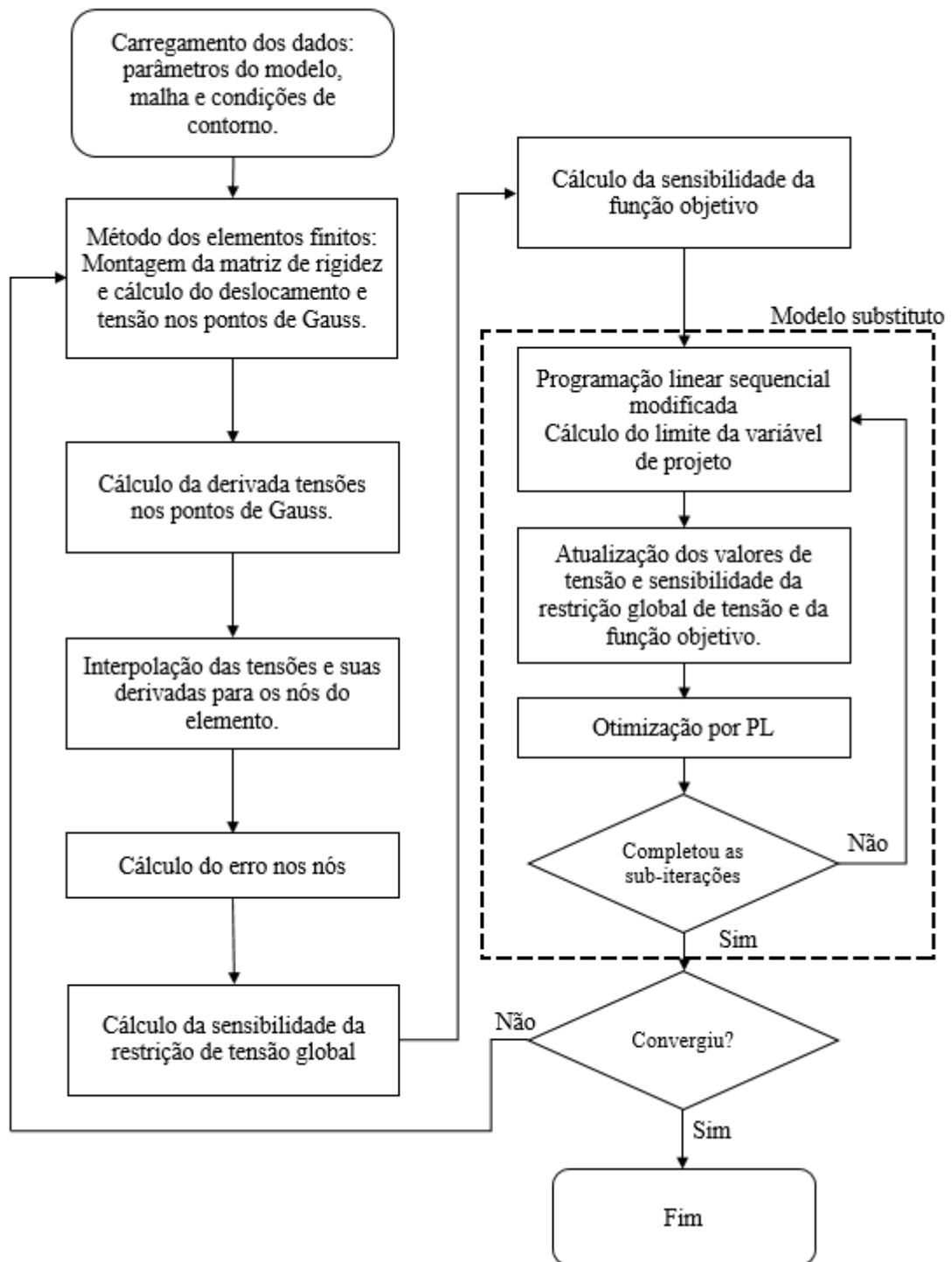
A utilização de uma restrição global tensão cria uma peculiaridade neste problema de otimização, pois muitas variáveis de projeto vão influenciar um único valor de restrição. Por exemplo, se a malha for discretizada em 4.000 elementos e tiver cerca de 8.000 nós será necessário calcular cerca de 24.000.000 derivadas a cada iteração, ou seja, muitas variáveis são responsáveis por determinar um único parâmetro, a medida de tensão global. Portanto a o fato de cada uma das variáveis de projeto ter a flexibilidade de não terminar cada iteração somente no valor máximo ou mínimo do intervalo de confiança, tem um grande impacto na redução do número de iterações necessárias para a convergência do problema.

## 2.4 Implementação do algoritmo

Foi implementado um algoritmo, para resolver o problema de minimização de volume, com restrição de tensão em estruturas tridimensionais. Todo o código foi implementado no MATLAB. Para gerar as malhas das estruturas usadas como dados de entrada para o algoritmo de otimização, foi utilizado o módulo de pré-processamento do *software GiD*. A Figura 2.13 apresenta um fluxograma com as principais etapas do algoritmo de otimização.

A malha é gerada no *GiD*, contendo as coordenadas nodais, conectividade entre os nós, e nós contendo condições de contorno. Esses dados são utilizados como entrada no código do MATLAB, para gerar as matrizes de coordenadas, conectividade, restrições e força, que por sua vez, são utilizadas na análise pelo método dos elementos finitos para calcular as seis componentes de tensão ( $xx$ ,  $yy$ ,  $zz$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $xy$ ) e também a tensão de von Mises.

Com os dados de saída do método dos elementos finitos, calcula-se o erro da estimativa utilizando-se as seis componentes de tensão, e também as derivadas das tensões de von Mises em relação à densidade dos elementos. O erro calculado em energia é convertido para tensão e, então, somado à tensão de von Mises nodal, para o cálculo da medida de tensão global, através da norma-p.



**Figura 2.13 – Fluxograma do processo de otimização**

São calculadas as sensibilidades da restrição de tensão global e da função objetivo, em relação à densidade, que são utilizadas como entrada no código de otimização. Em seguida,



inicia-se uma sub-rotina em que os limites de variação da densidade são divididos em várias partes menores, e o código *linprog* do MATLAB é utilizado diversas vezes na mesma iteração.

Para a maioria dos casos avaliados, esse método de otimização converge em poucas iterações, geralmente menos de 5, entretanto, ainda com muitos elementos com densidade intermediária; sendo assim, o processo de otimização é continuado até que um número suficiente de elementos tenha sido removido da estrutura.

### 3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados resultados para quatro casos. No primeiro caso é feita uma breve comparação da influência do uso do modelo substituto, e também da remoção de elementos de baixa densidade em relação à não utilização desses métodos.

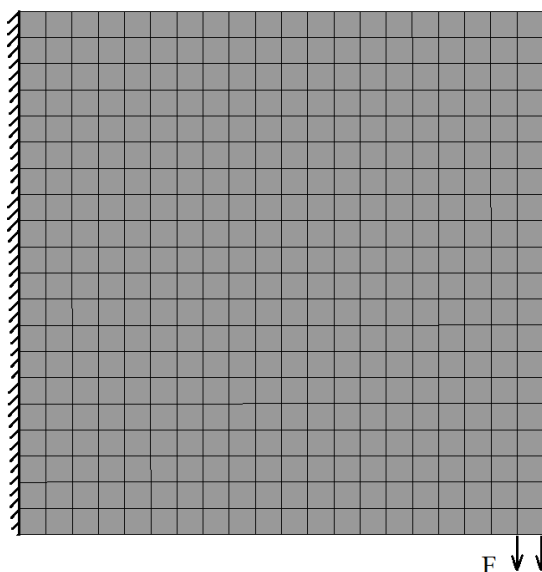
No caso 2 é considerada uma estrutura com um concentrador de tensão, mostrando o desempenho da formulação em contornar esse tipo de singularidade. Também é avaliado o efeito do uso do estimador de erro sobre os resultados, as estruturas finais são comparadas com as obtidas por outros autores.

Nos casos 3 e 4 são avaliadas estruturas em três dimensões.

#### 3.1 Caso 1 - Placa

Nesta seção são testados diferentes valores para os parâmetros configuráveis, de maneira a identificar a influência desses parâmetros no processo de otimização. Os valores iniciais para a penalização de densidade e de tensão utilizados são baseados nos trabalhos de Silva [Silva, 2012] e Le [Le *et al.*, 2011]. A geometria e as condições de contorno utilizadas para essa comparação são apresentadas na Figura 3.1. Tendo as dimensões 20 mm x 20 mm x 1 mm, sendo que  $F = 1,5 N$ ,  $E = 1 MPa$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\sigma_y = 10 MPa$ .

A estrutura em duas dimensões é simulada com uma camada de elementos na espessura.



**Figura 3.1 – Caso 1 – Geometria e condições de contorno**

### 3.1.1 Avaliação do uso do modelo substituto

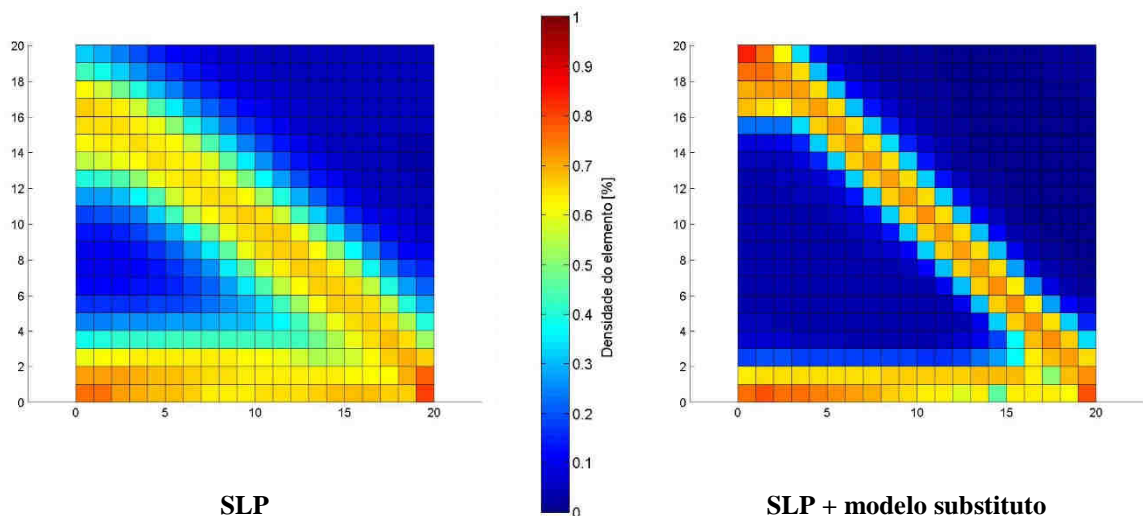
Nesta seção, vai ser comparado o desempenho da utilização do SLP juntamente com limites móveis, e do SLP em conjunto com o modelo substituto. Quando se utiliza o modelo substituto, a variação da densidade entre as subiterações pode ser bastante pequena, e o número de subiterações grande, portanto, o uso de limites móveis não traz nenhum benefício ao ser utilizado em conjunto com o modelo substituto.

Conforme apresentado nas sessões anteriores, foram descritas 6 metodologias dependentes de parâmetros configuráveis empregadas na otimização topológica. Para motivos de comparação os demais parâmetros são mantidos iguais conforme a Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 – Caso 1 - Parâmetros utilizados**

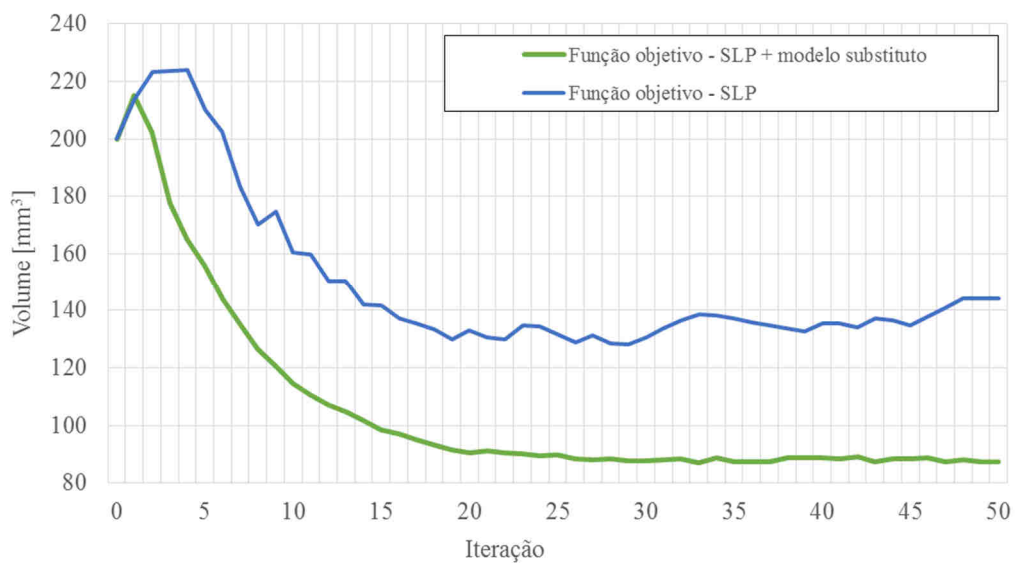
Descrição	Parâmetro	Valor
Penalização de densidade intermediária	$\alpha$ e $p$	0 e 8
Filtro de densidade	$R_{max}$	1
Remoção de elemento de baixa densidade	$\eta_{BD}$	Não utilizado
Penalização do tensor constitutivo	$n_c$	3
Penalização de tensão	$n_T$	0,5
Medida global de tensão	$P$	12

A Figura 3.1 mostra a estrutura final utilizando cada uma das metodologias para o processo de otimização. É possível perceber que as estruturas finais apresentam alguma semelhança, porém é evidente que a estrutura obtida com o uso do modelo substituto tem as áreas com presença e ausência de elementos bem mais definidas.



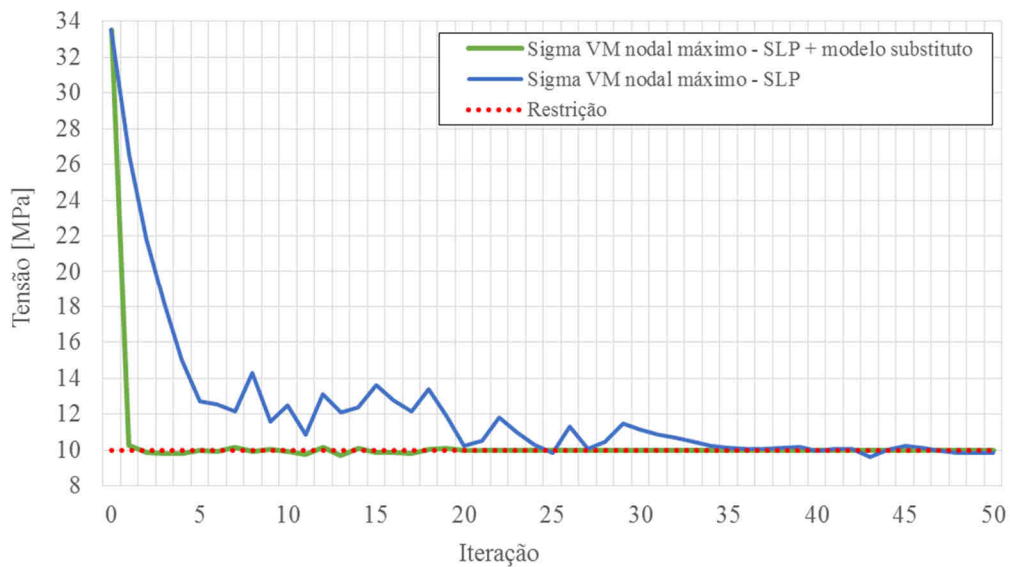
**Figura 3.2 – Caso 1 – Comparação estrutura final (SLP x SLP + modelo substituo)**

Para comparação no Apêndice A há figuras da estrutura mostrando a densidade dos elementos em cada iteração para os dois casos. Quando o modelo substituto é considerado, a estrutura já tem sua forma definida após a iteração 20, não tendo mudanças significativas nas iterações seguintes. Já aplicando o método SLP da forma convencional juntamente com o método de limites móveis, mesmo com 50 iterações parece que a estrutura ainda não convergiu completamente para o resultado final, apresentando barras mais grosseiras, com a densidade bastante abaixo da máxima. A Figura 3.3 apresenta um comparativo da convergência da função objetivo, evidenciando esse fator.



**Figura 3.3 – Caso 1 – Comparação da convergência da função objetivo (SLP x SLP + modelo substituto)**

Comparando a evolução da tensão máxima nodal em cada um dos casos, em relação a restrição aplicada, o uso do modelo substituto também apresentou superioridade, visto que logo nas iterações iniciais as estruturas geradas já respeitam as condições impostas. A Figura 3.4 mostra a convergência da tensão nodal máxima para ambos casos.



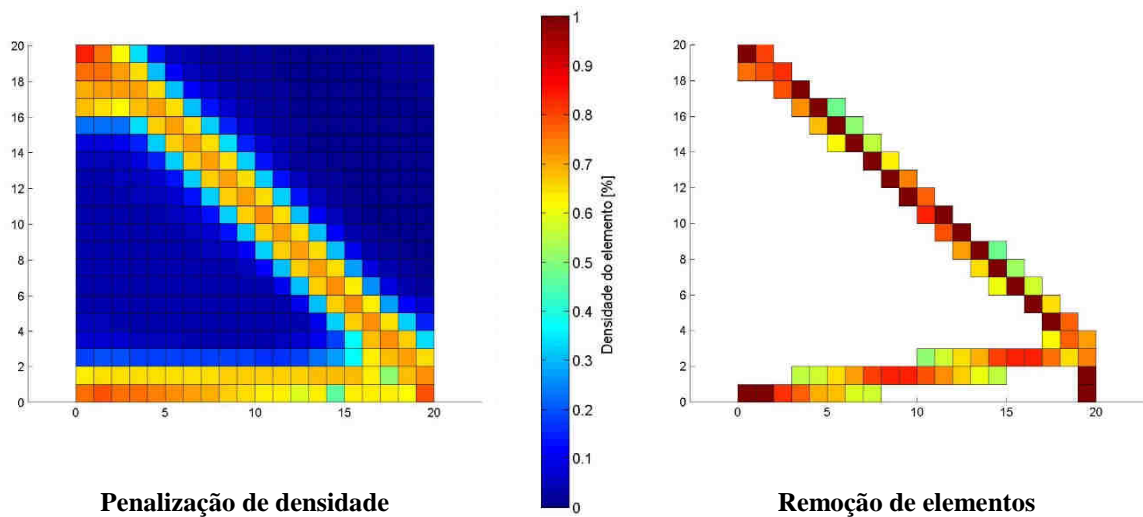
**Figura 3.4 – Caso 1 – Comparação da convergência da tensão nodal máxima (SLP x SLP + modelo substituo)**

O tempo de cada iteração é praticamente o mesmo utilizando cada um dos métodos, fica assim evidente que a utilização do modelo substituto reduz significativamente o número de iterações e conseqüentemente o custo computacional, melhorando o desempenho do processo de otimização.

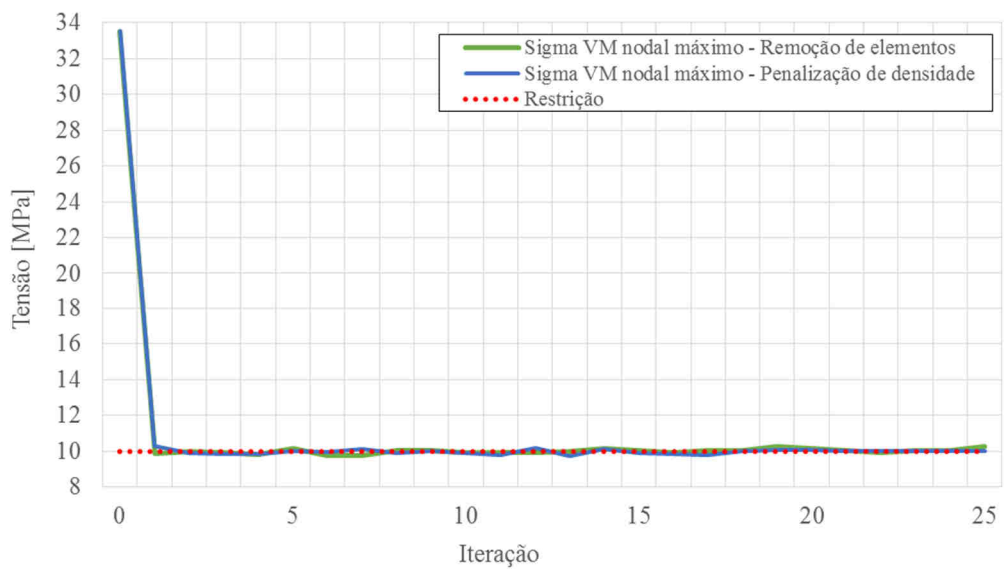
### 3.1.2 Penalização de densidade versus remoção de elementos de baixa densidade

Nesta seção é feita uma breve comparação do desempenho da utilização do método de remoção de elementos de baixa densidade, em oposição ao método de penalização de densidades. Os parâmetros considerados são conforme a Tabela 3.1, e em ambos os casos o modelo substituto é empregado.

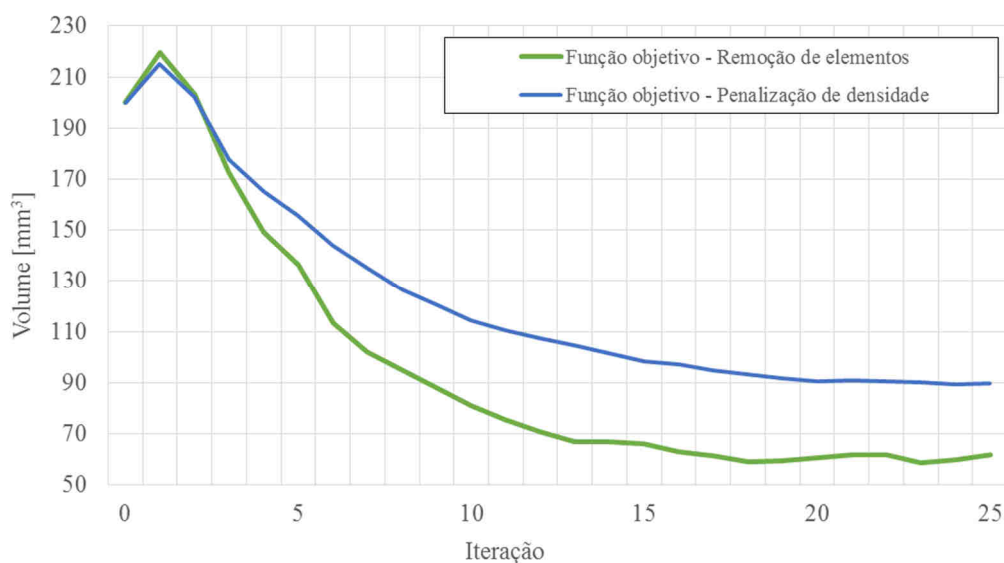
A Figura 3.5 mostra as formas das finais da estruturas para cada caso, Figura 3.6 a evolução da máxima tensão nodal de von Mises para as 25 iterações iniciais, e a Figura 3.7 a convergência da função objetivo.



**Figura 3.5 – Caso 1 – Comparação estrutura final (penalização de densidade x remoção de elementos)**



**Figura 3.6 – Caso 1 – Comparação da convergência da tensão nodal máxima (penalização de densidade x remoção de elementos)**

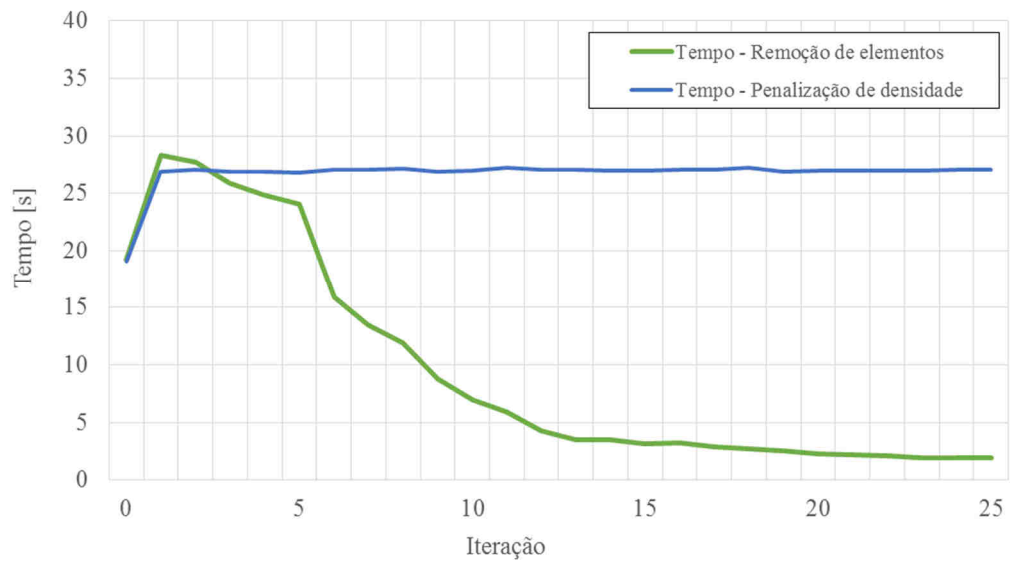


**Figura 3.7 – Caso 1 – Comparação da convergência da função objetivo (penalização de densidade x remoção de elementos)**

Analisando as figuras anteriores percebe-se que o uso do método de penalização de densidades intermediárias ou o de remoção de elementos de baixa densidade têm pouco impacto na convergência da restrição de tensão, conforme a Figura 3.6.

Já quando a evolução da função objetivo é comparada, Figura 3.7, o método de remoção de elementos de baixa apresenta vantagem, obtendo uma estrutura final com volume final cerca de 30% menor do que quando o método de penalização de densidade é empregado. A maior parte dessa redução do volume é ligada ao fato de que a estrutura final apresenta barras mais “finas”, com menos elementos na espessura. Entretanto a não contabilização dos elementos de baixa densidade (>20%) no cálculo da função objetivo, já que eles foram removidos, também tem alguma relevância.

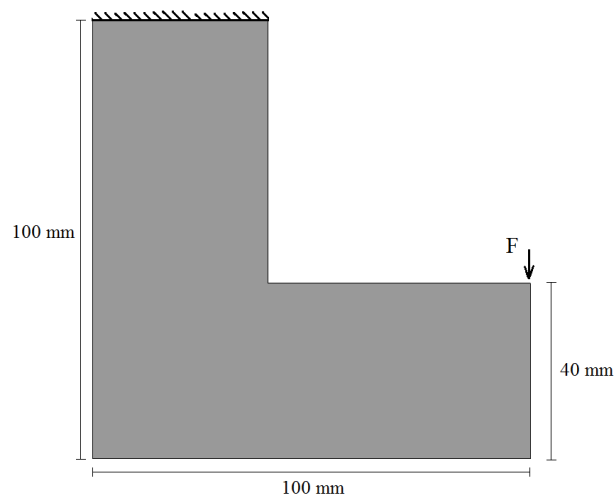
Nesta comparação, o tempo de cada iteração é de cerca de 27 segundos utilizando o método de penalização de densidade. Sendo assim o caso com penalização de densidade levou cerca de 11,5 minutos da iteração 1 até a 25. Já o caso utilizando remoção de elementos a cada iteração considera menos graus de liberdade na sua formulação, tendo redução no tempo computacional a Figura 3.8. O método de remoção de elementos levou cerca de 4,2 minutos, uma redução de 170% no tempo computacional.



**Figura 3.8 – Caso 1 – Tempo de processamento (penalização de densidade x remoção de elementos)**

### 3.2 Caso 2 – “L”

No segundo caso, vai ser avaliada uma geometria com concentrador de tensão, de forma a comprovar o uso da medida global de tensão na remoção dessa singularidade. A geometria e as condições de contorno utilizadas são apresentadas na Tabela 3.2, sendo que  $F = 3N$ ,  $E = 1MPa$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\sigma_y = 6MPa$ . Os demais parâmetros são mostrados na Tabela 3.2.



**Figura 3.9 – Caso 2 – Geometria e condições de contorno**



Tabela 3.2 – Caso 2 - Parâmetros utilizados

Descrição	Parâmetro	Valor
Penalização de densidade intermediária	$\alpha$ e $p$	Não usado
Filtro de densidade	$R_{max}$	1
Remoção de elemento de baixa densidade	$\eta_{BD}$	0,95
Penalização do tensor constitutivo	$n_c$	3
Penalização de tensão	$n_T$	0,5
Medida global de tensão	$P$	Malha 1 – 16 Malha 2 - 100

### 3.2.1 Malha 1

Primeiramente, avaliou-se esse caso considerando-se uma malha com 2475 elementos, com as dimensões aproximadas de 1,6 mm x 1,6 mm x 1,0 mm, e a norma utilizada, para medida global de tensão, 16. Os resultados da convergência da restrição de tensão são apresentados da Figura 3.10; a distribuição de densidade estrutura final é apresentada na Figura 3.11; e a tensão de von Mises nodal máxima de cada elemento é apresentada na Figura 3.12.

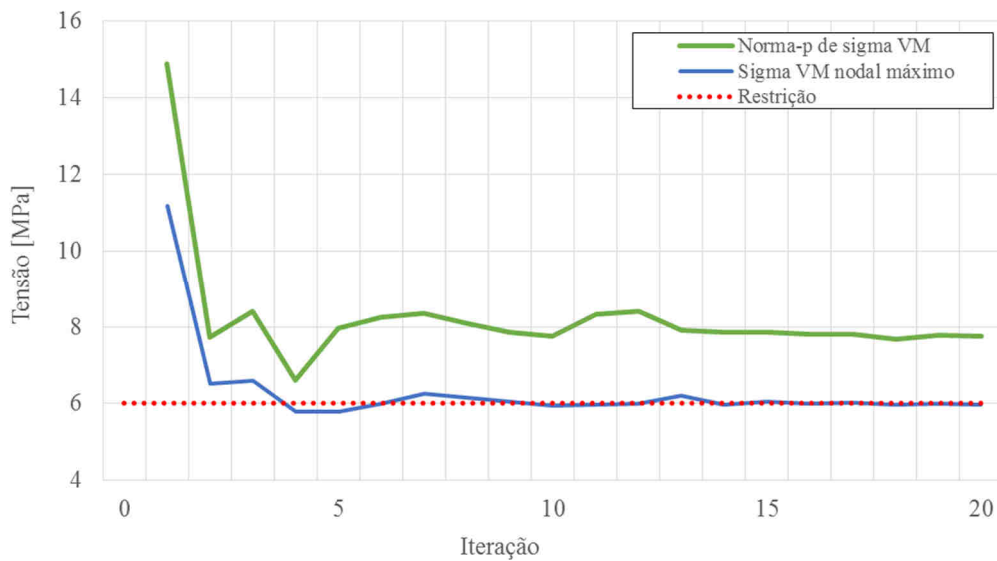
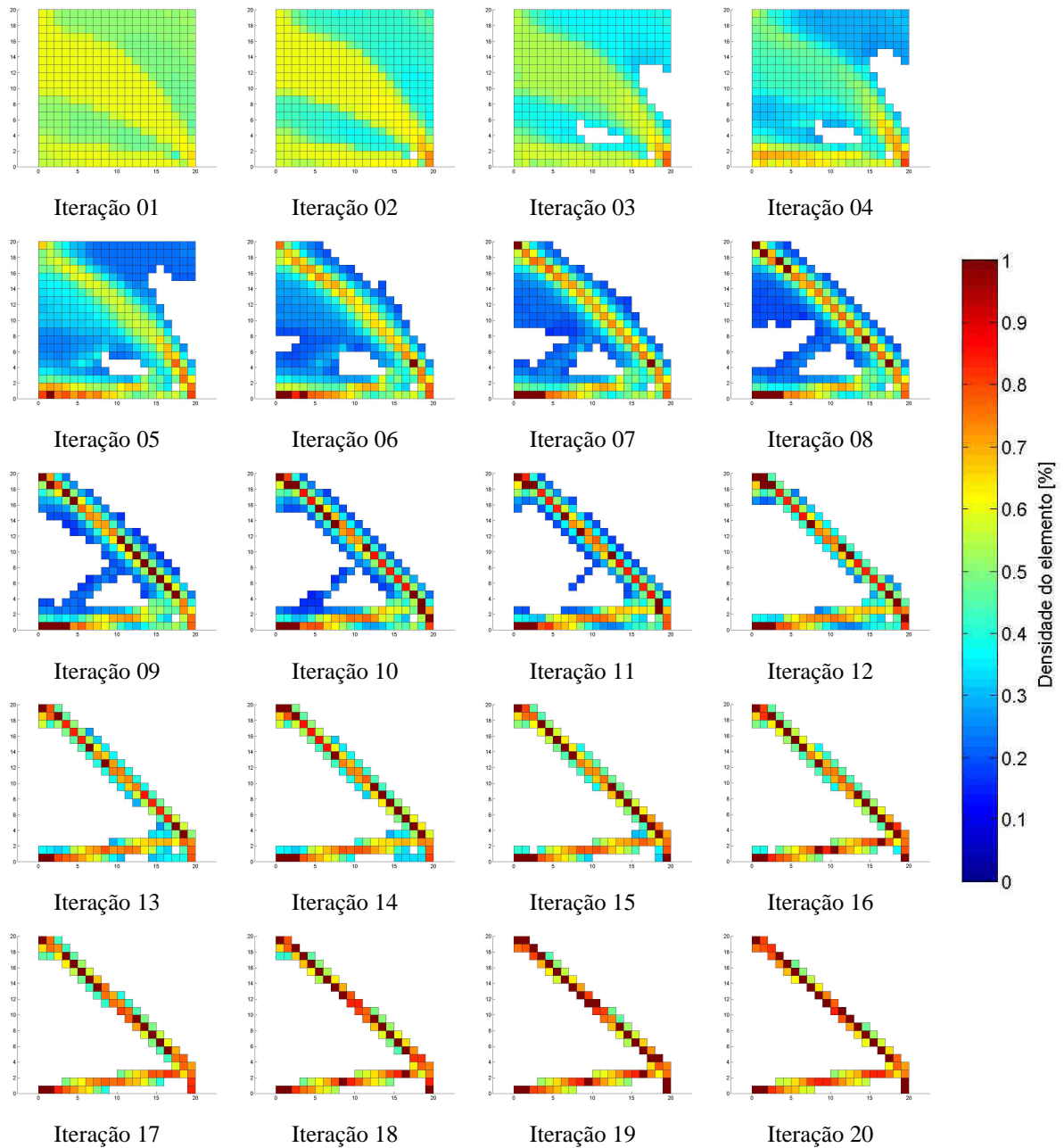


Figura 3.10 – Caso 2 – Convergência da restrição  $P=16$

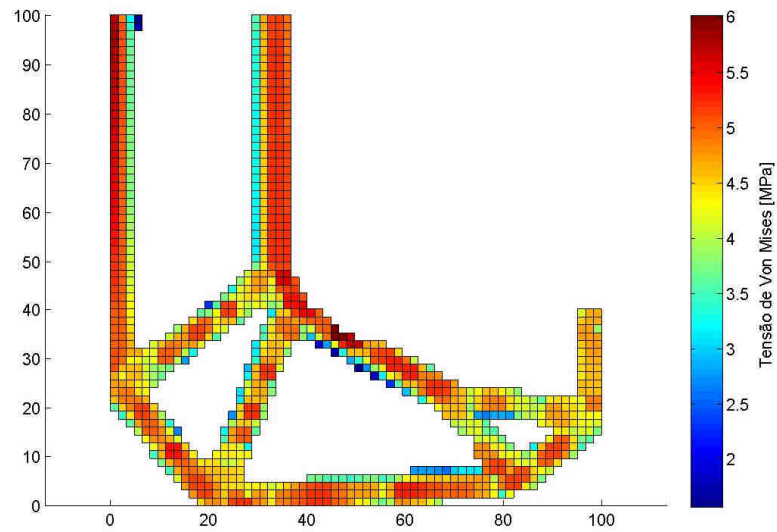
Observa-se que há uma diferença significativa entre a tensão máxima nodal e a medida global de tensão, apresentadas na Figura 3.10. A medida global de tensão apresenta valores cerca de 30% mais elevados que a máxima tensão nodal. Essa diferença é corrigida através da

normalização da medida global de tensão, conforme apresentado na seção 2.3.5. Outra forma de reduzir essa diferença é aumentando o valor da norma-p.



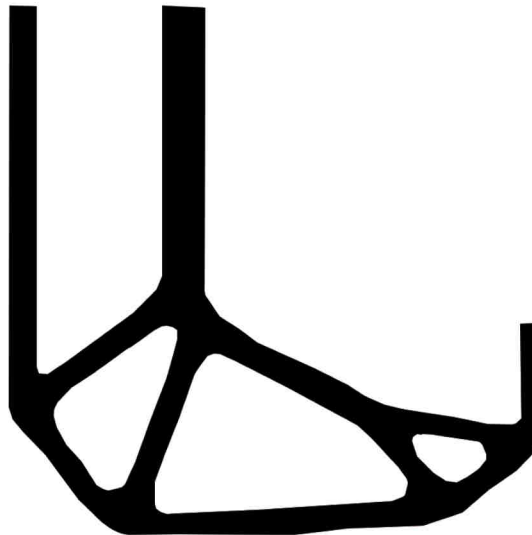
**Figura 3.11 – Caso 2 – Densidade dos elementos  $P=16$**

Pode-se verificar na Figura 3.11, que já nas primeiras 5 iterações, o efeito do concentrador é suprimido com a formação de uma estrutura curva de alta densidade, que remove a “quina” da estrutura.



**Figura 3.12 – Caso 2 –Tensão nodal máxima  $P=16$  , 2475 elementos**

Interpretando os resultados obtidos para distribuição de densidade da iteração 20, o resultado final suavizado é a estrutura apresentada na Figura 3.13.



**Figura 3.13 – Caso 2 – Estrutura final suavizada  $P=16$ , 2475 elementos**

Entretanto, avaliando-se as Figura 3.12 e em conjunto com a densidade dos elementos na estrutura final, percebe-se que algumas seções da estrutura têm tensão nodal máxima que

respeita a restrição e ao mesmo tempo elementos de densidade intermediária na parte central das barras. Isso indica que se nessas seções o tamanho dos elementos finitos for reduzida, a densidade dos elementos nessas regiões poderia ficar mais concentrada, e ainda respeitar a restrição de tensão, gerando barras mais finas. Como o filtro de densidade já está com o menor valor possível, e removendo-se o filtro, o processo estaria mais suscetível a instabilidade de tabuleiro. Uma nova otimização foi realizada na seção 3.2.3 considerando uma malha mais refinada.

### 3.2.2 Efeito do estimador de erro

Todos os resultados apresentados nesse trabalho estão utilizando a metodologia de estimar o erro da tensão e somar esse erro às tensões nodais. De modo a avaliar o efeito do emprego dessa metodologia sobre os resultados, o Caso 2 da viga em “L” foi simulado novamente com os mesmos parâmetros apresentados na seção anterior. O Apêndice A, mostra a variação da densidade dos elementos na estrutura a cada iteração.

A Figura 3.14 apresenta as estrutura finais com e sem o estimador de erro sendo considerado. Percebe-se que as formas finais da estrutura são semelhantes, entretanto a estrutura que não considerar o uso do estimador de erro apresenta mais barras do que a que considera. As duas setas na figura indicam os pontos onde estão as barras “extras”, na seta 1 a bifurcação da barra não seria necessária, e na seta 2 as duas barras com densidade intermediária poderiam ser substituídas por apenas uma barra.

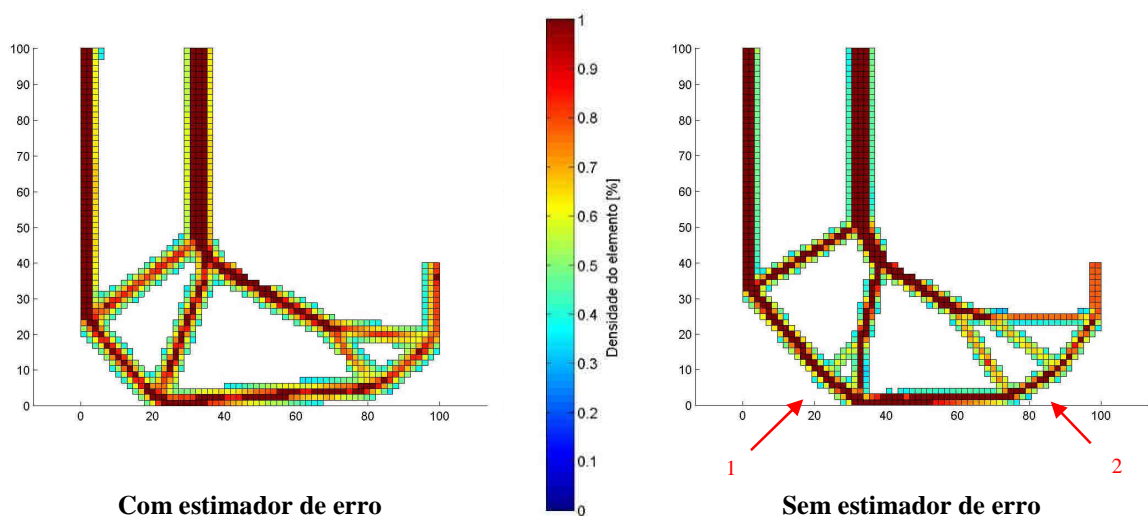


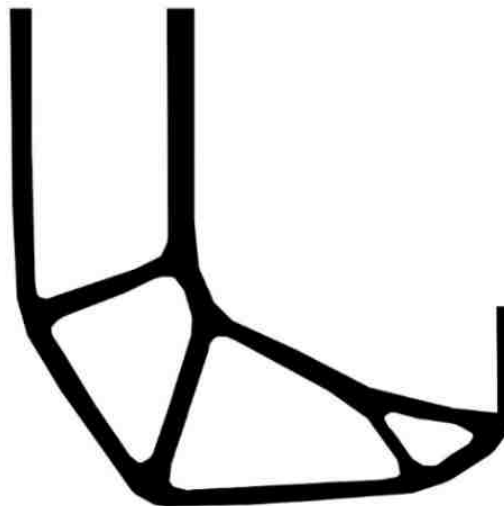
Figura 3.14 – Caso 2 – Comparação estimador de erro  $P=16$ , 2475 elementos

A estrutura considerando o estimador de erro apresenta menos barras com densidade intermediária, visto que ambas respeitam as restrições impostas pode-se concluir que o uso do estimador de erro trás benefícios à solução do problema.

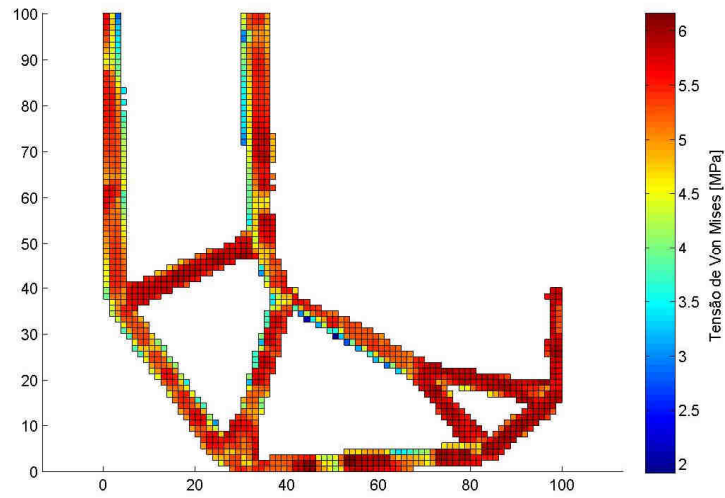
### 3.2.3 Malha 2

Neste novo processo, foi considerada uma estrutura com 4100 elementos e se utilizou um valor para norma-p mais elevado, de 100. No Apêndice A, é apresentada a distribuição de densidade da estrutura para as iterações de 1 a 32. Observa-se novamente que o concentrador de tensão foi removido logo nas primeiras iterações, e o processo convergiu sem dificuldades.

A Figura 3.15 apresenta a estrutura final interpretada, com base nos resultados da iteração 32. Conforme esperado a partir dos resultados da seção 3.2.1 a estrutura ficou mais “fina” em algumas regiões. Analisando-se a Figura 3.16 verifica-se que as tensões máximas nas barras estão agora mais próximas da tensão-limite. Também se percebe que o processo de otimização demorou algumas iterações a mais para convergir, o que também seria esperado por ter sido utilizado um valor mais elevado para norma-p.

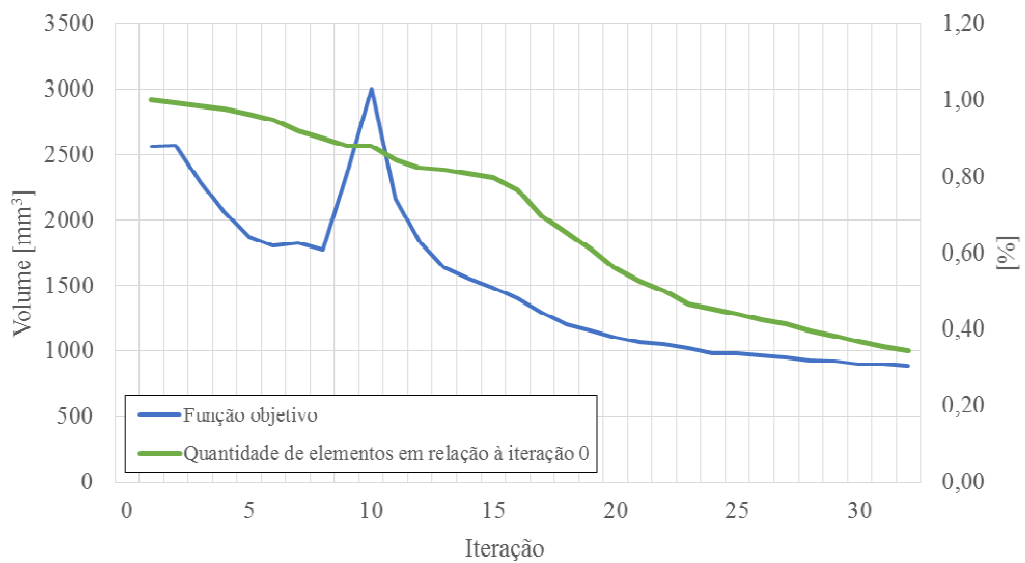


**Figura 3.15 – Caso 2 – Estrutura final suavizada  $P=100$ , 4100 elementos**



**Figura 3.16 – Caso 2 – Tensão nodal máxima  $P=100$ , 4100 elementos**

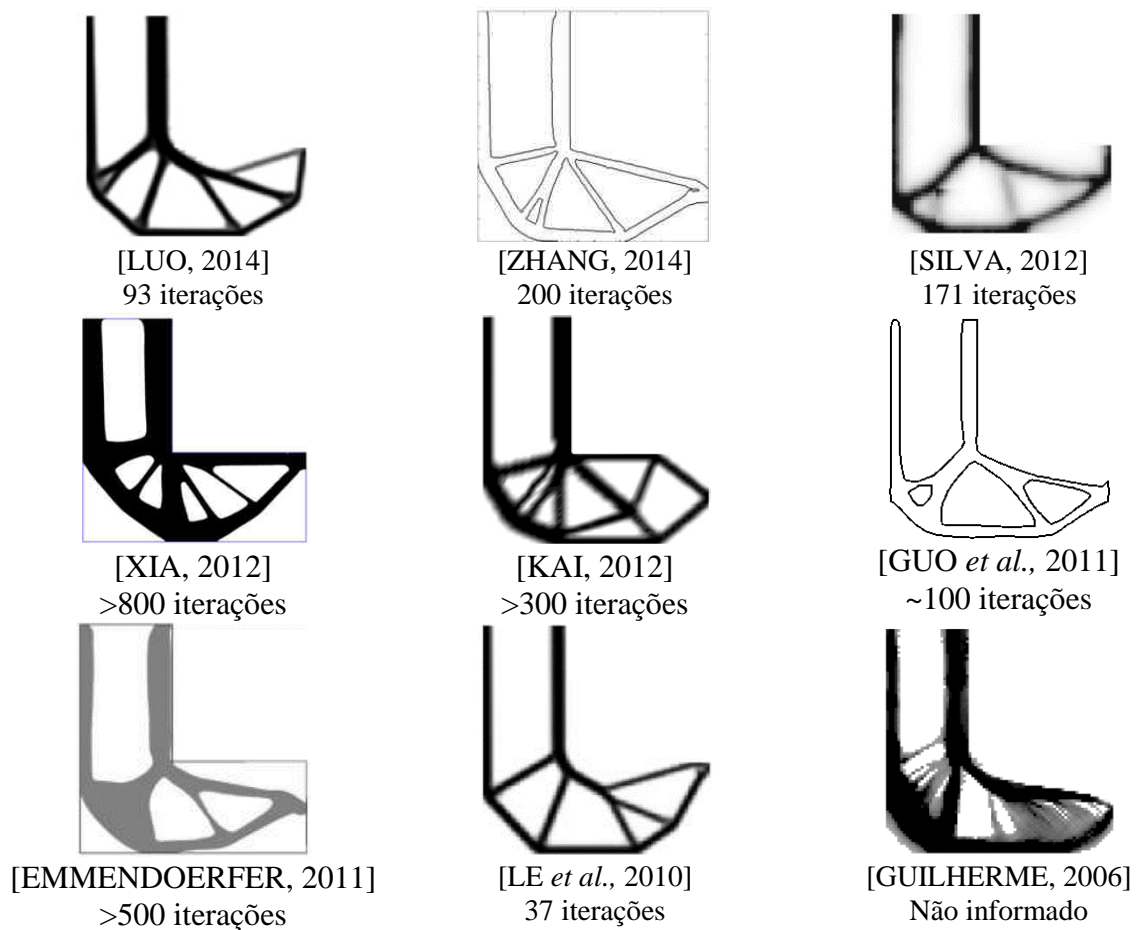
A Figura 3.17 apresenta a convergência da função objetivo e a quantidade de elementos da malha em relação à configuração inicial. Observa-se que próximo à iteração 10 houve um acréscimo no volume da estrutura. Analisando as figuras apresentadas no Apêndice A, com a distribuição de densidade da estrutura a cada iteração, percebe-se que próximo à iteração 10 o processo de remoção de elementos da malha formou um concentrador de tensão, que foi removido nas iterações subsequentes.



**Figura 3.17 – Caso 2 – Convergência da função objetivo  $P=100$ , 4100 elementos**

### 3.2.4 Comparação dos resultados

O caso da viga em “L” é bastante estudado por diversos autores, principalmente por apresentar o concentrador de tensão. Grande parte do desafio de otimizar esse caso é a remoção dessa singularidade. A Figura 3.18 apresenta resultados da estrutura final e número de iterações necessárias obtidas por alguns autores, vale apontar que alguns autores utilizaram a estrutura com a força aplicada no meio e outros na ponta da extremidade do “L”.

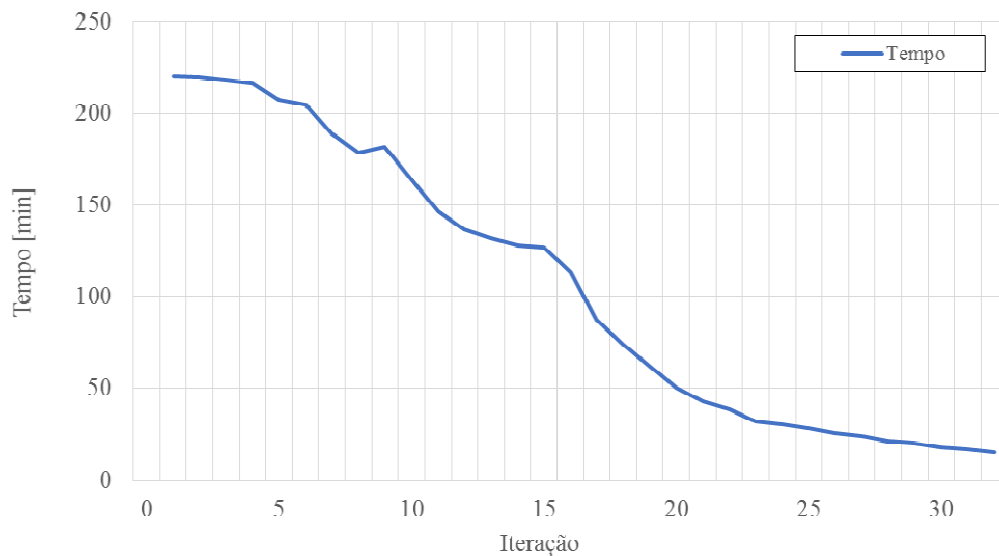


**Figura 3.18 – Resultados da otimização da estrutura em “L” obtida por outros autores**

Vários autores utilizaram formulações que conseguiram remover o concentrador de tensão. Entretanto, a maioria dos processos de otimização levaram muitas iterações para serem concluídos. O trabalho de Le [Le *et al.*, 2010] que, entre os apresentados na Figura 3.18, é o que leva menos iterações (37), para chegar à estrutura final, utiliza o método das assíntotas móveis para o processo de otimização. No presente trabalho, a ausência de material não é

simulada com a utilização de elementos de baixa densidade: os elementos são removidos da estrutura. Sendo assim, o tempo computacional é reduzido consideravelmente.

A Figura 3.19 mostra essa redução do tempo computacional para caso 2, com 4100 elementos na configuração inicial. A primeira iteração leva cerca de 220 minutos, e a iteração 32, cerca de 15 minutos, totalizando 56 horas. Se os elementos não fossem removidos cada iteração levaria cerca de 220 minutos. Então, presumindo-se que os resultados convergissem com o mesmo número de iterações, o processo de otimização teria levado 120 horas.

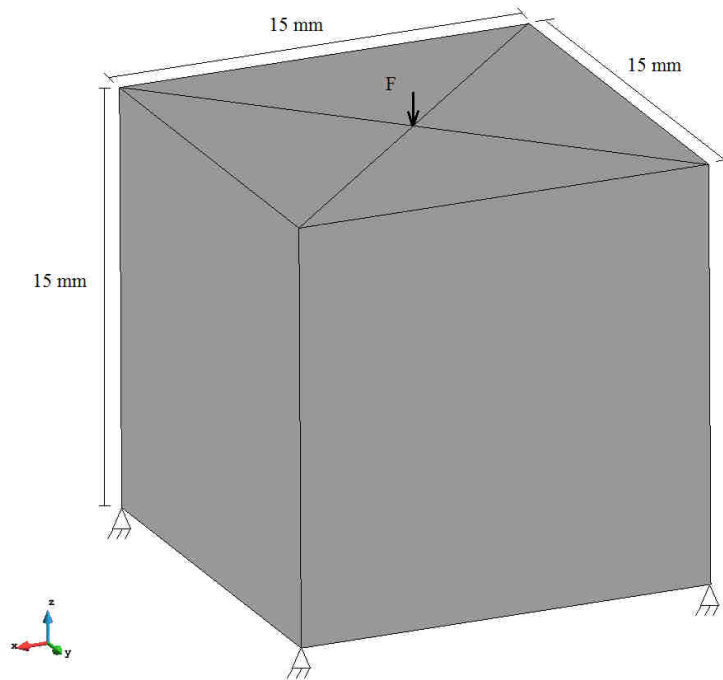


**Figura 3.19 – Caso 2 – Tempo de processamento  $P=100$ , 4100 elementos**

### 3.3 Caso 3 - Caixa

O primeiro caso em 3 dimensões avaliado é um cubo fixado nos 4 cantos inferiores, com uma força concentrada aplicada no centro da face superior, conforme a Figura 3.20, sendo  $F = 400N$ ,  $E = 1MPa$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\sigma_y = 4MPa$ . A força está aplicada igualmente nos 4 nós do elemento no centro da face superior do cubo. A estrutura está discretizada em 3375 elementos finitos. Os parâmetros utilizados no algoritmo de otimização topológica são mostrados na Tabela 3.3.



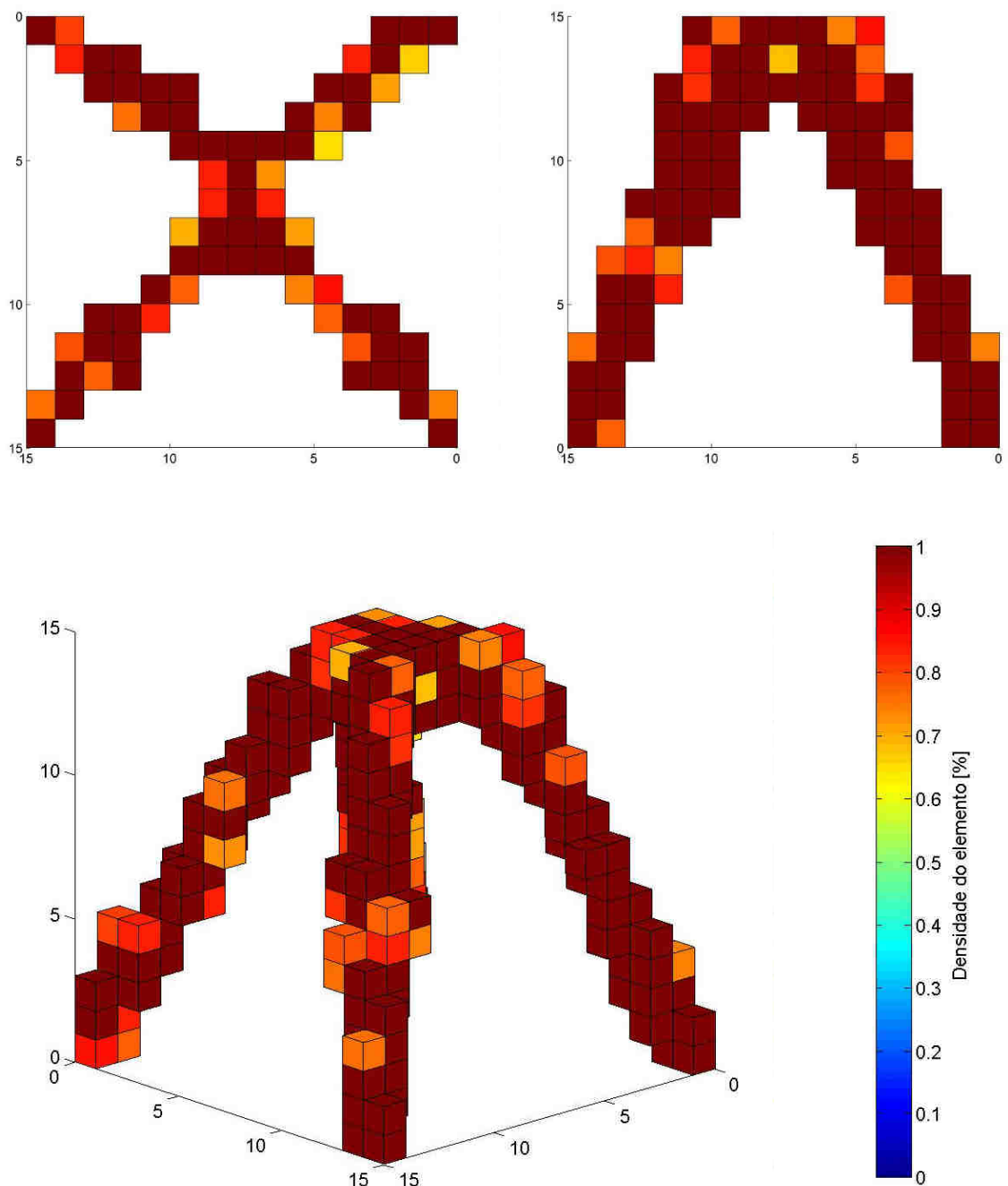


**Figura 3.20 – Caso 3 – Geometria e condições de contorno**

**Tabela 3.3 – Caso 3 - Parâmetros utilizados**

Descrição	Parâmetro	Valor
Penalização de densidade intermediária	$\alpha$ e $p$	Não usado
Filtro de densidade	$R_{max}$	1
Remoção de elemento de baixa densidade	$\eta_{BD}$	0,95
Penalização do tensor constitutivo	$n_c$	3
Penalização de tensão	$n_T$	0,5
Medida global de tensão	$P$	50

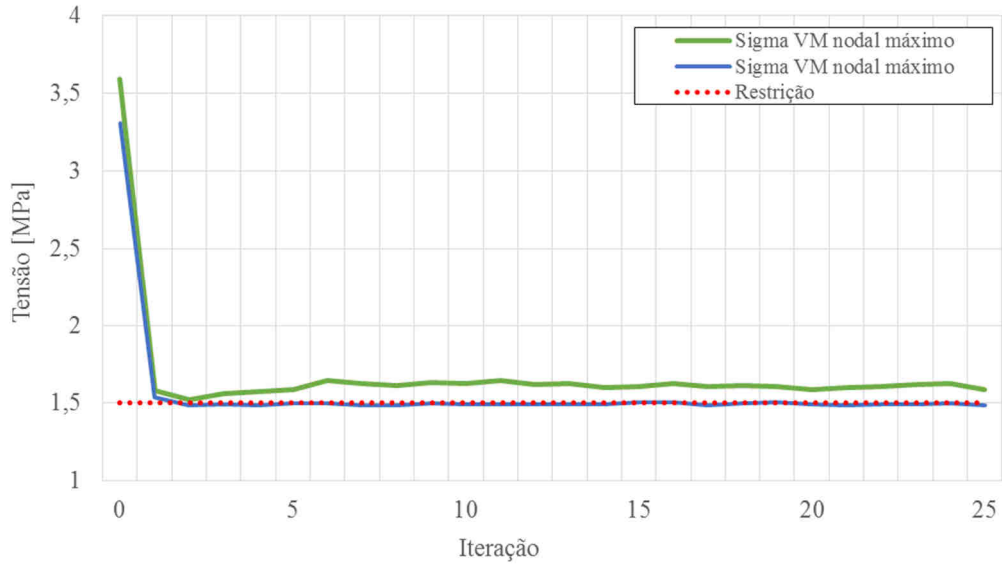
A Figura 3.21 mostra a estrutura final após o término do processo de otimização. A estrutura não viola a restrição de tensão conforme pode ser verificado na Figura 3.22 e a quantidade de elementos é de 6% em relação à estrutura inicial, Figura 3.24.



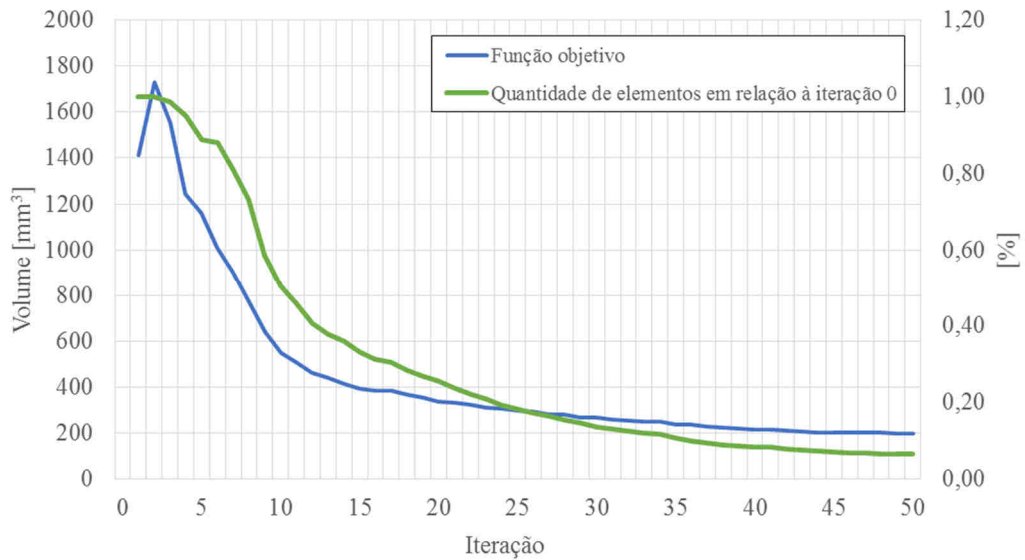
**Figura 3.21 – Caso 3 –Estrutura final**

Pode-se perceber que a estrutura final não é completamente simétrica, como seria esperado pelas condições de contorno aplicadas. Isso provavelmente se deve ao fato da estrutura estar sendo representada por uma malha não muito refinada. Entretanto o elevado custo computacional inviabiliza o maior refino da malha.

Percebe-se também que o número de iterações necessárias para convergência no caso em três dimensões foi significativamente superior ao necessário para os casos em duas dimensões apresentadas anteriormente.



**Figura 3.22 – Caso 3 –Convergência da restrição**



**Figura 3.23 – Caso 3 – Convergência da função objetivo**

### 3.4 Caso 4 - Viga

O segundo caso em 3 dimensões avaliado é uma viga engastada, com uma força concentrada aplicada no centro de uma das arestas livres, conforme a Figura 3.24 , sendo  $F = 300N$ ,  $E = 1MPa$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\sigma_y = 3MPa$  . A estrutura está discretizada em 4400 elementos finitos. Os parâmetros utilizados no algoritmo de otimização topológica são mostrados na Tabela 3.4.

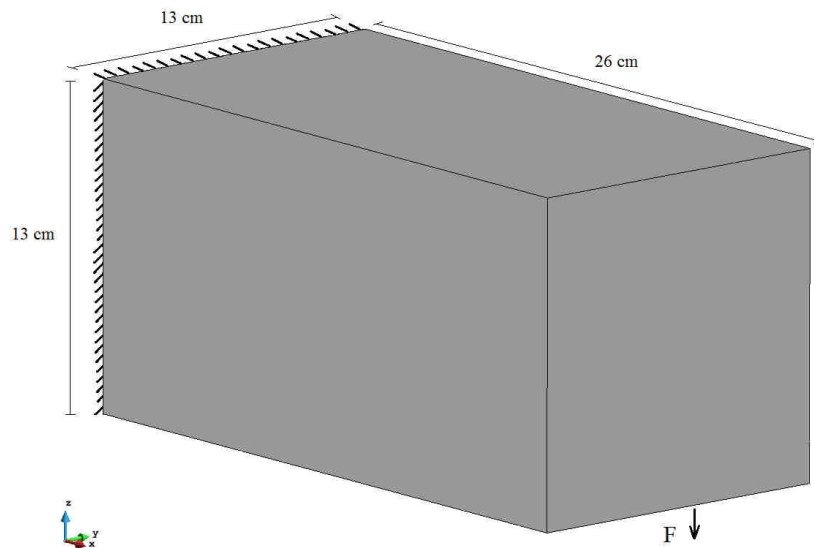
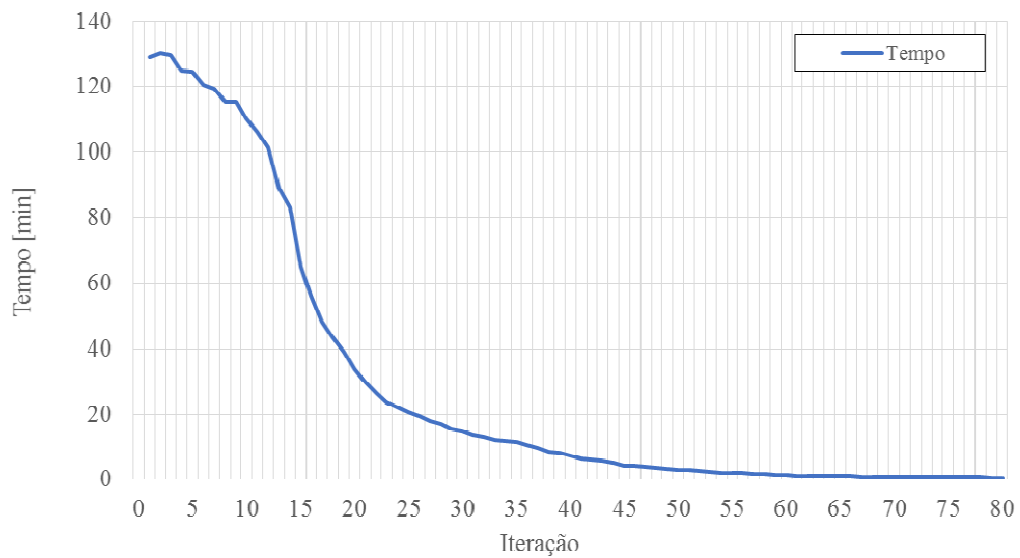


Figura 3.24 – Caso 4 –Geometria e condições de contorno

Tabela 3.4 – Caso 4 - Parâmetros utilizados

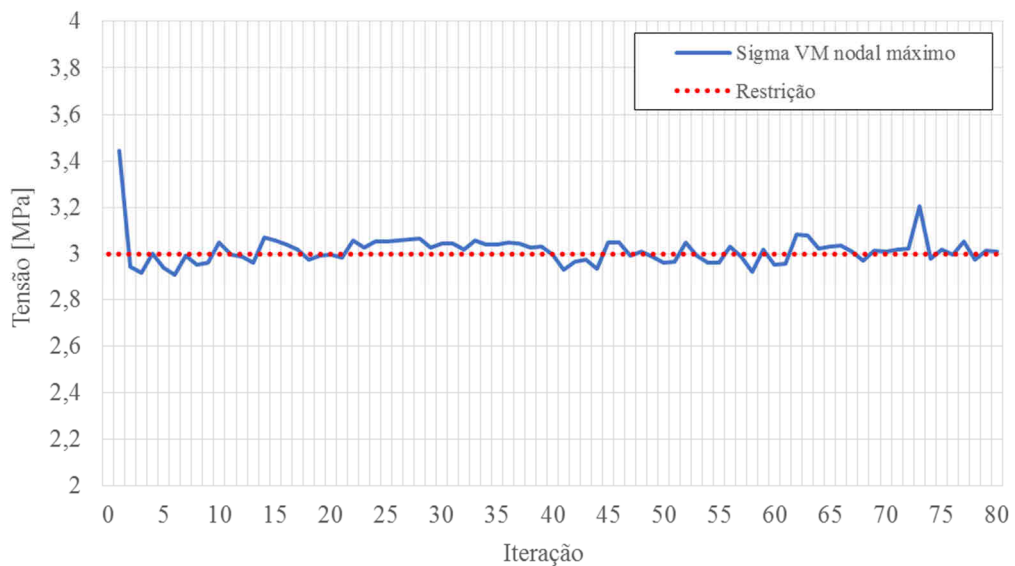
Descrição	Parâmetro	Valor
Penalização de densidade intermediária	$\alpha$ e $p$	Não usado
Filtro de densidade	$R_{max}$	1
Remoção de elemento de baixa densidade	$\eta_{BD}$	0,95
Penalização do tensor constitutivo	$n_c$	3
Penalização de tensão	$n_T$	0,5
Medida global de tensão	$P$	50

A Figura 3.25 mostra a redução do tempo de processamento e do número de elementos com o passar das iterações. Pode-se observar que as primeiras iterações levam mais de 2 horas, e as iterações finais levam menos de 2 minutos.



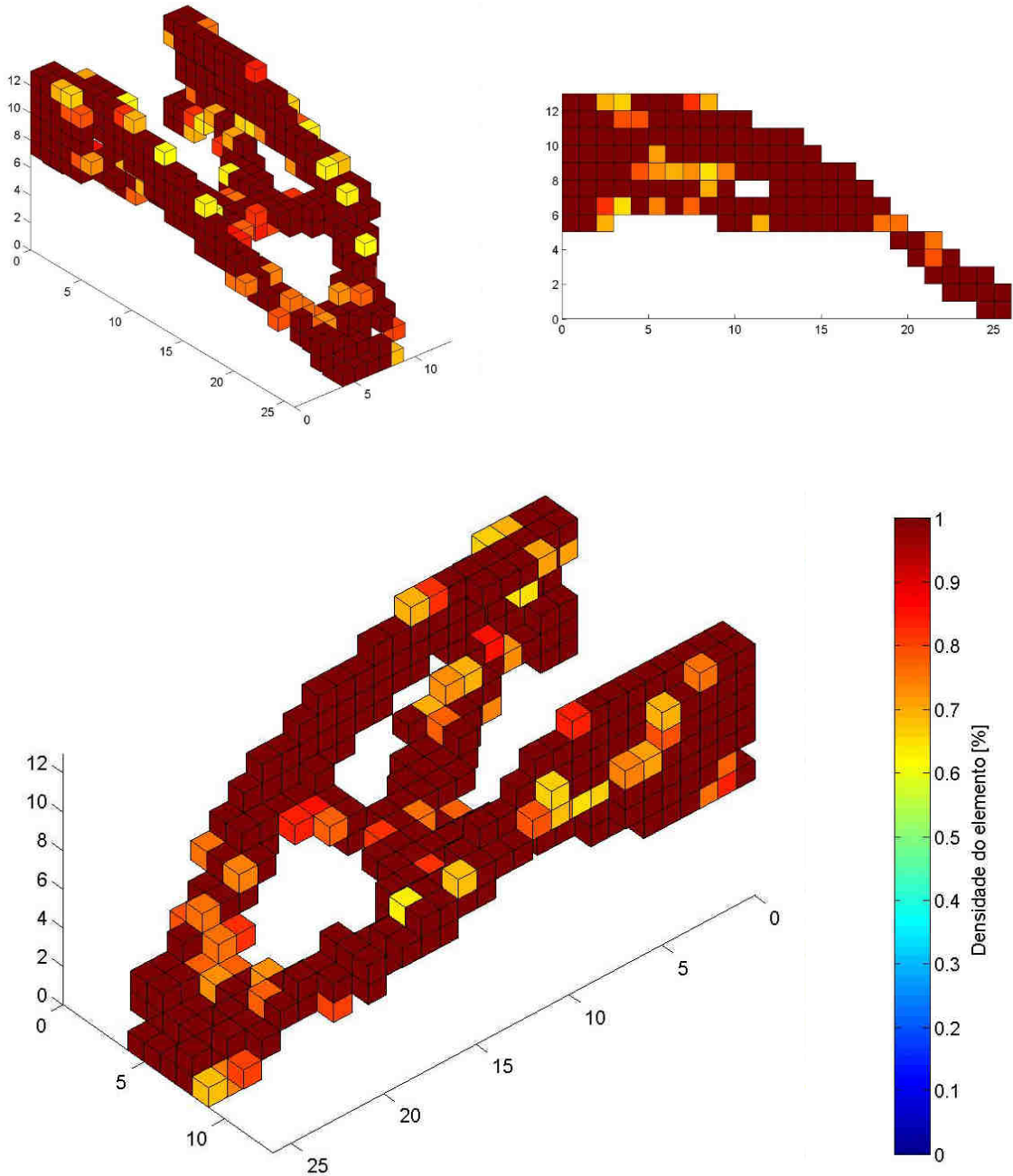
**Figura 3.25 – Caso 4 –Tempo de processamento**

A Figura 3.26 mostra o gráfico da convergência da restrição, percebe-se que a convergência não é tão suave, entretanto vale salientar que os valores da tensão de von Mises nodal máxima estão variando a cada iteração cerca de 3% para mais ou para menos do valor da restrição de 3 MPa. Essa variação é considerada pequena e aceitável visto que a estrutura final obtida ainda deverá ser interpretada para aplicação prática.



**Figura 3.26 – Caso 4 –Convergência da restrição**

Ao fim de 80 iterações a estrutura tem a forma final apresentada na Figura 3.27. O Apêndice A apresenta figuras com a distribuição de densidade na estrutura a cada iteração. Percebe-se que a estrutura não ficou completamente simétrica como seria esperado, mas ficou bastante próxima da simetria. Do mesmo modo como foi comentado para o caso 3, isso se deve muito provavelmente à malha pouco refinada.



**Figura 3.27 – Caso 4 –Estrutura final**

## 4 CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi implementada uma metodologia para otimização topológica com restrição de tensão para estruturas em três dimensões. A maior contribuição ao problema foi a implementação do modelo substituto, que apresentou uma boa sinergia, ao ser utilizado em conjunto com a norma-p como medida global de tensão. Isso se deve ao fato de que, com o modelo substituto, é possível rodar a SLP com uma variação de densidade bastante pequena entre as subiterações. Como nesse problema se consideram muitas variáveis (uma para cada elemento) que influenciam uma única restrição (a medida global de tensão), usando-se pequenas variações de densidade, obtém-se maior precisão nos resultados de cada iteração, refletindo em menos tempo para convergência e estruturas bem definidas.

Foi proposto um critério, para remoção de elementos da malha, que apresentou bons resultados e tem a vantagem de reduzir o tempo computacional para as iterações posteriores. Esse critério de remoção de elementos é utilizado em substituição ao popular método de penalização de densidade, utilizado por muitos autores. Entretanto, vale mencionar que é possível que o sucesso da remoção dos elementos da malha esteja relacionado com o uso do modelo substituto. O lado negativo do emprego desse método é que não há possibilidade de recolocar os elementos removidos, a consequência disso é que a função pode convergir para um mínimo local ao invés de um mínimo global.

O uso de um estimador de erro do método de elementos finitos foi implementado com o intuito de somar o erro à tensão calculada de maneira a gerar estruturas mais reforçadas em regiões em que a estimativa de erro do cálculo fosse maior. O uso do estimador de erro mostrou resultados benéficos nos casos estudados, gerando estruturas que apresentam menos elementos estruturais com densidades intermediárias.

Entretanto é importante lembrar que o estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu é usualmente empregado de forma qualitativa no refino de malhas, regiões com maiores erros receberiam mais elementos e regiões com menos erros ficariam com menos elementos. O valor absoluto calculado nem sempre vai estar quantificando corretamente a magnitude do erro.

Quando o algoritmo foi utilizado para resolver o caso 2, da viga em “L” com concentrador de tensão, apresentou bons resultados se comparado com os demais autores que avaliaram o mesmo caso. Tendo removido com facilidade o concentrador de tensão, já nas primeiras iterações, e gerado a forma final da estrutura em poucas iterações.

Para os casos 3 e 4, que apresentam estruturas propriamente em três dimensões, com múltiplas camadas de elementos nas 3 direções principais, o código demonstrou um bom desempenho, gerando estruturas dentro dos limites de tensão admissível e com um tempo computacional aceitável. Entretanto, o refino da malha é o grande problema para se obter bons resultados com otimização topológica em três dimensões.

Como exemplo, é possível comparar o caso 2 com o caso 4. O caso 2 só teve uma camada de elementos na espessura, sendo praticamente em duas dimensões, e foi discretizado em 4100 elementos. Já o caso 4 foi discretizado em aproximadamente 4400 elementos, entretanto, tem 13 camadas na espessura, e cada camada somente cerca de 340 elementos. Fica claro, que apesar de o número total de elementos nos dois casos ser semelhante, pode-se considerar que o caso 2 está bem discretizado e que o caso 4 apresenta uma malha relativamente grosseira.

Durante o processo de otimização, muitas vezes há elementos com densidade intermediária na estrutura. Quando a estrutura não está suficientemente discretizada, os elementos são relativamente grandes e, mesmo com densidades intermediárias, são responsáveis por uma parcela grande da carga estrutural suportada e, por consequência, influenciam significativamente na estrutura final. Isso se percebe nos casos em três dimensões avaliados, em que, pela geometria e condições de contorno aplicadas, era de se esperar que a estrutura final fosse simétrica; entretanto, ela não é completamente simétrica. Sendo assim, seriam esperados resultados melhores para os casos em três dimensões, com a utilização de malhas mais refinadas; porém, o refino da malha causa um aumento do custo computacional que não é suportado pelo equipamento disponível para as simulações.

#### **4.1 Sugestões para trabalhos futuros**

Fundamentado nas conclusões deste trabalho, fica claro que a maior dificuldade no processo de otimização topológica, é o tempo computacional. Para tanto, as sugestões para trabalhos futuros são no sentido de reduzir esse impasse, tornando o emprego do algoritmo muito mais viável.

Apesar de ter sido utilizado uma formulação simples, somente com interpolações lineares, o emprego do modelo substituto mostrou grandes benefícios no tempo computacional e na qualidade dos resultados finais. Esforços futuros deveriam ser direcionados ao



aprimoramento do modelo substituto. Podem-se destacar dois pontos que, se implementados, teriam um impacto drástico na diminuição de tempo do cálculo das derivadas:

- Muitas vezes durante o processo de otimização, vários elementos têm a mesma densidade entre uma iteração e outra; sendo assim, é um gasto de processamento, recalculando, a cada iteração, as derivadas relacionadas a esses elementos, visto já se sabe de antemão que os valores obtidos serão os mesmos já calculados na iteração anterior. Levando-se esse conceito ao extremo, as tensões e derivadas de todos os elementos poderiam ser calculadas para diversas densidades, como 95%, 85%, 75%, 65%..., e o método de modelo substituto seria usado para interpolar para os demais valores de densidade. Dessa maneira antes de iniciar-se a otimização propriamente dita, seria criado um “mapa” com as tensões e derivadas calculadas e, equações para chegar aos valores intermediários. Além de reduzir o tempo computacional, esse método possibilitaria testar parâmetros para o modelo, com muito mais facilidade e rapidez, pois, desde que a geometria e condições de contorno se mantenham as mesmas, as derivadas e tensões não precisam ser recalculadas, e o processo de otimização em si seria rápido.
- Outro fato que merece atenção é que, provavelmente, não é necessário calcular a derivada da tensão em todos os elementos, principalmente quando utiliza-se uma malha mais refinada. Por exemplo, considerando-se três elementos lado a lado, pode-se calcular a derivada nos elementos aos extremos e interpolar o valor para o elemento dentre eles. A única dificuldade seria criar um modelo, para corrigir a diferença de densidade entre os elementos na derivada. O que também traria uma redução significativa do tempo computacional.

Outras sugestão para trabalhos futuros que também seriam benéficas ao tema de otimização topológica e não são relacionadas diretamente à redução do tempo computacional seriam:

- O uso do estimador de erro em otimização topológica mostrou resultados benéficos. Uma proposta futura, seria considerar o uso de estimadores de erro mais robustos, que consiga estimar quantitativamente o erro máximo do cálculo da tensão com maior precisão. Uma sugestão nesse sentido, é de antes de iniciar a otimização gerar uma malha bastante refinada de elementos finitos,

e utilizar as tensões calculadas nessa malha para estimar o erro durante o processo de otimização.

- Existem situações onde se requer que estrutura suporte diferentes tipos de carregamentos não simultâneos, ou seja, em certo momento estaria sujeita a um tipo de condições de contorno, e em outro a condições de contorno diferentes. Utilizando as duas condições simultaneamente durante o processo de otimização, não vai resultar necessariamente em uma estrutura que suporte cada condição individualmente. Nesse sentido, a técnica apresentada Fancello e Pereira [Fancello, E.A. e Pereira, J.T., 2003] pode ser implementada para lidar com múltiplos carregamentos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atkin, R.J.; Fox, N. *An introduction to the theory of elasticity*, Dover publications Inc., 2005.

Beckers, M. *Optimisation de structures en variables discrètes*, Tese de doutorado, Universidade de Liege, 1997.

Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, **Computational Methods Applied to Mechanical Engineering**, v.71, p.197-224, 1988.

Bendsoe, M.P. *Optimal shape design as a material distribution problem*, **Structural Optimization**, v.1, p.193-202, 1989.

Cardoso, E.L.; Fonseca, J.S.O. *Complexity control in the topology optimization of continuum structures*, **Journal of the Brazilian society of mechanical sciences and engineering**, v. 25, p. 293-301, 2003.

Cardoso, E.L. *Otimização topológica de transdutores piezoelétricos considerando não-linearidade geométrica*, Tese de doutorado, UFRGS, 2005.

De Leon, D.M. *Otimização estrutural de placas compostas laminadas sujeitas a efeitos aeroelásticos*, Dissertação de mestrado, UFRGS, 2011

Duarte, C.A.M. *Estudo da versão p do método dos elementos finitos para problemas da elasticidade e de potencial*, Dissertação de Mestrado, UFSC, 1991.

Emmendoerfer, H.J. *Problema de otimização estrutural com restrição de tensão local usando o método level set*, Dissertação de mestrado, UFSC, 2011.

Fancello, E.A., Pereira, J.T. *Structural optimization considering material failure*, **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, p. 3-24, 2003.

Forrester, I.J., Keane, A.J. *Recent advances in surrogate-based optimization*, **Progress in Aerospace Sciences**, v.45 p. 50-79, 2009.

Guilherme, C.E.M. *Otimização topológica e cálculo do gradiente de forma para estruturas submetidas à restrição de fadiga*, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2006.

Guo, X.; Zhang, W.S.; Wang, M.Y.; Wei, P. *Stress-related topology optimization via level set approach*, **Computational Methods Applied to Mechanical Engineering**, v. 200, p. 3439-3452, 2011.

Haftka, R.T., Gürdal, Z. *Elements of structural optimization*, Springer, 1991.

Hughes, T.J.R. *The finite element method – Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover publications Inc., 2000.

Kai, J.A.; Lee, E.; Martins, J.R.R.A. *Stress-based topology optimization using an isoparametric level set method*. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.58, p.20-30, 2012.

Le, C.; Noratto, J.; Bruns, T.; Ha, C.; Torrorelli, D. *Stress-based topology – optimization for continua*. **Structural Multidisciplinary Analysis**, v. 41, p. 605-620, 2010.

Luo, Y.; Zhou, M.; Wang, M.Y.; Deng, Z. *Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints*, **Computer & Structures**, v.143, p.73-84, 2014.

Mosmann, R.M. *Otimização topológica de estrutural contínuas submetidas a restrições de flexibilidade, volume e frequência natural*, Dissertação de mestrado, UFRGS, 2003.

Queipo, N.V., Haftka, W.S., Shyy, W., Goel, T., Vaidyanathan, R., Tucker, P.K. *Surrogate-based Analysis and Optimization*, **Progress in Aerospace Sciences**, v.41, p.1-28, 2005.

Silva, E. *Uma formulação de tensão topológica com restrição de tensão suavizada*, Dissertação de mestrado, UFRGS, 2012.

Souza, C.E. *Otimização em dois níveis da orientação e da topologia de cascas laminadas*, Dissertação de mestrado, UFRGS, 2003.

Xia, Q.; Shi, T.; Liu, S.; Wang, M.Y. A level set solution to the stress-based structural shape and topology optimization, **Computer & Structures**, v.90-91, p. 55-64, 2011.

Yang, R.J.; Chen, C.J. *Stress-based topology optimization*, **Structural Optimization**, v. 12, p. 98-105, 1996.

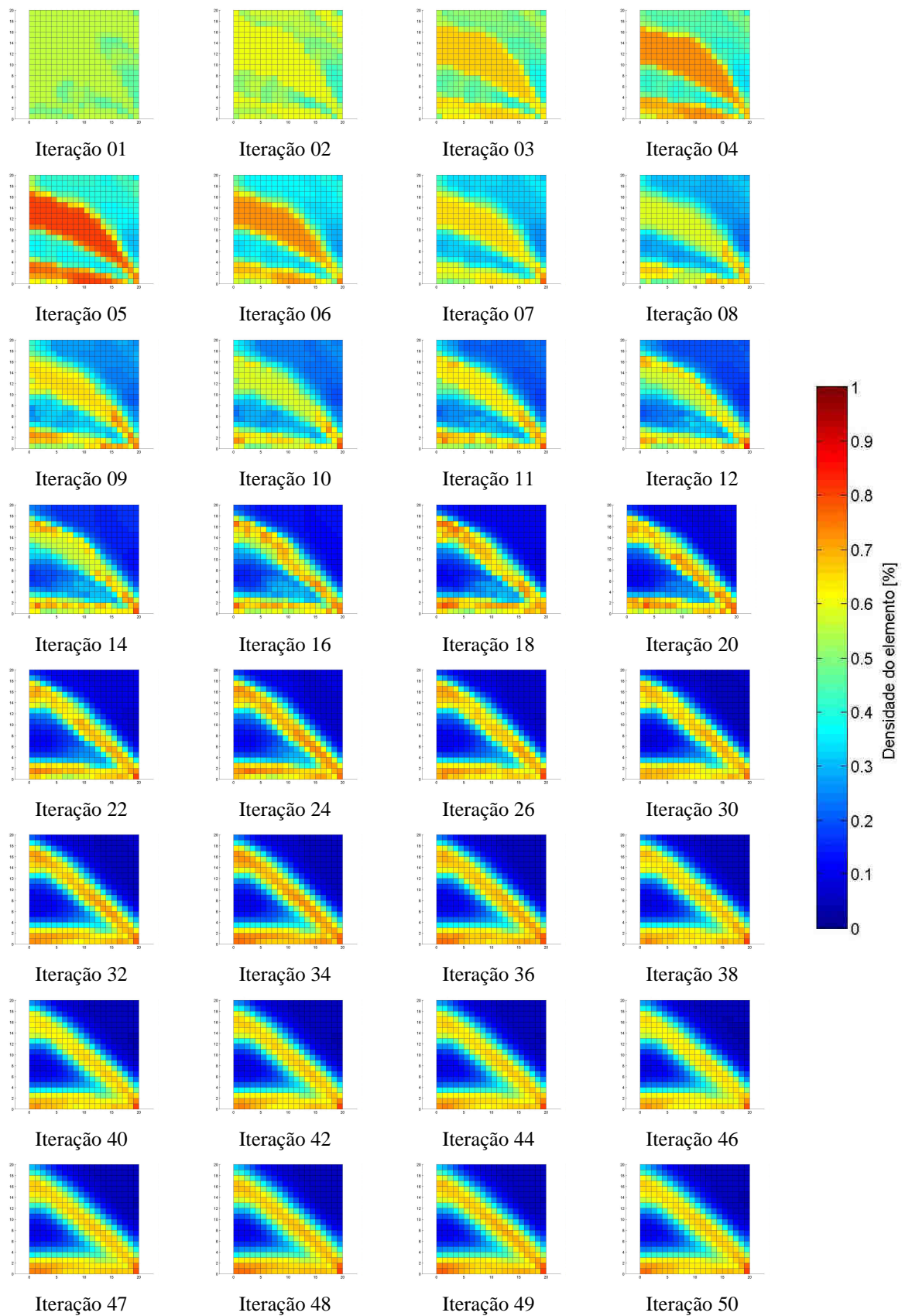
Zhang, S.C.; Zhu, J.; Gao, T. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: A B-spline cell method combined with level set function, **Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.278, p.361-387, 2014.

Zienkiewicz, O.C.; Zhu, J.Z. *A simple estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p.337-357, 1987.

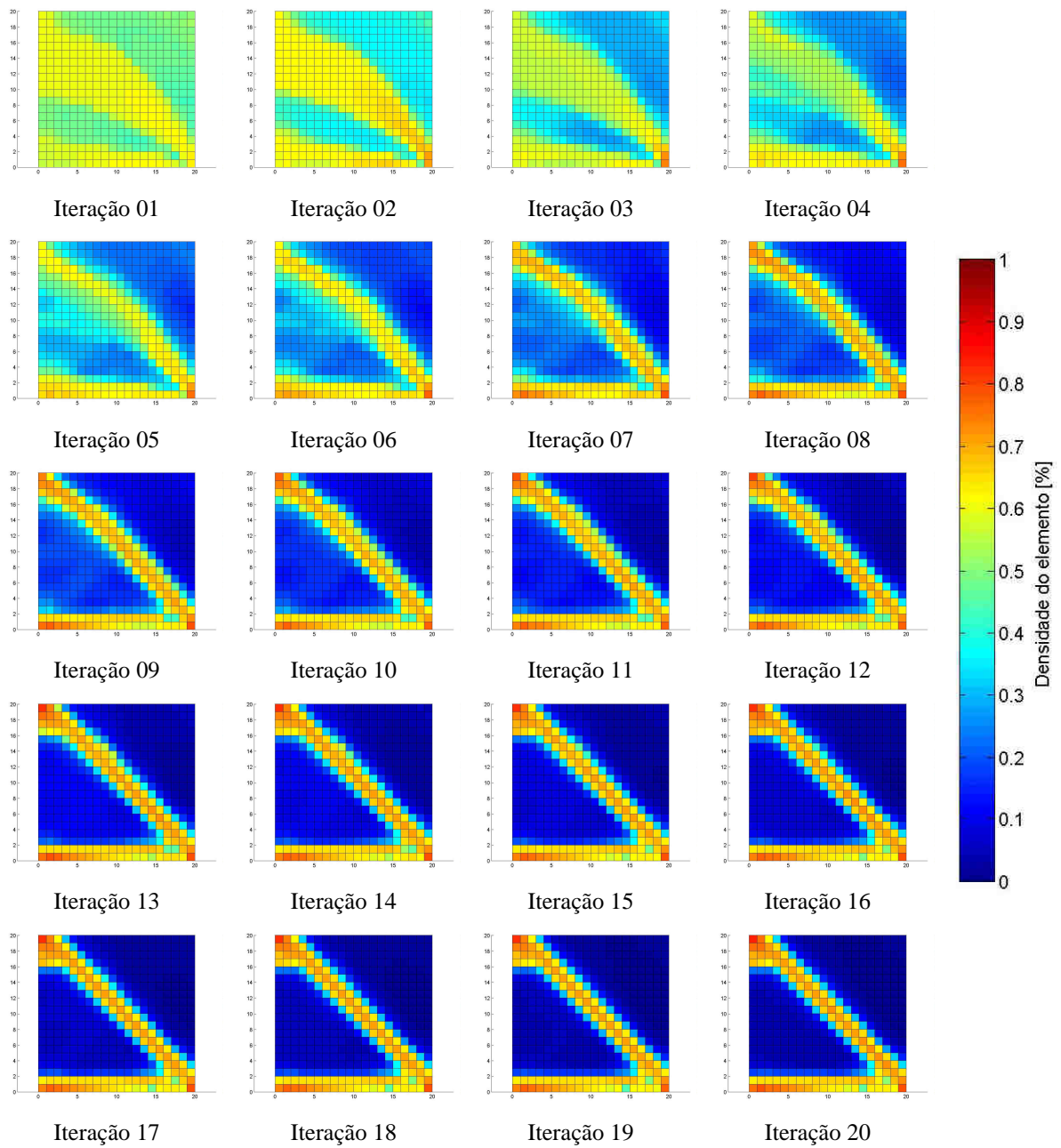
## APÊNDICE A

Este apêndice apresenta figuras com a variação da densidade nos elementos com o passar das iterações para todos os casos avaliados.

Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP.....	69
Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP + modelo substituto.....	70
Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP + modelo substituto + remoção de elementos.....	71
Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 1 – Sem estimador de erro.....	72
Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 1 – Com estimador de erro.....	73
Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 2.....	74
Caso 3 – Densidade dos elementos.....	75
Caso 4 – Densidade dos elementos.....	76

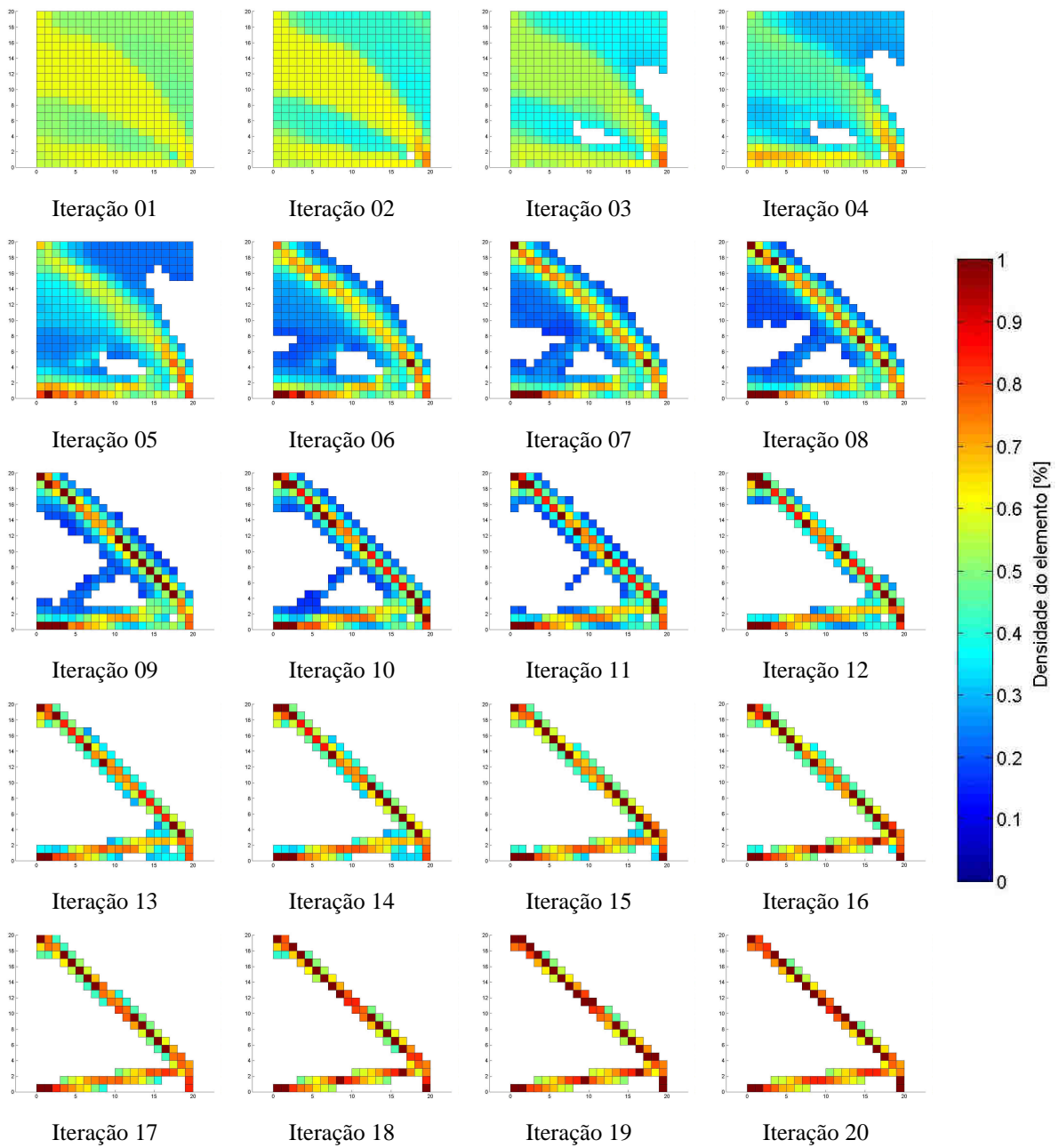


**Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP**

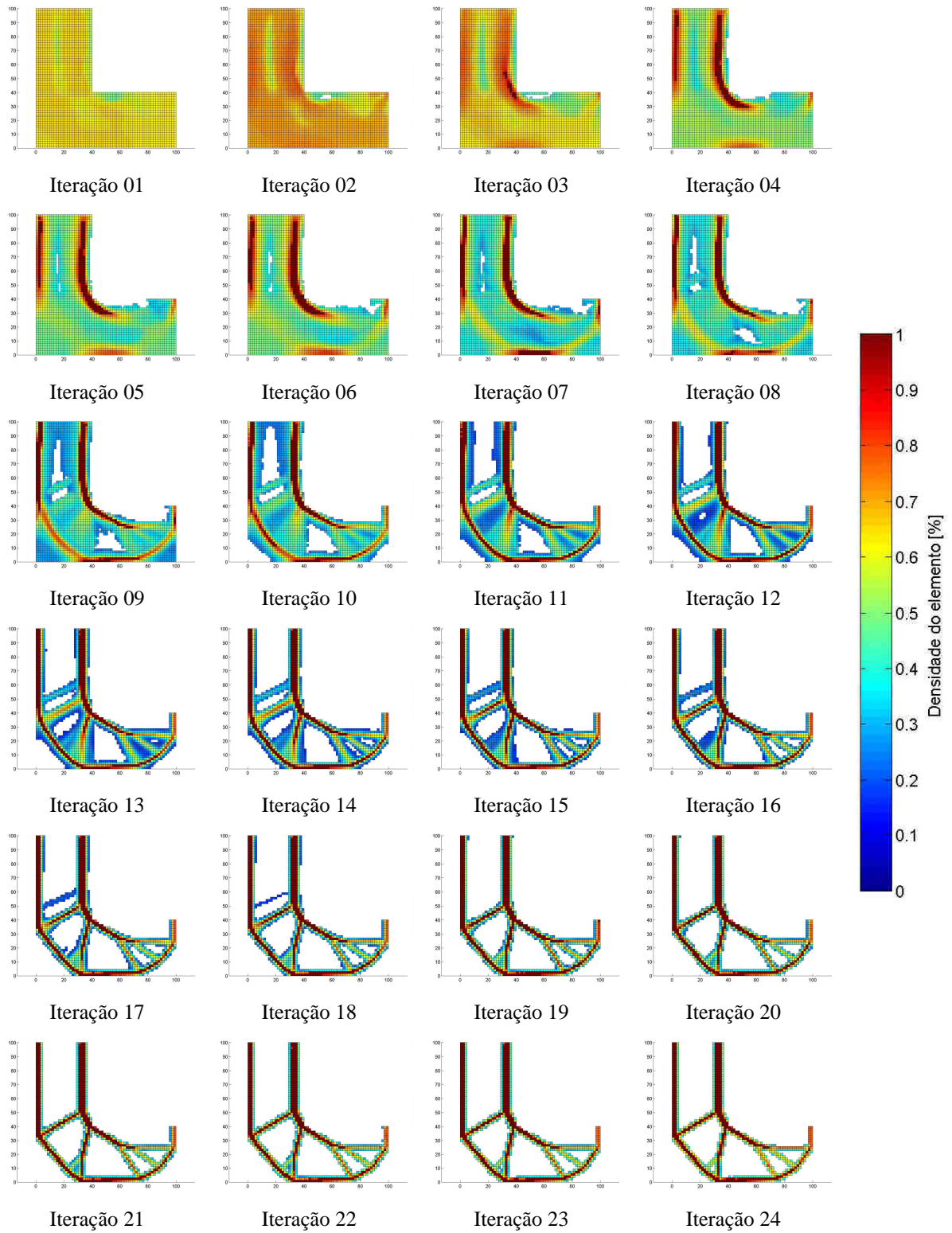


**Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP + modelo substituto**

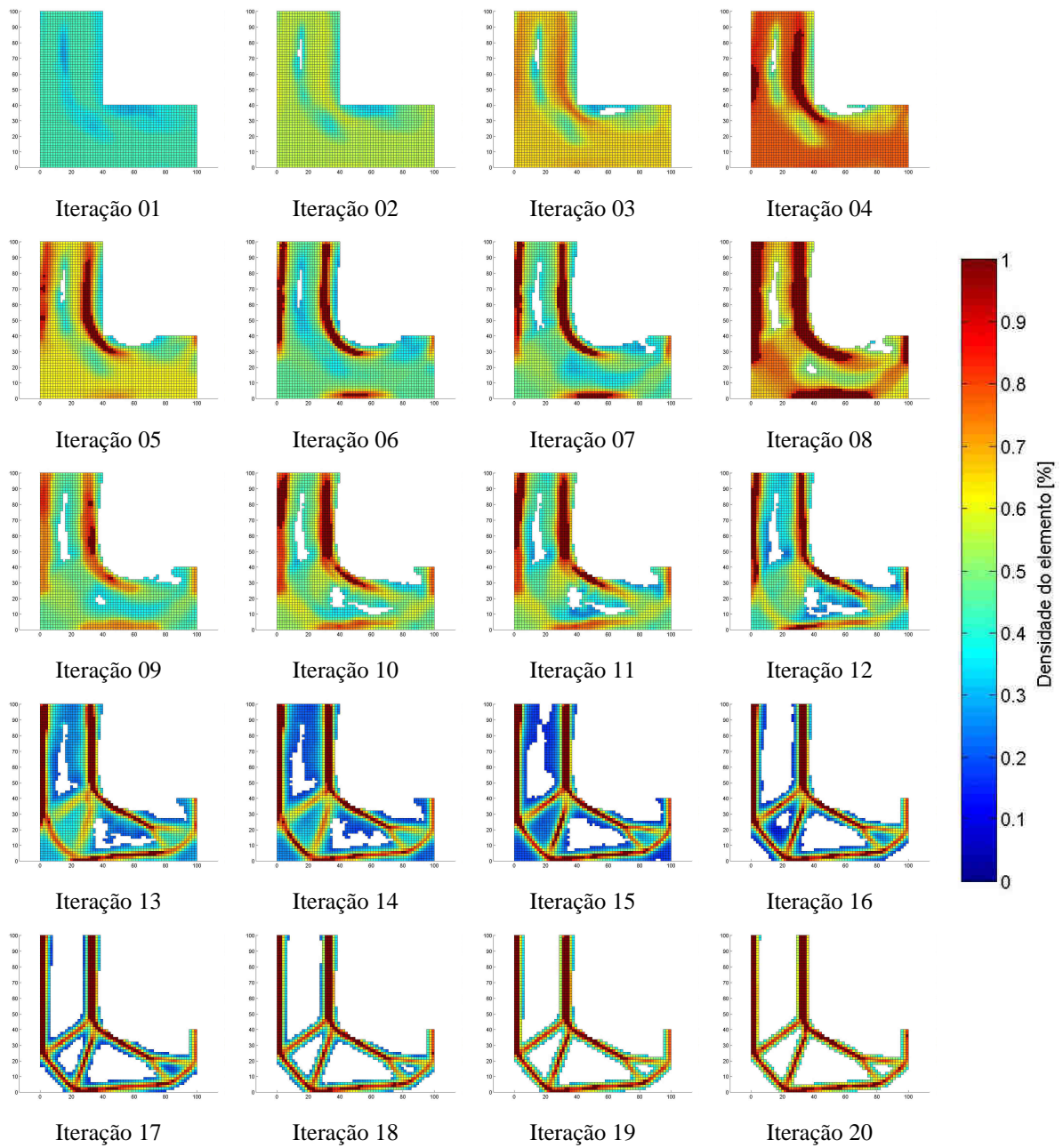




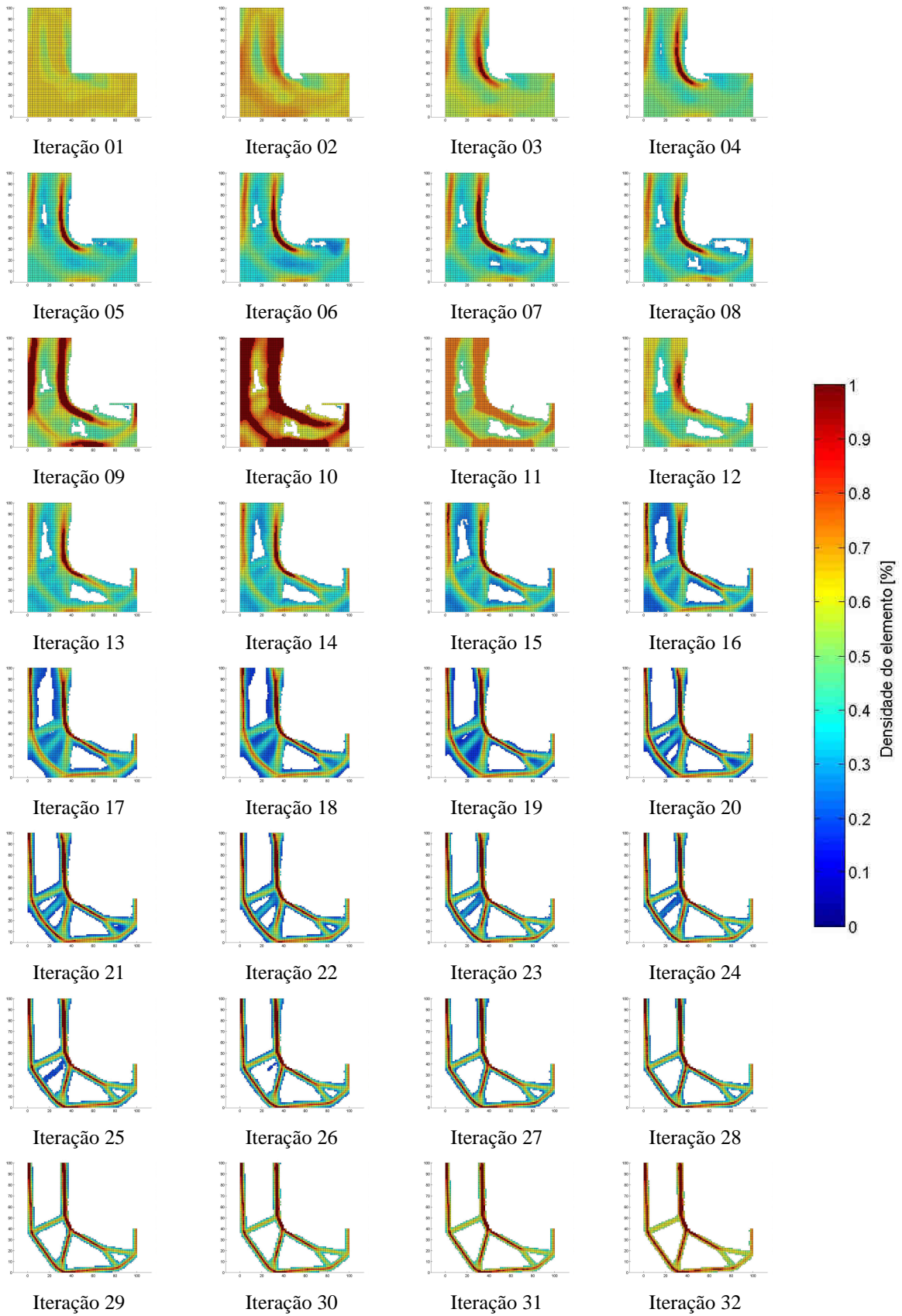
**Caso 1 – Densidade dos elementos – SLP + modelo substituto + remoção de elementos**



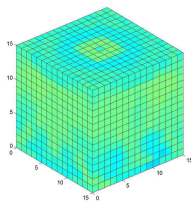
**Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 1 – Sem estimador de erro**



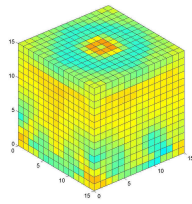
**Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 1 – Com estimador de erro**



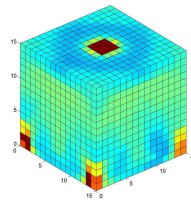
**Caso 2 – Densidade dos elementos – Malha 2**



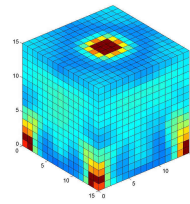
Iteração 01



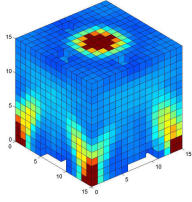
Iteração 02



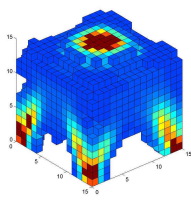
Iteração 04



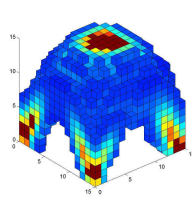
Iteração 06



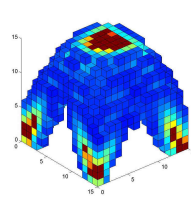
Iteração 08



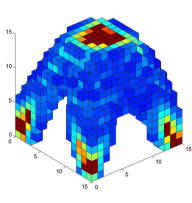
Iteração 10



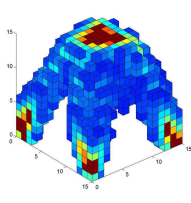
Iteração 12



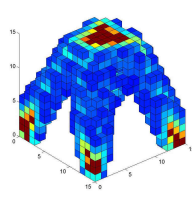
Iteração 14



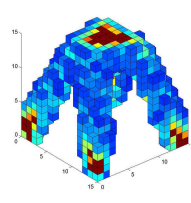
Iteração 16



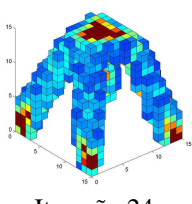
Iteração 18



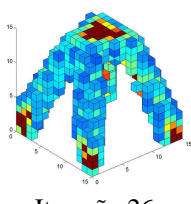
Iteração 20



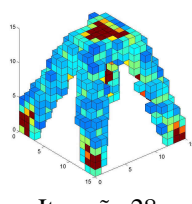
Iteração 22



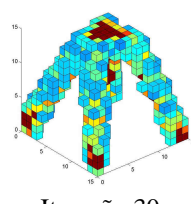
Iteração 24



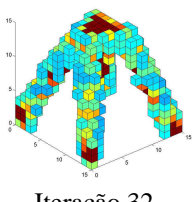
Iteração 26



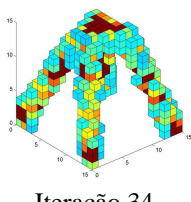
Iteração 28



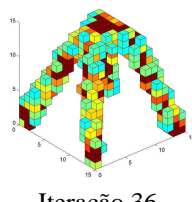
Iteração 30



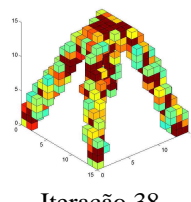
Iteração 32



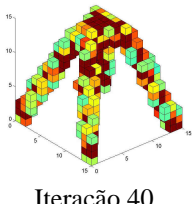
Iteração 34



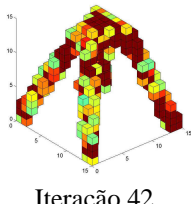
Iteração 36



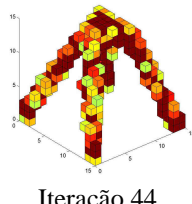
Iteração 38



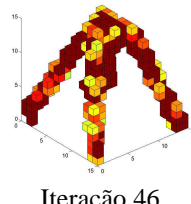
Iteração 40



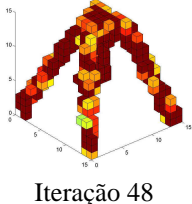
Iteração 42



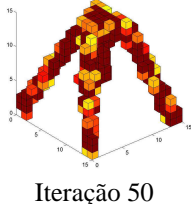
Iteração 44



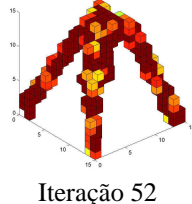
Iteração 46



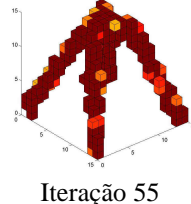
Iteração 48



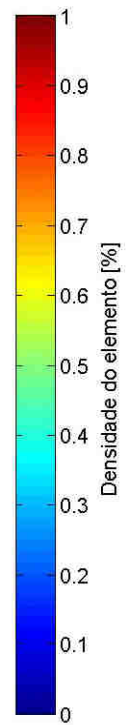
Iteração 50



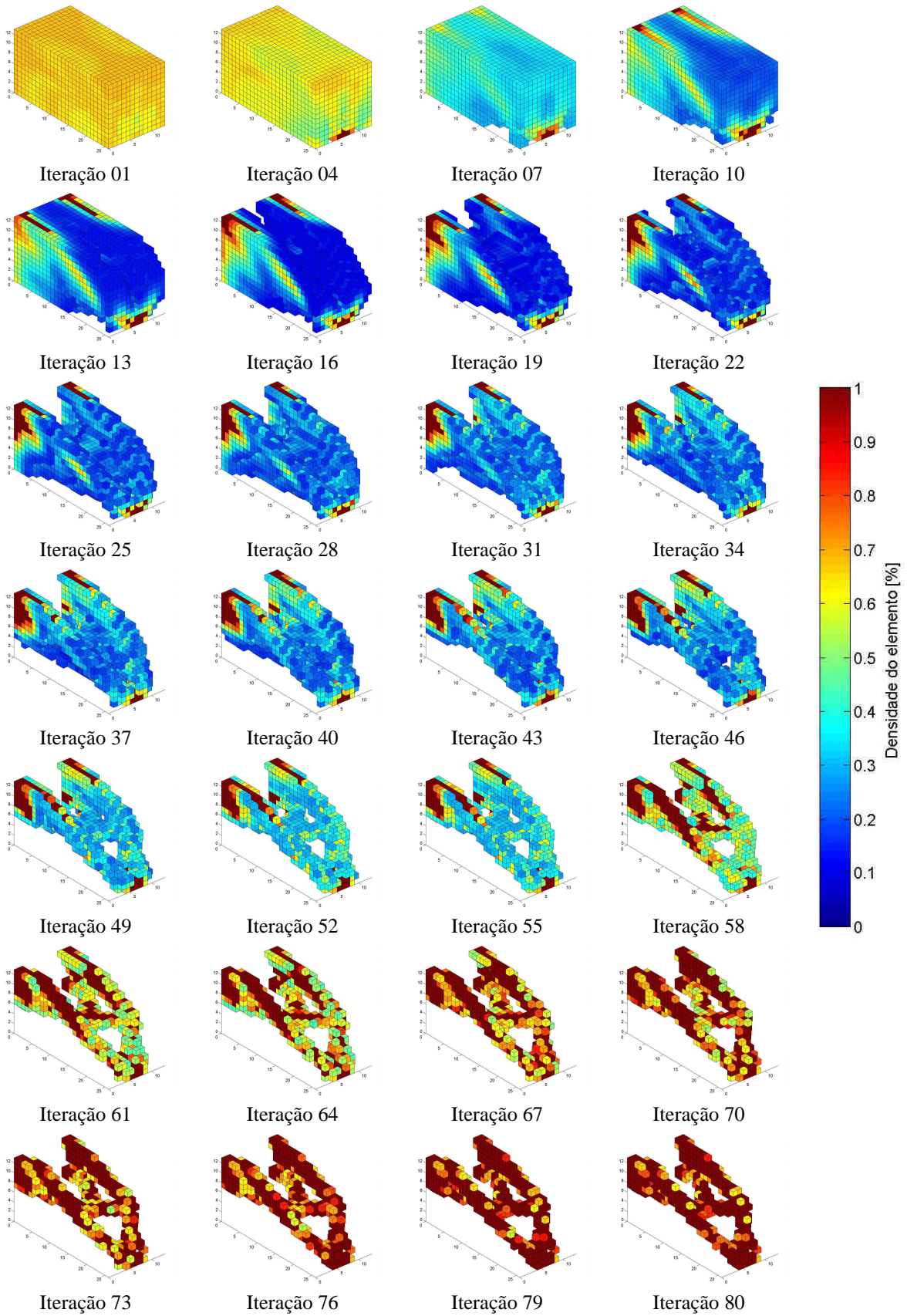
Iteração 52



Iteração 55



### Caso 3 – Densidade dos elementos



**Caso 4 – Densidade dos elementos**