

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS SIMP E BESO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE
ESTRUTURAS

por

Ricardo Frederico Leuck Filho

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2015



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS SIMP E BESO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE
ESTRUTURAS

por

Ricardo Frederico Leuck Filho

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de avaliação:

Prof^a. Dr^a. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Porto Alegre, junho de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao orientador do trabalho, Professor Walter Jesus Paucar Casas pela proposição do tema, discussões teóricas e pelas oportunidades de desenvolvimento acadêmico proporcionadas a cada semestre ao longo do curso.

Agradeço aos meus pais, Ricardo Frederico Leuck e Moema Felske Leuck e a meu irmão, Alexandre Leuck.

Agradeço aos excelentes professores da UFRGS pelas experiências de aprendizado.

Agradeço aos colegas e amigos da engenharia por todos os momentos compartilhados.

LEUCK FILHO, R. F. **Avaliação dos métodos SIMP e BESO de otimização topológica de estruturas**. 2015. 26. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

RESUMO

Neste trabalho os métodos de otimização topológica de estruturas SIMP e BESO são avaliados de maneira quantitativa. A eficiência das soluções numéricas é obtida por comparação com resultados de expressões analíticas para o peso ótimo de treliças planas. Curvas de eficiência das soluções numéricas em função da restrição de fração de volume imposta foram obtidas para malhas refinadas sucessivamente. Os métodos geraram topologias eficientes na maioria dos casos avaliados, com uma exceção. O método BESO se mostrou incapaz de obter soluções eficientes para baixas frações de volume e malhas pouco refinadas, enquanto o método SIMP demonstrou ser mais robusto.

PALAVRAS-CHAVE: otimização topológica, método SIMP, método BESO, método dos elementos finitos.

LEUCK FILHO, R. F. **Evaluation of SIMP and BESO methods for structural topology optimization.** 2015. 26. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ABSTRACT

This work features a quantitative evaluation of the SIMP and BESO methods of structural topology optimization. The efficiency of numerical solutions is evaluated by comparison with analytic results for least-weight plane trusses. Efficiency curves are obtained with regard to imposed volume fraction for successively finer meshes. Both methods obtained efficient solutions in most cases with one exception. The BESO method failed to achieve efficient solutions for low volume fractions and coarse meshes while the SIMP method proved to be more robust.

KEYWORDS: topology optimization, SIMP method, BESO method, finite elements method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
3.1	Soluções exatas para otimização estrutural de treliças	2
3.1.1	Solução para a viga engastada com carga pontual na extremidade	3
3.1.2	Solução para a viga simplesmente apoiada com carga aplicada na metade do comprimento	4
3.2	Método SIMP de otimização topológica	5
3.3	Método BESO de otimização topológica	6
3.4	Filtros para otimização topológica	7
3.4.1	Filtragem por convolução com a função cone	7
3.4.2	Filtragem por aplicação da equação de Helmholtz	7
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	8
4.1	Método SIMP	8
4.1.1	Viga engastada	8
4.1.2	Viga MBB	9
4.2	Método BESO	9
4.2.1	Viga engastada	10
4.2.2	Viga MBB	10
4.3	Comparação entre as topologias resultantes	10
5	CONCLUSÃO	13
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	14
	APÊNDICE A – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO PESO ÓTIMO DA VIGA DE MICHELL	16
	APÊNDICE B – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO PESO ÓTIMO DA VIGA MBB	17
	APÊNDICE C – TABELAS DE RESULTADOS	18

1 INTRODUÇÃO

A fundamentação e o desenvolvimento de métodos mais eficientes de otimização topológica é de importância para oferecer mais ferramentas de projeto a engenheiros.

O projeto de uma estrutura qualquer consiste em determinar onde, dentro de um espaço determinado, será utilizado material de forma a transmitir esforços entre regiões da fronteira do sistema. Métodos de otimização topológica podem ser aplicados de forma a se obter a configuração e a proporção ótima dos elementos estruturais, servindo de base para um projeto mais elaborado.

Métodos numéricos de otimização topológica vem sendo desenvolvidos desde o final dos anos 80 (Rozvany, 2009) a partir da publicação de Bendsøe e Kikuchi (1988). Para uma visão geral dos métodos de otimização topológica sendo estudados e aplicados atualmente o leitor é referido aos artigos de Rozvany (2001) e Sigmund e Maute (2013).

A validação dos métodos de otimização numérica é, em muitos casos, realizada apenas por comparação visual dos resultados obtidos para problemas simples com soluções analíticas conhecidas (Rozvany e Sokół, 2014).

Neste trabalho, dois métodos de otimização topológica serão avaliados de acordo com a metodologia proposta por Rozvany (1998).

Os métodos serão avaliados para o problema da viga engastada com carga concentrada na extremidade e para o problema da viga simplesmente apoiada. Ambos possuem solução analítica na forma de treliças de Michell (Lewiński et al., 1994b; Lewiński et al., 1994a) que serão utilizadas para quantificar a eficiência das soluções numéricas.

Neste trabalho serão avaliados os métodos SIMP, implementado conforme Bendsøe e Sigmund (2003), e BESO, implementado conforme Huang e Xie (2010), que serão devidamente apresentados nas seções 3.2 e 3.3.

1.1 Objetivos

Avaliar a eficiência de métodos SIMP e BESO de otimização topológica conforme a metodologia proposta por Rozvany e Sokół (2014). O peso estrutural das topologias geradas por cada método será comparado com peso de soluções analíticas para o mesmo valor de flexibilidade.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Métodos de otimização topológica de sólidos 2D vem sendo propostos desde o final dos anos 80. Alguns pesquisadores disponibilizam códigos simples com implementações de seus métodos de otimização para fins didáticos. Sigmund (2001) apresentou um programa em linguagem MATLAB para otimização topológica usando o método SIMP. Andreassen et al. (2011) apresentaram uma versão mais eficiente do programa, utilizando técnicas de vetorização de laços. Apresentam também várias modificações possíveis para aplicar filtragem por convolução ou pela equação de Helmholtz. Huang e Xie (2010, cap. 4) apresentam um programa em linguagem Matlab baseado no código de Sigmund (2001) para otimização topológica pelo método BESO.

A verificação quantitativa das topologias geradas por algoritmos de otimização não costuma ser realizada. Lewiński et al. (1994a) validam seus resultados analíticos por comparação com o peso obtido por método numérico de otimização de treliças e apresentam resultados obtidos pelo método SIMP para fins de comparação visual das topologias.

Rozvany (1998) propõe testes padrão para avaliar a performance de diferentes técnicas de otimização topológica com base em soluções analíticas de treliças de Michell. Rozvany cita os trabalhos de Lewiński et al. (1994b, 1994a) onde foram obtidas expressões analíticas para o peso ótimo de vigas engastadas e da viga MBB. Rozvany (2009) propõe um procedimento para verificar a qualidade de métodos de otimização topológica.

Quanto a técnicas de filtragem, Sigmund e Petersson (1998) avaliam problemas de dependência de malha e padrões de tabuleiro de xadrez em otimização topológica e apresentam

um resumo dos métodos de mitigação. Bourdin (2001) apresentou prova matemática de que a filtragem de densidades por convolução gera um problema com solução e obteve a função objetivo e suas derivadas. Lazarov e Sigmund (2011) utilizam a equação de Helmholtz para suavizar as densidades ou as sensibilidades como uma alternativa mais eficiente em termos computacionais. Sigmund e Maute (2012), em nota, propõem um filtro de sensibilidades baseado na elasticidade de segunda ordem de Ru e Aifantis (1993) e Askes et al. (2008). A elasticidade de segunda ordem pode eliminar singularidades no campo de deformações e tensões.

Rozvany (2009) aponta as qualidades e inconsistências dos métodos de otimização topológica mais populares. Sigmund e Maute (2013) comentam o estado atual de desenvolvimento dos métodos de otimização topológica mais importantes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Soluções exatas para otimização estrutural de treliças

Nesta seção serão reproduzidas as formulações para o cálculo do peso estrutural ótimo da viga engastada com carga na extremidade (Lewiński et al., 1994b) e da viga simplesmente apoiada, também chamada de viga de Messerschmidt-Bölkow-Blohm (MBB) (Lewiński et al., 1994a). Primeiramente devem ser definidas as funções

$$I_n(\alpha, \beta) = (\alpha\beta)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta)^k}{k!(k+n)!} \quad (3.1)$$

$$G_n(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{\alpha\beta}) \quad (3.2)$$

$$F_n(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m G_{2m+n}(\alpha, \beta) \quad (3.3)$$

$$x(\alpha, \beta) = \bar{x}(\alpha, \beta) \cos \phi - \bar{y}(\alpha, \beta) \sin \phi \quad (3.4)$$

$$y(\alpha, \beta) = \bar{x}(\alpha, \beta) \sin \phi - \bar{y}(\alpha, \beta) \cos \phi \quad (3.5)$$

onde α e β são coordenadas curvilíneas, \bar{x} e \bar{y} são funções que mapeiam (α, β) para (x, y) e $\phi = \beta - \alpha$.

O peso ótimo adimensional $\bar{\Phi}$ é dado por

$$\bar{\Phi} = \Phi_S \frac{\sigma_0}{P\rho h} \quad (3.6)$$

onde Φ_S é o peso estrutural ótimo para uma restrição de tensão nos membros, σ_0 é a tensão admissível, P é a carga aplicada, ρ é o peso específico do material da treliça. h será definido para cada caso.

O peso estrutural pode ser expresso em termos de restrição na flexibilidade estrutural C (compliance), conforme Rozvany (1998)

$$\Phi_C = \frac{\sigma_0^2}{\rho EC} \Phi_S^2 \quad (3.7)$$

onde E é o módulo de Young do material. Definindo $\Phi_N = \rho V$ como sendo o peso estrutural obtido de uma solução numérica com flexibilidade estrutural C , a eficiência do método numérico pode ser definida, segundo Rozvany e Sokół (2014), por

$$E_N = \frac{\Phi_C}{\Phi_N} \quad (3.8)$$

A eficiência E_N varia de 0 a 1, com valores próximos de 1 indicando um método eficiente de otimização topológica.

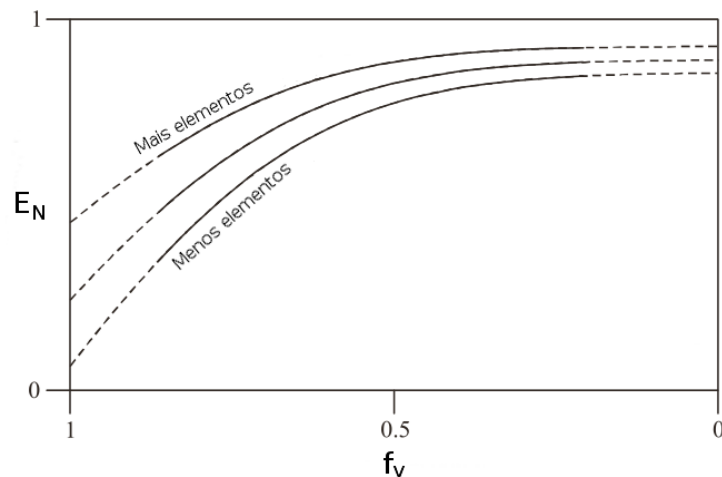


Figura 3.1 – Curva de eficiência de método numérico de otimização topológica. Fonte: Rozvany e Sokół (2014)

Segundo Rozvany e Sokół (2014), a eficiência deve ser avaliada para malhas sucessivamente mais refinadas, para um intervalo de frações de volume e extrapolada para fração de volume tendendo a zero ($f_v \rightarrow 0$). A curva de eficiência sugerida por Rozvany e Sokół (2014) é reproduzida na figura 3.1. O valor da assíntota horizontal de E_N com $f_v \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ deve ser usado para comparar diferentes métodos de otimização topológica.

3.1.1 Solução para a viga engastada com carga pontual na extremidade

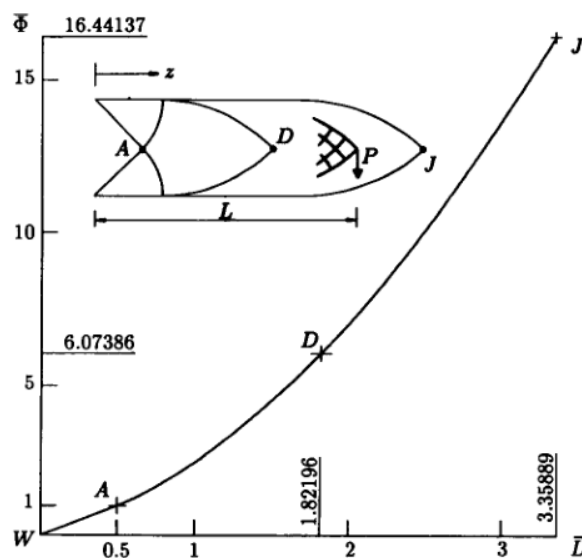


Figura 3.2 – Peso adimensional em função do comprimento adimensional da viga engastada. Fonte: Lewiński et al. (1994b).

A solução analítica para o peso ótimo Φ_S da viga engastada com carga na extremidade

(Lewiński et al., 1994b) sujeita a uma restrição de tensão nos membros é

$$\Phi_S = Pw\rho/\sigma_0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{h} = & (1 + 2\alpha)G_0(\alpha, \alpha) + 2\alpha G_1(\alpha, \alpha) - 2(\alpha - \theta)G_0(\alpha - \theta, \alpha + \theta) \\ & - 4(\alpha + 1)G_1(\alpha - \theta, \alpha + \theta) - 2(\alpha + \theta)G_2(\alpha - \theta, \alpha + \theta) + 4F_1(\alpha - \theta, \alpha + \theta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde h é a altura da viga no engaste. Para que a viga considerada tenha os lados paralelos no comprimento deve ser utilizado $\theta = \frac{\pi}{4}$.

A equação 3.10 é válida para a região DJ (figura 3.2). As soluções para vigas mais curtas (região AD) não serão reproduzidas aqui. Para determinar o comprimento L da viga deve-se usar as equações 3.4 e 3.5 com $\alpha = \beta$ e

$$\begin{aligned} \bar{x}(\alpha, \beta)/h = & [F_1(\alpha, \beta) + F_2(\beta, \alpha) - F_1(\alpha - \theta, \beta + \theta) - F_2(\alpha - \theta, \beta + \theta) \\ & - F_2(\beta - \theta, \alpha + \theta) - F_3(\beta - \theta, \alpha + \theta)]/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\bar{y}(\alpha, \beta) = \bar{x}(\beta, \alpha) \quad (3.12)$$

$$L = \frac{h}{2} + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.13)$$

Na figura 3.2, $\bar{L} = L/h$ é o comprimento adimensional da viga (ou sua razão de aspecto).

3.1.2 Solução para a viga simplesmente apoiada com carga aplicada na metade do comprimento

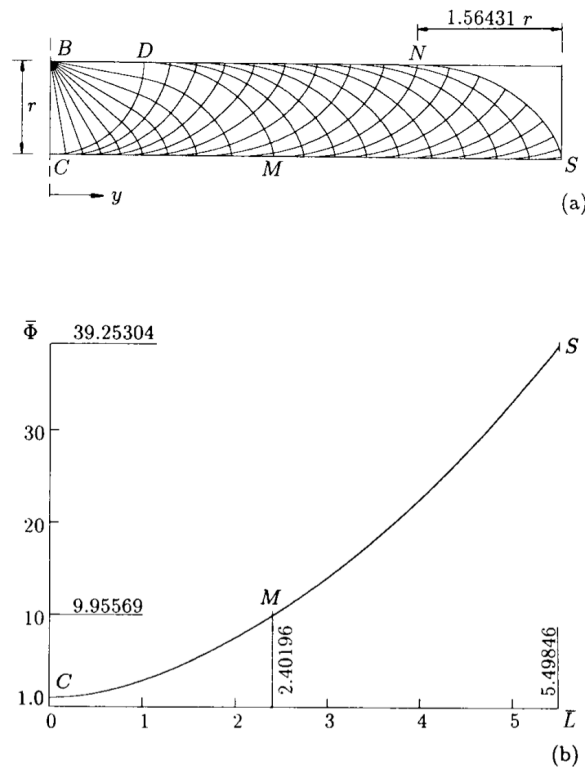


Figura 3.3 – Peso adimensional em função do comprimento adimensional da viga MBB. Fonte: Lewiński et al. (1994a).

A solução analítica para o peso ótimo Φ_S da viga MBB (Lewiński et al., 1994a) sujeita a uma restrição de tensão nos membros é

$$\Phi_S = Pu_x\rho/\sigma_0 \quad (3.14)$$

$$u_x/r = \begin{cases} G_0(\alpha, \alpha) + 2F_2(\alpha, \alpha), & \alpha \in [0, \theta] \\ G_0(\alpha, \alpha) + 2F_2(\alpha, \alpha) + 4\theta[G_3(\alpha - \theta, \alpha + \theta) - G_1(\alpha - \theta, \alpha + \theta)] \\ \quad + 4[3G_2(\alpha - \theta, \alpha + \theta) - 4F_2(\alpha - \theta, \alpha + \theta)], & \alpha \in [\theta, 2\theta] \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $h = r$ (mostrado na figura 3.3) e $\theta = \frac{\pi}{2}$ deve ser utilizado para considerar uma viga de lados paralelos ao longo do comprimento.

Para determinar o comprimento adimensional $\bar{L} = L/h$ da viga deve-se usar as equações 3.4 e 3.5 com $\alpha = \beta$ e

$$\bar{x}(\alpha, \beta)/r = F_2(\beta, \alpha) - F_2(\alpha, \beta) + F_2(\alpha - \theta, \beta + \theta) - F_2(\beta - \theta, \alpha + \theta) \\ - F_4(\alpha - \theta, \beta + \theta) + F_4(\beta - \theta, \alpha + \theta) \quad (3.16)$$

$$\bar{y}(\alpha, \beta)/r = F_1(\beta, \alpha) - F_3(\alpha, \beta) + F_3(\alpha - \theta, \beta + \theta) - F_1(\beta - \theta, \alpha + \theta) \\ - F_5(\alpha - \theta, \beta + \theta) + F_3(\beta - \theta, \alpha + \theta) \quad (3.17)$$

$$L = y \quad (3.18)$$

3.2 Método SIMP de otimização topológica

O método *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) será apresentado nesta seção. O domínio de projeto é discretizado por elementos quadriláteros regulares e é empregada uma abordagem baseada em densidade para a otimização topológica. Cada elemento e tem uma densidade x_e associada que define seu módulo de elasticidade E_e conforme a equação 3.19.

$$E_e = E_{min} + x_e^p(E_0 - E_{min}), \quad x_e \in [0, 1] \quad (3.19)$$

onde E_0 é o módulo de Young do material, E_{min} é um valor mínimo para o módulo de elasticidade e p é um fator de penalização de densidades intermediárias. O valor mínimo do módulo de elasticidade serve para evitar que a matriz de rigidez do sistema se torne singular, conforme proposto por Sigmund (2007).

Deseja-se encontrar a distribuição ótima de material no domínio de projeto, respeitadas as restrições ao volume total e às variáveis de projeto. A definição formal do problema de otimização segue:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} : \quad C(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} &= \sum_{e=1}^N E_e(x_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_e \\ \text{sujeito a} : \quad V(\mathbf{x})/V_T &= f_v \\ \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ 0 \leq x_e &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $C(\mathbf{x})$ é a flexibilidade, \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez elementar, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, $V(\mathbf{x})$ é o volume estrutural, V_T é o volume total do domínio de projeto e f_v é a fração do volume total do domínio. As sensibilidades elementares são dadas por

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_e \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = v_e \quad (3.22)$$

onde foram considerados elementos de tamanho unitário de forma que $v_e = 1$.

Para o problema de minimização da flexibilidade estrutural com restrição no volume, várias metodologias de otimização chegam a resultados satisfatórios, conforme apontado por Sigmund e Maute (2013). Neste estudo será utilizado o método do critério de otimalidade (*Optimality Criteria*) (Bendsøe e Kikuchi, 1988) para atualizar os valores do vetor de variáveis de projeto a cada iteração.

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(0, x_e - m) & \text{se } x_e B_e^\eta \leq \max(0, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{se } x_e B_e^\eta \geq \min(1, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{outros casos} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$B_e = \frac{-\frac{\partial C}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}} \quad (3.24)$$

onde η é $\frac{1}{2}$, λ é o multiplicador de lagrange que deve ser determinado por método iterativo de forma a respeitar a restrição de volume e $m(= 0,2)$ é o limite de movimentação por iteração.

O critério de convergência utilizado é

$$|x_e^k - x_e^{k-1}| < 0,02 \quad (3.25)$$

para todos os elementos do domínio, onde k é o número da iteração.

O problema descrito pelas equações 3.19, 3.20 e 3.21 leva, contudo, a problemas como dependência de malha dos resultados e padrões de tabuleiro de xadrez na topologia gerada. Sigmund e Petersson (1998) analisam diversos métodos que foram desenvolvidos para tentar resolver estes problemas. Métodos de filtragem do campo de densidades e/ou sensibilidades são popularmente empregados e de custo computacional relativamente baixo.

Neste trabalho as rotinas de Matlab para otimização pelo método (SIMP) apresentadas por Andreassen et al. (2011) serão utilizadas e adaptadas para realizar otimização pelo método BESO.

3.3 Método BESO de otimização topológica

Inspirado em conceitos de evolução biológica, o método *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) ordena os elementos do domínio em função de uma medida de eficiência e remove os elementos menos eficientes até atingir o volume alvo.

No método BESO, parte-se de uma configuração inicial (usualmente considerando-se o domínio de projeto inteiro sólido) a partir da qual as sensibilidades são calculadas e ordenadas. A cada iteração uma fração $er(= 0,02)$ dos elementos com menor sensibilidade são trocados por vazios até que se atinja a restrição de volume. Nas iterações subsequentes as sensibilidades continuam sendo calculadas e ordenadas de modo que elementos retirados podem ser restituídos se suas sensibilidades forem maiores que a de elementos sólidos.

No presente trabalho, o método BESO foi implementado de acordo com a formulação apresentada por Huang e Xie (2010, cap. 4), adaptada para a relação densidade-rigidez apresentada na equação 3.19. Ao utilizar interpolação de material com penalização, o método BESO pode ser considerado um caso particular do método SIMP onde as densidades x_e podem assumir somente valores discretos (Sigmund e Maute, 2013). No caso de otimização topológica com somente um material sólido, $x_e \in \{0, 1\}$.

O critério de convergência utilizado é

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^5 C_{k+1-i} - \sum_{i=1}^5 C_{k-5+1-i} \right|}{\sum_{i=1}^5 C_{k+1-i}} < 0,005 \quad (3.26)$$

onde C_k é a flexibilidade estrutural obtida na k -ésima iteração.

3.4 Filtros para otimização topológica

3.4.1 Filtragem por convolução com a função cone

A utilização de filtros em otimização topológica em geral tem por objetivo evitar a formação de padrões de tabuleiro de xadrez e limitar o tamanho mínimo dos membros estruturais. Filtros aplicados para melhorar os resultados dos métodos de otimização podem ser aplicados ao campo de densidades x_e ou ao campo de sensibilidades $\frac{\partial C}{\partial x_e}$.

O filtro de densidades por convolução com a função cone é comumente empregado. A função cone é dada por

$$H_{ei}(r_{min}) = \max(0, r_{min} - r_{ei}) \quad (3.27)$$

onde r_{min} é o raio de aplicação do filtro e r_{ei} é a distância entre os centros dos elementos e e i . Para suavizar as densidades aplica-se

$$\tilde{x}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \quad (3.28)$$

onde \tilde{x}_e é a densidade filtrada do elemento e N_e é o conjunto de elementos em um raio r_{min} em torno do elemento e . As sensibilidades devem ser calculadas a partir das densidades filtradas, pela aplicação da regra da cadeia, conforme descrito por [Andreassen et al. \(2011\)](#).

Filtros suavizadores podem ser aplicados ao campo de sensibilidades. Para suavizar as sensibilidades por convolução aplica-se

$$\widetilde{\frac{\partial C}{\partial x_e}} = \frac{\sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial C}{\partial x_e}}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \quad (3.29)$$

onde $\gamma (= 10^{-3})$ é usado para evitar divisão por zero ([Andreassen et al., 2011](#)).

3.4.2 Filtragem por aplicação da equação de Helmholtz

A filtragem por aplicação da equação de Helmholtz, apresentada por [Lazarov e Sigmund \(2011\)](#), promete maior eficiência computacional em casos de otimização topológica com muitos elementos e raio de filtragem r_{min} abrangendo muitos elementos pois não necessita informações de vizinhança de cada elemento. A equação de Helmholtz aplicada ao campo f gera o campo suavizado \tilde{f} :

$$\tilde{f} - r_{min}^2 \nabla^2 \tilde{f} = f \quad (3.30)$$

com condição de contorno de Neumann

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (3.31)$$

Para filtrar as sensibilidades, utiliza-se $f = x_e \frac{\partial C}{\partial x_e}$. O filtro é aplicado resolvendo-se a equação 3.30 com o método dos elementos finitos, aproveitando-se a malha utilizada para a análise estrutural. Segundo [Lazarov e Sigmund \(2011\)](#), a condição de contorno de Neumann (eq. 3.31) é automaticamente atendida ao se utilizar elementos de primeira ordem.

Segundo [Sigmund e Maute \(2012\)](#) a aplicação do filtro de Helmholtz às sensibilidades equivale a considerar um problema de elasticidade suavizada por gradiente (elasticidade não-local) ao invés do problema da elasticidade clássica. A lei constitutiva da elasticidade clássica é

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^c \quad (3.32)$$

onde σ_{ij} e ε_{kl}^c são, respectivamente, as tensões e deformações e c_{ijkl} é o tensor constitutivo. Para obter as deformações suavizadas de acordo com a teoria da elasticidade não-local basta

aplicar o operador de Helmholtz nas deformações $\varepsilon^c = (1 - r^2 \nabla^2) \varepsilon^g$ de forma que a equação 3.32 se torna

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^g - r^2 \varepsilon_{kl,mm}^g) \quad (3.33)$$

Esta formulação pode ser estendida para a aplicação da equação de Helmholtz ao campo de energia de deformação da estrutura. A equação de Helmholtz também pode ser resolvida separadamente para cada componente do campo (Askes et al., 2008).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os métodos SIMP e BESO foram avaliados para os problemas apresentados na seção 3.1 com $\bar{L} = 3$, $E = 1$, $E_{min} = 10^{-9}$, $\nu = 0$, $p = 3$, $P = 1$ e $\rho = 1$. Foram utilizadas malhas retangulares compostas de elementos de estado plano de tensões quadrados bilineares de quatro nós. Os elementos tem tamanho unitário. As malhas utilizadas tem as seguintes configurações:

- a) 90 por 30 elementos;
- b) 150 por 50 elementos;
- c) 240 por 80 elementos;
- d) 300 por 100 elementos;
- e) 390 por 130 elementos.

Para a filtragem aplicou-se $r_{min} = 1,59$ em todos os casos, de forma que r_{min}/h se torna progressivamente menor conforme mais elementos são utilizados no domínio. Assim, tabuleiros de xadrez são suprimidos e soluções mais próximas das treliças analíticas são possíveis para uma malha suficientemente refinada.

As soluções analíticas para treliças planas consideram membros em estado uniaxial de tensões e o volume das interseções dos membros é considerado insignificante. Por este motivo, o coeficiente de Poisson $\nu = 0$ recomendado por Rozvany e Sokół (2014) é utilizado nos testes realizados.

A flexibilidade estrutural final, calculada após a convergência do processo de otimização, foi avaliada com $p = 1$ de forma a evitar que os elementos cinzentos obtidos no método SIMP tivessem sua rigidez subestimada.

As equações apresentadas na seção 3.1 foram utilizadas para determinar o peso estrutural ótimo. Para o problema da viga engastada com $\bar{L} = 3$, deve-se usar $\alpha = \beta = 1,39272760$ para obter $\bar{\Phi} = 13,5972$. A viga MBB com $\bar{L} = 3$ tem $\alpha = \beta = 1,88701752$ e $\bar{\Phi} = 14,09367$. Os valores de α para outros comprimentos adimensionais \bar{L} devem ser determinados por métodos iterativos.

Funções para o cálculo do peso estrutural ótimo Φ_C para restrição no valor da flexibilidade estrutural foram elaboradas em Octave (Eaton et al., 2014). As funções desenvolvidas (compatíveis com Matlab) são apresentadas nos apêndices A e B. As tabelas com as eficiências obtidas para cada caso são apresentadas no apêndice C.

4.1 Método SIMP

4.1.1 Viga engastada

A figura 4.1 mostra a curva de eficiência obtida com o método SIMP com filtragem por convolução. A eficiência da otimização com a malha mais refinada (390x130) e a menor fração de volume utilizada ($f_v = 0,2$) foi $E_N = 0,836$. A curva de eficiência deste método se mostrou pouco sensível à quantidade de elementos utilizada. Não é possível observar a convergência das eficiências com $f_v \rightarrow 0$.

Na figura 4.2 estão as eficiências obtidas para otimizações realizadas com filtragem de sensibilidades através de aplicação da equação de Helmholtz. A eficiência obtida para a malha de 390x130 com $f_v = 0,2$ é $E_N = 0,853$. A curva de eficiência para a malha menos

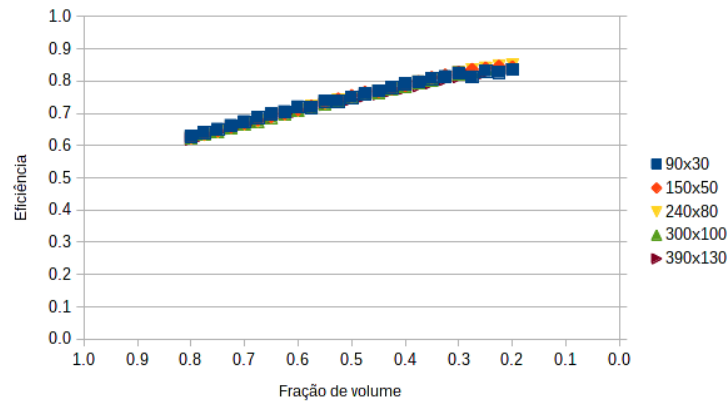


Figura 4.1 – Eficiência do método SIMP para o problema da viga engastada com filtragem por convolução.

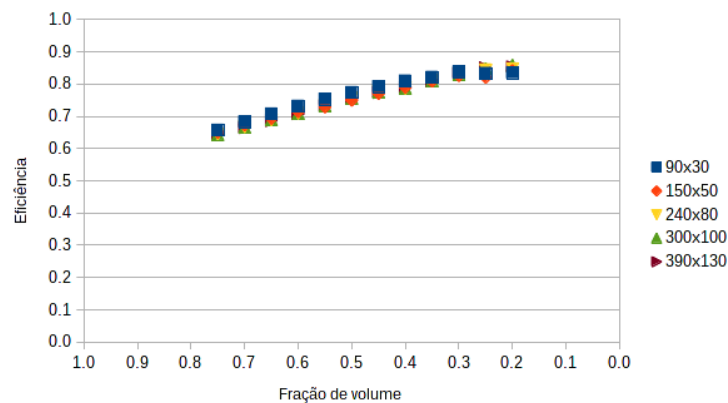


Figura 4.2 – Eficiência do método SIMP para o problema da viga engastada com filtragem de Helmholtz.

refinada (90x30) parece ter convergido para o valor limite de $E_N \approx 0,834$, o que pode ter sido causado pelo fato de que para um mesmo valor de r_{min} a filtragem de Helmholtz atua em mais elementos do que a filtragem por convolução com a equação 3.27.

4.1.2 Viga MBB

A figura 4.3 mostra a curva de eficiência obtida com o método SIMP com filtragem por convolução e a figura 4.4 apresenta as curvas para o método SIMP com filtragem das sensibilidades por aplicação da equação de Helmholtz.

4.2 Método BESO

O código MATLAB apresentado por [Andreassen et al. \(2011\)](#) para otimização topológica pelo método SIMP com filtragem por convolução foi modificado pelo autor do presente trabalho de forma a utilizar o método BESO, mantendo a técnica de filtragem por convolução. As modificações feitas implementaram o critério de atualização das variáveis de projeto e o critério de convergência de [Huang e Xie \(2010\)](#), conforme apresentado na seção 3.3. O parâmetro $er = 0,02$ foi utilizado.

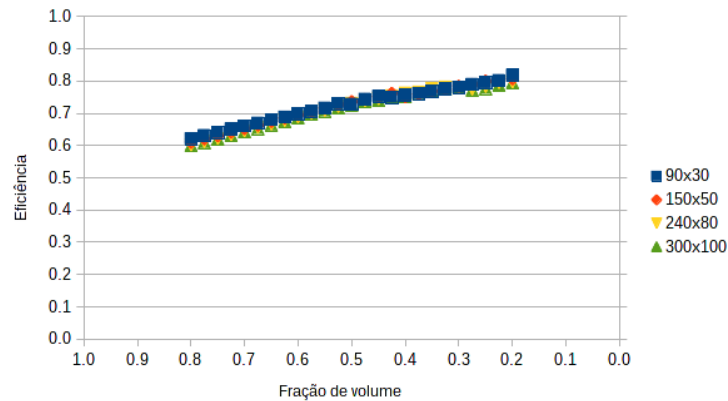


Figura 4.3 – Eficiência do método SIMP para o problema da viga MBB com filtragem por convolução.

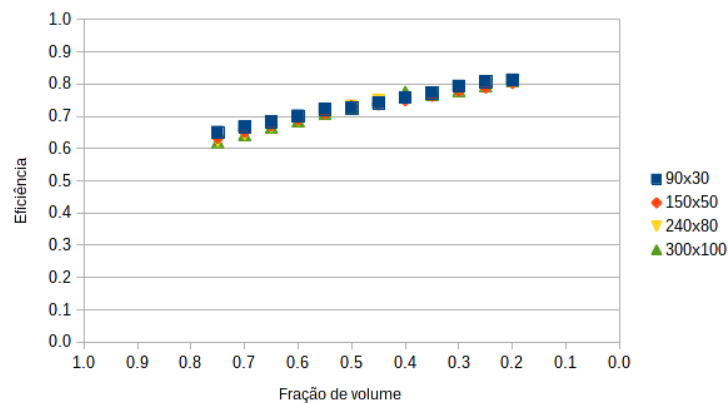


Figura 4.4 – Eficiência do método SIMP para o problema da viga MBB com filtragem de Helmholtz.

4.2.1 Viga engastada

Na figura 4.5 pode-se observar que o método BESO apresenta resultados inconsistentes para malhas grosseiras e pequenas frações de volume, quando comparado aos resultados do método SIMP com a mesma técnica de filtragem. A geometria obtida para $f_v = 0,2$ com a malha de 240x80 elementos apresentou uma eficiência baixa, de $E_N = 0,491$.

A eficiência obtida com a malha de 390x130 para $f_v = 0,2$ foi $E_N = 0,804$.

4.2.2 Viga MBB

As topologias obtidas pelo método BESO para o problema da viga MBB também apontam dificuldades do método em lidar com malhas grosseiras. A figura 4.6 mostra uma queda vertiginosa na eficiência das topologias obtidas com as malhas de 90x30 e 150x50 conforme $f_v \rightarrow 0$. Isto indica uma deficiência do método, independente da escolha do problema.

4.3 Comparação entre as topologias resultantes

As topologias obtidas para a viga engastada com filtragem por convolução e $f_v = 0,2$ através dos métodos SIMP e BESO são apresentadas na figura 4.7 e suas eficiências são apresentadas na tabela 4.1.

As topologias obtidas pelo método SIMP para a viga engastada mostraram pouca sensibilidade ao refino de malha. Apenas para a malha de 90x30 elementos a topologia gerada

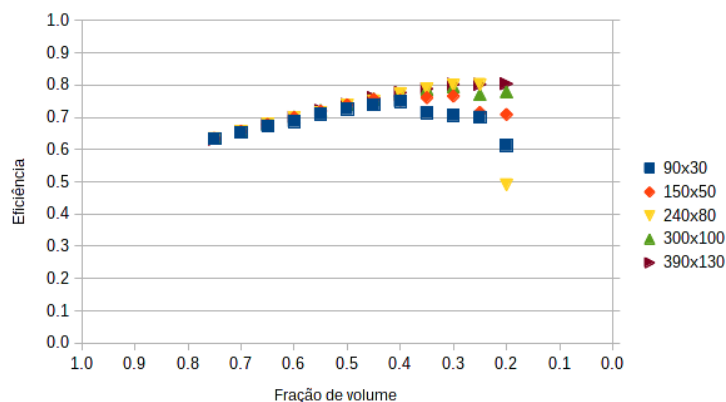


Figura 4.5 – Eficiência do método BESO para o problema da viga engastada com filtragem por convolução das sensibilidades.

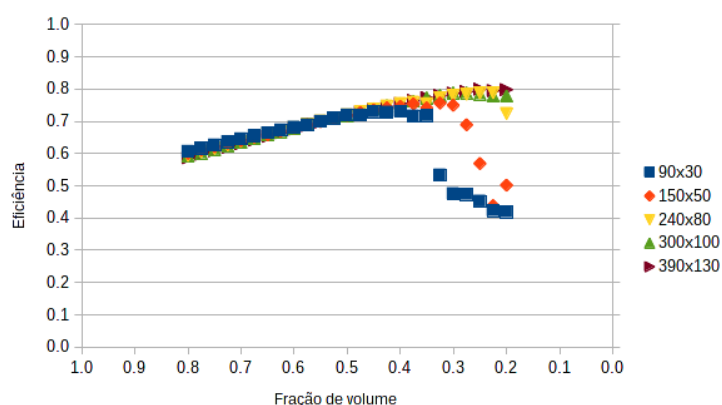


Figura 4.6 – Eficiência do método BESO para o problema da viga MBB com filtragem por convolução das sensibilidades.

diferiu significativamente das soluções obtidas com malhas mais refinadas. As eficiências das soluções obtidas com as malhas de 90x30 e 390x130 são pouco menores que as eficiências para malhas intermediárias.

No caso da viga MBB o método SIMP obteve eficiências decrescentes com o refino da malha. A eficiência da solução com 90x30 elementos é 5,4% maior do que a eficiência da solução para 390x130 elementos. Este fenômeno foi explicado por Rozvany e Sokół (2014) e é causado porque malhas grosseiras aumentam o erro de discretização de forma a aumentar a rigidez da estrutura, diminuindo a flexibilidade estrutural. Este problema pode ser evitado utilizando-se sempre a mesma malha e variando apenas a quantidade de elementos representados por cada variável de projeto, e.g. quatro elementos adjacentes com suas densidades representadas pela mesma variável de projeto.

No método BESO, as topologias obtidas apresentam grande sensibilidade ao número de elementos usados para discretizar o domínio e os valores de eficiência das soluções convergem de forma errática com o refino de malha. Este problema parece não se manifestar para frações de volume maiores ($f_v > 0,5$).

Rozvany e Sokół (2014) explicam que para baixas frações de volume é esperado que haja uma repentina queda na eficiência das soluções obtidas com malhas grosseiras à medida que não é mais possível representar uma estrutura eficiente. O método BESO, em função de sua formulação discreta apresenta grandes dificuldades em obter soluções eficientes nestes casos. O mesmo fenômeno não se manifestou para o método SIMP

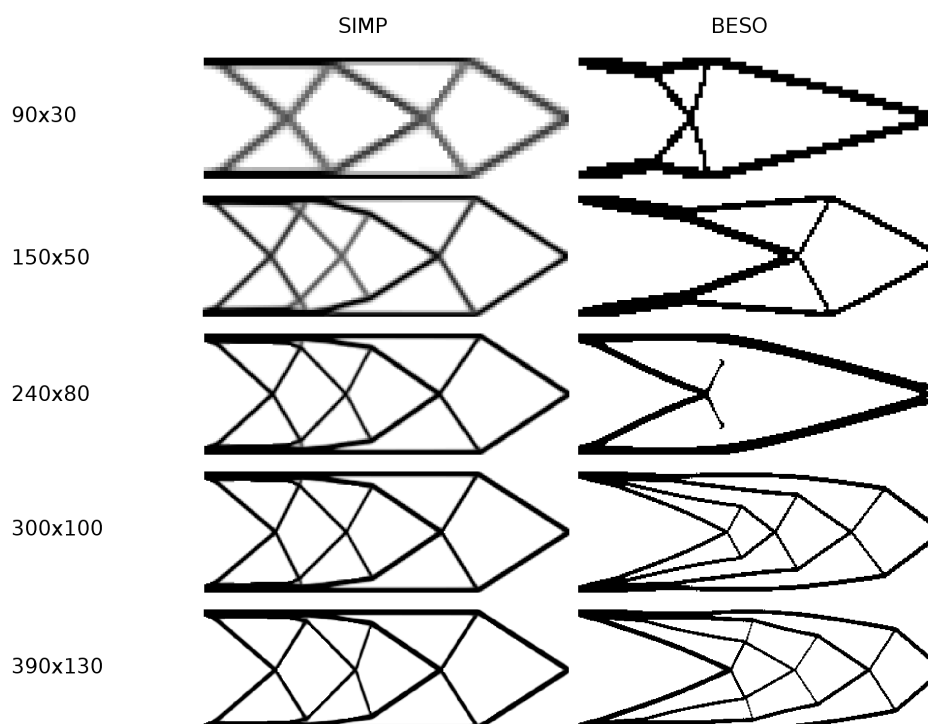


Figura 4.7 – Topologias obtidas para $f_v = 0,2$ pelos métodos SIMP e BESO com filtragem por convolução das sensibilidades. Viga engastada de Michell.

Tabela 4.1 – Eficiências obtidas com $f_v = 0,2$ e filtragem por convolução.

elementos	Michell		MBB	
	SIMP	BESO	SIMP	BESO
90x30	0.835	0.612	0.818	0.419
150x50	0.844	0.709	0.807	0.502
240x80	0.849	0.491	0.797	0.724
300x100	0.849	0.778	0.794	0.778
390x130	0.836	0.804	0.776	0.798

A eficiência das soluções obtidas pelo método SIMP foram em geral mais altas do que as obtidas pelo método BESO mesmo nos casos não problemáticos. Pode-se argumentar que os valores dos critérios de convergência utilizados neste trabalho forçaram o método SIMP a obter resultados consistentemente melhores que os do método BESO. Não foi estudado o impacto dos valores de critério de convergência utilizados para cada método sobre a eficiência das soluções obtidas neste trabalho.

Porém, [Sigmund e Maute \(2013\)](#) criticaram o critério de convergência do método BESO por somente detectar quando o algoritmo de otimização entrou em um estado oscilatório e em alguns casos interromper a otimização prematuramente logo após atingir a fração de volume desejada. Este pode ter sido o caso da topologia obtida pelo método BESO no problema da viga engastada com $f_v = 0,2$ e malha de 240x80 elementos (Figura 4.7).

[Rozvany \(2009\)](#) observa que a função objetivo no método BESO tem a tendência de estagnar assim que o volume alvo é atingido.

5 CONCLUSÃO

Os testes realizados avaliaram a eficiência das topologias geradas pelos métodos SIMP e BESO para diferentes frações de volume e quantidade de elementos. Todos os outros parâmetros foram mantidos constantes.

O método SIMP apresentou resultados consistentes para os dois casos estudados. Houve pouca variação da eficiência das soluções com o refino da malha. A eficiência das soluções aumenta conforme $f_v \rightarrow 0$ (sem apresentar sinais claros de convergência no intervalo avaliado).

O método BESO demonstrou convergir para soluções ineficientes em casos com f_v pequeno e malha pouco refinada. Com as malhas mais refinadas o método não obteve valores de eficiência das soluções significativamente diferentes do método SIMP e também não apresentou sinais claros de convergência para um valor limite de eficiência. O critério de atualização das variáveis de projeto no método BESO pode não ser adequado. Para frações de volume maiores os dois métodos apresentaram resultados similares.

Para trabalhos futuros, sugere-se avaliar outros métodos de otimização topológica de estruturas. A metodologia utilizada neste trabalho permite a comparação entre métodos dissimilares. Pode-se também avaliar a eficiência dos métodos para otimização a partir de uma geometria inicial arbitrária, pois alguns métodos podem se mostrar eficientes nas primeiras iterações a partir de um campo de variáveis de projeto uniforme mas conforme a topologia fica mais definida passam a apresentar dificuldades de convergência. Outro ponto a ser estudado é a quantidade de iterações necessárias para a convergência em cada método. Ainda outra possibilidade é a avaliação dos métodos utilizando-se elementos de ordem mais alta, por exemplo quadráticos. Assim seria possível avaliar os métodos sem a necessidade de aplicação de filtros às densidades ou sensibilidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andreassen, E.; Clausen, A.; Schevenels, M.; Lazarov, B. S.; Sigmund, O. “**Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code.**” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 43, n. 1, p. 1–16, 2011. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-010-0594-7>>. Citado 4 vezes nas páginas 1, 6, 7 e 9.
- Askes, H.; Morata, I.; Aifantis, E. C. “**Finite element analysis with staggered gradient elasticity.**” *Computers & Structures*, v. 86, n. 11–12, p. 1266 – 1279, 2008. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794907002969>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 8.
- Bendsøe, M.; Sigmund, O. “**Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**”. Springer, 2003. ISBN 9783540429920. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=NGmtmMhVe2sC>>. Citado na página 1.
- Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. “**Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71, n. 2, p. 197 – 224, 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782588900862>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- Bourdin, B. “**Filters in topology optimization**”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 50, n. 9, p. 2143–2158, 2001. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.116>>. Citado na página 2.
- Eaton, J. W.; Bateman, D.; Hauberg, S.; Wehbring, R. “**GNU Octave version 3.8.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations**”. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. ISBN 1441413006. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter>>. Citado na página 8.
- Huang, X.; Xie, M. “**Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**”. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 6 e 9.
- Lazarov, B. S.; Sigmund, O. “**Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations**”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 86, n. 6, p. 765–781, 2011. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.3072>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 7.
- Lewiński, T.; Zhou, M.; Rozvany, G. “**Extended exact least-weight truss layouts—part II: Unsymmetric cantilevers**”. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 36, n. 5, p. 399 – 419, 1994. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740394900442>>. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 4 e 5.
- Lewiński, T.; Zhou, M.; Rozvany, G. “**Extended exact solutions for least-weight truss layouts—part I: Cantilever with a horizontal axis of symmetry**”. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 36, n. 5, p. 375 – 398, 1994. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740394900434>>. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 3 e 4.
- Rozvany, G. “**Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization**”. *Structural optimization*, Springer-Verlag, v. 15, n. 1, p. 42–48, 1998. ISSN 0934-4373. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01197436>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- Rozvany, G. “**Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics**”. *Structural and Multidisciplinary*

Optimization, Springer-Verlag, v. 21, n. 2, p. 90–108, 2001. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s001580050174>>. Citado na página 1.

Rozvany, G. “**A critical review of established methods of structural topology optimization**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 37, n. 3, p. 217–237, 2009. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-007-0217-0>>. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 12.

Rozvany, G.; Sokół, T. “**Validation of numerical methods by analytical benchmarks, and verification of exact solutions by numerical methods**”. Em: Rozvany, G.; Lewiński, T. (Ed.). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Springer Vienna, 2014, (CISM International Centre for Mechanical Sciences, v. 549). p. 53–69. ISBN 978-3-7091-1642-5. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2_4>. Citado 5 vezes nas páginas 1, 2, 3, 8 e 11.

Ru, C.; Aifantis, E. “**A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity**”. *Acta Mechanica*, Springer-Verlag, v. 101, n. 1-4, p. 59–68, 1993. ISSN 0001-5970. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01175597>>. Citado na página 2.

Sigmund, O. “**A 99 line topology optimization code written in matlab**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s001580050176>>. Citado na página 1.

Sigmund, O. “**Morphology-based black and white filters for topology optimization**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 33, n. 4-5, p. 401–424, 2007. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>>. Citado na página 5.

Sigmund, O.; Maute, K. “**Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 46, n. 4, p. 471–475, 2012. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-012-0814-4>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 7.

Sigmund, O.; Maute, K. “**Topology optimization approaches**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer Berlin Heidelberg, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, 2013. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0978-6>>. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 6 e 12.

Sigmund, O.; Petersson, J. “**Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima**”. *Structural optimization*, Springer-Verlag, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998. ISSN 0934-4373. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01214002>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

APÊNDICE A – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO PESO ÓTIMO DA VIGA DE MICHELL

Rotina em Octave que calcula o peso estrutural ótimo de uma viga engastada com carga concentrada na extremidade (viga de Michell).

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %% BENCHMARKS FOR TOPOPT %%
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  function phic = exact_cantilever(h,Lb,c)
5
6  % phic is the optimal weight of the michell type truss
7  % h is the cantilever's height at the fixed end
8  % Lb is the beam's length
9  % c is the compliance constraint
10
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 %% ANALYTICAL MICHELL CANTILEVER %%
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 % eqn 3 lewinski 1994
15 I = @(n,a,b) besseli(n,2*sqrt(a*b));
16 % eqn 1 lewinski 1994
17 G = @(n,a,b) (a/b).^(n/2).*I(n,a,b);
18 % eqn 2 lewinski 1994
19 F = @(n,a,b) sum((-1).^(0:42).*G(2*(0:42)+n,a,b));
20
21 % eqn 162 lewinski 1994
22 wh = @(a,t) (1+2*a)*G(0,a,a)+2*a*G(1,a,a)-2*(a-t)*G(0,a-t,a+t) ...
23   -4*(a+1)*G(1,a-t,a+t)-2*(a+t)*G(2,a-t,a+t)+4*F(1,a-t,a+t);
24 % eqn 138 lewinski 1994
25 xbarh = @(a,b,t) (F(1,a,b)+F(2,b,a)-F(1,a-t,b+t) ...
26   -F(2,b-t,a+t)-F(2,a-t,b+t)-F(3,b-t,a+t))/sqrt(2);
27 % eqn 139 lewinski 1994
28 ybarh = @(a,b,t) xbarh(b,a,t);
29 % eqn 50 lewinski 1994
30 phi = @(a,b) b-a;
31 % eqn 54 lewinski 1994
32 xy = @(a,b,t) [cos(phi(a,b)) sin(phi(a,b));-sin(phi(a,b)) ...
33   cos(phi(a,b))]\[xbarh(a,b,t);ybarh(a,b,t)];
34
35 a1 = 0.7853; a2 = 1.5708;
36 while (a2-a1)>1e-10
37   amid = .5*(a1+a2);
38   Lbar = .5+sqrt(sumsq(xy(amid,amid,pi/4)));
39   if Lbar > Lb/h
40     a2 = amid;
41   else
42     a1 = amid;
43   end
44 end
45 fprintf('\n\tMichell_cantilever:\nNon-dimensional_Length_(L/h):\t%10.8f',Lbar)
46 fprintf('\nNon-dimensional_Struct._Weight:\t%9.5f\n',wh(amid,pi/4))
47 fprintf('alpha:\t%10.8f\n\n',amid)
48 phic = (h*wh(amid,pi/4))^2/c;

```

APÊNDICE B – PROGRAMA PARA CÁLCULO DO PESO ÓTIMO DA VIGA MBB

Rotina em Octave que calcula o peso estrutural ótimo de uma viga simplesmente apoiada com carga concentrada na metade do comprimento (viga MBB).

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %% BENCHMARKS FOR TOPOPT %%
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  function phic = exact_mbb(r,Lb,c)
5
6  % phic is the optimal weight of the mbb beam
7  % r is the beam's height
8  % Lb is the beam's length
9  % c is the compliance constraint
10
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 %% ANALYTICAL MBB-BEAM %%
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 % eqn 3 lewinski 1994
15 I = @(n,a,b) besseli(n,2*sqrt(a*b));
16 % eqn 1 lewinski 1994
17 G = @(n,a,b) (a/b).^(n/2).*I(n,a,b);
18 % eqn 2 lewinski 1994
19 F = @(n,a,b) sum((-1).^(0:42).*G(2*(0:42)+n,a,b));
20
21 % eqn 273 lewinski 1994
22 uxr = @(a,t) G(0,a,a)+2*F(2,a,a)+4*t*(G(3,a-t,a+t) ...
23   -G(1,a-t,a+t)) + 4*(3*G(2,a-t,a+t)-4*F(2,a-t,a+t));
24 % eqn 259 lewinski 1994
25 xbarr = @(a,b,t) F(2,b,a)-F(2,a,b)+F(2,a-t,b+t) ...
26   -F(2,b-t,a+t)+ F(4,b-t,a+t)-F(4,a-t,b+t);
27 % eqn 260 lewinski 1994
28 ybarr = @(a,b,t) F(1,b,a)-F(3,a,b)+F(3,a-t,b+t) ...
29   -F(1,b-t,a+t)+ F(3,b-t,a+t)-F(5,a-t,b+t);
30 % eqn 50 lewinski 1993
31 phi = @(a,b) b-a;
32 % eqn 54 lewinski 1993
33 xy = @(a,b,t) [cos(phi(a,b)) sin(phi(a,b));-sin(phi(a,b)) ...
34   cos(phi(a,b))]\'[xbarr(a,b,t);ybarr(a,b,t)];
35
36 a1 = 0.5; a2 = 3;
37 while (a2-a1)>1e-10
38   amid = .5*(a1+a2);
39   Lbar = xy(amid,amid,pi/2)(2);
40   if Lbar > Lb/r
41     a2 = amid;
42   else
43     a1 = amid;
44   end
45 end
46 fprintf('\n\tMBB_beam:\nNon-dimensional_Length_(L/r):\t%4.2f',Lbar)
47 fprintf('\nNon-dimensional_Struct._Weight:\t%9.5f\n',uxr(amid,pi/2))
48 fprintf('alpha:\t%10.8f\n\n',amid)
49 phic = (r*uxr(amid,pi/2))^2/c;

```

APÊNDICE C – TABELAS DE RESULTADOS

Tabela C.1 – Eficiência das soluções para a viga de Michell obtidas pelo método SIMP.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100	390x130
0.800	0.628	0.625	0.622	0.623	0.620
0.750	0.651	0.646	0.643	0.643	0.642
0.700	0.674	0.668	0.666	0.665	0.665
0.650	0.697	0.690	0.687	0.687	0.686
0.600	0.720	0.711	0.709	0.708	0.706
0.550	0.737	0.733	0.730	0.729	0.727
0.500	0.749	0.755	0.749	0.749	0.743
0.450	0.769	0.768	0.768	0.764	0.760
0.400	0.791	0.785	0.789	0.783	0.778
0.350	0.808	0.811	0.807	0.803	0.795
0.300	0.825	0.828	0.826	0.821	0.813
0.250	0.830	0.840	0.840	0.837	0.826
0.200	0.835	0.844	0.849	0.849	0.836

Tabela C.2 – Eficiência das soluções para a viga de Michell obtidas pelo método SIMP com filtro de Helmholtz.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100	390x130
0.750	0.657	0.650	0.645	0.643	0.644
0.700	0.682	0.673	0.667	0.665	0.665
0.650	0.708	0.694	0.689	0.688	0.687
0.600	0.731	0.714	0.710	0.708	0.708
0.550	0.753	0.729	0.733	0.732	0.732
0.500	0.774	0.750	0.756	0.757	0.756
0.450	0.791	0.771	0.777	0.775	0.773
0.400	0.809	0.790	0.787	0.787	0.788
0.350	0.821	0.809	0.811	0.811	0.810
0.300	0.837	0.826	0.830	0.830	0.832
0.250	0.833	0.821	0.844	0.848	0.850
0.200	0.834	0.841	0.847	0.858	0.853

Tabela C.3 – Eficiência das soluções para a viga de Michell obtidas pelo método BESO.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100	390x130
0.750	0.633	0.635	0.634	0.634	0.632
0.700	0.652	0.656	0.656	0.655	0.655
0.650	0.673	0.678	0.678	0.679	0.678
0.600	0.687	0.699	0.698	0.701	0.700
0.550	0.709	0.719	0.714	0.721	0.721
0.500	0.725	0.739	0.738	0.739	0.740
0.450	0.739	0.756	0.751	0.757	0.761
0.400	0.749	0.753	0.774	0.773	0.776
0.350	0.714	0.760	0.788	0.786	0.788
0.300	0.706	0.765	0.800	0.794	0.802
0.250	0.700	0.715	0.802	0.769	0.802
0.200	0.612	0.709	0.491	0.778	0.804

Tabela C.4 – Eficiência das soluções para a viga MBB obtidas pelo método SIMP.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100
0.800	0.621	0.609	0.602	0.599
0.750	0.640	0.630	0.622	0.619
0.700	0.660	0.652	0.645	0.641
0.650	0.680	0.675	0.667	0.663
0.600	0.697	0.695	0.689	0.684
0.550	0.716	0.715	0.709	0.706
0.500	0.728	0.736	0.731	0.725
0.450	0.752	0.752	0.745	0.738
0.400	0.756	0.751	0.763	0.750
0.350	0.768	0.769	0.776	0.766
0.300	0.780	0.784	0.781	0.781
0.250	0.794	0.800	0.783	0.777
0.200	0.818	0.807	0.797	0.794

Tabela C.5 – Eficiência das soluções para a viga MBB obtidas pelo método SIMP com filtro de Helmholtz.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100
0.750	0.650	0.634	0.625	0.620
0.700	0.667	0.653	0.646	0.643
0.650	0.683	0.673	0.669	0.665
0.600	0.701	0.691	0.688	0.685
0.550	0.722	0.710	0.710	0.707
0.500	0.725	0.730	0.732	0.730
0.450	0.741	0.738	0.750	0.751
0.400	0.758	0.751	0.753	0.774
0.350	0.773	0.765	0.765	0.767
0.300	0.793	0.780	0.781	0.780
0.250	0.807	0.790	0.796	0.795
0.200	0.812	0.804	0.804	0.808

Tabela C.6 – Eficiência das soluções para a viga MBB obtidas pelo método BESO.

f_v	90x30	150x50	240x80	300x100	390x130
0.800	0.607	0.601	0.594	0.591	0.587
0.750	0.627	0.621	0.616	0.612	0.609
0.700	0.646	0.640	0.637	0.635	0.630
0.650	0.664	0.658	0.659	0.657	0.653
0.600	0.682	0.680	0.680	0.678	0.676
0.550	0.700	0.699	0.701	0.700	0.698
0.500	0.719	0.718	0.720	0.718	0.719
0.450	0.729	0.735	0.738	0.739	0.737
0.400	0.730	0.746	0.755	0.755	0.755
0.350	0.717	0.741	0.755	0.772	0.773
0.300	0.476	0.750	0.780	0.788	0.787
0.250	0.453	0.569	0.788	0.784	0.800
0.200	0.419	0.502	0.724	0.778	0.798