

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Modelagem Tridimensional de Estruturas compostas por Aduelas  
Pré-moldadas de Concreto com Protensão Externa, através do  
Método dos Elementos Finitos**

**Aline Ribeiro Paliga**

Porto Alegre  
2015

**ALINE RIBEIRO PALIGA**

**MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS  
COMPOSTAS POR ADUELAS PRÉ-MOLDADAS DE  
CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA, ATRAVÉS DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 06 de março de 2015.

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Orientador

Prof. Armando Miguel Awruch  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Profa. Mauren Aurich (PUCRS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Samir Maghous (UFRGS)**  
Docteur pela École Nationale des Ponts et Chaussées

*Para Betina*

*“Temos de fazer o melhor que podemos. Esta é a nossa  
sagrada responsabilidade humana.”*

*Albert Einstein*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos.

Agradeço ao Professor Américo Campos Filho, orientador deste trabalho, pela compreensão, paciência e amizade. Tenho muito orgulho de ter sido realmente orientada por uma pessoa tão competente em tudo que faz e de bem com a vida.

Agradeço, também, aos meus amigos e aos colegas de mestrado e doutorado pela amizade, apoio e troca de experiências que contribuiu para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Em especial à Vanessa, Gustavo e Giuliana pela amizade que sei que ficará pra toda a vida.

Agradeço as minhas amigas Aline Tabarelli, Estela Garcez, Mônica Garcez e Ângela Azevedo pela amizade e cumplicidade.

Agradeço, também, à minha família pelos conselhos valiosos, à Sibeli, ao meu sobrinho Augusto, por alegrarem meus dias. Obrigada por tudo, amo vocês.

Agradeço ao meu marido Charlei e minha filha pelo amor e companheirismo.

Por fim, agradeço a Deus por ter chegado até aqui.

## RESUMO

PALIGA, A. R. **Modelagem tridimensional de estruturas compostas por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa, através do método dos elementos finitos.** 2015. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O uso de aduelas pré-moldadas de concreto se transformou na técnica preponderante na construção de pontes com vãos médios a longos. No entanto, fatores econômicos têm continuamente exigido refinamentos nessas práticas de construção para o aumento da produtividade e redução do tempo de construção. As principais inovações desenvolvidas são: o uso de múltiplas chaves ou dentes de cisalhamento, que são saliências característica nas juntas entre os segmentos; uso de protensão externa e uso de juntas secas, sem epóxi. Por outro lado, um número insuficiente de investigações e análises sobre o comportamento desse tipo de estrutura tem sido realizado. Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre o comportamento de estruturas segmentadas de concreto com protensão externa. O modelo computacional desenvolvido para a análise tridimensional do comportamento não-linear físico e geométrico dessas estruturas é baseado em uma formulação em elementos finitos. O concreto é representado no modelo através de elementos finitos hexaédricos e os cabos de protensão através de elementos lineares. As juntas, entre os segmentos justapostos, são modeladas através de elementos planos quadrangulares. O modelo de elementos finitos é capaz de representar o comportamento estrutural ao longo do processo de carregamento e consequentemente, obter as respostas da estrutura em termos de esforços, tensões e deslocamentos, por meio de uma análise incremental não linear. Foram testadas vigas monolíticas e segmentadas, em concreto armado e protendido, analisando o comportamento desse tipo de estrutura e comparando com valores experimentais encontrados na bibliografia. As vigas protendidas externamente, tanto monolíticas quanto segmentadas, apresentaram uma rigidez maior após o limite de proporcionalidade de tensões. Isso se deve ao fato do modelo proposto não contemplar o livre deslizamento dos cabos de protensão nos desviadores. As comparações feitas entre as análises e resultados experimentais, dispostos na literatura, apresentaram bons resultados para valores de deslocamentos e tensões. Portanto, pode-se afirmar que o programa computacional desenvolvido é capaz de analisar peças com protensão externa, segmentadas ou monolíticas.

Palavras-chave: protensão externa; estruturas segmentadas; elementos finitos.

## ABSTRACT

PALIGA, A. R. **Three dimensional modeling of segmental prestressed concrete bridges considering a finite element method approach.** 20015. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The use of precast concrete segments has become the predominant technique in bridge construction for medium to long span bridges. However, economic factors have continually claimed refinements in these construction practices to increase of productivity and reduction of construction time. The main innovations that have been developed are: the use of multiple shear keys, which are characteristic ledges in the joints between segments; the use of external prestressing and the use of dry joints, without epoxy glue. Otherwise, few studies exist about the behavior of this type of structure. This paper aims to present a study about the behavior of segmental concrete structures with external prestressing. The computational model developed for three-dimensional non-linear physical and geometric analysis of these structures is based on a finite element formulation. In this model concrete is represented by hexahedral finite elements and prestressing cables through linear elements. The joints, between the juxtaposed segments, are modeled through quadrangular plan elements . The finite element model is capable to represent the structural behavior during loading process and provides structure responses in terms of force, stress and displacement, using non-linear incremental analysis. The beams prestressed externally, both monolithic and segmented, have shown higher stiffness after reaching the proportional limit. This is due to the proposed model which does not consider the slip free of prestressing cables in the deviators. Comparisons with experimental data from the literature have shown good results for displacement values and stresses. Therefore, the computational program developed is able to analyze sections with external prestressing, segmental or monolithic, enabling further study of this type of structure.

Key-words: external prestressing; segmental structures; finite elements.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	4
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	5
<b>2 PONTES SEGMENTADAS COM PROTENSÃO EXTERNA</b>	<b>6</b>
2.1 INTRODUÇÃO	6
2.2 HISTÓRICO	6
2.3 TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO	17
2.3.1 Balanços Sucessivos	21
2.3.2 Elementos pré-moldados sobre o vão inteiro	24
2.3.3 Deslocamentos Progressivos	26
2.4 O TRAÇADO DO CABO DE PROTENSÃO	28
2.5 REVISÃO BIBLIOGRAFICA	34
2.5.1 Muller e Gauthier (1990)	34
2.5.2 Kreger et al. (1990)	36
2.5.3 Ramos e Aparício (1995, 1996)	37
2.5.4 Martins (1989)	40
2.5.5 Turmo, Ramos e Aparício (2006)	42
<b>3 PROTENSÃO EXTERNA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO</b>	<b>43</b>
3.1 INTRODUÇÃO	43
3.2 RAZÕES DE USO DA PROTENSÃO EXTERNA	43
3.3 TÉCNICA DA PROTENSÃO EXTERNA	45
3.3.1 Desviador	45
3.3.2 Ancoragem	46
3.3.3 Macaco	47
3.4 PROTENSÃO INTERNA X PROTENSÃO EXTERNA	48
3.4.1 Efeito de Segunda Ordem	49
3.4.2 Deslizamento nos desviadores	50
3.5 PERDAS DE PROTENSÃO	51
<b>4 O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>52</b>
4.1 FORMULAÇÃO BÁSICA	52
4.2 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	56
4.3 NÃO LINEARIDADE FÍSICA	62
4.3.1 Concreto	62
4.3.2 Aço	70
4.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL	74
<b>5 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>77</b>
5.1 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO	77
5.1.1 Campo de deslocamentos e deformações	77
5.1.2 Funções de Interpolação	81
5.1.3 Integração Numérica	83
5.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA PASSIVA	86
5.2.1 Formulação Geométrica	86
5.2.2 Funções de Interpolação	89
5.2.3 Matriz de Rigidez para a Armadura Passiva	90
5.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA ATIVA	92
5.3.1 Formulação Geométrica	92
5.3.2 Matriz de Rigidez para a Armadura Ativa	99
5.3.3 Aplicação da força de protensão externa	100
<b>6 MODELO DE CONTATO</b>	<b>102</b>
6.1 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTATO	102
6.1.1 Funções de interpolação para os elementos de contato	105



6.1.2 Pontos de integração para os elementos de contato .....	106
6.1.3 Determinação do elemento de contato oposto .....	107
6.1.4 Comportamento da junta .....	110
<b>7 MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO .....</b>	<b>112</b>
7.1 INTRODUÇÃO .....	112
7.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO.....	113
7.2.1 Modelo para o concreto comprimido.....	114
7.2.2 Modelo para o concreto à tração.....	123
7.3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO.....	127
7.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA OS MATERIAIS .....	128
7.4.1 Introdução.....	128
<b>8 ANÁLISES E RESULTADOS .....</b>	<b>131</b>
8.1 ANÁLISE DE VIGAS MONOLÍTICAS DE CONCRETO ARMADO .....	131
8.2 ANÁLISE DE VIGAS T MONOLÍTICAS COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS .....	136
8.3 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO SEGMENTADA COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS .....	143
8.4 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO MONOLÍTICA COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS .....	150
8.5 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO SEGMENTADA COM CABOS DE PROTENSÃO INTERNOS E EXTERNOS .....	153
<b>9 CONCLUSÕES.....</b>	<b>156</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>158</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>164</b>
<b>ENTRADA DE DADOS.....</b>	<b>165</b>
A.1 CARACTERÍSTICAS DO EXEMPLO.....	165
A.2 GEOMETRIA DA VIGA.....	166
A.3 MALHA DA VIGA.....	171
A.4 DEFINIÇÃO DOS DADOS ESPECÍFICOS DO PROGRAMA .....	173
A.5 GERANDO O ARQUIVO .DAT .....	175
<b>SAÍDA DE RESULTADOS .....</b>	<b>176</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Porcentagem de pontes construídas anualmente com os três principais materiais de construção, segundo o NBI (TRB COMMITTEE, 2003).....	1
Figura 1.2 – Ponte Choisy-le-Roi (Association pour la mémoire et le rayonnement des travaux d'Eugène Freyssinet, 2004) .....	2
Figura 1.3 – Disposição dos cabos de protensão ( <a href="http://en.structurae.de/products/data/index.cfm?ID=25">http://en.structurae.de/products/data/index.cfm?ID=25</a> ) .....	3
Figura 1.4 – Pontes construídas com segmentos anualmente (de 1964 a 1994). .....	3
Figura 2.1- Ponte Adolf Hitler (adaptada de Svensson, 1990) .....	7
Figura 2.2 - Ponte Choisy-le-Roi (França) ( <a href="http://en.structurae.de/structures/data/index.cfm?id=s0000365">http://en.structurae.de/structures/data/index.cfm?id=s0000365</a> ) .....	9
Figura 2.3 - Pista de concretagem da ponte Choisy-le-Roi (Tassin, 2006). .....	10
Figura 2.4 - Treliça de lançamento da ponte de Oléron (Tassin, 2006).....	10
Figura 2.5 – Principais pontes construídas por ano (Hewson, 2003).....	11
Figura 2.6 – Ponte Seven Mile (Tassin, 2006) .....	12
Figura 2.7 - Ponte da Confederação (Canadá) ( <a href="http://www.confederationbridge.com">www.confederationbridge.com</a> ).....	13
Figura 2.8 – Sistema de vias expressas Bang Na-Bang Phli-Bang Pakong Expressway .....	13
Figura 2.9 - Ponte Victory ( <a href="http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=274">http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=274</a> ) .....	14
Figura 2.10 - Ponte Four Bears ( <a href="http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=270">http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=270</a> ) .....	15
Figura 2.11 - Ponte Benicia Martinez ( <a href="http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=266&amp;pid=2">http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=266&amp;pid=2</a> ) .....	15
Figura 2.12 - Ponte do rio Otay ( <a href="http://www.dsicanada.ca">www.dsicanada.ca</a> ).....	16
Figura 2.13 – Ponte Rio-Nitéroi ( <a href="http://www.ponte.com.br/concessionaria/sobrea">http://www.ponte.com.br/concessionaria/sobrea</a> ).....	16
Figura 2.14 – Altura ótima da aduela ( <a href="http://www.fhwa.dot.gov/bridge/segmental/task60.htm">http://www.fhwa.dot.gov/bridge/segmental/task60.htm</a> ).....	18
Figura 2.15 – Montagem dos segmentos (adaptada de Rombach, 2002). .....	19
Figura 2.16 – Tipo de juntas (adaptada de Rombach, 2002). .....	19
Figura 2.17 – Parâmetros que definem geometricamente uma chave de cisalhamento (Cordeque, 2003).....	20
Figura 2.18 – Dimensões de um segmento padrão e suas chaves de cisalhamento da ponte Bang Na Expressway (adaptada de Rombach, 2002). .....	21
Figura 2.19 – Viaduto na Rodovia Mogi-Dutra.....	22
Figura 2.20 – Balanço sucessivo com cabos inclinados sobre apoios provisórios (Combault, 1983). .....	23
Figura 2.21 – Esquema geral da construção por balanços sucessivos ( <a href="http://www.cse.polyu.edu.hk/~ctbridge">http://www.cse.polyu.edu.hk/~ctbridge</a> ). .....	23
Figura 2.22 – Construção de um vão pela técnica <i>span-by-span</i> (Muller, 1980). .....	25
Figura 2.23 – Ponte Long Key (Association pour la mémoire et le rayonnement des travaux d'Eugène Freyssinet, 2004) .....	25
Figura 2.24 - Processo de construção por deslocamentos progressivos ( <a href="http://www.ctec.ufal.br/ees/disciplinas/ec2/PROCESSOS%20DE%20CONSTRUCAO.pdf">http://www.ctec.ufal.br/ees/disciplinas/ec2/PROCESSOS%20DE%20CONSTRUCAO.pdf</a> ). .....	27
Figura 2.25 - Ponte sobre o rio Woronora (LaViolette, 2007).....	28
Figura 2.26 - Geometria dos cabos de protensão externa (Ariyawardena, 2000). .....	29
Figura 2.27 – Protensão temporária (durante a construção) e permanente na técnica de construção por deslocamentos progressivos (adaptada de Virlogeux, 1990).....	29
Figura 2.28 – Segmento típico utilizado na técnica balanços sucessivos (Corven e Oretton, 2002). .....	30
Figura 2.29 – Cabos de balanço ancorados nas faces dos segmentos na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oretton, 2002).....	31
Figura 2.30 – Cabos de balanço ancorados em <i>blisters</i> na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oretton, 2002) .....	31
Figura 2.31 –Cabos de continuidade superior e inferior na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oretton, 2002). .....	32
Figura 2.32 –Cabos de protensão na técnica <i>span-by-span</i> (adaptada de Corven e Oretton, 2002). .....	33
Figura 2.33 – Rotação na junta (Muller e Gauthier, 1990).....	35
Figura 2.34 – Princípio do método (adaptada de Muller e Gauthier, 1990) .....	35
Figura 2.35 – Modelo de elementos finitos (adaptada de Kreger et al., 1990).....	36
Figura 2.36 – Modelo do elemento de junta (adaptada de Kreger et al., 1990).....	37
Figura 2.37 – Modelo do elemento do concreto (Ramos e Aparício, 1996).....	38
Figura 2.38 – Modelo do elemento de protensão: (a) interna aderente (b) externa não aderente (Ramos e Aparício, 1995).....	39
Figura 2.39 – Modelo do elemento de junta (adaptada de Ramos e Aparício, 1995). .....	40
Figura 2.40 – Modelo (Fouré et al., 1991).....	41

Figura 2.41 – Equilíbrio da aduela (Fouré et al., 1991).....	41
Figura 2.42 – Elemento de interface (Turmo, Ramos e Aparício, 2006).....	413
Figura 2.43 – Detalhe da malha de elementos finitos na junta com chaves de cisalhamento (Turmo, Ramos e Aparício, 2006).....	413
Figura 3.1 - Tipos de desviadores (Takebayashi et al., 1994). ....	45
Figura 3.2 - Desviador e cabos de protensão externos (VSL International, 1992). ....	46
Figura 3.3 - Ancoragem ativa multicordoalha (Catálogo Tensacciai - www.tensacciai.it). ....	46
Figura 3.4 - Macaco Tensacciai (Catálogo Tensacciai - www.tensacciai.it). ....	47
Figura 3.5 - Macaco VSL (VSL International, 1992). ....	47
Figura 3.6 – Efeito de pino em cabos externos e internos (Ng, 2003). ....	49
Figura 3.7 – Efeito de segunda ordem (Tan e Ng, 1997). ....	50
Figura 3.8 – Variação da deformação do cabo com deslizamento livre e impedido (Perlingeiro, 2006). ....	51
Figura 4.1 – Método Newton Raphson Modificado .....	68
Figura 4.2 – Fluxograma do programa. ....	76
Figura 5.1- Hexaedro linear com oito nós .....	81
Figura 5.2- Hexaedro quadrático com 20 nós.....	82
Figura 5.3- Integração completa com oito pontos (Jost, 2006).....	84
Figura 5.4 - Integração completa com 27 pontos (Jost, 2006).....	84
Figura 5.5 - Integração reduzida com quinze pontos de integração (Jost, 2006).....	85
Figura 5.6– Coordenada ao longo do eixo da armadura. ....	88
Figura 5.7 - Eixos locais e graus de liberdade do elemento de armadura de protensão.....	93
Figura 5.8 - Definição dos ângulos diretores.....	94
Figura 6.1 – Tipos de elementos de contato .....	103
Figura 6.2 – Corpos de contato.....	103
Figura 6.3 – Elementos de contato .....	104
Figura 6.4 – Pontos de integração dos elementos de contato .....	107
Figura 6.5 – Vetor ortogonal .....	108
Figura 6.6 – Análise dos elementos de contato .....	110
Figura 6.7 – Fluxograma .....	111
Figura 7.1 - Modelo elasto-viscoplástico .....	113
Figura 7.2.a - Meridianos da superfície de ruptura.....	118
Figura 7.2.b - Seções transversais da superfície de ruptura .....	118
Figura 7.3 - Superfície de carregamento e ruptura .....	119
Figura 7.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido .....	121
Figura 7.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado .....	125
Figura 7.6 – (a) Modelo elastoplástico perfeito e (b) Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas .....	125
Figura 7.7 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas .....	128
Figura 7.8 - Modelo de cadeias de Maxwell.....	129
Figura 7.9 - Modelo das camadas superpostas .....	129
Figura 8.1 – Detalhamento das vigas de Bresler e Scordelis (1963). ....	137
Figura 8.2 – Seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963).....	137
Figura 8.3 – Malha de elementos de concreto para as vigas.....	137
Figura 8.4 – Resultados comparativos da série 1 de vigas de Bresler e Scordelis (1963) .....	137
Figura 8.5 – Resultados comparativos da série 2 de vigas de Bresler e Scordelis (1963) .....	137
Figura 8.6 – Resultados comparativos da série 3 de vigas de Bresler e Scordelis (1963) .....	137
Figura 8.7 – Detalhamento da viga de Tan e Ng (1997).....	137
Figura 8.8 - Cortes AA' e BB' das seções da viga. ....	137
Figura 8.9 - Malha de elementos de concreto e armadura ativa para a viga. ....	137
Figura 8.10 - Malha dos elementos da armadura passiva para a viga.....	138
Figura 8.11 - Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga. ....	138
Figura 8.12 - Carga x aumento da tensão no cabo de protensão.....	139
Figura 8.13 - Detalhamento da viga de Tan e Ng (1998) .....	139
Figura 8.14 - Cortes AA' e BB' das seções da viga. ....	140
Figura 8.15 - Malha de elementos de concreto e armadura ativa para a viga com cabo de protensão.....	141
Figura 8.16 - Malha dos elementos de armadura passiva para a viga.....	141
Figura 8.17 - Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga. ....	142
Figura 8.18 - Carga x tensão na armadura ativa .....	142
Figura 8.19 - Carga x tensão na armadura passiva. ....	143
Figura 8.20 – Características geométricas da seção da viga.....	144

Figura 8.21 – Corte AA’ .....	144
Figura 8.22 – Malha de elementos finitos .....	145
Figura 8.23 – Deformada da viga e deslocamentos na direção z somente atuando o peso próprio e a protensão externa.....	145
Figura 8.24 – Tensões atuantes no concreto somente atuando o peso próprio e a protensão externa.....	146
Figura 8.25 – Deformada da viga e deslocamentos na direção z quando a primeira junta se abre com carga 112 kN .....	146
Figura 8.26 – Tensões atuantes no concreto quando a primeira junta se abre com carga 112 kN.....	147
Figura 8.27– Deformada da viga e deslocamentos na direção z quando a segunda junta se abre com carga 160 kN .....	147
Figura 8.28 – Tensões atuantes no concreto quando a segunda junta se abre com carga 160 kN .....	148
Figura 8.29 – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente. ....	149
Figura 8.30 – Tensões na armadura de protensão.....	150
Figura 8.31 – Características geométricas da seção da viga.....	151
Figura 8.32 – Corte AA’ .....	151
Figura 8.33 – Armadura passiva.....	151
Figura 8.34 – Malha de elementos finitos .....	152
Figura 8.35 – Comparação entre os deslocamentos obtidos pelo modelo computacional e experimentalmente. ....	153
Figura 8.36 – Características geométricas da seção da viga segmentada SPCB .....	153
Figura 8.37 – Seção transversal da viga segmentada SPCB.....	153
Figura 8.38 – Malha de elementos finitos .....	153
Figura 8.39 – Comparação entre os deslocamentos obtidos pelo modelo computacional e experimentalmente. ....	153
Figura 8.40 – Detalhe das juntas abertas .....	153
Figura A.1- Exemplo proposto .....	166
Figura A.2 - Informação das coordenadas .....	167
Figura A.3 - Retângulos iniciais para formar a geometria.....	167
Figura A.4 - Área formada com os retângulos iniciais .....	168
Figura A.5 - Criando volumes .....	169
Figura A.6 - Volumes finalizados.....	170
Figura A.7 - Separando em camadas .....	171
Figura A.8 - Entrada do número de elementos em cada direção .....	171
Figura A.9 - Malha .....	172
Figura A.10 - Janela personalizada para os dados do programa.....	173
Figura A.11 - Janela personalizada para as propriedades dos materiais.....	174
Figura A.12 - Janela personalizada para as cargas e condições de contorno.....	175
Figura A.13 - Janela personalizada para os resultados .....	175

## **SIGLAS**

ABNT: Associação Brasileira de Normas Técnicas

ACI: *American Concrete Institute*

CEB: *Comité Européen du Béton*

*fib: Fédération Internationale du Béton*

FIP: *International Federation for Prestressing*

NBI: *National Bridge Inventory*

PPGEC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PTI : *Post-tensioning Institute*

SETRA: *Service d'Études Techniques de Routes et Autoroutes*

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Maiúsculas

$A$ : coeficiente da integração reduzida

$A_y$ : área da seção transversal de aço passivo

$A_p$ : área da seção transversal de aço ativo

$B$ : coeficiente da integração reduzida

$[B]$ : matriz que relaciona deformações e deslocamentos

$[B_i]$ : matriz deformação-deslocamento associada ao nó  $i$

$[B_L]$ : parte linear da matriz que relaciona deformações e deslocamentos

$[B_{NL}]$ : parte não linear da matriz que relaciona deformações e deslocamentos

$[B_p]$ : matriz linha que relaciona deformações e deslocamentos da armadura de protensão

$\{B_s\}$ : vetor linha que relaciona deformações de armadura e deslocamentos nodais do elemento de concreto

$C$ : coeficiente da integração reduzida; função de posição ao longo da barra de armadura

$C_1, C_2, C_3$ : coeficientes

$E$ : módulo de elasticidade longitudinal

$E_p$ : módulo de elasticidade longitudinal do aço ativo

$E_s$ : módulo de elasticidade longitudinal do aço passivo

$E_\mu$ : módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto

$\{E^{GL}\}$ : tensor de Green-Lagrange

$[D]$ : matriz de elasticidade constitutiva ou de coeficientes elásticos do material

$F$ : superfície de plastificação

$F_o$ : tensão corrente de plastificação

$F_p$ : força de protensão corrente

$[F]$ : gradiente de deformação

$G_c$ : módulo de elasticidade transversal reduzido do concreto

$G_o$ : módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado

$H$ : polinômio de Lagrange

$H_j$ : função de interpolação para o elemento de armadura, associado ao nó  $j$

$H_s$ : parâmetro ou taxa de endurecimento da armadura

$[H]$ : gradiente de deslocamentos

$[I]$ : matriz identidade

$I_1$ : primeiro invariante do tensor de tensões

$J_2$ : segundo invariante do tensor de tensões desviadoras

$J_3$ : terceiro invariante do tensor de tensões desviadoras

$[J]$ : matriz Jacobiana

$K_{ij}$ : componentes da matriz de rigidez

$[K_p]$ : matriz de rigidez das barras de armadura ativa

$[K_s]$  : matriz de rigidez das barras de armadura passiva

$L_p$  : comprimento da armadura de protensão

$[L]$  : matriz de operadores diferenciais

$M$  : momento fletor

$N$  : força normal

$N_i$  : função de interpolação do elemento de concreto associada ao nó  $i$ ; força axial resultante

$[N]$  : matriz linha formada por  $N_i$

$[N]$  : matriz que contém as funções de interpolação do elemento

$P_i$  : pontos

$\{P\}$  : vetor de pseudo-cargas

$\{P_s\}$  : vetor de pseudo-cargas da armadura

$Q$  : função potencial plástico

$[R]$  : matriz de rotação

$S$  : superfície, ponto na superfície de contato

$S_e$  : superfície do elemento finito

$S_0$  : superfície de referência da configuração inicial

$\{T\}$  : vetor segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$V$  : volume



$V_e$  : volume do elemento finito

$V_p$  : volume de barra de aço ativo

$V_s$  : volume de barra de aço passivo

$V_0$  : volume de referência da configuração inicial

$W_E$  : trabalho externo

$W_I$  : trabalho interno

$W_s$  : contribuição da armadura para o trabalho virtual interno

$\{X\}$  : vetor de coordenadas cartesianas da posição inicial da partícula

#### Letras Romanas Minúsculas

$a$  : coeficiente

$a_1, a_2, a_3$  : coeficientes

$\{a\}$  : vetor do fluxo plástico

$b$  : coeficiente para a integração reduzida; coeficiente

$c$  : coeficiente para a integração reduzida; coeficiente

$c_1, c_2$  : parâmetro do critério de Ottosen

$dw$  : rotação

$e_i$  : espessuras das camadas

$f$  : superfície de ruptura

$f_{cm}$  : resistência média à compressão do concreto

$f_{ptk}$  : tensão de ruptura do concreto protendido

$f_{tm}$  : resistência média à tração do concreto

$f_y$  : tensão de escoamento da armadura

$\{f\}^e$  : vetor que contém as forças nodais do elemento

$\{f_{ext}\}$  : vetor de forças externas

$\{f_{int}\}$  : vetor de forças internas

$\{f_{s_{int}}\}$  : vetor de forças internas das armaduras

$\{f\}_b^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às forças de volume

$\{f\}_p^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às forças de superfície

$\{f\}_{\sigma_o}^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às tensões iniciais

$g$  : abertura da junta

$h_c$  : altura do concreto comprimido

$j$  : nó do elemento de armadura

$k$  : nó do elemento de armadura; relação entre a resistência média à compressão e a resistência média à tração uniaxial do concreto

$l_y$  : comprimento de aduela

$m$  : número de nós do elemento

$n$  : subíndice que relaciona vetores, matrizes ou variáveis ao instante de tempo  $t_n$

$\{b\}$  : vetor de forças de volume

$\{\bar{p}\}$ : vetor de forças de superfície

$[r]$ : matriz de transformação

$s$ : tensão desviadora; coordenada ao longo do eixo de armadura

$s_n$ : coordenada do eixo da armadura

$t$ : tempo

$t_n$ : instante de tempo

$u, v, w$ : deslocamentos

$\{u\}$ : vetor de deslocamentos de um ponto de elemento finito

$\{u\}^e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento finito

$w(y)$ : abertura da junta na ordenada  $y$

$w_j, w_k, w_l$ : fator de peso associado ao ponto de integração

$x, y, z$ : coordenadas cartesianas na posição indeformada

$x^L, y^L, z^L$ : eixos locais dos elementos de armadura de protensão

$\{x\}$ : vetor das coordenadas da partícula no tempo  $t_n$

$x_j, y_j, z_j$ : coordenadas globais do nó  $j$  do elemento de armadura

$y_j$ : deslocamento longitudinal de qualquer ponto na seção da junta

$y$ : medida a partir do eixo de referência

$y_0$ : distância do centroide ao ponto de rotação da seção

$z_c$ : distância da fibra inferior até o centroide

$z_i$ : distância da fibra inferior até cada nó

$z_{LN}$ : distância da fibra inferior até a linha neutra

#### Letras Gregas Maiúsculas

$\Gamma$ : contorno de contato

$\Delta$ : incremento

$\Sigma$ : somatório

$\Phi$ : função de escoamento

$\Omega$ : volume de contato; plano

#### Letras Gregas Minúsculas

$\alpha$ : ângulo parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente do diagrama de tração do concreto; ângulo diretor; parâmetro do critério de Ottosen

$\alpha_n$ : ângulo entre a direção da barra passiva e o eixo cartesiano X

$\beta$ : ângulo diretor; fator de redução de  $G_o$ ; parâmetro do critério de Ottosen

$\beta_n$ : ângulo entre a direção da barra passiva e o eixo cartesiano Y

$\gamma$ : parâmetro de fluidez; deformação de corte; ângulo direto

$\gamma_i$ : constantes dos amortecedores

$\gamma_n$ : ângulo entre a direção da barra passiva e o eixo cartesiano Z

$\gamma_s$ : coeficiente de fluidez do aço

$\delta\pi$ : variação do funcional energia potencial total

$\varepsilon$  : deformação específica axial

$\varepsilon_c$  : deformação do concreto

$\varepsilon_{c_{TU}}$  : deformação específica última para o concreto tracionado

$\varepsilon_L$  : parte linear da deformação axial da barra de armadura de protensão

$\varepsilon_{NL}$  : parte não linear da deformação axial da barra de armadura de protensão

$\varepsilon_p$  : deformação plástica; deformação axial da barra de armadura de protensão

$\varepsilon_{ref}$  : deformação específica de tração máxima alcançada transversalmente à fissura

$\varepsilon_s$  : deformação axial ao longo do eixo da armadura; deformação total do aço

$\varepsilon_t$  : deformação específica normal de tração do concreto

$\{\varepsilon\}$  : vetor de deformações

$\{\dot{\varepsilon}\}$  : velocidade ou taxa de deformação total

$\{\varepsilon_e\}$  : deformação elástica

$\{\varepsilon_{svp}\}$  : deformação viscoplástica do aço

$\{\varepsilon_{vp}\}$  : deformação viscoplástica

$\zeta$  : coordenada normalizada

$\eta$  : coordenada normalizada; coeficiente de viscosidade

$\theta$  : ângulo de similaridade do concreto

$\kappa$  : parâmetro de endurecimento

$\lambda$  : parâmetro do critério de Ottosen; distância entre elementos de contato

$\mu$  : camada

$\nu$  : coeficiente de Poisson

$\xi$  : coordenada normalizada

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  : coordenadas adimensionais ou normalizadas dos nós i

$\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  : coordenadas auxiliares

$\xi_j, \eta_k, \zeta_l$  : coordenadas do ponto de integração i, integração completa

$\rho_c$  : meridiano de compressão

$\rho_s$  : meridiano de corte

$\rho_t$  : meridiano de tração

$\sigma$  : tensão axial

$\sigma_1$  : tensão principal de tração

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : tensões principais

$\sigma_{ef}$  : tensão efetiva ou uniaxial equivalente do concreto

$\sigma_s$  : tensão normal da armadura; tensão total do aço passivo

$\sigma_p$  : tensão na armadura de protensão

$\sigma_y$  : tensão de plastificação da armadura

$\{\sigma\}$  : vetor de tensões

$\{\dot{\sigma}\}$  : velocidade ou taxa de tensão

$\{\sigma_o\}$  : vetor de tensões iniciais

$\tau$  : tensão de corte

$\chi$  : coordenada normalizada do eixo de armadura

$\{\psi\}$  : vetor de forças não-equilibradas

### Símbolos Especiais

$\{ \}$  : vetor

$[ \ ]$  : matriz

$[ \ ]$  : matriz linha

$[ \ ]^T$  : matriz transposta

$[ \ ]^{-1}$  : matriz inversa

$\| \ \|$  : norma

$\det$  : determinante

$d$  : diferencial

$\delta$  : variação

$\partial$  : operador diferencial

$\int$  : integração

$\left( \dot{\phantom{x}} \right)$  : diferenciação em função do tempo

, : vírgula como índice indica derivação em relação à variável que lhe segue





# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Nos anos que seguiram à Segunda Guerra, houve um extraordinário desenvolvimento na construção de pontes protendidas. Esse crescimento pode ser observado na Fig. 1.1 através dos dados do *National Bridge Inventory* de 1994. Nesta época surgiu uma nova técnica de construção de pontes a partir de segmentos. Estes segmentos, chamados de aduelas, podiam ser pré-moldados ou moldados no local. A primeira ponte segmentada, com aduelas moldadas no local, foi construída sobre o rio Lahn na Alemanha em 1950. Já a primeira ponte, com aduelas pré-moldadas, foi a ponte Choisy-le-Roi, construída em 1962 na França (Fig. 1.2). Um dos grandes incentivadores na construção de pontes com este sistema foi o engenheiro francês Jean Muller, projetista desta ponte.

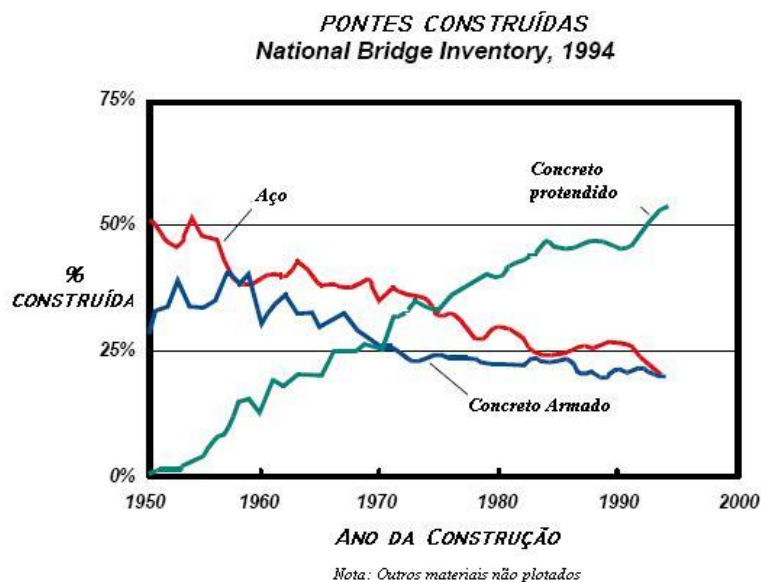


Figura 1.1- Porcentagem de pontes construídas anualmente com os três principais materiais de construção, segundo o NBI (TRB COMMITTEE, 2003).



Figura 1.2 – Ponte Choisy-le-Roi (Association pour la mémoire et le rayonnement des travaux d'Eugène Freyssinet, 2004).

No final dos anos 70, Muller utilizou essa tecnologia para construir uma série de pontes nos Estados Unidos, dentre elas, a ponte Long Key, na Flórida, com 722 aduelas pesando 65 toneladas cada (Muller, 1980). Muller também foi o responsável pelo retorno do uso da protensão externa nestas pontes.

Na protensão externa, os cabos são dispostos externamente à estrutura, presos nas extremidades pelas ancoragens e em desviadores, com o propósito de equilibrar os momentos fletores atuantes. Essa técnica é muito utilizada na restauração e reparo de estruturas. Em vigas caixão, normalmente utilizadas na construção de pontes, os cabos são colocados na parte vazada da seção (Fig. 1.3), sendo que a protensão é transferida para o concreto através de dispositivos especiais de fixação. Em obras deste tipo, se a armadura de protensão apresentar algum tipo de patologia após certo período de uso, fica mais fácil substituí-la, por se tratarem de cabos externos não aderentes.



Figura 1.3 – Disposição dos cabos de protensão  
(<http://en.structurae.de/products/data/index.cfm?ID=25>).

Essa tecnologia de construção de pontes se expandiu rapidamente nos Estados Unidos e, posteriormente, na Europa. Aproximadamente duzentas pontes segmentadas foram construídas nos Estados Unidos e Canadá dos anos 60 até os anos 90. Na Fig. 1.4 observa-se o número de pontes construídas anualmente nestes países desde que a primeira ponte segmentada foi construída no Canadá em 1964 (Miller, 1995).

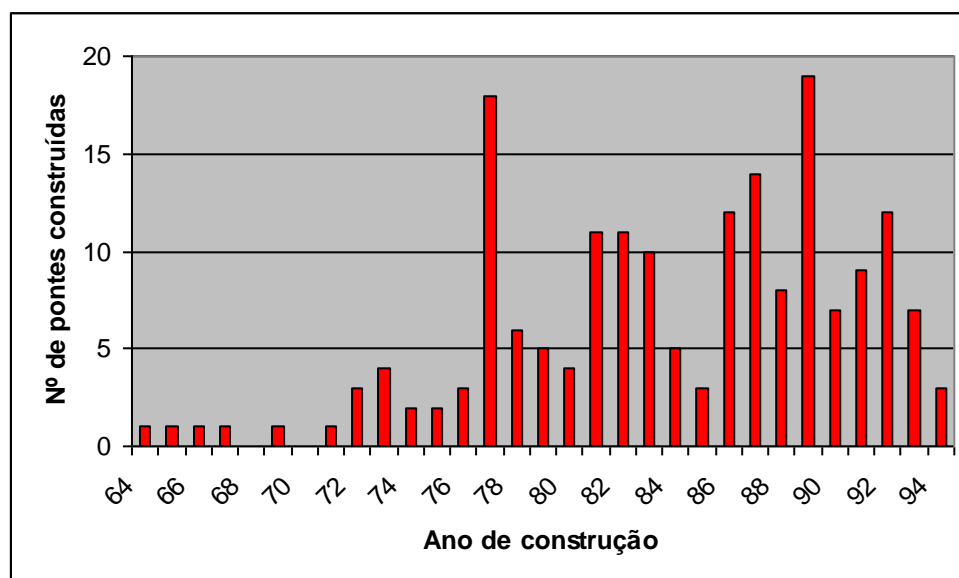


Figura 1.4 – Pontes construídas com segmentos anualmente (de 1964 a 1994).

Nos anos 90 foi realizado um grande número de eventos e congressos sobre protensão externa em pontes, como o *External Prestressing in Bridges*, promovido pelo ACI, e o *Workshop on Behaviour of External Prestressing in Structures*, na França. Além disto com o crescente uso de estruturas construídas com esse tipo de protensão, aliadas ao uso de aduelas pré-moldadas, também cresceu a necessidade de investigações e publicações que retratem o real comportamento dessas estruturas.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é implementar um modelo computacional tridimensional, baseado no método dos elementos finitos, para o estudo de pontes formadas por aduelas justapostas de concreto, externamente protendidas.

O concreto é representado no modelo através de elementos finitos hexaédricos e os cabos de protensão através de elementos lineares. As juntas, entre os segmentos justapostos, são modeladas através de elementos planos quadrangulares. O modelo de elementos finitos é capaz de representar o comportamento estrutural ao longo do processo de carregamento e conseqüentemente, obter as respostas da estrutura em termos de esforços, tensões e deslocamentos, por meio de uma análise incremental não linear. Dentro do que foi proposto, pretende-se avaliar as tensões nos cabos de protensão, considerando suas perdas e a abertura das juntas.

A linguagem computacional utilizada foi o FORTRAN 90/95, devido ao grande número de ferramentas disponíveis, que facilitam a implementação das rotinas necessária à análise.

Para verificar a precisão do modelo computacional, compararam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis na literatura.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em nove capítulos.

No capítulo 2, apresentam-se as estruturas segmentadas com protensão externa informando histórico, técnicas construtivas e revisão bibliográfica dos modelos numéricos existentes para análise dessas estruturas.

O capítulo 3 descreve a técnica de protensão externa, com suas vantagens e desvantagens, e as diferenças entre a protensão interna e externa.

No capítulo 4 é apresentado o modelo de Elementos Finitos utilizado para a análise de um material elasto-viscoplástico, considerando a não linearidade geométrica e física.

A formulação de Elementos Finitos empregada para o concreto, para a armadura passiva e ativa está exposta no capítulo 5.

O capítulo 6 descreve a formulação de Elementos Finitos utilizada para representar as juntas entre as aduelas.

O sétimo capítulo aborda os modelos constitutivos utilizados.

No capítulo 8 são apresentados os resultados obtidos pelo programa computacional e a comparação destes com valores experimentais.

Por fim, o capítulo 9 encerra o trabalho destacando as conclusões alcançadas neste estudo e os planos para a sua continuidade.

No Apêndice A descreve-se o pré-processamento e pós-processamento do programa computacional implementado, nesse trabalho, através do programa *GID*® 7.2.

## 2 PONTES SEGMENTADAS COM PROTENSÃO EXTERNA

### 2.1 INTRODUÇÃO

As pontes segmentadas são estruturas compostas por aduelas de concreto justapostas, podendo ser moldadas no local ou pré-moldadas (transportadas até o local da ponte). As aduelas são posteriormente mantidas juntas através de protensão.

A protensão externa é um sistema de protensão não aderente, ou seja, não existe aderência entre o aço de protensão e o concreto que o envolve. Os cabos ficam dentro de dutos envoltos com material para inibir a corrosão, como uma nata de cimento, graxa, cera ou betume. A nata de cimento não possibilita a movimentação das cordoalhas nas bainhas, nem a reposição dos cabos. Os dutos podem ser corrugados de metal ou de polietileno de alta densidade (PEAD). A força de protensão é transmitida para o concreto através das ancoragens e dos desviadores após a cura do concreto.

Neste capítulo será apresentado um histórico sobre estruturas segmentadas, as técnicas de construção utilizadas, o traçado dos cabos utilizados nas diferentes técnicas e uma revisão bibliográfica dos modelos numéricos já desenvolvidos.

### 2.2 HISTÓRICO

O engenheiro alemão Karl Franz Dischinger construiu a primeira ponte com protensão externa, chamada Adolf Hitler, em Aue na Alemanha em 1936. A ponte possuía três vãos de 25,2 m, 69 m e 23,4 m respectivamente e era monolítica (Fig. 2.1). Depois da construção, os cabos foram protendidos diversas vezes devido a perdas precoces de protensão, causadas por fluência e retração do concreto (Svensson, 1990). Além disso, os cabos foram corroídos pelo vapor das locomotivas, fato que levou à limpeza e à pintura dos mesmos.

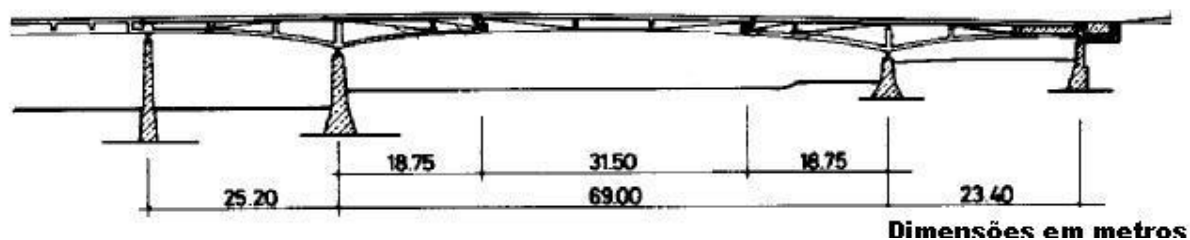


Figura 2.1- Ponte Adolf Hitler (adaptada de Svensson, 1990)

Porém o concreto protendido teve um grande impulso somente após a Segunda Guerra Mundial, quando houve a necessidade de reconstruir a Europa, e com ele foi criada uma nova técnica de construção de pontes divididas em segmentos. O engenheiro francês Eugène Freyssinet, considerado o pai do concreto protendido moderno, construiu a ponte Luzancy em 1946 sobre o rio Marne na França. Esta foi a primeira ponte do mundo com segmentos de concreto pré-moldados, com argamassa entre as juntas. Foram construídas entre 1947 e 1950 mais cinco pontes sobre o rio Marne, Esbly, d'Anet, Changis, Tribardou e Ussy. Todas elas tinham projeto similar à ponte Luzancy e vãos de até 74 metros (ANGLO-FRENCH LIAISON REPORT, 1999).

De 1946 ao final dos anos 70, a técnica de protensão interna foi predominantemente utilizada. A protensão externa, entretanto, fez uma breve aparição em algumas pontes construídas nos anos 50 na França, destacando-se a célebre ponte Villeneuve-Saint-Georges, a ponte de Port à Binson, a ponte Can Bia e a ponte Vaux-sur-Seine. (Virlogeux, 1983). A maioria dessas experiências com protensão externa foi mal sucedida por problemas de corrosão. No caso da ponte Villeneuve-Saint-Georges, o projetista Henry Lossier determinou a substituição dos cabos de protensão, que foram protegidos com uma pintura betuminosa. Mesmo com essas precauções, alguns cabos foram posteriormente substituídos, pois sofreram corrosão devido à entrada de água através de uma janela de inspeção. Isto não ocorreu na ponte Vaux-sur-Seine, também protegida por pintura betuminosa. No caso da ponte *Port à Binson*, essa precaução seria suficiente se pássaros não tivessem feito ninhos na ponte. Os cabos sofreram corrosão devido à acidez dos excrementos dos pássaros. Em 1983, ela foi reforçada com cabos adicionais. Na ponte *Can Bia*, de projeto pobre, a falta de manutenção foi crucial para a corrosão dos cabos, levando a ponte a ser fechada e demolida (Virlogeux, 1990). Todos esses problemas de corrosão desaceleraram a aplicação desta técnica. Além destas pontes, também se destacam uma série de obras na Bélgica, entre as quais os viadutos Exe e

Exeminster e a ponte Sclayn, e a ponte Bournemouth na Inglaterra. Algumas destas obras também não obtiveram sucesso.

Deve-se destacar, entretanto, que os problemas encontrados nas pontes e viadutos construídos estavam relacionados com a corrosão da armadura de protensão e a manutenção das mesmas, e não ao comportamento mecânico dessas pontes. Atualmente, existe a consciência da importância da manutenção periódica dessas estruturas, bem como, a proteção dos cabos.

O retorno da protensão externa, no final dos anos 70, é atribuído ao engenheiro Jean Muller, nos Estados Unidos, e à SETRA (*Service d'Études Techniques de Routes et Autoroutes*), na França. Foram desenvolvidas cordoalhas de alta capacidade, que reduziram o número de cabos utilizados, bem como um sistema de proteção contra corrosão. O retorno desse tipo de protensão se deu pelas seguintes razões:

- Pela necessidade de manter e restaurar estruturas existentes, sem prejudicar seu uso, como interromper o tráfego em pontes.
- Pelo interesse crescente em métodos onde o aço de protensão não fique tão exposto à agressividade do meio ambiente.
- Pela necessidade de técnicas menos complexas, evitando configurações complicadas dos cabos nas estruturas de concreto.
- Pelo aumento do tráfego e da capacidade de carga dos veículos

Jean Muller também foi o idealizador da construção segmentada atual. Ele começou sua carreira trabalhando com Freyssinet no final dos anos 40. Em 1952, Muller eliminou a argamassa entre as juntas na construção da ponte Shelton (Estados Unidos). As juntas secas melhoraram a qualidade da construção e trouxeram uma maior velocidade para a execução do projeto. Dez anos mais tarde, Jean Muller construiu a ponte Choisy-le-Roi (Fig. 2.2), pela primeira vez utilizando seção caixão e epóxi entre as juntas. Segundo Tassin (2006), a seção caixão se mostrou mais eficiente que a seção I em termos de consumo de concreto e de melhoria do comportamento estrutural em relação à torção e à estabilidade lateral. As aduelas foram fabricadas usando o sistema “*long-line*”. Através deste sistema a fôrma metálica e a armação são montadas sobre uma pista que pode



servir de fôrma de fundo. Este conjunto reproduz um trecho da ponte. As aduelas são concretadas de maneira a garantir um perfeito encaixe entre si, empregando-se cada aduela concretada na etapa anterior como fôrma para a próxima. Este sistema necessita de um canteiro de obra bastante espaçoso e é mais apropriado e econômico para pontes menos extensas, com eixo reto ou com curvatura constante. Na Fig. 2.3, pode-se observar a pista de concretagem da ponte Choisy-le-Roi executada sobre o rio Sena, em Paris.



Figura 2.2 - Ponte Choisy-le-Roi (França)  
(<http://en.structurae.de/structures/data/index.cfm?id=s0000365>)

Na ponte de Oléron, que com 2,86 km de extensão liga a ilha francesa de Oléron ao continente, Jean Muller utilizou um método de construção chamado método dos balanços sucessivos (*balanced cantilever*) pela primeira vez com aduelas pré-moldadas. Desde os anos 50, esse método só tinha sido utilizado com aduelas moldadas *in situ*, como na ponte Lahn, na Alemanha, primeira a ser erguida assim. Através deste método foi possível acelerar o posicionamento das aduelas, através do uso uma treliça de lançamento, deslocável, para transporte e montagem das aduelas pré-moldadas, como se pode observar na Fig. 2.4. A ponte foi construída em tempo recorde entre 1964 e 1966 (Tassin, 2006). Este método será abordado mais profundamente a seguir.



Figura 2.3 - Pista de concretagem da ponte Choisy-le-Roi (Tassin, 2006).



Figura 2.4 - Treliza de lançamento da ponte de Oléron (Tassin, 2006).

Em 1965, na ponte Pierre Bénite sobre o rio Rhône, na França, os segmentos foram construídos pela primeira vez no sistema “*short line*”. Neste sistema, conforme descrito em Mattos (2001), utiliza-se uma única forma metálica com comprimento fixo,

atendendo a todas as conformações em planta e perfil do projeto geométrico da obra. Isto acaba elevando o custo de execução, fazendo com que o sistema se torne viável apenas para pontes de grande porte. Cada aduela é moldada usando a aduela anteriormente executada como fôrma (*match-cast*), permitindo um perfeito acoplamento e evitando a quebra dos cantos devido à concentração de tensões oriundas da protensão. A principal vantagem em relação ao sistema "long line" é que este não necessita de um espaço físico adicional para execução da obra.

Os segmentos são projetados com 3 a 8 metros de comprimento, dependendo dos equipamentos de transporte de elevação. Por exemplo, na construção da ponte Oosterschelde, na Holanda, utilizou-se o transporte marítimo e por isso, adotaram-se segmentos mais compridos com até 275 toneladas. Os segmentos, geralmente, são pendurados em treliças metálicas ou colocados sobre estas treliças, até que possam ser protendidos em conjunto longitudinalmente, através de cabos de protensão. Pode-se também proceder à execução em balanço, para ambos os lados, a partir dos pilares. Sem a necessidade de suportar todo o conjunto de aduelas, as treliças podem ser mais leves neste caso (Leonhardt, 1979).

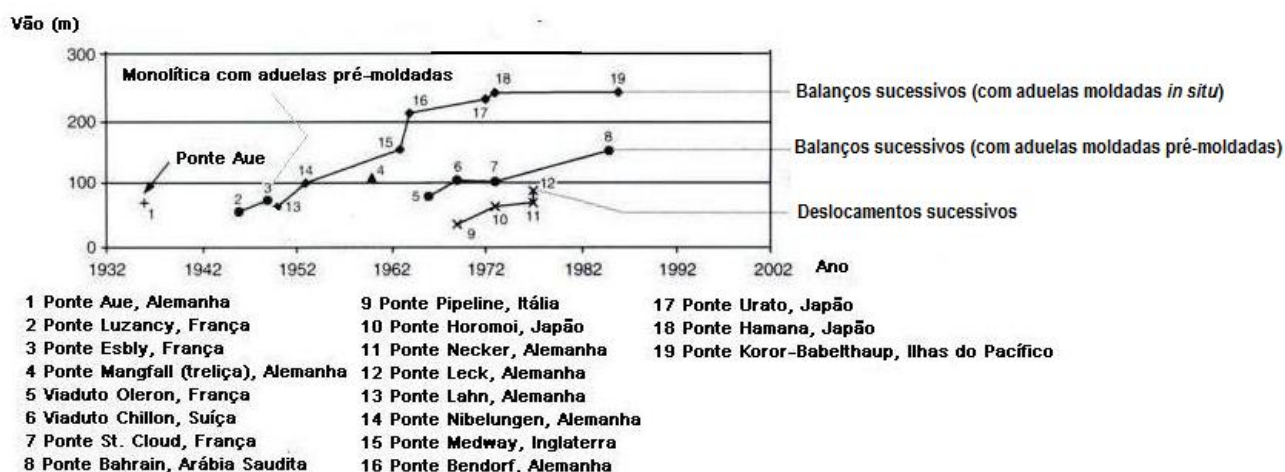


Figura 2.5 – Principais pontes construídas por ano (Hewson, 2003).

Até o final dos anos 80, todas as pontes eram construídas por balanços sucessivos ou por deslocamentos progressivos (*incremental launching*), com exceção de pequenas passarelas, conforme observa-se na Fig. 2.5. Em 1978, Jean Muller e Eugene Figg se uniram e foram responsáveis pela construção de uma série de pontes, no arquipélago

Florida Keys, sendo elas, as pontes Long Key, Seven Mile, Channel Five e Niles Channel. Dentre as inovações no projeto da ponte Long Key, pode-se citar a localização dos cabos de protensão dentro da seção caixão, mas fora do concreto e a técnica de construção sobre um vão inteiro chamada *span-by-span*. Os cabos não foram conectados à estrutura continuamente e sim em determinados pontos por meio de desviadores. Ela possui 103 vãos com um total de 3,7 km de extensão. Foram utilizadas juntas secas, pois os segmentos eram alinhados através de treliças de lançamento sem a necessidade de lubrificação e chaves de cisalhamento resistiam às tensões cisalhantes. Os cabos externos foram protegidos por bainhas de polietileno e nenhum atravessava as juntas construídas com o sistema *match-cast*. Todas as inovações usadas na ponte Long Key são utilizadas até hoje na maioria das pontes. O projeto da ponte Seven Mile foi similar (Fig. 2.6). A ponte possui 10,93 km de extensão, aproximadamente sete milhas, por este motivo recebeu o nome de Seven Mile.



Figura 2.6 – Ponte Seven Mile (Tassin, 2006)

Dentre as estruturas posteriormente construídas através do método *span-by-span* destacam-se o viaduto Linn Cove na Carolina do Norte, com aproximadamente 379 m, construído em 1983; a ponte Bob Graham Sunshine Skyway na Flórida com 1,22 km de extensão, construída em 1987; o Sistema de Metrô em Monterrey, no México, com 17,9 km, construído em 1991 e a ponte da Confederação no estreito de Northumberland no Canadá, concluída em 1997 (Fig. 2.7).





Figura 2.7 - Ponte da Confederação (Canadá)  
([www.confederationbridge.com](http://www.confederationbridge.com))

Em 2000, o sistema de vias expressas Bang Na-Bang Phli-Bang Pakong Expressway (BBBE) foi inaugurado em Bangkok, na Tailândia. Construído com esta técnica, é a estrutura de ponte e viaduto mais longa do mundo, com 54 km de extensão. Cada segmento possuía 27 metros de largura e 10 toneladas e eram moldados no local perto da via expressa e transportados por caminhões. Sua construção aliviou os congestionamentos frequentes na região. Sua superestrutura foi protendida externamente por 20 cabos de 15 mm de diâmetro. A Fig. 2.8 mostra como eram lançadas as aduelas, segundo Brockmann e Rogenhofer (2000).



Figura 2.8 – Sistema de vias expressas Bang Na-Bang Phli-Bang Pakong Expressway

Em 2005, nos Estados Unidos, foram inauguradas a nova ponte Victory (Fig. 2.9), a ponte Four Bears (Fig. 2.10), sobre o rio Missouri, e a nova ponte Benicia Martinez (Fig. 2.11). Na ponte Victory foi utilizado o método *span-by-span*, com exceção dos vãos principais, que se utilizou o método dos balanços sucessivos. Ela possui 1,21 km de extensão, com um vão principal de 134 m. Na ponte Four Bears utilizou-se o método dos balanços sucessivos com aduelas pré-moldadas, assim com na ponte Benicia Martinez, só que com aduelas moldadas no local. Elas possuem 1,37 km e 2,7 km de extensão respectivamente.

Em 2006, a ponte Wakota foi inaugurada sobre o rio Mississippi nos Estados Unidos, possuindo um comprimento total de 576 m e o maior vão com 142 m. Na sua construção foi utilizada a técnica dos balanços sucessivos com aduelas moldadas no local.



Figura 2.9 - Ponte Victory (<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=274>)



Figura 2.10 - Ponte Four Bears (<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=270>)



Figura 2.11 - Ponte Benicia Martinez (<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=266&pid=2>)

Em 2007 a ponte do rio Otay foi inaugurada nos Estados Unidos, com 640 aduelas pré-moldadas erguidas através do método dos balanços sucessivos. A ponte possui 12 vãos de 90,5 m (Fig. 2.12).





Figura 2.12 - Ponte do rio Otay ([www.dsicanada.ca](http://www.dsicanada.ca))

No Brasil, a ponte segmentada de maior destaque é a ponte Presidente Costa e Silva, popularmente conhecida como ponte Rio-Niterói (Fig. 2.13), localiza-se na baía de Guanabara ligando o município do Rio de Janeiro ao município de Niterói. Inaugurada em 1974, é uma construção superlativa com seus 13 km de extensão e vão central com 72 metros de altura e 300m de comprimento.

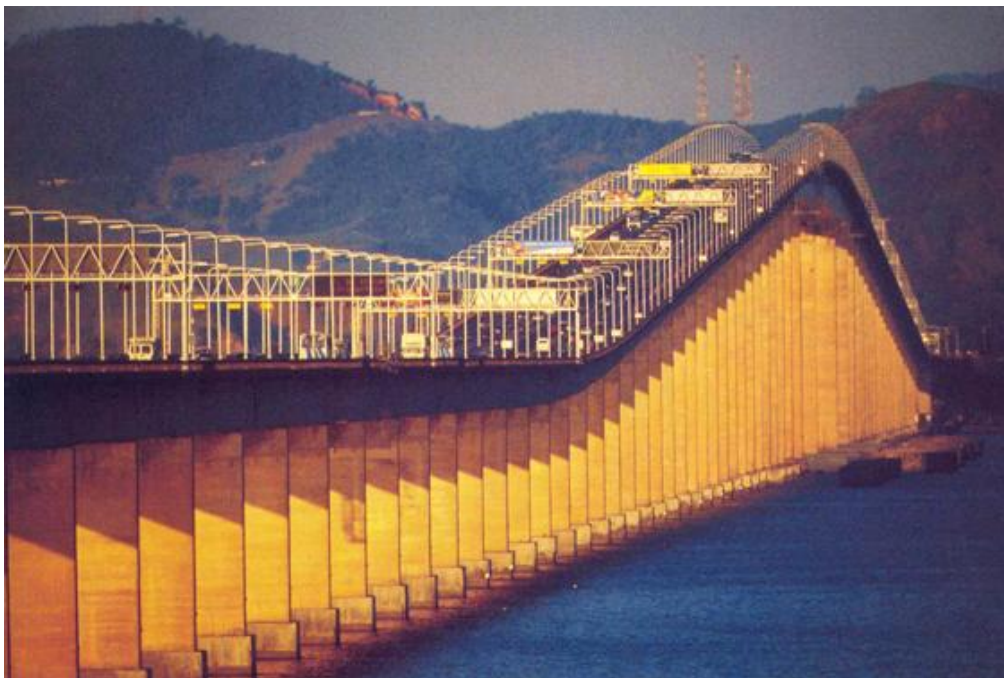


Figura 2.13 – Ponte Rio-Nitéroi  
(<http://www.ponte.com.br/concessionaria/sobrea>)



## 2.3 TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO

A escolha da técnica de construção mais adequada para determinada ponte, depende de vários fatores, que incluem o espaço livre vertical e horizontal existente, o alinhamento, a geometria, o tempo de construção disponível, restrições do local de execução, condições ambientais e estéticas.

A opção do uso de segmentos pré-moldados e moldados no local para as várias técnicas de construção irá depender primordialmente do tamanho do projeto, do cronograma, do comprimento do vão e do acesso ao local da obra.

As principais técnicas de construção utilizadas serão discutidas a seguir, sendo elas: com elementos pré-moldados sobre o vão inteiro (*span-by-span*), por balanços sucessivos (*balanced cantilever*) e por empurramentos sucessivos (*incremental launching*). Na Tab. 2.1 podem-se comparar as técnicas através da altura da aduela e a faixa de vãos considerada econômica. Na Fig. 2.14, observa-se a altura da aduela constante e variável. O uso da altura constante de aduela permite melhores soluções para pequenos e médios vãos de até aproximadamente 80 m. Para vãos maiores, a opção de variar a altura da aduela se torna mais econômica, segundo Majid Madani (<http://www.fhwa.dot.gov/bridge/segmental/task60.htm>).

Tabela 2.1 – Comparação entre métodos de construção.

<b>Método de Construção</b>		<b>Altura da aduela (m)</b>	<b>Vão econômico (m)</b>
<b>Sobre o vão inteiro</b>	Pré-moldados	Constante 1,8	Acima de 35
	Pré-moldados	Constante 1,8 a 2,4	35- 45
	Pré-moldados / Moldados no local	Constante 2,1 a 3,7	35- 50
<b>Deslocamentos Sucessivos</b>	Moldados no local	Constante 2,4 a 3,7	Acima de 70
<b>Balanços Sucessivos</b>	Pré-moldados	Constante 1,8 a 2,7	50 - 80
	Pré-moldados	Variável 1,8 a 6,1	60 - 140
	Moldados no local	Variável 1,8 a 12,2	80 - 230

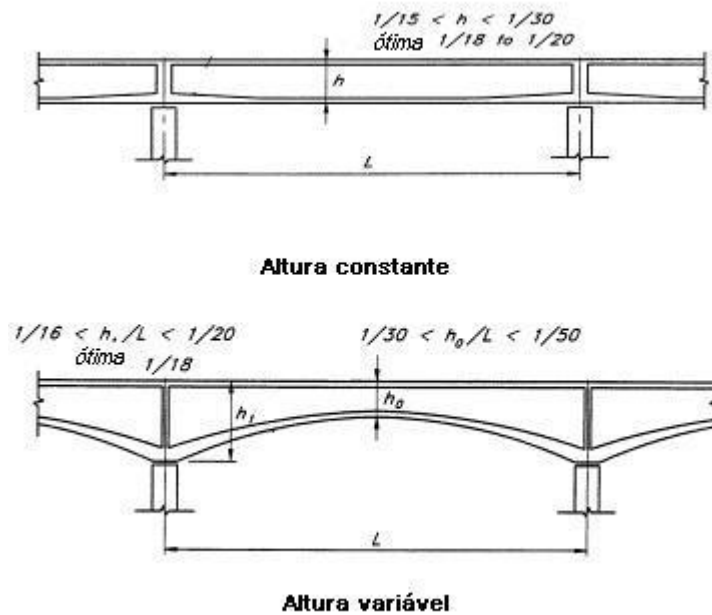


Figura 2.14 – Altura ótima da aduela (adaptada)  
 (<http://www.fhwa.dot.gov/bridge/segmental/task60.htm>).

A montagem dos segmentos pode ser feita de diferentes maneiras, dependendo das condições climáticas, da maré e do acesso para o transporte das aduelas. A Fig. 2.15 ilustra os tipos de montagem das treliças, podendo ser com apoios provisórios (*standard scaffolding*), treliças acima do nível da ponte podendo ser com aduelas penduradas (*overslung truss*) ou em balanço (*free cantilever*) e com treliças abaixo do nível da ponte (*underslung truss*) (Rombach, 2002).

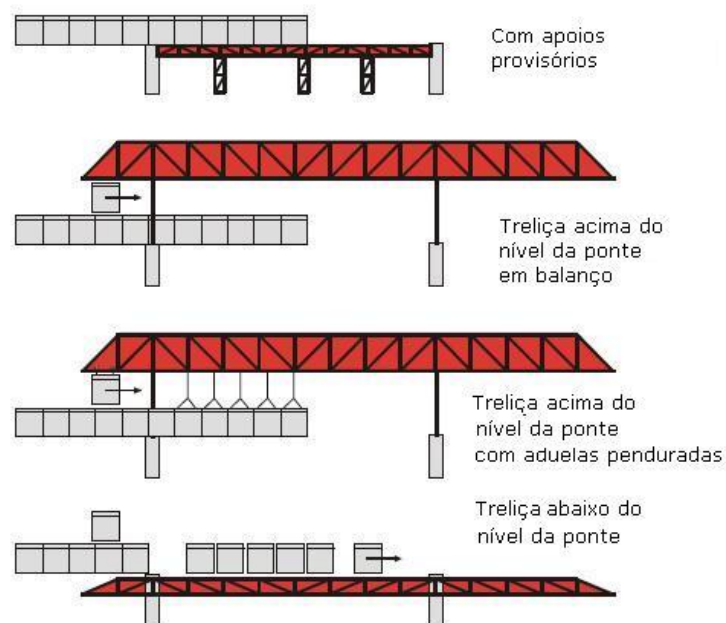


Figura 2.15 – Montagem dos segmentos (adaptada de Rombach, 2002).

Entre as aduelas pode-se usar ou não cola à base de resina epóxi, que serve para lubrificar a superfície, preencher possíveis imperfeições, manter as juntas fixas, selando e protegendo as armaduras protendidas internas e contribuir para a transmissão das tensões cisalhantes. Na Fig. 2.16 observam-se diferentes tipos de juntas de aduelas pré-moldadas e moldadas no local.

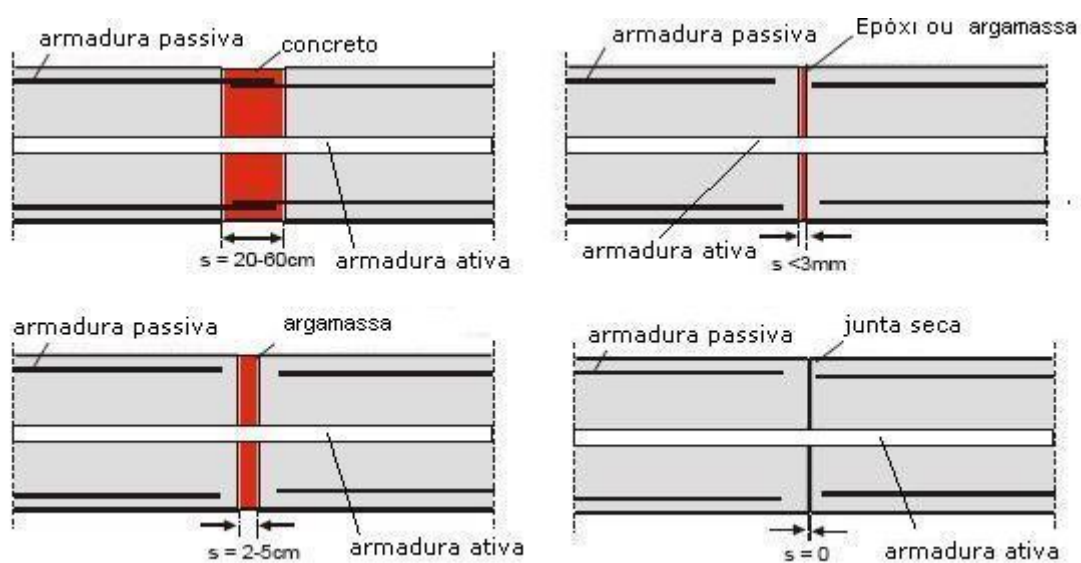


Figura 2.16 – Tipo de juntas (adaptada de Rombach, 2002).

Já as juntas secas, sem epóxi, possuem a vantagem de reduzir o tempo e o custo da construção, eliminar eventuais problemas que podem ocorrer com o epóxi. Geralmente não há armadura passiva, nem de protensão interna passando pelas juntas, pois não há uma impermeabilização perfeita, por isso a protensão externa é a escolha ideal.

Além disso, todas as faces de contato das juntas, com ou sem epóxi, possuem saliências característica, chamadas de dentes ou chaves de cisalhamento (*shear keys*), que garantem um melhor encaixe e alinhamento entre as aduelas e também a transmissão de esforços cortantes. A relação  $d/h$ , recomendada por Coderque (2003), para as dimensões das chaves de cisalhamento deve ter valores maiores de 0,125 (Fig. 2.17), pois se cumprida essa condição, a ruptura da chave será total (*shear off*) e não localmente em um canto. As dimensões de uma seção padrão da ponte Bang Na Expressway e suas chaves de cisalhamento podem ser observadas na Fig. 2.18.

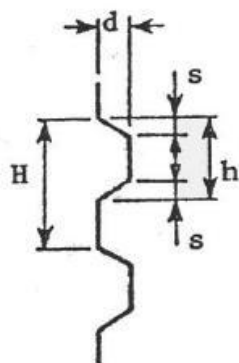


Figura 2.17 – Parâmetros que definem geometricamente uma chave de cisalhamento (Cordeque, 2003)

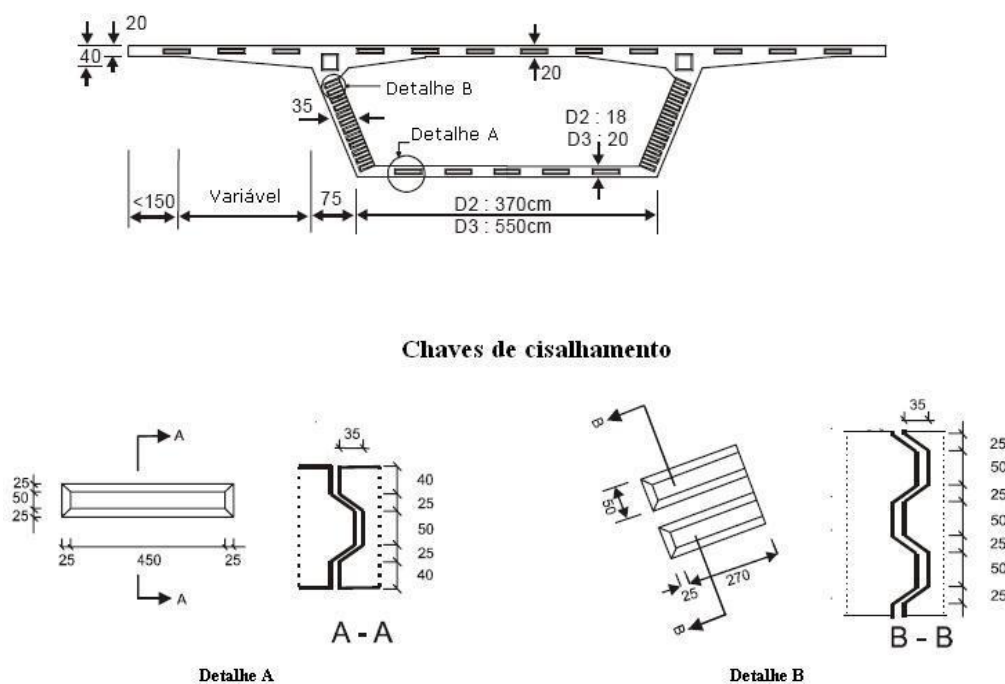


Figura 2.18 – Dimensões de um segmento padrão e suas chaves de cisalhamento da ponte Bang Na Expressway (adaptada de Rombach, 2002).

### 2.3.1 Balanços Sucessivos

O processo consiste da construção da obra em segmentos, denominados de aduelas, que podem ser **pré-moldadas** ou **moldadas no local**, constituindo balanços que avançam sobre o obstáculo a ser vencido.

O processo realizado com aduelas **moldadas no local**, desenvolvido por Ulrich Finsterwalder, tem um princípio simples. Através de fôrmas deslizantes, escoradas nos trechos já construídos em balanço, concretam-se as novas aduelas, sempre contrabalançando pelo avanço simultâneo dos vãos vizinhos. Deve-se salientar que antes da concretagem de uma aduela, a sua aduela anterior deve ter alcançado a resistência definida em projeto para suportá-la. A grande vantagem deste processo é a possibilidade de dispor através das juntas de concretagem uma armadura longitudinal para limitação da fissuração, de modo a tornar possível uma protensão limitada ou parcial (Leonhardt, 1979). Este processo, com aduelas moldadas no local, é indicado

para vãos entre 100 e 260 metros e condições topográficas difíceis como vales profundos ou rios (Matt, 1983).

Um viaduto na Rodovia Mogi-Dutra, em São Paulo, concluído no final do ano de 2004 foi executado pelo processo de balanços sucessivos com dois pares de treliças metálicas e aduelas moldadas no local do tipo caixão unicelular, como pode ser observado na Fig. 2.19 (Curty Jr., 2006).



Figura 2.19 – Viaduto na Rodovia Mogi-Dutra

No processo com **elementos pré-moldados**, as aduelas são fabricadas no canteiro e transportadas por meio de treliças metálicas até a extremidade do balanço, onde são protendidas longitudinalmente.

A estabilidade do processo executivo exige um engastamento do pilar de partida ou apoios temporários sobre as fundações daqueles pilares. A Fig. 2.20 ilustra o sistema de balanços sucessivos com cabos inclinados (estais) sobre apoios provisórios.

Na execução com treliça de lançamento metálica, esquematizada na Fig. 2.21, onde a treliça fica situada sobre o tabuleiro da ponte, o tabuleiro vai sendo construído partindo de cada pilar até a metade do vão, onde é feito o fechamento central. A boa execução do fechamento se deve a um rígido controle com relação às deformações, para não haver diferenças na seção central. É necessário ainda procurar que a realização da

concretagem ocorra em períodos com menor variação de temperatura, para que os efeitos térmicos não provoquem esforços no trecho até o endurecimento do concreto.

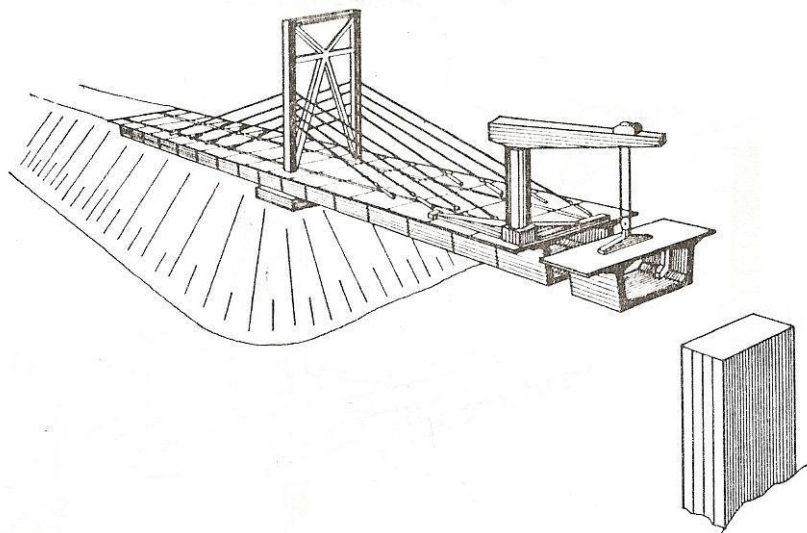


Figura 2.20 – Balanço sucessivo com cabos inclinados sobre apoios provisórios (Combault, 1983).

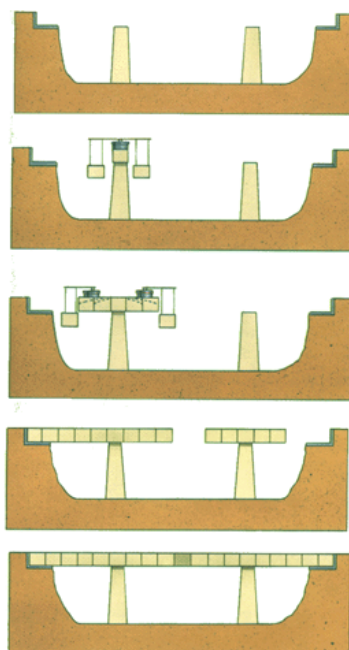


Figura 2.21 – Esquema geral da construção por balanços sucessivos (<http://www.cse.polyu.edu.hk/~ctbridge>).

O primeiro trecho do balanço, denominado arranque, é moldado no local e o escoramento de sua fôrma feito sobre o apoio, mesmo na utilização de aduelas pré-moldadas.

O uso desta técnica de construção se justifica quando há dificuldade de escoramento direto, há necessidade de grandes vãos, tempo de construção reduzido (os segmentos podem ser pré-fabricados enquanto a infra-estrutura é construída), não interrupção do tráfego em zona urbana, produção em massa das aduelas, proporcionado maior controle de qualidade (efeitos de retração e fluência são minimizados devido à fabricação prévia das aduelas) e redução da armadura passiva (Rombach, 2002).

A utilização de aduelas pré-moldadas possui outras vantagens como: a redução e melhor reutilização das fôrmas, limitadas pelo comprimento de uma aduela; finalização da superfície como texturização, aplicação de jatos de areia, revestimento, que podem ser facilmente realizados no canteiro e aumento do rendimento da mão-de-obra, em função da mecanização de montagem. As desvantagens podem ser citadas como a falta de armadura passiva entre as juntas a fim de absorver os esforços acidentais de tração e a necessidade de um alto grau de controle para transporte e fabricação das aduelas (Perlingeiro, 2006).

### **2.3.2 Elementos pré-moldados sobre o vão inteiro**

No processo de execução com elementos pré-moldados sobre o vão inteiro (*span-by-span*) todos os segmentos de um vão são erguidos por uma treliça metálica ou guindaste e são protendidos juntos após a colocação de argamassa ou epóxi entre cada junta ou somente na última junta próxima aos pilares. Após a treliça é movida para o próximo vão e assim sucessivamente. O esquema de operação pode ser visto na Fig 2.22.



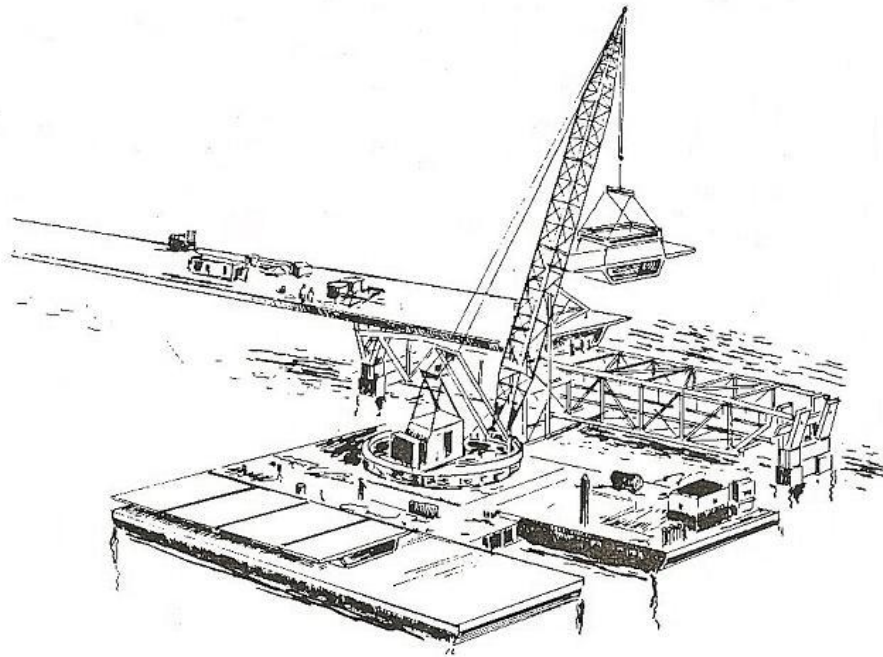


Figura 2.22 – Construção de um vão pela técnica *span-by-span* (Muller, 1980).

A ponte Long Key é um espetacular exemplo da rapidez que pode ser obtida utilizando essa técnica de construção. A Fig. 2.23 mostra a execução de um vão desta ponte.



Figura 2.23 – Ponte Long Key (Association pour la mémoire et le rayonnement des travaux d'Eugène Freyssinet, 2004)

### 2.3.3 Deslocamentos Progressivos

Este método também conhecido como *incremental launching* ou empurramentos sucessivos foi utilizado pela primeira vez em 1962 quando a ponte Caroni foi construída na Venezuela. Os pioneiros nesta técnica foram os engenheiros Fritz Leonhardt e Willi Baur. O método dos deslocamentos progressivos é geralmente econômico para pontes com vãos de 30 a 60 m, com no mínimo 150 m de extensão e 3 vãos. Pode ser usado em pontes com eixo reto ou com curvatura constante (VSL International, 1977).

A superestrutura é fabricada nas margens da ponte sobre fôrmas metálicas fixas e depois é empurrada para sua posição ao longo dos vãos, através de macacos hidráulicos. A estrutura funciona em balanço à medida que vai avançando, até encontrar o próximo apoio. Os segmentos são concretados um contra o outro, o que permite a continuidade da armadura na região das juntas. A estrutura é empurrada por macacos hidráulicos e sobre aparelhos de apoio deslizantes de teflon sobre os pilares, que podem ser permanentes ou provisórios, dependendo do tamanho do vão. Uma vez que o trecho dianteiro da estrutura fica em balanço até alcançar os apoios, utiliza-se uma treliça metálica fixada no trecho dianteiro que alcança o apoio antes da estrutura, diminuindo o balanço e reduzindo o momento negativo durante a fase construtiva (Mattos, 2001). A Fig. 2.24 esquematiza o método dos deslocamentos progressivos.

Este método reúne as vantagens da produção em canteiro com as vantagens do concreto moldado no local, como eliminação do escoramento; redução das fôrmas; redução de mão de obra; rapidez na execução e menor investimento em equipamentos especiais. Por outro lado, entretanto, há um aumento do material utilizado (concreto, armadura passiva e ativa) em comparação com o método *span-by-span* (Matt, 1983).

Recomenda-se, para aplicação do método, modular os vãos internos com comprimentos iguais, e os vãos extremos com comprimentos iguais a 75% dos comprimentos dos vãos internos. Este procedimento e a adoção de segmentos com comprimentos iguais à metade do comprimento dos vãos internos assegura que as emendas dos diversos segmentos coincidam com os quartos do vão, região em que os esforços internos são menores. A seção transversal mais adequada é a mono-celular com altura aproximada de 1/17 do vão interno (Schmid, 2005).

A protensão é aplicada em duas etapas. A primeira na fase construtiva, devendo ser centrada, em função da alternância das solicitações devidas ao peso próprio durante a execução da obra, Terminado o lançamento, na segunda etapa procede-se à enfição e à protensão dos cabos curvos e contínuos, cuja configuração atende a envoltória dos momentos fletores decorrentes das sobrecargas permanentes e cargas móveis. Os cabos são pós-enfiados nas nervuras e abrangem 2 ou 3 vãos de cada vez; saem no interior do caixão e são protendidos pelas duas extremidades. (Schmid, 2005).

O bico dianteiro é uma estrutura leve, em geral metálica, constituída por duas vigas de alma cheia, devidamente contraventadas. Seu comprimento mais eficiente está entre 60 e 70% do comprimento do vão-tipo (Schmid, 2005).

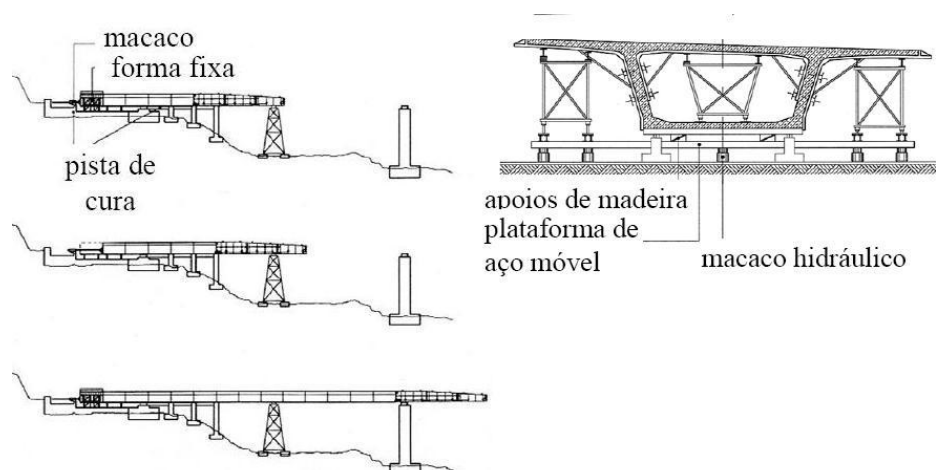


Figura 2.24 - Processo de construção por deslocamentos progressivos  
(<http://www.ctec.ufal.br/ees/disciplinas/ec2/PROCESSOS%20DE%20CONSTRUCAO.pdf>).

Pode-se citar entre as obras marcantes executadas com este processo: o viaduto Ravensbosch, nos Países Baixos, construída entre 1972 e 1974, com comprimento total de 420 m e vãos de 42 – 6x56 – 42 m; a ponte Horomoi no Japão, concluída em 1973, com comprimento total de 70 m e vãos de 52,5 – 63,00 – 52,50 m e a ponte sobre o rio Woronora concluída em 2001 na Austrália, com comprimento total de 521 m (Fig. 2.25). Como experiência brasileira na técnica, pode-se citar a ponte sobre o rio Jordão no Paraná, construída entre 1980 e 1981, a passarela sobre a Fepasa na Estação de Presidente Altino e a ponte sobre o rio Pardo construída entre 1982 e 1983, ambas em São Paulo (Schmid, 2005).



Figura 2.25 - Ponte sobre o rio Woronora (LaViolette, 2007)

## 2.4 O TRAÇADO DO CABO DE PROTENSÃO

Os cabos externos de protensão são constituídos por séries de segmentos retos conectados entre os desviadores e as ancoragens. Conforme a Fig. 2.26(c), a estrutura sem desviador, é mais barata, com menor perda por atrito e fácil execução. Entretanto a força de protensão produzida pelo cabo reto não tem componente vertical, conseqüentemente, é menos eficiente para equilibrar os esforços cortantes. Já a estruturas com cabos inclinados, possuem a componente vertical necessária e são usualmente utilizadas (Ariyawardena, 2000).

Além disso, a localização do cabo de protensão deve atender a configuração necessária que satisfaça os esforços solicitantes tanto durante a construção, quanto na sua condição permanente.

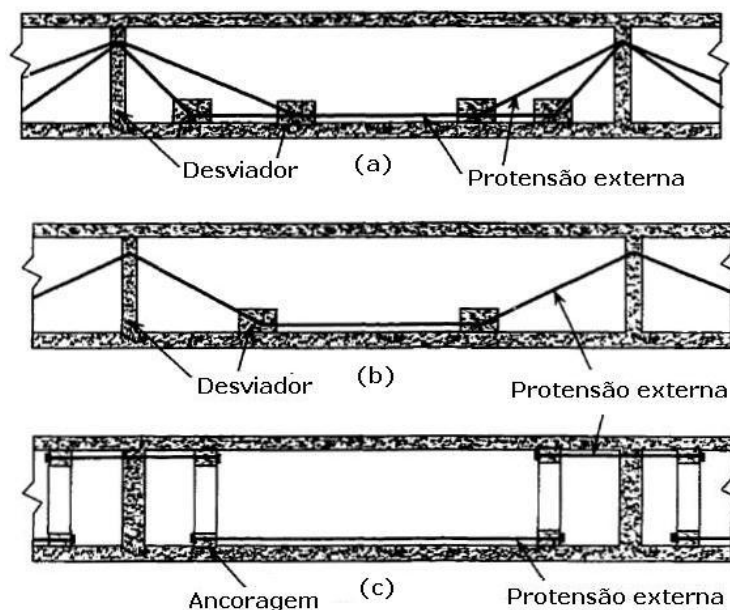


Figura 2.26 - Geometria dos cabos de protensão externa (Ariyawardena, 2000).

Na técnica de construção deslocamentos progressivos (*incremental launching*), cada seção da estrutura está sujeita a momentos máximos positivos e negativos durante o avanço. Entretanto, após o término da construção, os sentidos dos momentos acabam se invertendo. A maneira mais simples de atender a essas duas situações é utilizar a protensão externa como mostrado na Fig. 2.27. Nela a linha tracejada representa o cabo de protensão necessário durante a construção e a linha cheia representa o cabo de protensão que será permanente na estrutura (Virlogeux, 1990).

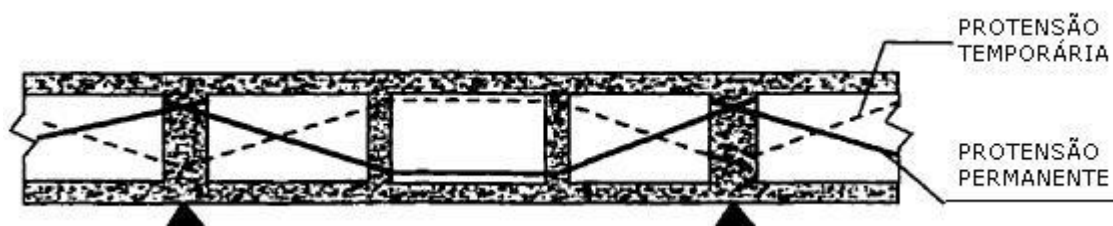


Figura 2.27 – Protensão temporária (durante a construção) e permanente na técnica de construção por deslocamentos progressivos (adaptada de Virlogeux, 1990)

Na Fig. 2.28, pode-se observar um segmento típico da utilização da técnica de balanços sucessivos. Os cabos de balanço podem ser ancorados na mesa superior ou em *blisters*.

No caso de ancoragem na mesa superior, não é permitida sua inspeção após a colocação do segmento posterior. No uso de *blisters* é possível fazer inspeções da ancoragem a qualquer momento. Nas Fig 2.29 e 2.30, observam-se os dois tipos de ancoragem do cabo de balanço. Uma vez que todos os segmentos são colocados, a junta de fechamento é executada no local e os cabos de continuidade são protendidos após sua cura, superiores e inferiores como mostrado na Fig 2.31. Os cabos de continuidade superiores podem ser necessários para equilibrar as tensões de tração produzida pelos cabos inferiores (Corven e Oretton, 2002).

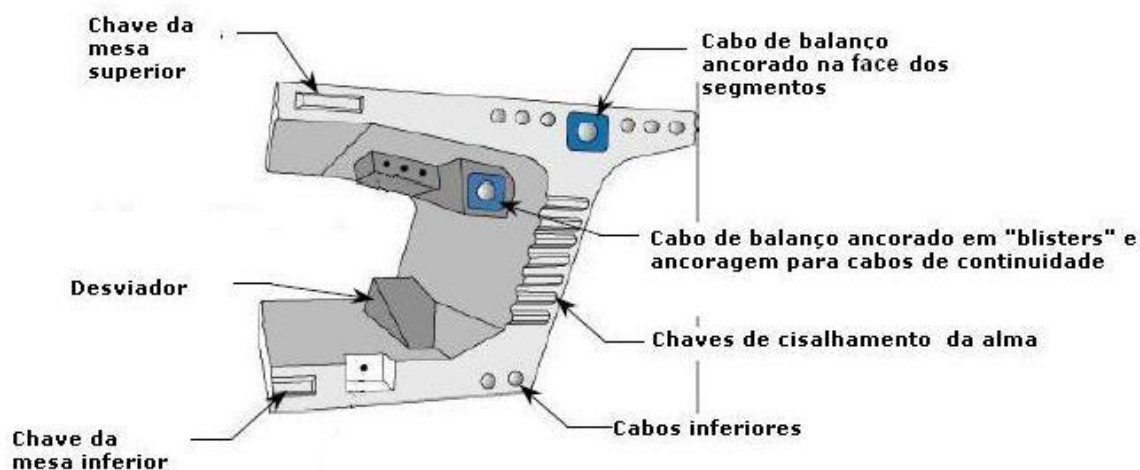


Figura 2.28 – Segmento típico utilizado na técnica balanços sucessivos (Corven e Oretton, 2002).

Na técnica *span-by-span*, os cabos externos de protensão são instalados e protendidos após a colocação de todos os segmentos. Neste caso, eles são ancorados próximos à mesa superior na seção dos apoios e desviados próximos à mesa inferior no meio do vão. Na Fig. 2.32 observa-se a localização dos cabos de protensão nessa técnica, para a seção do apoio interna a viga contínua e na junta de expansão (Corven e Oretton, 2002).



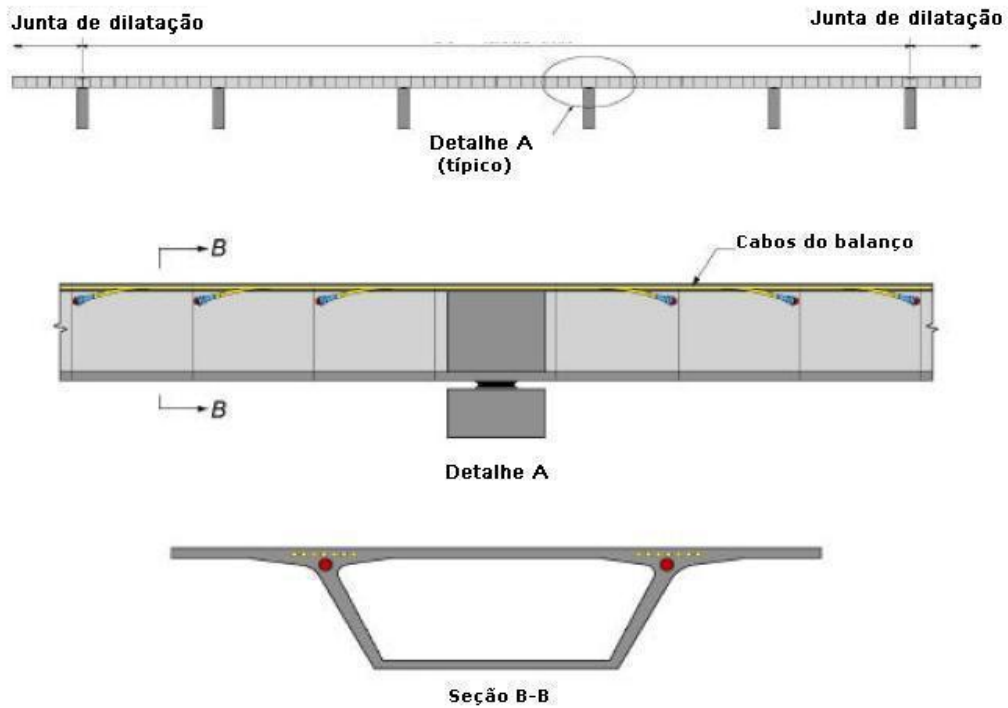


Figura 2.29 – Cabos de balanço ancorados nas faces dos segmentos na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oretton, 2002)

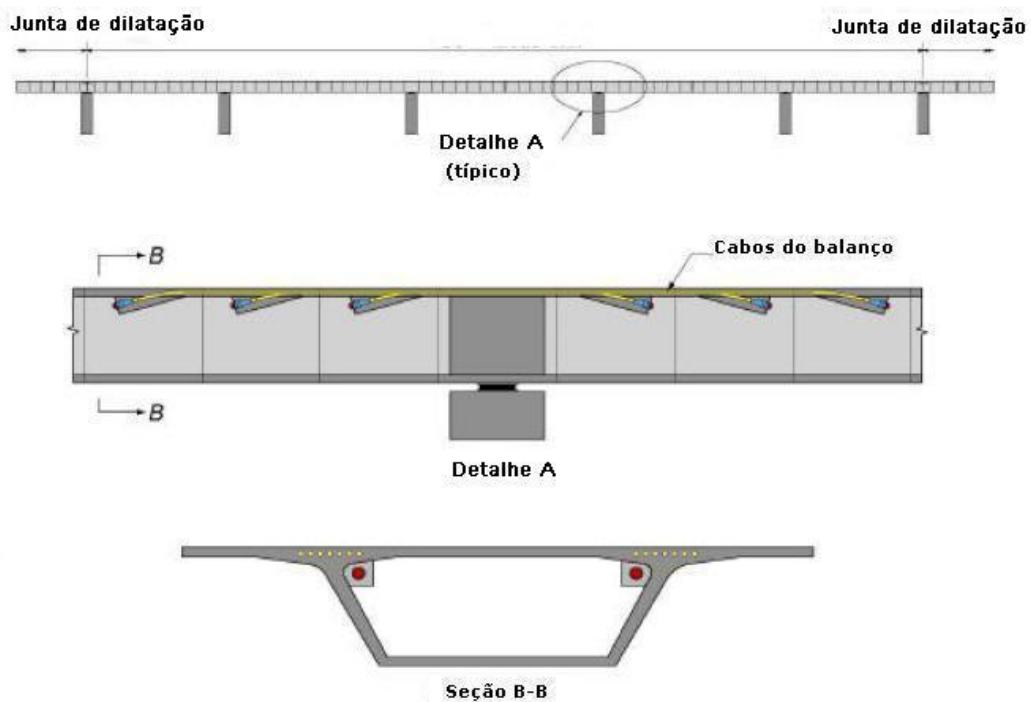


Figura 2.30 – Cabos de balanço ancorados em *blisters* na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oretton, 2002)

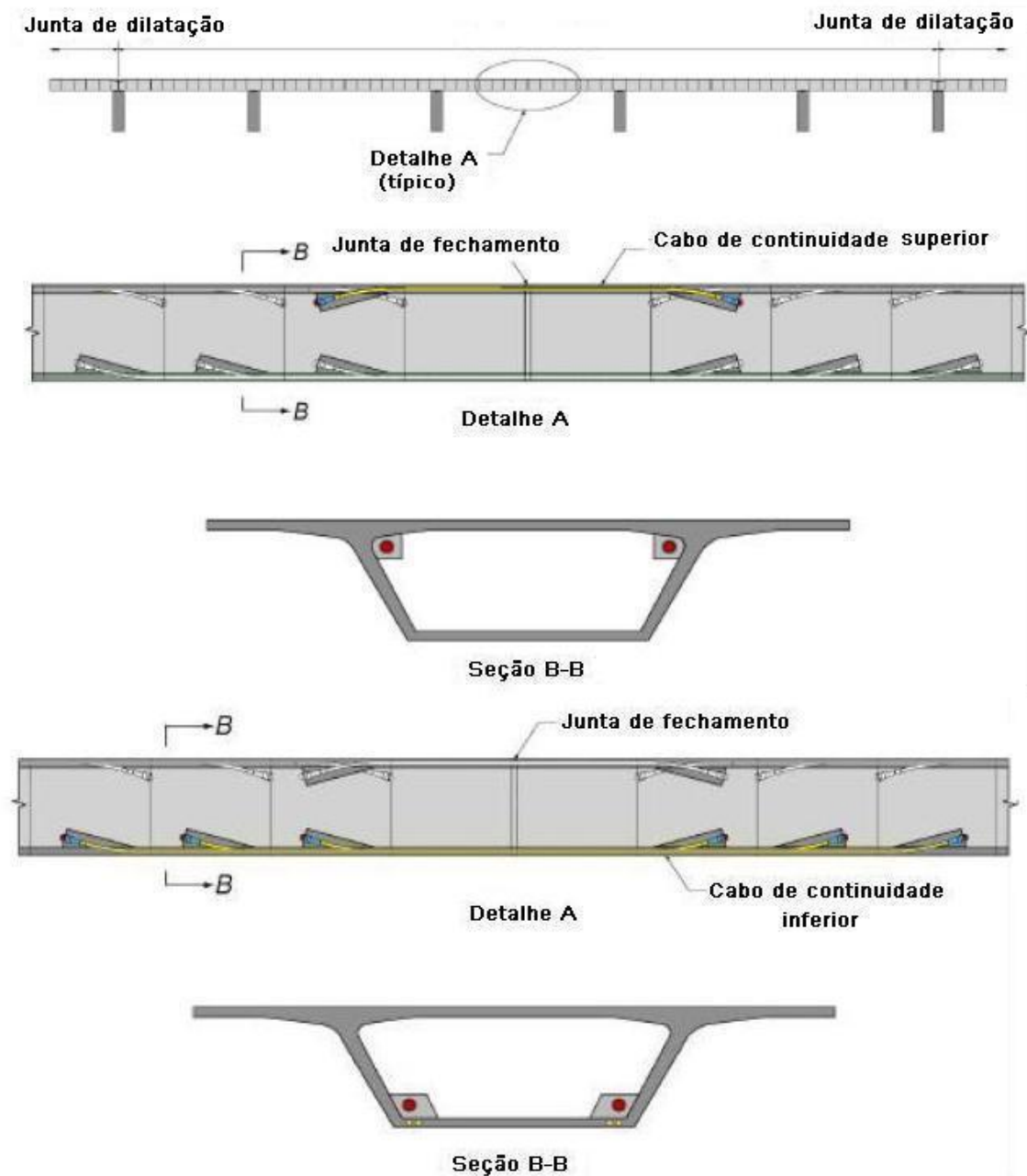


Figura 2.31 –Cabos de continuidade superior e inferior na técnica balanços sucessivos (adaptada de Corven e Oreton, 2002).



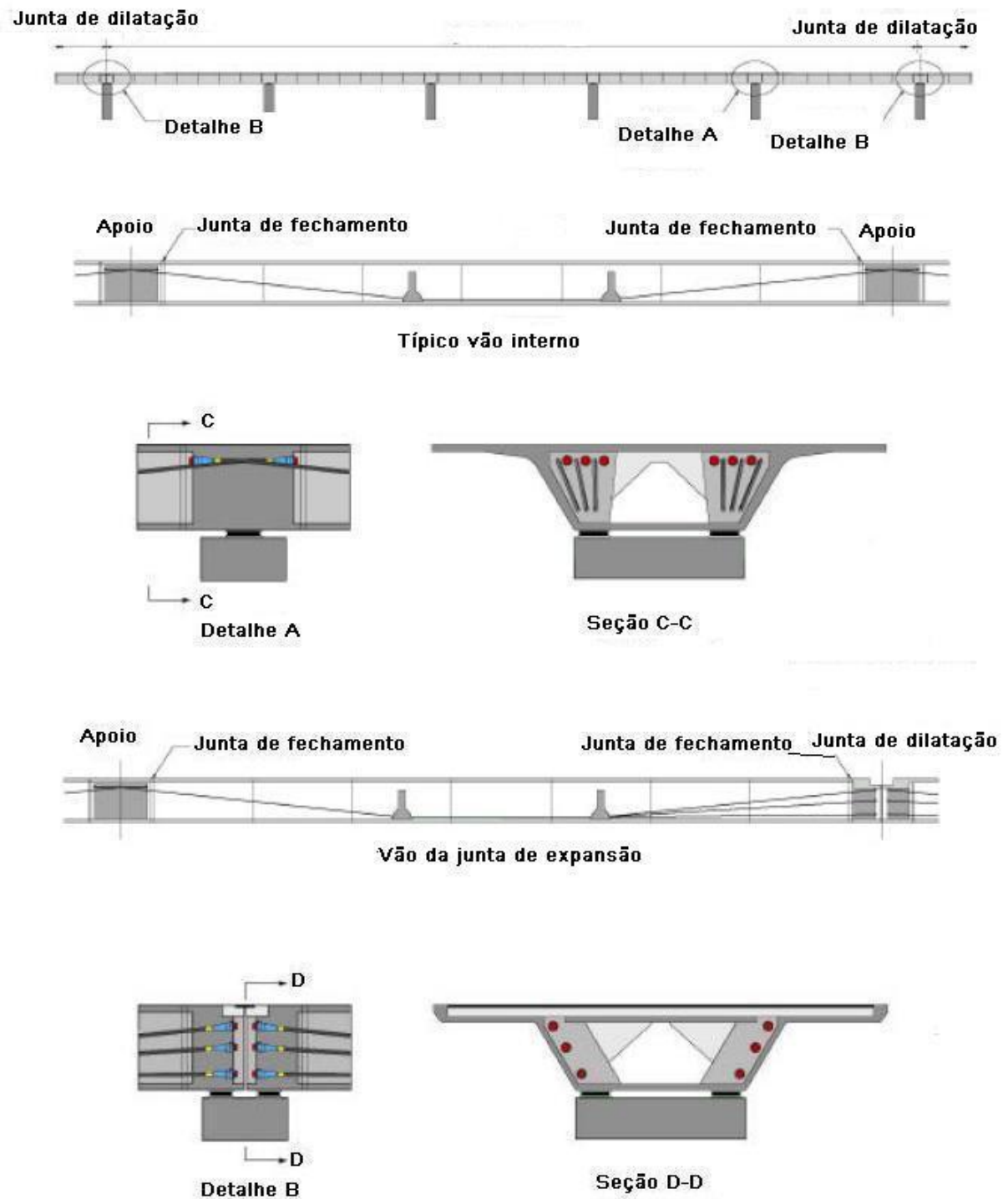


Figura 2.32 –Cabos de protensão na técnica *span-by-span* (adaptada de Corven e Oreton, 2002).

## 2.5 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Dentre os trabalhos mais relevantes com modelos numéricos para análise de estruturas segmentadas e protendidas externamente pode-se citar Muller e Gauthier (1990); Kreger et al. (1990), Ramos e Aparício (1995,1996), Martins (1989) e Turmo, Ramos e Aparício (2006)

### 2.5.1 Muller e Gauthier (1990)

Muller e Gauthier desenvolveram um programa de computador chamado *DEFLECT* para análise de estruturas compostas por aduelas e com protensão externa. O programa é baseado na relação entre o momento fletor e a curvatura. Admite-se que a distribuição de tensões na junta é linear (zona de contato é plana) e que entre duas juntas abertas não há fissuras.

Quando a junta se abre, submetida a uma carga  $N$  (normal) e  $M$  (momento fletor), ultrapassando a carga de serviço, a rigidez da viga é modificada (Fig. 2.33). A altura de concreto comprimido é chamada  $h_c$ . Essa rigidez depende da deformabilidade do segmento entre duas juntas adjacentes. Para conhecer essa nova rigidez é necessário conhecer a relação entre o momento fletor e a rotação da junta.

De acordo com a Fig. 2.34, aplicam-se uma translação e uma rotação unitárias para todos os nós da junta acima da linha neutra. Os resultados são combinados de tal forma que todos os nós acima da linha neutra apresentam uma rotação ( $dw$ ) em torno da mesma.

No próximo passo, é calculada para todos os nós  $P_i$ , a força axial  $N_i$  resultante dos deslocamentos aplicados. Sendo  $z_c$  a distância da fibra inferior até o centroide e  $z_i$  até cada nó, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} N &= \sum N_i \\ M &= \sum N_i(z_i - z_c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por iteração, a relação entre a rotação ( $dw$ ) e as solicitações atuantes, caracterizadas por um par de valores  $N$  e  $M$ , é obtida variando-se a altura da linha neutra.

O modelo não considera a não linearidade do material, o deslizamento entre o cabo nos desviadores, nem o efeito de segunda ordem.

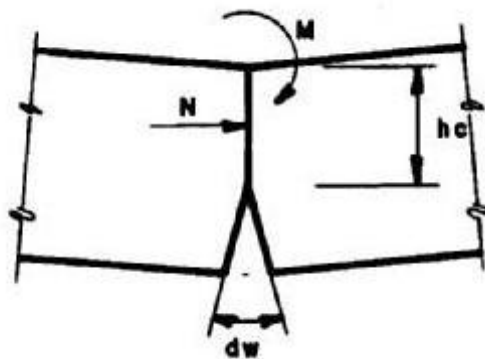


Figura 2.33 – Rotação na junta (Muller e Gauthier, 1990)

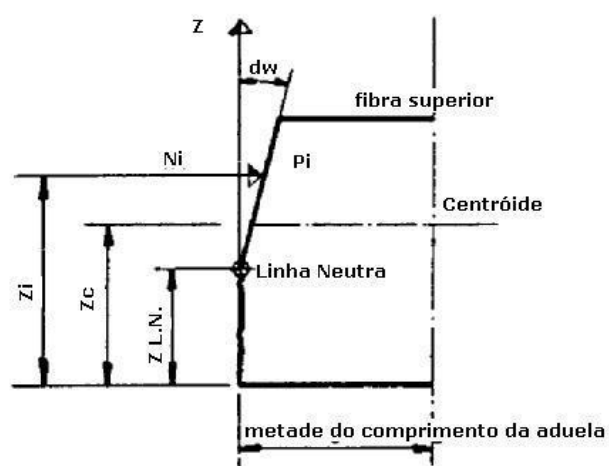


Figura 2.34 – Princípio do método (adaptada de Muller e Gauthier, 1990)

### 2.5.2 Kreger et al. (1990)

Kreger et al. (1990) utilizaram o método dos elementos finitos para analisar estruturas segmentadas com protensão externa com junta seca. A estrutura era modelada com três tipos de elementos finitos: um unidimensional de viga para os segmentos; um elemento de cabo conectado aos segmentos através de elementos rígidos e um elemento de junta, que transmite forças entre dois segmentos (Fig. 2.35). O elemento de viga tem três graus de liberdade por nó, sendo dois de translação e um de rotação. Os elementos rígidos representam os desviadores ou as ancoragens, nos pontos em que o cabo se conecta com a estrutura de concreto. O elemento de junta tem dois graus de liberdade por nó, sendo um de rotação e um de translação horizontal para representar a abertura da junta. No modelo, admitem-se pequenos deslocamentos e nenhum deslizamento do cabo de protensão. Os nós dos segmentos são conectados por uma mola distribuída, que resiste somente ao fechamento da junta (compressão).

A rigidez da mola é maior que a rigidez da viga. A matriz de rigidez do elemento de junta é deduzida através da abertura  $g$ , que é função de  $y$ , medida a partir do eixo de referência, como mostra a Fig. 2.36. A abertura  $g$  negativa indica abertura da junta. Essa pode estar em quatro estados: completamente fechada, aberta na parte superior, aberta na parte inferior e completamente aberta.



Figura 2.35 – Modelo de elementos finitos (adaptada de Kreger, et al., 1990)

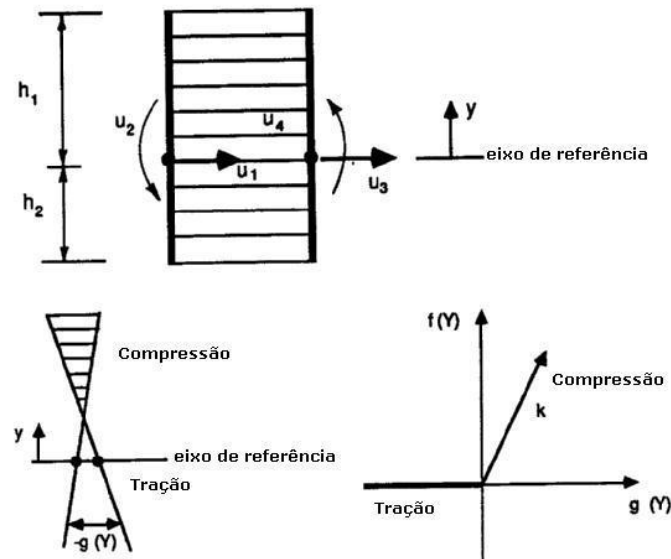


Figura 2.36 – Modelo do elemento de junta (adaptada de Kreger et al., 1990)

### 2.5.3 Ramos e Aparício (1995, 1996)

Ramos e Aparício elaboraram um modelo de elementos finitos para análise de estruturas simplesmente apoiadas ou contínuas, monolíticas ou segmentadas e com protensão externa e/ou protensão interna aderente. Neste modelo, o deslizamento do cabo e a não linearidade geométrica são considerados. Estes efeitos não eram considerados nos modelos anteriores. Os elementos finitos utilizados foram:

- Para o concreto armado foi utilizado um elemento de viga com dois nós com seis graus de liberdade por nó (Fig. 2.37). A não linearidade foi considerada atualizando a matriz de rigidez da estrutura a cada iteração.

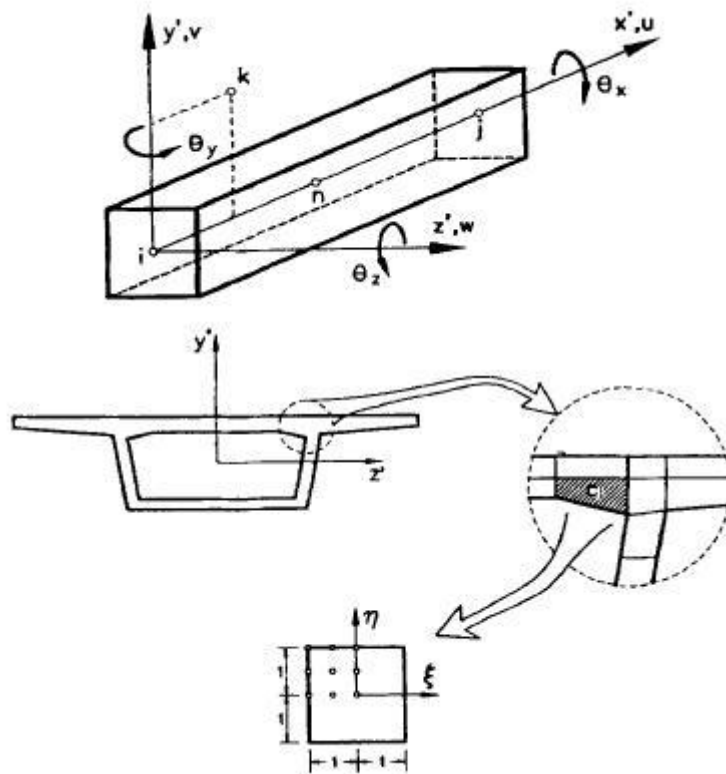


Figura 2.37 – Modelo do elemento do concreto (Ramos e Aparício, 1996)

- Para a protensão externa não aderente e interna aderente foi utilizado um mesmo modelo, dividindo o cabo em segmentos retos conectados ao concreto nos nós por elementos rígidos, com rotação e translação permitidas dentro da seção transversal. Para protensão interna, os segmentos são conectados a todos os nós da estrutura, já para a protensão externa, eles são conectados somente nos nós que representam os desviadores e ancoragem. (Fig. 2.38)

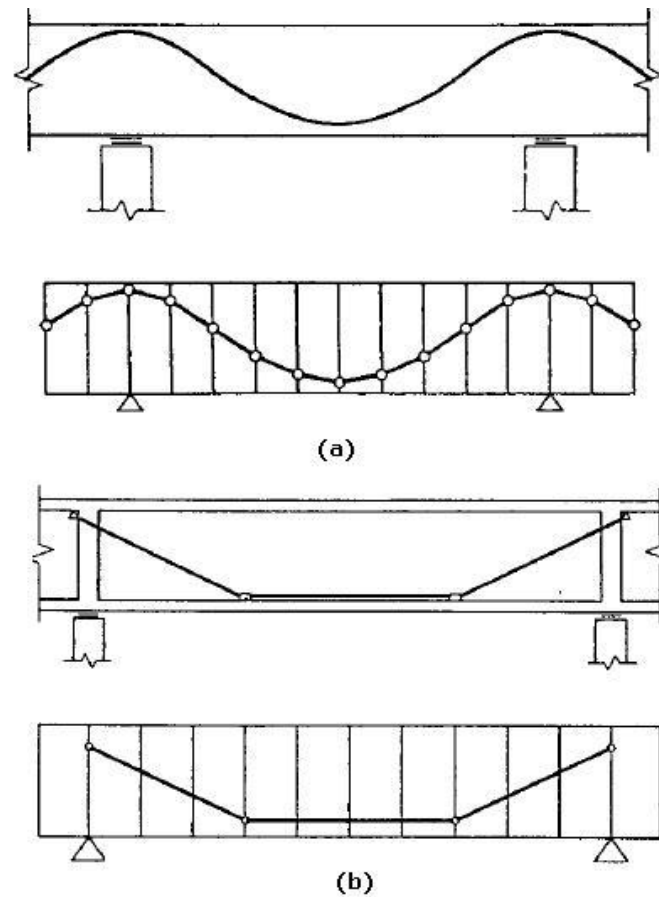


Figura 2.38 – Modelo do elemento de protensão: (a) interna aderente (b) externa não aderente (Ramos e Aparício, 1995)

- Para o elemento de junta, utiliza-se um elemento de concreto sem armadura passiva e sem resistência à tração. O elemento é introduzido onde a abertura da junta é simulada. O comprimento do elemento é igual à profundidade da viga. A abertura de junta não afeta somente as faces, afeta também o entorno do concreto, principalmente em juntas com epóxi. Para esse caso, onde a resistência à tração do epóxi impede a abertura da junta, o elemento é de concreto com a resistência à tração igual à da resina (Fig. 2.39).

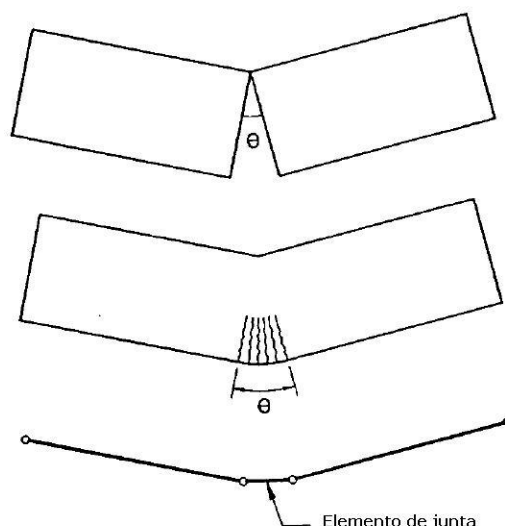


Figura 2.39 – Modelo do elemento de junta (adaptada de Ramos e Aparício, 1995).

#### 2.5.4 Martins (1989)

Martins desenvolveu um modelo numérico para análise de vigas segmentadas e monolíticas incluindo a não linearidade do material e geométrica e abertura de junta. O modelo também leva em conta o atrito nos desviadores, mas é somente aplicado a vigas simplesmente apoiadas e dificilmente é estendido a vigas contínuas.

Martins analisa uma junta entre duas aduelas adjacentes com comprimento  $l_v$ , submetidas a uma força axial  $N$  e um momento fletor  $M$  como mostrado na Fig. 2.40(a). As seções transversais permanecem planas e suas deformações são lineares. Há uma rotação em torno do eixo neutro, onde  $\varepsilon_c$  é nula.

Quando a junta abre, como mostrado na Fig. 2.40(b), as seções (V) na metade das aduelas permanecem planas, mas as deformações já não são mais lineares. Na seção (J) da junta, o ponto onde  $\varepsilon_c$  e o deslocamento  $u_c$  é nulo, não coincidem mais, como mostrado na Fig. 2.41. A distância  $y_o$  é a distância do centroide ao ponto de rotação da seção. O deslocamento longitudinal de qualquer ponto na seção da junta é dado pela integral:



$$u_J(y) = -(\theta/2)(y + y_o) = \int_0^{l_v/2} \varepsilon_c(x, y) dx + w(y)/2 \quad (2.2)$$

onde  $w(y)$  é a abertura da junta na ordenada  $y$  e considerada, sendo que  $u_J(y_o) = 0$

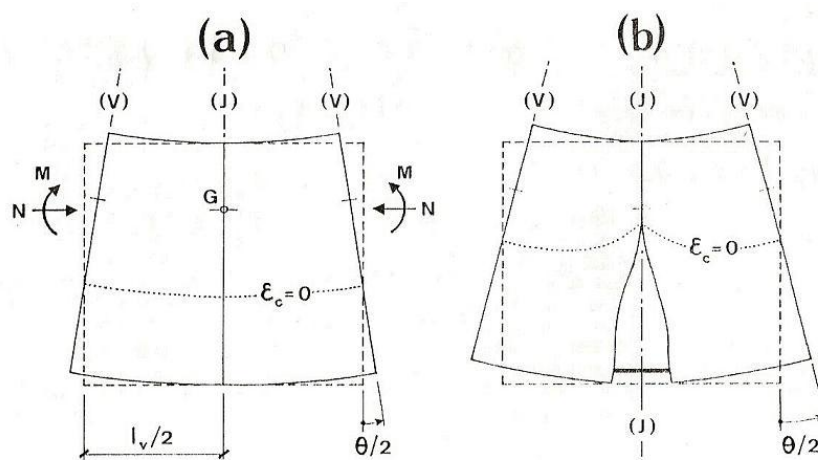


Figura 2.40 – Modelo (Fouré et al., 1991)

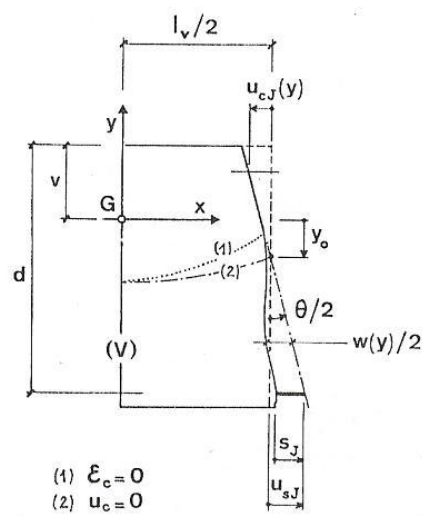


Figura 2.41 – Equilíbrio da aduela (Fouré et al., 1991)

### 2.5.5 Turmo, Ramos e Aparício (2006)

Os autores desenvolveram um modelo numérico através do método dos elementos finitos para análise de vigas segmentadas com protensão externa sob flexão e cisalhamento. O modelo foi validado através de ensaios experimentais em vigas segmentadas realizados por Turmo (2003) e (2006). Foi utilizado o programa comercial Diana 8.1, com elementos bidimensionais. Tanto as juntas com chaves de cisalhamento quanto as sem foram modeladas com elementos de interface com dois nós (Fig. 2.42), cada um com sua lei constitutiva. No caso das juntas com chaves de cisalhamento, sua geometria foi discretizada como apresentado na Fig. 2.43.

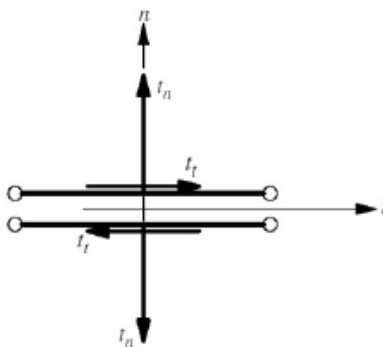


Figura 2.42 – Elemento de interface (Turmo, Ramos e Aparício, 2006)

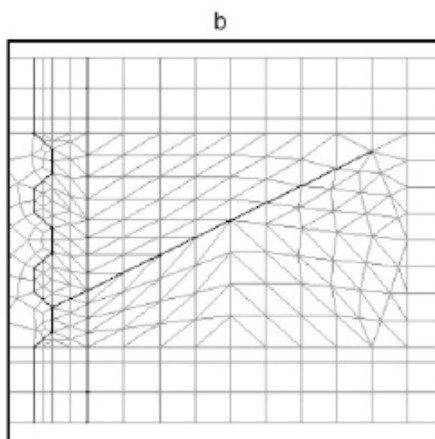


Figura 2.43 – Detalhe da malha de elementos finitos na junta com chaves de cisalhamento (Turmo, Ramos e Aparício, 2006)

## 3 PROTENSÃO EXTERNA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as vantagens e desvantagens do uso da protensão externa, as técnicas utilizadas e as diferenças entre a protensão externa e interna.

### 3.2 RAZÕES DE USO DA PROTENSÃO EXTERNA

As principais vantagens da protensão externa apontadas por Daly e Witarnawan (1997) e Bruggeling (1990) são relacionadas a seguir:

- Com cabos externos à estrutura, as inspeções e a manutenção ficam facilitadas, possibilitando um melhor controle da integridade da ponte.
- Os cabos podem ser trocados ou reprotendidos, se necessário, sem um custo significativo.
- A protensão externa aumenta a capacidade de carga de pontes já construídas, reduz ou fecha as fissuras existentes, auxiliando na prevenção da corrosão da armadura passiva. Portanto pode ser utilizada como reforço, aumentando a reserva de resistência às novas cargas aplicadas a estas pontes.
- As perdas devido ao atrito são menores que na protensão interna, conseqüentemente os cabos e os ângulos de desvio podem ser maiores. Isso se deve a utilização de bainhas de tubos de polietileno rígido em vez de bainhas de aço corrugado e do cabo só ter contato com o concreto nos desviadores.
- Diminuição do número de cabos, facilitando a vibração do concreto e não há necessidade de almas mais espessas para conter as bainhas, reduzindo assim o peso da estrutura.

- Os processos de concretagem e protensão dos cabos são mais independentes entre si. Não existe a etapa de injeção da nata de cimento nas bainhas.
- A protensão externa pode ser aplicada a diversos tipos de estruturas, de concreto armado, protendido, de aço e compósitos em quase todas as áreas da construção civil. Os materiais de fibras sintéticas vieram para superar os problemas associados à corrosão dos cabos de aço e melhorar a durabilidade das estruturas. Vários tipos de fibras estão disponíveis no mercado, como fibras de vidro, de carbono e aramida.

Como desvantagem dessa técnica de protensão, pode-se citar:

- A ausência de nata de cimento ao redor das cordoalhas diminui sua proteção contra o fogo, em caso de incêndio. Os cabos de protensão também ficam mais expostos à ação de corrosão, agentes químicos e até mesmo vandalismo (Costa Reis, 2003).
- O comprimento dos cabos deve ser limitado, por estarem sujeitos a vibrações.
- Há um maior consumo de aço em comparação com peças com aderência, e dificilmente o estado limite último de resistência à tração do aço de protensão é atingido (Costa Reis, 2003).

### 3.3 TÉCNICA DA PROTENSÃO EXTERNA

#### 3.3.1 Desviador

O cabo de protensão é conectado ao concreto somente pelos desviadores e ancoragens. É nestes locais que a força de protensão é transferida para o concreto. Essas forças são grandes e concentradas, o que tornam essas regiões críticas da estrutura, sendo necessário um alto grau de precisão na colocação destes desviadores. Na Fig. 3.1, podem-se observar três tipos de desviadores: diafragmas, nervura ou enrijecedor e sela ou bloco. Os blocos ou selas são menores e localizados na interseção da alma e da mesa inferior da aduela e sua execução é menos complicada que a de diafragmas ou nervuras. A vantagem do uso de diafragmas ou nervuras é uma melhor distribuição das forças proveniente do cabo comparado com os blocos, onde tensões são mais localizadas. Portanto, os blocos ou selas devem ser detalhados com mais cuidado. Diafragmas ou nervuras são maiores e aumentam o peso da estrutura e sua posição dificulta a construção. A combinação de blocos e diafragmas, localizados respectivamente no vão e na região do apoio, é a mais adotada nas estruturas (Ariyawardena, 2000).

Nos pontos de ancoragem e nos desviadores, usa-se um invólucro metálico envolvendo o duto. Na Fig. 3.6, pode se observar um desviador e cabos externos de protensão, bem como esse invólucro.

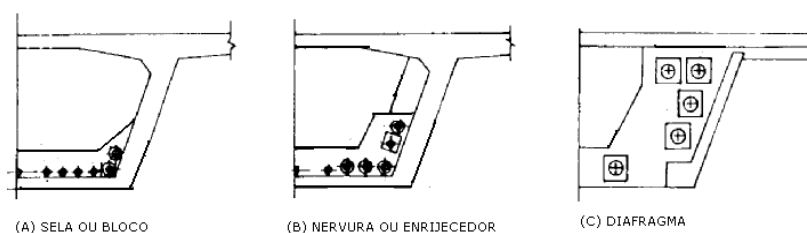


Figura 3.1 - Tipos de desviadores (Takebayashi et al., 1994).



Figura 3.2 - Desviador e cabos de protensão externos (VSL International, 1992).

### 3.3.2 Ancoragem

Neste sistema, como não existe aderência entre a armadura de protensão e o concreto, a manutenção da tensão ao longo da vida útil da estrutura se concentra nas ancoragens. Devido a isso, é fundamental que elas sejam fabricadas com elevado padrão de qualidade.

Na Fig. 3.3 observa-se uma ancoragem ativa utilizada para um feixe com várias cordoalhas (multicordoalhas).



Figura 3.3 - Ancoragem ativa multicordoalha (Catálogo Tensacciai - [www.tensacciai.it](http://www.tensacciai.it)).

### 3.3.3 Macaco

A Fig. 3.4 mostra um macaco da marca Tensacciai, para múltipla tensão, que protende várias cordoalhas simultaneamente. Já na Fig. 3.5, pode-se observar outro modelo de macaco VSL.



Figura 3.4 - Macaco Tensacciai (Catálogo Tensacciai - [www.tensacciai.it](http://www.tensacciai.it)).



Figura 3.5 - Macaco VSL (VSL International, 1992).

### 3.4 PROTENSÃO INTERNA X PROTENSÃO EXTERNA

Quando os cabos de protensão estão aderentes ao concreto, as cargas aplicadas na estrutura produzem deformações iguais no concreto adjacente e no cabo de protensão. No caso de cabos não aderentes, não há essa compatibilidade de deformações, somente os deslocamentos dos cabos na ancoragem são iguais ao do concreto adjacente, e em alguns casos, também nos desviadores.

Hindi et al. (1995) comparam o comportamento de uma viga com seção caixão com protensão aderente e não aderente. Em peças com protensão não aderente normalmente a altura ótima para a seção transversal não pode ser totalmente utilizada resultando numa menor excentricidade para os cabos, conduzindo a necessidade de uma maior altura de seção ou acréscimo do aço de protensão para atingir a mesma resistência no estado limite último, se comparado a peças com protensão aderente. No caso comparado por Hindi et al. (1995), a peça com protensão não aderente possuía uma área de aço 25% maior que a de protensão aderente, e conseqüentemente uma tensão inicial maior. A variação da força de protensão no cabo depende da geometria e da deformação total da peça. A resistência de uma estrutura com protensão externa em uma dada seção depende da estrutura inteira, ou se tiver aderência em desviadores, de uma substancial parte da estrutura. Já em peças com protensão aderente ao se abrir uma fissura no concreto os cabos sofrem deformações localizadas, na região do entorno da fissura, aumentando consideravelmente a tensão do aço nessa região. Nas peças com protensão não aderente, esse acréscimo de tensão do aço é diluído em todo seu comprimento, se tornando bem menor.

A aderência da armadura influencia grandemente no comportamento à fissuração do concreto. Em peças aderentes há uma melhora no comportamento entre os estágios de fissuração e ruptura. As fissuras têm aberturas limitadas e em grande número, já nas peças com protensão não aderente, são mais espaçadas e com abertura maior.

Já o efeito de pino que causa tensões adicionais no cabo de protensão em cabos internos, não causa em cabos externos, devido à liberdade de movimento que possuem, como se pode observar na Fig. 3.6 (Ng, 2003).



O comportamento das peças com protensão interna não aderente e protensão externa submetidas à flexão são similares (Harajli et al., 2002, Tan e Ng, 1997 e Hindi et al., 1995). A análise da protensão externa apresenta dois pontos há serem considerados: o efeito de segunda ordem e o deslizamento nos desviadores. Eles podem não ser tão significativos no estado limite de serviço, mas tornam-se importantes no estado limite último, pois a esbelteza, o traçado do cabo e o espaçamento entre os desviadores influenciam (Perlingeiro, 2006).

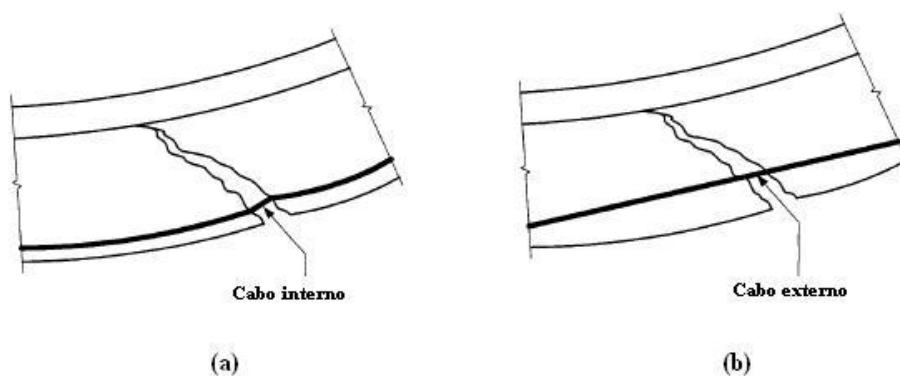


Figura 3.6 – Efeito de pino em cabos externos e internos (Ng, 2003).

### 3.4.1 Efeito de Segunda Ordem

Na protensão externa, quando a peça deflete, o cabo permanece reto entre os desviadores e as ancoragens. Isso resulta numa variação da sua excentricidade, que é a distância entre o cabo e o eixo que passa pelo centroide da peça (Fig. 3.7). Essa variação leva ao conhecido efeito de segunda ordem. Segundo Tan e Ng (1997), esse efeito pode ser minimizado através do uso de desviadores. Com um desviador na seção de máxima deflexão pode-se obter uma melhora na capacidade de carga da viga em serviço e na ruptura. Rao e Mathew (1996) quantificam em 11% o aumento da capacidade resistente com a adição de um desviador no meio do vão. Mas eles ressaltam que desviadores demais dificultam a execução e aumentam o custo da construção.

Neste trabalho, considera-se o efeito de segunda ordem através de uma análise não linear geométrica que será exposta no capítulo 4.

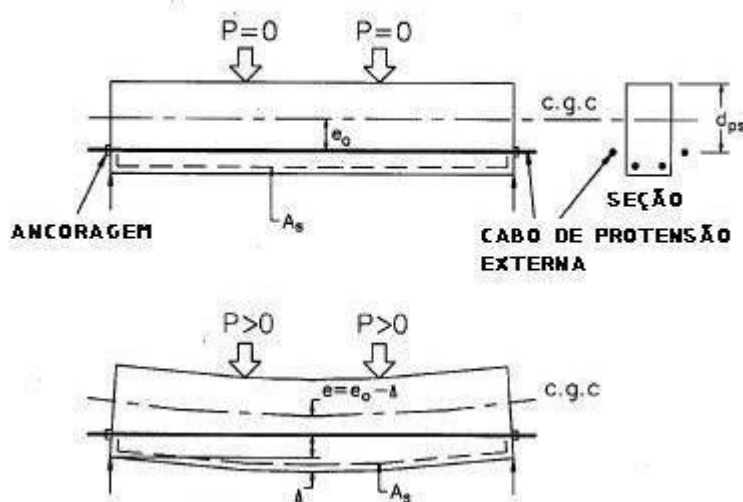


Figura 3.7 – Efeito de segunda ordem (Tan e Ng, 1997).

### 3.4.2 Deslizamento nos desviadores

Os cabos externos de protensão podem ser aderentes ou não aderentes nos desviadores. Se a força de um lado do desviador for maior que a força de atrito dentro do desviador e do outro lado do cabo, o cabo irá deslizar. Cada lado do cabo está sujeito a uma força, e essa diferença, o ângulo de desvio, e do atrito entre o cabo e o desviador são fundamentais para determinar se o deslizamento ocorre.

O deslizamento provoca um aumento nas flechas, pois reduz a força de protensão no trecho crítico da estrutura, onde há um momento fletor maior. Isso leva a um risco maior de ruptura.

Pode-se impedir o deslizamento nos desviadores através do uso de nata de cimento, conferindo aderência entre o cabo e o deslizador. No caso de deslizamento livre, é adotada a injeção de nata ou cera nos dutos. Na Fig. 3.8 observa-se a diferença entre um deslizamento livre e impedido, conforme apresentado por Perlingeiro (2006), através da deformação do cabo, calculada pela variação do comprimento de cada trecho dividido pelo seu comprimento. No caso (b), em que o deslizamento é impedido, há uma diferença de deformações, entre os trechos. Já no caso (c), onde o deslizamento é livre,

há uma deformação constante, calculada pelo alongamento do cabo entre as ancoragens dividido pelo comprimento total inicial do cabo.

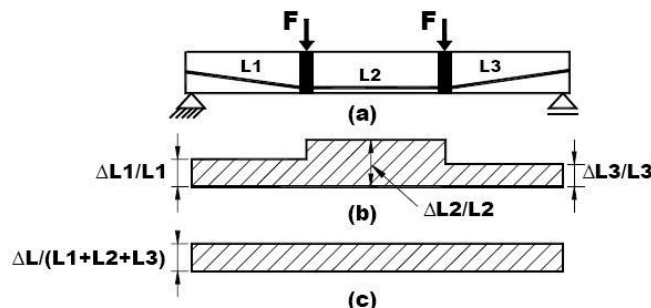


Figura 3.8 – Variação da deformação do cabo com deslizamento impedido e livre (Perlingeiro, 2006).

### 3.5 PERDAS DE PROTENSÃO

As forças de protensão estão sujeitas a variações de intensidade. A diminuição da intensidade da força de protensão é chamada de perda de protensão. As perdas podem ser do tipo imediato ou progressivo. As perdas imediatas são aquelas que ocorrem durante a operação da protensão e imediatamente após a ancoragem do cabo. Elas ocorrem pela acomodação das ancoragens, pela deformação imediata do concreto e pelo atrito nos cabos, no caso de pós-tração.

Perdas progressivas, que ocorrem ao longo do tempo, devem-se principalmente à retração e à fluência do concreto e à relaxação do aço de protensão. No modelo utilizado nesse trabalho, essas perdas são consideradas através da análise do comportamento viscoelástico dos materiais.

## 4 O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é uma técnica de análise numérica para obter soluções aproximadas para uma grande variedade de problemas. Na Engenharia Civil, é aplicado, por exemplo, na análise e no projeto de estruturas. Devido a sua abrangência e flexibilidade se tornou a ferramenta mais popular na Mecânica Estrutural, capaz de apresentar excelentes resultados (Awruch e Rado, 1997).

No método dos elementos finitos, o domínio de definição do modelo matemático é dividido em um número discreto de subdomínios ou elementos de dimensões finitas, denominados *elementos finitos*, interligados entre si por pontos, denominados *nós*. (Soriano, 2003) A seguir, é descrita sua formulação clássica conforme Zienkiewicz e Taylor (2000).

O modelo de elementos finitos utilizado considera as não linearidades físicas e geométricas inerentes ao estudo das estruturas segmentadas protendidas externamente.

### 4.1 FORMULAÇÃO BÁSICA

O campo de deslocamentos no interior de um elemento finito é obtido a partir dos deslocamentos nodais, mediante o emprego de funções de interpolação da seguinte forma:

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (4.1)$$

onde  $[N]$  é a matriz que relaciona os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento,  $\{u\}$ , com os deslocamentos nodais do elemento,  $\{u\}^e$ , ou seja, é a matriz das funções de interpolação,  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ , correspondente ao nó  $i$  do elemento finito.

Como as deformações específicas são expressas em termos de derivadas de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas, a partir da interpolação dos deslocamentos dados pela Eq. (4.1), pode-se escrever:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (4.2)$$

sendo  $[L]$ , a matriz de operadores diferenciais e  $[B]$ , a matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos nodais, composta pelas submatrizes  $B_i$  de cada nó, calculadas nos pontos de integração com coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

$$[B] = [L][N] \quad (4.3)$$

As componentes de deformação específica se relacionam com as componentes de tensão da seguinte forma:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (4.4)$$

onde  $[D]$  é a matriz de elasticidade constitutiva ou de constantes elásticas do material e  $\{\sigma\}$  e  $\{\sigma_0\}$  são os vetores da tensão e da tensão inicial.

A variação do campo de deslocamentos e deformações virtuais pode ser obtida a partir das Eq. (4.1) e (4.2), respectivamente:

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}^e \quad (4.5)$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u\}^e \quad (4.6)$$

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais aplicado a um sólido sollicitado por forças de volume  $b$  e forças de superfície em seu contorno  $\bar{p}$ , é expresso na Eq. (4.7), onde o estado de deformação sofre uma variação  $\{\delta u\}$ . A primeira parte da Eq. (4.7) expressa o trabalho realizado pelas forças internas e a segunda parte o trabalho realizado pelas forças externas.

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T (\{\sigma\} + \{\sigma_0\}) dV = \int_V \{\delta u\}^T \{b\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\bar{p}\} dS \quad (4.7)$$

A variação do funcional da energia potencial total  $\delta\pi$  portanto é nula, pois a variação do trabalho interno  $\delta W_I$  e externo  $\delta W_E$  são iguais.

$$\delta\pi = \delta W_E - \delta W_I = 0 \quad (4.8)$$

A partir da Eq. (4.7), obtém-se finalmente o sistema de equações de equilíbrio de um elemento genérico na forma compacta:

$$[K]^e \{u\}^e = \{f\}^e \quad (4.9)$$

onde,

$$\{f\}^e = -\{f\}_b^e - \{f\}_p^e - \{f\}_{\sigma_0}^e \quad (4.10)$$

e  $[K]^e$  é a matriz de rigidez simétrica e  $\{f\}^e$  é o vetor das forças nodais, formado pelos vetores  $\{f\}_b^e$ ,  $\{f\}_p^e$  e  $\{f\}_{\sigma_0}^e$  que são as forças nodais equivalentes, respectivamente às forças de volume, às forças de superfície e às tensões iniciais. A matriz de rigidez e os vetores de força podem ser obtidos através das seguintes equações:

$$[K]^e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \quad (4.11)$$

$$\{f\}_b^e = -\int_{V_e} [N]^T \{b\} dV_e \quad (4.12)$$

$$\{f\}_p^e = -\int_{S_e} [N]^T \{\bar{p}\} dS_e \quad (4.13)$$

$$\{f\}_{\sigma_0}^e = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV_e \quad (4.14)$$

A equação de equilíbrio global da estrutura, que possui a mesma forma da Eq. (4.10), é obtida somando-se as contribuições de todos os elementos que formam a estrutura, para cada grau de liberdade dos nós dos elementos.

## 4.2 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Para valores relativamente grandes de deslocamentos, a deflexão lateral de um membro pode trazer como consequência, o aparecimento de momentos fletores adicionais (denominadas de segunda ordem), em virtude da presença de um esforço normal. A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração *deformada*, e as relações deformação-deslocamento.

Neste trabalho, utiliza-se uma análise não-linear geométrica que considera grandes deslocamentos e pequenas deformações. A formulação empregada, chamada de Lagrangeana Total, toma como configuração de referência a configuração inicial da estrutura. Os deslocamentos do problema relacionam-se sempre com a configuração indeformada.

De acordo com Real (2000), a equação de equilíbrio para a formulação Lagrangeana Total, no caso de grandes deslocamentos, é dada por:

$$\int_{V_0} [B]^T \{T\} dV = \int_{V_0} [N]^T \{b\} dV + \int_{S_0} [N]^T \{\bar{p}\} dS \quad (4.15)$$

sendo  $\{T\}$  é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e  $S_0$  e  $V_0$  são, respectivamente, a superfície e o volume de referência da configuração inicial (indeformada).

No caso de pequenos deslocamentos, o tensor  $\{T\}$  coincide com o vetor de tensão  $\{\sigma\}$  e as equações (4.15) e (4.7) se equivalem, desde que as forças internas devido às ações não-lineares na estrutura seja igual às forças externas aplicadas. Desta forma, define-se a equação de equilíbrio global da estrutura pela equação:

$$\{\psi(U_n)\} = \{f_{ext_n}\} - \{f_{int_n}\} = 0 \quad (4.16)$$



onde  $\{\psi(U_n)\}$  é o vetor de forças nodais desequilibradas da estrutura,  $\{f_{ext_n}\}$  é o vetor que contém as forças externas aplicadas no tempo  $t_n$  (lado direito da Eq. 4.15) e  $f_{int_n}$  é o vetor de forças internas da estrutura no tempo  $t_n$  (lado esquerdo da Eq. 4.15) que depende dos deslocamentos.

O objetivo dos métodos de solução não lineares é minimizar o valor do vetor  $\{\psi(U_n)\}$  até atingir-se valores que podem ser considerados desprezíveis.

Neste trabalho utilizou-se o modelo apresentado por Real (2000) e empregado por Seixas (2003) e por Jost (2006), para elementos isoparamétricos tridimensionais.

Considere-se, então, um corpo indeformado que sofre um processo de carregamento. As coordenadas de um ponto no corpo indeformado e as coordenadas deste ponto em um dado instante  $t_n$  da aplicação do carregamento são dadas, respectivamente, por:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas da posição inicial da partícula e  $x_n$ ,  $y_n$  e  $z_n$  são as coordenadas da partícula no tempo  $t_n$ .

Pode-se, então, relacionar os deslocamentos sofridos por este ponto em relação às suas coordenadas utilizando o vetor deslocamentos  $u$ , formado pelas componentes  $u_n$ ,  $v_n$  e  $w_n$  que são os deslocamentos em relação aos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

$$\{x\} = \{X\} + \{u\} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

O gradiente de deformação, também conhecido como matriz jacobiana é, então, definida pela seguinte expressão:

$$[F_n] = \begin{bmatrix} x_n, x & x_n, y & x_n, z \\ y_n, x & y_n, y & y_n, z \\ z_n, x & z_n, y & z_n, z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_{i,x} x_{ni} & N_{i,y} x_{ni} & N_{i,z} x_{ni} \\ N_{i,x} y_{ni} & N_{i,y} y_{ni} & N_{i,z} y_{ni} \\ N_{i,x} z_{ni} & N_{i,y} z_{ni} & N_{i,z} z_{ni} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde  $x_{ni}$ ,  $y_{ni}$  e  $z_{ni}$  são as coordenadas no instante  $t_n$  dos  $m$  nós do elemento e as derivadas cartesianas das funções de interpolação.

Desta forma, as deformações podem ser calculadas pelo tensor de deformações de Green-Lagrange que contempla a formulação Lagrangeana-Total. O tensor de Green-Lagrange é dado por:

$$\{E_n^{GL}\} = \frac{1}{2} \left[ [F_n]^T \cdot [F_n] - [I] \right] \quad (4.21)$$

sendo  $[I]$  a matriz identidade.

O tensor de Green-Lagrange pode ser expresso em relação aos deslocamentos através da Eq. (4.19), ficando na forma:

$$\{\mathbf{E}_n^{GL}\} = \frac{1}{2} \left[ [\mathbf{H}_n]^T + [\mathbf{H}_n] + [\mathbf{H}_n]^T \cdot [\mathbf{H}_n] \right] \quad (4.22)$$

sendo

$$[\mathbf{H}_n] = u, X = \begin{bmatrix} u_{n,x} & u_{n,y} & u_{n,z} \\ v_{n,x} & v_{n,y} & v_{n,z} \\ w_{n,x} & w_{n,y} & w_{n,z} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

As deformações no interior do elemento, dados pela Eq. (4.22), na sua forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{nxx} \\ \varepsilon_{nyy} \\ \varepsilon_{nzz} \\ \gamma_{nxy} \\ \gamma_{nyz} \\ \gamma_{nxz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,x} \\ v_{n,y} \\ w_{n,z} \\ u_{n,y} + v_{n,x} \\ v_{n,z} + w_{n,y} \\ w_{n,x} + u_{n,z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left\{ (u_{n,x})^2 + (v_{n,x})^2 + (w_{n,x})^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ (u_{n,y})^2 + (v_{n,y})^2 + (w_{n,y})^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ (u_{n,z})^2 + (v_{n,z})^2 + (w_{n,z})^2 \right\} \\ u_{n,y} u_{n,x} + v_{n,y} v_{n,x} + w_{n,y} w_{n,x} \\ u_{n,z} u_{n,y} + v_{n,z} v_{n,y} + w_{n,z} w_{n,y} \\ u_{n,x} u_{n,z} + v_{n,x} v_{n,z} + w_{n,x} w_{n,z} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

A Eq. (4.25) é uma soma da parte linear mais a parte não linear geométrica e pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\{\varepsilon_n\} = \left( [\mathbf{B}_L] + \frac{1}{2} [\mathbf{B}_{NL}] \right) \cdot \{u_n\}^e \quad (4.25)$$

onde  $[B_L]$  é a matriz que relaciona deformação-deslocamento linear que será apresentada no capítulo 5 dada pela Eq. (5.7) e  $[B_{NL}]$  é a matriz não-linear expressa por:

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} u_{n,x} [N]_{,x} & v_{n,x} [N]_{,x} & w_{n,x} [N]_{,x} \\ u_{n,y} [N]_{,y} & v_{n,y} [N]_{,y} & w_{n,y} [N]_{,y} \\ u_{n,z} [N]_{,z} & v_{n,z} [N]_{,z} & w_{n,z} [N]_{,z} \\ u_{n,y} [N]_{,x} + u_{n,x} [N]_{,y} & v_{n,y} [N]_{,x} + v_{n,x} [N]_{,y} & w_{n,y} [N]_{,x} + w_{n,x} [N]_{,y} \\ u_{n,z} [N]_{,y} + u_{n,y} [N]_{,z} & v_{n,z} [N]_{,y} + v_{n,y} [N]_{,z} & w_{n,z} [N]_{,y} + w_{n,y} [N]_{,z} \\ u_{n,z} [N]_{,x} + u_{n,x} [N]_{,z} & v_{n,z} [N]_{,x} + v_{n,x} [N]_{,z} & w_{n,z} [N]_{,x} + w_{n,x} [N]_{,z} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Real (2000) mostra que as deformações virtuais podem ser encontradas por:

$$\{\delta \varepsilon_n\} = \sum_{i=1}^m [B_n] \cdot \{\delta u_n\}^e \quad (4.27)$$

sendo

$$[B_n] = [B_L] + [B_{NL}] \quad (4.28)$$

Pode-se, então, utilizando a expressão (4.27), escrever a matriz deformação-deslocamento:

$$[B_n] = \begin{bmatrix} x_{n,x} [N]_{,x} & y_{n,x} [N]_{,x} & z_{n,x} [N]_{,x} \\ x_{n,y} [N]_{,y} & y_{n,y} [N]_{,y} & z_{n,y} [N]_{,y} \\ x_{n,z} [N]_{,z} & y_{n,z} [N]_{,z} & z_{n,z} [N]_{,z} \\ x_{n,y} [N]_{,x} + x_{n,x} [N]_{,y} & y_{n,y} [N]_{,x} + y_{n,x} [N]_{,y} & z_{n,y} [N]_{,x} + z_{n,x} [N]_{,y} \\ x_{n,z} [N]_{,y} + x_{n,y} [N]_{,z} & y_{n,z} [N]_{,y} + y_{n,y} [N]_{,z} & z_{n,z} [N]_{,y} + z_{n,y} [N]_{,z} \\ x_{n,z} [N]_{,xy} + x_{n,y} [N]_{,xz} & y_{n,z} [N]_{,x} + y_{n,x} [N]_{,z} & z_{n,z} [N]_{,x} + z_{n,x} [N]_{,z} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Utilizando a equação do princípio dos Trabalhos Virtuais, dado por (4.11), encontra-se a matriz de rigidez:

$$[K_n]^e = \int_{V_e} [B_n]^T [D] [B_n] dV_e \quad (4.30)$$

onde  $[D]$  é a matriz de elasticidade, constitutiva ou de coeficientes elásticos do material isótropo para o estado triplo de tensão que é dada por:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

*simétrico*

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson do concreto e  $dV_e$  é o volume do elemento diferencial definido como:

$$dV_e = dx \cdot dy \cdot dz = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.32)$$

onde  $\det J$  é o determinante da matriz Jacobiana  $J$  que será apresentada no capítulo 5 na Eq. (5.4).

Da mesma forma, as forças internas do elemento podem ser determinadas através da equação abaixo:

$$\{f_{\text{int}}\} = \int_{V_e} [B_n]^T \{\sigma_n\} dV_e \quad (4.33)$$

onde  $\sigma_n$  são as componentes de tensões no instante  $t_n$ .

As integrais das equações (4.30) e (4.33) devem ser calculadas numericamente.

## 4.3 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

### 4.3.1 Concreto

A formulação matemática utilizada foi apresentada por Owen e Hinton (1980) para a análise estrutural não-linear de um material isotrópico, homogêneo, de comportamento elasto-viscoplástico.

#### 4.3.1.1 Expressões básicas

Em problemas contínuos não-lineares é admitido que a aditividade de taxas de deformação elástica  $\{\dot{\varepsilon}_e\}$  e viscoplástica  $\{\dot{\varepsilon}_{vp}\}$  resulta na taxa de deformação total  $\{\dot{\varepsilon}\}$ :

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_e\} + \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}, \quad (4.34)$$

onde  $(\dot{\quad})$  representa diferenciação com relação ao tempo.

A taxa de tensão total,  $\{\dot{\sigma}\}$ , é calculada a partir da taxa de deformação elástica,  $\{\dot{\varepsilon}_e\}$ , de acordo com:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}_e\}, \quad (4.35)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva do material, apresentada anteriormente na Eq. (4.31).

O comportamento viscoplástico do material é governado por uma superfície de plastificação dada por:

$$F(\{\varepsilon_{vp}\}, \{\sigma\}) - F_0(\kappa) = 0, \quad (4.36)$$

onde  $F_0$  é a tensão de plastificação uniaxial, que pode ser função de um parâmetro de endurecimento,  $\kappa$ . Se  $F < F_0$ , tem-se um comportamento elástico, se  $F = F_0$ , plástico, e se  $F > F_0$  viscoplástico.

Segundo Owen e Hinton (1980), conhecido o estado de tensão, a lei específica para a determinação da deformação viscoplástica é:

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0, \quad (4.37)$$

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \{0\}, \text{ para } F \leq F_0,$$

Sendo  $\gamma = 1/\eta$  o parâmetro de fluidez,  $Q = Q(\{\varepsilon_{vp}\}, \{\sigma\}, \kappa)$  a função potencial plástico e  $\Phi(F) = F - F_0$  a função proposta por Prates Júnior (1992).

Restringindo-se apenas ao caso de plasticidade associada, na qual  $F \equiv Q$ , a Eq. (4.37) fica definida por:

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi(F) \{a\}, \quad (4.38)$$

onde  $\{a\}$  é o vetor de fluxo plástico e depende do critério de plastificação utilizado, que será determinado no item 7.2.1.4.

#### 4.3.1.2 Incremento de deformação viscoplástica

Defini-se um incremento de deformação viscoplástica  $\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}$  através da lei expressa na Eq. (4.38) para a taxa de deformação viscoplástica, pode-se, correspondente a um intervalo de tempo  $(\Delta t)_n = (t)_{n+1} - (t)_n$ , usando um esquema de integração no tempo explícito, uma vez que o incremento de deformação viscoplástica fica completamente determinado pelas condições existentes no tempo,  $(t)_n$ , como:

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} \quad (4.39)$$

#### 4.3.1.3 Incremento de tensão



Através das Eq. (4.35) e (4.34) na forma incremental, obtém-se:

$$\{(\Delta\sigma)_n\} = [D]\{(\Delta\varepsilon_e)_n\} = [D]\{(\Delta\varepsilon)_n\} - \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} \quad (4.40)$$

O incremento de deformação total pode ser expresso em termos do incremento de deslocamento:

$$\{(\Delta\varepsilon)_n\} = [B]\{(\Delta u)_n\}, \quad (4.41)$$

onde  $[B]$  é a matriz de relações deformação-deslocamento do elemento de concreto, vista anteriormente neste capítulo, e  $\{(\Delta u)_n\}$  é o vetor de incrementos de deslocamento nas direções dos eixos globais cartesianos  $x$  e  $y$ .

Substituindo-se as Eq. (4.39) e (4.41) na Eq. (4.40), tem-se:

$$\{(\Delta\sigma)_n\} = [D]([B]\{(\Delta u)_n\} - \Delta t_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\}) \quad (4.42)$$

#### 4.3.1.4 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo,  $(t)_n$ , são:

$$\int_V [B]^T \{(\sigma)_n\} dV - \{(f)_n\} = 0, \quad (4.43)$$

onde  $\{(f)_n\}$  é o vetor de carga nodal equivalente. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio a serem satisfeitas são dadas pela forma incremental da Eq. (4.43), como segue:

$$\int_V [B]^T \{(\Delta\sigma)_n\} dV - \{(\Delta f)_n\} = 0, \quad (4.44)$$

na qual,  $\{(\Delta f)_n\}$  representa a variação do vetor de carga nodal equivalente durante um intervalo de tempo. Na maioria dos casos, o incremento de carga é aplicado como passo discreto, considerando-se  $\{(\Delta f)_n\} = 0$  para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro passo dentro de um incremento de carga.

Trabalhando-se com as Eq. (4.40) e (4.44), o incremento de deslocamento, a cada intervalo de tempo, pode ser calculado da forma:

$$\{(\Delta u)_n\} = [(K)_n]^{-1} \{(\Delta P)_n\} \text{ e} \quad (4.45)$$

$$\{(\Delta P)_n\} = \int_V [B]^T [D] \{(\dot{\epsilon}_{vp})_n\} (\Delta t)_n dV + \{(\Delta f)_n\},$$

onde  $[(K)_n]$  é a matriz de rigidez tangencial global, dada por:

$$[(K)_n] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.46)$$

e  $\{(\Delta P)_n\}$  é o vetor de incremento de carga nodal equivalente de toda a estrutura, no passo  $n$ , chamado de vetor de “pseudo-cargas”.

O incremento de deslocamento pode ser calculado para qualquer instante de tempo utilizando a Eq. (4.45) e substituído na Eq. (4.42) resultando no incremento de tensão. Assim:

$$\{(\sigma)_{n+1}\} = \{(\sigma)_n\} + \{(\Delta \sigma)_n\} \text{ e} \quad (4.47)$$

$$\{(u)_{n+1}\} = \{(u)_n\} + \{(\Delta u)_n\}$$

Através das Eq. (4.40) e (4.41) calcula-se o incremento de deformação viscoplástica:

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = [B]\{(\Delta u)_n\} - [D]^{-1}\{(\Delta\sigma)_n\} \quad (4.48)$$

e, então:

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_n\} + \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}. \quad (4.49)$$

#### 4.3.1.5 Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão está baseado numa forma linearizada da equação de equilíbrio (4.44). Portanto, a tensão total,  $\{(\sigma)_{n+1}\}$ , obtida pela acumulação de todos os incrementos de tensões, não está estritamente correta e não satisfaz as equações de equilíbrio (4.43). A aproximação mais simples é avaliar  $\{(\sigma)_{n+1}\}$ , conforme apresentado anteriormente e, então, calcular a força residual,  $\{(\Psi)_{n+1}\}$ , como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(f)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV \neq \{0\} \text{ ou} \quad (4.50)$$

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(f)_{n+1}\} - \{(f_{\text{int}})_{n+1}\} \neq \{0\}$$

Através do *Método de Newton-Raphson Modificado* (Fig. 4.1), na primeira iteração, o incremento de carga  $\{(\Delta f)_n\}$  é aplicado à estrutura. Nas iterações seguintes aplicam-se as forças não-equilibradas  $\{(\Psi)_{n+1}\}$ . Em todas as iterações e etapas de carga, considerando-se a matriz de rigidez tangente inicial, obtém-se os deslocamentos  $\{(\Delta u)_n\}$  a cada incremento de carga e as demais respostas incrementais da estrutura. Após somam-se nos vetores de força e deslocamentos, os incrementos obtidos na iteração e determinam-se as forças internas  $\{(f_{\text{int}})_{n+1}\}$  e as forças residuais  $\{(\Psi)_{n+1}\}$ .



como passar para o vetor, os coeficientes  $-(K_{ji})_n (u_i)_n$ . Já para a aplicação de restrição nodal, zera-se o  $(\Delta u_i)_n$  deslocamento desejado.

$$\left\{ \begin{array}{c} (\Delta f_1)_n - (K_{1i})_n (\Delta u_i)_n \\ (\Delta f_2)_n - (K_{2i})_n (\Delta u_i)_n \\ \vdots \\ (\Delta u_i)_n \\ \vdots \\ (\Delta f_m)_n - (K_{mi})_n (\Delta u_i)_n \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} (K_{11})_n & (K_{12})_n & \dots & 0 & \dots & (K_{1m})_n \\ (K_{21})_n & (K_{22})_n & \dots & 0 & \dots & (K_{2m})_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (K_{m1})_n & (K_{m2})_n & \dots & 0 & \dots & (K_{mm})_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} (\Delta u_1)_n \\ (\Delta u_2)_n \\ \vdots \\ (\Delta u_i)_n \\ \vdots \\ (\Delta u_m)_n \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

#### 4.3.1.6 Modelo de camadas

O modelo reológico utilizado neste trabalho, que será citado no capítulo 7, item 7.4, têm-se como parâmetros as espessuras das camadas,  $e_i$ , os módulos de elasticidade,  $E_i$ , as constantes dos amortecedores,  $\gamma_i$ , e as tensões de plastificação,  $F_{0i}$ , a partir das quais começam a atuar os elementos de atrito.

Cada camada pode ter um campo de tensão,  $\{\sigma_i\}$ , distinto, que contribui com uma parcela para o campo de tensão total,  $\{\sigma\}$ , conforme sua espessura,  $e_i$ , da forma:

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^5 \{\sigma_i\} e_i, \quad (4.53)$$

onde:

$$\sum_{i=1}^j e_i = 1. \quad (4.54)$$

A equação de equilíbrio (4.43) pode ser reescrita como:

$$\int_V [B]^T \sum_{i=1}^j \{(\sigma_i)_n\} e_i dV - \{(f)_n\} = 0. \quad (4.55)$$

A matriz de rigidez do elemento será a soma das contribuições de cada camada, ou seja:

$$[(K)_n] = \sum_{i=1}^j \int_V [B]^T [D_i] [B] dV, \quad (4.56)$$

onde  $[D_i]$  é a matriz constitutiva de cada camada, calculada em função das suas propriedades.

O processo de solução é idêntico ao apresentado anteriormente, com o campo de deformação elástica,  $\{\varepsilon_{ei}\}$ , e viscoplástica,  $\{\varepsilon_{vpi}\}$ , além do campo de tensão, sendo avaliados para cada camada. É importante ressaltar que, mesmo tendo propriedades mecânicas diferentes, a deformação total é a mesma para todas as camadas.

### 4.3.2 Aço

No item anterior foi apresentado um modelo para a análise do concreto simples. Para incorporar a armadura passiva quanto ativa no modelo computacional, pode-se escrever uma formulação semelhante.

Neste item será apresentado um algoritmo incremental para descrever o comportamento elasto-viscoplástico do aço.

#### 4.3.2.1 Incremento de tensão

Conhecido o incremento de deslocamento nodal,  $\{(\Delta u)_n\}$ , para o passo de tempo  $n$ , o incremento de tensão axial em um ponto de uma barra de aço,  $(\Delta \sigma_s)_n$ , é dada por:

$$(\Delta\sigma_s)_n = E_s (\Delta\varepsilon_e)_n = E_s [(\Delta\varepsilon_s)_n - (\Delta\varepsilon_{svp})_n], \quad (4.57)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço,  $(\Delta\varepsilon_e)_n$  é o incremento de deformação elástica do aço,  $(\Delta\varepsilon_s)_n$  é o incremento de deformação total do aço e  $(\Delta\varepsilon_{svp})_n$  é o incremento de deformação viscoplástica do aço.

O incremento de deformação total pode ser calculado como:

$$(\Delta\varepsilon_s)_n = \{B_s\} \{(\Delta u)_n\}, \quad (4.58)$$

em que  $\{B_s\}$  é o vetor das relações deformação- deslocamento da barra de armadura definido neste capítulo.

Usando-se um esquema de integração no tempo explícito, conforme o item 4.3.1.2 , o incremento de deformação viscoplástica para o aço é:

$$(\Delta\varepsilon_{svp})_n = (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}, \quad (4.59)$$

sendo a taxa de deformação viscoplástica,  $\{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}$ , dada no item 4.3.2.3 .

Substituindo-se as Eq. (4.58) e (4.59) na expressão (4.57), tem-se:

$$(\Delta\sigma_s)_n = E_s [\{B_s\} \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}]. \quad (4.60)$$

A tensão no próximo passo  $n + 1$ ,  $(\sigma_s)_{n+1}$ , fica:

$$(\sigma_s)_{n+1} = (\sigma_s)_n + (\Delta\sigma_s)_n. \quad (4.61)$$

#### 4.3.2.2 Equações de equilíbrio

A Eq. (4.50) correspondente às forças não equilibradas, considerando a presença da armadura, resulta:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(f)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} (\sigma_s)_{n+1} A_s ds. \quad (4.62)$$

O vetor de “pseudo-carga” da Eq. (4.45) terá um acréscimo,  $\{(\Delta P_s)_n\}$ , de:

$$\{(\Delta P_s)_n\} = \int_s \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svp})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (4.63)$$

sendo  $s$  a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

#### 4.3.2.3 Taxa de deformação viscoplástica

A taxa de deformação viscoplástica pode ser calculada como:

$$(\dot{\epsilon}_{svp})_n = \gamma_s \left[ \sigma_s - (\sigma_y + H_s (\dot{\epsilon}_{svp})_{n-1}) \right], \quad \text{para } \sigma_s > \sigma_y \quad \text{e} \quad (4.64)$$

$$(\dot{\epsilon}_{svp})_n = 0, \quad \text{para } \sigma_s \leq \sigma_y$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial,  $H_s$  é o parâmetro de endurecimento que será dado pela Eq. (7.38) e  $\gamma_s$  é o coeficiente de fluidez do aço. Na fase elastoplástica, o coeficiente de fluidez é tomado como sendo  $10^{-5}$ .



#### 4.3.2.4 Modelo de camadas

Na etapa viscoelástica, admite-se que o coeficiente de fluidez é nulo para as barras de armadura passiva. Já para a armadura de protensão, faz-se uso, de forma análoga à empregada para o concreto, de um modelo de camadas para a representação do comportamento viscoelástico do aço.

Neste modelo, têm-se como variáveis, os módulos de elasticidade,  $E_{si}$ , e os coeficientes de fluidez  $\gamma_{si}$ , para cada camada.

O vetor de forças residuais pode ser reescrito como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(f)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} \sum_{i=1}^j (\sigma_{si})_{n+1} A_s ds, \quad (4.65)$$

onde  $j$  é o número de camadas.

Já a parcela, correspondente à presença da armadura, no vetor de “pseudo-carga” é dada por:

$$\{(\Delta P_s)_n\} = \sum_{i=1}^j \int_s \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (4.66)$$

onde:

$$(\Delta \sigma_{si})_n = E_{si} [\{B_s\} \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\}], \quad (4.67)$$

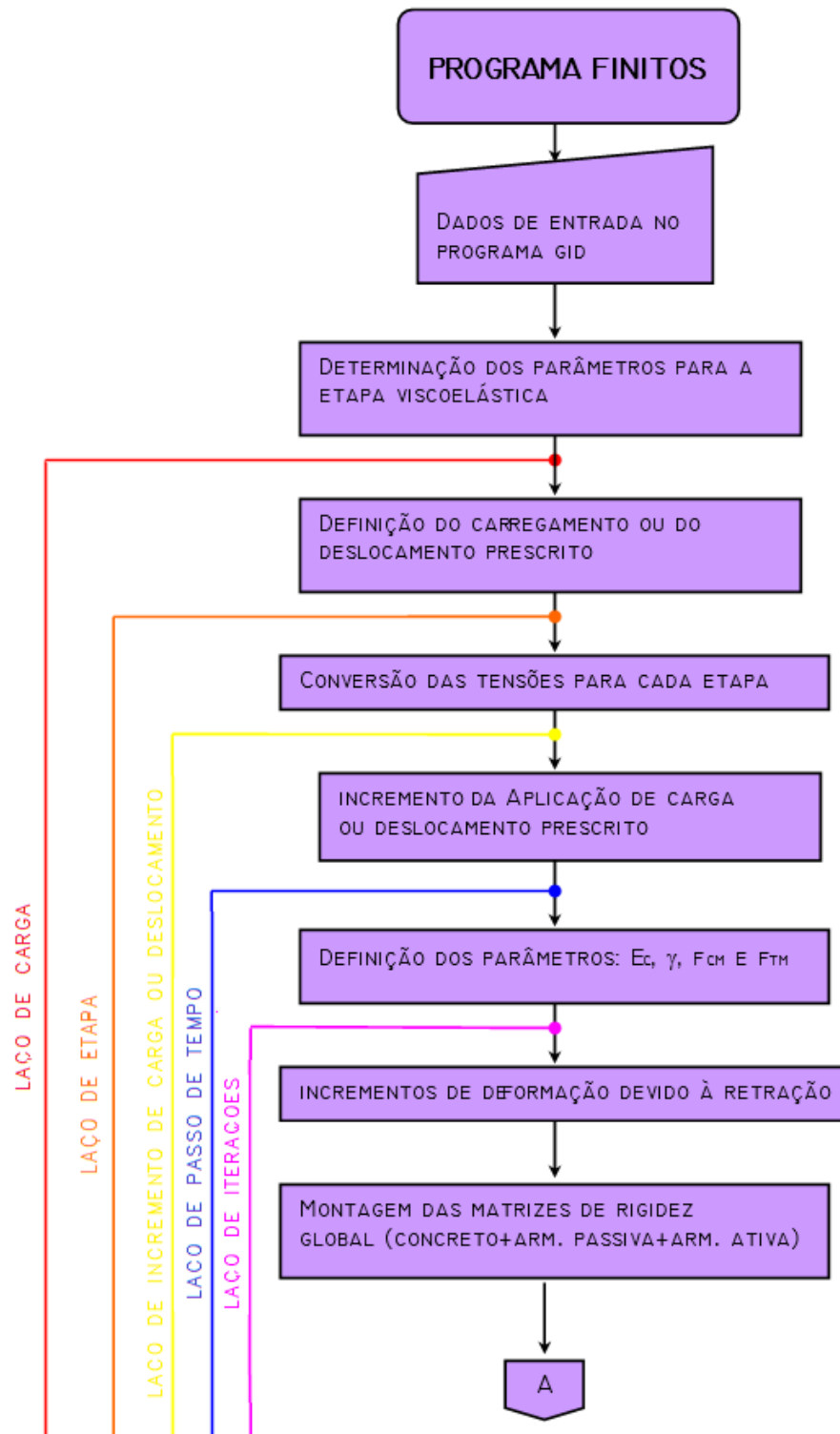
$$\{\sigma_{si}\}_n = \sum_{i=1}^j \{(\Delta \sigma_{si})_n\}, \quad (4.68)$$

$$\{\sigma_s\}_n = \sum_{i=1}^5 \{\sigma_{si}\}_n \quad e \quad (4.69)$$

$$(\dot{\epsilon}_{svpi})_n = \gamma_{si} \left[ \sigma_{si} - (\sigma_y + H_s (\dot{\epsilon}_{svpi})_{n-1}) \right]_n \quad (4.70)$$

#### 4.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL

O fluxograma dado pela Fig. 4.2, mostra a esquematização do programa principal para melhor compreensão das etapas e sub-rotinas utilizadas para a resolução dos problemas, desde a leitura dos dados gerados pelo programa *GiD*® 7.2, as etapas e laços percorridos até o processamento dos dados para saída e leitura no programa *GiD*® 7.2.



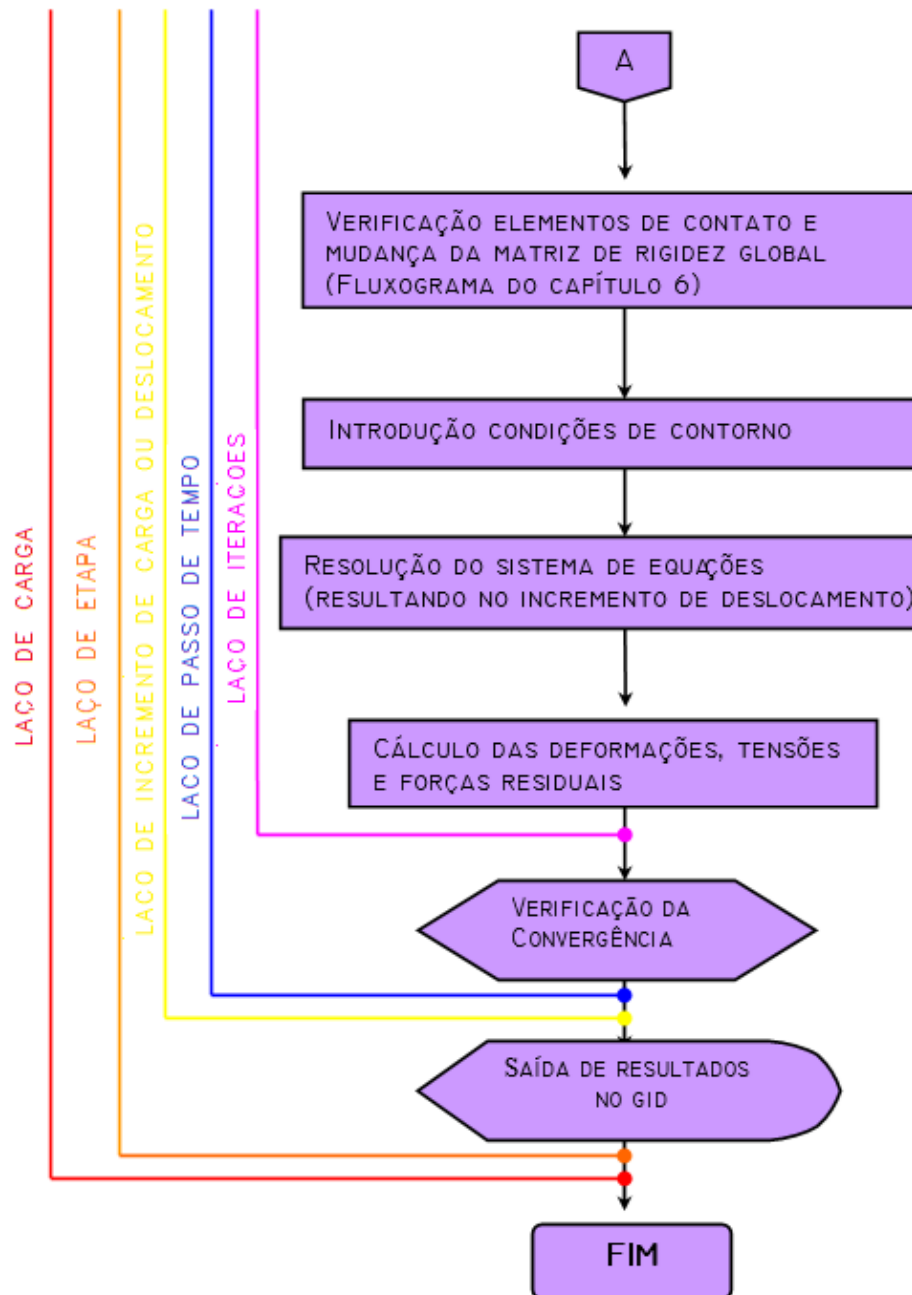


Figura 4.2 – Fluxograma do programa.

## 5 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

### 5.1 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO

Para representar o concreto foram utilizados, neste trabalho, elementos finitos tridimensionais isoparamétricos da família *Serendipity*. Elementos isoparamétricos são aqueles que utilizam as mesmas funções de interpolação para definir tanto as incógnitas do problema quanto a geometria a partir dos respectivos valores nodais. Os elementos, que fazem parte da família *Serendipity*, possuem nós apenas no seu contorno. Este nome, em inglês, se refere à habilidade de descobertas por acaso e se deve ao fato de as funções de interpolação dessa família terem sido originalmente determinadas por tentativa (Soriano, 2003).

O programa implementado permite a utilização de elementos hexaédricos quadráticos de oito e vinte nós. Estes elementos possuem três graus de liberdade por nó, que correspondem às três translações em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema global de coordenadas.

A seguir, são descritas as expressões básicas para o elemento isoparamétrico tridimensional, bem como as suas funções de interpolação.

#### 5.1.1 Campo de deslocamentos e deformações

Conforme a formulação clássica do método dos elementos finitos, apresentada por Zienkiewicz e Taylor (2000), o campo de deslocamentos no interior do elemento é obtido através dos deslocamentos nodais, mediante o emprego das funções de interpolação ou de forma deste modo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde o zero representa uma sub-matriz nula;  $[N]$  é a matriz linha formada pelas funções de interpolação,  $N_i$ , calculadas para as coordenadas normalizadas  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $\{x\}^e$ ,  $\{y\}^e$  e  $\{z\}^e$ , são, respectivamente, os conjuntos das coordenadas nodais  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  e  $m$  é o número de nós do elemento.

Para o elemento isoparamétrico tridimensional,  $[L]$ , a matriz de operadores diferenciais, é dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

O campo de deformações no interior do elemento é obtido a partir dos deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^m [B] \{u\}_i^e \quad (5.3)$$

sendo  $m$  o número de nós do elemento finito,  $[B]$  a matriz que relaciona as deformações específicas  $\{\varepsilon\}$ , com os deslocamentos nodais segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja,  $\{u\}^e$ ,  $\{v\}^e$  e  $\{w\}^e$ .

No modelo linear, a matriz  $[B]$  é formada pelas derivadas das matrizes linha de funções de interpolação em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $[N]_{,x}$ ,  $[N]_{,y}$ ,  $[N]_{,z}$ . Como a formulação do elemento se dá através do sistema de coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , ao se fazer a montagem do problema, deve-se utilizar os valores em coordenadas globais, através da utilização da matriz Jacobiana,  $[J]$ :

$$[J] = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde  $N_{i,\xi}$ ,  $N_{i,\eta}$  e  $N_{i,\zeta}$  são as derivadas das funções de interpolação em relação aos eixos de coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , respectivamente. Assim, as derivadas das funções de interpolação em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$  e  $z$  a partir das correspondentes derivadas em relação a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $[N]_{,\xi}$ ,  $[N]_{,\eta}$ ,  $[N]_{,\zeta}$ , são dadas por:

$$\begin{bmatrix} [N]_{,x} \\ [N]_{,y} \\ [N]_{,z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} \\ [N]_{,\eta} \\ [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

onde  $[J]^{-1}$  é a matriz Jacobiana inversa.

Assim, a Eq. (5.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = [H] \begin{bmatrix} \tilde{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} & 0 & 0 \\ [N]_{,\eta} & 0 & 0 \\ [N]_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{,\xi} & 0 \\ 0 & [N]_{,\eta} & 0 \\ 0 & [N]_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{,\xi} \\ 0 & 0 & [N]_{,\eta} \\ 0 & 0 & [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^e \\ \underline{v}^e \\ \underline{w}^e \end{bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \underline{u}^e \\ \underline{v}^e \\ \underline{w}^e \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[B] = [H] \begin{bmatrix} \tilde{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} & 0 & 0 \\ [N]_{,\eta} & 0 & 0 \\ [N]_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{,\xi} & 0 \\ 0 & [N]_{,\eta} & 0 \\ 0 & [N]_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{,\xi} \\ 0 & 0 & [N]_{,\eta} \\ 0 & 0 & [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$



### 5.1.2 Funções de Interpolação

O elemento hexaédrico de oito nós é mostrado na Fig. 5.1. O campo de deslocamentos possui variação linear e os de tensões e deformações são constantes ao longo das bordas do elemento, sendo assim suas funções de interpolação são lineares. São elas:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i=1,2,3,\dots,8 \quad (5.9)$$

onde:  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$ ,  $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$ , e,  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  são as coordenadas naturais do nós em questão.

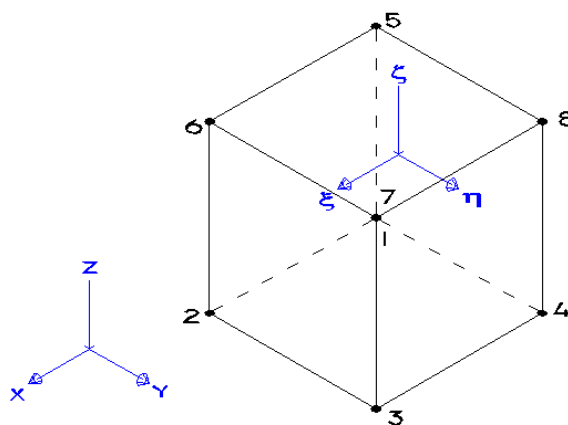


Figura 5.1- Hexaedro linear com oito nós

O elemento hexaédrico de vinte nós é mostrado na Fig. 5.2. Suas funções de forma são do tipo quadrática, pelo fato do campo de deslocamentos possuir variação quadrática e o campo de tensões e deformações variação linear ao longo das bordas do elemento.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000) as funções de interpolação, para este elemento, são:

a) Nós do canto

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad i=1,2,3,4,5,6,7,8 \quad (5.10)$$

b) Nós intermediários

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 9,11,13,15 \quad (5.11)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 10,12,14,16 \quad (5.12)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad i = 17,18,19,20 \quad (5.13)$$

onde:  $\xi_0 = \xi\xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta\eta_i$ ,  $\zeta_0 = \zeta\zeta_i$ , e,  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  são as coordenadas naturais do nós em questão.

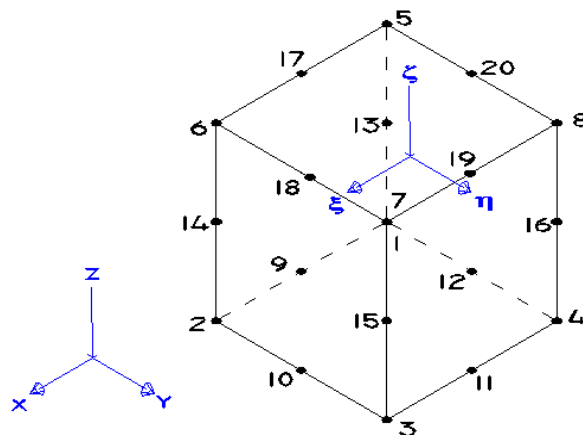


Figura 5.2- Hexaedro quadrático com 20 nós

### 5.1.3 Integração Numérica

Para o elemento de oito nós, que utiliza funções de interpolação lineares, é necessário o emprego da regra 2 x 2 x 2 pontos de Gauss para efetuar integrações sobre o volume do elemento. Da mesma forma, para o elemento de vinte nós, que utiliza funções de interpolação quadráticas, é necessário uma regra de 3 x 3 x 3 pontos de Gauss. Para os dois casos, os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração, sendo que os pares simétricos têm o mesmo peso. Na Tab. 5.1 estão os coeficientes para a integração completa. O programa empregado efetua também a integração reduzida com 15 pontos. A vantagem desta integração em relação à completa é a significativa redução do tempo computacional.

Na integração completa integrais, envolvendo regiões prismáticas, são definidas por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i w_j w_k w_l f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \quad (5.14)$$

com  $i$  sendo o número do ponto de integração,  $\xi_j, \eta_k, \zeta_l$ , as coordenadas dos pontos  $i$ ,  $w_j, w_k, w_l$ , os pesos associados ao ponto  $i$ .

Tabela 5.1 – Coeficientes para a integração completa.

<b>Regra</b>	$\xi_j, \eta_k, \zeta_l$	$w_j, w_k, w_l$
<b>2x2x2</b>	$\pm 0.57735$	1.00000
<b>3x3x3</b>	0	0.88888
	$\pm 0.77459$	0.55555

Nas Figs. 5.3 e 5.4 são apresentadas as posições dos pontos de integração para os elementos hexaédricos de oito e vinte nós.

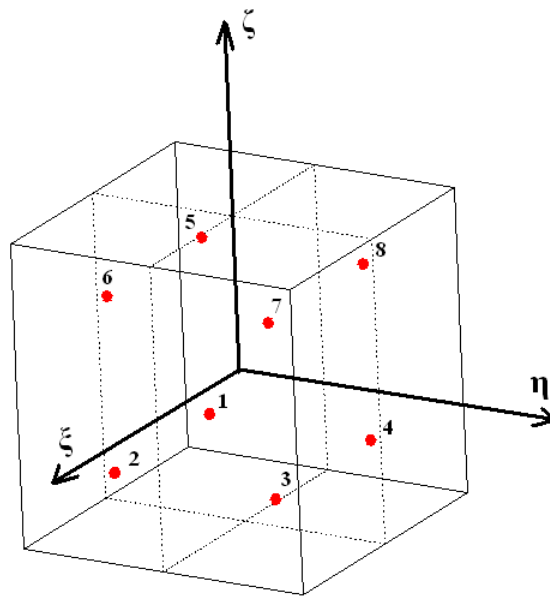


Figura 5.3- Integração completa com oito pontos (Jost, 2006)

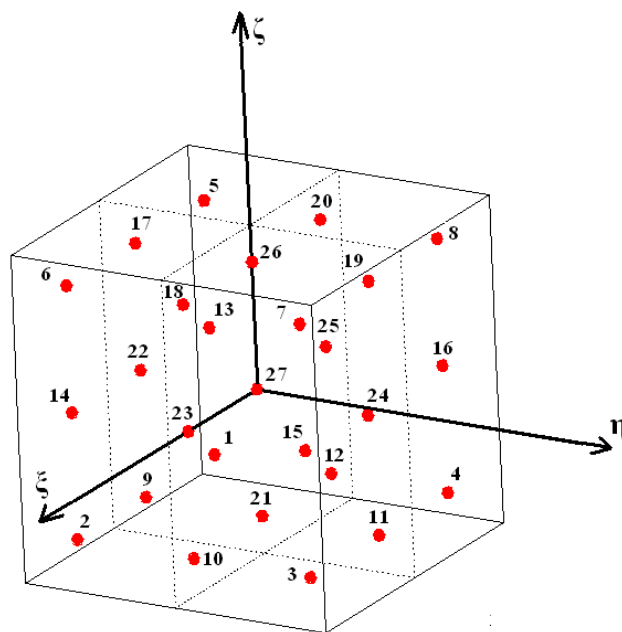


Figura 5.4 - Integração completa com 27 pontos (Jost, 2006)

Na integração reduzida com 15 pontos de integração, a regra pode ser expressa por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = A \cdot f(0,0,0) + B [f(-b,0,0) + f(b,0,0) + f(0,-b,0) + C [f(-c,-c,-c) + f((c,-c,-c) + \dots ] \quad (5.15)$$

Os coeficientes da Eq. (5.15) são apresentados na Tab. 5.2.

Tabela 5.2 – Coeficientes para a integração reduzida

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<b>1.564444</b>	0.355556	0.537778	1.000000	0.674100

Na Fig. 5.5 é apresentada a distribuição dos pontos de integração sobre o elemento de vinte nós com integração reduzida.

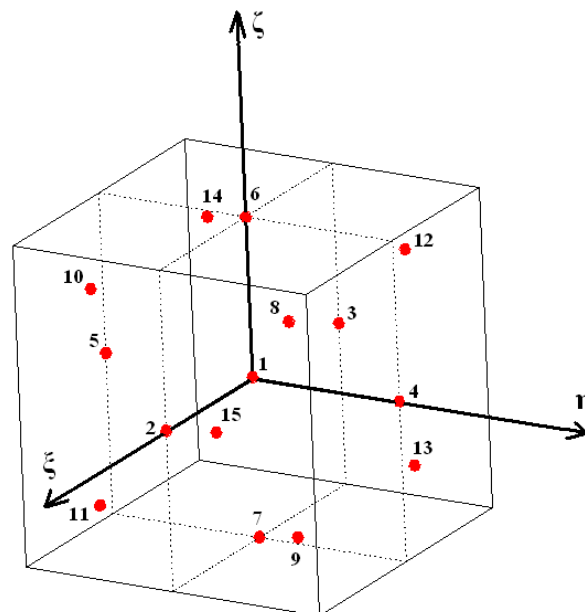


Figura 5.5 - Integração reduzida com quinze pontos de integração (Jost, 2006)

## 5.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA PASSIVA

O modelo utilizado, neste trabalho, para representar a armadura passiva é um modelo incorporado. Nele considera-se a armadura como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Supõe-se que as armaduras resistam apenas a esforços axiais na direção da barra e que há compatibilidade de deformações entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição, ou seja, admite-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. A armadura pode estar disposta em qualquer posição do elemento sem gerar novas incógnitas no problema e não existe limite para a quantidade de barras.

Neste trabalho, para a representação da armadura passiva, utilizou-se o modelo incorporado proposto por Elwi e Hrudey (1989). Este modelo tem sido bastante utilizado em diversos trabalhos, tais como em Campos Filho (1987), Machado (2002), Jost (2006), entre outros.

A seguir, apresentam-se os procedimentos para calcular a matriz de rigidez da armadura passiva que será somada a matriz global da estrutura e suas funções de interpolação.

### 5.2.1 Formulação Geométrica

As barras de armadura, da mesma forma que os elementos de concreto, são modeladas por elementos isoparamétricos, podendo assim ser retas ou curvas. Na entrada de dados, as barras de armadura são descritas através de suas coordenadas globais cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de seus pontos de extremidade e, no caso de barras curvas, por três pontos. Desta forma, as coordenadas de qualquer ponto ao longo de uma barra podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} x(\chi) \\ y(\chi) \\ z(\chi) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & H_j(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

onde  $\{x_j\}$ ,  $\{y_j\}$  e  $\{z_j\}$  são as coordenadas globais do nó  $j$  do elemento de armadura;  $H_j(\chi)$  é a função de interpolação associada a este nó em função da coordenada normalizada  $\chi$  e  $m$  é o número de nós do elemento de armadura.

Os vários termos da rigidez associada com a armadura requerem integrações ao longo da mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento  $ds_n$ , disposto ao longo da armadura, conforme ilustra a Fig. 5.6. A orientação da tangente à barra é dada pelos ângulos  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  e  $\gamma_n$  no instante  $t_n$ , onde:

$$\cos \alpha_n = x_{n,s_n} = x_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (5.17)$$

$$\cos \beta_n = y_{n,s_n} = y_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (5.18)$$

$$\cos \gamma_n = z_{n,s_n} = z_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (5.19)$$

sendo que o elemento diferencial de comprimento  $ds_n$  pode ser obtido por:

$$s_{n,\chi} = \sqrt{(x_{n,\chi})^2 + (y_{n,\chi})^2 + (z_{n,\chi})^2} \quad (5.20)$$

e

$$\begin{Bmatrix} x_{n,\chi} \\ y_{n,\chi} \\ z_{n,\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_{j,\chi} & 0 & 0 \\ 0 & H_{j,\chi} & 0 \\ 0 & 0 & H_{j,\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

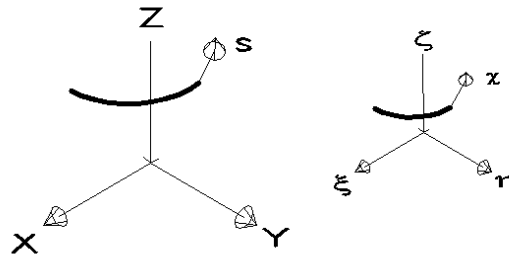


Figura 5.6– Coordenada ao longo do eixo da armadura.

Um elemento diferencial de volume  $dV_s$  da barra de aço pode ser expresso em termos de  $ds_n$  e da área da seção transversal da barra  $A_s$ , resultando:

$$dV_{s_n} = A_s ds_n \quad (5.22)$$

Usando o fator de mapeamento descrito na Eq. (5.20), integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada  $\chi$  como:

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \cdot s_{n,\chi} d\chi \quad (5.23)$$

onde  $C$  é uma função de posição ao longo da barra de armadura.



### 5.2.2 Funções de Interpolação

Neste trabalho, as barras de armadura são modeladas por elementos isoparamétricos unidimensionais. As funções de interpolação para os elementos da armadura são polinômios de Lagrange,  $H(\chi)$ , expressas em função da coordenada normalizada  $\chi$ , e são dadas pela expressão segundo Zienkiewicz e Taylor (2000):

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)} \quad (5.24)$$

Esta função é um polinômio de grau  $m = n - 1$  em  $\chi$ , e tem valor unitário em  $\chi = \chi_k$  e nulo nos demais, onde  $n$  é o número de nós do elemento.

Para um elemento de barra com três nós, as funções de interpolação são:

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2} \quad (5.25)$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad (5.26)$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (5.27)$$

### 5.2.3 Matriz de Rigidez para a Armadura Passiva

Para a obtenção da matriz de rigidez total de um determinado elemento, é necessário identificar as barras de armadura que são por ele interceptadas. Uma sub-rotina computacional calcula automaticamente os segmentos de barras que ficam no interior dos elementos de concreto, através da verificação de suas seis faces. Este processo é efetuado em coordenadas naturais. As barras são divididas em segmentos, de acordo com a localização em cada elemento de concreto e esses segmentos contribuirão com sua rigidez para a rigidez total da estrutura.

Segundo Zienkiewicz, Philips e Owen (1974), a deformação ao longo da barra de armadura é igual à deformação normal no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo do segmento da armadura. Desta forma, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, a deformação específica em uma forma incremental na armadura na direção tangente ao eixo pode ser calculada com base na expressão proposta por Elwi e Hruday (1989):

$$\delta\varepsilon_{s_n} = \delta\varepsilon_x \cos^2 \alpha_n + \delta\varepsilon_y \cos^2 \beta_n + \delta\varepsilon_z \cos^2 \gamma_n + \delta\gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \beta_n + \delta\gamma_{yz} \cos \beta_n \cos \gamma_n + \delta\gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \gamma_n \quad (5.28)$$

A variação das deformações é obtida diretamente da relação entre o vetor  $\{B_{s_n}\}$  e a variação dos deslocamentos  $\delta U_n$  dos nós do elemento de concreto e escrita da seguinte forma:

$$\delta\varepsilon_{s_n} = \{B_{s_n}\} \delta U_n \quad (5.29)$$

A vetor  $\{B_{s_n}\}$  é dado como:

$$\{B_{s_n}\}^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_n (x_{n,x} N_{i,x}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,y} N_{i,y}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,z} N_{i,z}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,y} N_{i,x} + x_{n,x} N_{i,y}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,z} N_{i,y} + x_{n,y} N_{i,z}) \\ \cos^2 \alpha_n (x_{n,x} N_{i,x}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,y} N_{i,y}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,z} N_{i,z}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,y} N_{i,x} + x_{n,x} N_{i,y}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,z} N_{i,y} + x_{n,y} N_{i,z}) \\ \cos^2 \alpha_n (x_{n,x} N_{i,x}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,y} N_{i,y}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,z} N_{i,z}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,y} N_{i,x} + x_{n,x} N_{i,y}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,z} N_{i,y} + x_{n,y} N_{i,z}) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais (Eq. 4.7), pode-se determinar a variação de trabalho interno da armadura por:

$$\delta W_{s_n} = \int_{V_s} \delta \varepsilon_{s_n}^T \sigma_{s_n} dV_{s_n} \quad (5.31)$$

onde  $V_{s_n}$  é o volume da armadura e  $\sigma_{s_n}$  é a tensão normal na armadura, calculada por:

$$\sigma_{s_n} = E_s \varepsilon_{s_n} \quad (5.32)$$

sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Substituindo-se as Eq. (5.22), (5.29) e (5.32) em (5.31), pode-se determinar que a matriz de rigidez para a armadura é dada por:

$$[K_{s_n}] = \int_{\chi} [B_{s_n}]^T E_s [B_{s_n}] A_s \frac{ds_n}{d\chi} d\chi \quad (5.33)$$

com  $A_s$  a área de aço e  $s_{n,\chi}$  é calculado pela Eq. (5.20).

O vetor de forças internas para a armadura pode ser obtido também a partir da Eq. (5.31), ficando definida como:

$$\left\{ f_{s_{int_n}} \right\} = \int_{\chi} \left\{ B_{s_n} \right\}^T \sigma_{s_n} A_s \frac{ds_n}{d\chi} d\chi \quad (5.34)$$

Tanto a matriz de rigidez, como o vetor de forças internas da armadura, são somados à matriz de rigidez e ao vetor de forças internas do concreto para a consideração do concreto armado.

### 5.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA ATIVA

#### 5.3.1 Formulação Geométrica

A armadura de protensão externa, neste trabalho, é representada por elementos finitos discretos, tipo treliça espacial, cujas matrizes de rigidez são superpostas às dos elementos de concreto. O elemento que representa a armadura de protensão é unidimensional e formado por dois nós associados a três graus de liberdade de translação, segundo as três direções do espaço. Estes nós devem ser coincidentes com nós dos elementos finitos utilizados para representar o concreto, não acrescentando, desta maneira, novas incógnitas ao problema proposto. Esse modelo discreto tem a desvantagem da malha de elementos finitos de concreto limitar a disposição dos cabos de protensão. Admitem-se somente cargas na forma de forças concentradas em seus nós. Na Fig. 5.7 observa-se a orientação dos eixos locais e os graus de liberdade do elemento. O eixo  $x^L$  é orientado do nó inicial para o nó final. Os eixos  $x^L$ ,  $y^L$  e  $z^L$ , perpendiculares entre si e a  $x^L$ . O esforço normal (única sollicitação atuante no elemento) está associado à direção  $x^L$  do elemento.

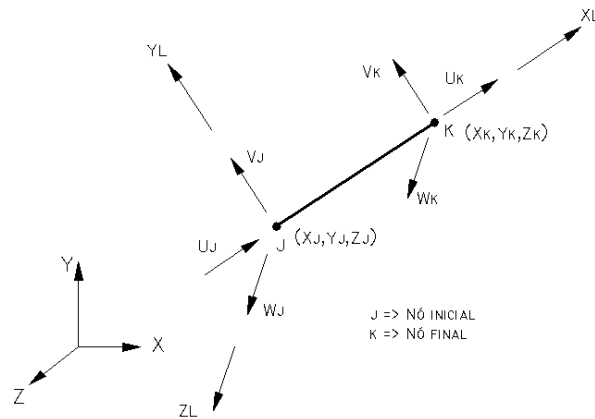


Figura 5.7 - Eixos locais e graus de liberdade do elemento de armadura de protensão

Supondo que o elemento esteja posicionado segundo o sistema local  $(x^L, y^L, z^L)$  com relação ao sistema  $(X, Y, Z)$  da Fig. 5.8, a orientação do eixo  $x^L$ , coincidente com o eixo baricêntrico da barra, pode ser definida pelos cossenos diretores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$ . Podem-se definir também os cossenos diretores para um elemento em função das coordenadas dos pontos nodais:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_k - x_j}{L_p} \\ \cos \beta &= \frac{y_k - y_j}{L_p} \\ \cos \gamma &= \frac{z_k - z_j}{L_p}\end{aligned}\tag{5.35}$$

onde:

$$L_p = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}\tag{5.36}$$

$L_p$  é o comprimento da armadura de protensão,  $(x_j, y_j, z_j)$  e  $(x_k, y_k, z_k)$  são as coordenadas dos pontos nodais j e k respectivamente com relação ao sistema de coordenadas da estrutura,  $(X, Y, Z)$ .

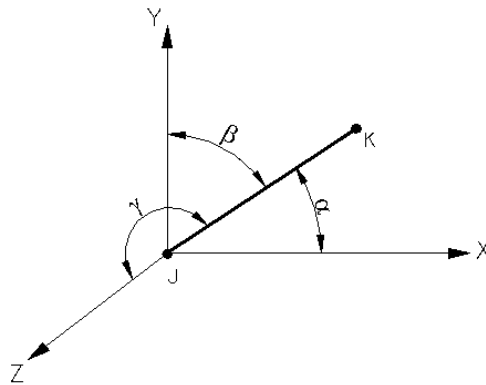


Figura 5.8 - Definição dos ângulos diretores

A matriz de transformação para o elemento de armadura de protensão, onde as cargas estão atuando somente nos pontos nodais, segundo Savaris (1973), é dada por:

$$r = \begin{bmatrix} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} & \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} & -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} \\ -\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} & 0 & \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} \\ -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} & \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Assim, a transformação de coordenadas do sistema  $(X, Y, Z)$  para o sistema  $(x^L, y^L, z^L)$  será dada pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} \\ -\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & 0 & \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} \\ \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

Para a transformação do sistema de coordenadas do elemento de armadura de protensão para o de coordenadas da estruturas, ter-se-á o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} \\ \cos \beta & \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & 0 \\ \cos \gamma & -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} & \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

O vetor de deslocamentos, em coordenadas globais, é definido por:

$$\{u\} = [N] \{u\}^e \quad (5.40)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i(\chi) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma do nó  $i$  em relação à coordenada natural  $\chi = 2x/L$ , dadas conforme a Eq. (5.42), e  $m$  é o número de nós do elemento de armadura de protensão.

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{1}{2}(1 - \chi) \\ N_k &= \frac{1}{2}(1 + \chi) \end{aligned} \quad (5.42)$$

A deformação axial na barra de armadura de protensão externa pode ser calculada pelo tensor de Green-Lagrange, que corresponde à formulação Lagrangeana-Total, e pode ser expressa na forma:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} \quad (5.43)$$

sendo que  $\varepsilon_L$  é referente à parte linear e  $\varepsilon_{NL}$  é referente à parcela não-linear geométrica e têm as seguintes formas:

$$\varepsilon_L = u_{,x} \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \left[ (u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right]$$

sendo:



$$\begin{aligned}
u_{,x} &= u_{,\xi} \xi_{,x} = \frac{2}{L_p} u_{,\xi} \\
v_{,x} &= v_{,\xi} \xi_{,x} = \frac{2}{L_p} v_{,\xi} \\
w_{,x} &= w_{,\xi} \xi_{,x} = \frac{2}{L_p} w_{,\xi}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Pelo método dos elementos finitos, pode-se escrever a Eq.(5.43) através da relação:

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^m (B_{Li} + \frac{1}{2} B_{NLi}) \cdot u_i^e \tag{5.46}$$

onde  $B_L$  é a matriz deformações-deslocamentos linear e  $B_{NL}$  é matriz deformações-deslocamentos não linear, expressas por:

$$B_{Li} = [N_{i,x} \quad 0 \quad 0] \tag{5.47}$$

$$B_{NLi} = [u_{,x} N_{i,x} \quad v_{,x} N_{i,x} \quad w_{,x} N_{i,x}]$$

onde:

$$\begin{aligned}
N_{j,x} &= -\frac{1}{L_p} \\
N_{k,x} &= \frac{1}{L_p}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

A Eq. (5.47) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[B_L] = [N_{j,x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{k,x} \quad 0 \quad 0] \quad (5.49)$$

$$[B_{NL}] = [u_{,x} N_{j,x}, \quad v_{,x} N_{j,x}, \quad w_{,x} N_{j,x}, \quad u_{,x} N_{k,x}, \quad v_{,x} N_{k,x}, \quad w_{,x} N_{k,x}]$$

ou ainda:

$$[B_L] = \frac{1}{L_p} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (5.50)$$

$$[B_{NL}] = \frac{1}{L_p^2} [-(u_k^e - u_j^e), \quad -(v_k^e - v_j^e), \quad -(w_k^e - w_j^e), \dots \\ \dots (u_k^e - u_j^e), \quad (v_k^e - v_j^e), \quad (w_k^e - w_j^e)]$$

Real (2000) mostra que as deformações virtuais podem ser encontradas por:

$$\delta \varepsilon_p = \sum_{i=1}^m (B_{pi}) \cdot \delta u_i^e \quad (5.51)$$

portanto:

$$[B_p] = [B_L] + [B_{NL}] \quad (5.52)$$

### 5.3.2 Matriz de Rigidez para a Armadura Ativa

Fazendo uso da formulação usada em elementos finitos, pode-se representar a matriz de rigidez do elemento de armadura de protensão como a fórmula dada por:

$$[K_p] = A_p \cdot E_p \int_{L_p} [B_p]^T \cdot [B_p] \cdot dx \quad (5.53)$$

onde  $V_p$  é o volume da armadura de protensão,  $E_p$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço de protensão.

Para obter a matriz de rigidez no sistema de coordenadas globais da estrutura, deve-se fazer uso da transformação dada pela Eq. (5.37) na Eq. (5.54), obtendo-se a matriz de rigidez rotacionada  $[K_p]$ , mostrada na Eq. (5.55).

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$[K_p] = [R]^T \cdot [K_p] \cdot [R]$$

$$[K_p] = \frac{E_p A_p}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha & \cos \gamma \cdot \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \beta \cdot \cos \alpha & -\cos \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \gamma \cdot \cos \beta & -\cos \alpha \cdot \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma & \cos^2 \gamma & -\cos \alpha \cdot \cos \gamma & -\cos \beta \cdot \cos \gamma & -\cos^2 \gamma \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \beta \cdot \cos \alpha & -\cos \gamma \cdot \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha & \cos \gamma \cdot \cos \alpha \\ -\cos \alpha \cdot \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha \cdot \cos \gamma & -\cos \beta \cdot \cos \gamma & -\cos^2 \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

A matriz de rigidez da armadura de protensão é somada à matriz global da estrutura nos graus de liberdade correspondentes dos nós que pertencem a cada elemento de armadura de protensão.

### 5.3.3 Aplicação da força de protensão externa

Neste trabalho, a força de protensão externa inicial é fornecida como dado de entrada pelo usuário do programa. A força na armadura de protensão corrente é variável no tempo, pois à medida que a peça se deforma, o valor da mesma sofre alteração. Ela é introduzida no modelo como uma força imposta e o equilíbrio é automaticamente determinado pelo programa.

A força de protensão corrente é dada pela expressão:

$$F_p = \sigma_p A_p \quad (5.56)$$

onde  $A_p$  é a área de armadura de protensão e  $\sigma_p$  é a tensão na armadura atualizada:

$$(\sigma_p)_{n+1} = (\sigma_p)_n + (\Delta\sigma_p)_n \quad (5.57)$$

A força de protensão é decomposta nas direções cartesianas para considerar a posição da armadura na estrutura. Para isto faz-se uso da matriz de rotação  $r$ .

## 6 MODELO DE CONTATO

### 6.1 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTATO

Neste capítulo é apresentada a formulação para implementação dos elementos de contato, que representam as juntas entre os segmentos da estrutura. Essa formulação é baseada no desenvolvimento feito por Habraken e Cescotto (1998).

Os elementos de contato são representados por elementos bidimensionais quadrangulares. Os dois elementos utilizados para modelar os elementos de contato estão ilustrados na Fig. 6.1, sendo um linear e outro quadrático. Estes elementos possuem quatro e nove nós, respectivamente, com três graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações segundo as três direções do espaço. Os nós dos elementos de contato possuem as mesmas posições dos nós dos elementos de concreto. Suas coordenadas curvilíneas normalizadas são  $\xi$  e  $\eta$ . Para que exista uma compatibilidade no campo de deslocamentos entre os elementos, o elemento linear é utilizado se o elemento de concreto for de oito nós e o quadrático, se o elemento de concreto for de vinte nós. No caso do elemento quadrático, é adicionado um nó central com a finalidade de facilitar o cálculo do afastamento entre os elementos de contato. Suas coordenadas são calculadas internamente no programa a partir das oito coordenadas conhecidas e não são adicionadas incógnitas ao problema.

A formulação proposta por Habraken e Cescotto (1998), considera dois corpos A e B de volume  $\Omega^A$  e  $\Omega^B$  e de contorno  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$ , como mostra a Fig. 6.2. Os dois corpos estão em contato através das superfícies  $\Gamma_C^A$  e  $\Gamma_C^B$ . As coordenadas no sistema local são definidas pelo eixo  $x$ , normal à superfície de contato no ponto S ( $S^A$  ou  $S^B$ ) e pelos vetores  $y$  e  $z$ , tangenciais à mesma.

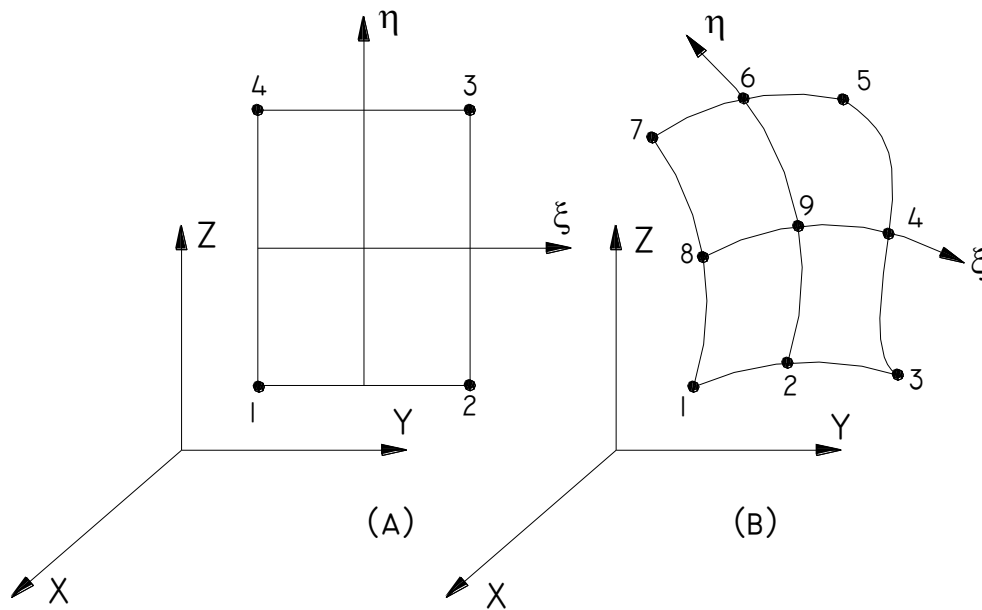


Figura 6.1 – Tipos de elementos de contato

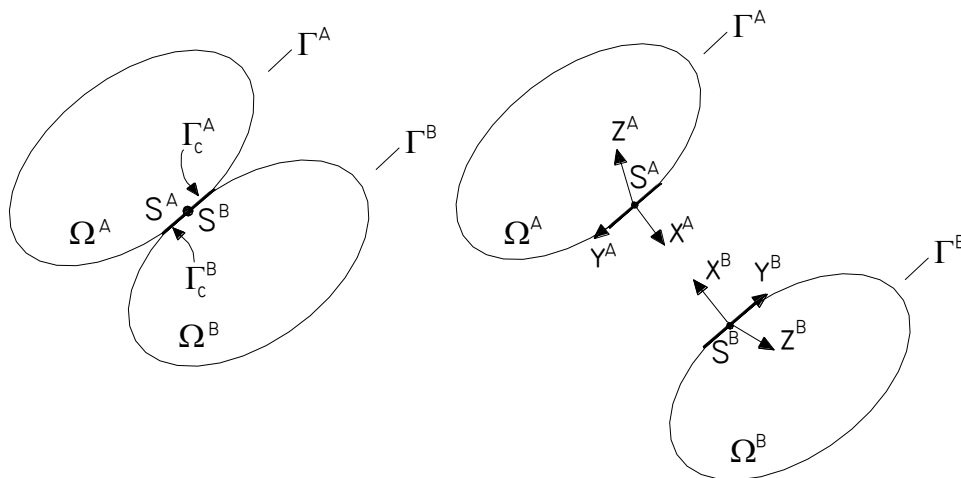


Figura 6.2 – Corpos de contato

A formulação apresentada a seguir será para o elemento de contato quadrático, sendo os nós 1 a 9 pertencentes ao elemento de contato referente ao sólido A e os nós 10 a 18 pertencentes ao elemento de contato referente ao sólido B, conforme Fig. 6.3. Os elementos de contato são descritos através das coordenadas globais desses nós  $(X, Y, Z)$ .

$$(X_j, Y_j, Z_j) \quad j=1 \text{ a } 18. \quad (6.1)$$

onde  $j$  é o número dos nós.

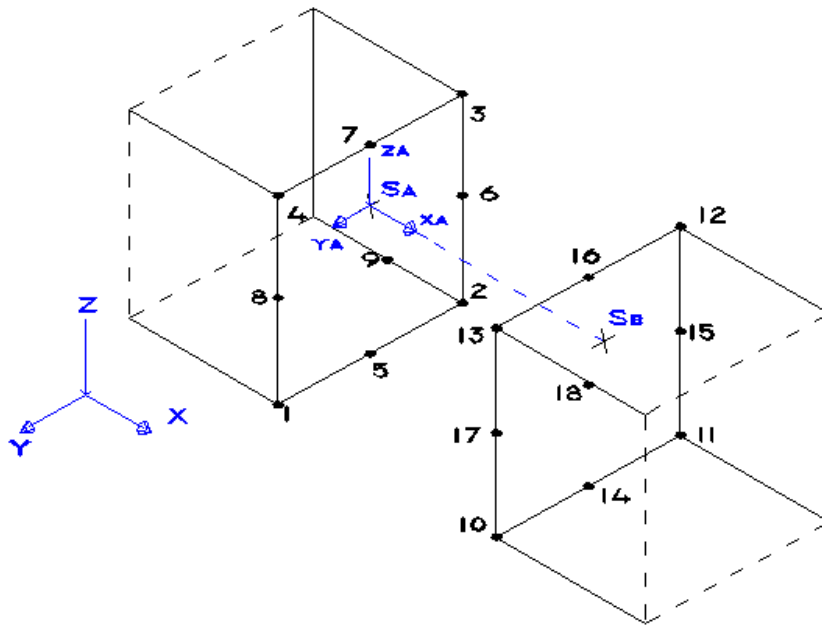


Figura 6.3 – Elementos de contato

As funções de interpolação,  $[N]$ , são expressas em termos de coordenadas normalizadas,  $\xi$  e  $\eta$ . Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto, localizado no interior de um elemento de contato, são expressas em termos das funções de interpolação,  $[N]$ :



$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde  $n$  é o número de nós do elemento de contato.

### 6.1.1 Funções de interpolação para os elementos de contato

As funções de interpolação para o elemento de contato são polinômios de Lagrange, definidos de acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas  $(\xi, \eta)$ . São elas:

1. Elemento linear:

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0), \quad i=1,2,3,4 \quad (6.3)$$

onde  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i)$  são as coordenadas naturais do nó em questão.

2. Elemento quadrático da família de Lagrange:

– para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 ( \xi^2 + \xi_0 ) ( \eta^2 + \eta_0 ), \quad i=1,2,3,4 \quad (6.4)$$

– para os nós de meio de lado:

$$N_i = \eta_i^2/2(\eta^2 - \eta_0)(1 - \xi^2) + \xi_i^2/2(\xi^2 - \xi_0)(1 - \eta^2), \quad i=5,6,7,8 \quad (6.5)$$

– para o nó central:

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i=9 \quad (6.6)$$

### 6.1.2 Pontos de integração para os elementos de contato

Utiliza-se, neste trabalho, como proposto em Owen e Hinton (1980), o método da Quadratura de Gauss-Legendre, com 3 x 3 pontos de integração para o elemento quadrático e 2 x 2 pontos para o elemento linear. As coordenadas naturais dos pontos de integração encontram-se na Fig. 6.4 e os fatores de peso destes pontos são apresentados na Tab. 6.1.

Tabela 6.1 – Coeficientes para a integração.

<i>Regra</i>	$w_j, w_k, w_l$
<b>2 x 2</b>	1,00000
<b>3 x 3</b>	0,55556
	0,88889
	0,55556

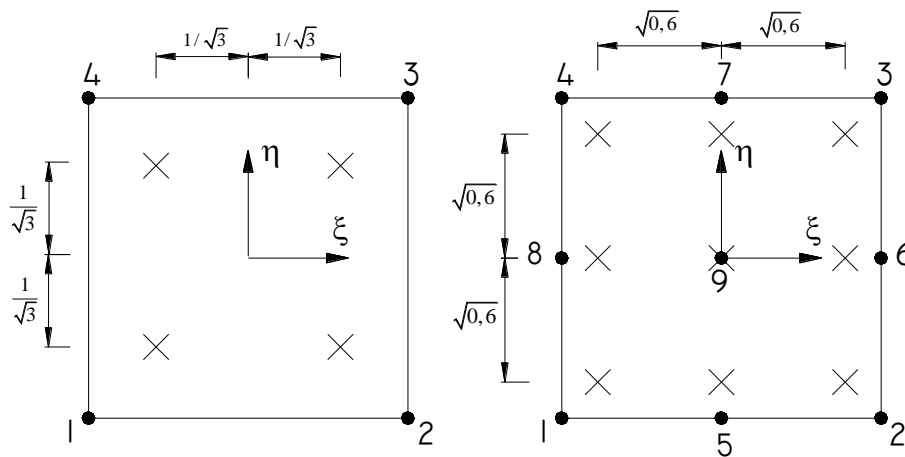


Figura 6.4 – Pontos de integração dos elementos de contato

### 6.1.3 Determinação do elemento de contato oposto

De acordo com a Eq. (6.2), as coordenadas globais do ponto  $S^A$  podem ser expressas por:

$$\begin{cases} X^A = \sum_{j=1}^n N_j X_j \\ Y^A = \sum_{j=1}^n N_j Y_j \\ Z^A = \sum_{j=1}^n N_j Z_j \end{cases} \quad (6.7)$$

onde  $N(\xi^A, \eta^A)$  é função das coordenadas naturais do ponto  $S^A$  conhecidas.

Para encontrar o elemento de contato oposto ao elemento de contato A, neste caso o elemento de contato B, deve-se traçar uma reta que passe pelo ponto  $S^A$  e tenha a direção de  $x^A$ .

A direção de  $x^A$  pode ser determinada, considerando o elemento de contato um plano com nós conhecidos, já que são coincidentes com os nós de um elemento de concreto. Através desses nós determinam-se dois vetores não colineares, e efetua-se o produto

vetorial deles, resultando um vetor ortogonal  $\vec{n}$  normal a este plano  $\Omega$ , conforme a Fig. 6.5. Esse vetor tem componentes em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , chamadas  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

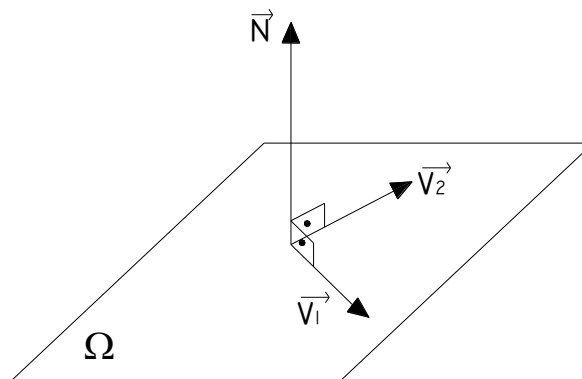


Figura 6.5 – Vetor ortogonal

A equação da reta, que contém o ponto A e tem a direção de  $\vec{n}$ , pode ser expressa como:

$$\begin{cases} X=X^A + \lambda n_x \\ Y=Y^A + \lambda n_y \\ Z=Z^A + \lambda n_z \end{cases} \quad (6.8)$$

onde  $\lambda$  é a distância entre  $S^A$  e o ponto onde a reta interceptará o elemento de contato oposto. Neste caso, em que o ponto de intersecção é  $S^B$ , a equação é dada por:

$$\begin{cases} X^B=X^A + \lambda n_x \\ Y^B=Y^A + \lambda n_y \\ Z^B=Z^A + \lambda n_z \end{cases} \quad (6.9)$$

onde as coordenadas globais  $X^B, Y^B$  e  $Z^B$  são funções de  $\xi^B$  e  $\eta^B$ , as coordenadas naturais do ponto  $S^B$ .

Portanto a Eq. (6.9) pode ser expressa como:

$$\begin{cases} X^B(\xi^B, \eta^B) = X^A + \lambda n_x \\ Y^B(\xi^B, \eta^B) = Y^A + \lambda n_y \\ Z^B(\xi^B, \eta^B) = Z^A + \lambda n_z \end{cases} \quad (6.10)$$

Através da solução do sistema de três equações não lineares, expressas na Eq. (6.9), chega-se ao valor de três incógnitas do problema,  $\xi^B$  e  $\eta^B$ , que localizam o ponto  $S^B$ , e  $\lambda$ , que é a distância entre  $S^A$  e  $S^B$  nos pontos de integração dos elementos de contato.

Para determinar o valor de  $\lambda$  nos nós do elemento seria necessário determinar a relação inversa da Eq. (6.11). A forma explícita para esta relação, em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito, numericamente, através de um algoritmo de resolução de um sistema de equações não-lineares.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i, \quad i=1 \text{ a } 9 \quad (6.11)$$

Determinada a distância  $\lambda$  nos pontos nodais do elemento de contato em análise, parte-se para uma segunda etapa, onde se determina o elemento de contato oposto. O elemento de contato oposto será aquele em que  $\xi^B$  e  $\eta^B$  têm valores no intervalo entre  $-1$  e  $1$ .

### 6.1.4 Comportamento da junta

A terceira etapa consiste em verificar se a junta está fechada ( $\lambda \geq 0$ ). Caso a junta esteja fechada, são acrescentados elementos rígidos à matriz de rigidez total da estrutura, entre os nós dos elementos de contato em análise e o seu elemento oposto. À medida que as etapas de cargas são feitas e os deslocamentos são conhecidos, atualizam-se as coordenadas globais dos elementos de contato ( $X, Y, Z$ ), e calculam-se, novamente, o elemento oposto e a distância  $\lambda$  entre os corpos. Quando  $\lambda < 0$ , ou seja, os corpos se distanciam, retiram-se os elementos rígidos entre os nós dos elementos de contato, que os mantinha coincidentes. Na Fig. 6.6, na configuração deformada, apenas os três nós superiores têm o valor de  $\lambda \geq 0$ , ou seja, os nós estão juntos e, assim, são acrescentados três elementos rígidos nos nós superiores. Já nos demais nós, não se acrescenta elementos rígidos, pois eles estão afastados entre si de uma distância  $\lambda$ .

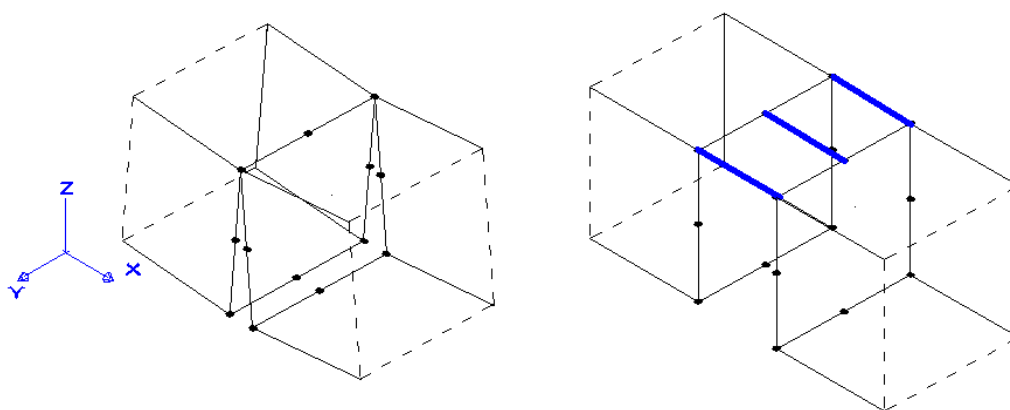


Figura 6.6 – Análise dos elementos de contato

No fluxograma da Fig. 6.7 a esquematização do que foi explicado é mostrada para melhor compreensão.

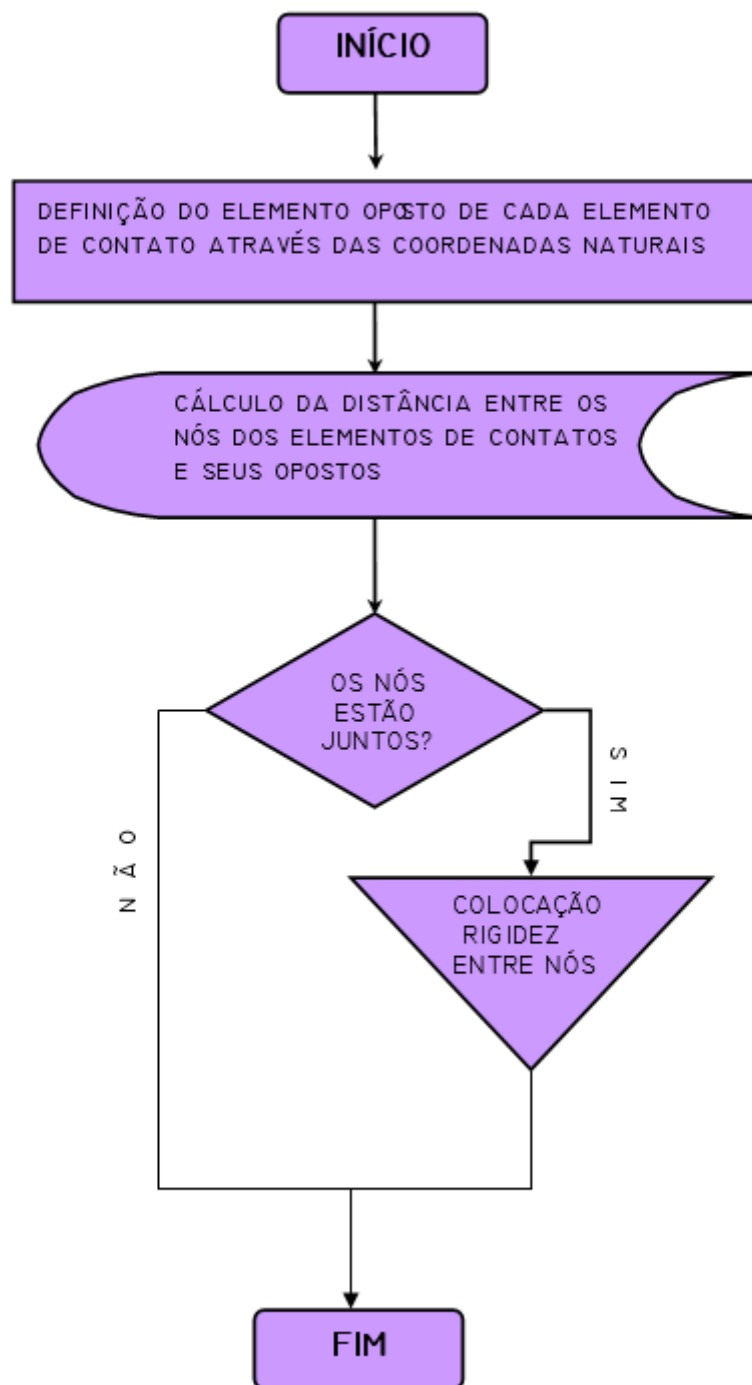


Figura 6.7 – Fluxograma

## 7 MODELO PARA UM MATERIAL ELASTO-VISCOPLÁSTICO

### 7.1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material constituído de partículas de agregados, englobados por uma matriz porosa de cimento. Pode ser associado a barras de aço, dando forma ao que se chama de concreto armado ou protendido, que possuem um comportamento não-linear. Um material com comportamento não-linear é aquele que apresenta uma relação não-linear entre tensões e deformações, ou seja, essa relação não pode ser definida por uma constante. Um modelo baseado em relações entre tensões e deformações podem ser chamado de modelo constitutivo.

O modelo constitutivo para os materiais utilizados neste trabalho será apresentado neste capítulo. O comportamento dos materiais é determinado em função de um modelo elasto-viscoplástico onde há um algoritmo de incremento de carga para solução do problema elastoplástico e um algoritmo de incremento de tempo para solução do problema viscoelástico. O programa para solução desses problemas foi apresentado por Owen e Hinton (1980) e foi descrito capítulo 4.

No primeiro algoritmo estuda-se a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento instantâneo, considerando-se o tempo tendendo ao infinito. O estado estável corresponde ao comportamento elastoplástico da estrutura. O segundo algoritmo determina a resposta de uma estrutura decorrido um determinado período após a aplicação do carregamento.

O modelo elasto-viscoplástico utilizado é representado por uma mola em série com um amortecedor e um elemento de atrito em paralelo, como mostra a Fig. 7.1. Podem-se encontrar soluções tanto de problemas elastoplásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário, quanto de problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação.



Conforme Prates Jr. (1992), utiliza-se o modelo de camadas superpostas para a solução do problema viscoelástico. Neste modelo, o material é dividido em um determinado número de camadas, onde cada uma delas possui propriedades mecânicas diferentes, mas sofre a mesma deformação total. Obtém-se assim um comportamento composto, capaz de representar de forma mais realista o comportamento viscoelástico de um material.

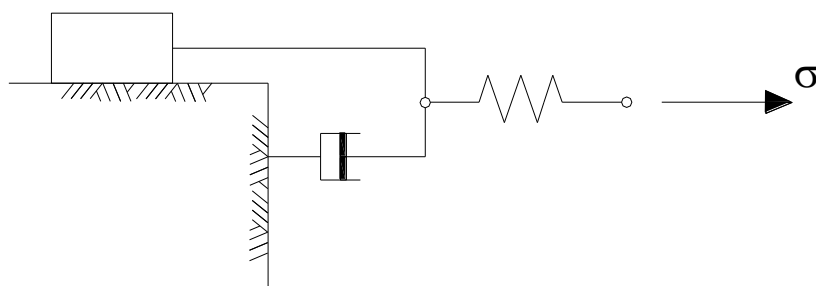


Figura 7.1 - Modelo elasto-viscoplástico

## 7.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

Em virtude da baixa resistência à tração do concreto (cerca de 10% da resistência à compressão), dividiu-se o modelo em dois, para descrever adequadamente as diferentes situações. Quando o concreto está submetido à tração, o modelo é elástico linear até a ruptura e a partir do qual considera-se um modelo de contribuição do concreto entre fissuras. Já quando está submetido à compressão, o modelo é elasto-plástico com endurecimento. Estes modelos são descritos nos itens a seguir.

### 7.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo para o concreto comprimido é composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura,  $f$ , pode ser expressa por:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (7.1)$$

sendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  as tensões principais (tensões de tração positivas).

É conveniente substituir as tensões principais pelo primeiro invariante do tensor de tensões,  $I_1$ , e pelos segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões,  $J_2$  e  $J_3$ . Desta forma, a expressão (7.1) pode ser escrita como:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad (7.2)$$

onde, segundo Chen e Han (1988):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (7.3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \quad (7.4)$$

$$J_3 = (\sigma_x - \sigma_m) [(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{xz}^2] + \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz}] + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{xz}], \quad (7.5)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3}, \quad (7.6)$$

e  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são as tensões totais.

As tensões desviadoras principais,  $s_1, s_2$  e  $s_3$ , são dadas pelas raízes da equação cúbica:

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0, \quad (7.7)$$

onde, substituindo-se  $s = r \operatorname{sen} \theta$ , tem-se que:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \operatorname{sen} \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (7.8)$$

Fazendo-se uso da identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} = 0. \quad (7.9)$$

e comparando-se as equações (7.7) e (7.8), obtêm-se:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2}, \quad (7.10)$$

e

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{4J_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}}. \quad (7.11)$$

A primeira raiz da Eq. (7.11), com  $\theta$  determinado por  $3\theta$  no intervalo de  $\pm\pi/2$ , é uma alternativa para o terceiro invariante do tensor desviador de tensões,  $J_3$ . Notando-se a “natureza cíclica” de  $\operatorname{sen}(3\theta + 2n\pi)$ , têm-se, imediatamente, os três (e apenas três) possíveis valores de  $\operatorname{sen} \theta$ , os quais definem as três tensões principais. As tensões principais podem, então ser obtidas através da expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2J_2}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \text{sen } \theta \\ \text{sen}(\theta + 4\pi/3) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (7.12)$$

com  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  e  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ .

### 7.2.1.1 Critério de Ruptura

Utilizou-se, neste trabalho, o critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), o qual é recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Neste critério, a superfície de ruptura é dada pela expressão:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (7.13)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média de compressão do concreto,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_2$  é o segundo invariante desviador de tensões,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do critério e  $\lambda$  é uma função que depende do ângulo de similaridade do concreto  $\theta$ .

A função  $\lambda$  é definida pelas seguintes expressões:

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \text{sen}3\theta) \right], \text{ para } \text{sen}3\theta \leq 0 \quad (7.14)$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \text{sen}3\theta) \right], \text{ para } \text{sen}3\theta > 0$$

onde o  $\text{sen}3\theta$  é dado pela Eq. (7.11).

Os quatro parâmetros do modelo,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são determinados, de acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação,  $k$ , entre a resistência média à compressão uniaxial  $f_{cm}$  e a resistência média à tração uniaxial  $f_{tm}$  do concreto:

$$k = \frac{f_{cm}}{f_{tm}} \quad (7.15)$$

sendo

$$f_{tm} = 0,14(f_{cm})^{2/3}, \text{ em kN/cm}^2 \quad (7.16)$$

Assim, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}} \quad (7.17)$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}} \quad (7.18)$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}} \quad (7.19)$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (7.20)$$

O critério de ruptura de Ottosen, se forem adotados  $\beta = c_2 = 0$ , ou, então,  $\alpha = c_2 = 0$ , reduz-se aos critérios de Von Mises ou Drucker-Prager, respectivamente.

A Fig. 7.2 representa a forma geral da superfície de ruptura do concreto, no espaço tridimensional de tensões, podendo ser vista por seus meridianos, Fig.7.2.a, e suas seções transversais, Fig. 7.2.b. Para um material isotrópico e com mesmas resistências à tração e compressão, a superfície de ruptura apresenta tríplice simetria com origem em zero, tornando-se necessário o estudo de apenas meio setor com  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Como o

concreto possui resistência à tração muito menor do que à compressão, mas considerando que este é um material isotrópico, continua havendo tal simetria, porém a origem passa a não ser mais em 0 e o setor a ser estudado agora é de  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ .

Desta forma, a superfície de ruptura do concreto:

- é dependente dos três invariantes de tensão ( $I_1, J_2, J_3$ );
- tem uma forma é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- tem meridianos que são parabólicos e que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático;
- possui seções transversais que mudam, de uma forma triangular para circular, com o aumento da pressão hidrostática.

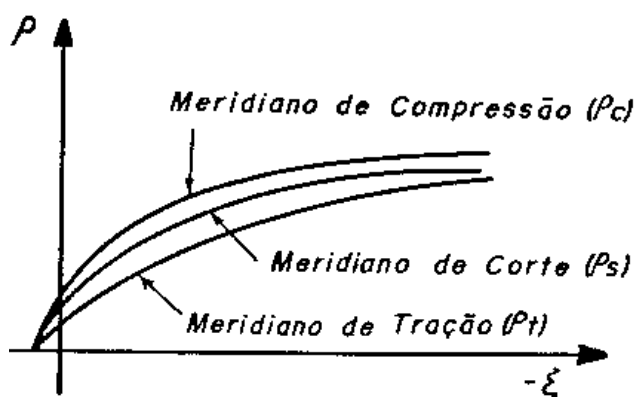


Figura 7.2.a - Meridianos da superfície de ruptura

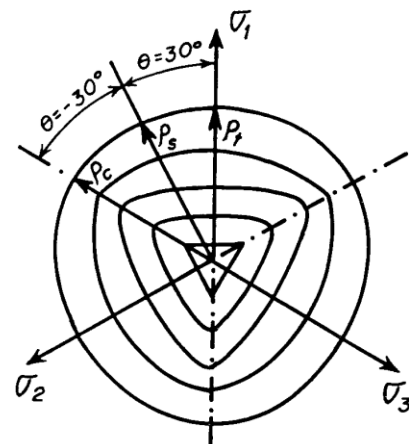


Figura 7.2.b - Seções transversais da superfície de ruptura

#### 7.2.1.2 Critério de Plastificação

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico, e adotou-se a superfície de ruptura gerada pelo critério de Von Mises, o qual, como foi

visto anteriormente, é um caso particular do critério de Ottosen. Esta solução foi empregada por Machado (2002).

A superfície de plastificação, a partir da superfície gerada pelo critério de Von Mises, considerando tensão uniaxial equivalente ou tensão efetiva  $\sigma_{ef} = f_{cm}$  e manipulando a Eq. (7.13), é expressa por:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef} \quad (7.21)$$

Considerando a tensão de plastificação inicial nula, o domínio plástico ocorre para valores de  $\sigma_{ef}$  dentro do intervalo  $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ , conforme ilustra a Fig. 7.3.

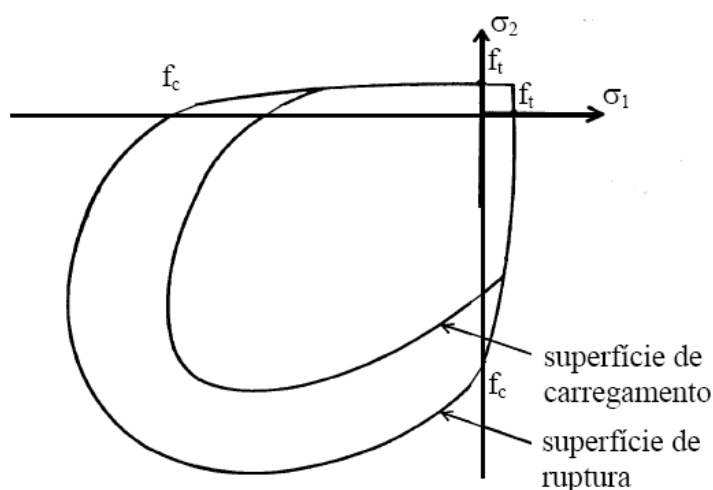


Figura 7.3 - Superfície de carregamento e ruptura

### 7.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra do endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. Ela é determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Utilizou-se, neste trabalho, o diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), que pode ser visto na Fig. 7.4. A expressão utilizada é a que segue:

$$\sigma = -\frac{\frac{-E}{f_{cm}}\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{-0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}}0,0022 - 2\right)\frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (7.22)$$

Para obter uma relação  $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$ , substitui-se, na equação anterior,  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \sigma/E + \varepsilon_p$ , resultando na seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (7.23)$$

onde

$$a = \frac{\left(1 - \frac{f_{cm}}{0,0022E}\right)^2}{f_{cm}}, \quad (7.24)$$

$$b = \varepsilon_p \left( \frac{E}{f_{cm}} - \frac{1 - f_{cm}}{0,0011} \right), \quad (7.25)$$

$$c = -\varepsilon_p \left( \frac{E - (\varepsilon_p f_{cm})}{0,0022^2} \right), \quad (7.26)$$



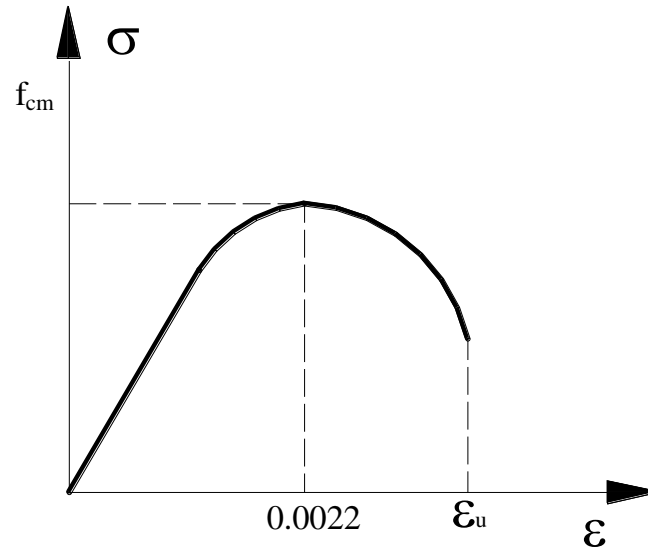


Figura 7.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

#### 7.2.1.4 Vetor de fluxo plástico

No modelo implementado, considera-se plasticidade associada, por motivos práticos, já que há poucas evidências experimentais disponíveis para este fato, segundo Owen e Hinton (1980). Desta forma, dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de plastificação. Assim, este vetor,  $\{a\}$ , que foi visto no item 4.3.1.1, pode ser obtido, em termos da função de plastificação, por:

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}}, \quad (7.27)$$

sendo  $F$  a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes.

Derivando-se a Eq. (7.11) com relação à  $\theta$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[ \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \{\sigma\}} \right]. \quad (7.28)$$

Substituindo-se a expressão (7.28) na (7.27), pode-se escrever:

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\}, \quad (7.29)$$

onde:

$$\{a_1\} = \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\},$$

$$\{a_2\} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\}, \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \{a_3\} = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = & \left\{ (s_y s_z - \tau_{zy}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3}), \right. \\ & \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{zy}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \right\}, \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1},$$

$$C_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (7.31)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

nas quais :

$s_x, s_y$  e  $s_z$  são as tensões desviadoras e  $\tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são as tensões totais de corte.

Substituindo-se a função  $F$ , determinada pela Eq. (7.21), nas expressões acima, encontram-se as componentes do vetor de fluxo plástico.

## 7.2.2 Modelo para o concreto à tração

O fato de o concreto possuir baixa resistência à tração resulta na sua fissuração, para baixos níveis de tensão, se comparados com as tensões de falha à compressão. A fissuração torna-se então um fator fundamental para simulação do comportamento da estrutura. Antes de fissurar, o concreto comporta-se como um material elástico-linear. Após fissurado, segue o modelo de fissuras distribuídas. Neste modelo, necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, sem modificar-se a topologia da malha de elementos finitos durante a análise, como ocorre em outros modelos.

O modelo de fissuração utilizado é baseado na formulação apresentada por Hinton (1988) e aprimorada por Martinelli (2003). A seguir, descreve-se um critério de fissuração, uma regra para a colaboração do concreto entre fissuras e um modelo para a transferência das tensões de corte.

### 7.2.2.1 Critério de Fissuração

Considera-se um ponto do concreto não fissurado isotrópico e torna-se ortotrópico depois da fissuração, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton (1988). A fissura é formada num plano ortogonal à tensão principal de tração  $\sigma_1$  que é definida pela Eq. (7.32) e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais de tração.

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (7.32)$$

As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e tensão. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura.

Para um ponto de integração previamente não fissurado, as suas tensões principais e direções são verificadas para avaliar se atingiram a superfície de ruptura, por fissuração ou por esmagamento. Adota-se o critério estabelecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) que determina que se:

(a)  $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$ , o ponto de integração fissurou;

(b)  $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$ , o ponto de integração esmagou.

Utiliza-se o modelo da fissura fixa, admitindo-se que a direção de uma primeira fissura permanece fixa e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao plano de fissuração existente. Se uma nova fissura ocorrer, considera-se então que o concreto não contribui mais na resistência da estrutura, anulando todas as componentes de tensão no ponto analisado.

#### 7.2.2.2 Colaboração do concreto entre fissuras

O concreto entre fissuras suporta um certo nível de tensões de tração, graças às forças de aderência entre o concreto e as barras de aço contribuem ativamente para a rigidez total das estruturas. Este fenômeno é conhecido como enrijecimento à tração “*tension stiffening*” e foi incorporado nesse trabalho, através da modificação da curva tensão-deformação do concreto, proposta por Hinton (1988).

A relação constitutiva adotada foi utilizada por Martinelli (2003) e Jost (2006) e considera a perda da resistência à tração, pela degradação da aderência, através de um ramo descendente na curva tensão-deformação, introduzindo ao concreto um amolecimento em tração como mostra a Fig. 7.5. Essa relação é expressa por:

$$\sigma = \alpha \cdot f_{tm} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (7.33)$$

onde  $\alpha$  define a inclinação do ramo linear descendente e  $\varepsilon_{ctu}$  indica a deformação limite na qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser desprezado. Adotou-se, os valores de 0,6 e 0,001 para  $\alpha$  e  $\varepsilon_{ctu}$ , respectivamente.

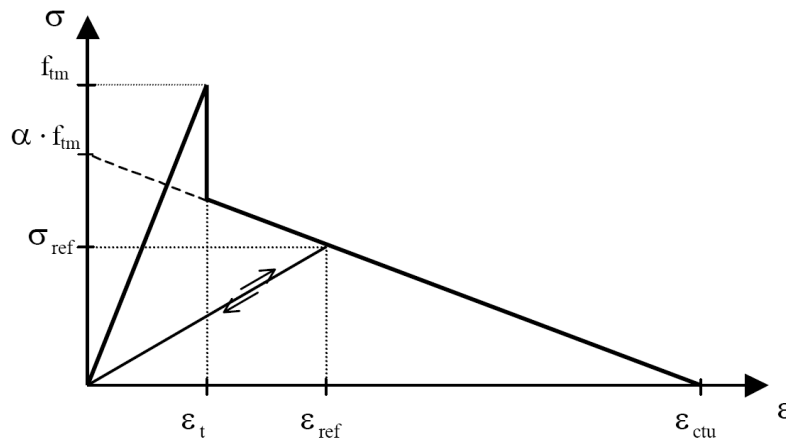


Figura 7.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Se uma fissura fechar parcialmente ou totalmente por redistribuição de tensões no concreto, a deformação atual é pequena comparada com a deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão  $\varepsilon_{ref}$ , a tensão normal à fissura  $\sigma$  portanto é calculada através da relação abaixo sendo a tensão  $\sigma_{ref}$  correspondente à deformação  $\varepsilon_{ref}$ :

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (7.34)$$

Na Fig. 7.3 é visualizada a trajetória da “descarga” secante devido ao fechamento da fissura. Sua reabertura segue a mesma trajetória até ser excedida o valor de  $\varepsilon_{ref}$ , a partir do qual segue a trajetória descendente definida pela Eq. (7.33).

### 7.2.2.3 Modelo para transferência das tensões de corte

Quando as primeiras fissuras aparecem no concreto submetido a uma carregamento, forma-se perpendicularmente à direção da mais alta tensão principal de tração  $\sigma_1$ . As direções principais se modificam, por mudança no carregamento ou por não linearidades na estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura, cujo valor depende das condições locais desta fissura.

Como principais mecanismos de transferência de esforços transversais no concreto fissurado, tem-se o engrenamento dos agregados e o efeito de pino da armadura. Ambos controlados pela abertura de fissura, que quando aumenta, reduz a capacidade de transferência de corte - “shear transfer” (Machado, 2002).

Os mecanismos mencionados acima não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Portanto utilizou-se neste trabalho uma aproximação também utilizada por Cervenka (1985), que consiste em reduzir o módulo de elasticidade transversal correspondente ao plano fissurado através de um fator  $\beta$  que varia entre 0 e 1. Desta forma:

$$G_c = \beta G_0 \quad (7.35)$$

sendo  $G_0$  o módulo de deformação de corte do concreto não fissurado e  $G_c$  o novo valor do módulo de elasticidade transversal. Se a fissura fechar novamente, o módulo  $G_0$  volta a ser adotado.

Cervenka (1985) e Hinton (1988) relacionaram o valor de  $\beta$  com a deformação normal de tração do concreto  $\varepsilon_t$  através da equação:

$$\beta = 1 - \left( \frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{0,3} \quad (7.36)$$

O módulo de deformação por corte do concreto não-fissurado  $G_0$ , é dado por:

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.37)$$

### 7.3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Nas estruturas de concreto estrutural, considera-se que as barras de aço resistem somente a esforços uniaxiais. Deste modo, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras.

No modelo implementado, o aço é representado como um material elastoplástico por um diagrama tensão-deformação bilinear. O aço apresenta o mesmo comportamento em tração e compressão. Para aços com patamar de escoamento bem definido e com dureza material, adotou-se o modelo elastoplástico perfeito (Fig. 7.6(a)) e para os aços encruados a frio um comportamento elastoplástico com endurecimento linear a partir de  $0,85 f_y$  (Fig. 7.6(b)). Para a armadura de protensão, o material utiliza-se o gráfico da Fig. 7.7 que possui um comportamento elástico linear até atingir 90% do valor da tensão de ruptura  $f_{ptk}$  e após um endurecimento linear.

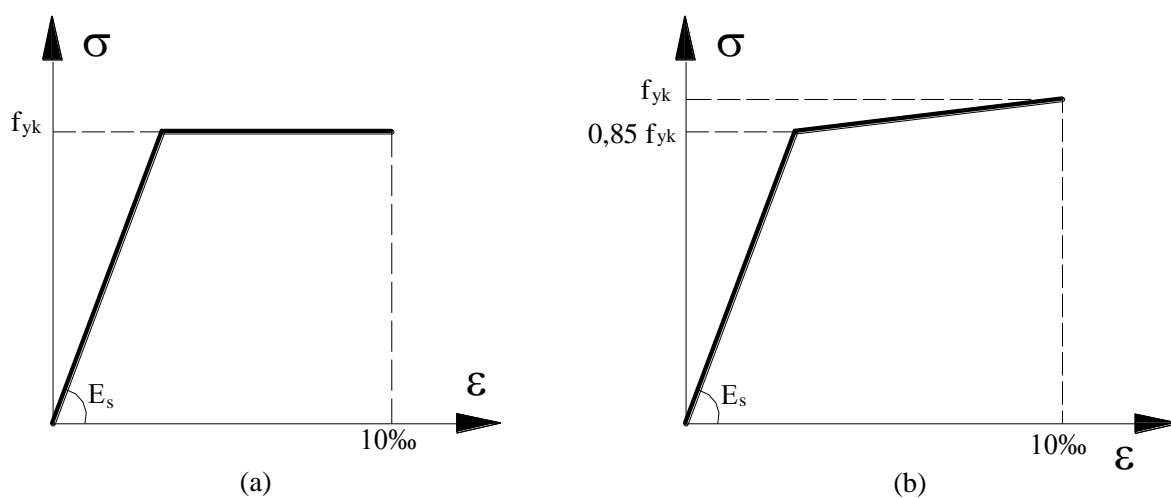


Figura 7.6 – (a) Modelo elastoplástico perfeito e (b) Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas

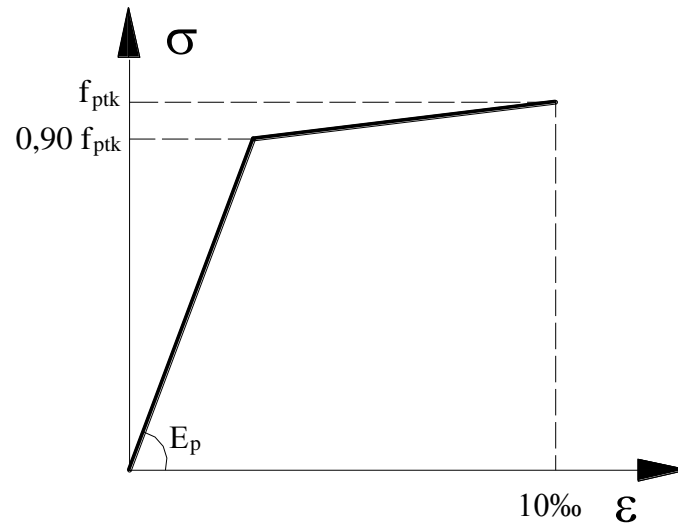


Figura 7.7 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas

O parâmetro de endurecimento, tanto para armaduras passiva quanto para ativas, é definido pela equação abaixo:

$$H_s = \frac{0,15 f_y}{10^0 /_{00} - \frac{f_y}{E_s}} \quad (7.38)$$

## 7.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA OS MATERIAIS

### 7.4.1 Introdução

O comportamento do concreto, dependente da variação do tempo, tem uma considerável importância na análise estrutural. O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre deformações instantâneas e não instantâneas. As instantâneas são simultâneas às tensões que as provocaram e não variam ao longo do tempo, correspondendo ao comportamento elástico do material. Já as deformações não instantâneas aparecem com o passar do tempo e correspondem ao comportamento viscoso do material. Dentre as deformações



diferidas, a fluência é o acréscimo contínuo das deformações que ocorre mesmo para uma tensão constante e a retração é a redução de volume do material independente do estado de tensão.

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento viscoelástico do concreto, foi uma cadeia de elementos Maxwell. Esta cadeia é constituída por uma associação em paralelo de elementos formados por uma mola (modelo elástico) em série com um amortecedor (modelo viscoso), conforme ilustra a Fig. 7.8. Neste trabalho, utilizou-se o modelo das camadas superpostas, como sugerido por Fairbairn, Longo e Zheng (1987). O modelo supõe que o sólido analisado é composto por cinco camadas, superpostas entre si, sendo que cada camada possui propriedades mecânicas diferentes (Fig. 7.9) As camadas sofrem a mesma deformação total produzindo um campo de tensão diferente, que contribui para o campo de tensão total, conforme a sua espessura  $e_i$ .

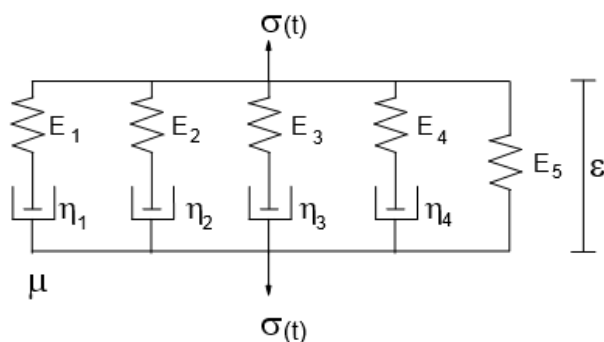


Figura 7.8 - Modelo de cadeias de Maxwell

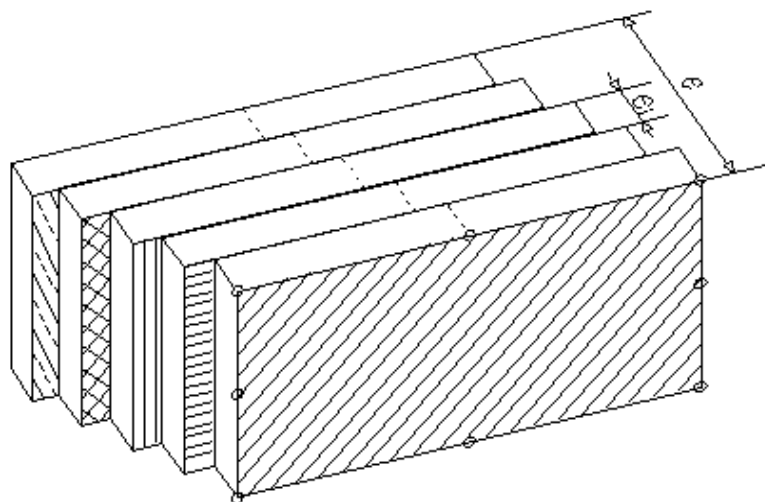


Figura 7.9 - Modelo das camadas superpostas

As unidades  $\mu$  da cadeia são compostas por molas elásticas, de módulo de elasticidade  $E_\mu(t)$ , dependente da idade  $t$  do material, e amortecedores viscosos, com coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu(t)$ . Este modelo pode ser obtido, partindo do modelo elasto-viscoplástico básico, considerando os elementos de atrito com tensão de plastificação nula. A formulação utilizada para determinar os valores dos parâmetros,  $E_\mu(t)$  e  $\eta_\mu(t)$ , para cada tempo  $t$ , é a desenvolvida por Bazant e Wu (1974). A formulação matemática do modelo de Maxwell e a determinação dos parâmetros da função de fluência e retração, pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), estão apresentados no trabalho de Jost (2006).

Para a armadura passiva considera-se, nesta etapa, que o aço tem um comportamento elástico. Já a armadura ativa sofre um processo de perda de tensão por efeito de relaxação. Para representar este comportamento, utilizou-se o mesmo modelo adotado para o efeito de fluência no concreto, mostrado na Fig. 7.9, calibrado conforme apresentado no trabalho de Jost (2006).

## 8 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos através do programa computacional, testando a adequação do modelo numérico desenvolvido. Foram testadas vigas monolíticas e segmentadas, em concreto armado e protendido, analisando o comportamento desse tipo de estrutura e comparando com valores experimentais encontrados na bibliografia.

Em todas as análises foram utilizados elementos finitos de 20 nós com 15 pontos de integração e malhas de elementos finitos de acordo com as dimensões das peças. O coeficiente de Poisson utilizado tem valor fixo 0,2 e os efeitos de fluência e retração do concreto são considerados a partir do sétimo dia após a concretagem da peça, sendo que a temperatura adotada para o ambiente foi de 20°C e a umidade relativa do ar de 80%.

O programa computacional foi desenvolvido com uma entrada dos dados geométricos, propriedades dos materiais, carregamentos, vinculações através do programa para pré-processamento (*GiD® 7.2*), implementada neste trabalho. Através dessa ferramenta, pode-se desenhar a geometria da viga a ser analisada, gerar a malha de elementos finitos, definir as condições de contorno e as propriedades do concreto e das armaduras passivas e ativas e gerar um arquivo com o formato desejado para rodar no programa. Também foi desenvolvida um pós-processamento, com visualização gráfica no programa *GiD® 7.2*. A entrada de dados e saída de resultados, implementadas neste trabalho, são abordadas no Apêndice A.

### 8.1 ANÁLISE DE VIGAS MONOLÍTICAS DE CONCRETO ARMADO

Quatro séries de vigas monolíticas foram ensaiadas até a ruptura por Bresler e Scordelis (1963). Cada série possuía três vigas com seção transversal retangular, que podem ser observadas na Fig. 8.2. A diferença entre cada série está nas dimensões da seção transversal, comprimento do vão, quantidade de armadura transversal e longitudinal e propriedades dos materiais utilizados. Nas Tab. 8.1 e 8.2 são apresentados o resumo do programa de ensaio das vigas e as propriedades dos materiais utilizados. Esses resultados

são comparados, neste item, com os resultados do modelo computacional. Todas as vigas foram submetidas a cargas concentradas aplicadas na posição central (Fig 8.1).

Tabela 8.1 – Resumo do programa de ensaio das vigas de Bresler e Scordelis (1963)

<i>Viga</i>	<i>b (cm)</i>	<i>h (cm)</i>	<i>d (cm)</i>	<i>L (cm)</i>	<i>As</i>	<i>As'</i>	<i>Estribos</i>
<b>OA-1</b>	31,0	55,6	46,1	366	4 N <sup>o</sup> 9	-	-
<b>OA-2</b>	30,5	56,1	46,6	457	5 N <sup>o</sup> 9	-	-
<b>OA-3</b>	30,7	55,6	46,2	640	6 N <sup>o</sup> 9	-	-
<b>A-1</b>	30,7	56,1	46,6	366	4 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm
<b>A-2</b>	30,5	55,9	46,4	457	5 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm
<b>A-3</b>	30,7	56,1	46,6	640	6 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm
<b>B-1</b>	23,1	55,6	46,1	366	4 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 19cm
<b>B-2</b>	22,9	56,1	46,6	457	4 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 19cm
<b>B-3</b>	22,9	55,6	46,1	640	5 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 19cm
<b>C-1</b>	15,5	55,9	46,4	366	2 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm
<b>C-2</b>	15,2	55,9	46,4	457	4 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm
<b>C-3</b>	15,5	55,4	45,9	640	4 N <sup>o</sup> 9	2 N <sup>o</sup> 4	N <sup>o</sup> 2 c / 21cm

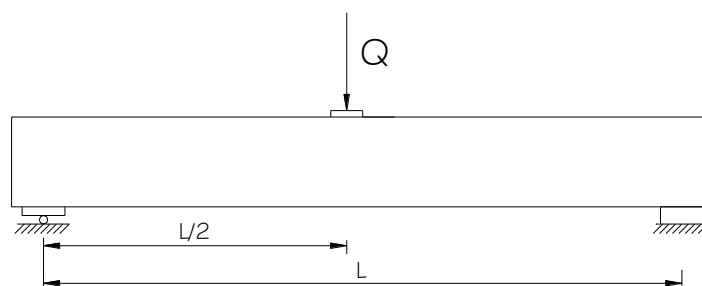


Figura 8.1 - Detalhamento das vigas de Bresler e Scordelis (1963)

Tabela 8.2 – Propriedades dos materiais nos ensaios de Bresler e Scordelis (1963)

<b>CONCRETO</b>			
<b>Viga</b>	$f_c$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_r$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_t$ (kN/cm <sup>2</sup> )
<b>OA-1</b>	2,25	0,396	0,264
<b>OA-2</b>	2,37	0,434	0,289
<b>OA-3</b>	3,76	0,414	0,276
<b>A-1</b>	2,41	0,385	0,257
<b>A-2</b>	2,43	0,372	0,248
<b>A-3</b>	3,50	0,434	0,289
<b>B-1</b>	2,48	0,399	0,266
<b>B-2</b>	2,32	0,376	0,251
<b>B-3</b>	3,87	0,421	0,281
<b>C-1</b>	2,96	0,422	0,281

<b>C-2</b>	2,38	0,393	0,262
<b>C-3</b>	3,50	0,385	0,257
<b>ARMADURA</b>			
<b>Barra</b>	$\phi$ (cm)	$f_y$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$ (kN/cm <sup>2</sup> )
<b>Nº 2</b>	0,64	32,5	18961,3
<b>Nº 4</b>	1,27	34,5	20133,4
<b>Nº 9 – Séries 1 e 2</b>	2,87	55,5	21788,2
<b>Nº 9 – Séries 3</b>	2,87	55,2	20547,1

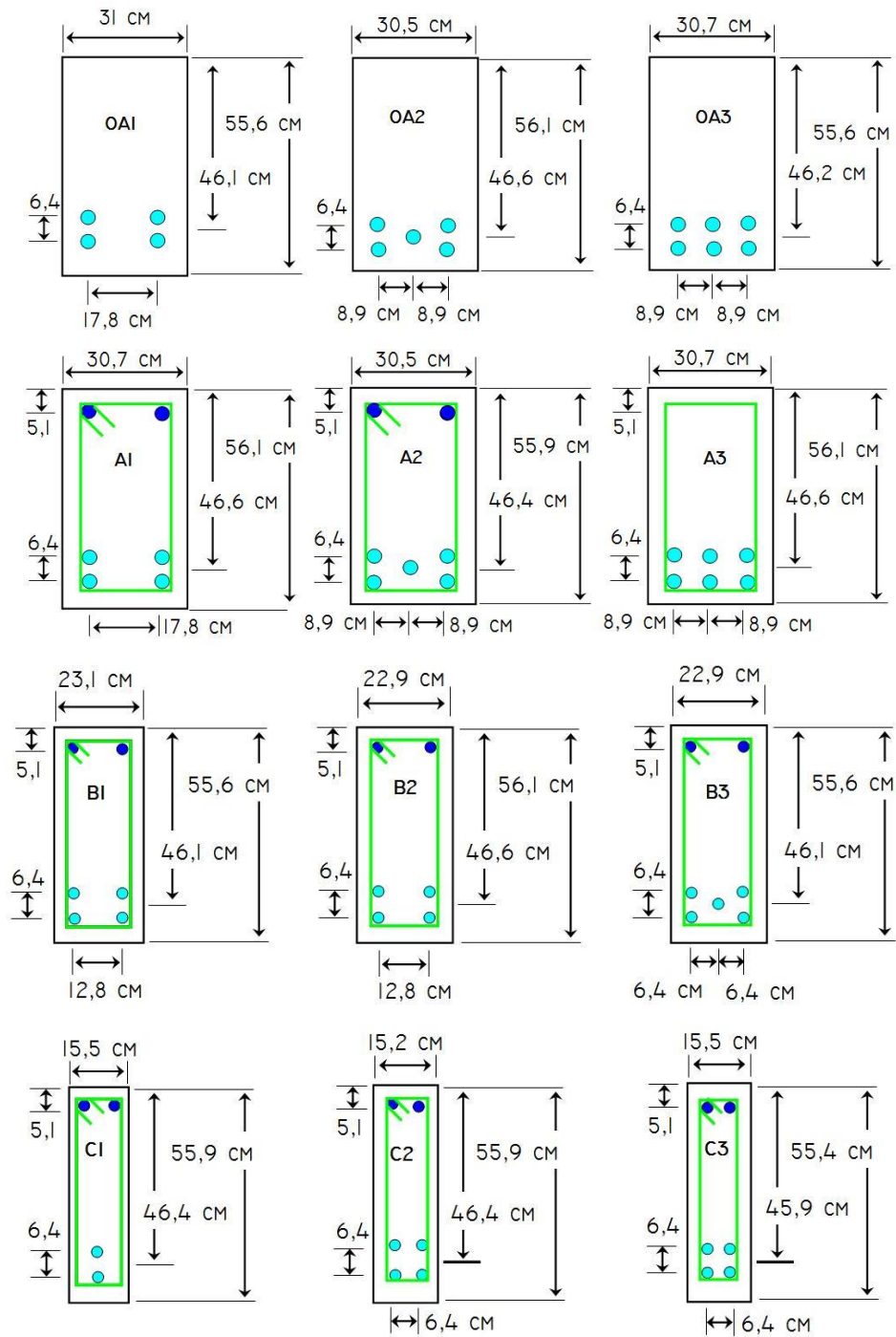


Figura 8.2 – Seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963)

A Fig. 8.3 mostra a discretização da malha de elementos finitos utilizada nas análises.

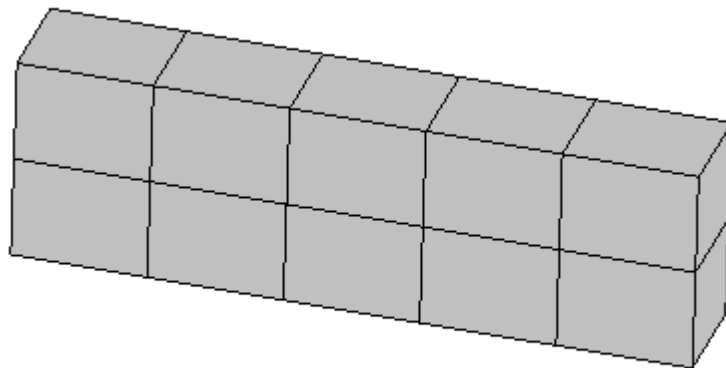


Figura 8.3 – Malha de elementos de concreto para as vigas

As Figs 8.4, 8.5 e 8.6 apresentam os resultados comparativos experimentais e numéricos para o deslocamento no meio do vão das três séries ensaiadas.

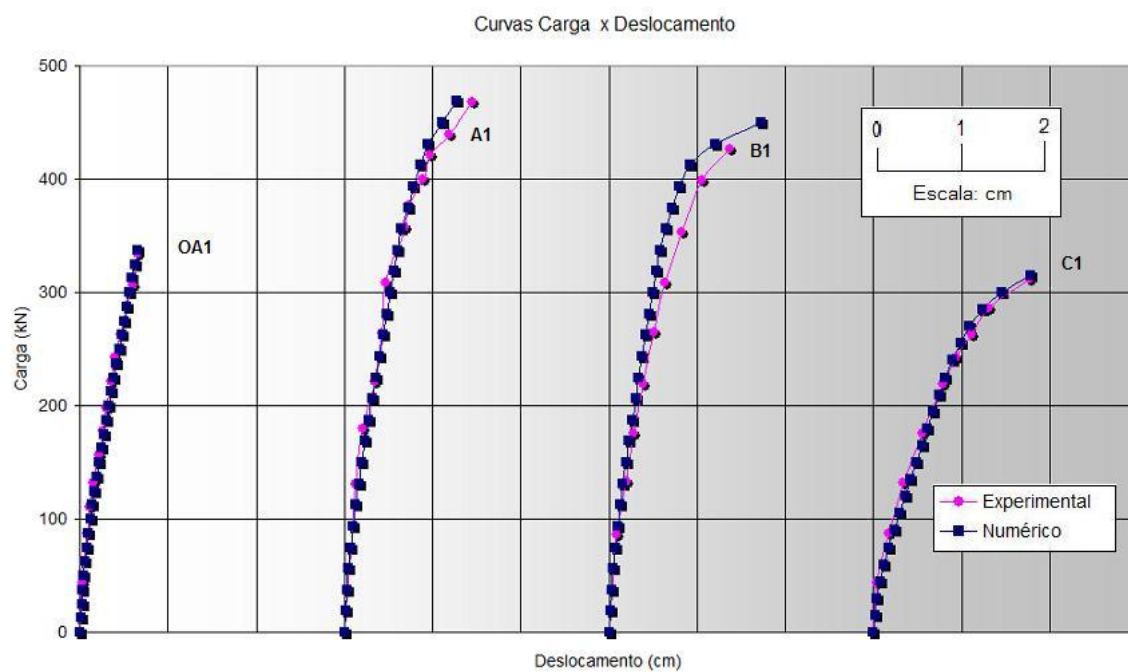


Figura 8.4 – Resultados comparativos da série 1 de vigas de Bresler e Scordelis (1963)

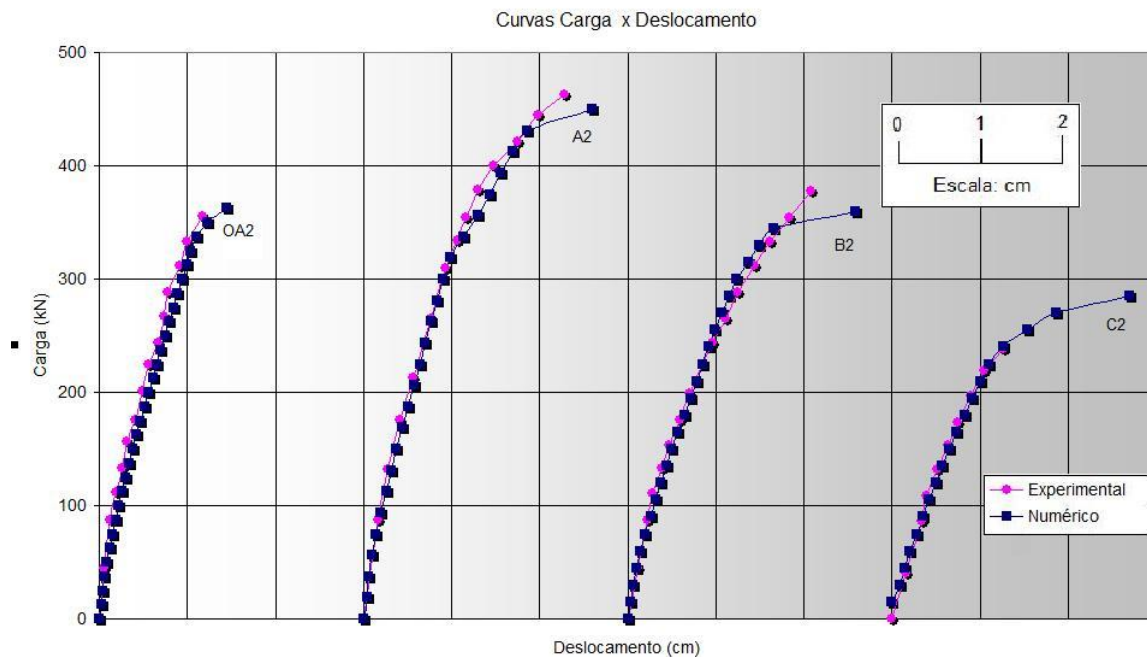


Figura 8.5 – Resultados comparativos da série 2 de vigas de Bresler e Scordelis (1963)

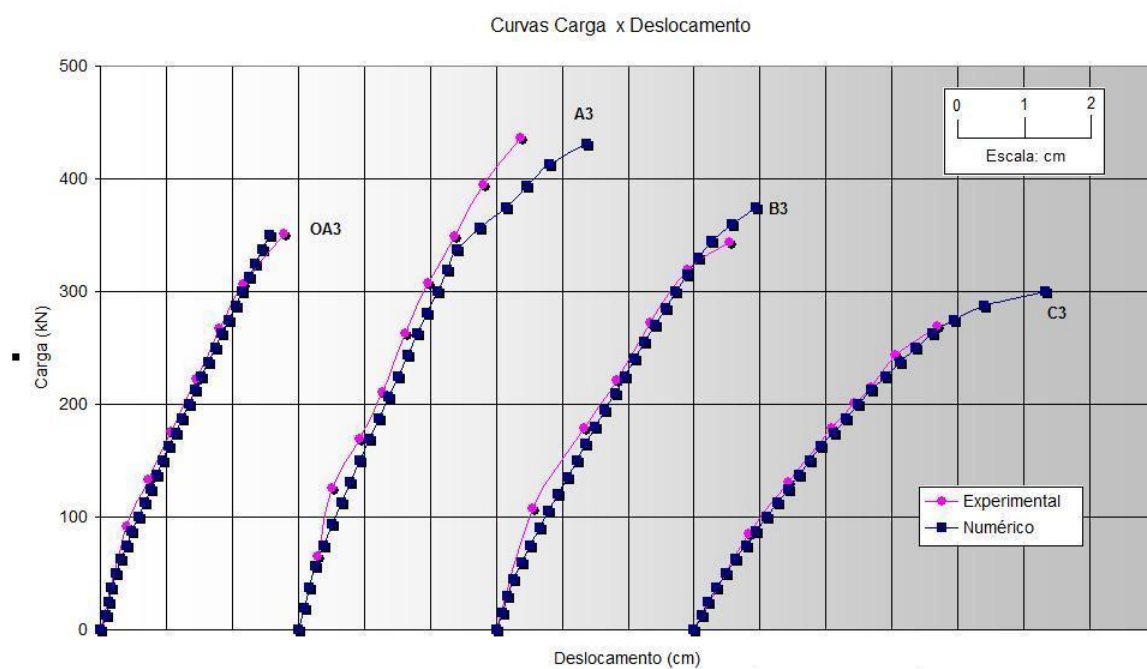


Figura 8.6 – Resultados comparativos da série 3 de vigas de Bresler e Scordelis (1963)

## 8.2 ANÁLISE DE VIGAS T MONOLÍTICAS COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS

A viga monolítica a seguir foi ensaiada por Tan e Ng (1997) e levada à ruptura em laboratório. Esses resultados são comparados, neste item, com os resultados do modelo computacional.

A viga possui uma seção T, um vão de 3 metros de comprimento e armadura de protensão externa. A resistência média do concreto à compressão foi de 34,6 MPa.

A armadura de protensão é constituída por uma cordoalha de sete fios, com diâmetro nominal de 9,5mm e tensão de ruptura de  $f_{ptk}$  de 1900 MPa. Ela é ancorada em blocos de concreto e está localizada a uma altura útil de 20 cm. A viga analisada não possui desviador. Seu módulo de elasticidade de 193 GPa e a tensão de protensão aplicada foi de 1297 MPa, no dia anterior à viga ser testada.

A armadura longitudinal interna é composta por quatro barras de 8 mm de diâmetro e tensão de escoamento  $f_y$  de 338 MPa, localizadas na mesa e duas barras de diâmetro de 16 mm e tensão de escoamento  $f_y$  de 530 MPa, localizadas na parte inferior da alma.

A armadura transversal é composta por estribos verticais com diâmetro de 6 mm e tensão de plastificação de 300 MPa, dispostas ao longo de todo o comprimento da viga e espaçadas a 5 cm. O módulo de elasticidade longitudinal, para todas as barras de armadura, tem o valor de 210 GPa.

As Fig. 8.7 e 8.8 mostram o detalhamento da seção de concreto e as posições das armaduras. A discretização da malha de elementos finitos e o posicionamento das armaduras são mostrados nas Fig. 8.9 e 8.10, respectivamente. Por ser simétrica, apenas metade da viga foi modelada.



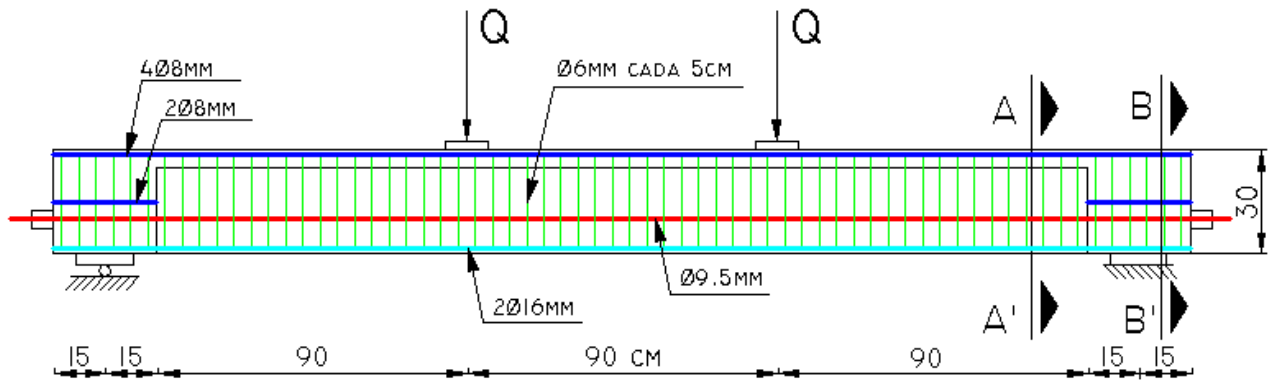


Figura 8.7 - Detalhamento da viga de Tan e Ng (1997)

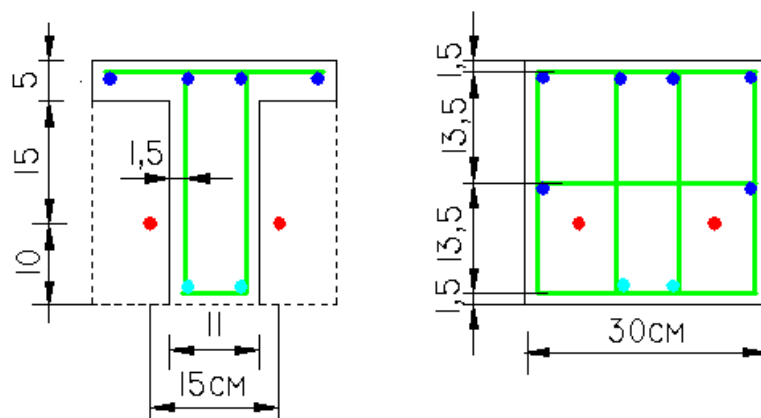


Figura 8.8 - Cortes AA' e BB' das seções da viga.

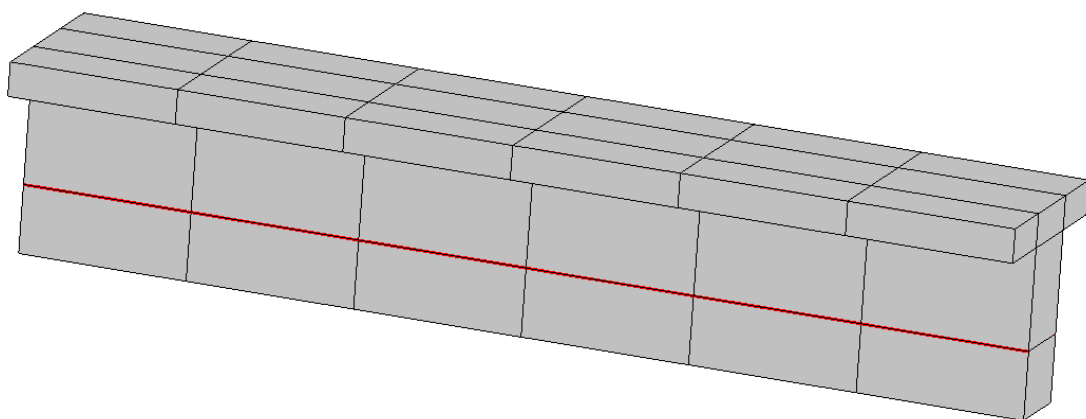


Figura 8.9 - Malha de elementos de concreto e armadura ativa para a viga.

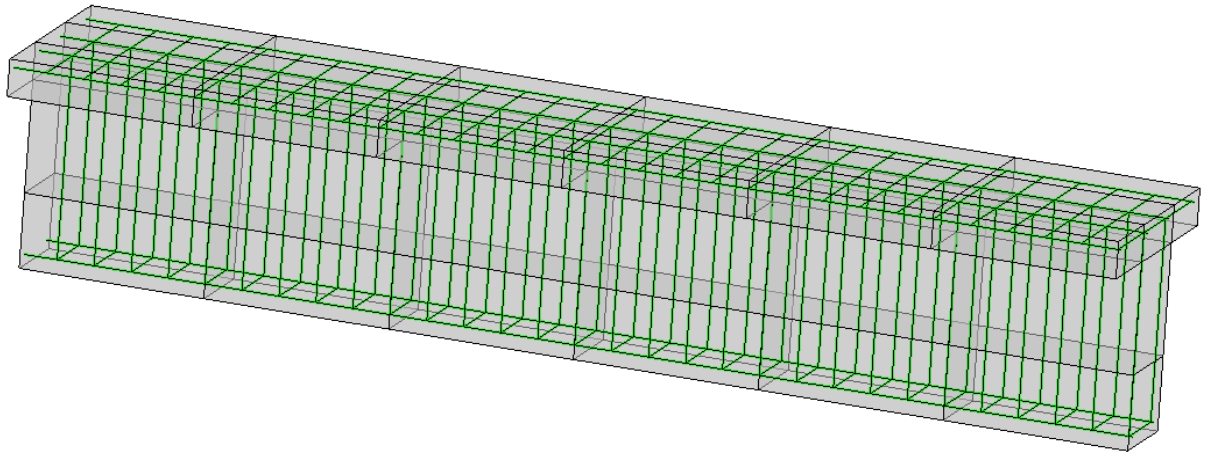


Figura 8.10 - Malha dos elementos da armadura passiva para a viga.

As Fig. 8.11 e 8.12 mostram, respectivamente, a evolução da flecha e a tensão na armadura protendida ao longo do carregamento, para a viga analisada. Verifica-se uma boa aproximação em relação ao ensaio experimental.

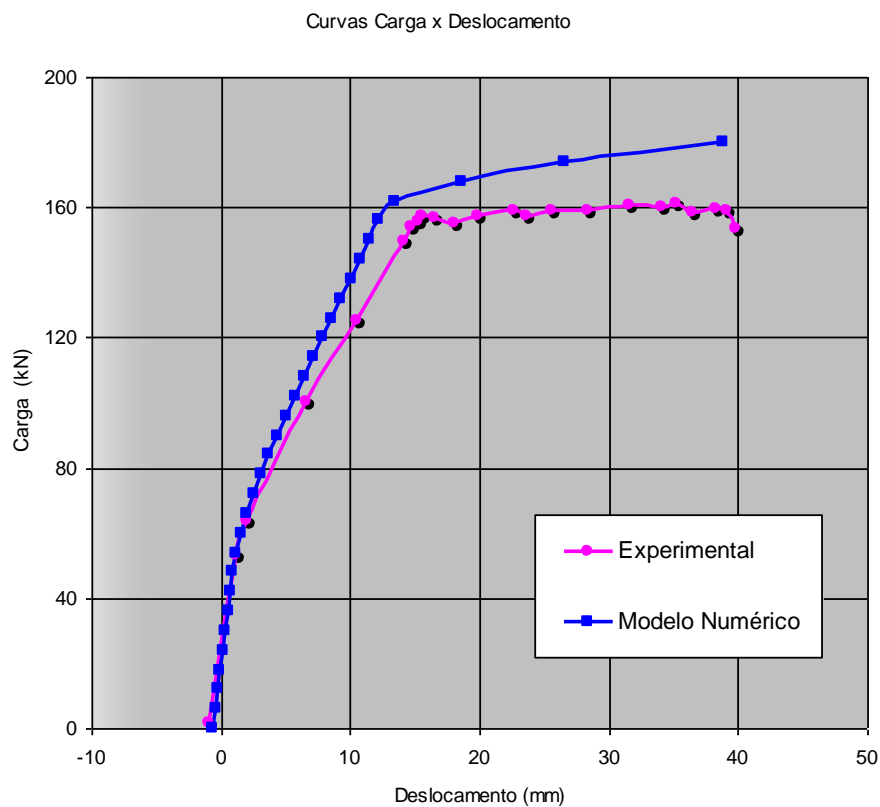


Figura 8.11 - Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga.

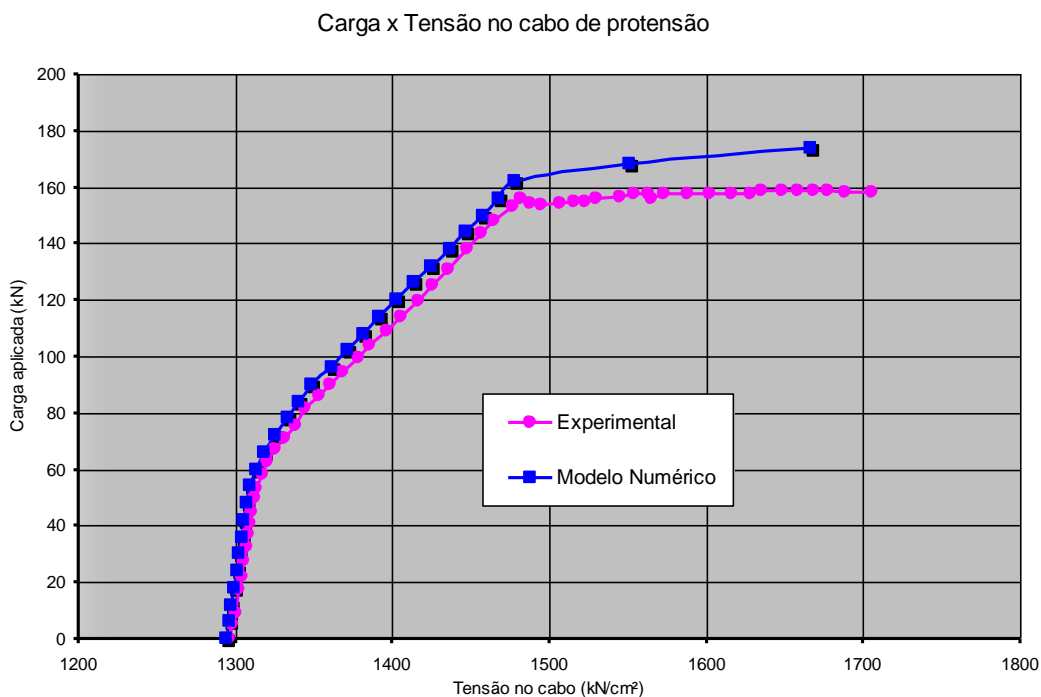


Figura 8.12 - Carga x tensão no cabo de protensão.

A viga monolítica a seguir foi ensaiada até a ruptura por Tan e Ng (1998) no modelo experimental. A viga possui uma seção T, um vão de 1,8 metros de comprimento e armadura de protensão externa. A resistência média do concreto à compressão foi de 29,9 MPa.

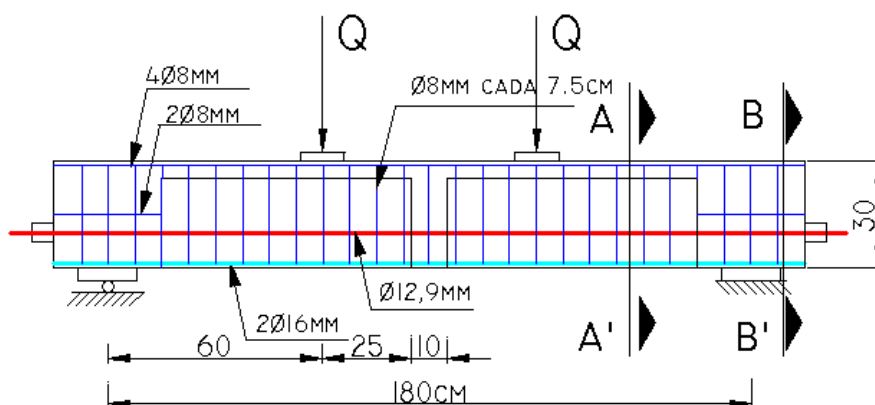


Figura 8.13 - Detalhamento da viga de Tan e Ng (1998)

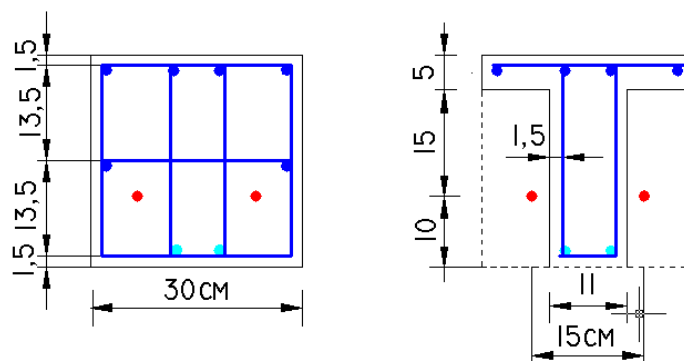


Figura 8.14 - Cortes AA' e BB' das seções da viga.

A armadura de protensão é constituída por uma cordoalha de sete fios, com diâmetro nominal de 12,9mm e tensão de ruptura de  $f_{ptk}$  de 1900 MPa. Ela é ancorada em blocos de concreto e está localizada a uma altura útil de 20 cm. A viga analisada possui desviador. Seu módulo de elasticidade de 199 GPa e a tensão de protensão aplicada foi de 771 MPa, no dia anterior à viga ser testada.

A armadura longitudinal interna é composta por quatro barras de 8 mm de diâmetro e tensão de escoamento  $f_y$  de 338 MPa, localizadas na mesa e duas barras de diâmetro de 16 mm e tensão de escoamento  $f_y$  de 530 MPa, localizadas na parte inferior da alma.

A armadura transversal é composta por estribos verticais com diâmetro de 8 mm, dispostas ao longo de todo o comprimento da viga e espaçadas a 7,5 cm. O módulo de elasticidade longitudinal, para todas as barras de armadura passiva, tem o valor de 210 GPa.

As Fig. 8.13 e 8.14 mostram o detalhamento da seção de concreto e as posições das armaduras. A discretização da malha de elementos finitos e o posicionamento das armaduras são mostrados nas Fig. 8.15 e 8.16, respectivamente. Por ser simétrica, apenas metade da viga foi modelada, sendo que todo o comprimento da viga foi representado.

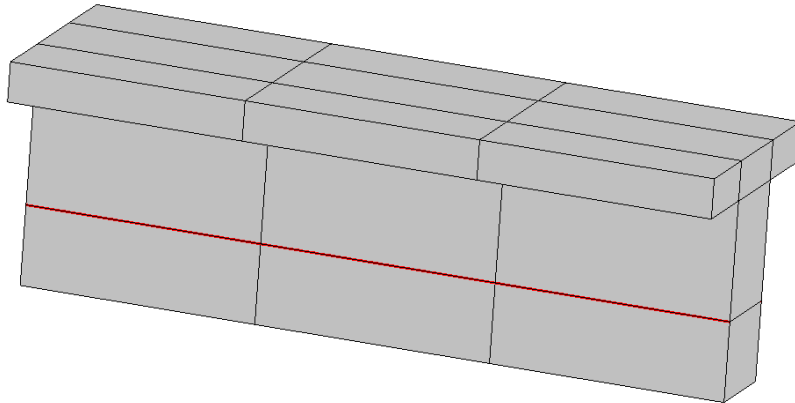


Figura 8.15 - Malha de elementos de concreto e armadura ativa para a viga com cabo de protensão.

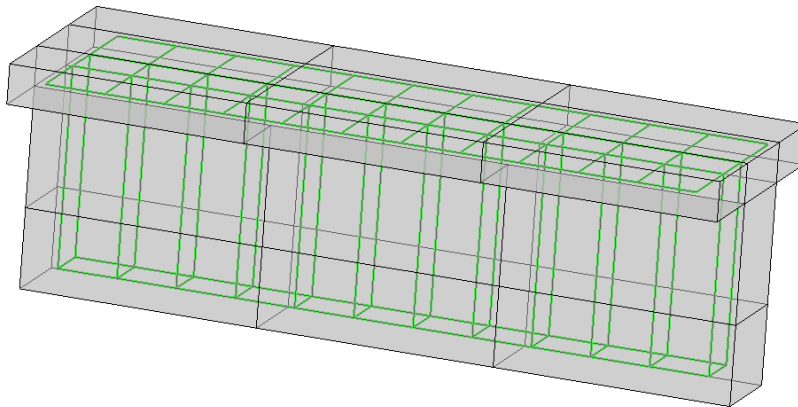


Figura 8.16 - Malha dos elementos de armadura passiva para a viga.

As Fig. 8.17, 8.18 e 8.19 mostram, respectivamente, a evolução da flecha e a tensão na armadura ativa e passiva ao longo do carregamento, para a viga analisada. Verifica-se uma boa aproximação em relação ao ensaio experimental.

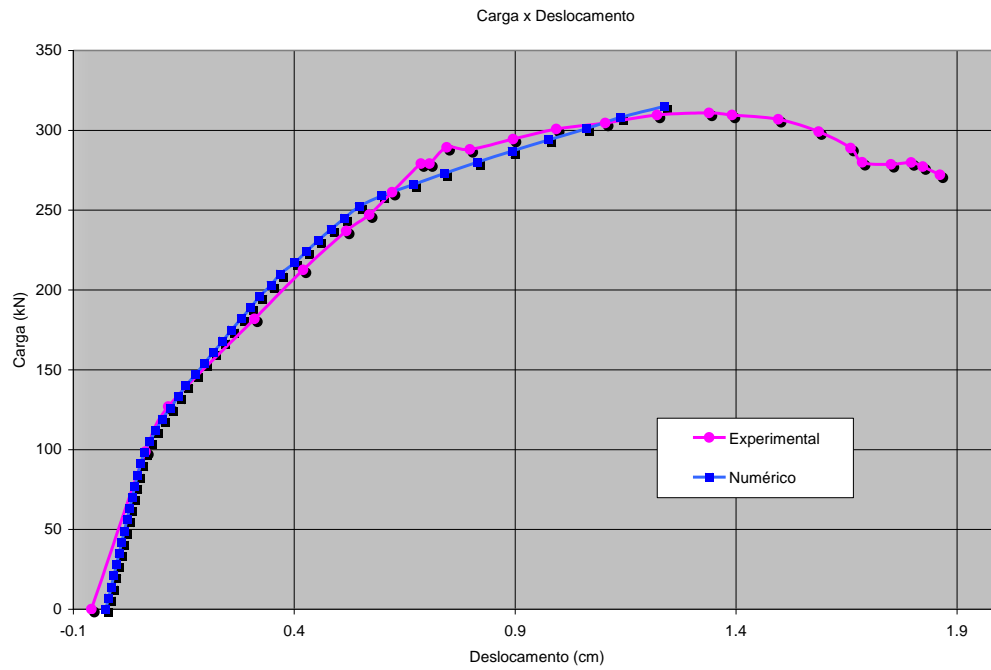


Figura 8.17 - Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga.

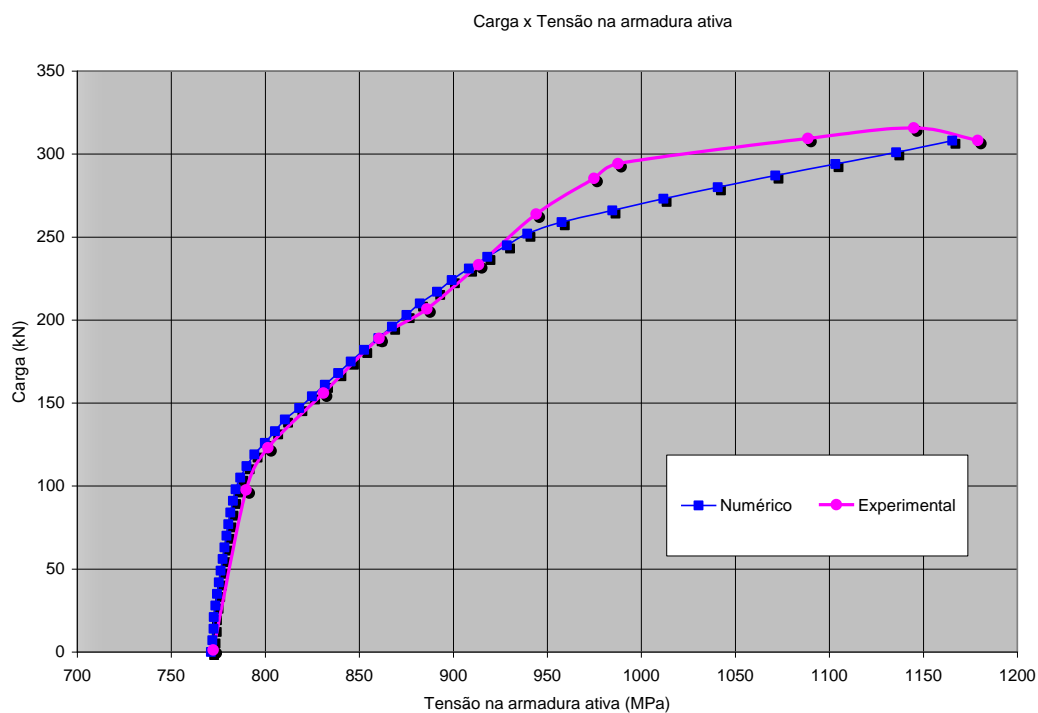


Figura 8.18 - Carga x tensão na armadura ativa

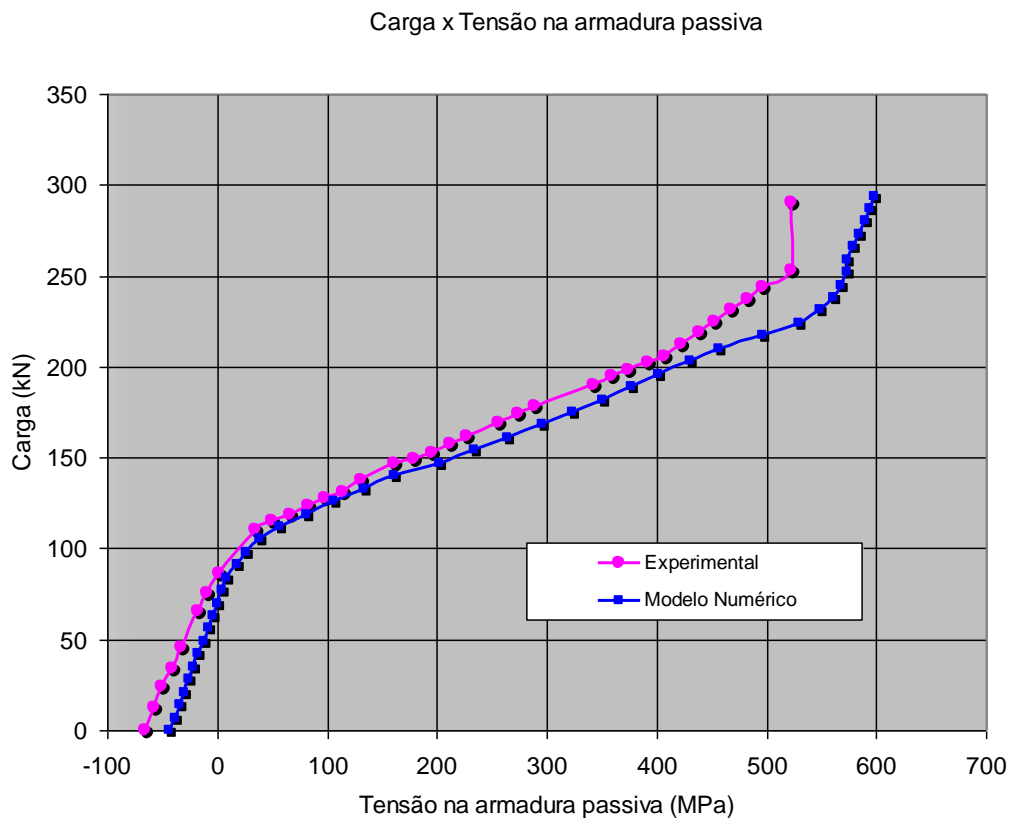


Figura 8.19 - Carga x tensão na armadura passiva

### 8.3 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO SEGMENTADA COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS

Esta viga foi ensaiada por Aparício et al. (2002) e possuía sete segmentos de concreto e protensão externa com seção transversal caixão e resistência à compressão do concreto em torno de 45 MPa (Fig. 8.21). A armadura protendida, de aço CP-190 RB, é constituída de quatro cordoalhas, com fios de diâmetro 1,52 cm, cuja posição é mostrada na figura 8.20. A tensão inicial de protensão no aço é  $\sigma_{p0} = 876$  MPa. O módulo de elasticidade do aço é 195.000 MPa, e seu limite de resistência à tração ( $f_{ptk}$ ) é de 1.900 MPa.

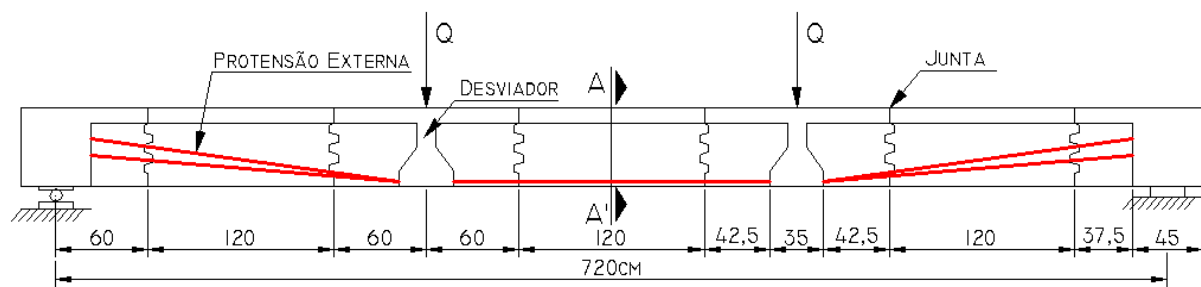


Figura 8.20 – Características geométricas da seção da viga

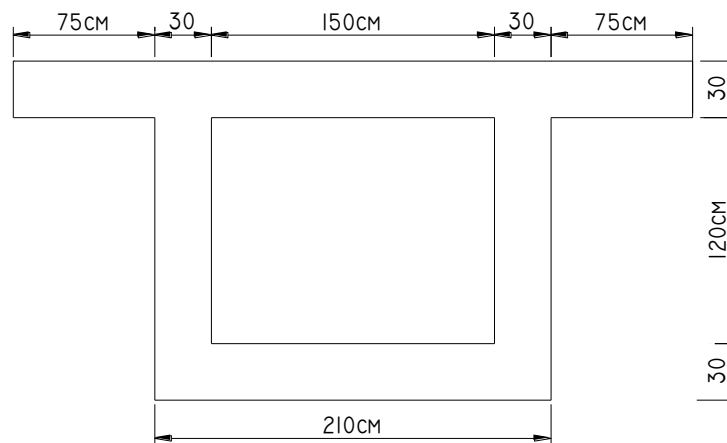


Figura 8.21 – Corte AA'

Na análise através do método dos elementos finitos, foi empregada a malha apresentada na Fig. 8.22, discretizando-se apenas metade da viga, dadas às condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento.



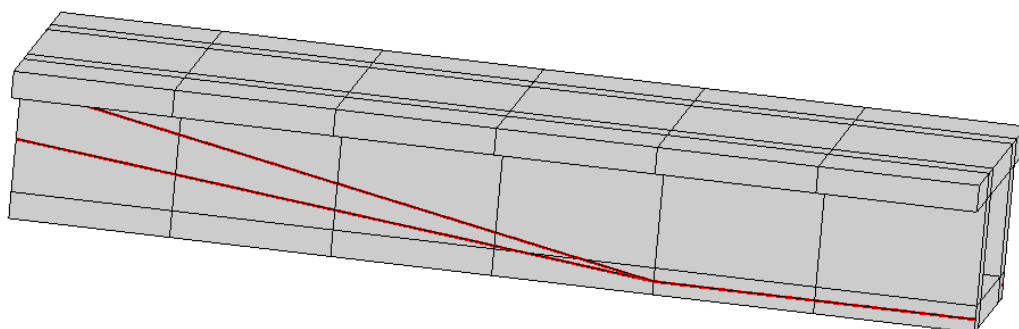


Figura 8.22 – Malha de elementos finitos

Os resultados obtidos pelo modelo computacional serão apresentados graficamente nas figuras abaixo. Nas figuras 8.23 até 8.28 são mostradas as deformadas das vigas para diferentes níveis de carregamento e tensões atuantes no concreto. Nestas figuras, utilizou-se um fator de amplificação para uma melhor visualização.

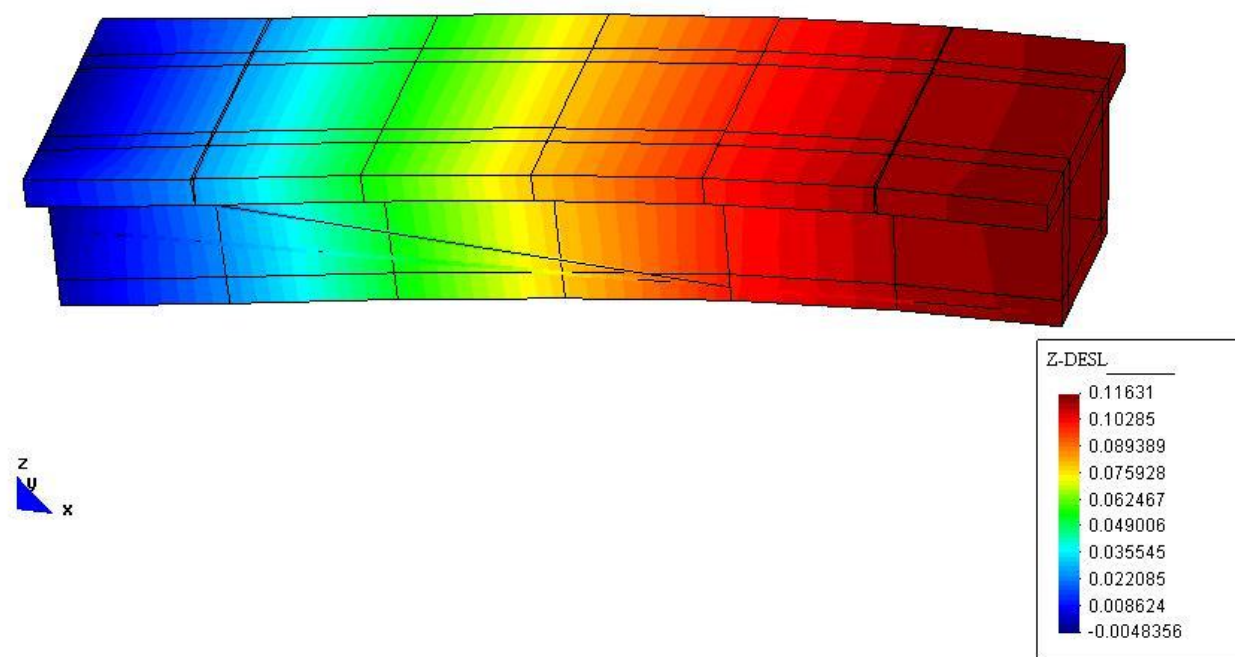


Figura 8.23 – Deformada da viga e deslocamentos na direção z somente atuando o peso próprio e a protensão externa

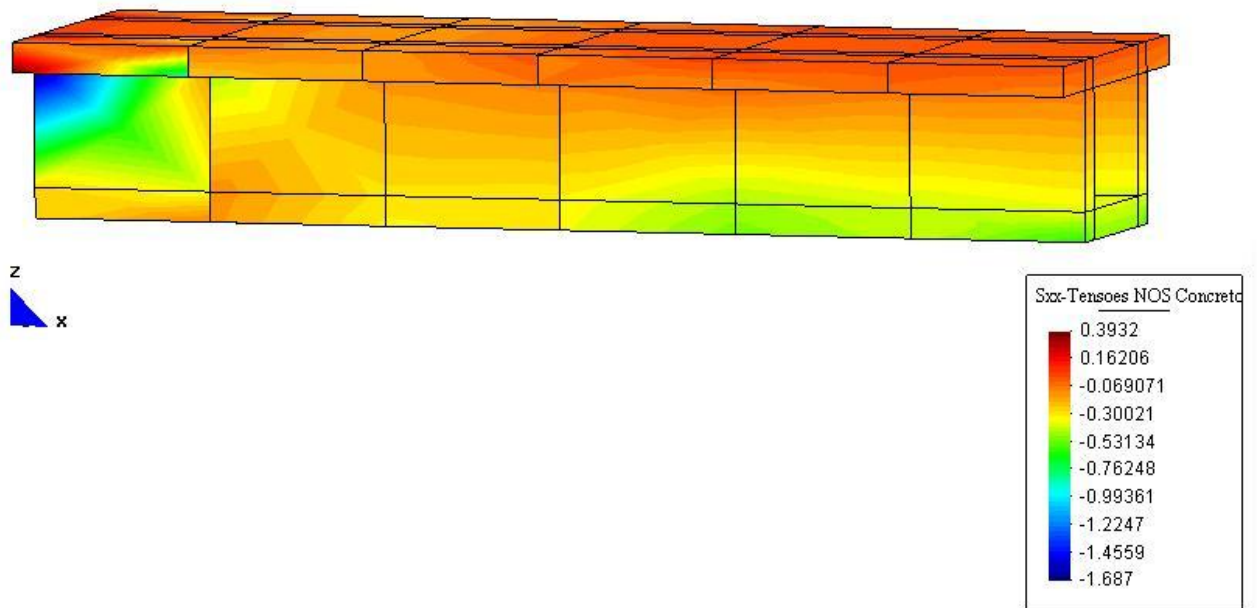


Figura 8.24 – Tensões atuantes no concreto somente atuando o peso próprio e a protensão externa

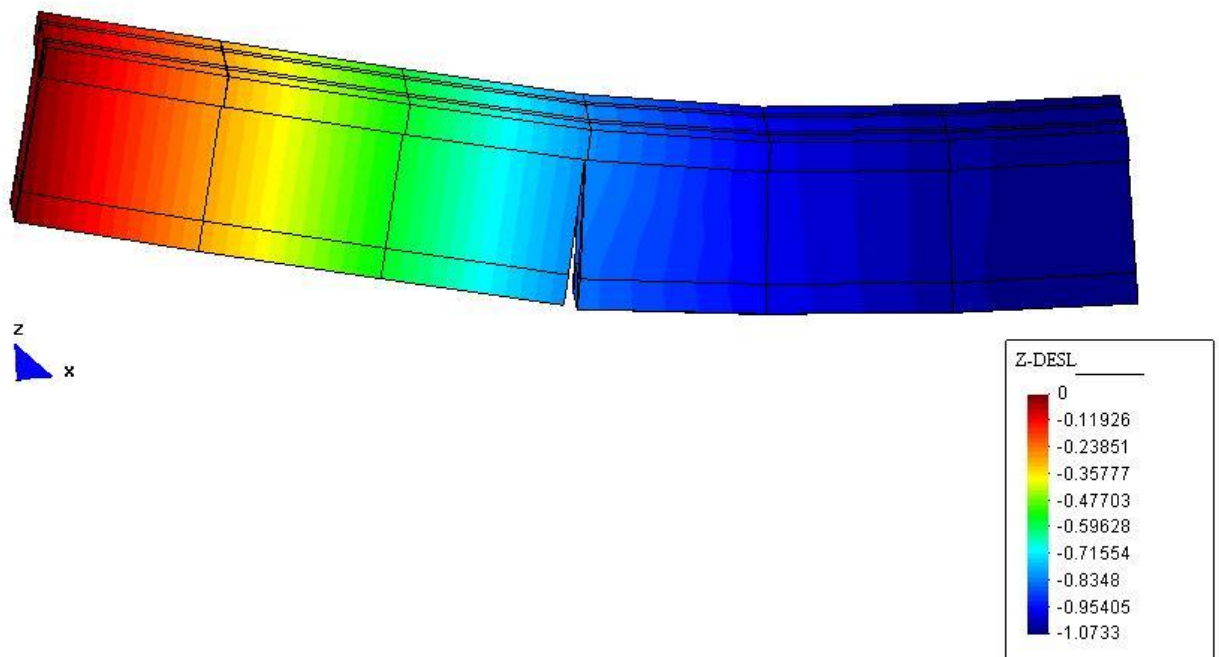


Figura 8.25 – Deformada da viga e deslocamentos na direção z quando a primeira junta se abre com carga 112 kN

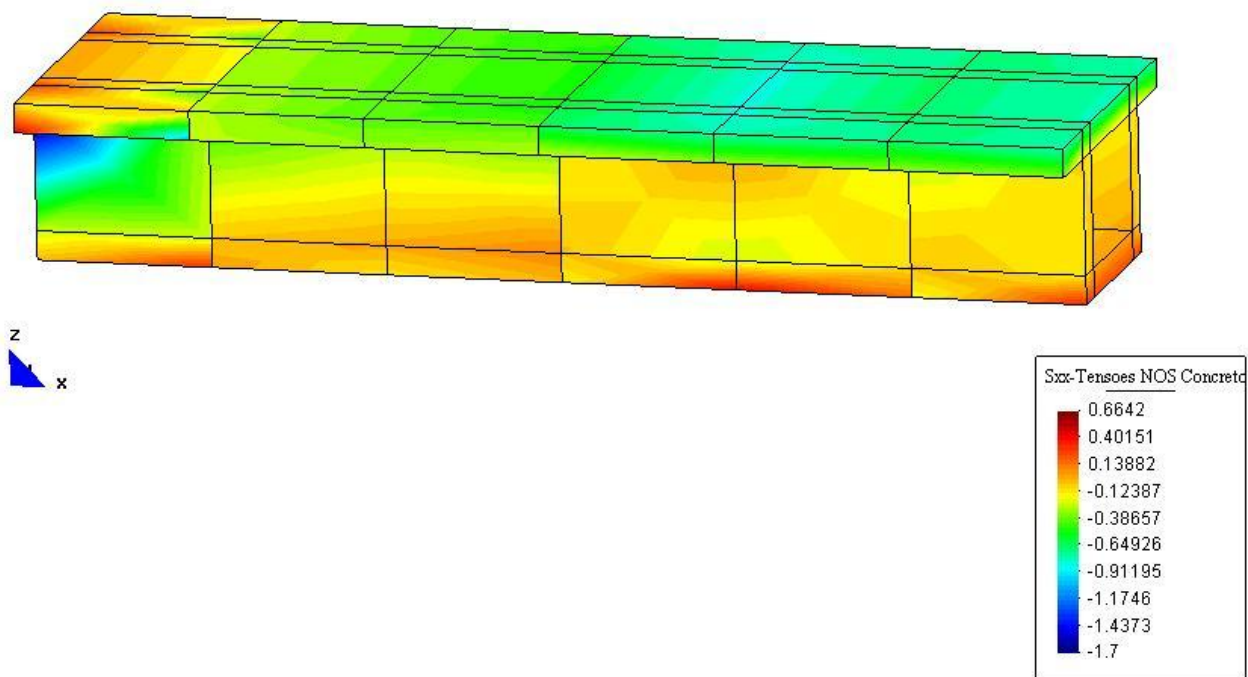


Figura 8.26 – Tensões atuantes no concreto quando a primeira junta se abre com carga 112 kN

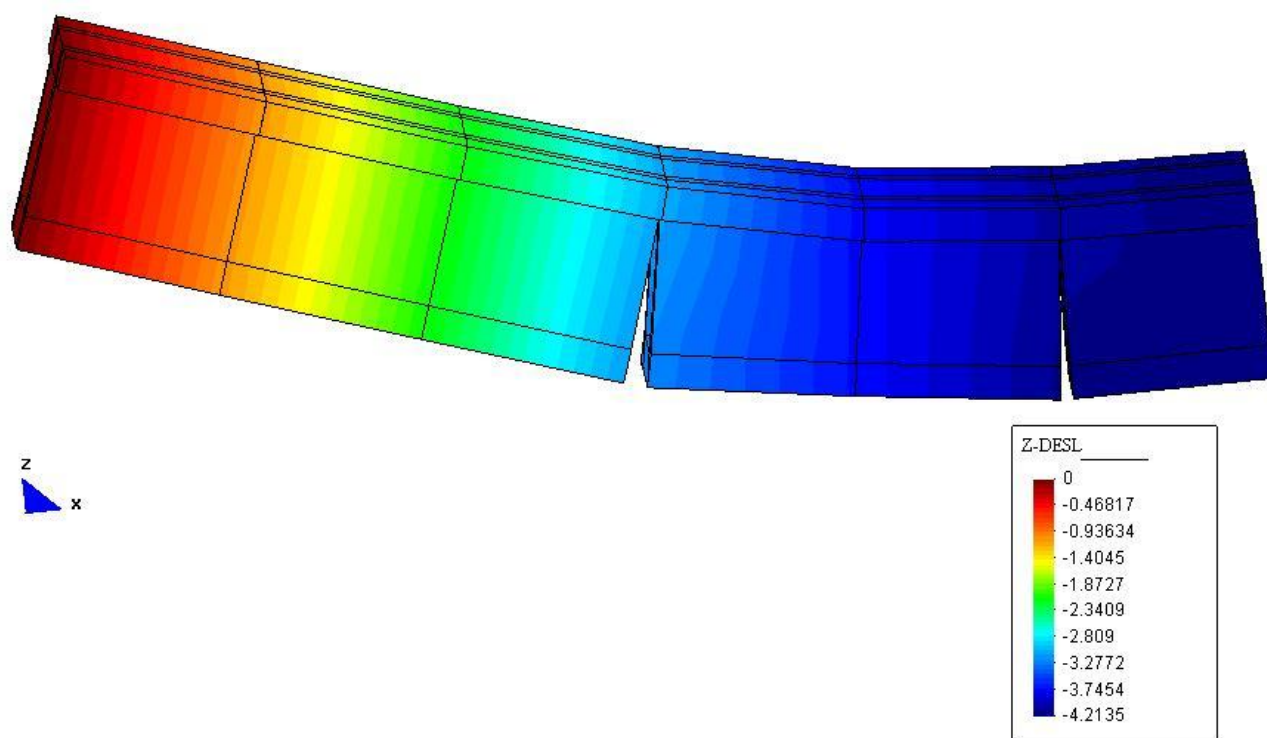


Figura 8.27– Deformada da viga e deslocamentos na direção z quando a segunda junta se abre com carga 160 kN

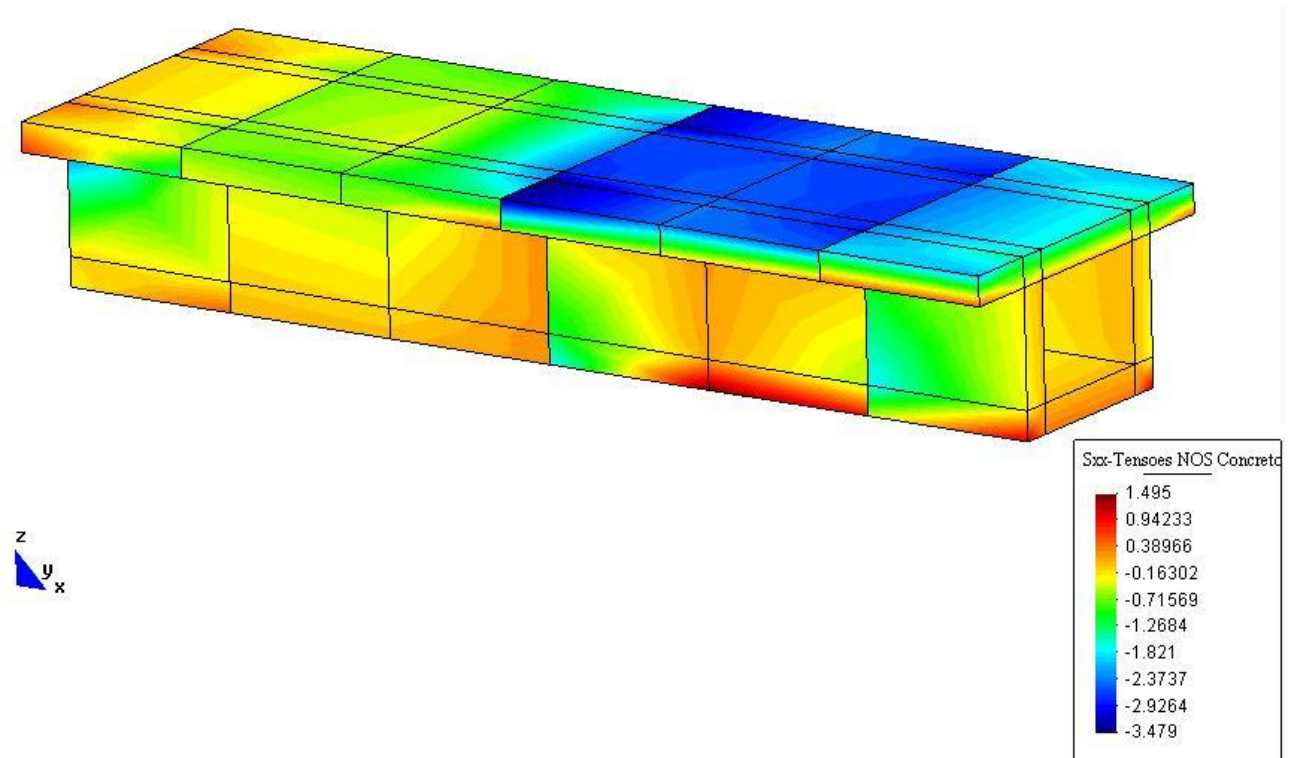


Figura 8.28 – Tensões atuantes no concreto quando a segunda junta se abre com carga 160 kN

A Fig. 8.29 apresenta as curvas carga ( $Q$ ) versus deslocamento no meio do vão para a viga analisada, segundo o modelo computacional proposto, os resultados experimentais e dos modelos numéricos apresentados por Aparicio et al. (2002) considerando ou não deslizamento da armadura de protensão nos desviadores. O modelo computacional proposto não considera o deslizamento.

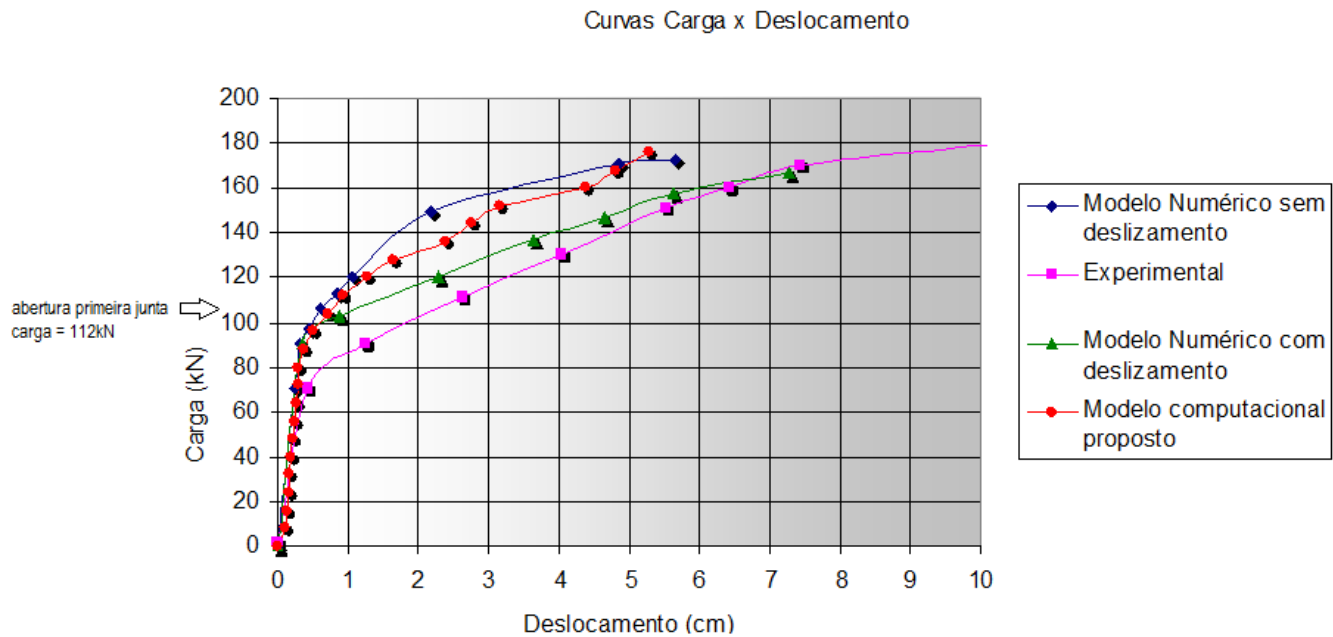


Figura 8.29 – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente.

A Fig. 8.30 apresenta as curvas carga versus tensão nas armaduras de protensão segundo o modelo computacional proposto e os resultados experimentais. As tensões do trecho inclinado apresentadas por Aparicio et al. (2002) referem-se ao lado esquerdo e direito da viga. Como no modelo computacional proposto a viga foi discretizada considerando simetria, apresenta-se uma única curva com os valores de tensão no cabo inclinado.

A abertura da primeira junta ocorre no mesmo nível de carga aplicada 112kN tanto para o modelo computacional proposto quanto para os modelos numéricos apresentados por Aparicio et al. (2002), considerando ou não o deslizamento do cabo de protensão, conforme Fig. 8.29.

Após a abertura da primeira junta os modelos diferem de acordo com a consideração do deslizamento ou não. O modelo que mais se aproxima do resultado experimental é o modelo numérico com deslizamento, o que evidencia a importância desta consideração na análise. Além disso, o modelo computacional proposto se aproxima mais dos resultados experimentais em comparação ao modelo numérico sem deslizamento apresentado por Aparicio et al. (2002).

## Curvas Carga xTensão na armadura

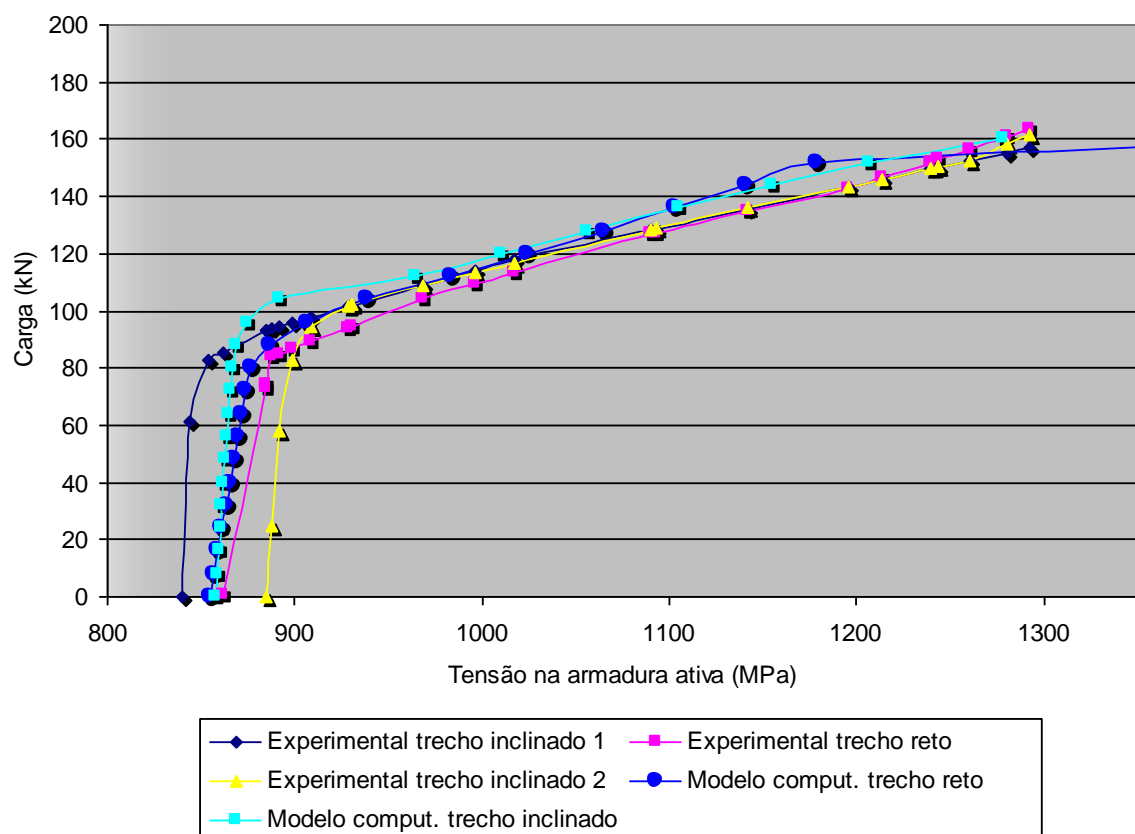


Figura 8.30 – Tensões na armadura de protensão.

## 8.4 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO MONOLÍTICA COM CABOS DE PROTENSÃO EXTERNOS

Um conjunto de onze vigas foram ensaiadas no laboratório do C.E.B.T.P., em Saint-Remy-Lés-Chevreuse na França. Os resultados são apresentados detalhadamente em Fouré et al. (1991). Dentre as vigas ensaiadas, a viga NM9, monolítica e com seção transversal caixa será analisada a seguir (Fig. 8.31). A armadura protendida externamente é mostrada na figura 8.32, com dois cabos constituídos de 6 cordoalhas denominadas T13, com uma área de  $0,93 \text{ cm}^2$ . A tensão inicial de protensão no aço é  $\sigma_{p0} = 1463 \text{ MPa}$ . O módulo de elasticidade do aço é  $197.000 \text{ MPa}$ , e seu limite de resistência à tração ( $f_{ptk}$ ) é de  $1.965 \text{ MPa}$ . A resistência à compressão do concreto é  $46,9 \text{ MPa}$ . A armadura passiva é mostrada na figura 8.33 com diâmetro de  $6 \text{ mm}$ .

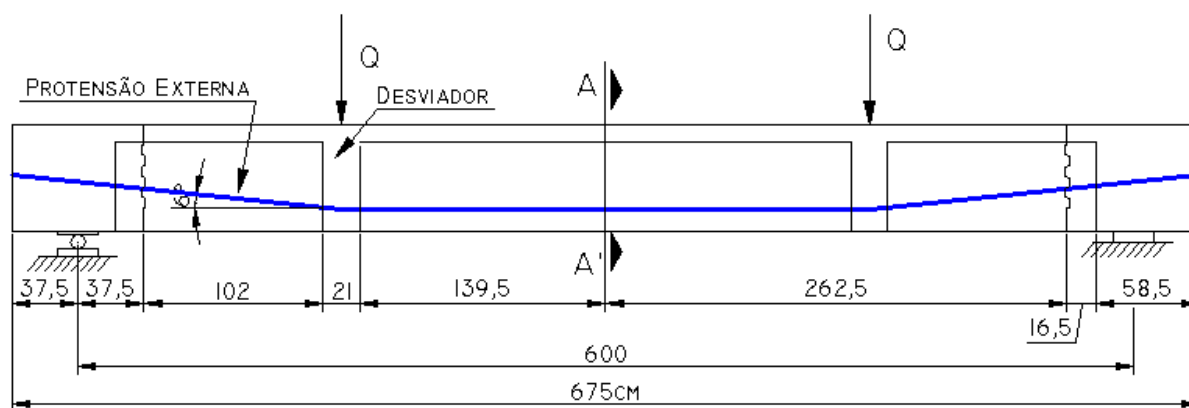


Figura 8.31 – Características geométricas da seção da viga

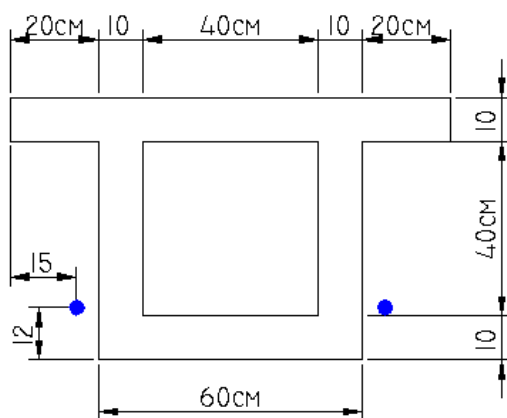


Figura 8.32 – Corte AA'

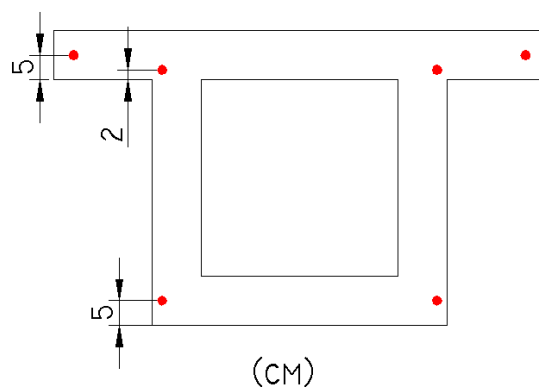


Figura 8.33 – Armadura passiva

Na análise através do método dos elementos finitos, foi empregada a malha apresentada na Fig. 8.34, discretizando-se apenas metade da viga, dadas às condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento.

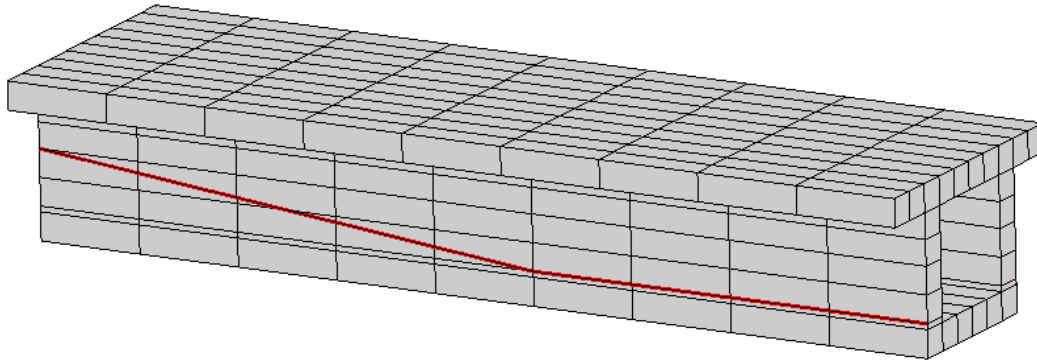


Figura 8.34 – Malha de elementos finitos

A Fig 8.35 apresenta a comparação de resultados experimentais e numéricos para o deslocamento no meio do vão. Observa-se uma ótima compatibilidade dos resultados numéricos e experimentais até a carga 400kN. Acredita-se que após essa carga, ocorre o deslizamento do cabo de protensão e assim, o modelo numérico por não considerar o deslizamento, se mostra mais rígido.



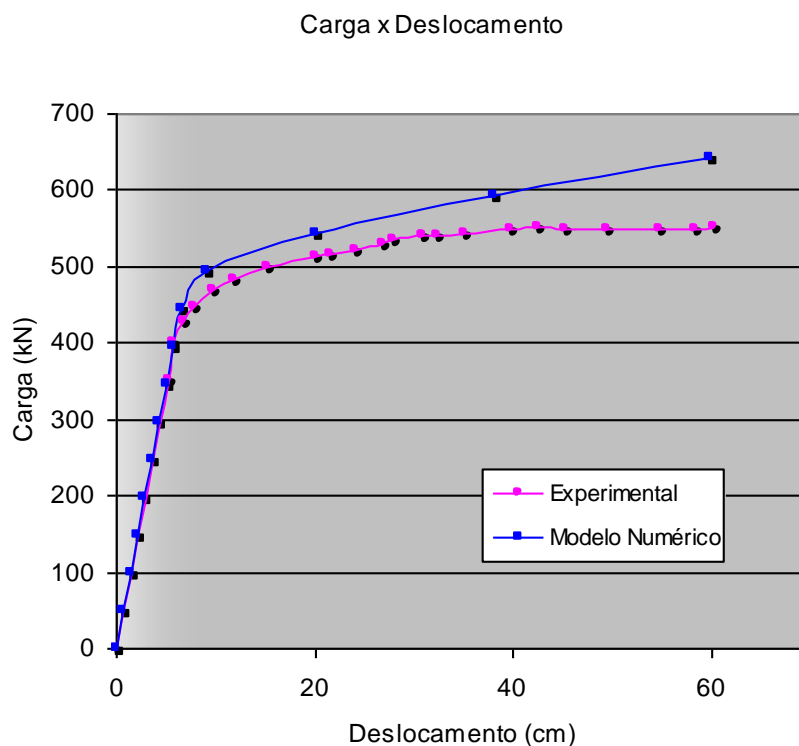


Figura 8.35 – Comparação entre os deslocamentos obtidos pelo modelo computacional e experimentalmente.

## 8.5 ANÁLISE DE VIGA DE SEÇÃO CAIXÃO SEGMENTADA COM CABOS DE PROTENSÃO INTERNOS E EXTERNOS

Um conjunto de três vigas segmentadas foram ensaiadas na China para análise e posterior construção da ponte Nanjing Nº 4 Yangtze. A escala utilizada foi 1:10. Os resultados são apresentados detalhadamente em Yuan et al. (2013). As vigas ensaiadas, intituladas SPCB, possuíam 12 segmentos e vão total de 5,75m conforme figura 8.36. A armadura protendida internamente é mostrada na figura 8.37, com dois cabos constituídos de 6 cordoalhas  $\phi$  12,7mm, com uma área de 0,987 cm<sup>2</sup>. A tensão inicial de protensão no aço é 80MPa. O módulo de elasticidade do aço é 197.000 MPa, e seu limite de resistência à tração ( $f_{ptk}$ ) é de 1.860 MPa. A resistência à compressão do concreto é 32,2 MPa.

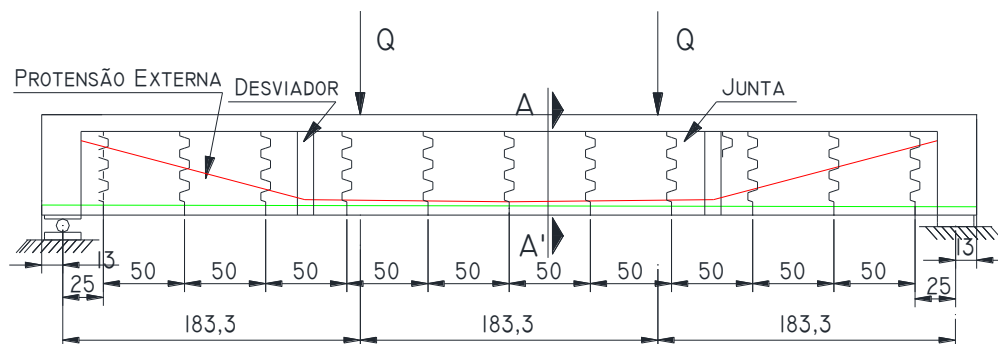


Figura 8.36 – Características geométricas da seção da viga segmentada SPCB

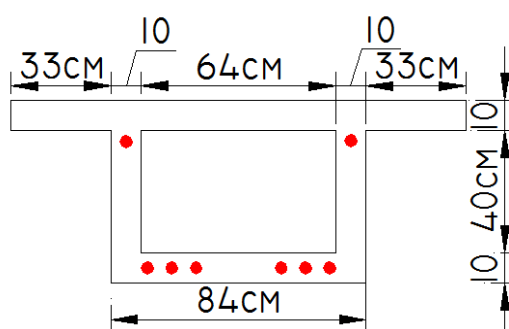


Figura 8.37 – Seção transversal da viga segmentada SPCB

A malha utilizada para a análise através do método dos elementos finitos é apresentada na Fig. 8.38, discretizando-se a viga inteira, devido a existência de uma junta localizada na metade da viga.

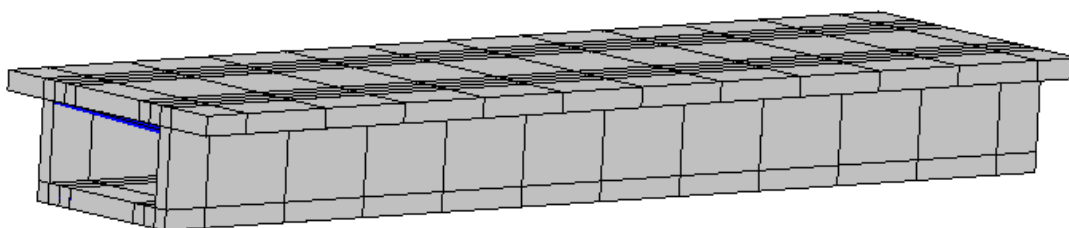


Figura 8.38 – Malha de elementos finitos

A Fig 8.39 apresenta a comparação de resultados experimentais e numéricos para o deslocamento no meio do vão. O programa computacional apresenta convergência até a

carga 860kN. Na Fig. 8.40 observa-se o detalhe das juntas abertas das aduelas 4, 5, 6, 7, 8 e 9 da viga analisada na carga 354kN. Segundo os resultados apresentados por Yuan et al. (2013), as juntas da viga analisada se abrem a  $0.36 P/P_u$ , ou 360kN.

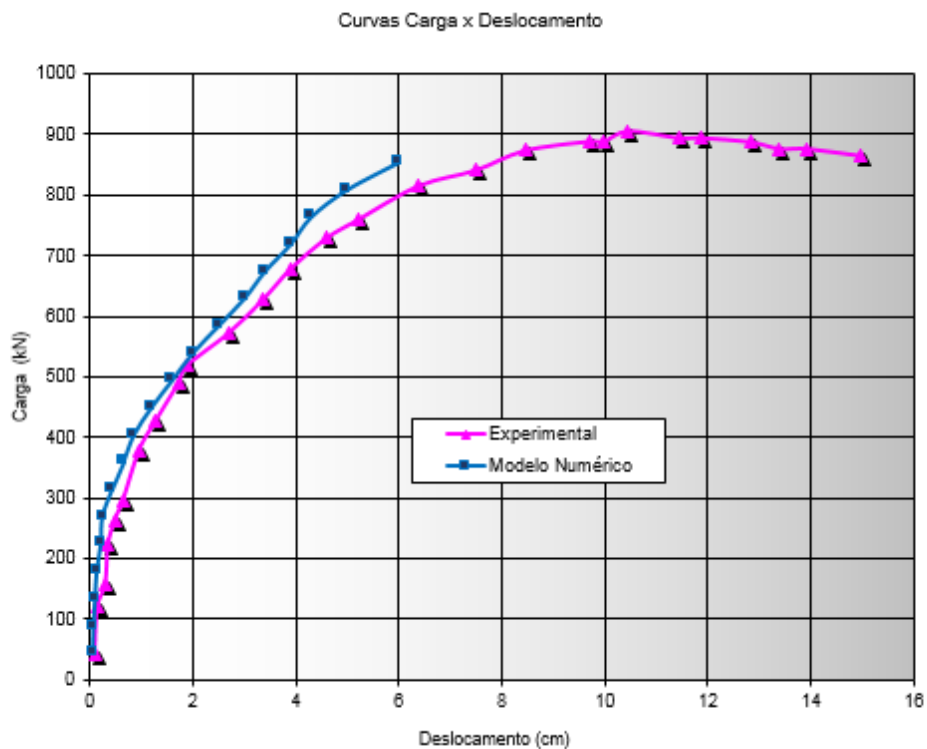


Figura 8.39 – Comparação entre os deslocamentos obtidos pelo modelo computacional e experimentalmente.

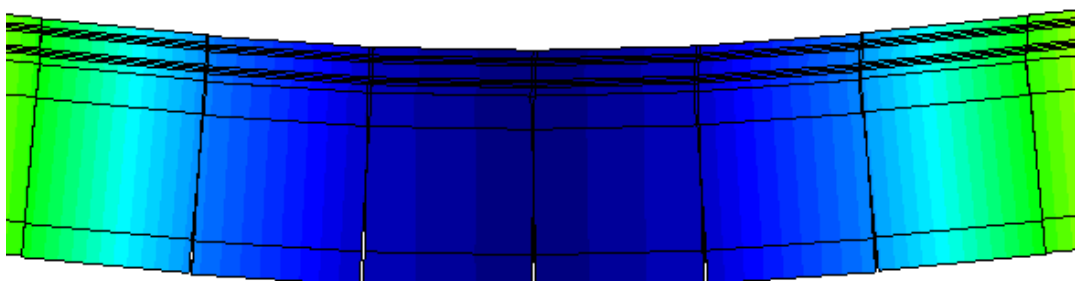


Figura 8.40 – Detalhe das juntas abertas – carga 354kN.

## 9 CONCLUSÕES

Apesar dos trabalhos desenvolvidos envolvendo o assunto abordado, tanto com caráter experimental quanto numérico, são necessários mais estudos para ampliar o conhecimento do tema. As principais contribuições do modelo computacional implementado com relação à revisão bibliográfica apresentada no capítulo para analisar as estruturas foi:

- utilizar elementos finitos tridimensionais contemplando uma análise elasto-viscoplástico com não linearidades físicas e geométricas dos materiais com base nos trabalhos de Machado (2002) e Jost (2006);
- implementar um elemento de contato bidimensional para modelagem da junta das estruturas segmentadas;
- implementar um elemento finito unidimensional para modelagem do cabo externo sujeito à força de protensão.

O desenvolvimento computacional dos modelos foi baseado no estudo apresentado por Hinton (1988). O programa foi implementado em linguagem Fortran 90/95. Uma entrada de dados no programa de pré-processamento *GiD@ 7.2* foi implementada para facilitar o fornecimento das propriedades dos materiais, da malha de elementos finitos, vinculações e carregamentos necessários para a análise das estruturas propostas.

Através de exemplos de aplicações numéricas da implementação computacional, mostra-se a utilidade da formulação proposta e sua importância prática. No capítulo 8, que trata da validação do trabalho, foram analisadas desde vigas monolíticas com seção retangular de concreto armado, até vigas segmentadas com seção caixão de concreto protendido externamente e internamente. As vigas protendidas externamente, tanto monolíticas quanto segmentadas, apresentaram uma rigidez maior após o limite de proporcionalidade de tensões. Isso se deve ao fato do modelo proposto não contemplar o livre deslizamento dos cabos de protensão nos desviadores.

As comparações feitas entre as análises e resultados experimentais, dispostos na literatura, apresentaram bons resultados para valores de deslocamentos e tensões.

Portanto, pode-se afirmar que o programa computacional desenvolvido é capaz de analisar peças com protensão externa, segmentadas ou monolíticas, possibilitando o estudo mais aprofundado deste tipo de estrutura.

Como sugestão de continuidade de pesquisa, os seguintes tópicos de pesquisa são sugeridos:

- análise da influência do deslizamento do cabo de protensão em seus pontos de fixação (ancoragem e desviador);
- estudo da transferência de esforço cortante através da abertura de juntas, um assunto mais complexo. Isto seria possível através da modelagem dos dentes de cisalhamento (*shear keys*) ou da resina epóxi utilizados nas juntas dos segmentos;
- desenvolvimento de uma linguagem de programação com uma interface mais amigável para o usuário, como o Microsoft Visual Basic.

As contribuições do presente trabalho se inserem de maneira oportuna no estado atual da arte das estruturas segmentadas com protensão exterior. A consideração do uso de ferramentas computacionais torna importante a implementação de ferramentas próprias para a análise deste tipo de estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGLO-FRENCH LIAISON REPORT. **Post-Tensioned Concrete Bridges/ Ponts en Beton Precontraint par Post-Tension**, Highways Agency, Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes, Transport Research Laboratory, and Laboratoire des Ponts et Chaussées, Publicado por Thomas Telford, London, 1999. 164 p.

APARICIO, C. A.; GONZALO R. & CASAS R. J. Testing of externally prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v.24, n.4-8, p.73-84, 2002.

ARIYAWARDENA N. **Prestressed Concrete with Internal or External Tendons: Behaviour and Análisis** Calgary: The University of Calgary, 2000. 276p. Tese de Doutorado.

ASSOCIATION POUR LA MEMOIRE ET LE RAYONNEMENT DES TRAVAUX D'EUGENE FREYSSINET **Eugène Freyssinet: A Revolution in the Art of Construction** Publicado por Presses des Ponts, 2004. 197 p.

AWRUCH, A. M. & DI RADO, H. A. **Introducción al método de los elementos finitos análisis elástico lineal**. Corrientes: Editora de la Universidad Nacional del Nordeste, 1997. 415p.

BAZANT, Z. P. & WU, S.T. Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. **Matériaux et Constructions**, v.7, n.34, p.45-60, 1974.

BROCKMANN C. & ROGENHOFER H. Bang Na Expressway, Bangkok, Thailand - World's Longest Bridge and Largest Precasting Operation. **Journal of the Prestressed Concrete Institute**, v.45, n.1, p.26-36, Jan-Fev. 2000.

BRUGGELING A. S. G. External prestressing - a state of the art. **External prestressing in bridges/ACI SP 120**, Ed. Antoine Naaman e Jonh Breen, pp.61-81, 1990.

CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1987. 293p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. **Journal of the American Concrete Institute**, v.82, n.6, p.877-882, 1985.

CHEN, W. F. & HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.

CODERQUE, J. T. **Estúdio del comportamiento a flexión y cortante de puentes de dovelas de hormigón con pretensado exterior y junta seca.** Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 2003. 230p. Tese de Doutorado em Engenharia.

COMBAULT, J. La construction à l'avancement. **In: ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS**, n.420, p.93-114, Dez. 1983.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990 : Design Code.** London: Thomas Telford Services, 1993, 437p.

CORVEN, J. A. & ORETON, A. J., **New Directions for Florida Post-Tensioned Bridges**, Florida Department of Transportation Report, Corven Engineering, Inc., Tallahassee, v.1, 2002.

COSTA REIS, F. J. **Influência do Nível de Protensão na Deformação de Estruturas Executadas com Protensão Externa.** Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, 2003. 118p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

DALY A. F. & WITARNAWAN W. Strengthening of bridges using external post tensioning. **In: 2ND CONFERENCE OF EASTERN ASIA SOCIETY FOR TRANSPORTATION STUDIES.** Seoul, Out. 1997.

ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division** , ASCE , v.115 , n.4, p.740-754, Abr. 1989.

FAIRBAIRN, E. M.; LONGO, H. I. & ZHENG, R. Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto – estudo teórico experimental. **In: COLLOQUIA'87, Porto Alegre. Proceedings de Colloquia'87**, 1987

FOURÉ B.; REZENDE MARTINS P. C. & HOANG L. H. Problèmes de sécurité à rupture et de modélisation du comportement des poutres en béton à précontrainte extérieure. **In: ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS**, n.491, p.46-95, Fev. 1991.

HABRAKEN, A. M. & CESCOTTO, S. Contact between deformable solids: The fully coupled approach. **MATHL. COMPUT. MODELLING**, v.28, n.4-8, p.153-169, 1998.

HARAJLI M. H.; MABSOUT M. E. & AL-HAJJ J. A. Response of externally post tensioned continuous members. **ACI Structural Journal**, v.99, n.5, p.671-680, Set-Out. 2002.

HEWSON, N. R. **Prestressed Concrete Bridges: Design and Construction** Publicado por Thomas Telford, 2003. 371p.

HINDI A.; MACGREGOR R.; KREGER M. E. & BREEN J. E. Enhancing strength and ductility of post tensioned segmental box girder bridges. **ACI Structural Journal**, v.92, n.1, p.33-44, Jan-Fev. 1995.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.

JOST, D. T. **Análise de Peças Fletidas com Protensão Não-Aderente pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PPGEC, 2006. 180p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

JR. CURTY A. Pontes e viadutos em balanços sucessivos protendidos. **Revista Concreto & Construções Revista Oficial do Ibracon**, pp.64-65, Dez-Jan-Fev 2006.

KREGER M. E.; FENVES G.L. & EL-HABR K.C. Finite element analysis of Externally Post-Tensioned Segmental box girder construction. **External prestressing in bridges/ACI SP 120**, Ed. Antoine Naaman e Jonh Breen, pp.389-407, 1990.

LAVIOLETTE M. **Bridge Construction Practices Using Incremental Launching**. National Cooperative Highway Research Program, Transportation Research Board, Project 20-07/Task 229, Dez. 2007.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto, v.6: princípios básicos da construção de pontes de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1979. 241p.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, submetidas a Estados Planos de Tensão**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PPGEC, 2002. 150p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/ PPGEC, 2003. 158 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

MARTINS, P. C. R. **Modélisation du Comportement jusqu'a La Rupture em Flexion de Poutres em Béton a Précontrainte Exterieur ou Mixte**. Paris: Thèse de Doctorat de l'École Centrale de Paris, 1989.

MATT, P. Status of segmental bridge construction in Europe. **PCI Journal**, v.28, n.3, p.104-125, Mai-Jun. 1983.

MATTOS, T.S. **Programa para análise de superestruturas de pontes de concreto armado e protendido**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, 2001. 167p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

MILLER M. D. Durability survey of segmental concrete bridges. **PCI Journal**, v.40, n.3, p.110-123, Mai-Jun 1995.

MULLER J. & GAUTHIER Y. Ultimate behavior of precast segmental box girders with external tendons **External prestressing in bridges/ACI SP 120**, Ed. Antoine Naaman e Jonh Breen, pp.355-374, 1990.

MULLER, J. Construction of Long Key Bridge. **Journal of the Prestressed Concrete Institute**, v.25, n.6, p.97-111, Nov-Dez. 1980.

NG C. -K. Tendon stress and flexural strength of externally prestressed beams. **ACI Structural Journal**, v.100, n.5, p.644-653, Set-Out. 2003.



OTTOSEN, N. S. A failure criterion of concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, v.103, n.4, p.527-535, Ago. 1977.

OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594p.

PERLINGEIRO, M. L. **Modelo para análise de estruturas de pontes segmentadas de concreto com protensão externa**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro/ COPPE, 2006. 160p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PPGEC, 1992. 131p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

RAMOS. G. & APARICIO, C. A. Ultimate Analysis of Monolithic and Segmental Externally Prestressed Concrete Bridges. **Journal of Bridge Engineering**, v.1, n.1, p.10-17, Fev. 1996.

RAMOS. G. & APARICIO, C. A. Ultimate behaviour of externally prestressed concrete bridges. **Structural Engineering International**, v.5, n.3, p.172-177, 1995.

RAO P. S. & MATHEW G. Behavior of Externally prestressed concrete beams with multiple deviators. **ACI Structural Journal**, v.93, n.4, p.387-396 , Jul-Ago.1996.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/ PPGEC, 2000. 224p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

RIBEIRO, A. S. **Análise de estruturas compostas por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PPGEC, 2004. 110p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

ROMBACH, G. Precast segmental box girder bridges with external prestressing- design and construction. **INSA Rennes Technical University**, Hamburg-Harburg, Alemanha. Fev. 2002. 15p.

SAVARIS, N. **Estudo global sobre trelicas planas e espaciais**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/PPGEC, 1973. 109p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

SCHMID, M. T. **A construção e o lançamento de pontes pelo processo dos segmentos empurrados**. Publicação Técnica da Rudloff Industrial Ltda, 3ª Ed., Rev. 01, 2005.

SEIXAS, M. P. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Confinados, através do Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul/ PPGEC, 2003. 109p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

SORIANO, H. L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: Edusp 2003. 608p.

SVENSSON, H. S. The application of external prestressing of bridges in Germany. **External prestressing in bridges/ACI SP 120**, Ed. Antoine Naaman e Jonh Breen, pp.125-144, 1990.

TAKEBAYASHI T., DEEPRASERTWONG K. E LEUNG Y.W. A full-scale destructive test of a precast segmental box girder bridge with dry joints and external tendons. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**, v.104, n.3, p.297-315, Ago. 1994.

TAN, K. H. & NG, C. K. Effect of shear in externally prestressed beams. **ACI Structural Journal**, v.95, n.2, p.116-128, Mar-Abr. 1998.

TAN, K. H. & NG, C. K. Effects of desviators and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams. **ACI Structural Journal**, v.94, n.1, p.13-22, Jan-Fev. 1997.

TASSIN M. D. Jean M. Muller: Bridges Engineer with flair for the Art Form. **PCI Journal**, v.51, n.2, p.88-101, Mar-Abr. 2006.

TRB COMMITTEE. Concrete Bridges. **In: 82° TRANSPORTATION RESEARCH BOARD ANNUAL MEETING**, Washington, Jan. 2003.

TURMO, J.; RAMOS, G. & APARICIO, A. C. FEM modelling of unbonded post-tensioned segmental beams with dry joints. **Engineering Structures**, v.28, p.1852-1863, May, 2006.

VIRLOGEUX, M. External prestressing from construction history to modern technique and technology, **External prestressing in bridges/ACI SP 120**, Ed. Antoine Naaman e Jonh Breen, pp.1-11, 1990.

VIRLOGEUX, M. La précontrainte extérieure. **In: ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS**, n.420, p.115-191, Dez. 1983.

VSL INTERNATIONAL LTD. **External post-tensioning**. 1992. 34p.

VSL INTERNATIONAL LTD. **The incremental launching method in prestressed concrete bridge construction**. Berne/ Suíça, 1977. 18p.

YUAN, A.; DAI, H.; SUN, D. & CAI, J. Behaviors of segmental concrete box beams with internal tendons and external tendons under bending. **Engineering Structures**, v.48, p.623-634, Jan, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR R. L. **The finite element method**. London: Butterworth-Heinemann, 5° Ed, 2000. 707p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PHILLIPS, D. V. & OWEN D. R. J. Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples. **In: SEMINAR ON CONCRETE**

**STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES. PAPERS.** Bergamo: IABSE, p.1-21, 1974.

<http://en.structurae.de/products/data/index.cfm?ID=25>

<http://en.structurae.de/structures/data/index.cfm?id=s0000365>

<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=274>

<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=270>

<http://www.asbi-assoc.org/news/project/index.cfm?aid=266&pid=2>

<http://www.ctec.ufal.br/ees/disciplinas/ec2/PROCESSOS%20DE%20CONSTRUCAO.pdf>

<http://www.cse.polyu.edu.hk/~ctbridge>

<http://www.confederationbridge.com/en/>

<http://www.dsicanada.ca/>

<http://www.fhwa.dot.gov/bridge/segmental/task60.htm>

<http://www.ponte.com.br/concessionaria/sobrea>

<http://www.tensacciai.it>

## APÊNDICE A

## ENTRADA DE DADOS

O programa numérico apresentado no presente trabalho foi desenvolvido na linguagem *FORTRAN 90/95*. Para o processamento dos exemplos, a entrada de dados do programa deve ser feita através de um arquivo de texto, no qual as informações devem estar em linguagem orientada. A princípio, esse arquivo pode ser criado manualmente pelo usuário, sem a utilização de um programa para pré-processamento. Porém, a facilidade e agilidade proporcionadas por esse tipo de ferramenta computacional, bem como o tamanho dos exemplos rodados foram itens decisivos para o emprego do programa de pré e pós-processamento *GiD® 7.2*. No pré-processamento, o programa *GiD® 7.2* permite que se defina graficamente a geometria da peça e a malha empregada. Da mesma forma, aplicam-se as condições de contorno e o carregamento. Além disso, há a vantagem de se personalizar o programa através de janelas com dados específicos a serem preenchidos.

Uma vez criada a geometria da peça, os dados podem ser alterados e redefinidos a qualquer momento. Ao final, o programa de pré-processamento fornece o arquivo de texto com extensão *.DAT* ordenado e personalizado para posterior leitura no *FORTRAN*, contendo as coordenadas dos nós, as conectividades e os demais dados especificados nas janelas. É conveniente, portanto, apresentar no presente anexo um exemplo com a entrada de dados realizada através da implementação no programa *GiD® 7.2* feita neste trabalho. A visualização através de telas facilitará a explanação.

### A.1 CARACTERÍSTICAS DO EXEMPLO

Trata-se da viga segmentada apresentada no capítulo 8 ensaiada por Aparício, Gonzalo e Casas (2002), conforme mostrada na Fig. A.1 levando em conta a simetria.

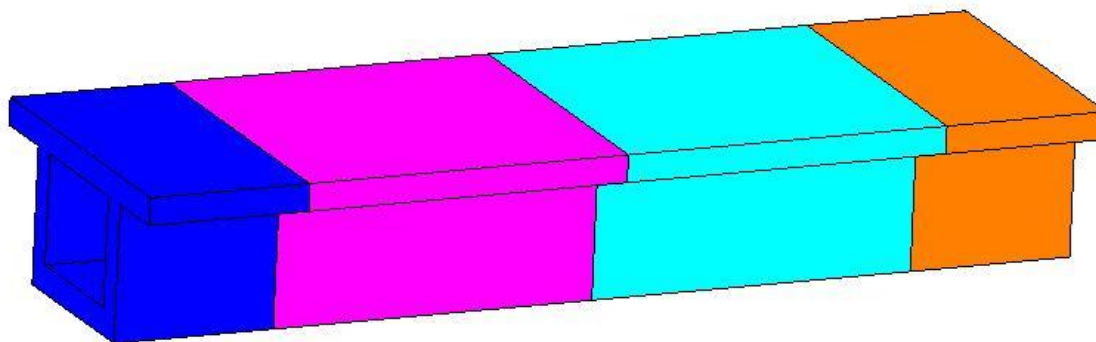


Figura A.1- Exemplo proposto

## A.2 GEOMETRIA DA VIGA

A entrada de dados gráfica da geometria de uma viga deve ser realizada seguindo alguns passos, de modo que as conectividades sejam fornecidas de acordo com a leitura no programa numérico. Em caso contrário, há incompatibilidade de dados.

O lançamento da geometria é realizado através dos valores das coordenadas dos vértices da peça. Salienta-se que as coordenadas devem ser lançadas de forma que a base da viga fique na direção do eixo  $y$ , a altura na direção  $z$ , e o comprimento na direção  $x$ . A forma de lançamento da geometria do presente exemplo se dá em função da malha escolhida e os nós são criados no sentido horário.

Inicialmente, seleciona-se o comando *Utilites - Graphical – Coordinates Window*. Na janela que surge (Fig. A.2), deve-se informar as coordenadas dos nós (sempre positivas) que definem a geometria da viga.

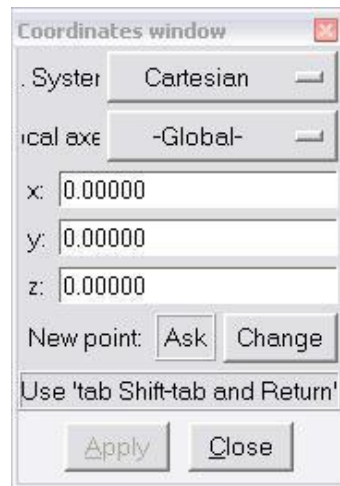



Figura A.2 - Informação das coordenadas

Mantém-se a janela ativa e seleciona-se o comando *line* através do ícone . Na janela *Coordinates Window*, informa-se as coordenadas do primeiro nó e clica-se em *Apply*, e assim sucessivamente para os outros nós. Esses passos são repetidos até que se obtenham os retângulos ilustrados na Fig A.3.

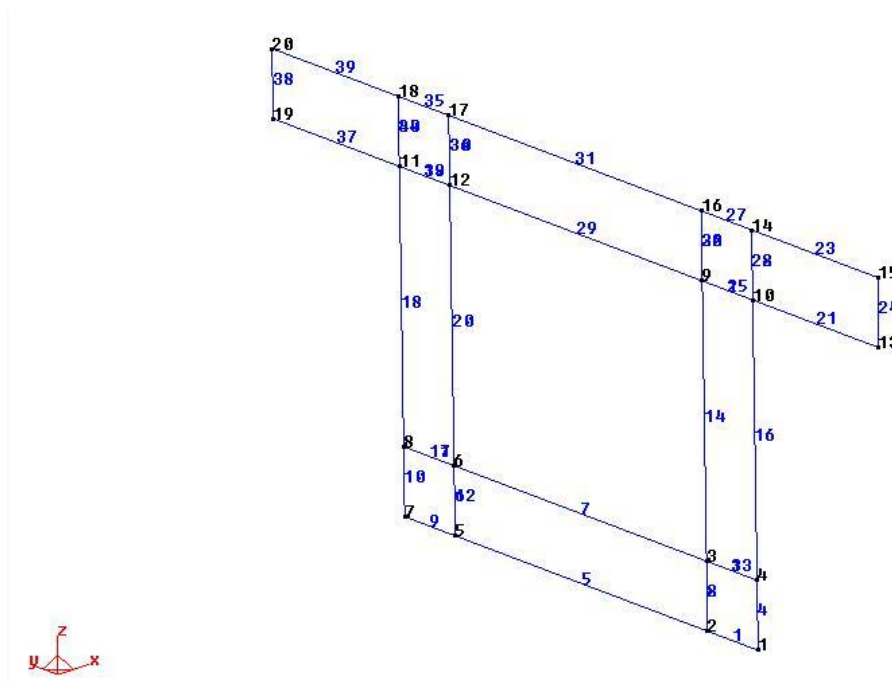



Figura A.3 - Retângulos iniciais para formar a geometria

Acessando-se o comando *surface* através do ícone  e selecionando-se os quatro lados de cada um dos retângulos, formam-se as superfícies desejadas (Fig. A.4). Duas superfícies não podem ter linhas em comum, por isso que na Fig A.3, aparecem 5 linhas duplicadas.

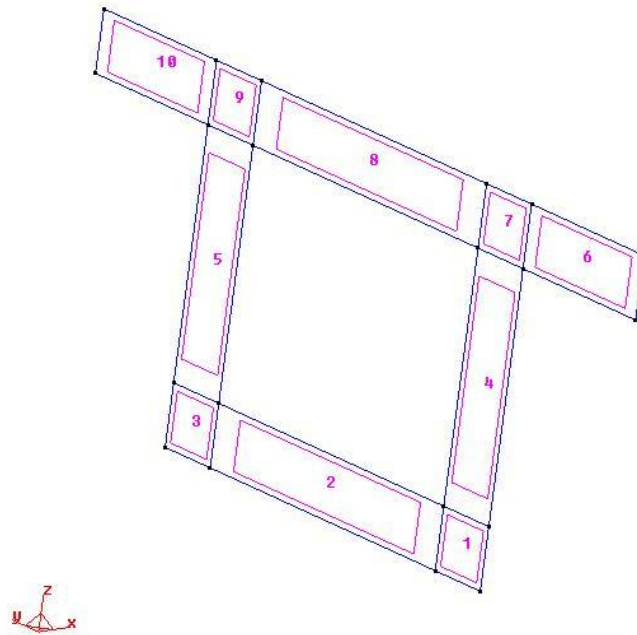


Figura A.4 - Área formada com os retângulos iniciais

A partir das áreas obtidas, é possível transladá-las na direção x, copiando as superfícies e criando volumes. Para isso, utiliza-se o comando *Utilities - Copy* (Fig. A.5).



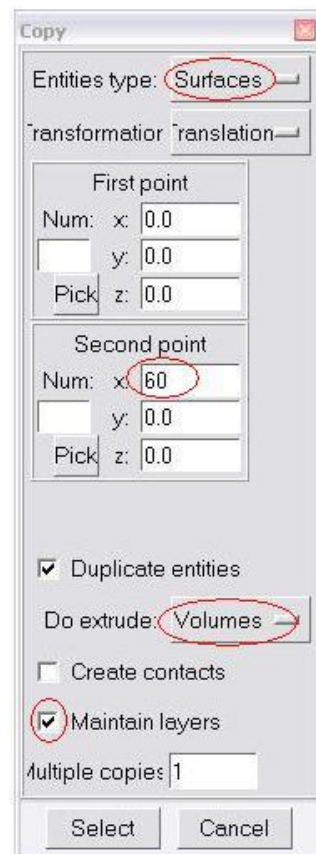


Figura A.5 - Criando volumes

Na janela que surge, opta-se por *Extrude Volumes*, para que todas as faces sejam copiadas, e criar volumes. Finaliza-se clicando em *Select* e selecionando as superfícies desejadas. Assim, o desenho passa a ter a forma indicada na Fig. A.6.

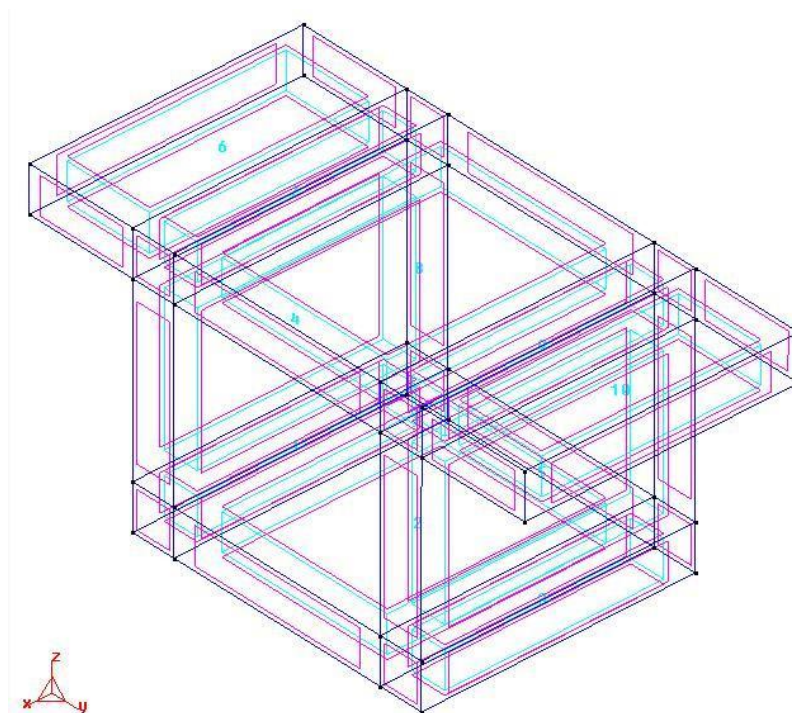



Figura A.6: Volumes finalizados

Aconselha-se a separar os materiais em camadas (*layers*) diferentes, como as aduelas (elementos de concreto), armaduras ativa e passiva e elementos de contato, pela facilidade de poder desativá-los quando não for necessária sua visualização, como quando define-se as propriedades de cada um, por exemplo. Isso pode ser feito através do ícone , onde na janela *Layers* (Fig. A.7), pode-se adicionar novas camadas, renomeá-las, bem como ativá-las e desativá-las.

As armaduras passiva e ativa são definidas por linhas e os elementos de contato são definidos por superfícies.

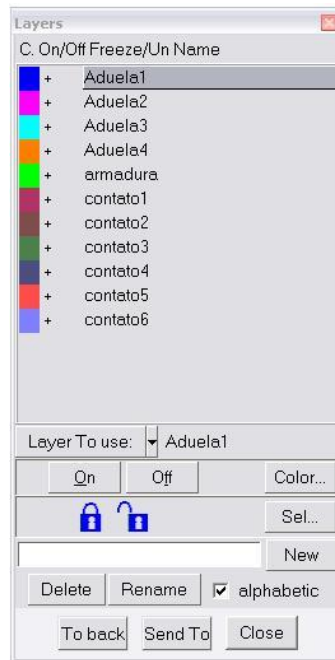


Figura A.7 - Separando em camadas

### A.3 MALHA DA VIGA

Optou-se por criar a malha composta por 60 elementos de concreto. Para indicar que as funções de forma são quadráticas (hexaedro de 20 nós), utiliza-se o comando *Meshing - Quadratic elements - Quadratic*. Da mesma forma, *Meshing -Element type - Hexahedra* indica o tipo de elemento. Selecionado-se *Meshing -Structured - Volumes* e clicando em todos os volumes, indica-se que utiliza-se malha estruturada. Aparece a tela mostrada na Fig.A.8.

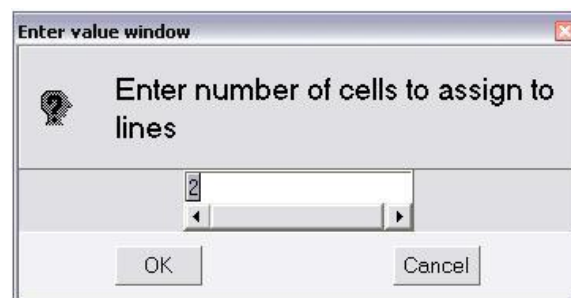


Figura A.8 - Entrada do número de elementos em cada direção

Através das linhas da geometria, indica-se o número de elementos adotado em cada direção, digitando o número e após selecionando uma linha na direção desejada, operação que deverá ser feita nas direções x, y e z. O comando *Meshing - Generate* gera a malha solicitada. Aparece uma janela indicando o número total de elementos e o número total de nós.

O programa *Gid® 7.2* não permite gerar malhas com elementos 3D, 2D e 1D no mesmo arquivo, para isto, as malhas dos elementos da armadura e de contato são geradas separadamente e são adicionadas no exemplo através com comando *Files – Import/Export – GID mesh* Após a importação, deve-se colapsar os elementos através do comando *Utilities – Collapse – Elements*, para os mesmos possuïrem os mesmos nós. São colapsados os nós das aduelas com os seus respectivos elementos de contatos, deve-se ter o cuidado de não colapsar toda estrutura junta, pois ela passa a ser monolítica.

As malhas bidimensionais e unidimensionais são geradas de maneira análoga a malha tridimensional de concreto, para indicar que as funções de forma são quadráticas utiliza-se o comando *Meshing - Quadratic elements - Quadratic*. Da mesma forma, *Meshing - Element type – quadrilateral* indica o tipo de elemento de contato e *linear* indica o elemento de armadura. Do mesmo modo, seleciona-se *Meshing -Structured – Surfaces* para os elementos de contato e *lines* para os elementos de armadura. Enfim, o resultado final da malha é apresentado na Fig. A.9.

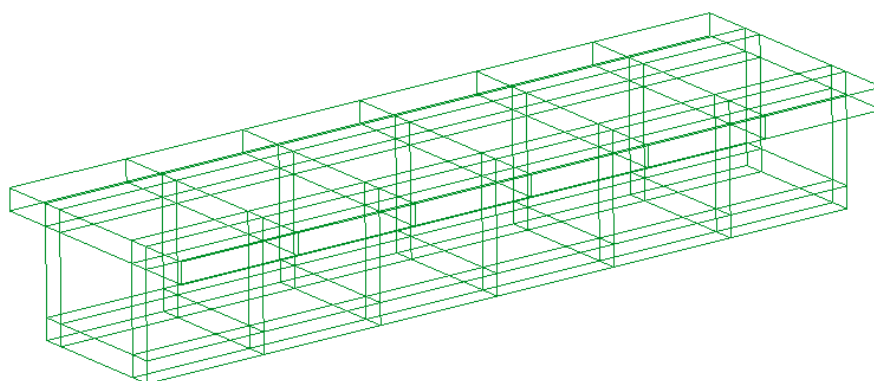


Figura A.9 - Malha

## A.4 DEFINIÇÃO DOS DADOS ESPECÍFICOS DO PROGRAMA

Todas as informações programadas pelo usuário no ambiente do *GiD*® 7.2, com o objetivo de personalizar a entrada de dados, foram implementadas através de quatro arquivos de mesmo nome (Programa) com extensões *.PRB*, *.MAT*, *.CND* e *.BAS*. O arquivo de extensão *.PRB* é utilizado para criar as janelas com os dados específicos (Fig. A.10). O arquivo de extensão *.MAT* é utilizado para determinar as propriedades dos materiais. A terceira extensão refere-se a um arquivo para organizar os comandos de aplicação de carga e condições de contorno. O último arquivo, de extensão *.BAS*, é empregado para organizar a saída das informações (arquivo *.DAT*) na sequência de leitura do programa numérico. Esses arquivos devem estar reunidos em uma pasta de nome 'Programa.gid' e esta pasta deve estar localizada no diretório *GiDWin/problemtypes*. Para se ter acesso às janelas com as devidas informações a serem preenchidas, utiliza-se o comando *Data - Problem Type - Programa*. Inicia-se a entrada de dados com o preenchimento de dados específicos através da opção *Data - Problem Data*. Alguns dados apresentam um valor padrão (*default*), valor que o programa assume como correto se o usuário não fornecer seus próprios dados, definido na implementação. Da mesma forma, selecionando-se *Data - Materials*, definem-se, para cada conjunto de propriedades, as características dos materiais. Para um novo conjunto clica-se no botão *New* (Fig. A.11).

Field	Value
TITULO	VIGA CAIXAO
DADOS DA ANALISE	FISICA E GEOMETRICA
INCREMENTOS DE CARGA	140
PERIODO	30
TEMPERATURA	20
NO RESPOSTA	597
DIRECAO RESPOSTA	Z
PONTOS INTEGRACAO	15
TENSAO INICIAL NA ARMADURA	87.6

Figura A.10 - Janela personalizada para os dados do programa.

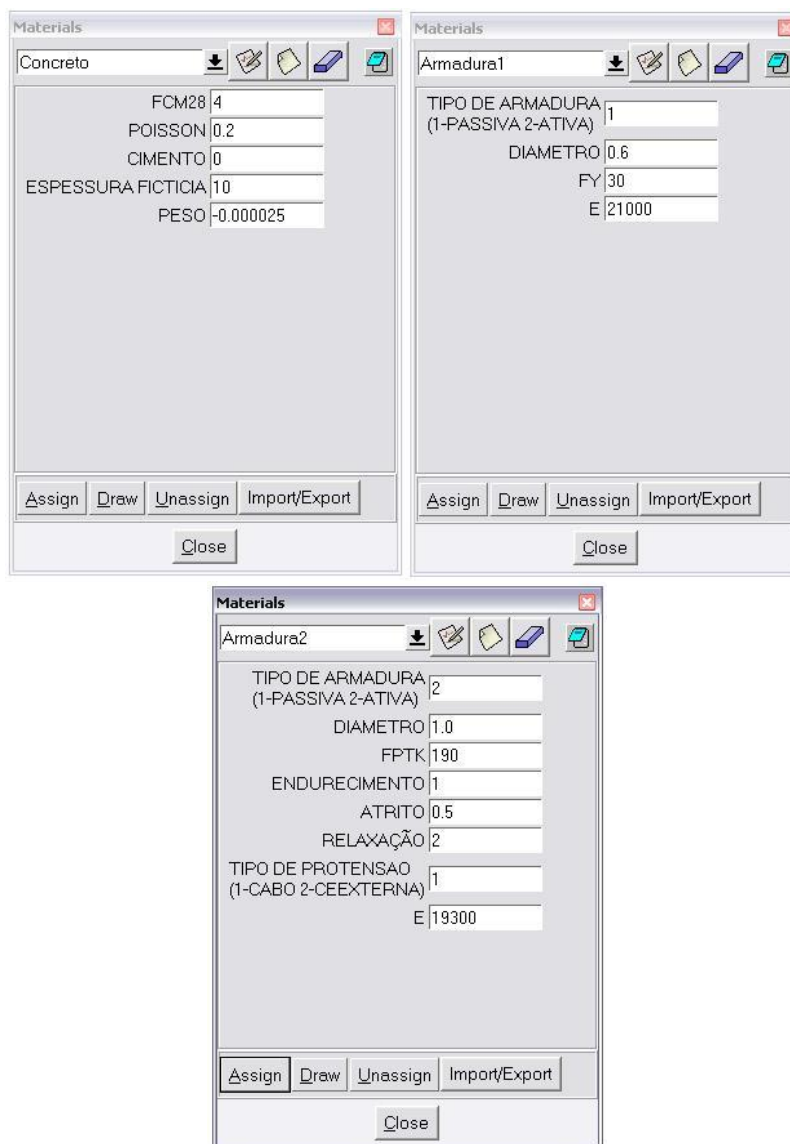


Figura A.11 - Janela personalizada para as propriedades dos materiais.

O programa numérico permite a aplicação de cargas nodais, cargas de volume e carregamento na face de um elemento, porém, no programa *GiD*® 7.2 foi implementado a possibilidade de aplicação de cargas nodais ou de deslocamentos prescritos. Para a aplicação de cargas na face ou de gravidade, a visualização gráfica da numeração dos nós e dos elementos facilita o processo manual, são selecionados os nós desejados. No caso de cargas nodais e para definir as condições de contorno e deslocamentos prescritos utiliza-se o comando *Data - Conditions*. Na tela surgem as janelas mostradas na Fig. A.12.

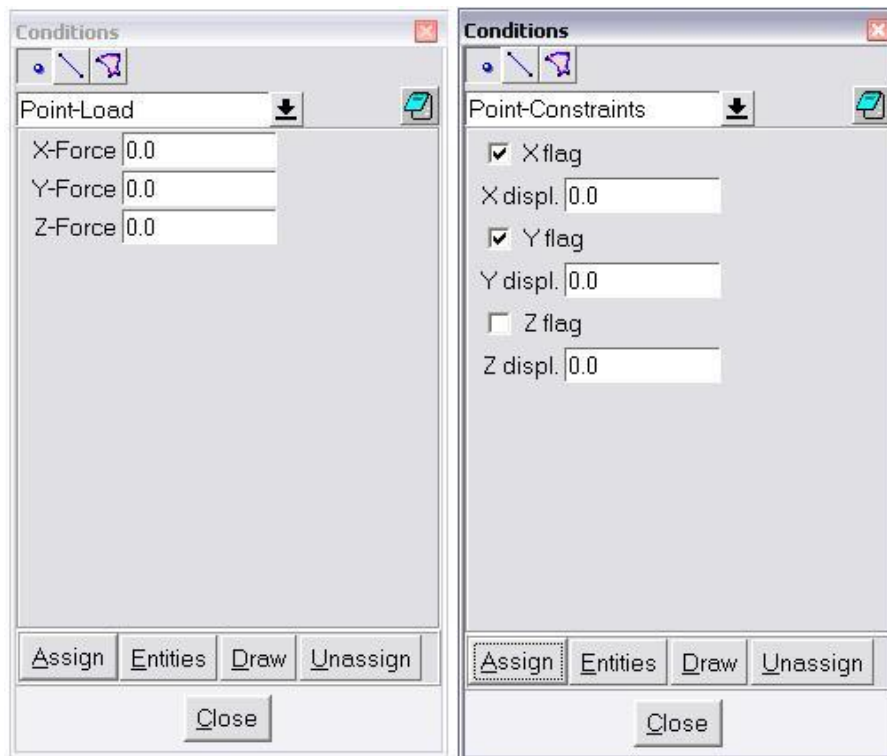



Figura A.12 - Janela personalizada para as cargas e condições de contorno.

## A.5 GERANDO O ARQUIVO .DAT

Finalizada a entrada gráfica de dados, gera-se o arquivo de texto com extensão *.DAT*, com todas as informações preenchidas no programa para pré-processamento. O arquivo gerado pode ser processado pelo programa numérico sem nenhuma modificação. Acessando *Calculate – calculate* gera-se o arquivo *.DAT*, que será gravado na pasta do exemplo.

## SAÍDA DE RESULTADOS

Para o processamento dos resultados, o programa desenvolvido gera arquivo com extensão .RES com os resultados para cada incremento de carga. Para visualização dos mesmos o usuário deve abrir o o programa *GiD@ 7.2*. No pós-processamento, o programa *GiD@ 7.2* permite personalizar através de janelas com resultados específicos

fornecidos pelo programa. . Isso pode ser feito através do ícone , onde na janela *View results* (Fig. A.13) pode-se escolher a etapa de carga (*Analysis/Step*) e visualizar os resultados para os diferentes materiais em termos de deformações, tensões, deslocamentos, animação com o modo deformado, situação das juntas (*Status e Lamb*).

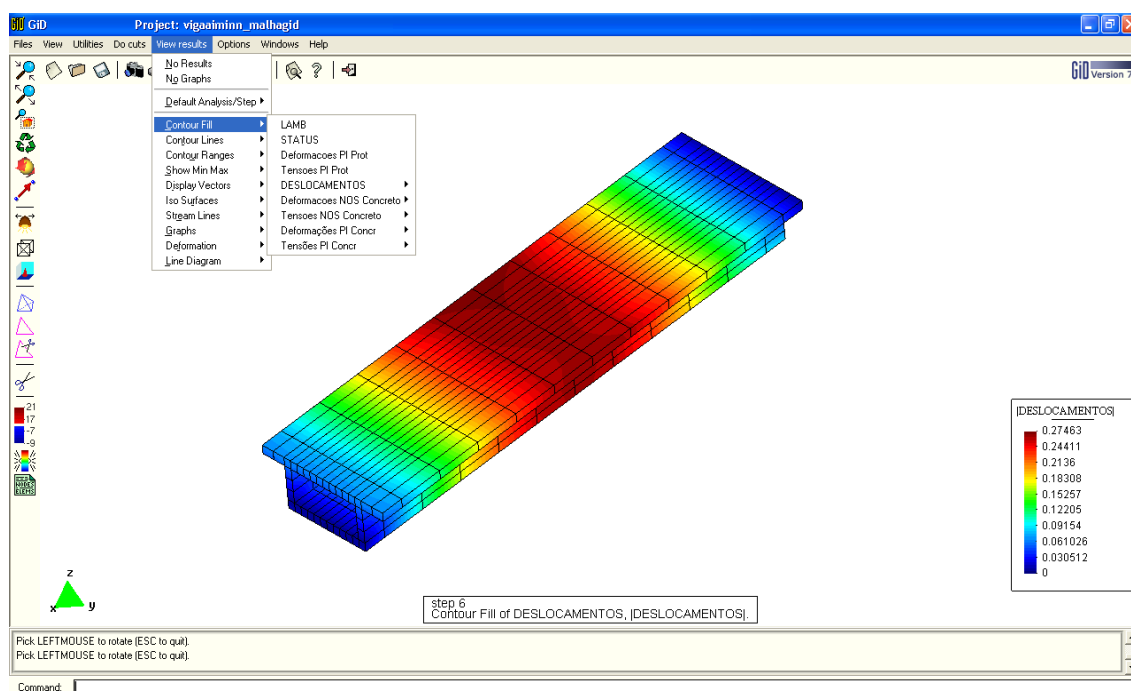


Figura A.13 - Janela personalizada para os resultados.