UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Soluções Não-Planas no Modelo Cosmológico Bianchi Tipo V na Teoria 5D-Espaço-Tempo-Massa

por

PABLO HERNÁN PEREYRA

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
ORIENTADOR

Porto Alegre, 02 de Setembro de 1999.

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Pereyra, Pablo Hernán

Soluções Não-Planas no Modelo Cosmológico Bianchi Tipo V na Teoria 5D-Espaço-Tempo-Massa / Pablo Hernán Pereyra.- Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 02 de Setembro de 1999.

91 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre,02 Setembro 1999. Orientador: Roque, Waldir Leite.

Dissertação: Modelo cosmológico, geometria pseudo-Riemanniana, equações de Einstein.

AGRADECIMENTOS

A minha namorada Paula pela grande ajuda e carinho, aos meus irmãos Lucas, Mauro e Andrea , ao meu pai Miguel e aos amigos Antonio, Marcelo e Sony pelo apoio muito valioso.

Aos coordenadores do PPGMAp por ter possibilitado a realização do curso de Mestrado, que originou este trabalho, também a todos os integrantes que participaram como professores nas cadeiras cursadas.

Ao professor Dr. Waldir Leite Roque pela orientação no curso e na dissertação.

Aos colegas Ronaldo e Carolina, que se interessaram pelo trabalho.

À CAPES pelo fornecimento de recurso como aluno bolsista e apoio durante todo o período do curso.

A todos os que tornaram possível a realização do trabalho.

"Imaginação é mais importante do que conhecimento"
Albert Einstein

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS

ds	*Elemento de linha.*
g_{ab}	*Tensor métrico.*
ω^a	*Vetor de base dual.*
κ	*Constante gravitacional de Einstein*
G	*Constante gravitacional de Newton*
c	*Velocidade da luz*
t	*Variável tempo.*
ψ	*Variável relacionada com massa de repouso* ($\psi = Gm/c^2$).
$A(t), A(t,\psi)$	*Função da métrica para a variável espacial x.*
$B(t), B(t,\psi)$	*Função da métrica para as variáveis espaciais y e z.*
$C(t,\psi)$	*Função da métrica para a variável* ψ *(massa de repouso).*
K, K_1, K_2, K_3, K_4, k	*Constantes adicionais das funções da métrica.*
$F(\psi), G(\psi), H(\psi)$	*Funções arbitrárias da métrica em* ψ.
$f_1(\psi), f_2(\psi), f_2(t)$	*Funções arbitrárias.*
$K(t), k(t)$	*Funções arbitrárias.*
$M(t,\psi), N(\psi), Q(\psi)$ $P(t,\psi)$	*Funções de simplificação para os tensor de curvatura de Riemann.*
$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$	*Tensor de curvatura de Riemann.*
$R_{\mu\nu}$	*Tensor de Ricci.*
$T_{\alpha\beta}$	*Tensor energia momento induzido.*
Φ	*Escalar da métrica relacionado por* $\varepsilon\Phi^2 = g_{44}$.
ρ	*Densidade de energia.*
p_r	*Pressão radial.*
p_a	*Pressão azimutal.*
u_α	*Tetra-velocidade.*
χ_α	*Vetor unitário do tipo espaço ortogonal a* u_α.
$h_1(t,\psi), h_2(t,\psi)$, $h_3(t,\psi)$	*Funções de simplificação para as expressões de densidade e pressão.*
Krets	*Escalar de Kretschmann*

RESUMO

As teorias de gravitação invariante por escala propõem uma variação com relação ao tempo da constante gravitacional ou da massa dos objetos que constituem o universo. Desta forma a intensidade da interação gravitacional também se torna variável, modificando sensivelmente o comportamento do universo. Algumas teorias foram propostas no decorrer do século, porém, descartadas devido a problemas técnicos e de concordância com dados observacionais.

trabalho a ser apresentado nesta dissertação está fundamentado em uma teoria de gravitação invariante por escala, a qual vem atualmente sendo desenvolvida e é denominada teoria penta-dimensional Espaço-Tempo-Massa. Tal teoria propõe a quantidade de massa de repouso como uma quantidade extensiva, de maneira a introduzi-la na métrica e torná-la variável. Diversos trabalhos foram realizados com esta teoria, incluindo alguns, o estudo de modelos cosmológicos. Investigaremos aqui a extensão do modelo cosmológico de Bianchi tipo V, que é um dos mais importantes modelos do universo. Duas métricas foram propostas e as soluções das equações de campo da teoria 5D-Espaço-Tempo-Massa para tais métricas foram obtidas. Tais soluções correspondem a espaços não-planos. Um estudo sobre singularidades na métrica e na curvatura foi realizado para ambas as métricas, em adição, o tensor de energia-momento induzido foi obtido para as métricas e as suas propriedades investigadas. Através da análise do tensor de Kretschmann verificou-se a ausência de singularidades efetivas nos modelos 5D abordados, sugerindo uma distribuição finita de energia devido a inclusão da massa de repouso.

ABSTRACT

The scale invariant gravitational theories propose the time variation either in the gravitational constant or in the rest mass of the objects that constitute the universe. By this way the intensity of the gravitational interaction varies as well, changing accordingly the behavior of the universe. Several theories have been proposed in the literature, however most of them have been discharged due to drawbacks in thecnicalities or lack of agreement with observational data.

The work conducted here takes into account a 5-dimensional theory called Space-Time-Mass, which proposes that the rest mass be na extensible quantity that change with time. Several investigations have been done so far with this theory, some of them including cosmological studies. Here we will investigate the 5D extension of the Bianchi type V cosmological model, which is one of the most important model of the universe. Two metrics are proposed and the solution of the corresponding 5D-Spae-Time-Mass field equations are found. Both solutions shown to be non-flat spaces. The singularity behavior of the metric and curvature were done, the induced energy-momentum tensor for both metrics were determined and their properties were investigated. Through the analysis of the Kretschmann tensor, it has been shown that there is no effective singularity in the space, which suggest that there is a finite distribution of energy due to the inclusion of the rest mass variable.

1 - INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral (RG) é a teoria de gravitação mais aceita até os dias de hoje, devido ao seu sucesso em descrever com grande exatidão os fenômenos observados, bem como por ter possibilitado a previsão de outros. Estes fenômenos estão ligados sempre a efeitos gravitacionais que incluem acelerações, os quais dependem da configuração de energia considerada para um determinado sistema.

Na tentativa de construir uma teoria que descreva todos os fenômenos observados na natureza, ao que tudo indica não se reduzem apenas a fenômenos gravitacionais, tais como o eletromagnetismo e fenômenos quânticos, a utilização de modelos geométricos com dimensões superiores a quatro, tem sido muito aplicadas. Pode-se citar como exemplos a teoria de Kaluza-Klein (KK), que inclui gravitação e eletromagnetismo em cinco de dimensões e suas variações, as teorias de supercordas com dez dimensões e supergravidade com onze dimensões.

Este trabalho é baseado em uma teoria de gravitação com geometria de cinco dimensões desenvolvida por P.S.Wesson da Universidade de Waterloo (Ontario-Canadá). A teoria é denominada como teoria Espaço-Tempo-Massa (ETM), já que a quinta dimensão está relacionada à massa de repouso do sistema considerado. É uma teoria do tipo KK devido apenas ao numero de dimensões utilizadas. Porém a sua abordagem é bem diferente, no sentido de ser classificada com uma teoria de gravitação invariante por escala. As teorias invariantes por escala, propõe a variação em relação ao tempo da constante gravitacional e/ou da massa dos objetos constituintes do universo. Se isto for verdadeiro a força de interação gravitacional teria diferentes comportamentos no universo primordial e no universo atual, o que afeta seriamente as teorias cosmológicas. Contudo, muitas teorias já propostas são excluídas devido a problemas técnicos e observacionais.

A teoria ETM possui uma abordagem diferente, considerando a variável massa como uma quantidade extensiva, introduzindo-a na métrica através das constantes fundamentais da teoria da RG. Uma característica muito importante se deve ao fato de que a teoria da RG está contida na teoria ETM, sendo a primeira um caso limite onde a denominada velocidade de massa é nula.

Vários trabalhos tem sido realizados por diversos pesquisadores com base nesta teoria, incluindo o problema de um corpo, modelos cosmológicos, problemas de astrofísica, comportamentos geodésicos, além de propostas de confrontação com dados observacionais.

Propomos aqui um estudo a nível de comportamento cosmológico na teoria ETM. É considerada a classificação dos modelos cosmológicos nos tipos de Bianchi, em particular o modelo cosmológico Bianchi tipo V correspondente a um universo aberto, de acordo com a classificação Friedmann-Robertson-Walker (FRW), com o objetivo de encontrar novas soluções para as equações de campo.

De posse de novas soluções a teoria em cinco dimensões ETM permite recuperar as características da distribuição de energia a que elas se referem, através do processo de interpretação de matéria induzida. Cabe então obter quantidades como a densidade de energia e pressão, e verificar seus comportamentos em pontos limites nas variáveis tempo e massa (energia), bem como investigar possíveis singularidades na curvatura do espaço representado.

Procede-se inicialmente no capítulo 2 com uma apresentação resumida das ferramentas matemáticas necessárias para a representação da teoria da RG, bem como da teoria ETM. A seguir no capítulo 3 uma revisão sobre os principais aspectos da Teoria da RG. Em continuidade no capítulo 4 apresenta-se a teoria ETM, com a generalização dos principais resultados obtidos pela RG e finalmente no capítulo 5 incluem-se os cálculos e resultados obtidos sobre o modelo cosmológico Bianchi tipo V com base na teoria ETM. O capitulo 6 é dedicado a comentários e conclusões incluindo com propostas de trabalhos de pesquisa futuros.

2 - Ferramentas Matemáticas

2.1- Ferramentas Matemáticas para a Teoria da RG

Abordaremos aqui de maneira compacta os objetos matemáticos necessários para a representação da teoria da RG sem nos aprofundarmos nas considerações devidas à geometria (diferencial); desta maneira o presente capítulo não tem fim didático, servindo apenas como guia para o leitor com conhecimento prévio sobre o assunto.

A teoria da RG utiliza como representação um espaço curvo pseudo-Riemanniano onde um conjunto de quatro variáveis x^{μ} (coordenadas) representam o espaço-tempo. O conjunto das coordenadas representam um ponto neste espaço-tempo.

Convenção de soma de Eisntein

Adotamos neste trabalho a convenção de soma de Einstein, na qual índices repetidos indicam somatório de 1 até o número de dimensões.

Transformações de Coordenadas

Consideramos inicialmente uma transformação de coordenadas que leva de um sistema de referência ou referencial para outro. Dado dois conjuntos de coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 e x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 a transformação de coordenadas e dada por:

$$x'^{\mu} = f'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3) , \qquad (2.1.1)$$

e a transformação inversa por:

$$x^{\mu} = g^{\mu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) . \qquad (2.1.2)$$

Os diferencias dos sistemas de coordenadas são relacionados por:

$$dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} = \frac{\partial g^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} \qquad (2.1.3)$$

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial f'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \qquad (2.1.4)$$

Vetor Contravariante

Um vetor contravariante e denominado ao conjunto de funções W^{μ} que tem como lei de transformação entre sistemas de coordenadas

$$W'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} W^{\nu} \ . \qquad (2.1.5)$$

Esta lei de transformação é a mesma que (2.1.3) e (2.1.4) para os diferenciais. Daqui concluímos que os diferenciais das coordenadas num espaço-tempo Riemanniano constituem componentes de um vetor contravariante.

Vetor Covariante

Um vetor covariante e denominado ao conjunto de funções W_{μ} que tem como lei de transformação entre sistemas de coordenadas

$$W'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} W_{\nu} \ . \qquad (2.1.6)$$

Um exemplo de vetor covariante é o gradiente de uma função escalar, pois pela lei de transformação temos que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \qquad (2.1.7)$$

Invariante

Uma função $\Phi(x^\mu)$ que mantém a mesma forma sob transformação de coordenadas e dita um invariante. Assim pelo item anterior (2.1.7) vemos que uma função escalar é um invariante.

Tensor

Um objeto que tem uma lei de transformação linear e homogênea do tipo (2.1.1) e (2.1.2) é chamado de tensor. Os objetos definidos anteriormente como vetor contravariante, vetor covariante e escalares são casos particulares de tensores.

Temos assim, respectivamente, um tensor de ordem 0 para um escalar e um tensor de ordem 1 para um vetor. Um tensor de ordem 2 corresponde ao produto de dois vetores (covariantes ou contravariantes).

Pela lei de transformação para vetores contravariantes (2.1.5) temos

$$S'^{\alpha}W'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}S^{\mu}W^{\nu} . \qquad (2.1.18)$$

Assim definimos um tensor contravariante de ordem 2 como

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu} \qquad (2.1.19)$$

Da mesma forma, pela lei de transformação para vetores covariantes (2.1.6) definimos um tensor covariante de ordem 2 como um objeto que transforma-se da forma

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}T_{\mu\nu} . \qquad (2.1.10)$$

O produto de um vetor contravariante por um vetor covariante define um tensor misto como

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T^{\mu}{}_{\nu} \quad . \tag{2.1.11}$$

Tensor de ordem mais alta

Pode-se generalizar a definição para tensores de ordem mais alta, utilizando as leis de transformação (2.1.9), (2.1.10) e (2.1.11); assim obtemos como lei de transformação geral

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\rho_m}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\rho_1 \dots \rho_n}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \quad . \tag{2.1.12}$$

2.2 - Álgebra Tensorial

Combinação linear

Uma combinação linear de dois tensores do mesmo tipo é um novo tensor; assim, por exemplo se $S_{\alpha\beta}$ e $W_{\alpha\beta}$ são dois tensores covariantes de ordem 2, temos

$$T_{\alpha\beta} = a\, A_{\alpha\beta} + b B_{\alpha\beta} \quad , \tag{2.2.1}$$

onde a e b são escalares e $T_{\alpha\beta}$ é um tensor covariante de ordem 2.

Multiplicação

O valor obtido mediante a multiplicação de tensores de qualquer tipo é um tensor. Sendo $S_{\alpha\beta}$ e W^{γ} um tensor covariante de ordem 2 e um vetor contravariante respectivamente, o produto é um tensor misto de ordem 3 dado por

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = S_{\alpha\beta}W^{\gamma} \ , \qquad (2.2.2)$$

onde a lei de transformação é dada por:

$$T'_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\rho}}T_{\mu\nu}{}^{\rho} \ . \qquad (2.2.3)$$

Contração de Índices

Pode-se obter a partir de um tensor misto de ordem n um novo tensor de ordem n-2. Isto é feito a partir do contração (somatório) sobre um índice covariante e outro contravariante. Como exemplo temos

$$T_{\alpha\beta} = T^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \ . \qquad (2.2.4)$$

Simetria de Tensores

A simetria de um tensor é associada à troca de índices. Quando a troca de dois índices (ambos covariantes ou contravariantes) não altera o valor do objeto, diz-se que o tensor é simétrico. Já, quando é apenas alterado o sinal do objeto, diz-se que o tensor é anti-simétrico.

Tensor simétrico: $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ (2.2.5)

Tensor anti-simétrico: $S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}$ (2.2.6)

2.3 - Tensor Métrico

O tensor métrico é representado por $g_{\mu\nu}(x)$; corresponde a um tensor de ordem 2, simétrico, neste caso covariante, como função das coordenadas de um espaço-tempo (4 dimensões) de Riemann. Por ser um tensor simétrico, tem apenas dez componentes independentes. Sua função principal é definir a lei de medida entre dois pontos vizinhos do espaço-tempo por meio da forma diferencial quadrática real

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad , \tag{2.3.1}$$

também definida como elemento de linha.

Um espaço é dito métrico quando é possível definir uma distância escalar entre dois pontos vizinhos quaisquer pertencentes a ele. São exemplos de espaços métricos de Riemann: espaço tri-dimensional Euclidiano e espaço-tempo plano quadri-dimensional de Minkowski.

Seus elementos de linha são dados por

Euclidiano: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (2.3.2)

Minkowski: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (2.3.3)

(c = velocidade da luz).

Também definimos o tensor métrico contravariante por $g^{\mu\nu}(x)$, que é o inverso do tensor métrico covariante. Esta relação é dada por

$$g_{\alpha\rho}g^{\rho\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \ , \tag{2.3.4}$$

onde

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1 & ,\alpha = \beta \\ 0 & ,\alpha \neq \beta \ . \end{cases} \tag{2.3.5}$$

O tensor métrico (covariante e contravariante) é também utilizado para "subir" e "descer" índices de outros tensores; por exemplo:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}T_{\rho}^{\nu} \tag{2.3.6}$$

$$T_{\rho\sigma} = g_{\nu\sigma}T_{\rho}^{\nu} \tag{2.3.7}$$

2.4 - Densidade Tensorial

O conceito de tensor provem de uma classe mais geral de quantidades, chamadas de densidade tensorial. Uma densidade tensorial tem a mesma lei de transformação de um tensor, com exceção de um termo adicional que é o Jacobiano da transformação de coordenadas elevado a alguma potência. Portanto a lei de transformação de uma densidade tensorial é dada por:

$$\Im_{\nu\ldots}^{\prime\mu\ldots} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{W} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \cdots \Im_{\alpha}^{\beta} \ , \tag{2.4.1}$$

onde $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$ denota o Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas x^{α} para o sistema x'^{β}, e W é uma constante inteira positiva ou negativa denominada *peso* da densidade tensorial. Assim uma densidade tensorial de ordem 1 é chamada de *densidade vetorial*, e uma densidade tensorial de ordem 0 é chamada de *densidade escalar*. Podemos então dizer que tensores ordinários correspondem a densidades tensoriais de peso 0. Como exemplo de densidade tensorial podemos citar o determinante de um tensor covariante de ordem 2, que tem como lei de transformação em forma matricial:

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} T_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \quad , \tag{2.4.2}$$

e usando a regra para determinantes de um produto de matrizes, temos que:

$$det\, T'_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{2} det\, T_{\alpha\beta} \quad . \tag{2.4.3}$$

Portanto o determinante de um tensor covariante de ordem 2 é uma densidade escalar de peso $W = 2$.

Pode-se aplicar a equação (2.4.3) ao tensor métrico; encontramos assim:

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{2} g \quad . \tag{2.4.4}$$

Agora, levando em consideração a transformação do elemento de volume tetra-dimensional dada por:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \quad , \tag{2.4.5}$$

obtemos uma relação importante quando aplicamos (2.4.4) em (2.4.5), que é:

$$\sqrt{-g'}\, d^4x' = \sqrt{-g}\, d^4x \quad . \tag{2.4.6}$$

Portanto a expressão $\sqrt{-g}d^4x$ é um elemento de volume invariante.

Densidade Tensorial de Levi-Civita

Definimos aqui a densidade tensorial contravariante de Levi-Civita, como sendo:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, \alpha\beta\gamma\delta & \textit{é uma permutação par de 0123} \\ -1, \alpha\beta\gamma\delta & \textit{é uma permutação impar de 0123} \\ 0, \textit{outro caso.} \end{cases} \qquad (2.4.7)$$

onde $W=1$ (peso).

A propriedade principal da densidade tensorial de Levi-Civita é a de manter seus valores inalterados mediante transformações de coordenadas. Da mesma maneira definimos a densidade tensorial covariante de Levi-Civita , dada como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\rho}g_{\delta\sigma}(-g)^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \qquad (2.4.8)$$

aqui a densidade tensorial tem peso $W = -1$. Os valores assumidos são:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} -1, \alpha\beta\gamma\delta & \textit{é uma permutação par de 0123} \\ +1, \alpha\beta\gamma\delta & \textit{é uma permutação impar de 0123} \\ 0, \textit{outro caso.} \end{cases} \qquad (2.4.9)$$

Tensor de Levi-Civita

Fazendo uso da definição de densidade tensorial de Levi-Civita, obtém-se o tensor ordinário de Levi-Civita ; dado na forma contravariante como:

$$\in^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad , \tag{2.4.10}$$

e na forma covariante como:

$$\in_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad . \tag{2.4.11}$$

Tensor Dual

Dado um tensor $F_{\mu\nu}$ anti-simétrico, definimos o *pseudotensor contravariante:*

$$*\,\Im^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad , \tag{2.4.12}$$

como sendo o *dual* de $F_{\mu\nu}$. Igualmente obtemos o *pseudotensor covariante* como:

$$*\,\Im_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad . \tag{2.4.13}$$

Os tensores *duais ordinários* são definidos como:

$$*\,F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\in^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.4.14}$$

e

$$*\,F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.4.15}$$

2.5 - Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel são construídos a partir do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, covariante e contravariante respectivamente, e constituem de dois tipos, o de *primeira espécie* dado por:

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right) , \qquad (2.5.1)$$

e o de *segunda espécie* dado por:

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right) . \qquad (2.5.2)$$

Os símbolos de Christoffel também são representados por outra simbologia , que é $[\alpha, \rho\sigma]$ para o de primeira espécie, e $\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\}$ para o de segunda espécie.

O símbolo de Christoffel de segunda espécie é um caso particular de uma quantidade mais geral da geometria de Riemann, denominada de *conexão afim.* A conexão afim dada por (2.5.2) é válida exclusivamente na geometria Riemanniana; esta quantidade preserva simetria mediante troca de índices covariantes, portanto temos a seguinte relação de simetria:

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} . \qquad (2.5.3)$$

A conexão afim não-simetrica é usualmente válida em geometria não-Riemanniana, e a partir dela é construído o *tensor torsão* do espaço-tempo dado por:

$$\Gamma^{\mu}_{[\rho\sigma]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\right) \quad . \tag{2.5.4}$$

Verificando a lei de transformação dos símbolos de Christoffel, vemos que ela não corresponde à lei de transformação de um tensor, portanto os símbolos de Christoffel não constituem tensores; como lei de transformação temos:

$$\Gamma'_{\alpha\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\Gamma_{\kappa\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}\partial x'^{\rho}}g_{\mu\nu} \; , \tag{2.5.5}$$

e

$$\Gamma'^{\lambda}_{\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\sigma}\partial x'^{\rho}} \quad . \tag{2.5.6}$$

Diferenciação Covariante

É definido uma derivação diferente da usual para tensores, devido ao fato de que a derivação usual de tensores não produz novos tensores, com exceção da derivação de funções escalares que correspondem a componentes de um vetor covariante, visualizamos isto derivando como exemplo uma transformação de um vetor contravariante dada por:

$$V^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}V'^{\nu} \; , \tag{2.5.7}$$

assim obtemos:

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial V'^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}V'^{\nu} \tag{2.5.8}$$

O segundo termo do lado direito da expressão é estranho a lei de transformação de tensores, portanto a derivação de tensores não corresponde a um novo tensor. Para contornar esta questão, e proporcionar uma derivação com lei de transformação de tensores utilizamos a expressão (2.5.4) da transformação de Símbolos de Christoffel de segunda espécie, e fazemos a substituição do termo $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \, \partial x'^\rho}$, que após manipulação algébrica fornece a expressão:

$$\left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} V^\lambda\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial V'^\lambda}{\partial x'^\rho} + \Gamma'^\lambda_{\rho\nu} V'^\nu\right) , \tag{2.5.9}$$

que obedece a lei de transformação de tensores para a expressão entre parenteses; portanto é definida uma nova derivação denominada derivada covariante (neste caso para um vetor contravariante) que obedece a lei de transformação de tensores e é representada por:

$$\nabla_\alpha V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} V^\lambda \ . \tag{2.5.10}$$

Assim a expressão (2.5.9) pode ser rescrita como:

$$\nabla_\beta V'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \nabla_\alpha V^\mu \ . \tag{2.5.11}$$

Da mesma forma definimos a derivada covariante para um vetor covariante:

$$\nabla_\alpha V'_\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \nabla_\mu V_\nu \ , \tag{2.5.12}$$

onde

$$\nabla_\alpha V_\beta = \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V_\lambda \ , \tag{2.5.13}$$

A definição de derivada covariante pode ser estendida para tensores de ordem mais alta, satisfazendo assim a seguinte lei:

$$\nabla_\gamma T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} = \frac{\partial T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}}{\partial x_\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda} T^{\lambda\ldots}_{\beta\ldots} + \ldots - \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} T^{\alpha\ldots}_{\lambda\ldots} - \ldots . \tag{2.5.14}$$

É importante destacar que a derivada covariante do tensor métrico é nula, temos então que:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0 \tag{2.5.15}$$

2.6 - Geodésicas

A equação diferencial de uma curva que possui um comprimento extremo é denominada de Equação Geodésica. Para a geometria tetra-dimensional em questão, o problema consiste em aplicar o cálculo variacional à integral de comprimento dada por:

$$I = \int ds \ , \tag{2.6.1}$$

assim obtemos:

$$\delta I = \delta \int L \, ds = 0 \ , \tag{2.6.2}$$

onde L corresponde ao Lagrangeano dado por:

$$L = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} , \qquad (2.6.3)$$

e portanto deverá ter valor unitário ao longo da curva geodésica.

Após a manipulação algébrica usual do cálculo variacional obtemos como equação geodésica:

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \, . \qquad (2.6.4)$$

Pode-se obter a mesma equação em relação a outro parâmetro que não seja s, desde que a relação entre os dois seja linear do tipo:

$$\sigma = as + b \, , \qquad (2.6.5)$$

assim a equação geodésica tem a forma de:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \, , \qquad (2.6.6)$$

o novo parâmetro também e denominado de parâmetro afim.

2.7 - Tensor de Curvatura de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann é de grande importância para descrever várias características da geometria do espaço em questão, além de servir como base para a construção de outros tensores de vital importância.

A definição é feita a partir de uma subtração de derivadas covariantes permutadas do tensor dado por (2.5.13), assim:

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta V_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\gamma V_\alpha = (\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) V_\alpha = \left(\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\rho}_{\beta\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} \Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} \right) V_\rho , \quad (2.7.1)$$

ou escrita de uma maneira mais compacta, temos:

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) V_\alpha = R^{\rho}{}_{\alpha\beta\gamma} V_\rho , \quad (2.7.2)$$

onde

$$R^{\rho}{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\rho}_{\beta\delta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} \Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} . \quad (2.7.3)$$

$R^{\rho}{}_{\alpha\beta\gamma}$ é denominado o tensor de curvatura de Riemann.

As propriedades de simetria do tensor de curvatura de Riemann são melhor observadas na forma covariante mediante contração de índices:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta} , \quad (2.7.4)$$

e são dadas como:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \quad (2.7.5)$$

e

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.7.6)$$

Tensor de Ricci

Do tensor de curvatura de Riemann contraído, obtemos o tensor de Ricci, que é dado por:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \,, \qquad (2.7.7)$$

na forma explicita:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} \,, \qquad (2.7.8)$$

que é simétrico, ou seja:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \,. \qquad (2.7.9)$$

Escalar de Curvatura

Pela contração do tensor de Ricci obtemos o escalar de curvatura de Ricci denotado como:

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \qquad (2.7.10)$$

Tensor de Einstein

O tensor de Einstein, que fundamenta a teoria da RG, é definido como uma combinação do tensor de Ricci e do escalar de curvatura como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad (2.7.11)$$

2.8 - Identidades de Bianchi

As identidades de Bianchi são associadas com propriedades de simetria da derivada covariante do tensor de curvatura de Riemann. Estas simetrias resultam em identidades diferenciais, ou seja, que envolvem derivadas covariantes do respectivo tensor. Para verificar tais identidades é conveniente utilizar um sistema de coordenadas denominado geodésico; neste sistema de coordenadas os símbolos de Christoffel de segunda espécie se anulam, simplificando bastante o processo. De (2.5.14) e (2.7.3) temos para a derivada covariante do tensor de curvatura de Riemann que:

$$\nabla_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} , \qquad (2.8.1)$$

já que os termos que contém símbolos de Christoffel se anulam devido ao sistema de coordenadas geodésico. Desta equação podemos verificar a seguinte identidade, denominada identidade de Bianchi

$$\nabla_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R^\mu{}_{\nu\beta\gamma} = 0 , \qquad (2.8.2)$$

que resulta da permutação dos índices α, β e γ ciclicamente. Desde que esta equação é formada por componentes de tensores, ela se cumpre em qualquer sistema de coordenadas e em qualquer ponto. Podemos expressá-la também em termos do tensor Dual do tensor de curvatura de Riemann na forma covariante, assim temos :

$$\nabla^\rho {}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \qquad (2.8.3)$$

que é equivalente a (2.8.2).

Das propriedades de simetria (2.7.5) e (2.7.6) do tensor de curvatura de Riemann, obtemos as seguintes identidades :

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\nabla_\lambda R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\delta\gamma} \ , \tag{2.8.4}$$

e

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\lambda R_{\alpha\gamma\delta\beta} + \nabla_\lambda R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0 \ , \tag{2.8.5}$$

que juntamente com (2.8.3) formam um conjunto completo de identidades algébricas para as derivadas covariantes do tensor de curvatura de Riemann.

Identidades de Bianchi Contraídas

Realizando a contração dos índices α e μ na identidade (2.8.2) e utilizando as propriedades de simetria (2.7.5) e (2.7.6) do tensor de curvatura de Riemann, e também considerando que as derivadas covariantes do tensor métrico são nulas, encontramos que:

$$\nabla_\gamma R_{\nu\beta} + \nabla_\beta R_{\nu\gamma} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\nu\beta\gamma} = 0 \ . \tag{2.8.6}$$

Contraindo novamente os índices ν e β, obtemos:

$$\nabla_\gamma R + \nabla_\beta R^\beta{}_\gamma + \nabla_\mu R^\mu{}_\gamma = 0 \ , \tag{2.8.7}$$

que também pode ser escrita na forma:

$$\nabla_\beta (R^\beta_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\beta_\alpha R) = 0 \ . \qquad (2.8.8)$$

Daqui encontramos as identidades contraídas de Bianchi, dadas por:

$$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = \nabla_\beta (R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R) = 0 \ , \qquad (2.8.9)$$

onde $G^{\alpha\beta}$, é o tensor de Einstein.

Veremos que a equação (2.8.9) é importante fisicamente na teoria da RG, pois a mesma representa a lei de conservação da energia.

3 - *Revisão sobre a Teoria da RG*

3.1 - Fundamentação Teórica

A *Teoria da RG* foi publicada em 1916 pelo físico alemão Albert Einstein, onze anos após a publicação da *Teoria da Relatividade Restrita* também de sua autoria.

A motivação para esta teoria surge no fato de que a Teoria Restrita é limitada a transformações entre referenciais com velocidade constante, ou seja, sem aceleração relativa; e então se faz necessária uma extensão para todos os tipos de movimento relativo existentes, inserido aqui o movimento com aceleração relativa entre os referenciais considerados. Uma vez que a nova teoria lida com acelerações , esta representará de alguma maneira as forças geradas pelas mesmas, ou representará a dinâmica em sua totalidade. Pela teoria de Newton para o movimento e a Gravitação, conhecemos a quantidade denominada "massa" que atua ao mesmo tempo como uma quantidade que se opõe ao movimento e como uma quantidade que gera de movimento. A idéia de que estes dois papeis representados pela quantidade massa, são dois pontos de vista diferentes de uma mesma realidade, é devida também a Einstein, e fundamenta a condução básica da teoria, que é a aplicação do denominado Princípio de Equivalência. Sendo assim a teoria que representa a transformação entre referenciais acelerados também representa a aceleração gerada por um campo gravitacional , ou seja, representa a dinâmica de um campo gravitacional.

O Princípio de Equivalência pode ser representado pela afirmação não geralmente válida de que um campo de aceleração é equivalente a um campo Gravitacional. A lei de igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional esta relacionada com este Princípio mas não o constitui.

A equivalência entre aceleração e campo gravitacional é de caráter local enquanto que as equações da Gravitação representam um lei de caráter global. Quando falamos em equivalência de aceleração e campo gravitacional nos referimos a um ponto no espaço, ou antes, à fronteira espacial de pontos em uma linha-mundo do tipo tempo (time-like).

Podemos evidenciar a equivalência pela transformação das equações de movimento de um ponto de massa em um campo gravitacional ou referencial acelerado, para um novo referencial (sistema de coordenadas) onde estas equações corresponderão ao movimento de um ponto sem massa. Portanto, podemos dizer que um campo gravitacional é imitado por um campo de aceleração. Isto sucederá unicamente em uma região infinitesimal do espaço, isto é, será estritamente local.

A igualdade entre massa inercial e gravitacional em tal transformação é a mesma para qualquer valor da massa da partícula.

No caso geral a transformação descrita corresponde matematicamente a passar para o sistema de coordenadas geodésicas locais.

O Princípio de Equivalência pode ser aplicado a uma região finita do espaço de maneira extensa, exigindo que o campo seja obrigatoriamente uniforme. Neste caso ele corresponderá a campos uniformemente fracos e movimentos de baixa velocidade, ou seja terá os mesmos limites que a mecânica Newtoniana.

Pode-se dizer que o Princípio de Equivalência foi a idéia inspiradora de Einstein para a construção da sua Teoria de Gravitação, representando papel fundamental no período anterior a sua conclusão. Einstein exemplificou a equivalência entre o campo gravitacional e a aceleração mediante o exemplo bem difundido do elevador em queda livre (supostamente no campo gravitacional terrestre). Os objetos no interior do elevador estão juntamente em queda livre com este, parecendo perder seu peso, já que a aceleração relativa se anula. Einstein distingue dois sistemas de referência no seu exemplo, atribuindo um sistema inercial fixo na Terra e outro sistema acelerado fixo no elevador. No primeiro sistema de referência existe um campo gravitacional atuante, já no segundo, sistema acelerado, ele esta ausente. Neste fato condiz então a afirmação de Einstein na possibilidade da aceleração substituir a gravitação, ou antes, um campo gravitacional uniforme. Partindo deste princípio e considerando ambos referenciais como sendo fisicamente completamente equivalentes, Einstein percebe a impossibilidade de falar em aceleração absoluta ou velocidade absoluta.

Podemos verificar o caráter aproximado da idéia de equivalência mediante uma análise mais detalhada do exemplo do elevador. Aqui a caixa que constitui o elevador é considerada um corpo rígido, mas, ao mesmo tempo a situação em que ela se encontra é desprovida de gravitação, portanto existe aqui uma contradição, na medida em que a ausência do campo gravitacional não permite abstrair a existência de um corpo absolutamente rígido; os corpos acelerados experimentam deformações diferentes. A maneira de superar esta dificuldade consiste então em limitar a magnitude da aceleração experimentada e também no tamanho da região do espaço considerado, assim, impor que a região do espaço considerado possua acelerações pequenas, onde as deformações experimentadas podem ser negligenciadas e a noção de corpo rígido pode ser utilizada, ou em outras palavras o campo é uniforme e aproximadamente constante, portanto não existem deformações

Einstein reconheceu esta dificuldade, admitindo que nem todo campo gravitacional pode ser substituído por um campo de aceleração, sendo necessário para isto que o campo gravitacional seja uniforme. Apesar de existir esta limitação na aplicação do princípio, ele serve como base lógica satisfatória para a construção da teoria de gravitação. A igualdade entre massa inercial e massa gravitacional exerce o principal papel como lei aplicada.

Em resumo podemos argumentar que a equivalência entre aceleração e campo gravitacional é limitada pelas condições de contorno. Como exemplo temos o potencial gravitacional obtido quando da introdução de um sistema de referência uniformemente acelerado que é uma função linear das coordenadas e não satisfaz as condições no infinito, que deveria tender a zero. Também em um sistema de referência em rotação a força centrífuga aumenta com o quadrado da distância ao eixo de rotação, e em adição manifesta-se a força de Coriolis. Ambos exemplos representam campos gravitacionais fictícios, devidos a suas características de fronteira.

3.2 - Equações do Campo Gravitacional

As propriedades geométricas do espaço e tempo físico real correspondem a uma geometria pseudo-Riemanniana, e não a geometria Euclidiana. O campo gravitacional na natureza aparece como um desvio das propriedades geométricas da forma pseudo-Euclidiana. As propriedades geométricas estão indissoluvelmente ligadas com a distribuição e o movimento da matéria. Este relacionamento é mútuo. De um lado os desvios das propriedades geométricas da forma pseudo-Euclidiana são determinados pela presença de massas gravitando, e do outro, o movimento das massas neste campo gravitacional é determinado por estes desvios. Resumidamente, massas determinam as propriedades geométricas do espaço e tempo, e essas propriedades determinam o movimento das massas.

As equações do campo gravitacional são uma generalização das equações Newtonianas, e se reduzem a estas últimas quando impomos um limite associado. Enquanto que a equação de gravitação Newtoniana assume a existência de apenas um potencial escalar para descrever o campo, a RG assume a existência de um potencial tensorial com dez componentes independentes..

Em um certo sistema de coordenadas, que por propósito prático coincide com um sistema inercial da mecânica Newtoniana, o potencial Newtoniano da gravitação U aparece como coeficiente do termo dt^2 na expressão do elemento de linha, isto é, o coeficiente g_{00} de $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Esta generalização requerida para a teoria da gravitação de Newton deve ser covariante com respeito a uma transformação arbitrária de coordenadas. Neste aspecto é impossível carregar a generalização do potencial Newtoniano a um único coeficiente como g_{00}; ocorre então que todo o conjunto de coeficientes $g_{\mu\nu}$ devem ser obrigatoriamente levados em consideração e aparecem como uma generalização do potencial Newtoniano. O tensor métrico fundamental obrigatoriamente satisfaz um conjunto de equações que são geralmente covariantes e na aproximação Newtoniana uma delas deve cair obrigatoriamente na equação de Poisson para um potencial Φ .

Assim os potenciais na RG são identificados com as dez componentes do tensor métrico (simétrico) $g_{\mu\nu}(x)$ do espaço-tempo curvo provido pela geometria Riemanniana. Portanto deverão ser resolvidas dez equações diferenciais parciais para obter a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, que num certo limite deverá coincidir com a equação de Poisson dada por:

$$\nabla^2 \Phi(x) = 4\pi G \rho(x) \ , \tag{3.2.1}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e $\rho(x)$ é a densidade de massa do material que produz o campo gravitacional.

Do lado esquerdo da equação de Poisson, existe um operador diferencial de segunda ordem, o operador de Laplace (Laplaciano), agindo sobre Φ. Neste aspecto, a simples generalização covariante deste lado da equação deverá ser um tensor que envolve derivadas de segunda ordem lineares do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Tais tensores serão os denominados tensores de curvatura (ambos de segunda e quarta ordem). O tensor de curvatura de quarta ordem ou tensor de curvatura de Riemann é impróprio por causa que suas componentes não contém expressões que possam ser generalizações do operador de Laplace atuando em Φ. Também, ele tem mais componentes que as necessárias, em número de vinte, que são mais do que as funções desconhecidas. Desta forma, levamos em consideração o tensor de curvatura de segunda ordem ou o tensor de Ricci, que possui apenas o número correto de componentes.

Do lado direito da equação de Poisson a densidade de massa aparece. Uma generalização da densidade de massa que requer o caráter tensorial é o tensor massa $T_{\mu\nu}$ ou tensor energia-momento.

Somos portanto levados a concluir que a generalização requerida da equação de Poisson obrigatoriamente será uma relação entre o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$.

Na ausência de campos gravitacionais a divergência do tensor $T^{\mu\nu}$ obrigatoriamente é nula $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Este fato é conectado a questões da energia de um campo gravitacional, e da forma integral das leis de conservação, expressa o fato da conservação covariante da energia e do momento.

Por outro lado, o tensor de Einstein $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$, tem uma propriedade muito importante que corresponde a divergência nula $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ (2.8.9). Neste sentido podemos colocar na forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.2.2}$$

ou em termos de tensor misto

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R = \kappa T^{\nu}_{\mu} \ . \qquad (3.2.3)$$

Aqui κ é chamada constante gravitacional de Einstein, e seu valor é dado por

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \qquad (3.2.4)$$

As equações (3.2.2) ou (3.2.3) são as equações do campo gravitacional. Elas são as equações básicas da teoria da RG e são conhecidas como as equações de campo de Einstein.

A ausência do campo gravitacional implica em ausência de desvios das propriedades geométricas do espaço-tempo na forma pseudo-Euclidiana, e ocasiona então a anulação do tensor de curvatura. Então , se $T_{\mu\nu} = 0$ deve ter obrigatoriamente $R_{\mu\nu} = 0$, e também $R = 0$. Assim a única generalização apropriada da equação de Poisson corresponde às equações (3.2.2) ou (3.2.3).

É possível mostrar que essas equações são as únicas que obedecem todas as condições necessárias, que são: correspondência com a equação de Poisson, covariancia geral, linearidade nas derivadas de segunda ordem de $g_{\mu\nu}$, divergência nula, e comportamento pseudo-Euclidiano na ausência de massas.

Podemos ainda escrever as equações sob outra forma. Pela contração de índices μ e ν na equação (3.2.3) obtemos

$$R = -\kappa T \qquad (3.2.5)$$

onde $T = T^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor energia-momento. Com isto as equações de campo de Einstein podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \qquad (3.2.6)$$

Sob esta forma no espaço vazio o tensor energia-momento se anula, e então as equações assumem a forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.2.7}$$

As equações gravitacionais no espaço-tempo vazio são denominadas equações de campo de Einstein para o vácuo. No entanto, um espaço-tempo vácuo não necessariamente é um espaço-tempo plano. Unicamente quando todas as componentes do tensor de Riemann se anulam, o espaço pode ser considerado plano.

3.3 - Características das Equações de Campo de Einstein

Facilmente vemos pela estrutura do tensor de Ricci (2.7.8) que as equações são não-lineares nas funções do campo. Este fato distingue as equações do campo gravitacional das equações de campo de outras teorias como por exemplo a teoria do campo eletromagnético. O princípio de superposição não é válido nas equações de campo de Einstein, ou seja o somatório de duas soluções das equações não constituirá uma nova solução.

No sentido de entender melhor estas equações convém realizar a derivação da equação característica de primeira ordem. Do ponto de vista físico a equação característica representa a lei de propagação de uma frente de onda gravitacional.

Utilizando a equação (3.2.7) podemos escrever as equações gravitacionais na forma

$$R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \ . \tag{3.3.1}$$

O tensor de Ricci na forma contravariante, pode ser escrito como

$$R^{\mu\nu} = -1/2\, g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho \, \partial x_\sigma} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\rho\sigma} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \tag{3.3.2}$$

onde a quantidade $\Gamma^{\mu,\rho\sigma}$ é a quantidade obtida de $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$ subindo os índices mediante

$$\Gamma^{\mu,\rho\sigma} = g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} \Gamma^{\mu}_{\gamma\delta}. \tag{3.3.3}$$

Neste sentido, o último termo em (3.3.2) não envolve derivadas segundas, mas é uma forma quadrática homogênea em $\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}$, e consequentemente nas derivadas primeiras do tensor métrico.

Derivadas segundas aparecem no primeiro termo e também em $\Gamma^{\mu\nu}$. Os $\Gamma^{\mu\nu}$ são obtidos dos Γ^{ν} dados como

$$\Gamma^{\nu} = g^{\rho\sigma} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}. \tag{3.3.4}$$

por uma regra que é formalmente idêntica à regra de formação da derivada covariante simétrica de um vetor

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}\right) \tag{3.3.5}$$

ou detalhadamente

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}\frac{\partial \Gamma^{\nu}}{\partial x_{\rho}} + g^{\nu\rho}\frac{\partial \Gamma^{\mu}}{\partial x_{\rho}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}}\Gamma^{\rho}\right) . \tag{3.3.6}$$

Os outros termos tem dependência é unicamente através de derivadas primeiras nas quantidades (3.3.4)

O d'Alembertiano de uma função ψ pode ser escrito na forma

$$\Box\psi = g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \Gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} \tag{3.3.7}$$

ou alternativamente, como

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{(-g)}}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\sqrt{(-g)}g^{\rho\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_\rho}\right\} \tag{3.3.8}$$

onde

$$\Gamma^\rho = -\frac{1}{\sqrt{(-g)}}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\sqrt{(-g)}g^{\rho\sigma}\right\} \tag{3.3.9}$$

Por sinal, desde que Γ^ν não é um vetor , $\Gamma^{\mu\nu}$ não é um tensor. Esta circunstância prova ser muito útil para simplificar as equações de Einstein.

As equações de Einstein são geralmente covariantes e portanto permitem transformações de coordenadas envolvendo quatro funções arbitrárias. Suponhamos que as equações são resolvidas em algum sistema de coordenadas arbitrário. Podemos então passar para outro sistema de coordenadas tomando como variáveis independentes quatro soluções para a equação $\Box\psi = 0$. Estas soluções podem ser escolhidas de maneira a satisfazer as inequações a que $g^{\mu\nu}$ esta obrigatoriamente sujeito, e elas podem também estar sujeitas a algumas condições adicionais. Mas cada variável independente ou coordenada satisfaz a equação $\Box x_\rho = 0$, então teremos em tal sistema de (3.3.7) que

$$\Gamma^\rho = 0 \ , \tag{3.3.10}$$

e consequentemente que

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.11}$$

Chamaremos o sistema de sistema de coordenadas harmônico. Não interessa aqui a questão da unicidade do sistema de coordenadas harmônico, ou antes, nas condições adicionais que garantem a unicidade. Aqui é importante notar apenas que as equações (3.3.10) são compatíveis com as equações de Einstein e que elas não impõe nenhuma limitação na solução das anteriores, servindo unicamente como guia na classe de sistema de coordenadas permitidos.

Sob a condição (3.3.10) a expressão (3.3.2) é simplificada como

$$R^{\mu\nu} = -1/2\, g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho \, \partial x_\sigma} + \Gamma^{\mu,\rho\sigma} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \tag{3.3.12}$$

Aqui as derivadas segundas aparecem unicamente combinadas no operador d'Alembertiano atuando na quantidade $g^{\mu\nu}$ que tem os mesmos índices de $R^{\mu\nu}$ no lado esquerdo da equação.

A forma da equação característica de algum sistema de equações dado, depende unicamente dos termos contendo as derivadas de mais alta ordem. Nos casos dos sistemas (3.2.2) e (3.3.10) esses termos são apenas aqueles envolvendo d'Alembertianos.

Portanto o sistema de equações da gravitação terá a mesma característica da equação de d'Alembert,

$$\Box \psi = 0 \ , \tag{3.3.13}$$

e essa é facilmente encontrada. A equação generalizada de d'Alembert tem como equação característica

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu} = 0 \ , \tag{3.3.14}$$

onde

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = const. \tag{3.3.15}$$

é a equação de uma frente de onda, isto é, a equação de uma superfície em movimento onde o campo gravitacional obrigatoriamente tem alguma descontinuidade.

A equação (3.3.14) para a propagação de uma frente de onda gravitacional é a mesma que corresponde a frente de onda luminosa no espaço vazio na qual toda a teoria do espaço e tempo tem sido baseada. Resumidamente, podemos dizer que a gravitação é propagada com a velocidade da luz.

O fato da gravitação na Teoria de Einstein ser propagada com a velocidade da luz é um fato de significado fundamental. Isto mostra que a forma assumida para as equações gravitacionais esta de acordo com o postulado geral da Teoria da Relatividade que afirma existir um limite de velocidade para qualquer tipo de ação, chamada de velocidade da luz no espaço vazio. A existência de uma velocidade finita de propagação para a gravidade remove a contradição inerente da teoria da gravitação de Newton que admite ação a distância instantânea.

4 - *Teoria ETM*

4.1 – Gravitação de Wesson

As teorias de gravitação invariantes sob transformação de escala tem como característica principal propor a variação com relação ao tempo da constante G e/ou das massas dos objetos que constituem o universo; podemo sitar algumas como as propostas por Dirac, Hoyle e Narlikar, Canuto e outros [10-18]. Uma nova teoria tem sido desenvolvida por P.S. Wesson da Universidade de Waterloo (Ontario-Canada). Diferente das teorias anteriores, a nova teoria realiza uma extensão da teoria da RG para cinco dimensões. Consiste em tomar duas constantes fundamentais características da gravitação relativística (c velocidade da luz e G a constante Newtoniana), e combinando-as com a massa de repouso da partícula (m) para formar um comprimento Gm/c^2 que é identificado como uma coordenada. Isto é perfeitamente análogo a como o tempo (t) é convertido como uma coordenada ct, e extende o espaço-tempo 4D em 5D-ETM. Neste sentido é considerada a quantidade *massa* como uma variável. A nova abordagem oferece uma velocidade adicional denominada *velocidade de massa* $(w=d(Gmc^{-2})/dt)$, assim $w=0$ representa massa de repouso constante e retorna-se a teoria da RG, já com $w \neq 0$ existirá variação de massa e consequentemente a quinta coordenada.

As teorias de gravitação invariantes por escala que tem sido propostas, levam em consideração a variação da constante G e/ou da massa de repouso m dos objetos; esta variação seria lenta com o tempo a uma taxa governada pela pela idade do universo. Tais teorias podem ser interpretadas como teorias de gravitação variável, já que elas possuem a propriedade de descrever a força de interação gravitacional variável com o tempo. Porém elas tem sido descartadas levando em conta dados experimentais.

Existem diversas razões para a necessidade de construir uma teoria de gravitação variável; uma delas é a *invariância de escala*, ou seja além da teoria possuir a invariância com relação a transformações de coordenadas (covariância ordinária) também possuirá invariância de calibre e de escala (i.e. quantidades com dimensões de espaço, tempo ou massa). Esta *invariância de escala* em princípio é importante para o estudo da evolução da interação gravitacional em modelos cosmológicos

A quinta dimensão da nova teoria é uma via matemática conveniente de geometrizar a massa de repouso e induz o estudo da possibilidade de ela ser variável (c e G são essencialmente constantes para transformação dimensional nesta teoria, e podem ser absorvidas). Em tal, a quinta dimensão não é necessariamente compactificada como em outras teorias tipo KK, embora isto possa ser evidenciado em certas soluções. A assinatura da métrica na teoria 5D não é determinada, tendo sido notada matematicamente trivial a mudança de sinal no coeficiente da quinta coordenada, estando aberta a determinação via experimentação. Desde que a quinta coordenada corresponde a massa, esta teoria é evidentemente um teoria de gravitação, e não inclui outras interações.

A nova teoria é denominada teoria de ETM. Também classificada dentro das teorias do tipo KK [1], consiste em um espaço Riemanniano de 5 dimensões, onde a quinta coordenada ψ é relacionada [2-3] com a massa de repouso do objeto em repouso em relação ao referencial de maneira que $\psi = Gm/c^2 = x^4$. Assim o elemento de linha plano correspondente em coordenadas cartesianas é dado por

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\psi^2 \qquad (4.1.1)$$

aqui com os elementos diagonais do tensor métrico constantes os restantes nulos. O tensor métrico em cinco dimensões proposto para a teoria é

$$\hat{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & \\ & \varepsilon\phi^2 \end{pmatrix}, \qquad (4.1.2)$$

onde ϕ é uma função escalar e ε assume valor 1 e -1, $g_{\alpha\beta}$ corresponde ao tensor métrico quadri-dimensional. A abordagem feita dentro da teoria do tipo KK não leva em conta a "condição de cilindro" referente a quinta coordenada, ou seja considera a métrica com dependência na quinta coordenada, consequentemente não é levada em conta a usual compactificação da quinta dimensão , por isso é classificada como "não compactificada".

A intenção é unificar o campo gravitacional com sua fonte, onde a 5ª dimensão induz a matéria, ou seja, é possível induzir um tensor energia-momento a partir de 5 dimensões. Assim as equações de campo em 5D são dadas apenas por

$$\hat{R}_{ab} = 0 \quad (a,b = 0-4) \,. \tag{4.1.3}$$

Obtemos aqui 15 equações , que podem ser decompostas em 10 equações de campo, 4 equações de conservação e uma equação de onda [4]. As 10 equações de campo são dadas pela parte quadri-dimensional do tensor de Ricci como:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha \phi)}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2}\left(\frac{\partial_4\phi\partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi} - \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta}) + g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\gamma}\partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\beta}}{2}\right), \tag{4.1.4}$$

as 4 equações de conservação correspondem à parte $\alpha 4$ do tensor de Ricci penta-dimensional e são escritas como:

$$\hat{R}_{\alpha 4} = \nabla_\beta\left[\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}_{44}}}\left(g^{\beta\gamma}\partial_4 g_{\gamma\alpha} - \delta^\beta_\alpha g^{\gamma\epsilon}\partial_4 g_{\gamma\epsilon}\right)\right] = \nabla_\beta P^\beta_\alpha = 0 \,, \tag{4.1.5}$$

Já a equação de onda para o escalar ϕ corresponde a parte 44 do tensor de Ricci penta-dimensional e é dada como

$$\varepsilon\phi \,\Box\, \phi = -\frac{\partial_4 g^{\alpha\beta}\partial_4 g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{g^{\alpha\beta}\partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta})}{2} + \frac{\partial_4\phi g^{\alpha\beta}\partial_4 g_{\alpha\beta}}{2\phi} \,. \tag{4.1.6}$$

De posse destas equações, Wesson e Ponce de Leon [4], deduzem uma expressão para o tensor energia-momento quadri-dimensional a partir da geometria penta-dimensional, em outras palavras, expressam o mundo material quadri-dimensional em pura geometria penta-dimensional, alegando que as propriedades da matéria observadas no universo correspondem a características geométricas da quinta dimensão relacionada à massa de repouso. Para isto consideram válidas as equações de Einstein em quatro dimensões

$$8\pi G T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} . \qquad (4.1.7)$$

A seguir por contração da equação (4.1.4) com a métrica $g_{\alpha\beta}$, e com uso da equação (4.1.6), obtém uma expressão para o escalar de Ricci em quatro dimensões;

$$R = \frac{\varepsilon}{4\phi^2}\left[\partial_4 g^{\alpha\beta}\partial_4 g_{\alpha\beta} + \left(g^{\alpha\beta}\partial_4 g_{\alpha\beta}\right)^2\right], \qquad (4.1.8)$$

que inserida jutamente com (4.1.4) em (4.1.7) fornece a expressão para o tensor energia-momento em função da quinta coordenada e suas derivadas

$$8\pi T_{\alpha\beta} = \left(\frac{\nabla_\beta \partial_\alpha \phi}{\phi}\right) - \frac{\varepsilon}{2\phi^2}\left[\left(\frac{\partial_4\phi\,\partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi}\right) - \partial_4\partial_4 g_{\alpha\beta} + g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\gamma}\partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{g_{\alpha\beta}}{4}\left(\partial_4 g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta} + \left(g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta}\right)^2\right)\right]. \qquad (4.1.9)$$

Assim, utilizando-se desta expressão, pode-se dizer que as equações de Einstein em quatro dimensões estão automaticamente contidas nas mesmas equações para o vácuo penta-dimensional $\hat{G}_{\alpha\beta} = 0$. Este processo de obtenção do tensor energia-momento tem sido denominado de "interpretação de matéria induzida" da teoria KK, e a expressão (4.1.9) define o tensor energia-momento da matéria induzida (também denominado tensor energia-momento induzido). Pela expressão (4.1.9) vemos que a existência de matéria em quatro dimensões depende do coeficiente extra da métrica $\left(\varepsilon\phi^2\right)$ e das derivadas com relação a ψ. A abordagem da teoria ETM distingue-se das outras teorias do tipo KK pelo fato de que

g_{ab} pode depender de x^4, que ε pode ser positivo ou negativo, e que ψ não é presumida cíclica. Nos eventos em que $g_{\alpha\beta}$ é independente de x^4, pode-se mostrar com o uso de (4.1.9) que T^{α}_{α}=0 [4]. Também identificando T^0_0 com a densidade ρ e $-\left(T^1_1+T^2_2+T^3_3\right)/3$ com a pressão p de um fluído perfeito, obtemos que $p=\rho/3$ com $\left(\partial_4 g_{\alpha\beta}=0\right)$. Ou seja a independência da métrica quadri-dimensional da coordenada extra ψ, implica na equação de estado do tipo radiação para a matéria. Entretanto muitas soluções de (4.1.3) para g_{ab} poderão ter dependência da coordenada extra, ou seja, $\partial_4 g_{\alpha\beta}\neq 0$, logo a matéria descrita por (4.1.9) terá diferentes equações de estado. É possível mostrar [19] que usando (4.1.9) podemos recuperar todas as equações de estado usadas comumente em astrofisica e cosmologia.

4.2 – O problema de um corpo

O problema de um corpo tem sido abordado na teoria de ETM por vários autores [20-24]. A métrica proposta para o caso estático com simetria esférica e dada por

$$d\hat{s}^2=A^2(r)dt^2-B^2(r)(dr^2+r^2d\Omega^2)-C^2(r)d\psi^2 \quad . \tag{4.2.1}$$

As equações utilizadas correspondem à da teoria KK 5D dadas por

$$R_{ab}=0 \qquad (a,b=0-4) \ . \tag{4.2.2}$$

A métrica Apresentada por Dawison & Owen [22] é análoga à solução de Schwarzschild em 4D na forma isotrópica

$$ds^2=\left(\frac{ar-1}{ar+1}\right)^{2\varepsilon k}dt^2-\left(\frac{a^2r^2-1}{a^2r^2}\right)^2\left(\frac{ar+1}{ar-1}\right)^{2\varepsilon(k-1)}\times\left[dr^2+r^2d\Omega^2\right]-\left(\frac{ar+1}{ar-1}\right)^{2\varepsilon}d\psi^2 \tag{4.2.3}$$

onde a é uma constante dimensional junto com a fonte do campo, e ε e k são duas constantes adimensionais ligadas pela relação de consistência

$$\varepsilon^2\left(k^2 - k + 1\right) = 1 \qquad (4.2.4)$$

Utilizando as relações $k = -1/\beta$ e $\varepsilon = -\beta/\alpha$ convertemos a álgebra na forma utilizada por Gross & Perry [21] como

$$ds^2 = \left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^{2/\alpha} dt^2 - \left(1+\frac{M}{2r}\right)^4 \left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^{2(\alpha-\beta-1)/\alpha} \times \left[dr^2 + r^2 d\Omega^2\right] + \\ - \left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^{2\beta/\alpha} d\psi^2 \qquad (4.2.5)$$

onde M é uma constante dimensional associada à massa do objeto localizado no centro do espaço tridimensional , enquanto que α e β são constantes adimensionais ligadas pela nova relação de consistência

$$\alpha^2 = \beta^2 + \beta + 1 \ . \qquad (4.2.6)$$

A solução de Schwarzschild é recuperada quando fazemos $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, contendo uma dimensão adicional plana. Nesta teoria as soluções (4.2.3) e (4.2.5) representa uma classe de soluções. Isto se deve ao fato de que o teorema de Birkhoff não é valido em 5D; afirmando que a única solução estática de simetria esférica possível em 4D é a solução de Schwarzschild.

A concordância das soluções (4.2.3) e (4.2.5) com o caso em 4D é feita via comparação com os teste clássicos da RG. Lim & Wesson [6] analisam as soluções realizando a mesma transformação de coordenadas utilizada para o caso isotrópico em 4D dada por

$$r = \frac{1}{2}\left[r' - M + \sqrt{r'\left(r' - 2M\right)}\right] \ , \qquad (4.2.7)$$

obtendo assim a métrica mais apropriada

$$ds^2 = A^a dt^2 - A^{-(a+b)}dr^2 - A^{(1-a-b)}r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) - A^b d\psi^2 , \tag{4.2.8}$$

onde

$$a = 1/\alpha, \qquad b = \beta/\alpha, \qquad A(r) = (1 - 2M/r) . \tag{4.2.9}$$

Aqui a relação de consistência em termo das novas constantes é

$$1 = a^2 + ab + b^2 . \tag{4.2.10}$$

De posse da métrica (4.2.8) aplicam as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano

$$L = A^a \dot{t}^2 - A^{-(a+b)}\dot{r}^2 - A^{(1-a-b)}r^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - A^b\dot{\psi}^2 , \tag{4.2.11}$$

obtido de $L^2 = g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$, e onde ponto denota derivada em relação ao tempo próprio s. Daqui obtém três constantes de movimento que são

$$l \equiv A^a\dot{t} = const. \tag{4.2.12}$$

$$h \equiv A^{(1-a-b)}r^2\dot{\phi} = const. \tag{4.2.13}$$

$$k \equiv A^b\dot{\psi} = const. \tag{4.2.14}$$

4.3 – O desvio para o Vermelho

A fórmula para a razão de freqüências apresentada está em conformidade com o resultado em quatro dimensões da RG. O teste em si depende unicamente dos coeficientes da métrica (4.2.8), e já que esta é estática considera-se a posição do emissor e receptor de radiação em uma posição espacial fixa. Assim a fórmula é dada por

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{g_{00}(r_e)}{g_{00}(r_r)} . \tag{4.3.1}$$

Logo usando a métrica (4.2.8) e considerando uma aproximação de primeira ordem para M/r obtém-se

$$\frac{\nu_r - \nu_e}{\nu_e} = aM\left(\frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_e}\right), \tag{4.3.2}$$

desta expressão é clara a concordância com o resultado obtido pela teoria da relatividade em quatro dimensões, evidenciada pela aplicação do limite de Schwarzschild com $a=1$.

4.4 – A deflexão da luz

O estudo de percurso de luz no campo gravitacional é feito mediante a anulação do elemento de linha, já que estamos lidando com fótons, assim $ds^2 = 0$. Logo substituindo (4.2.12-13-14) em (4.2.8) encontra-se a seguinte equação de movimento:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \left(A^{(2-2a-b)}l^2 - A^{(2-a-2b)}k^2\right)\frac{r^4}{h^2} + Ar^2 = 0 . \tag{4.4.1}$$

A expressão para o ângulo total de deflexão ω no caso de 5 dimensões é dada por

$$\omega = \frac{4M}{r_0}\left[1-\left(\frac{f-m(d\psi/dt)^2}{1-n(d\psi/dt)^2}\right)\right], \tag{4.4.2}$$

onde $4M/r_0$ é o ângulo de deflexão de Einstein, com r_0 o parâmetro de impacto, e onde

$$f \equiv (1-a-b/2)A^{-(1-2a-b)}, \quad m \equiv (1-a/2-b)A^{-(1-3b)}, \quad n \equiv A^{-(a-b)}. \tag{4.4.3}$$

O termo entre parenteses em (4.4.2) representa a correção devida à presença da quinta dimensão. Uma expressão aproximada para o campo fraco é obtida quando desconsideramos a velocidade $d\psi/dt$ do corpo teste, neste caso de fótons, e além aplicamos a aproximação em primeira ordem considerando $A=1$. Temos então que $f = 1-(a+b/2)$, e a equação (4.4.2) fica

$$\omega = \frac{4M}{r_0}\left(a+\frac{b}{2}\right). \tag{4.4.4}$$

Aplicando o limite de Schwarzschild $a = 1, b = 0$, obtemos o resultado da RG. Os limites de validade de b devem ser determinados experimentalmente.

4.5 - O avanço do Periélio

Este teste é referido à característica da orbita de corpos testes em volta de uma massa central. A expressão correspondente é obtida fazendo $ds^2 \neq 0$ levando a uma versão pouco mais complicada de (4.4.1), e logo resolvendo-a para a orbita do corpo teste que é praticamente periódica. A equação para o avanço do periélio obtida é

$$\delta\phi = \frac{6\pi M^2}{h^2}\left(d+\frac{e}{6}\right) \tag{4.5.1}$$

onde

$$
\begin{aligned}
d &\equiv \left(1+k^2\right)+(a-1)\left(-1+2l^2-k^2\right)+b\left(-1+l^2-2k^2\right) \\
e &\equiv 2(2-a-b)(-1+a+b)+2l^2(-2+2a+b)(-1+2a+b) \\
&\quad +2k^2(2-a-2b)(-1+a+2b)
\end{aligned}
\tag{4.5.2}
$$

No limite de Schwarzschild com $a=1$ e $b=0$, obtém-se o resultado da RG. Pode-se simplificar a equação (4.5.1) considerando uma órbita praticamente circular, fornecendo então

$$
\delta\phi=\frac{6\pi M}{r}\left(a+\frac{2b}{3}\right) , \tag{4.5.3}
$$

onde r é o raio da órbita.

4.6 - Tempo de retardo (Time Delay)

Consiste no tempo próprio de um fóton realizando um trajeto de ida e volta entre dois pontos inseridos no campo gravitacional gerado por uma massa central. Com o uso de (4.2.12-13-14) e de (4.4.1) obtém-se a expressão para a variação temporal dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta\tau = 2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^a \Bigg\{ & \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{l}\right)^2\right]\left(\sqrt{r_p^{\,2}-r_0^{\,2}}+\sqrt{r_e^{\,2}-r_0^{\,2}}\right)+ \\
& -M\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{l}\right)^2\right]\left(\frac{\sqrt{r_p^{\,2}-r_0^{\,2}}}{r_p}+\frac{\sqrt{r_e^{\,2}-r_0^{\,2}}}{r_e}\right)+ \\
& +M\left[(2a+b)+\frac{3b}{2}\left(\frac{k}{l}\right)^2\right]\left[\ln\left(\frac{r_p+\sqrt{r_p^{\,2}-r_0^{\,2}}}{r_0}\right)+\ln\left(\frac{r_e+\sqrt{r_e^{\,2}-r_0^{\,2}}}{r_0}\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.6.1}
$$

onde r_0, r_e e r_p correspondem à menor distância ao centro da massa fonte, o raio do planeta emissor (usualmente a Terra) e ao planeta refletor respectivamente, e r é a coordenada do raio onde a medida é feita (usualmente é a mesma de r_e). Também neste caso obtemos o mesmo resultado da RG quando aplicamos o limite de Schwarzschild.

4.7 - Solitons

A extensão da solução de simetria esférica de Schwarzschild para mais de quatro dimensões é necessária no sentido de modelar certos fenômenos astrofísicos nas teorias do tipo KK. O Teorema de Birkhoff garante que a métrica quadri-dimensional de Schwarzschild é estática e única com seu parâmetro livre (a massa do objeto central). Tal teorema não é válido em mais de quatro dimensões, onde soluções com simetria esférica (em três ou mais dimensões espaciais) dependem em geral de um número de parâmetros (tal como carga elétrica e um escalar) além de massa, e podem em alguns casos ter dependência temporal. Algumas soluções, estacionárias ou não, com mais de quatro dimensões podem ser não-singulares [21],[25],[26]. Tais soluções com energia finita localizada são denominadas de "solitons" . Este termo tem sido aplicado por vários pesquisadores a todas as classes de generalizações em mais de quatro dimensões da métrica de Schwarzschild com energia finita. Utilizando a métrica (4.2.5) na expressão para o tensor energia momento induzido (4.1.9), obtém-se como expressão para a densidade de matéria induzida

$$8\pi\rho = -\frac{\beta M^2}{\alpha^2 r^4}\left(\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right)^{2(1+\beta)/\alpha} . \tag{4.7.1}$$

Substituindo $\beta = 0$ nesta expressão obtemos o caso quadri-dimensional de Schwarzschild onde a matéria é fortemente concentrada no centro, levando o restante do espaço tri-dimensional a ser essencialmente vazio. As propriedades físicas de sistemas com $\beta \neq 0$ na teoria em cinco dimensões tem sido bem estudada [27]. O caso de $\beta = 0$ é muito especial na classe de soluções (4.2.5) pois é a única que possui horizonte de eventos, ou seja uma posição a partir da qual nenhuma informação consegue escapar ao campo gravitacional. A ausência de horizontes para muitas soluções (4.2.5) tem sido evidenciada por vários pesquisadores [23],[24],[27],[28]. Examinando em outros sistemas de coordenadas é possível verificar que o centro físico é em $r = M/2$. Esta ausência de horizontes nos objetos descritos por (4.2.5) significa que não podem ser denominados de "black holes", assim como dito anteriormente, são denominado de "solitons", porém no caso 4D a existência de black holes já é confirmada experimentalmente [48],[49].

4.8 - Cosmologia na teoria ETM

O modelo cosmológico básico na teoria ETM é conhecido dentro daqueles que se reduzem ao modelo padrão de FRW com métrica espacial plana sobre hypersuperfícies $\psi = const$. O elemento de linha pode ser escrito na forma espacial isotrópica como

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\omega}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) - e^{\mu}d\psi^2 \qquad (4.8.1)$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$. Considerando separação de variáveis, Ponce de Leon [29] obteve soluções para esta métrica. A mais interessante se reduz ao modelo de FRW espacialmente plano, a solução pode ser escrita como

$$ds^2 = \psi^2 dt^2 - t^{2/\alpha}\psi^{2/(1-\alpha)}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi\right)\right] - \alpha(1-\alpha)^{-2} t^2 d\psi^2 \;, \qquad (4.8.2)$$

onde α representa uma constante relacionada com as propriedades da matéria. Esta solução é chamada de generalização da métrica cosmológica FRW plana em cinco dimensões, devido a que considerando $d\psi = 0$ obtém-se a métrica familiar FRW $k=0$,

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad (4.8.3)$$

Utilizando a expressão para a matéria induzida (4.1.9), e substituindo a métrica (4.8.2), obtém-se as seguintes equações de estado

$$\rho = \frac{3}{8\pi G \alpha^2 \psi^2 t^2}, \qquad p = \left(\frac{2\alpha}{3} - 1\right)\rho \tag{4.8.4}$$

Vemos destas expressões que a escolha $\alpha = 2$ fornece $p = \rho / 3$ (radiação) ; já a escolha $\alpha = 3/2$ fornece $p = 0$ poeira, também um modelo inflacionário com $0 < \alpha < 1$. As propriedades físicas baseadas na métrica (4.8.2) tem sido exploradas em diversos trabalhos [30-34], e suas implicações para equações do movimento são conhecidas [35]. Existem generalizações para cosmologias com $k \neq 0$ [36-37] e teorias de gravitação estendidas [38-39]; também conexões com o princípio de Mach [40-42]. Outra solução encontrada por Ponce de Leon, também isotrópica e homogênea é dada pela métrica

$$ds^2 = \psi^2 dt^2 - \psi^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3}t}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - d\psi^2 . \tag{4.8.5}$$

Considerando um hypersuperfície $\psi = const.$, esta se reduz a métrica de Sitter, e $\Lambda = 3/\psi^2$ é uma constante cosmológica induzida no espaço-tempo quadri dimensional pela existência da quinta coordenada ψ. Utilizando a métrica (4.8.5) na expressão para a matéria induzida (4.1.9) obtém-se a equação de estado clássica para o vácuo de Sitter, dada por $p = -\rho$, com $\rho = \Lambda/(8\pi G)$.

Um desenvolvimento interessante é feito ainda na métrica (4.8.2), considerando as velocidades espaciais como $u^a = dx^a / ds = 0$ $(a = 1,2,3)$, e resolvendo as equações geodésicas em cinco dimensões para

$$u^0 = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha - 1}} \frac{1}{\psi}, \qquad u^4 = \pm \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha\sqrt{2\alpha - 1}} \frac{1}{t} . \tag{4.8.6}$$

A seguir mediante uma transformação de coordenadas dada por

$$T = t\psi\,, \qquad R = t^{1/\alpha} r\,, \qquad \Psi = At^{\pm A}\psi\,, \tag{4.8.7}$$

obtém-se as novas velocidades $u^2 = u^3 = u^4 = 0$ e

$$u^0 = \mp\frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{\alpha}\,, \qquad u^1 = \mp\frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}}\frac{R}{T}\,. \tag{4.8.8}$$

Este novo referencial é sincronizado com uma velocidade radial que obedece a lei de Hubble. A densidade e pressão são dadas por $8\pi\rho = 3/\alpha^2T^2$, $8\pi p = (2\alpha - 3)/\alpha^2T^2$, que são idênticas aos valores em quatro dimensões da radiação e poeira, sem o fator ψ. Uma importante característica da teoria em cinco dimensões é que as quantidades p e ρ tem sua forma funcional modificadas mediante a troca da quinta coordenada, enquanto que em quatro dimensões elas são definidas.

Outra questão interessante devida à covariância da teoria em cinco dimensões, é obtida considerando uma transformação de coordenadas como

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)t^{1/\alpha}\psi^{1/(1-\alpha)}\left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)}\left[t^{-1}\psi^{\alpha(1-\alpha)}\right]^{(1-2\alpha)/\alpha}\,,\\
R &= rt^{1/\alpha}\psi^{1/(1-\alpha)}\,,\\
\psi &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)t^{1/\alpha}\psi^{1/(1-\alpha)}\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) + \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)}\left[t^{-1}\psi^{\alpha/(1-\alpha)}\right]^{(1-2\alpha)/\alpha}\,,
\end{aligned} \tag{4.8.9}$$

que transforma o elemento de linha para

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) - d\Psi^2\,, \tag{4.8.10}$$

que é plano. Isto é interpretado como uma diferença entre a teoria em quatro dimensões da teoria em cinco dimensões. Procedendo com o cálculo do escalar de Ricci em quatro dimensões para a métrica (4.8.2) obtém-se $6(\alpha - 2)/\alpha^2t^2\psi^2$, portanto a parte quadri-dimensional do modelo não é plana. Assim enquanto o universo pode ser curvo em quatro dimensões , o mesmo pode ser plano em cinco dimensões. Tem-se então a interpretação de que a singularidade do big-bang é apenas um artefato devido a escolha de coordenadas em cinco dimensões, compondo um ilusão geométrica. Porém não todos os sistemas de coordenadas em cinco dimensões podem ser transformados de maneira a tornarem a métrica plana, isto se deve a divergência do escalar de Kretschmann da métrica (4.8.2) no centro da distribuição [27] . Portanto em cinco dimensões a teoria ETM descreve um universo globalmente plano com fontes singulares localizadas.

Outro trabalho realizado na área de cosmologia da teoria ETM, fornece novas soluções na forma espacialmente homogênea e anisotrópica para o modelo cosmológico Bianchi tipo I, obtidas por Roque e Seiler [43]. Primeiramente realizando a técnica de separação de variáveis são obtidos dois casos; em seguida utilizando a lei da potência (power-law) são obtidos dois novos casos compondo nove famílias de soluções. Este trabalho destaca uma generalização da solução Kasner para a RG, que é recuperado tomando a hypersuperfície $d\psi=0$. Aqui as soluções encontradas por Wesson em [8] dada por

$$ds^2 = dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 d\psi^2 \tag{4.8.11}$$

e em [9] como

$$ds^2 = dt^2 - t\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + t^{-1} d\psi^2 \tag{4.8.12}$$

são dois casos particulares de uma família de soluções obtidas. Também é realizado um estudo das equações geodésicas para o comportamento da massa de repouso de partículas, obtendo dois tipos de comportamento: um valor constante e finito em um tempo inicial de universo com posterior aumento, e um valor inicial infinito sendo assintoticamente constante posteriormente.

5 - Modelo cosmológico Bianchi tipo V na teoria ETM

5.1 – Modelos cosmológicos de Bianchi

As soluções exatas para as equações de Einstein são limitadas por certas restrições impostas pela métrica, pela conexão, ou pelo tensor de Riemann. Um tipo de restrição bem conhecida é considerar o espaço-tempo invariante sobre um grupo de isometrias G_r atuando em orbitas 3-dimensionais do tipo espaço [44]. Desta maneira a variação da geometria do espaço-tempo pode ser escrita em termos de uma variável, o tempo t. Esses universos podem ser denominados *espacialmente homogêneos*. Interessa-nos aqui o grupo de simetrias denominado *simplesmente transitivo*, correspondendo a $r=3$, denotando uma simetria rotacional em adição a uma homogeneidade espacial (Ellis 1967).

A classe dos modelos de universos invariantes sobre um grupo de isometrias simplesmente transitivo atuando em superfícies do tipo espaço, são denominados *Modelos Cosmológicos de Bianchi*. Tais modelos cosmológicos são classificados em nove tipos [45]. Sua métrica é determinada em termos da base dual por

$$ds^2 = g_{ab}\omega^a\omega^b, \qquad (5.1.1)$$

com os valores para cada tipo mostrados na tabela seguinte:

Tabela (1)

Bianchi Tipo	ω^0	ω^1	ω^2	ω^3
I	dt	dx	dy	dz
II	dt	$dx-zdy$	dy	dz
IV	dt	dx	$e^x dy$	$e^x(dz+xdy)$
V	dt	dx	$e^x dy$	$e^x dz$
VI (inclui III)	dt	dx	$e^{Ax}(\cosh x\, dy - \sinh x\, dz)$	$E^{Ax}(-\sinh x\, dy + \operatorname{Cosh} x\, dz)$
VII	dt	dx	$e^{Ax}(\cos x\, dy - \sin x\, dz)$	$E^{Ax}(\sin x\, dy + \operatorname{Cos} x\, dz)$
VIII	dt	$\cosh y \cos z\, dx - \sin z\, dy$	$\cosh y \sin z\, dx + \cos z\, dy$	$\operatorname{Sinh} y\, dx + dz$
IX	dt	$\cos y \cos z\, dx - \sin z\, dy$	$\cos y \sin z\, dx + \cos z\, dy$	$-\sin y\, dx + dz$

O resultado apresentado neste trabalho tem como base o modelo cosmológico Bianchi tipo V, com simetria rotacional local (Ellis (1967), Stewart and Ellis (1968) (eq. 11.5 em [45]) , representado pelo elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dx^2 - B^2(t)e^{2x}(dy^2 + dz^2) \tag{5.1.2}$$

Para realizar o estudo com base na teoria ETM em cinco dimensões, são feitos dois tipos de extensão em (5.1.2). O primeiro consiste em acrescentar a quinta coordenada ψ relacionada com massa de repouso, juntamente com uma nova função dependente de t e de ψ de maneira que o novo elemento de linha corresponde a

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dx^2 - B^2(t)e^{2x}(dy^2 + dz^2) - C^2(t,\psi)d\psi^2 \tag{5.1.3}$$

de aqui em diante denominada ***métrica A***.

A segunda extensão é feita também acrescentando a quinta coordenada ψ, porem fazendo todas as funções dependentes de t e ψ, assim o elemento de linha é

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t,\psi)dx^2 - B^2(t,\psi)e^{2x}(dy^2 + dz^2) - C^2(t,\psi)d\psi^2 \ . \qquad (5.1.4)$$

de aqui em diante denominada ***métrica B***.

Portanto temos que em (5.1.3) a parte espacial da métrica depende de t, e a parte de massa depende de t e de ψ. Já em (5.1.4) tanto a parte espacial como a parte de massa da métrica dependem de t e de ψ.

A proposta do trabalho é procurar por novas soluções não-planas para as métricas (5.1.3) e (5.1.4), e em continuidade analisar do ponto de vista físico o comportamento das funções obtidas para a métrica, suas singularidades, bem como o cálculo de alguns objetos físicos importantes como escalares, densidade e pressão. Para efetuar algumas tarefas de álgebra utilizamos o software de computação simbólica MAPLE [46] juntamente com o pacote GRTensor [47] destinado a auxiliar no cálculo tensorial.

5.2 - Soluções não-planas

Consideramos aqui as equações correspondentes para a teoria de ETM de Wesson em cinco dimensões, logo temos que resolver as equações geradas pelo tensor de Ricci definido pela expressão (2.7.8), onde os índices somam de 0 a 4,

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = 0 \qquad (5.2.1)$$

para as métricas (5.1.3) e (5.1.4).

Métrica A

Começamos com o cálculo para a métrica dada por (5.1.3), denominada de ***métrica A*** obtemos então as seguintes equações diferenciais parciais não-lineares

$$\dot{A}B - \dot{B}A = 0 \tag{5.2.2}$$

$$\ddot{A}BC + 2\ddot{B}AC + \ddot{C}AB = 0 \tag{5.2.3}$$

$$A\ddot{A}BC + 2A\dot{A}\dot{B}C - 2BC + A\dot{A}\dot{C}B = 0 \tag{5.2.4}$$

$$B\ddot{B}A^2C - 2B^2C + B\dot{B}\dot{A}AC + \dot{B}^2A^2C + B\dot{B}\dot{C}A^2 = 0 \tag{5.2.5}$$

$$\ddot{C}AB + \dot{C}\dot{A}B + 2\dot{C}\dot{B}A = 0\,, \tag{5.2.6}$$

onde ponto denota derivada com relação a t. Neste sistema de equações todas as igualdades devem ser satisfeitas, portanto, escolhemos resolver a equação mais simples para tal, dada por (5.2.2), que deverá fornecer a relação entre $A(t)$ e $B(t)$, logo colocamos (5.2.2) como

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{B}}{B}\,, \tag{5.2.7}$$

$(A, B \neq 0)$, a seguir integrando com relação a t em ambos os lados obtemos

$$\ln(A) = \ln(B) + \ln(K_1)\,, \tag{5.2.8}$$

onde K_1 é uma constante, logo a solução para (5.2.2) é

$$B(t) = K_1 A(t)\,. \tag{5.2.9}$$

Visando simplificar o sistema de equações substituímos (5.2.9) em (5.2.2-6) e obtemos então

$$3\ddot{A}C + \ddot{C}A = 0 \tag{5.2.10}$$
$$A\ddot{A}C + 2\dot{A}^2C - 2C + A\dot{A}\dot{C} = 0 \tag{5.2.11}$$
$$\ddot{C}A + 3\dot{C}\dot{A} = 0 \tag{5.2.12}$$

Após um estudo deste último sistema, descobrimos que o caminho mais viável para chegar a uma solução analítica satisfatória consiste em subtrair a equação (5.2.10) da equação (5.2.12), obtendo assim uma nova equação que deverá ser satisfeita sempre, dada por

$$\dot{C}\dot{A} - \ddot{A}C = 0 \ , \tag{5.2.13}$$

que colocada na forma

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\ddot{A}}{\dot{A}} \ , \tag{5.2.14}$$

$(C, \dot{A} \neq 0)$, pode ser integrada em ambos os lados com relação a t, obtendo

$$ln(C) = ln(\dot{A}) + ln(F(\psi)), \tag{5.2.15}$$

Portanto a solução para $C(t, \psi)$ será

$$C(t, \psi) = F(\psi)\dot{A}(t) \ . \tag{5.2.16}$$

A equação (5.2.16) estabelece a relação entre as funções $C(t, \psi)$ e $A(t)$; percebemos aqui o surgimento de uma função arbitrária $F(\psi)$ que é relacionada com a massa de repouso. Novamente fazemos uma substituição de (5.2.16) em (5.2.10-12), obtendo duas equações restantes do sistema como

$$\dddot{A}A + 3\ddot{A}\dot{A} = 0 \tag{5.2.17}$$
$$A\ddot{A}\dot{A} + \dot{A}^3 - \dot{A} = 0 \tag{5.2.18}$$

Neste ponto devemos procurar as soluções comuns as duas equações dadas, pois as duas são em função de *A(t)*. Portanto procedemos com a solução de (5.2.17), primeiramente colocando na forma

$$\frac{\dddot{A}}{\ddot{A}} = -3\frac{\dot{A}}{A}\ , \tag{5.2.19}$$

$(A \neq 0)$, e a seguir integrando ambos os lados obtemos

$$\ln(\ddot{A}) = -3\ln(A) + \ln(K_3)\ . \tag{5.2.20}$$

Assim

$$\ddot{A} = \frac{K_3}{A^3}\ . \tag{5.2.21}$$

A seguir multiplicamos (5.2.21) por $\dot{A}$ para obter uma nova equação possível de ser resolvida, logo

$$\dot{A}\ddot{A} = K_3\frac{\dot{A}}{A^3} \tag{5.2.22}$$

e novamente procedendo com a integração em ambos os lados obtemos

$$\dot{A}^2 = \frac{K_3}{A^2} + K_4\ . \tag{5.2.23}$$

A equação (5.2.23) é a variáveis separáveis, e colocada na forma

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{K_3}{A^2}+K_4}}=dt \ , \qquad (5.2.24)$$

pode ser integrada, fornecendo

$$\sqrt{\frac{K_3}{K_4{}^2}+\frac{A^2}{K_4}}=t+K_2 \ , \qquad (5.2.25)$$

portanto a solução para (5.2.17) é dada por

$$A(t)=\pm\sqrt{K_4(t+K_2)^2-\frac{K_3}{K_4}} \ . \qquad (5.2.26)$$

A seguir procedemos com a solução de (5.2.18), para isto colocamos na forma

$$A\ddot{A}+\dot{A}^2-1=0 \ , \qquad (5.2.27)$$

que integrada com relação a t fornece

$$A\dot{A}-t-K_2=0 \ . \qquad (5.2.28)$$

A equação (5.2.28) pode ser colocada a variáveis separáveis como

$$AdA=(t+K_2)dt \ , \qquad (5.2.29)$$

que integrada em ambos lados da igualdade é

$$A^2=(t+K_2)^2-K_3 \quad , \qquad (5.2.30)$$

portanto a solução de (5.2.18) é dada por

$$A(t) = \pm\sqrt{(t+K_2)^2 - K_3} \ . \tag{5.2.31}$$

Comparando a solução (5.2.31) com a solução (5.2.26), percebemos que (5.2.26) é mais geral possuindo uma constante adicional K_4. Portanto para satisfazer ambas equações devemos ter obrigatoriamente que $K_4=1$, e a solução satisfatória para (5.2.17) e (5.2.18) é

$$A(t) = \pm\sqrt{(t+K_2)^2 - K_3} \ . \tag{5.2.32}$$

Outra solução para (5.2.17) e (5.2.18) é a solução trivial dada por $A(t) = K$, com $K=const.$ Esta solução é matematicamente válida, porém não é de interesse uma vez que reduziria a geometria para o modelo de Bianchi tipo V em 4D.

De posse da solução para $A(t)$ encontramos as outras funções da métrica dadas segundo (5.2.9) e (5.2.16) por

$$B(t) = \pm K_1\sqrt{(t+K_2)^2 - K_3} \tag{5.2.33}$$

e

$$C(t,\psi) = \pm\frac{F(\psi)(t+K_2)}{\sqrt{(t+K_2)^2 - K_3}} \ . \tag{5.2.34}$$

Métrica B

Em continuidade resolvemos as funções da métrica (5.1.4), considerando a dependência também em ψ das funções da parte espacial . Aplicando a equação (5.2.1) à métrica (5.1.4) obtemos as seguintes equações diferenciais parciais não-lineares

$$\ddot{A}BC + 2\ddot{B}AC + \ddot{C}AB = 0 \tag{5.2.35}$$

$$\dot{A}B - \dot{B}A = 0 \tag{5.2.36}$$

$$\dot{A}'BC - \dot{C}A'B + 2\dot{B}'AC - 2\dot{C}B'A = 0 \tag{5.2.37}$$

$$A\ddot{A}BC^3 + 2A\dot{A}\dot{B}C^3 - 2BC^3 - 2AA'B'C + AA'C'B - AA''BC + A\dot{A}\dot{C}BC^2 = 0 \tag{5.2.38}$$

$$A'B - B'A = 0 \tag{5.2.39}$$

$$B\ddot{B}A^2C^3 - 2B^2C^3 + B\dot{B}\dot{A}AC^3 - BB'A'AC + \dot{B}^2A^2C^3 - B'^2A^2C + BB'C'A^2 + \tag{5.2.40}$$

$$- BB''A^2C + B\dot{B}\dot{C}A^2C^2 = 0$$

$$C^2\ddot{C}AB - A''BC + C^2\dot{C}\dot{A}B + C'A'B - 2B''AC + 2C^2\dot{C}\dot{B}A + 2C'B'A = 0 \tag{5.2.41}$$

onde ponto denota derivada com relação a t e prima denota derivada em relação a ψ.

Todas as equações devem ser satisfeitas, portanto escolhemos resolver as mais simples visando simplificar o sistema; assim começamos resolvendo a equação (5.2.36) colocando-a na forma

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{B}}{B} \,. \tag{5.2.42}$$

$(A, B \neq 0)$A seguir integrando ambos os lados com relação a t fornece

$$ln(A) = ln(B) + ln(f_1(\psi)) \;, \tag{5.2.43}$$

que tem como solução

$$A(t,\psi) = f_1(\psi)B(t,\psi) \,. \tag{5.2.44}$$

Procedendo com a solução de (5.2.39), podemos escreve-la como

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \,, \tag{5.2.45}$$

que integrada com relação a ψ, fica

$$ln(A) = ln(B) + ln(f_2(t)) \;, \tag{5.2.46}$$

ou de outra forma

$$A(t,\psi)=f_2(t)B(t,\psi) \quad . \tag{5.2.47}$$

Analisando (5.2.44) e (5.2.47), concluímos que a única solução que satisfaz (5.2.36) e (5.2.39) é dada por

$$A(t,\psi)=K_1B(t,\psi) \, . \tag{5.2.48}$$

A seguir substituímos (5.2.48) em (5.2.35-41) e obtemos o seguinte sistema simplificado

$$3K_1\ddot{B}BC+K_1\ddot{C}B^2=0 \tag{5.2.49}$$

$$3K_1\dot{B}'BC-3K_1\dot{C}B'B=0 \tag{5.2.50}$$

$$\begin{aligned}&K_1{}^2B^2\ddot{B}C^3+2K_1{}^2B\dot{B}^2C^3-2BC^3-2K_1{}^2BB'^2C+K_1{}^2B^2B'C'+\\&-K_1{}^2B^2B''C+K_1{}^2B^2\dot{B}\dot{C}C^2=0\end{aligned} \tag{5.2.51}$$

$$C^2\ddot{C}B^2-3B''BC+3\dot{B}\dot{C}BC^2+3B'C'B=0 \tag{5.2.52}$$

Fazendo um estudo deste sistema, procedemos com sua simplificação resolvendo a equação (5.2.50), colocando-a na forma

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{\dot{B}'}{B'} \, , \tag{5.2.53}$$

$(C,B'\neq 0)$, que integrada em relação a t fornece

$$ln(C)=ln(B')+ln(F(\psi)) \, . \tag{5.2.54}$$

Portanto a solução será em função de $B'(t,\psi)$ dada por

$$C(t,\psi)=F(\psi)B'(t,\psi)\ . \tag{5.2.55}$$

Novamente substituindo agora em (5.2.49-52), obtemos a simplificação como

$$3\ddot{B}B'+\ddot{B}'B=0 \tag{5.2.56}$$

$$K_1{}^2B\ddot{B}B'F^3+2K_1{}^2\dot{B}^2B'F^3-2F^3B'-2K_1{}^2B'F+K_1{}^2BF'+K_1{}^2B\dot{B}\dot{B}'F^3=0 \tag{5.2.57}$$

$$F^3\ddot{B}'B+3\dot{B}F^3\ddot{B}'+3F'=0 \tag{5.2.58}$$

A equação (5.2.56) pode ser representada de uma forma mais geral como

$$\frac{D'(t,\psi)}{D(t,\psi)}=0 \tag{5.2.59}$$

$(D(t,\psi)\neq 0)$, onde

$$D(t,\psi)=B^3(t,\psi)\ddot{B}(t,\psi)\ . \tag{5.2.60}$$

Para cumprir a igualdade (5.2.59) temos três casos possíveis para $D(t,\psi)$

$$D(t,\psi)=0 \tag{5.2.61}$$

$$D(t,\psi)=\frac{1}{k}=K \tag{5.2.62}$$

$$D(t,\psi)=\frac{1}{k(t)}=K(t)\ . \tag{5.2.63}$$

O caso dado por (5.2.61) fornece como solução para $B(t,\psi)$

$$B(t,\psi) = f_1(\psi)t + f_2(\psi) . \tag{5.2.64}$$

O caso dado por (5.2.62) terá como equação equivalente

$$\ddot{B} = \frac{1}{kB^3} . \tag{5.2.65}$$

Para poder integrar (5.2.65), multiplicamos a mesma por $\dot{B}$, obtendo

$$\dot{B}\ddot{B} = \frac{\dot{B}}{kB^3} , \tag{5.2.66}$$

que integrada fornece

$$\left(\dot{B}\right)^2 = -\frac{1}{kB^2} + 2G(\psi) . \tag{5.2.67}$$

Colocando (5.2.67) a variáveis separáveis como

$$\frac{dB}{\pm\sqrt{-\frac{1}{kB^2} + 2G(\psi)}} = dt \tag{5.2.68}$$

e integrando novamente, temos

$$\pm\frac{\sqrt{-1 + 2G(\psi)kB^2}}{2kG(\psi)} = t + H(\psi) . \tag{5.2.69}$$

Agora isolando $B(t,\psi)$ na expressão (5.2.69), obtemos como solução

$$B(t,\psi) = \pm\sqrt{\frac{4kG^2(\psi)(t + H(\psi))^2 + 1}{2kG(\psi)}} \ . \tag{5.2.70}$$

O caso dado (5.2.63) tem como solução

$$B(t,\psi) = B_0(\psi) + B_1(\psi)t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{K(t')}{B(t',\psi)^3} dt' \tag{5.2.70.a}$$

onde $B_0(\psi) = B(t,\psi)\big|_{t=0}$ e $B_1(\psi) = \dot{B}(t,\psi)\big|_{t=0}$. Tal solução exige arbitramento das funções *B(t', ψ) e K(t')*. Consideramos neste trabalho apenas o caso apresentado por (5.2.62) que corresponde a solução apresentada (5.2.70). A solução (5.2.64) apresentada para o caso (5.2.61) é apenas um caso particular de (5.2.70).

Substituindo (5.2.70) em (5.2.56-58) obtemos

$$\begin{aligned}
&12K_1^{\,2}G^3F^3kt^2G' + 4K_1^{\,2}G^3F't^2 - 4K_1^{\,2}FG^2G't^2 - 4F^3G't^2G^2 + 16K_1^{\,2}kG^4F^3tH' + \\
&- 8K_1^{\,2}FG^3tH' + 8K_1^{\,2}G^3F'tH - 8F^3tH' + 24K_1^{\,2}kG^3F^3tHG' - 8F^3G'tG^2H + \\
&- 8K_1^{\,2}FG^2G'tH + 16K_1^{\,2}kG^4F^3HH' - 8K_1^{\,2}FG^3HH' - 8F^3G^3HH' + 12K_1^{\,2}kG^3F^3H^2G' + \\
&4K_1^{\,2}G^3F'H^2 - 4K_1^{\,2}FG^2G'H^2 - 4F^3G'H^2G^2 + \frac{K_1^{\,2}GF'}{k^2} - \frac{K_1^{\,2}GF^3G'}{k} + \frac{K_1^{\,2}FG'}{k^2} + \\
&+ F^3G'\sqrt{k} = 0
\end{aligned} \tag{5.2.71}$$

$$(F^3G'k + F')(-G' + 4k^2G't^2G^2 + 8k^2G'tG^2H + 4k^2G'H^2G^2 + 8k^2tG^3H' + 8k^2HG^3H') = 0 \tag{5.2.72}$$

que são equações em função de $G(\psi), H(\psi)$ e $F(\psi)$. Continuamos encontrando a solução para (5.2.72). Para isto resolvemos o primeiro parenteses, pois o segundo fornece solução em função de *t* para as funções que dependem apenas de *ψ*, o que é contraditório. Assim colocando (5.2.72) na forma de variáveis separáveis temos

$$dG = -\frac{dF}{kF^3} \ , \tag{5.2.73}$$

$(F \neq 0)$, que integrada fornece a solução

$$G(\psi) = \frac{1}{2}\frac{1}{kF^2(\psi)} + K_2 \ . \tag{5.2.74}$$

Colocando esta solução em (5.2.71-72), obtemos uma equação restante em termo de constantes dada por

$$2K_1^{\,2}K_2k - 1 = 0 \ , \tag{5.2.75}$$

portanto

$$K_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{kK_1^{\,2}} \ , \tag{5.2.76}$$

$(K_1 \neq 0)$, o que completa a determinação das funções da métrica, sendo K_1 e k constantes e $F(\psi)$ e $H(\psi)$ funções arbitrárias relacionadas com a massa de repouso. As funções restantes são obtidas mediante (5.2.48) e (5.2.55), fornecendo

$$A(t,\psi) = \pm K_1\sqrt{\frac{4kG^2(\psi)(t+H(\psi))^2+1}{2kG(\psi)}} \ . \tag{5.2.77}$$

e

$$C(t,\psi) = \frac{F(\psi)}{2kG^2(\psi)}\frac{\left(4kG^2(\psi)G'(\psi)(t+H(\psi))^2 + 8kG^3(\psi)H'(\psi)(t+H(\psi)) - G'(\psi)\right)}{B(t,\psi)} \tag{5.2.78}$$

5.3 - Singularidades na métrica

Métrica A

De início analisamos as singularidades possíveis na métrica dada por (5.1.3). A função com possibilidade de ser singular em algum ponto é $C(t,\psi)$ dada como

$$C(t,\psi)=\pm\frac{1}{2}\frac{F(\psi)(2t+2K_2)}{\sqrt{(t+K_2)^2-K_3}}\,. \tag{5.3.1}$$

Calculando o limite para $t\to 0$ temos

$$lim_{t\to 0}C(t,\psi)=lim_{t\to 0}\pm\frac{1}{2}\frac{F(\psi)(2t+2K_2)}{\sqrt{(t+K_2)^2-K_3}}=\frac{K_2F(\psi)}{\sqrt{K_2^{\,2}-K_3}} \tag{5.3.2}$$

indicando que a métrica não é necessariamente singular dependendo da forma de $F(\psi)$ e das constantes K_2 e K_3 (deverá ser sempre K_3<0 para uma densidade de energia positiva, ver seção 5.5). Como interpretação física podemos concluir a existência de uma valor determinado para a quinta dimensão em $t=0$, ou seja um valor para a massa de repouso calculada neste ponto. Porém cabe ressaltar a arbitrariedade imposta para esta quantidade em qualquer valor de t, devido a existência da função arbitrária $F(\psi)$. Se atribuirmos a forma $F(\psi)=\psi$ à função arbitrária, teremos que $\lim_{\psi\to 0}C(t,\psi)=0$ $(\forall t \;\; e \;\; K_2,K_3\neq 0)$, e somente existirá a parte espacial e temporal da métrica. Se considerarmos uma singularidade em $t=0$ $(K_2^{\,2}=K_3$=0), teremos que $\lim_{\substack{t\to 0\\ \psi\to 0}}C(t,\psi)=indefinido$, reforçando a interpretação de que não necessariamente deve existir uma singularidade em $t=0$ devida a variável tempo.

Outro ponto interessante de notar é o limite $t\to 0$ das expressões para a parte espacial dada por (5.2.32) e (5.2.33) que são

$$lim_{t\to 0}A(t)=lim_{t\to 0}\pm\sqrt{(t+K_2)^2-K_3}=\pm\sqrt{K_2^{\,2}-K_3} \tag{5.3.3}$$

e

$$lim_{t\to 0}B(t)=lim_{t\to 0}\pm K_1\sqrt{(t+K_2)^2-K_3}=\pm K_1\sqrt{K_2^{\,2}-K_3} \tag{5.3.4}$$

mostrando um possível valor constante $(K_2,K_3\neq 0)$ para as funções da métrica espacial neste ponto , portanto a existência da dimensão espacial.

Métrica B

A métrica (5.1.4) tem um comportamento diferente, já que as funções da parte espacial também possuem dependência em ψ. O fator decisivo para os limites é a função $F(\psi)$ que atua em $C(t,\psi)$ como

$$C(t,\psi) = F(\psi)B'(t,\psi)\ , \tag{5.3.5}$$

e em $B(t,\psi)$ e $A(t,\psi)$como

$$B(t,\psi) = \pm\sqrt{\frac{4kG^2(\psi)(t+H(\psi))^2+1}{2kG(\psi)}} \tag{5.3.6}$$

e

$$A(t,\psi) = K_I B(t,\psi)\ , \tag{5.3.7}$$

através de

$$G(\psi) = \frac{1}{2}\frac{1}{kF^2(\psi)} + K_2\ . \tag{5.3.8}$$

Procedendo com o cálculo do limite $t \to 0$ para (5.3.6) e (5.3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} B(t,\psi) &= \lim_{t\to 0} \pm\sqrt{\frac{4kG^2(\psi)(t+H(\psi))^2+1}{2kG(\psi)}} = \\ &= \pm\sqrt{\frac{H(\psi)^2 + 4K_2kH(\psi)^2F(\psi)^2 + 4K_2{}^2k^2F(\psi)^4 + F(\psi)^4}{F(\psi)^2\left(1+2K_2kF(\psi)^2\right)}} \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

e

$$lim_{t \to 0} A(t,\psi) = K_1 \, lim_{t \to 0} B(t,\psi) \; . \tag{5.3.10}$$

Observando (5.3.9-10), concluímos que não haverá singularidades na parte espacial da métrica devido à variável tempo; dependendo exclusivamente das funções arbitrárias $F(\psi)$ e $H(\psi)$ e da constante K_2 (k se cancela na métrica, ver seção 4.5) o comportamento neste ponto. A massa de repouso, as condições iniciais tem papel fundamental. Também aqui existe arbitrariedade de comportamento, não sendo obrigatória a existência de singularidade mas um possível valor determinado.

Calculando o limite $t \to 0$ para (5.3.5) obtemos

$$\lim_{t \to 0} C(t,\psi) = \lim_{t \to 0} F(\psi) B'(t,\psi) = \tag{5.3.11}$$

$$= \left(FHH' + 6K_2kF^3HH' + 12K_2{}^2k^2F^5HH' + 8K_2{}^3k^3F^7HH' - F'H^2 - 4K_2kF^2F'H^2 + \right.$$
$$\left. - 4K_2{}^2k^2F^4F'H^2 + F^4F'\right) \Big/ \left(F^2 \sqrt{\frac{H^2 + 4K_2kH^2F^2 + 4K_2{}^2k^2H^2F^4 + F^4}{F^2\left(1 + 2K_2kF^2\right)}} \left(1 + 2K_2kF^2\right)^2 \right)$$

mostrando também que, a existência de singularidades na parte de massa da métrica, depende exclusivamente das funções arbitrárias e das constantes, ou seja da massa de repouso, das condições iniciais .

Caso F(ψ)=H(ψ)=ψ

Um cálculo interessante é atribuir uma forma às funções arbitrárias e obter os limites em $t \to 0$ e logo em $\psi \to 0$. Para isto novamente consideramos que

$$F(\psi) = H(\psi) = \psi \; , \tag{5.3.12}$$

e substituímos estas expressões em (5.3.9-11), calculando o limite $\psi \to 0$, obtemos assim que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \psi \to 0}} C(t,\psi) = 0 \ , \tag{5.3.13}$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \psi \to 0}} B(t,\psi) = 1 \ , \tag{5.3.14}$$

e

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \psi \to 0}} A(t,\psi) = K_1 \ . \tag{5.3.15}$$

Podemos interpretar destas três últimas equações a existência da dimensão espacial em $t = 0$ para $\psi = 0$, ou seja, sem massa de repouso; é importante ressaltar que este limite é válido tomando-se primeiramente o limite em $t \to 0$ e logo em $\psi \to 0$, do contrário não existirá o limite obtendo-se ∞. Não podemos concluir nada daqui sobre a curvatura do espaço em questão, pois isto depende das componentes do tensor de curvatura de Riemann; nem sobre as condições iniciais de densidade e pressão devidas ao tensor energia-momento.

O cálculo do limite $\psi \to 0$ para $\forall t > 0$, das funções (5.3.5-7) da métrica constitui uma singularidade, de fato obtemos que

$$\lim_{\psi \to 0} C(t,\psi) = \lim_{\psi \to 0} B(t,\psi) = \lim_{\psi \to 0} A(t,\psi) = \infty \qquad (\forall t > 0) \ , \tag{5.3.16}$$

mostrando a impossibilidade de massa de repouso nula para $\forall t > 0$, neste caso, sendo possível unicamente em $t = 0$.

Como conclusão podemos alegar a importância fundamental da massa de repouso nas singularidades da métrica, bem como das constantes das funções. As constantes para a métrica (5.1.4), *métrica B*, estão vinculadas pela expressão (5.2.79), o que mostra que necessariamente estão relacionadas com as condições iniciais do modelo, podendo existir um ponto inicial com quantidades bem definidas.

A seguir colocamos em tabela o cálculo dos pontos limites das funções das métricas (5.1.3) e (5.1.4), considerando $F(\psi) = H(\psi) = \psi$:

Tabela (2)

Pontos Limites	*Métrica A*			*Métrica B*		
	$A(t)$	$B(t)$	$C(t,\psi)$	$A(t,\psi)$	$B(t,\psi)$	$C(t,\psi)$
$t \to 0,\ \psi \to 0$	$\pm K$ * 0	$\pm K_1 K$ * 0	0 * indefinido	$\pm K_1$ $^{(t,\psi)}$ $\pm\infty$ $^{(\psi,t)}$	± 1 $^{(t,\psi)}$ $\pm\infty$ $^{(\psi,t)}$	0 $^{(t,\psi)}$ $\pm\infty$ $^{(\psi,t)}$
$t \to 0,\ \psi \to \infty$	$\pm K$ * 0	$\pm K_1 K$ * 0	$\pm\infty$ indefinido	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$t \to \infty,\ \psi \to 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm-\infty$
$t \to \infty,\ \psi \to \infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

* para $K_2, K_3 \neq 0$.

$K = \sqrt{K_2^{\,2} - K_3}$.

5.4 - Tensor de Curvatura de Riemann

Utilizando a expressão (2.7.3), com índices somando de 0 a 4, calculamos as componentes do tensor de curvatura de Riemann. Verifica-se que elas não são todas nulas, para ambas soluções *A* e *B*, indicando que os dois espaços em questão possuem curvatura. A seguir analisamos certos limites importante para cada solução, nos sentido de localizar possíveis singularidades.

Métrica A

Primeiramente procedendo com o cálculo de dito tensor para a métrica obtida de (5.1.3), utilizando o software MAPLE-GRTensor [46],[47], obtemos como componentes independentes

$$R^{t}{}_{xtx} = -\frac{K_3}{(t+K_2)^2 - K_3} \tag{5.4.1}$$

$$R^{t}{}_{yty} = R^{t}{}_{ztz} = -R^{x}{}_{yxy} = -R^{x}{}_{zxz} = -R^{y}{}_{zyz} = -\frac{K_1{}^2 e^{2x} K_3}{(t+K_2)^2 - K_3} \tag{5.4.2}$$

$$R^{t}{}_{\psi t\psi} = -3R^{x}{}_{\psi x\psi} = -3R^{y}{}_{\psi y\psi} = -3R^{z}{}_{\psi z\psi} = \frac{F^2(\psi)K_3(t+K_2)^2}{\left((t+K_2)^2 - K_3\right)^3} \tag{5.4.3}$$

Observando as componentes percebemos no limite $t \to \infty$ a anulação das componentes, indicando que o espaço em questão é assintoticamente plano. Já no limite $t \to 0$, não necessariamente haverá uma curvatura singular, devido às constantes K_2 e K_3 que poderão fornecer um valor determinado A seguir colocamos uma tabela com os valores nos pontos limites mais importantes, consideramos para isto $F(\psi) = \psi$:

Tabela (3)

Pontos Limites	Comp. (5.4.1)	Comp. (5.4.2)	Comp. (5.4.3)
$t \to 0,\ \psi \to 0$	K * ∞	$K_1 e^{2x}$K * ∞	0 * Indef.
$t \to 0,\ \psi \to \infty$	K * ∞	$K_1 e^{2x}$K * ∞	∞ ∞
$t \to \infty,\ \psi \to 0$	0	0	0
$t \to \infty,\ \psi \to \infty$	0	0	0 $^{(t,\psi)}$ ∞ $^{(\psi,t)}$

* para $K_2, K_3 \neq 0$.

$$\mathrm{K} = \frac{K_3}{K_3 - K_2^{\ 2}}.$$

É importante notar que em $t \to \infty$ as componentes são todas nulas independente do valor de ψ, indicando que o espaço tende a ser plano neste limite independente do valor da massa de repouso, porém tomando primeiramente o limite $\psi \to \infty$ e logo $t \to \infty$ a componente de curvatura (5.4.3) torna-se singular (∞) indicando uma possível curvatura assintoticamente singular em $t \to \infty$. As constantes indicadas por K são relacionadas com as condições iniciais.

Métrica B

As componentes do tensor de curvatura de Riemann, da métrica (5.1.4) são bastante extensas, sendo necessário introduzir novas funções, visando simplificar as expressões. Introduzimos quatro funções que são dadas por

$$M(t,\psi) = F(\psi)^4\left(K_1^4 + t^2 + 2tH(\psi) + H(\psi)^2\right) + \\ + F(\psi)^2\left(2K_1^2t^2 + 4K_1^2tH(\psi) + 2K_1^2H(\psi)^2\right) + H(\psi)\left(2tK_1^4 + K_1^4H(\psi)\right) + \\ + K_1^4t^2 \tag{5.4.4}$$

$$N(\psi) = K_1^2 + F(\psi)^2 \tag{5.4.5}$$

$$Q(\psi) = N(\psi)F'(\psi) \tag{5.4.6}$$

$$P(t,\psi) = [MF^2F' - MQ + (-2F^2H^2Q - 4F^2HQt - 2F^2Qt^2)N + (4HQt + 2Qt^2 + 2QH^2)N^2 + \\ + (-FHH' - FH't)N^3]^2 \tag{5.4.7}$$

De posse destas funções podemos escrever as componentes do tensor de curvatura de maneira simplificada como

$$R^t{}_{xtx} = \frac{N(\psi)F(\psi)^2\left(F(\psi)^2 - N(\psi)\right)^2}{M(t,\psi)} \tag{5.4.8}$$

$$R^t{}_{yty} = R^t{}_{ztz} = -R^x{}_{zxz} = -R^x{}_{yxy} = -R^y{}_{zyz} = \frac{e^{2x}F(\psi)^2\left(F(\psi)^2 - N(\psi)\right)N(\psi)}{M(t,\psi)} \tag{5.4.9}$$

$$R^t{}_{\psi t\psi} = -3R^x{}_{\psi x\psi} = -3R^y{}_{\psi y\psi} = -3R^z{}_{\psi z\psi} = 3\frac{F(\psi)^2\left(N(\psi) - F(\psi)^2\right)P(t,\psi)}{M(t,\psi)^3N(\psi)} \tag{5.4.10}$$

Caso $F(\psi)=H(\psi)=\psi$

A seguir colocamos a tabela com os pontos limites, considerando novamente que $F(\psi)=H(\psi)=\psi$

Tabela (4)

Pontos Limites	Comp. (5.4.8)	Comp. (5.4.9)	Comp. (5.4.10)
$t \to 0,\ \psi \to 0$	$K_1 k$ $^{(t,\psi)}$ 0 $^{(\psi,t)}$	ke^{2x} $^{(t,\psi)}$ 0 $^{(\psi,t)}$	0
$t \to 0,\ \psi \to \infty$	0	0	0
$t \to \infty,\ \psi \to 0$	0	0	0
$t \to \infty,\ \psi \to \infty$	0	0	0

Vemos pela tabela acima, que o limite em $t \to 0$ e $\psi \to 0$ não é definido para todas as componentes, podendo assumir tanto um valor definido ou zero, dependendo da ordem em que o limite é tomado. Em geral o modelo representado pela métrica (5.1.4), *métrica B*, não apresenta singularidades na curvatura, sendo assintoticamente plano.

5.5 – Tensor energia momento induzido

Um objeto importante de ser obtido dentro do contexto da teoria ETM 5D é o tensor Energia-Momento induzido da 5ª coordenada; que pode esclarecer um pouco mais sobre o tipo de distribuição de matéria a que o modelo se refere, sob o ponto de vista da teoria da RG em 4D. A expressão que define o tensor induzido (4.1.9) é dada por

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\nabla_\beta \partial_\alpha \phi}{\phi}\right) - \frac{\varepsilon}{2\phi^2}\left[\left(\frac{\partial_4\phi\, \partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi}\right) - \partial_4\partial_4 g_{\alpha\beta} + g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\gamma}\partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta}\partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{g_{\alpha\beta}}{4}\left(\partial_4 g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta} + \left(g^{\gamma\delta}\partial_4 g_{\gamma\delta}\right)^2\right)\right]\right\} \qquad (5.5.1)$$

onde ϕ é um escalar relacionado como $\varepsilon\phi^2 = g_{44}$, e $\varepsilon = -1$ segundo as métricas (4.1.2), (5.1.3) e (5.1.4).

Métrica A

Primeiramente calculando a expressão (5.5.1) para a métrica (5.1.3) obtemos as seguintes componentes:

$$T_{tt}^{(1)} = 6\frac{K_3}{\pi\left(\left(t+K_2\right)^2 - K_3\right)^2} \qquad (5.5.2)$$

$$T_{xx}^{(1)} = 2\frac{K_3}{\pi\left(\left(t+K_2\right)^2 - K_3\right)} \qquad (5.5.3)$$

$$T_{yy}^{(1)} = \frac{e^{2x}K_1^{\,2}K_3}{\pi\left(\left(t+K_2\right)^2 - K_3\right)^{3/2}} \qquad (5.5.4)$$

$$T_{zz}^{(1)} = \frac{e^{2x}K_1^{\,2}K_3}{\pi\left(\left(t+K_2\right)^2 - K_3\right)^{3/2}}\ . \qquad (5.5.5)$$

A seguir levando em conta a anisotropia do modelo cosmológico Bianchi tipo V, consideramos a expressão do tensor energia momento para um fluido fonte com simetria esférica e anisotrópico, dado por

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p_a)u_\alpha u_\beta + p_a g_{\alpha\beta} + (p_r - p_a)\chi_\alpha \chi_\beta \,, \tag{5.5.6}$$

onde ρ é a densidade de energia, p_r é a pressão na direção radial, p_a é a pressão na direção azimutal (perpendicular a p_r), u_α é a tetra-velocidade, e χ_α é um vetor unitário do tipo espaço ortogonal a u_α. Seguindo o processo de Wesson [7], consideramos

$$u^\alpha = (u^0,0,0,0), \qquad \chi^\alpha = (0,\chi^1,0,0) \tag{5.5.7}$$

e

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \qquad \chi^\alpha \chi_\alpha = 1, \qquad u^\alpha \chi_\alpha = 0 \,, \tag{5.5.8}$$

de maneira que aplicando a métrica (5.1.3) em (5.5.6) , e em seguida igualando a (5.5.2-5), obtém-se

$$\rho = -6\frac{K_3}{\pi\left((t+K_2)^2 - K_3\right)^2} \tag{5.5.9}$$

$$p_r = \frac{\rho}{3}, \qquad p_a = \frac{\rho}{6} \,. \tag{5.5.10}$$

De (5.5.9) vemos que K_3 é fortemente relacionada com a densidade de energia. Assim de (5.5.9) e (5.5.10) conclui-se que

$$\rho = p_r + 4p_a \,, \tag{5.5.11}$$

que pode ser considerada como uma distribuição de energia do tipo radiação. É importante considerar os limites para a expressão de densidade (5.5.9) em $t \to 0$ e $t \to \infty$, fornecendo como resultado

$$\lim_{t\to 0} \rho = -6\frac{K_3}{\pi\left(K_3 - K_2{}^2\right)^2} , \qquad (5.5.12)$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \rho = 0 . \qquad (5.5.13)$$

De (5.5.9) e (5.5.12) vemos que para obter uma densidade de energia positiva obrigatoriamente será $K_3 < 0$, e a mesma será finita; já com $K_3 = 0$ a densidade de energia se torna nula. O limite (5.5.13) esta em conformidade com os resultados da Tabela (2) para a curvatura no infinito temporal, tornando-se nula. Cabe ressaltar, de (5.5.9-10), que as constantes K_2 e K_3 estão fortemente relacionadas às condições iniciais do modelo, enquanto que a constante K_1 não desempenha nenhum papel neste sentido.

Métrica B

Caso $F(\psi)=H(\psi)=\psi$

Para a métrica (5.1.4) procedemos da mesma forma calculando o tensor energia-momento induzido (5.5.1), porém não colocamos as expressões aqui de maneira explicita devido a extensão das mesmas impossibilitando uma visualização aproveitável; a seguir utilizando novamente as expressões (5.5.6-8) ,e finalmente igualando os resultados encontramos

$$\rho = \frac{6}{\pi}\frac{K_1{}^4\psi^4\left(K_1{}^2+\psi^2\right)^2}{h_1{}^2(t,\psi)} , \qquad (5.5.14)$$

$$p_r = \frac{1}{4\pi}\frac{h_2(t,\psi)}{\psi^2 h_1{}^2(t,\psi)h_3(t,\psi)\left(K_1{}^2+\psi^2\right)^2} , \qquad (5.5.15)$$

e

$$p_a = \frac{1}{4\pi} \frac{h_2(t,\psi)}{\psi^2 h_1^2(t,\psi) h_3(t,\psi) (K_1^2 + \psi^2)^2} , \tag{5.5.16}$$

onde h_1, h_2 e h_3 são funções de t e ψ muito extensas. Percebemos aqui uma equação de estado mais complicada, devida a dependência da métrica na variável ψ, porém, a equação não foi obtida devido a sua complexidade. Uma relação importante é dada por

$$\frac{p_r}{p_a} = 1 , \tag{5.5.17}$$

onde obtemos $p_r = p_a$, que corresponderá a uma distribuição de fluído fonte com simetria esférica isotrópica. Portanto a *métrica B* (5.1.4) representa uma distribuição isotrópica, fato que não é verdadeiro na *métrica A* (5.1.3), que representa necessariamente uma distribuição anisotrópica. Cabe ressaltar que segundo (5.5.14-16) a constante K_1 está relacionada com as condições iniciais de densidade e consequentemente de pressão; já a constante k não influência de nenhuma maneira os resultados obtidos, já que é cancelada na métrica, portanto não aparece.

Caso $F(\psi)=H(\psi)=\psi$

Um cálculo necessário é o dos limites da expressão de densidade nas variáveis t e ψ, de maneira a visualizar a evolução da distribuição de energia no modelo. Para isto primeiramente tomamos $F(\psi)=H(\psi)=\psi$, com o limite em $t \to 0$ obtendo

$$lim_{t\to 0}\, \rho = lim_{t \to 0} \frac{6}{\pi} \frac{K_1^4 \psi^4 (K_1^2 + \psi^2)^2}{h_1^2(t,\psi)} = \frac{6}{\pi} \frac{K_1^4 (K_1^4 + 2\psi^2 K_1^2 + \psi^4)}{(\psi^4 + K_1^4 \psi^2 + K_1^4 + 2\psi^2 K_1^2)^2} . \tag{5.5.18}$$

A expressão (5.5.18) sugere uma densidade definida em $t=0$. Já o limite em $\psi \to 0$ fornece

$$lim_{\psi\to 0}\,\rho = lim_{\psi\to 0}\frac{6}{\pi}\frac{K_1^{\,4}\psi^4\left(K_1^{\,2}+\psi^2\right)^2}{h_1^{\,2}(t,\psi)} = 0 \qquad (\forall t>0) \quad , \tag{5.5.19}$$

o que esta de acordo com o esperado, já que a variável ψ está relacionada com a energia de repouso (massa de repouso). Porém o limite em $t\to 0$ e $\psi\to 0$ para a densidade não é definido, de maneira que tomando o limite $\psi\to 0$ da expressão (5.5.18) obtém-se

$$\lim_{\psi\to 0}\left[\lim_{t\to 0}\rho\right] = \lim_{\psi\to 0}\frac{6}{\pi}\frac{K_1^{\,4}\left(K_1^{\,4}+2\psi^2K_1^{\,2}+\psi^4\right)}{\left(\psi^4+K_1^{\,4}\psi^2+K_1^{\,4}+2\psi^2K_1^{\,2}\right)^2} = \frac{6}{\pi} \ . \tag{5.5.20}$$

Portanto conclui-se que o ponto inicial $t=0$ possui uma densidade definida de energia no modelo representado pela *métrica B*, para o caso $F(\psi)=H(\psi)=\psi$, sendo que este resultado esta de acordo com os limites da curvatura obtidos na Tabela (4) para o mesmo caso. A evolução para $t\to\infty$ fornece o seguinte limite

$$lim_{t\to\infty}\,\rho = lim_{t\to\infty}\frac{6}{\pi}\frac{K_1^{\,4}\psi^4\left(K_1^{\,2}+\psi^2\right)^2}{h_1^{\,2}(t,\psi)} = 0 \quad , \tag{5.5.21}$$

resultado que indica um modelo assintoticamente plano, em concordância com os resultados para a curvatura na Tabela (4).

5.6 – Escalar de Kretschmann

No sentido de verificar uma singularidade real nas métricas (5.1.3) e (5.1.4) procedemos com o cálculo do escalar de Kretschmann que consiste na contração de todos os índices do tensor de curvatura de Riemann, assim

$$Krets = R_{abcd}R^{abcd} \ . \tag{5.6.1}$$

Métrica A

Para a métrica (5.1.3) obtemos então

$$Krets = \frac{1}{4}\frac{\left(3K_2^{\,4} + 12K_2^{\,3}t - 32K_3K_2^{\,2} + 18t^2K_2^{\,2} + 12t^3K_2 - 64K_3K_2t + 3t^4 + 240K_3^{\,2} - 32K_3t^2\right)}{\left(-(t+K_2)^2 + K_3\right)^4} \tag{5.6.2}$$

que diverge em

$$t = -K_2 \pm \sqrt{K_3}\ , \tag{5.6.3}$$

que é o mesmo ponto de divergência das funções da métrica.

Portanto como K_3<0 para uma densidade positiva, o valor de t torna-se imaginário, assim o escalar de Kretschmann não diverge em nenhum tempo real, sugerindo uma distribuição finita de energia em $t=0$. Somente existe a divergência em $t=-K_2$ quando K_3=0, de maneira que a densidade de energia torna-se nula; pode-se pensar que neste caso a energia seria infinitamente concentrada e a equação de estado corresponderia ao vácuo.

Métrica B

Para a métrica (5.1.4) obtém-se o seguinte escalar

$$Krets = \frac{\left(72\left(K_1^{\,2} + F(\psi)^2\right)^4 F(\psi)^8 K_1^{\,8}\right)}{f(t,\psi)} \tag{5.6.4}$$

$$\begin{aligned} f(t,\psi) = (\ &(\psi)^4 K_1^{\,4} + t^2K_1^{\,4} + 2t^2K_1^{\,2}F(\psi)^2 + t^2F(\psi)^4 + 2tH(\psi)K_1^{\,4} + 4tH(\psi)K_1^{\,2}F(\psi)^2 + \\ &+ 2tH(\psi)F(\psi)^4 + H(\psi)^2K_1^{\,4} + 2H(\psi)^2K_1^{\,2}F(\psi)^2 + H(\psi)^2F(\psi)^4\ )^4 \end{aligned}$$

que não diverge para nenhum valor real de t. Portanto como no caso anterior, sugere uma distribuição finita de energia comandada pelas funções $F(\psi)$ e $H(\psi)$ e pela constante K_1.

6 - CONCLUSÃO

A teoria ETM é classificada como uma teoria de gravitação invariante por escala, mas difere das outras teorias propostas no sentido de introduzir a massa de repouso como uma quantidade extensiva compondo a quinta dimensão. É comparada às teorias do tipo KK apenas em virtude do seu numero de dimensões. Uma característica importante desta teoria consiste em conter a teoria da RG como um caso particular; sendo a RG obtida mais especificamente no limite quando a variação da massa no tempo é nula. Sendo assim, é possível obter todos os resultados da teoria da RG no limite apropriado.

Muitos trabalhos foram realizados tendo a teoria ETM como base. Uma das áreas de aplicação é a Cosmologia, com trabalhos de Ponce de Leon [29] introduzindo a generalização da métrica cosmológica FRW plana e de Sitter em cinco dimensões; também com trabalhos de Roque e Seiler [43] encontrando as primeiras famílias de soluções anisotrópicas para o modelo cosmológico Bianchi tipo I, incluindo uma generalização da métrica Kasner.

Nesta dissertação apresentamos duas famílias de soluções para o modelo cosmológico Bianchi tipo V anisotrópico com simetria rotacional local (L.R.S), correspondente a um universo aberto. As duas métricas apresentam arbitrariedade de forma para as funções da quinta coordenada, demonstrando um certo comportamento aleatório da massa de repouso, porém considerando o caso particular de uma função linear da quinta coordenada obtém-se alguns comportamentos interessantes. As duas soluções correspondem à *métrica A* (5.1.3) e à *métrica B* (5.1.4). Foram estudadas as possíveis singularidades nas duas métricas considerando as funções na quinta coordenada como arbitrária e também como lineares na mesma, obtendo-se assim os casos limites $t \rightarrow 0$ e $\psi \rightarrow 0$. O tensor de curvatura de Riemann foi calculado para as duas métricas, demonstrando que ambos espaços possuem curvatura não-nula.

Considerando as funções lineares arbitrárias da quinta coordenada, foram calculados os diversos limites nas componentes do tensor de curvatura para as duas métricas, obtendo-se curvaturas nulas para a *métrica A* e curvaturas nulas para a *métrica B*, ou seja o universo representado por ambas as métricas é assintoticamente plano, neste caso.

Outro objeto importante na teoria ETM, que foi obtido, é o tensor Energia-Momento induzido, o qual possibilita visualizar as características da distribuição de energia para a métrica correspondente em cinco dimensões. Obteve-se assim uma equação de estado do tipo radiação com fluído fonte anisotrópico para a *métrica A*, sendo que a densidade de energia inicial não necessariamente é nula dependendo do valor das constantes; no infinito a densidade se anula. Para a *métrica B* não foi obtida a equação de estado, porém foi visualizada uma distribuição de fluído fonte isotrópico; o caso das funções arbitrárias tomadas como lineares na quinta dimensão demonstrou que a densidade de energia inicial não é nula, e a mesma se anula no infinito.

Por último foi obtido o escalar de Kretschmann, para verificar a existência de singularidades efetivas em ambas as métricas; como resultado não foram obtidas singularidades do escalar de Kretschmann, indicando que os Universos representados por ambas as métricas possuem distribuições finitas de energias.

O trabalho apresenta uma investigação inicial sobre o modelo Bianchi tipo V, devendo ainda ser aprofundado em trabalhos futuros. Um estudo interessante de ser realizado é encontrar as soluções das equações geodésicas para o modelo, no sentido de verificar a variação da massa de repouso em relação ao tempo. Também é interessante analisar o comportamento das soluções obtidas para diversas formas das funções arbitrárias na quinta coordenada, e verificar a interpretação do ponto de vista fisico.

Outro modelo cosmológico importante corresponde a Bianchi tipo IX, representando um universo fechado; e deve ser investigado em trabalhos futuros dentro do contexto da teoria ETM no sentido de encontrar novas soluções e verificar seus comportamentos.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.M.Overduin and P.S.Wesson and Gravity Probe-B Hansen Physics Laboratories Stanford University, Kaluza-Klein Gravity. preprint gr-qc/9805018, 7 May 1998.

[2] P.S.Wesson, J.Ponce de Leon, H.Liu and B.Mashhoon, D.Kalligas and C.W.F.Everitt, A. Billyard, P.Lim and J.Overduin, A Theory of Space, Time and Matter. Inter.Journal of Modern Physics A. Vol. 11. No. 18 (1996).

[3] P.S.Wesson, A new approach to scale-invariant gravity. Astron.Astrophys.,119, 145-152 (1983).

[4] P.S.Wesson and J. Ponce de Leon, Kaluza-Klein equations, Einstein's equations, and na effective energy-momentum tensor. J.Math. Phys. Vol. 33, No.11, 3883-3887. November 1992.

[5] Guang-wen MA, Wessons Gravity and Mach's principle. Physics Letters A, Vol. 146, No. 7-8, 375-377. June 1990.

[6] P.H.Lim and P.S.Wesson, The Perihelion Problem in Kaluza-Klein Gravity. The Astrophysical Journal, 397: L91-L94, 1992 October.

[7] Hongya Liu and P.S.Wesson, Exact solutions of general relativity derived from 5-D "black hole" solutions of Kaluza-Klein theory. J.Math Phys. Vol. 33, No. 11, 3888-3891, November 1992.

[8] P.S.Wesson, Coments on a posible change with cosmological time in the rest masses of particles. Astron. Astrophys., 189, 4-6, (1998).

[9] P.S.Wesson, Astrophysical data and cosmological solutions of a Kaluza-Klein theory of gravity. Astron. Astrophys., 166, 1-3, (1986).

[10] P.S.Wesson. Clarification of an Extended Theory of Gravity and a Reply to GrØn and Soleng. Gen.Rel.Gravit., Vol.22, No. 6, 707-713, 1990.

[11] Dirac, P.A.M. (1937). Nature, 139, 323.

[12] Dirac, P.A.M. (1973). Proc.Roy.Soc.London, A 333, 403.

[13] Dirac, P.A.M. (1974). Proc.Roy.Soc.London, A 338, 439.

[14] Hoyle,F., and Narlikar, J.V. (1971). Nature, 233, 41.

[15] Hoyle,F., and Narlikar, J.V. (1974). Action at a Distance in Physics and Cosmology, (Freeman, San Francisco).

[16] Canuto, V., Adams, P.J., Hsieh, S.-H., and Tsiang, E. (1977). Phys. Ver. D, 16, 1643.

[17] Canuto, V., and Hsieh, S.-H. (1978).. Astron.Astrophys., 65, 389.

[18] P.S.Wesson, (1978). Cosmology and Geophysics, (Oxford University Press, Oxford/New York).

[19] J.Ponce de Leon and P.S.Wesson, J.Math.Phys. 34, 4080 (1993).

[20] R.D.Sorkin, Phys.Rev. Lett. 51, 87 (1983).

[21] D.J.Gross and M.J.Perry, Nucl.Phys. B226, 29 (1983).

[22] A.Davidson and D.A.Owen, Phys. Lett. B115, 247 (1985).

[23] T.Dereli, Phys. Lett. B161, 307 (1985).

[24] H.Liu, Gen.Rel.Grav. 23, 759 (1991).

[25] G.W.Gibbons, Antigravitating black hole solitons with scalar hair in N=4 supergravity, Nucl.Phys. B207 (1982) 337.

[26] T.Matos, Solitons in five-dimensional gravity, Gen.Rel.Grav. 19 (1987) 481.

[27] P.S.Wesson and J.Ponce de Leon, Class. Quant. Grav. 11, 1341 (1994).

[28] S.Chatterjee, Astron. Astrophys., 230, 1 (1990).

[29] J.Ponce de Leon, Cosmological models in a Kaluza-Klein theory with variable rest mass, Gen.Rel.Grav. 20 (1988) 539.

[30] P.S.Wesson, The properties of matter in Kaluza-Klein cosmology, Mod.Phys.Lett, A7 (1992) 921.

[31] P.S.Wesson, A physical interpretation of Kaluza-Klein cosmology, Astrophys. J. 394 (1992) 19.

[32] P.S.Wesson, An embedding for the bing bang, Astrophys. J. 436 (1994) 547.

[33] P.S.Wesson and H.Liu, Fully covariant cosmology and its astrophysical implications, Astrophys. J. 440 (1995) 1.

[34] A.Billyard and P.S.Wesson, Waves in five-dimensional relativity theory, Gen.Rel.Grav. 28 (1996) 129.

[35] P.S.Wesson and J.Ponce de Leon, The equations of motions in Kaluza-Klein cosmology and its implications for astrophysics, Astron. Astrophys. 294 (1995) 1.

[36] H.Liu and P.S.Wesson, Comological solutions and their effective properties of matter in Kaluza-Klein theory, Int. J.Mod. Phys. D3 (1994) 627.

[37] D.J.McManus, Five-dimensional cosmological models in induced matter theory, J.Math.Phys. 35 (1994) 4889.

[38] A.A.Coley, Higer-dimensional vacuum cosmologies, Astrophys.J. 427 (1994) 585.

[39] A.A.Coley and D.J.McManus, A family of cosmological solutions in higer-dimensional Einstein gravity,J.Math.Phys. 36 (1995) 335.

[40] P.S.Wesson and J.Ponce de Leon, Kaluza-Klein theory and Machian cosmology, Gen.Rel.Grav. 26 (1994) 555.

[41] B.Mashhoon, H.Liu and P.S.Wesson, Particle masses and the cosmological constant in Kaluza-Klein theory, Phys.Lett. 331B (1994) 305.

[42] H.Liu and B.Mashhoon, A Machian interpretation of the cosmological constant, Ann.Phys. (Leipzig) 4 (1995) 565.

[43] W.L.Roque and W.M.Seiler, Anisotropic solutions in the 5D space-time-mass theory, Gen.Rel.Grav. 23 (1991) 1151.

[44] W.L.Roque and G.F.R.Ellis, The Automorphism Group and Field Equations for Bianchi Universes. Galaxies, Axisymmetrics Systems and Relativity, Ed.by M.A.H. MacCALLUM, 55-73, (1985).

[45] D.Kramer, H.Stephani, E.Herlt, M.MacCALLUM, E.Schmutzer, Exact Solutions of Einstein's Field Equations. (1980).

[46] MAPLE and MAPLE V are registered trademarks of Waterloo Maple Inc. WATERLOO MAPLE is a trademark of Waterloo Maple Inc.

[47] Peter Musgrave, Denis Pollney and Kayll Lake (1996), GRTensorII software. Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

[48] R. Genzel et al. MNRAS 291 (1997) 219.

[49] R. Beck et al. Nature 397 (1999) 324.