

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
APLICADA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

**O USO DO MÉTODO LTS_N NA OBTENÇÃO DE PARÂMETROS
DE BLINDAGENS MÚLTIPLAS PARA NÊUTRONS E FÓTONS,
USANDO MODELO DE MULTIGRUPO**

por

Laci Maria Francio

Dissertação submetida como requisito parcial
para obter o grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Volnei Borges

Orientador

Porto Alegre, abril de 2000

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo o uso do método LTS_N para resolver a equação de transporte para uma placa plana heterogênea, usando o modelo de multigrupo em energia. Os cálculos do fluxo de fótons e nêutrons, da taxa de dose absorvida e do fator de "build-up" foram realizados considerando espalhamento isotrópico e condição de contorno tipo vácuo. A aplicação dessa metodologia permitiu obter valores de diversos parâmetros de blindagens que podem ser usados para determinar a espessura mínima necessária para atenuar as radiações a níveis que forneçam taxas de dose absorvida compatíveis com as estabelecidas em normas. Os valores numéricos encontrados apresentam resultados físicos esperados e mostram que o método LTS_N constitui-se em uma ferramenta matemática útil para o estudo quantitativo de parâmetros de blindagem.

ABSTRACT

This work aim is the use of the LTS_N method for solving the transport equation to a heterogeneous slab, using the multigroup model in energy. The photons and neutrons flux calculations concerning the absorbed dose rate and of the build-up factor were accomplished considering isotropic scattering and boundary condition of the vacuum type. The application of that methodology let us to obtain result of diverse shield parameters that can be used to determine the necessary least thickness to attenuate the radiation at levels that supply absorbed dose rates compatible with the established ones in norms. The numerical values present expected physical results and show that LTS_N method is constitutes an useful mathematical tool for the quantitative study of shield parameters.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Espessura da placa
A	Matriz obtida pela aplicação das condições de contorno
$A_{GN}(s)$	Matriz gerada pelo método LTS_N com G grupos de energia
$A_{GN}^{-1}(s)$	Matriz inversa $A_{GN}(s)$
adj	Matriz adjunta
B	Blocos ou submatrizes de ordem n
$B(x)$	Matriz da transformada inversa de Laplace $A_N^{-1}(s)$
$B^+(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores positivos
$B^-(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores negativos
$B_{GN}^r(x)$	Matriz das componentes do fluxo angular do grupo g na posição x da região r
D	Matriz diagonal dos autovalores de A
det	Determinante
E_i	Energia da radiação
f_{gm}	Fluxo angular incidente em $x=0$ com direção μ_m e grupo g
G	Número de grupos em energia
g_{gm}	Fluxo angular incidente em $x = a$ com direção μ_m e grupo g
I	Matriz identidade
L	Grau de anisotropia

\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
N	Número de pontos da quadratura de Gauss
P_k^r	Matriz dos coeficientes da decomposição em frações parciais de $A_N(s)$ na região r
$Q_{gm}(x)$	Termo de fonte externa de nêutrons na direção μ_m e grupo g na posição x
R	Número de regiões da placa plana
S_k^r	Raízes do polinômio característico da matriz $A_N(s)$ ou $A_{GN}(s)$ na região r
T	Matriz triangular superior
U	Matriz unitária
U^T	Matriz Transposta da matriz U
x	Variável espacial na geometria da placa
X_R	Espessura da placa plana
X	Matriz de autovetores
X^{-1}	Matriz inversa de X
μ_m	Raízes do polinômio de Legendre
ω_m	Pesos da quadratura de Gauss
$\sigma_{sg' \rightarrow g, l}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g e grau de anisotropia l
$\sigma_{sg' \rightarrow g, 0}^r$	Seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g , grau de anisotropia 0, da região r
σ_{Tg}	Seção de choque macroscópica total de nêutrons

σ_{Tg}^r	Seção de choque macroscópica total de nêutrons da região r
$\bar{\Psi}_{GN}^r(s)$	Fluxo angular transformado nas N direções e G grupos na região r
$\bar{\Psi}_{gm}^r(s)$	Fluxo angular transformado na direção μ_m para o g-ésimo grupo e região r
$\Psi_{GN}^r(x)$	Fluxo angular em N direções e G grupos na região r
$\Psi_{GN}^r(0)$	Fluxo angular em N direções e G grupos na região r em $x=0$.
$\Psi_{gm}^r(x)$	Fluxo angular na direção μ_m para o g-ésimo grupo e região r
$\Psi_{GN}^{*r}(0)$	Fluxo angular modificado originado pela mudança de base em $x=0$ com G grupos de energia e região r
$\Psi_{gm}^{*r}(0)$	Fluxo angular modificado em $x=0$ na direção μ_m para o g-ésimo grupo e região r
$\Psi_{RGN}(x)$	Fluxo angular em N direções, G grupos de energia em uma placa plana heterogênea de R regiões
$\Psi_{RGN}^*(0)$	Fluxo angular modificado originado pela mudança de base em $x=0$ com G grupos de energia em uma placa plana heterogênea de R regiões

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. NÊUTRONS E FÓTONS GAMA.....	4
2.1 Processos de interação da radiação com a matéria	4
2.2 Exposição e Doses de Radiação	7
2.2.1 Exposição	8
2.2.2 Taxa de Exposição	8
2.2.3 Dose absorvida	9
2.2.4 Taxa de dose absorvida	9
2.2.5 Fator de "build-up"	11
2.2.6 Dose equivalente	12
3. SOLUÇÃO LTS_N PARA PLACA PLANA HETEROGÊNEA E MODELO DE MULTIGRUPO.....	13
3.1 Inversão da matriz $\bar{A}_{GN}(s)$	21
3.1.1 Algoritmo de Schur.....	22
3.1.2 Método da diagonalização.....	25
4. METODOLOGIA	28
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	31
5.1 Problema 5.1	31
5.2 Problema 5.2	34
5.3 Problema 5.3.....	37

5.4 Problema 5.4	39
6. CONCLUSÕES.....	42
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	44

LISTA DE TABELAS

	Pag.
5.1 Parâmetros para o problema 5.1.....	32
5.2 Taxa de dose absorvida no final das regiões R1, R2 e R3	33
5.3 Parâmetros para o problema 5.2.....	35
5.4 Taxa de dose absorvida para o problema 5.2	36
5.5 Parâmetros para o problema 5.3.....	37
5.6 Fluxo escalar, taxa de dose absorvida e fator de "build-up" para o problema 5.3	38
5.7 Taxa de dose total absorvida e fator de "build-up" em função da espessura da região 2 da placa	40

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Fig. 2.1 - Representação gráfica de uma placa plana heterogênea de R regiões.....	14
Fig. 5.1 - Fluxo escalar em função da espessura da placa para ambos os grupos de energia.....	32
Fig. 5.2 - Fluxo escalar em função da espessura da placa para os quatro grupos de energia.....	35
Fig. 5.3 - Fluxo escalar em função da espessura para ambos os grupos de energia..	38
Fig. 5.4 - Comportamento do fator de "build-up" em função da espessura da 2ª região.....	40

1. INTRODUÇÃO

As radiações nucleares são importantes para a indústria, medicina, agricultura, preservação de alimentos, geração de energia e diversas outras áreas técnico-científicas, mas existem riscos associados em relação às radiações ionizantes, que requerem medidas de segurança adequadas para proteção do homem e de seu meio ambiente contra possíveis efeitos indevidos causados por essas radiações. As radiações mais importantes, do ponto de vista de cálculo de blindagens para reatores nucleares, são os nêutrons e os raios gama primários que têm origem no interior do núcleo do reator, assim como os raios gama secundários produzidos por interação neutrônica com materiais externos, por exemplo: refletor e blindagens, entre outros. Dessa forma, no projeto do conjunto de blindagens para reatores nucleares, como também no projeto de salas para radiodiagnóstico e tratamento, bem como no planejamento de terapias com fonte de radiação, dentre outras, é preciso calcular detalhadamente o fluxo de fótons e nêutrons, de diferentes energias, nos diversos pontos da blindagem e, com isso, estimar a espessura, em função do tipo de material necessário para reduzir a radiação a um nível aceitável.

O fluxo da radiação pode ser obtido de diversas formas, sendo uma delas a solução da equação de transporte de Boltzmann [25]. Atualmente, particular atenção tem sido dada ao desenvolvimento de métodos de obtenção de soluções para a equação de transporte, seguindo basicamente duas linhas de abordagem: a abordagem probabilística, que demanda grande esforço computacional (método de Monte Carlo) [12], mais utilizado para geometrias complexas; e a abordagem

determinística, na qual são formulados modelos aproximados para representar a equação de transporte, para os quais se buscam soluções exatas (Método dos harmônicos esféricos, momentos, técnica de Kernel e ordenadas discretas) [11,12,25].

Dentre os métodos baseados na formulação de ordenadas discretas (SN), para problemas unidimensionais, destacam-se os métodos espectrais nodais SGF-CN e SGF-ExpN [2] e mais recentemente o método LTS_N . O método LTS_N [1,3,4,5,6,8,9,16,17,18,22,23,24,27,28,29] possibilita a obtenção de soluções semi-analíticas, reduzindo consideravelmente os esforços computacionais. O método LTS_N tem sido extensivamente utilizado em problemas de transferência radioativa em nuvens [16,17], em cálculos de dose [14] e fator de "build-up", considerando meios homogêneos e unidimensionais, com baixa ordem de quadratura ($N=2$), bem como na determinação de parâmetros de criticalidade em reatores do tipo placas homogêneas e heterogêneas com multigrupos em energia [3,4,5,6]. A formulação LTS_N também foi estendida a problemas multidimensionais (2-d e 3-d) em coordenadas cartesianas e curvilíneas, obtendo-se os fluxos angulares [27,28,29], atingindo-se sempre bons resultados. O método LTS_N , consiste, basicamente, na aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, gerando um sistema de equações algébricas lineares para o fluxo angular transformado que, uma vez resolvido, resulta em uma expressão cuja transformada inversa pode ser obtida analiticamente, pelo uso da técnica de expansão de Heaviside.

Neste trabalho, o método LTS_N é utilizado para resolver a equação de transporte para uma placa plana heterogênea, formada por diferentes materiais, usando o modelo de multigrupo, para obter o fluxo de fótons e nêutrons nas diversas

energias e em qualquer posição na placa. Os cálculos foram feitos considerando espalhamento isotrópico. Uma vez obtido o fluxo escalar, o mesmo é utilizado, juntamente com constantes características do material constituinte da placa, para estimar parâmetros de blindagens, como o fator de "build-up" e a taxa de dose absorvida.

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está organizado em 6 capítulos: no capítulo 2 estão descritos os processos de interação de nêutrons e fótons com a matéria. No capítulo 3, descreve-se a solução LTS_N para uma placa plana heterogênea e modelo de multigrupo. No capítulo 4, descreve-se a metodologia utilizada para obtenção do fluxo escalar, a taxa de dose absorvida e o fator de "build-up". No capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos e discussões sobre os mesmos. Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 NÊUTRONS E FÓTONS GAMA

2.1 - Processos de interação da radiação com a matéria

Uma das principais fontes que produzem radiações são os reatores nucleares. Os vários tipos de radiações potencialmente danosas produzidas dentro de um reator de fissão são as partículas alfa, partículas beta, fragmentos de fissão, nêutrons, neutrinos e raios gama.

As radiações corpusculares são constituídas de partículas carregadas ou não (α, β , nêutrons,...) podendo ser diretamente ou indiretamente ionizantes, pois as cargas elétricas das partículas podem produzir ionização direta, enquanto que as radiações eletromagnéticas, formadas por ondas (raios X, raios γ), são indiretamente ionizantes, devido ao fato de que as partículas responsáveis pela ionização não pertencem à radiação incidente.

As radiações mais importantes, do ponto de vista de blindagem, são os nêutrons e raios gama primários, bem como os raios gama secundários produzidos pela interação dos nêutrons com materiais externos. Sabendo-se que estas radiações têm enorme poder de penetração, a blindagem deverá ser feita com materiais capazes de atenuar estas radiações, o que será suficiente para reduzir todas as demais.

Os nêutrons são produzidos no interior do núcleo de reator por diferentes processos, podendo dividir-se em: nêutrons imediatos, atrasados, nêutrons de ativação e fotonêutrons. Os nêutrons imediatos referem-se aos nêutrons emitidos

simultaneamente com o processo de fissão. Aproximadamente, 2,5 nêutrons são emitidos por fissão do U-235 com nêutrons térmicos e eles carregam uma energia total média de aproximadamente 5 MeV, embora essas energias possam ser encontradas no intervalo da região do eV até 18 MeV. Essas altas energias dos nêutrons são muito penetrantes e são de primordial importância na determinação de blindagens [26].

Os nêutrons atrasados são provenientes do decaimento dos produtos de fissão, surgindo em tempos posteriores ao processo de fissão. Em termos de blindagens, esses nêutrons tornam-se importantes em reatores com combustível circulante, pois podem ser emitidos tanto no "loop" externo do combustível, como no trocador de calor.

Sob certas circunstâncias o decaimento de núcleos radioativos pode ser seguido pela emissão de nêutrons. Isso ocorre quando a energia de excitação do núcleo filho é maior do que a energia de ligação do último nêutron no núcleo. Esses nêutrons emitidos podem interagir com determinados nuclídeos produzindo novos isótopos radioativos. Tais nêutrons são chamados de nêutrons de ativação [26].

Um fóton, cuja energia é maior que a energia de ligação do nêutron no núcleo, pode transferir suficiente energia ao núcleo para provocar a emissão de nêutron. A energia do fóton necessária para esse processo deve exceder 7 MeV, sendo que a probabilidade de ocorrência dessa reação de fotonêutrons é bastante pequena para energias abaixo de 10 MeV.

Os processos de interação dos nêutrons com a matéria ocorrem através do espalhamento elástico, espalhamento inelástico, captura radioativa e absorção.

No caso de altas energias os processos mais importantes são o espalhamento elástico e o inelástico. O espalhamento elástico é usualmente a principal fonte de perda de energia de um nêutron, e ocorre quando um nêutron colide com um núcleo, muda de direção e conserva a energia cinética. No espalhamento inelástico uma parte da energia cinética é transformada em energia de excitação [26].

A absorção de um nêutron pode resultar na emissão de um ou mais raios gama, partículas carregadas e, às vezes, um ou mais nêutrons, processo conhecido como captura radioativa.

Dependendo do tipo e energia da radiação incidente e do material da blindagem, poderá ocorrer a produção de raios X no interior da blindagem. Os raios X e raios γ diferem quanto à origem, ou seja, enquanto os raios gama provêm do núcleo atômico ou da aniquilação de partículas, os raios X têm sua origem fora do núcleo. Um núcleo instável pode passar a outro mais estável liberando energia na forma de radiação gama. Porém, quando elétrons rápidos colidem com certos materiais, parte de sua energia, ou toda ela, é convertida em fótons de raios X, neste caso denominados radiação de frenamento. A penetrabilidade dos raios γ e X é muito maior devido ao seu caráter ondulatório, e sua absorção depende do tipo de interação que provoca.

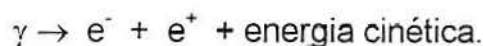
Os principais mecanismos de interação de fótons gama com a matéria são os seguintes: efeito fotoelétrico, espalhamento Compton e produção de pares.

O efeito fotoelétrico ou de ionização, é o efeito pelo qual o raio gama ejeta um elétron do elemento bombardeado, que poderá perder a energia recebida do

fóton, produzindo ionização em outros átomos, este efeito é dominante nas energias baixas, até 200 KeV [15].

O espalhamento Compton é mais freqüente que o efeito fotoelétrico. Ocorre quando a energia da radiação γ ou X cresce. O fóton incidente é espalhado por um elétron periférico ou livre, que recebe parcialmente a energia do fóton incidente. Geralmente o fóton espalhado terá uma energia menor e uma direção diferente da incidente. Este efeito é dominante em energias intermediárias até 5 MeV [15].

O processo de produção de pares, ocorre somente quando fótons de energia igual ou superior a 1,02 MeV passam próximo a núcleos de elevado número atômico. Neste caso, a radiação γ ou X interage com o núcleo e desaparece, dando origem a um par elétron-pósitron através da reação:



O pósitron, após transmitir, por colisões, sua energia cinética ao meio, volta a se combinar com um elétron e dá origem a dois fótons.

2.2 Exposição e Doses de Radiação

A radiação ionizante tanto pode ser benéfica como também pode produzir efeitos deletérios irreversíveis. O emprego constante e imprescindível dessas radiações e a necessidade de técnicas aprimoradas de medidas de proteção originaram a dosimetria das radiações. O objetivo da dosimetria das radiações é a determinação do fluxo escalar de fótons e/ou nêutrons num ponto específico de um

meio, pois este permitirá a obtenção da taxa de dose absorvida e de outros parâmetros importantes para o cálculo de blindagens. A seguir definiremos algumas grandezas utilizadas em dosimetria de radiações.

2.2.1 Exposição

Exposição (χ) é definida como sendo a quantidade de carga elétrica dQ produzida por ionização, no ar, por radiação X ou γ , por unidade de massa do ar, sendo expressa por:

$$\chi = \frac{dQ}{dm} \quad (2.1.1)$$

Unidade no SI: coulombs . kg⁻¹

Unidade no sistema convencional: Roentgen = 1R = 2.58 × 10⁴ C . kg⁻¹

2.2.2 Taxa de Exposição

A taxa de exposição ($\dot{\chi}$) é a variação da exposição por unidade de tempo, dada por

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} \quad (2.2.1)$$

A exposição e a taxa de exposição são definidas somente para raios X e γ não sendo definidos para nêutrons e outras partículas e outros meios.

2.2.3 Dose Absorvida

Dose absorvida (D) de qualquer radiação ionizante, em qualquer meio material, é a quantidade de energia depositada pelas partículas ionizantes por unidade de massa. A dose absorvida é expressa por:

$$D = \frac{d\bar{\epsilon}}{dm}. \quad (2.3.1)$$

A unidade no sistema convencional é o rad. No sistema internacional é o gray. A relação entre elas é $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 100 \text{ rad}$.

2.2.4 Taxa de Dose Absorvida

A taxa de dose absorvida (\dot{D}) é a variação da dose absorvida por unidade de tempo,

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \quad (2.4.1)$$

A dose absorvida é definida para qualquer tipo de radiação em qualquer meio, incluindo o ar.

A taxa de dose absorvida devido a um fluxo de fótons de diferentes energias incidindo em um meio material homogêneo ou heterogêneo é dada por [12]:

$$\dot{D}_T(x, E) = \sum_{i=1}^G \mu_a(x, E_i) \phi(x, E_i) E_i \quad (2.4.2)$$

onde:

$\mu_a(x, E_i)$ é o coeficiente de absorção do meio material em cm^2/g para energia E_i

$\phi(x, E_i)$ é o fluxo escalar de fótons/ cm^2 para uma energia E_i .

A taxa de dose absorvida devido a um fluxo de nêutrons de diferentes energias incidindo em um meio material qualquer em (rad/h) é dada por [12]:

$$\dot{D}(x, E) = 5,76 \times 10^{-5} \sum_{i=1}^G \left\{ \phi(x, E_i) \cdot [\Sigma_s(E_i) \cdot \frac{A \cdot E_i}{(A+1)^2}] + \Sigma_{n,\gamma}(E_i) \cdot E_{i\gamma} \cdot B(x, \mu_a) \right\} \quad (2.4.3)$$

onde:

$\dot{D}(x, E)$ é a taxa de dose absorvida em rad/h

$\phi(x, E_i)$ é o fluxo escalar de nêutrons por cm^2

$\Sigma_s(E_i)$ é a seção de choque de espalhamento, em cm^{-1} , para uma energia E_i (MeV)

A o peso atômico efetivo dos núcleos alvos.

$\Sigma_{n,\gamma}(E_i) \cdot E_{i\gamma} \cdot B(x, \mu_a)$ representa a reação nêutrons fótons

Para obter a taxa de dose em (rad/h) de um fluxo escalar ($\text{MeV}/\text{cm}^2\cdot\text{s}$), basta multiplicar pelo fator de conversão 5.76×10^{-5} que é obtido usando-se as definições:

$$1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ erg},$$

$$1 \text{ rad} = 100 \text{ erg/g e}$$

$$1 \text{ hora} = 3,6 \times 10^3 \text{ s}.$$

2.2.5 Fator de "build-up"

O fator de "build-up" é um termo de correção utilizado em cálculo de blindagem quando não se considera o termo de espalhamento, ou seja, quando a equação de transporte é resolvida pelo modelo não-espalhado. O fluxo assim obtido é corrigido por este fator que representa a razão da intensidade da radiação primária e a espalhada, em algum ponto do feixe pela radiação primária naquele ponto considerado. Dessa forma, o fator de "build-up" é representado por:

$$B(\mu x) = \frac{\dot{D}_T(\mu x)}{\dot{D}_o(\mu x)} \quad (2.4.4)$$

onde:

$\dot{D}_T(\mu x)$ é a dose total

e

$$\dot{D}_o(\mu x) = \mu_{a0} E_0 \phi(x, E_0) \quad (2.4.5)$$

é a taxa de dose absorvida devido ao fluxo incidente não espalhado, sendo E_0 a energia incidente no meio .

2.2.6 Dose Equivalente

O efeito biológico de uma mesma dose absorvida poderá ser maior ou menor, dependendo do tipo de radiação que a provocou. Por esta razão, definiu-se a grandeza dose equivalente (H) a qual é obtida multiplicando-se a dose absorvida por um fator de qualidade para a radiação, obtido em tabelas publicadas na literatura {7,12,15}. Sendo assim, a dose equivalente é dada por:

$$H = D \cdot Q = \text{Dose absorvida} \times \text{fator de qualidade}$$

A unidade convencional da dose equivalente é o rem = rad equivalent men .

A unidade do sistema internacional é o sievert (Sv).

O fator de conversão entre as unidades é $1\text{Sv} = 100 \text{ rem}$.

3 SOLUÇÃO LTS_N PARA PLACA PLANA HETEROGÊNEA E MODELO DE MULTIGRUPO

O método LTS_N [24], para solução do problema de ordenadas discretas unidimensionais (equações S_N), consiste, basicamente, na aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, gerando um sistema de equações algébricas lineares para o fluxo angular transformado que, uma vez resolvido, resulta em uma expressão cuja transformada inversa pode ser obtida analiticamente, pelo uso da técnica de expansão de Heaviside.

Para exemplificar o método LTS_N considera-se a equação S_N em um domínio unidimensional, modelo de multigrupo com fonte externa e sem processos de fissão:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_{gm}(x) + \sigma_{Tg} \Psi_{gm}(x) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{g'=1}^G \frac{2\ell+1}{2} \sigma_{sg' \rightarrow g, \ell} \phi_{g'}^{\ell}(x) P_{\ell}(\mu_m) + Q_{gm}(x) \quad (3.1)$$

sendo,

$$\phi_g^{\ell}(x) = \sum_{k=1}^N \Psi_{gk}(x) P_{\ell}(\mu_k) \omega_k, \quad (3.2)$$

com $g = 1 : G$, onde G é o número de grupos de energia, $x \in [0,a]$ é a variável espacial, $\mu \in [-1,1]$ é o cosseno do ângulo polar, $m = 1 : N$, N par e N é a ordem da quadratura de Gauss; $\Psi_{gm}(x) = \Psi_g(x, \mu_m)$ representa o fluxo angular na direção μ_m para o g -ésimo grupo; $Q_{gm}(x) = Q_g(x, \mu_m)$ é o termo de fonte externa de nêutrons no g -ésimo grupo; σ_{Tg} é a seção de choque total para o g -ésimo grupo no caso de nêutrons ou o coeficiente de atenuação linear total no caso de fótons; $\sigma_{sg' \rightarrow g, \ell}$ é a seção de choque de espalhamento do grupo g' para o grupo g e grau de anisotropia ℓ ; μ_m são as raízes do polinômio de Legendre de n -ésimo grau, são simétricas e ordenadas tal que

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1$$

e ω_k são os respectivos pesos da quadratura de Gauss – Legendre.

No que segue, descreve-se o método LTS_N para a solução de problemas em placa plana heterogênea e modelo de multigrupo, espalhamento isotrópico, fonte externa nula e ausência de fissões. A formulação LTS_N , é utilizada em cada região. Considera-se um conjunto de R placas justapostas, conforme a representação mostrada na figura 2.1 [3].

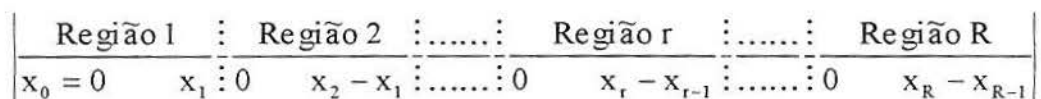


Fig. 2.1 - Representação gráfica de uma placa plana heterogênea de R regiões

Desta forma, a simplificação da equação (3.1) determina:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_{gm}^r(x) + \sigma_{Tg}^r \Psi_{gm}^r(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{g'=1}^G \sigma_{sg' \rightarrow g,0}^r \sum_{k=1}^N \Psi_{g'k}^r(x) \omega_k \right] \quad (3.3)$$

onde, $m=1:N$, N par, $g=1:G$, $0 \leq x \leq (x_r - x_{r-1})$, $r=1:R$. sujeito as condições de contorno

$$\Psi_{gm}(0) = f_{gm}, \quad \mu_m > 0 \quad (3.4)$$

e

$$\Psi_{gm}(x_r) = g_{gm}, \quad \mu_m < 0 \quad (3.5)$$

Aqui, f_{gm} e g_{gm} são os fluxos incidentes nas fronteiras do domínio com a direção μ_m e g -ésimo grupo.

A equação (3.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \Psi_{gm}^r(x) + \frac{\sigma_{Tg}^r}{\mu_m} \Psi_{gm}^r(x) = \frac{1}{2\mu_m} \left(\sum_{g'=1}^G \sigma_{sg' \rightarrow g,0}^r \sum_{k=1}^N \Psi_{g'k}^r(x) \omega_k \right) \quad (3.6)$$

Aqui, $\Psi_{gm}^r(x) = \Psi_g^r(x, \mu_m)$ representa o fluxo angular na direção μ_m e grupo g da região r .

Aplica-se a transformada de Laplace na variável espacial x , obtendo-se a equação transformada ,

$$s\bar{\Psi}_{gm}^r(s) + \frac{\sigma_{Tg}^r}{\mu_m} \bar{\Psi}_{gm}^r(s) - \frac{1}{2\mu_m} \left(\sum_{g'=1}^G \sigma_{sg' \rightarrow g,0}^r \sum_{k=1}^N \bar{\Psi}_{g'k}^r(s) \omega_k \right) = \Psi_{gm}^r(0) \quad (3.7)$$

onde a barra denota a transformada de Laplace e $m = 1 : N$. A equação (3.7) representa um sistema linear algébrico de GN equações e GN incógnitas, que matricialmente pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{A}}_{GN}^r(s) \bar{\Psi}_{GN}^r(s) = \Psi_{GN}^r(0) \quad (3.8)$$

A matriz $\bar{\mathbf{A}}_{GN}^r(s)$ é uma matriz quadrada de ordem GN da região r dada por:

$$\bar{\mathbf{A}}_{GN}^r(s) = s\mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad (3.9)$$

sendo que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem GN e os elementos da matriz \mathbf{A} da região r podem ser descritos por G^2 blocos ou submatrizes $\mathbf{B}(N \times N)$, dados por:

$$\mathbf{B}_{k\ell}^r(i,j) = \begin{cases} \frac{\sigma_{Tk}^r}{\mu_i} - \frac{\sigma_{kk}^r \omega_j}{2\mu_i} & \text{se } k = \ell \text{ e } i = j \\ -\frac{\sigma_{k\ell}^r \omega_j}{2\mu_i} & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (3.10)$$

com $k, \ell = 1: G$ e $i, j = 1: N$, onde $\bar{\Psi}_{GN}^r(s)$ é o vetor de GN componentes que representa o fluxo angular transformado nas N direções da região r , definido por:

$$\bar{\Psi}_{GN}^r(s) = \left[\bar{\Psi}_{11}^r(s) \dots \bar{\Psi}_{1N}^r(s) \dots \bar{\Psi}_{G1}^r(s) \dots \bar{\Psi}_{GN}^r(s) \right]^T \quad (3.11)$$

sendo $\bar{\Psi}_{gm}^r(s)$ a componente do fluxo angular transformado na direção μ_m e grupo G da região r , e $\Psi_{GN}^r(0)$ é o vetor formado por GN componentes que representam o fluxo angular nas N direções e G grupos da região r considerados em $x=0$, definido por

$$\Psi_{GN}^r(0) = \left[\Psi_{11}^r(0) \dots \Psi_{1N}^r(0) \dots \Psi_{G1}^r(0) \dots \Psi_{GN}^r(0) \right]^T, \quad (3.12)$$

onde $\Psi_{gm}^r(0)$ representa o fluxo angular com direção μ_m e grupo G na região r em $x=0$.

Para a resolução da equação (3.6), é necessário que se determine a inversa da matriz $\bar{\mathbf{A}}_{GN}^r(s)$. Conhecida a matriz inversa de $\bar{\mathbf{A}}_{GN}^r(s)$ obtém-se o fluxo angular transformado da região r . Dessa forma, tem-se

$$\bar{\Psi}_{GN}^r(s) = \bar{\mathbf{A}}_{GN}^{-1r}(s) \Psi_{GN}^r(0). \quad (3.13)$$

A aplicação da transformada inversa de Laplace, à equação (3.13) determina uma expressão para o vetor $\Psi_{GN}^r(x)$, formado por GN componentes que representam o fluxo angular nas N direções e G grupos na região r, dada por:

$$\Psi_{GN}^r(x) = \mathbf{B}_{GN}^r(x) \Psi_{GN}^r(0), \quad (3.14)$$

sendo

$$\mathbf{B}_{GN}^r(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{A}}_{GN}^{-1r}(s) \right\} \quad (3.15)$$

Cada elemento da matriz $\bar{\mathbf{A}}_{GN}^{-1r}(s)$ é uma fração racional e portanto a transformada inversa de Laplace pode ser calculada analiticamente pela técnica de expansão de Heaviside, resultando, com a devida mudança de base, que,

$$\mathbf{B}_{GN}^r(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ s_k > 0}}^{GN} \mathbf{P}_k^r e^{-s_k((x_r - x_{r-1}) - x)} + \sum_{\substack{k=1 \\ s_k < 0}}^{GN} \mathbf{P}_k^r e^{s_k x}$$

ou

$$\mathbf{B}_{GN}^r(x) = \mathbf{B}_{GN}^{r+}(x - X_R) + \mathbf{B}_{GN}^{r-}(x) \quad (3.16)$$

sendo s_k^r as GN raízes do determinante da matriz $\overline{\mathbf{A}}_{GN}^r(s)$, que também podem ser obtidos como autovalores da matriz $-\mathbf{A}$ da região r e \mathbf{P}_k^r são as GN matrizes de coeficientes, provenientes da inversão da transformada de Laplace.

Neste ponto é importante salientar que o vetor $\Psi_{GN}^{*r}(0)$ da equação (3.14) tem apenas $N/2$ primeiras componentes conhecidas, dadas pela condição de contorno (3.4). Para determinar as $N/2$ componentes restantes, até aqui desconhecidas do vetor $\Psi_{GN}^{*r}(0)$, escreve-se a equação (3.14) na forma de matrizes em bloco,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1g}^r(x) \\ \Psi_{2g}^r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{g11}^r(x) & \mathbf{B}_{g12}^r(x) \\ \mathbf{B}_{g21}^r(x) & \mathbf{B}_{g22}^r(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{1g}^r(0) \\ \Psi_{2g}^r(0) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

aplica-se a condição de contorno (3.5) na equação (3.14) em $x = X_R$ e as condições de continuidade do fluxo angular nas interfaces de cada região para encontrar $\Psi_{2g}^r(0)$.

As condições de continuidade do fluxo angular nas interfaces de cada região para $x = x_r$, $r = 1 - (R-1)$ são

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1^1(x_1) = \Psi_1^2(0) \\ \vdots \\ \Psi_G^1(x_1) = \Psi_G^2(0) \\ \Psi_1^2(x_2 - x_1) = \Psi_1^3(0) \\ \vdots \\ \Psi_G^2(x_2 - x_1) = \Psi_G^3(0) \\ \vdots \\ \Psi_1^r(x_r - x_{r-1}) = \Psi_1^{r+1}(0) \\ \vdots \\ \Psi_G^r(x_r - x_{r-1}) = \Psi_G^{r+1}(0) \\ \vdots \\ \Psi_1^{R-1}(x_{R-1} - x_{R-2}) = \Psi_1^R(0) \\ \vdots \\ \Psi_G^{R-1}(x_{R-1} - x_{R-2}) = \Psi_G^R(0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1^1(x_1) - \Psi_1^2(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_G^1(x_1) - \Psi_G^2(0) = 0 \\ \Psi_1^2(x_2 - x_1) - \Psi_1^3(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_G^2(x_2 - x_1) - \Psi_G^3(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_1^r(x_r - x_{r-1}) - \Psi_1^{r+1}(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_G^r(x_r - x_{r-1}) - \Psi_G^{r+1}(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_1^{R-1}(x_{R-1} - x_{R-2}) - \Psi_1^R(0) = 0 \\ \vdots \\ \Psi_G^{R-1}(x_{R-1} - x_{R-2}) - \Psi_G^R(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

onde $\Psi_G^r(x_r - x_{r-1}) = \Psi_G^{r+1}(0)$ indica que as componentes do vetor de fluxos angulares no ponto $x = (x_r - x_{r-1})$ da região r e grupo g são iguais as do ponto $x = 0$ da região $(r + 1)$ e grupo g .

Então, escreve-se (3.17) na forma [6]:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{B}^1(0) & [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} & [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} & \cdots & [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} \\ \mathbf{B}^1(x_1) & -\mathbf{B}^2(0) & [0]_{GN \times GN} & \cdots & [0]_{GN \times GN} \\ [0]_{GN \times GN} & \mathbf{B}^2(x_2 - x_1) & -\mathbf{B}^3(0) & \cdots & [0]_{GN \times GN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{GN \times GN} & [0]_{GN \times GN} & [0]_{GN \times GN} & \cdots & -\mathbf{B}^R(0) \\ [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} & [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} & [0]_{\frac{GN}{2} \times GN} & \cdots & \mathbf{B}^R(x_R - x_{R-1}) \end{array} \right] \Psi_{RGN}^*(0) = \Psi_{RGN}(x) \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{B}^1(0)$ é a matriz $(GN/2 \times GN)$ formada por $N/2$ componentes conhecidas do fluxo angular, nas direções positivas em $x=0$, referentes ao grupo g da região 1; $\mathbf{B}^R(x_R - x_{R-1})$ é a matriz $(GN/2 \times GN)$ formada por $N/2$ componentes conhecidas do fluxo angular, nas direções negativas, em $x=(x_R - x_{R-1})$, referente ao grupo g da região R; as matrizes $[0]$ de ordem $(GN/2 \times GN)$ ou $(GN \times GN)$ são nulas e os demais blocos apresentados são matrizes $(GN \times GN)$ correspondentes às condições de interface.

Com isso determina-se o vetor $\Psi_{2g}^r(0)$ e, conseqüentemente, calcula-se o vetor fluxo angular dado pela expressão (3.14).

A inversa da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$ será feita pelo algoritmo de Schur e pelo método da diagonalização descritos na próxima seção.

3.1 INVERSÃO DA MATRIZ $\bar{\mathbf{A}}_{GN}(s)$

Nesta seção apresentam-se os processos utilizados para a inversão da matriz simbólica gerada pela aplicação da transformada de Laplace nas equações S_N .

Considera-se a matriz,

$$\bar{\mathbf{A}}_{GN}(s) = s\mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad (3.20)$$

cuja inversa

$$\bar{\mathbf{A}}_{GN}^{-1}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.21)$$

deseja-se determinar.

Geralmente, utilizam-se o algoritmo de Schur e o método da diagonalização, que são descritos a seguir salientando-se que, neste trabalho, utilizou-se o método da diagonalização.

3.1.1 ALGORITMO DE SCHUR

Aplica-se à matriz \mathbf{A} , da equação (3.20) a fatoração de Schur [19] segundo a qual, para qualquer matriz quadrada \mathbf{A} , existe uma matriz unitária \mathbf{U} tal que o produto $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T}$ é uma matriz triangular superior. Podemos, então, escrever:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{T} \mathbf{U}^H \quad (3.22)$$

E, substituindo (3.22) em (3.21), temos

$$\mathbf{A}_{GN}^{-1}(s) = (s\mathbf{U}\mathbf{U}^H + \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H)^{-1} \quad (3.23)$$

ou

$$\mathbf{A}_{GN}^{-1}(s) = (\mathbf{U}(s\mathbf{I} + \mathbf{T})\mathbf{U}^H)^{-1} \quad (3.24)$$

ou ainda

$$\mathbf{A}_{GN}^{-1}(s) = \mathbf{U}(s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1} \mathbf{U}^H \quad (3.25)$$

onde a matriz $s\mathbf{I} + \mathbf{T}$ tem a forma

$$s\mathbf{I} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} s+t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ 0 & s+t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s+t_{GN} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e pode-se observar que

$$\det(s\mathbf{I} + \mathbf{T}) = \prod_{i=1}^N (s + t_{ii}). \quad (3.27)$$

Com o objetivo de determinar a inversa da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{T})$, define-se, uma seqüência de

matrizes \mathbf{S}_k da forma

$$\mathbf{S}_k \equiv \begin{bmatrix} s+t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1k} \\ 0 & s+t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2k} \\ 0 & 0 & s+t_{33} & \cdots & t_{3k} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s+t_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & t_{1k} \\ & & & & t_{2k} \\ & & & & t_{3k} \\ & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s+t_{kk} \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots, GN \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{S}_k \equiv s\mathbf{I} + \mathbf{T}$. Usa-se então a propriedade de matrizes em bloco:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1} \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

obtendo-se a inversa da matriz \mathbf{S}_k que pode ser representada por

$$\mathbf{S}_K^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{K-1}^{-1} & -\frac{\mathbf{S}_{K-1}^{-1} \mathbf{v}}{s + t_{KK}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{s + t_{KK}} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e o vetor \mathbf{v} é dado por

$$\mathbf{v} = [t_{1K} \quad t_{2K} \quad \dots \quad t_{(K-1)K}]^T. \quad (3.31)$$

Dessa forma, tem-se determinada, a matriz $\overline{\mathbf{A}}_{GN}^{-1}(s)$, definida em (3.25).

Para efetuar a inversão da transformada de Laplace da matriz $s\mathbf{I} + \mathbf{T}$, é necessário encontrar sua matriz adjunta. Assim, multiplicam-se as equações (3.27) e (3.30), obtendo :

$$\text{Adj}(\mathbf{S}_K) = \mathbf{S}_K^{-1} \det(\mathbf{S}_K) = \begin{bmatrix} \text{Adj}(\mathbf{S}_{K-1})(s + t_{KK}) & -\text{Adj}(\mathbf{S}_{K-1})\mathbf{v} \\ 0 & \dots & 0 & \det(\mathbf{S}_{K-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Finalmente usa-se a técnica de expansão de Heaviside e encontra-se a seguinte expressão para a matriz inversa $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$:

$$\mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}) = \mathbf{U} \left[\sum_{\ell=1}^{GN} \frac{\text{Adj}(\mathbf{S}_{GN})|_{s=s_\ell}}{\frac{d}{ds}(\det \mathbf{S}_{GN})|_{s=s_\ell}} e^{s_\ell t} \right] \mathbf{U}^H. \quad (3.33)$$

3.1.2 MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO

A matriz \mathbf{A} associada ao problema de transporte é não defectiva, o que permite inverter a matriz simbólica $(s\mathbf{I}+\mathbf{A})$ pelo método da diagonalização [9]. Para tal, decompõe-se a matriz \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}, \quad (3.34)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{X} é a matriz dos seus autovetores correspondentes. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathcal{L}^{-1} ((s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1}) \\ &= \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1} ((s\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}) \mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{X}e^{-\mathbf{D}x} \mathbf{X}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Muitas vezes, o aumento da espessura da placa ou da ordem da quadratura ocasionam problemas de "overflow". Para eliminar tal problema decompõe-se a solução LTS_N em homogênea e particular, que contém somente direções positivas, $\mu_k > 0$, e negativas $\mu_k < 0$ [9,13]. É necessário lembrar-se que as direções discretas μ_k são simétricas ao redor de $\mu=0$. Por outro lado, fisicamente falando, isto corresponde a considerar a partícula viajando da direita para a esquerda com $\mu_k < 0$ e o mesmo para a partícula viajando da esquerda para a direita com

$\mu_k > 0$. Esta propriedade é conhecida como propriedade da invariância das direções discretas [11], então $B(x)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} B(x) &= X e^{Dx} X^{-1} \\ &= X e^{D^+x} X^{-1} + X e^{D^-x} X^{-1} \\ &= B^+(x) + B^-(x), \end{aligned} \tag{3.36}$$

Cujos elementos das matrizes D^+ e D^- são da forma:

$$d_{ij}^+ = \begin{cases} d_{ij} & d_{ij} < 0 \\ 0 & d_{ij} > 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

$$d_{ij}^- = \begin{cases} d_{ij} & d_{ij} > 0 \\ 0 & d_{ij} < 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Com d_{ij} os elementos da matriz D .

Utilizando-se da propriedade da invariância e a decomposição da matriz $B(x)$, descrita acima, a solução LTS_N (3.14) pode ser escrita como:

$$\Psi(x) = B^-(x - x_R) \Psi(x_R) + B^-(x) \Psi(0). \tag{3.39}$$

Para determinar as componentes desconhecidas $\Psi_2(0)$ e $\Psi_1(x_R)$ dos vetores $\Psi(0)$ e $\Psi(x_R)$ respectivamente, aplicam-se as condições de contorno (3.4) e (3.5) encontrando:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x_R) \\ \Psi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^+(0) & \mathbf{B}_{12}^-(0) \\ \mathbf{B}_{21}^+(x_R) & \mathbf{B}_{22}^-(x_R) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{11}^-(0))\Psi_1(0) - \mathbf{B}_{12}^+(0)\Psi_2(x_R) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{22}^+(x_R))\Psi_2(x_R) - \mathbf{B}_{21}^-(x_R)\Psi_1(0) \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

neste ponto é importante salientar que todos os argumentos das exponenciais são negativos, portanto não existem problemas de "overflow".

4. METODOLOGIA

A metodologia a ser utilizada neste trabalho consiste em resolver a equação S_N para uma placa plana heterogênea, espalhamento isotrópico, multigrupo em energia e sem fonte externa, dada por:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_{gm}^r(x) + \sigma_{Tg}^r \Psi_{gm}^r(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{g=1}^G \sigma_{sg' \rightarrow g,0}^r \sum_{k=1}^N \Psi_{g'k}^r(x) \omega_k \right] \quad (4.1)$$

onde, $m=1:N$, N par, $g=1:G$, $0 \leq x \leq (x_r - x_{r-1})$, $r=1:R$. sujeito às condições de contorno

$$\Psi_{gm}(0) = f_{gm}, \quad \mu_m > 0 \quad (4.1.a)$$

e

$$\Psi_{gm}(x_r) = 0, \quad \mu_m < 0 \quad (4.1.b)$$

pelo método LTS_N , obtendo-se o fluxo de nêutrons ou fótons em qualquer posição da placa formada por diferentes materiais e nas diversas energias.

A solução para a equação (4.1) é dada por:

$$\Psi_{GN}^r(x) = \mathbf{B}_{GN}^r(x) \Psi_{GN}^{*r}(0). \quad (4.2)$$

O fluxo escalar médio [10], para cada energia, é obtido por

$$\phi_i^r(x) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Psi^r(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \omega_m \Psi_m^r(x). \quad (4.3)$$

O programa computacional para obtenção do fluxo escalar de nêutrons ou fótons foi implementado em linguagem de programação FORTRAN, na sua versão 90 e utilizado o pacote matemático Lapack, que é uma biblioteca de rotinas para resolução de sistemas lineares. A seguir citam-se as sub-rotinas que compõem o programa.

- Galeg - Calculam-se os pesos e as raízes da quadratura de Gauss-Legendre.
- Gera Bloco - Com os pesos, as raízes e os coeficientes de interação gera-se a matriz A, da equação (3.9), conforme o problema proposto.
- Calc_dados - Com o auxílio do Lapack calculam-se os autovalores, os autovetores e a inversa dos autovetores da matriz A.
- Gera_B - Considerando-se a espessura da placa, os autovalores, os autovetores e a inversa dos autovetores, obtém-se a matriz B, da equação (3.15).

- Gera d- Informam-se as condições de contorno do problema e condições de continuidade do fluxo angular nas interfaces de cada região.

- Gauss - Calcula-se o vetor $\Psi_{GN}^{*r}(0)$, da equação (4.2), levando-se em conta a matriz $B_{GN}^r(x)$, as condições de contorno do problema proposto e condições de continuidade do fluxo angular nas interfaces de cada região.

- Fluxo angular - Calcula-se o fluxo angular num ponto qualquer da placa considerando a matriz $B_{GN}^r(x)$ e o vetor $\Psi_{GN}^{*r}(0)$.

- Fluxo escalar - Obtido o fluxo angular, calcula-se o fluxo escalar, equação (4.3).

Obtidos os fluxos escalares, calcula-se a taxa de dose absorvida para fótons e nêutrons nas diferentes energias, usando o seguinte procedimento em termos de equações:

- A taxa de dose total absorvida, para um dado fluxo escalar de fótons $\phi(x, E_i)$ de energia E_i é dada pela equação (2.4.2).

- A taxa de dose absorvida devido ao fluxo de fótons incidentes, sem sofrer espalhamento é dada pela equação (2.4.5).

- A taxa de dose total absorvida para um fluxo de nêutrons é dada pela equação (2.4.3).

- O fator de "build-up" é dado pela equação (2.4.4).

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos obtidos pela aplicação do método LTS_N para determinação de parâmetros de blindagens em placas planas heterogêneas com espalhamento isotrópico, sem fonte externa e modelo de multigrupo de energia.

Problema 5.1: Cálculo da taxa de dose absorvida devido a nêutrons incidentes em uma placa plana heterogênea (três regiões) e dois grupos de energia.

Considera-se uma placa plana heterogênea, formada por três regiões: região 1 - 30cm de material 1; região 2 - 2cm de material 2 e região 3 - 40cm de material 3, um feixe de nêutrons rápidos com energia de 2 MeV, grupo 1, e um feixe de nêutrons térmicos com energia de 1eV, grupo 2, incidindo na superfície $x=0$ da mesma, com as seguintes condições de contorno:

$$\psi_1(0)=1,2 \cdot 10^{14} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s}, \quad \text{para } \mu_m > 0, \text{ grupo rápido, } E=1 \text{ MeV}$$

$$\psi_2(0)=0,8 \cdot 10^{14} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s}, \quad \text{para } \mu_m > 0, \text{ grupo térmico, } E=1 \text{ eV}$$

$$\psi_1(72)=0, \quad \text{para } \mu_m < 0$$

$$\psi_2(72)=0, \quad \text{para } \mu_m < 0$$

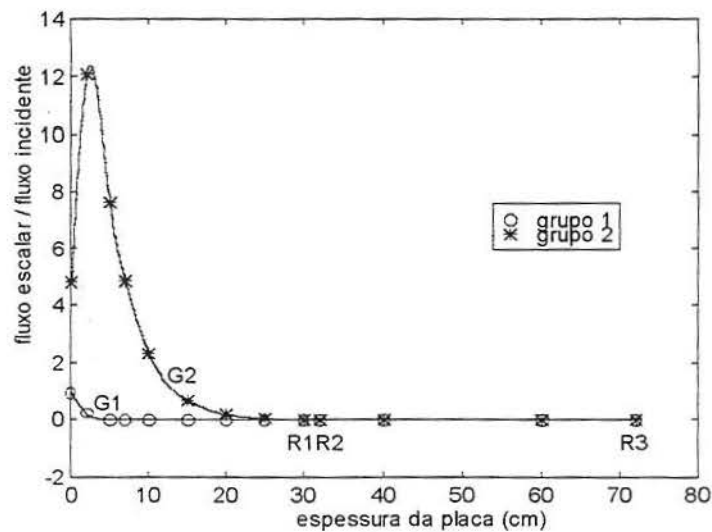
As constantes nucleares para essas energias e materiais são apresentadas na tabela 5.1. A taxa de dose absorvida nos pontos $x=30$ cm, $x=32$ cm e $x=72$ cm são obtidas para ambos os grupos de energia

Tabela 5.1 - Parâmetros para o problema 5.1

Seções de choque	Material 1	Material 2	Material 3
$\sigma_{T1}(\text{cm}^{-1})$	8.44386	3.659674	0.198582
$\sigma_{s1 \rightarrow 1}(\text{cm}^{-1})$	8.42362	3.616722	0.192537
$\sigma_{s1 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	1.5883683	0.81542	0.29491
$\sigma_{T2}(\text{cm}^{-1})$	1.601536	0.9669446	0.4143096
$\sigma_{s2 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	1.5883683	0.81542	0.29491

A figura 5.1 mostra o comportamento do fluxo escalar em função da espessura da placa, para ambos os grupos de energia.

Figura 5.1: Comportamento do fluxo escalar em função da espessura da placa para o problema 5.1.



As curvas da fig. 5.1 mostram o comportamento do fluxo de nêutrons rápidos e térmicos em função da espessura da placa. Nota-se que o fluxo térmico cresce nos primeiros 5cm, diminuindo após. Já o fluxo rápido apresenta comportamento sempre decrescente.

São apresentados, na tabela 5.2, os resultados obtidos para a taxa de dose absorvida, no final das regiões R1(x=30cm), R2(x=32cm) e R3(x=72cm), para ordens de quadratura que variam de 2 a 24. Esses resultados permitem obter preliminarmente a espessura necessária para atenuar o fluxo de nêutrons.

Tabela 5.2 - Taxa de dose absorvida no final das regiões R1 , R2 e R3.

TAXA DE DOSE ABSORVIDA (rad/h)			
N	Região 1 R1(em 30cm)	Região 2 R2(em 32cm)	Região 3 R3(em 72cm)
2	6.54118	0.12884	1.27921e-004
4	6.61461	0.12929	1.28467e-004
6	6.61654	0.12963	1.28020e-004
8	6.61746	0.12969	1.27881e-004
10	6.61792	0.12970	1.27820e-004
12	6.61819	0.12970	1.27788e-004
14	6.61832	0.12971	1.27768e-004
16	6.61842	0.12971	1.27755e-004
18	6.61848	0.12971	1.27747e-004
20	6.61853	0.12971	1.27741e-004
22	6.61856	0.12972	1.27737e-004
24	6.61857	0.12972	1.27733e-004

Os dados apresentados na tabela 5.2 mostram a convergência numérica dos resultados, pois para N variando de 12 a 20, os resultados apresentam, no mínimo, 4 algarismos de coincidência.

Problema 5.2: Cálculo da taxa de dose absorvida devido a nêutrons incidentes em uma placa plana heterogênea (cinco regiões) e quatro grupos de energia .

Considera-se uma placa plana heterogênea, formada por cinco regiões: região 1 - 10cm de material 1; região 2 - 15cm de material 2 ; região 3 - 10cm de material 1; região 4 - 15cm de material 2 e região 5 - 10cm de material 1, um feixe de nêutrons polienergético com energia de: 2MeV, 0,5MeV, 0,1KeV e 1eV, incidindo na superfície $x=0$ da placa e com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= 1,2 \cdot 10^{14} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s}, & \text{para } \mu_m > 0, E = 2 \text{ MeV}, \\ \psi_2(0) &= 0,8 \cdot 10^{14} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s}, & \text{para } \mu_m > 0, E = 0,5 \text{ MeV}, \\ \psi_3(0) &= 0,2 \cdot 10^{14} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s}, & \text{para } \mu_m > 0, E = 0,1 \text{ KeV}, \\ \psi_4(0) &= 0,5 \cdot 10^{13} \text{ nêutrons/cm}^2 \cdot \text{s} & \text{para } \mu_m > 0, E = 1 \text{ eV} \\ \psi_1(60) &= 0, & \text{para } \mu_m < 0 \\ \psi_2(60) &= 0, & \text{para } \mu_m < 0 \\ \psi_3(60) &= 0, & \text{para } \mu_m < 0 \\ \psi_4(60) &= 0, & \text{para } \mu_m < 0\end{aligned}$$

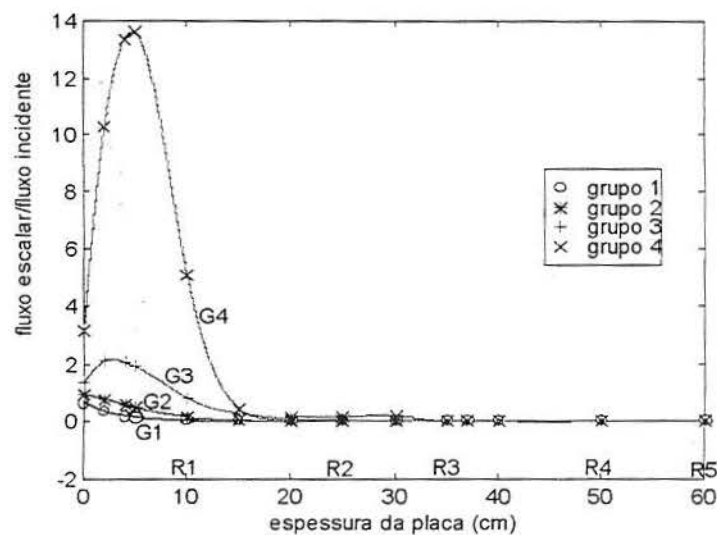
As constantes nucleares para essas energias e materiais são apresentadas na tabela 5.3. A taxa de dose absorvida nos pontos $x=10\text{cm}$, $x=25\text{cm}$ e $x=35\text{cm}$ são obtidas para os quatro grupos de energia.

Tabela 5.3 - Parâmetros para o problema 5.2

Seções de choque	Material 1	Material 2
$\sigma_{T1}(\text{cm}^{-1})$	0.306105	0.222938
$\sigma_{s1 \rightarrow 1}(\text{cm}^{-1})$	0.244132	0.16094
$\sigma_{s1 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	0.069119	0.05824
$\sigma_{s1 \rightarrow 3}(\text{cm}^{-1})$	0.0001783	0.003059
$\sigma_{s1 \rightarrow 4}(\text{cm}^{-1})$	0,00	0,00
$\sigma_{T2}(\text{cm}^{-1})$	0.665321	0.518081
$\sigma_{s2 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	0.62077	0.45088
$\sigma_{s2 \rightarrow 3}(\text{cm}^{-1})$	0.044537	0.066442
$\sigma_{s2 \rightarrow 4}(\text{cm}^{-1})$	0.00	0,00
$\sigma_{T3}(\text{cm}^{-1})$	0.868185	0.709048
$\sigma_{s3 \rightarrow 3}(\text{cm}^{-1})$	0.83158	0.63597
$\sigma_{s3 \rightarrow 4}(\text{cm}^{-1})$	0.036397	0.057518
$\sigma_{T4}(\text{cm}^{-1})$	1.11655	1.46011
$\sigma_{s4 \rightarrow 4}(\text{cm}^{-1})$	1.1125	1.2839

A figura 5.2 mostra o comportamento do fluxo escalar em função da espessura da placa, para os quatro grupos de energia: grupo 1 - 2MeV, grupo2 - 0,5 MeV, grupo 3 - 0,1 KeV e grupo 4 - 1 eV.

Figura 5.2: Comportamento do fluxo escalar em função da espessura da placa para o problema 5.2.



O gráfico da fig. 5.2 mostra que o fluxo de nêutrons diminui a medida que aumenta a espessura da placa formada por diferentes materiais para os grupos de energia 1 e 2. Os grupos 3 e 4, o fluxo apresenta um aumento no início da primeira placa para depois diminuir com o aumento da espessura. Esse comportamento deve-se ao fato de que os nêutrons rápidos (grupo 1 e 2) perdem energia no meio material, transformando-se em térmicos (grupo 3 e 4).

São apresentados na tabela 5.4, os resultados obtidos para a taxa de dose absorvida, no final das regiões R1(x=10cm), R2(x=25cm) e R3(x=35cm) para ordens de quadratura que variam de 2 a 14. Esses resultados permitem obter a espessura necessária, para cada região, para atenuar o fluxo de nêutrons, de forma a obter valores de dose preestabelecidas, considerando os diferentes valores de energia, o que implica em diferentes fatores de qualidade.

Tabela 5.4 - Taxa de dose absorvida para o problema 5.2

TAXA DE DOSE ABSORVIDA (rad/h)			
N	Região 1 R1 (em 10cm)	Região 2 R2 (em 25cm)	Região 3 R3 (em 35cm)
2	4.71009e+008	1.56930e+007	1.92869e+006
4	4.49198e+008	1.97937e+007	3.00662e+006
6	4.48416e+008	1.96502e+007	2.99956e+006
8	4.47600e+008	1.96262e+007	2.98397e+006
10	4.47249e+008	1.96140e+007	2.98181e+006
12	4.47076e+008	1.96073e+007	2.98064e+006
14	4.46973e+008	1.96033e+007	2.97995e+006

Problema 5.3: Cálculo da taxa de dose absorvida e fator de "build-up" em uma placa plana heterogênea (três regiões) e dois grupos de energia para fótons.

Considera-se uma placa plana heterogênea, formada por três regiões: região 1 - 20cm de material 1; região 2 - 20cm de material 2 e região 3 - 20cm de material 1, um feixe de fótons com dois grupos de energia: 1MeV e 300KeV, incidindo na superfície $x=0$ da mesma, com as seguintes condições de contorno:

$$\psi_1(0)=10^{10} \text{ fótons/cm}^2.\text{s}, \quad \text{para } \mu_m >0, E= 1 \text{ MeV},$$

$$\psi_2(0)= 10^{10} \text{ fótons/cm}^2.\text{s}, \quad \text{para } \mu_m >0, E= 300 \text{ KeV}$$

$$\psi_1(60)=0, \quad \text{para } \mu_m <0$$

$$\psi_2(60)=0, \quad \text{para } \mu_m <0$$

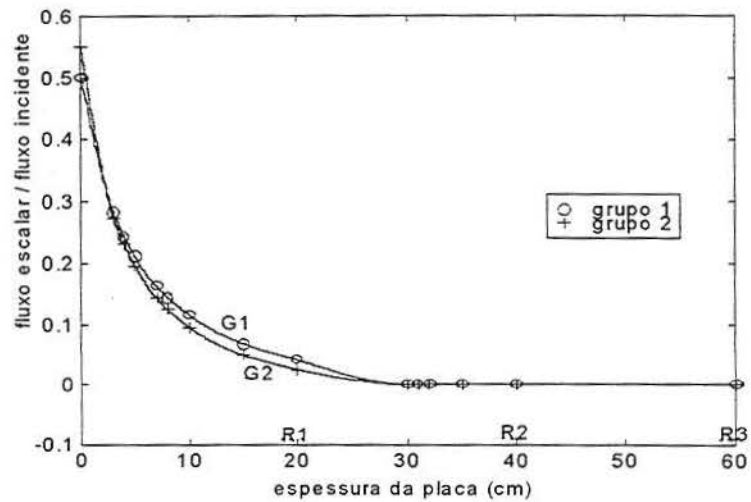
As constantes nucleares para essas energias e materiais são apresentadas na tabela 5.5. A taxa de dose e o fator de "build-up" são obtidos nos pontos $x=20\text{cm}$, $x=40\text{cm}$ e $x=60\text{cm}$.

Tabela 5.5 - Parâmetros para o problema 5.3

Seções de choque	Material 1	Material 2
$\sigma_{s1 \rightarrow 1}(\text{cm}^{-1})$	0,0000	0,0000
$\sigma_{s1 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	0,0396	0,7379
$\sigma_{s2 \rightarrow 2}(\text{cm}^{-1})$	0.0000	0.0000
$\sigma_{T1}(\text{cm}^{-1})$	0,0706	0,7763
$\sigma_{T2}(\text{cm}^{-1})$	0,0320	0.2410
$\sigma_{a1}(\text{cm}^2/\text{g})$	0,0310	0,0384
$\sigma_{a2}(\text{cm}^2/\text{g})$	0,0320	0,2410

A figura 5.3 mostra o comportamento do fluxo escalar em função da espessura para ambos os grupos de energia dos fótons.

Figura 5.3: Comportamento do fluxo escalar em função da espessura da placa para o problema 5.3.



Na tabela 5.6 são apresentados os resultados obtidos para o fluxo escalar de fótons , taxa de dose absorvida e fator de "build-up", em $x=20\text{cm}$, $x=40\text{cm}$ e $x=60\text{cm}$.

Tabela 5.6 - Fluxo escalar , taxa de dose absorvida e fator de "build-up" para o problema 5.3 , com $N=20$.

X(cm)	Grupo em energia	Fluxo escalar (fótons/cm ² .s)	Dose total (rad/h)	Fator de "build-up"
20	1	4.12519e+008		
	2	2.59171e+008	8.79906e+002	1.19455
40	1	11.68908		
	2	2.69302	3.71159e-005	1.43557
60	1	2.64872		
	2	6.24055e-001	5.07464e-006	1.07296

Analisando o comportamento do fluxo escalar de fótons mostrado na figura 5.3 pode-se ver que o mesmo diminui a medida que aumenta a espessura da placa, para ambos os grupos de energia, o mesmo ocorrendo com a taxa de dose absorvida, conforme tabela 5.6. O comportamento exponencial de atenuação para fótons corresponde com o comportamento qualitativo esperado e obtido por Sauer [14] e Trindade [21], que utilizaram a fórmula de Klein-Nishina para seção de choque de espalhamento.

O fator de "build-up" foi obtido no final de cada espessura da região e encontra-se na tabela 5.6. Para os primeiros 20cm, o fator é de 1.19455, para 40cm o fator é de 1.43557 e para 60cm o fator vale 1.07296. Esse comportamento do fator de "build-up" é devido ao fato da placa ser formada por diferentes materiais.

Para verificar o comportamento do fator de "build-up" em função da espessura da região 2, foi proposto o problema 5.4, dado a seguir.

Problema 5.4: Comportamento do fator de "build-up" em função da espessura da região 2 da placa do problema 5.3 .

Considera-se os dados do problema 5.3 e calcula-se o fator de "build-up", no final da segunda região, variando a sua espessura.

Os resultados numéricos para o problema 5.4 são apresentados na tabela 5.7, para $N=20$

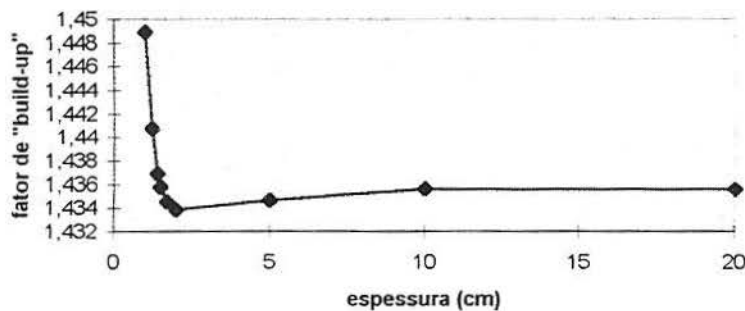
Tabela 5.7 - Taxa de dose total absorvida e fator de "build-up" em

função da espessura da região 2 da placa.

espessura (cm)	Dose total (rad/h)	Fator de "Build up"
1	4.71450e+002	1.44893
1,2	3.84463e+002	1.44079
1,4	3.15074e+002	1.43689
1,5	2.85591e+002	1.43580
1,7	2.35095e+002	1.43453
2	1.76241e+002	1.43383
5	11.28469	1.43465
10	0.14928	1.43566
20	3.71159e-005	1.43557

A figura 5.4 mostra o comportamento do fator de "build-up" em função da espessura da segunda região. Verifica-se que o fator de "build-up" apresenta o maior valor em $x=1\text{cm}$ (1.44893) e o menor valor em $x=2\text{cm}$ (1.43383), sendo que a diferença percentual relativa entre os dois valores é de 1,042%.

Figura 5.4: Comportamento do "build-up" em função da espessura da região 2 para o problema 5.3



Esses resultados mostram a importância do termo de espalhamento no cálculo de blindagens, pois considerando somente a equação para radiação não espalhada, se estaria incorrendo em um erro mínimo de 43,38% na determinação da dose absorvida.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo usar o método LTS_N para resolver a equação de transporte para uma placa plana heterogênea usando o modelo de multigrupo em energia. Esse objetivo foi alcançado, obtendo-se resultados, para o fluxo escalar de fótons e nêutrons, para a dose absorvida e fator de "build-up", que concordam qualitativamente com os obtidos por outros autores [14,21].

A aplicação dessa metodologia para blindagens de nêutrons e fótons apresenta a vantagem de obter-se soluções na forma analítica, de modo que o erro acumulado na obtenção das soluções se deve ao arredondamento nas operações aritméticas durante o processo de inversão da matriz.

Sob o ponto de vista de aplicações praticas, este método torna-se atrativo, pois gera resultados com a precisão desejada para pequenos valores de N , como indica a tabela 5.2, na qual pode-se ver a convergência numérica para N variando de 12 a 24, cujos resultados apresentam precisão de, no mínimo, quatro algarismos significativos. Outra contribuição importante desse método reside no fato de que os cálculos não necessitam serem corrigidos pelo fator de "build-up", pois as equações a serem resolvidas já contemplam o termo de espalhamento. Essa metodologia também permite a obtenção desse fator a partir da relação entre a dose absorvida total e a dose absorvida devido ao feixe primário incidente não espalhado.

Diante dos resultados obtidos acredita-se que o método LTS_N possa ser usado com sucesso na obtenção de parâmetros em cálculos de blindagens para placas planas heterogêneas e multigrupo em energia.

Para trabalhos futuros sugere-se a extensão dessa metodologia considerando espalhamento anisotrópico, aumento da ordem de quadratura e uso de dados de materiais reais usados em blindagens.

Referências Bibliográficas

- [1] BARICHELO, L. B., 1992. "**Formulação Analítica para Solução de Ordenada Discreta Unidimensional**", Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS.
- [2] BARROS, R. C. LARSEN, E. W. . A Numerical Method for One- Group Slab-Geometry Discrete Ordinate Problems with no parcial Truncation Error. **Nuclear Science and Engineering**, vol. 104, p. 391-435, 1985.
- [3] BATISTELA, C. H. F., 1997. "**Estudo de Criticalidade pelo Método LTS_N** ", Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS.
- [4] BATISTELA, C. H.; VILHENA, M. T.; BORGES, V., 1997. "Criticality Calculation by the LTS_N Method", **Journal of Nuclear Science and Technology**, vol. 34, pp. 603-606.
- [5] BATISTELA, C. H.; VILHENA, M. T.; BORGES, V., 1996. "Cálculo do Fator de Multiplicação Efetivo pelo Método LTS_N ", **EGATEA/UFRGS**, vol. 24, pp. 101-111.
- [6] BATISTELA, C. H.; VILHENA, M. T.; BORGES, V., 1999. "Determination of the effective multiplication factor in a slab by the LTS_N method", **Annals of Nuclear Energy**, Vol. 26, pp. 761-767.
- [7] BELL, G .& GLASTONE, S. **Nuclear Reactor Theory**. Robert E. Krieger Publishing. Huntington, New York, 1970.

- [8] BORGES, V.; VILHENA, M. T.; CHIES, R., 1997. “ Cálculo de Espessura de Blindagem pela Combinação dos métodos LTS_N e Decomposição”, **XI ENFIR**, pp. 202-206.
- [9] BRANCHER, J. D., 1998. “**Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas pelo Método LTS_N para valores de N grandes**”, Tese de Doutorado, PPGEM/UFRGS.
- [10] CHIES, R. P., 1996. “**Cálculo da Espessura de Blindagem pela Combinação dos Métodos LTS_N e Decomposição**”, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada/UFRGS.
- [11] DUDERSTADT, J.J.& MARTIN, W.R., **Transport Theory**. John Willey & Sons, Inc. New York, 1979.
- [12] FITZGERALD, J. J. ;BROWNELL, G. L.;MAHONEY, F. J.,**Mathematical Theory of Radiation Dosimetry**, Gordon and Breach Science Publishers, INC. ,1967.
- [13] GONÇALVES, G. A. ; SEGATTO. C. F. ; VILHENA, M.T. The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfor**. Great Britain, submetido.

[14] SAUER, L. Z., 1997. “**Solução da Equação de Transporte Multigrupo com Núcleo de Espalhamento de Klein-Nishina: Uma Aplicação ao Cálculo de Dose**”, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada/UFRGS.

[15] SAMUEL GLASSTONE and ALEXANDE R SESONSKE. **Nuclear Reactor Engineering**, New York, van Nostrend Reinhold, 1967.

[16] SEGATTO, C. F., 1995. “**Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo**”, Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS.

[17] SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T., 1994. “Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimutal Symmetry”, **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21, pp. 701-710.

[18] SEGATTO, C. F. ; VILHENA, M.T. ; GOMES, M. G.; The One – Dimensional LTS_N Solution in a Slab with High Degree of Quadrature. In: **Annals of Nuclear Energy**, Great Britain. In press.

[19] STRANG, G. **Linear Algebra and its Applications**. HBJ, 1980

- [20] STRECK, E. E., 1993. “**Solução Analítica para Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional**”, Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS.
- [21] TRINDADE, L.B.,1997. **Cálculo da dose pelo método LTP_N aplicado a Equação de Boltzmann unidimensional para fótons em valores discretos de energia**. Porto Alegre:PROMEC. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia. UFRGS.
- [22] VILHENA, M. T.; BARICHELO, L. B.; ZABADAL, J.; SEGATTO, C. F.; CARDONA, A. V., 1997. “General Solution of the One-Dimension Approximations to the Transport equations”, **Progress in Nuclear Energy**.
- [23] VILHENA, M. T. E BORGES, V. B., 1995. “O Uso dos Métodos LTS_N e Decomposição no Cálculo de Blindagens”. **Simpósio sobre Integração Regional da Energia Nuclear**, pg.477-481, Rio de Janeiro, Brasil.
- [24] VILHENA, M. T. , BARICHELO, L. B. A new analytical approach to solve the neutron transport equation. **Kerntechnik**. v. 56, n. 5, p. 334 – 336, 1991.
- [25] WOOD, J.,**Computational Methods in Reactor Shielding**, Pergamon Press, U. K., 1982.

[26] W. E. SELPH and C. W. GARRETT. **Sources of Radiation -Reactor Shielding for Nuclear Engineers.** – N. M. Schaeffer Editor. Atomic Energy Commission – 1973 .

[27] ZABADAL, R. S., 1994. “**Solução da Equação Multidimensional de Transporte pelo Método LTS_N** ”, Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS.

[28] ZABADAL, R. S.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO L. B., 1995. “Solution of the Three-Dimensional One-Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method”, **Annals of Nuclear Energy**, Vol. 22, pp. 131-134.

[29] ZABADAL, R. S.; VILHENA, M. T.; BARICHELLO L. B., 1997. “ An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinates Problem in a Convex Domain”, **Progress in Nuclear Energy**, Vol. 31, pp. 225-228.