Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

DIMENSÃO DE MERGULHO (EMBEDDING DIMENSION) DE ANÉIS LOCAIS

Renata Martins da Rosa

Tese apresentada para obtenção do
Grau de Mestre em Matemática

[Porto Alegre, 1992]

Aos meus amigos
Ivone e Alberto

Agradeço a minha orientadora Ada Maria Doering pela atenção e dedicação.

Agradeço ao professor Marcos Sebastini pela colaboração.

Agradeço ao Cícero Fernandes de Carvalho pelas sugestões.

Agradeço também aos meus amigos pelo apoio e carinho.

DIMENSÃO DE MERGULHO (EMBEDDING DIMENSION) DE ANEIS LOCAIS

RESUMO

Neste trabalho é mostrado que para um anel local de Cohen-Macaulay e para um anel local cujo corpo residual seja algebricamente fechado e cujo anel graduado associado seja um domínio, vale que a dimensão de mergulho (embedding dimension) é menor ou igual a sua dimensão de Krull mais sua multiplicidade menos um.

Na segunda parte do trabalho vemos que, dados dois inteiros $m \geq 1$, $d \geq 2$ e um inteiro arbitrário $\epsilon \geq dm$, existe um anel local com multiplicidade, dimensão de Krull e dimensão de mergulho iguais à m, d e ϵ respectivamente.

ABSTRACT

In this work we show that for a Cohen-Macaulay ring and for a local ring with algebraically closed residual field and associated graded ring a domain, we have: the embedding dimension is less than or equal to the Krull dimension plus the multiplicity mines one.

Secondly, we see that, given integers $m \geq 1$, $d \geq 2$ and given an arbitrary integer $\epsilon \geq dm$, there exists a local ring with multiplicity m, Krull dimension d and embedding dimension ϵ.

§ Introdução

Dado um anel local (A, M) denotaremos por $d(A)$, $e(A)$ e $m(A)$ sua dimensão de Krull, sua dimensão de mergulho (embedding dimension) e sua multipliciade respectivamente (para definições vide "Definições e Notações" a seguir).

O primeiro capítulo desta dissertação subdivide-se em duas partes. No primeiro parágrafo apresentamos o teorema 1 que é um resultado de Abhyankar [**1**] que mostra que se (A, M) é um anel local de Cohen-Macaulay então $e(A) \leq m(A) + d(A) - 1$. Na verdade, em seu trabalho Abhyankar precisava da hipótese adicional de que o corpo residual A/M fosse infinito, hipótese esta que Lequain em [**6**] observou que pode ser retirada.

No segundo parágrafo do capítulo I aparece sob forma do teorema 3 um resultado de Abhyankar [**1**] que afirma valer a mesma desigualdade do teorema 1 para um anel local (A, M) tal que $d(A) \geq 1$, seu corpo residual A/M seja algebricamente fechado e o anel graduado associado à A seja um domínio. A demonstração que apresentamos não é a demonstração original de Abhyankar e sim uma outra que utiliza o teorema 2 feito pelo professor Marcos Sebastiani. O teorema 2 afirma que se $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ é um domínio graduado homogêneo, tal que $d(A) \geq 1$ e A_0 é um corpo algebricamente fechado, então $\dim_{A_0} \leq m(A) + d(A) - 1$.

Observamos que os teorema 1,2 e 3 são trivialmente falsos se $d(A) = 0$.

Abhyankar em [**1**] pergunta se existe uma função f de duas variáveis tal que para cada anel local (A, M), $e(A) \leq f(d(A), m(A))$. Ele mesmo dá uma resposta negativa mostrando que dados $m = 2$, $d \geq 2$ e $\epsilon > d$ existe um anel local A tal que $d(A) = d$, $m(A) = m = 2$ e $e(A) = \epsilon$. O exemplo de Abhyankar responde portanto negativamente a questão apresentando um anel local com multiplicidade 2. Ficou em aberto a pergunta: existe f função de uma variável tal que $e(A) \leq f(d(A))$ para todo anel local de multiplicidade um? Apresentamos no segundo capítulo um trabalho de Lequain [**6**] que mostra que, mais geralmente, vale o seguinte resultado que, neste trabalho, aparece sob a forma de teorema 4: "Dados dois inteiros $m \geq 1$ e $d \geq 2$ e um inteiro ϵ tal que $\epsilon \geq md$, existe um anel local A tal que $d(A) = d$, $m(A) = m$ e $\epsilon(A) = \epsilon$".

§ Definições e Notações

Esteremos sempre supondo que os aneis sejam comutativos, noetherianos e com unidade.

Seja (A, M) um anel local. Sua dimensão de mergulho (embedding dimenion) é a dimensão de $\frac{M}{M^2}$ com $\frac{A}{M}$-espaço vetorial e será denotado por $\epsilon(A)$.

Sejam A um anel e M um A-módulo. Se existe uma cadeia própria de submódulos $M = M_0 \underset{\neq}{\supset} M_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} M_r = (0)$ tal que não seja possível inserir mais submódulos, então, pelo teorema de Jordan, qualquer outra cadeia do tipo tem o mesmo comprimento r. Denotaremos por $\ell_A(M)$ este comprimento.

Se D é um anel artiniano, $B = D[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de polinômios e $N = \bigoplus_{r=0}^{\infty} N_r$ um B-módulo finitamente gerado graduado então sabemos que existe um polinômio $\mathcal{P}_N(X)$ chamado polinômio de Hilbert-Samuel tal que $\mathcal{P}_N(n) = \ell_D(N_n)$ para cada n inteiro suficientemente grande.

Seja I um ideal do anel local (A, M), consideremos o anel graduado associado à A com relação à I, ou seja, $\bigoplus_{r=0}^{\infty} \frac{I^r}{I^{r+1}}$, que será denotado por $Gr_I(A)$. Diremos que $\mathcal{P}_{Gr_I(A)}(X)$ é o polinômio de Hilbert-Samuel de A em relação à I. A multiplicidade de I é definida como sendo $(d(A)-1)!$ vezes o coeficiente principal de $\mathcal{P}_{Gr_I(A)}(X)$, onde $d(A)$ é a dimensão de Krull de A, e será denotada por $m(I)$. Sabemos também que existe um polinômio dito polinômio característico e denotado por $\chi_I^A(X)$ tal que $\chi_I^A(n) = \ell_A(\frac{A}{I^n})$ para cada n suficientemente grande. Se $I = M$ diremos que a multiplicidade de M em A é a multiplicidade do anel A e escrevemos simplesmente $m(A) = m(M)$, $Gr_M(A) = Gr(A)$ e chamado anel graduado associado à A, $\mathcal{P}_{Gr_M(A)}(X) = \mathcal{P}_A(X)$ e $\chi_M^A(X) = \chi_A(X)$.

Se A é um anel sem divisores do zero, $cf(A) := \{\frac{a}{b} | a, b \in A \text{ e } b \neq 0\}$ é um corpo chamado corpo de frações de A.

Sejam K e k dois corpos. Se K é uma extensão transcendente de k, o grau de transcendencia de K sobre k é definido como sendo o número de elementos de uma base transcedental de K sobre k e será denotado por $grtr_k K$.

Um anel local A é dito anel de Cohen-Macaulay se o comprimento das sequências regulares maximais de I é igual à altura de I, para cada I ideal de A.

CAPÍTULO I

§1 Dimensão de Mergulho em Anéis de Cohen-Macaulay

O objetivo deste parágrafo é mostrar o teorema 1. Para isso serão necessários alguns resultados preliminares.

TEOREMA 1. *Se (A, M) é um anel local de Cohen-Macaulay então $e(A) \leq d(A)+m(A)-1$.*

Se A é o anel local de um ponto P de uma variedade V tal que, localmente em P, V é uma interseção completa, então A é um anel de Cohen-Macaulay.

LEMA 1.1. *Seja A um anel local. Se I é um ideal gerado por uma sequência regular, então $\bigcup_{P \in Ass(I^n)} P \subseteq \bigcup_{P \in Ass(I)} P$ para cada $n \geq 0$.*

PROVA: Seja $c \in A$ tal que $c \notin \bigcup_{P \in Ass(I)} P$, vejams que $c \notin \bigcup_{P \in Ass(I^n)} P$ para $n \geq 0$, ou seja, vejamos que se $x \in A$ é tal que $xc \in I^n$ então $x \in I$. Faremos a prova por indução em n.

Se $n = 0$ é óbvio.

Suponhamos $n > 0$ e que o lema vale para n. Seja $x \in A$ tal que $xc \in I^{n+1} \subseteq I^n$. Pela hipótese de indução $x \in I^n$. Sejam $a_1, \ldots, a_r$ tais que $I = (a_1, \ldots, a_r)$, assim, $x = \Sigma \xi_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot a_r^{i_r}$ tal que $\sum_{\ell=1}^{r} i_\ell = n$ e $\xi_{i_1 \ldots i_r} \in A$. Escrevemos $x = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r$, onde $\beta_i \in (a_1, \ldots, a_i)^{n-1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Agora, faremos indução no número de β_i's não nulos.

Se $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$ então $x = 0$ e assim $x \in I^{n+1}$.

Suponhamos que $\beta_r = \cdots = \beta_{s+1} = 0$ e $\beta_s \neq 0$ para algum $s \in \{1, \ldots, r\}$, assim $x = x' + \beta_s a_s$, onde $x' = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{s-1} a_{s-1}$ e $x' \in I^{n+1}$ por indução.

Escrevemos $I = J + Aa_s$, onde $J = (a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_r)$ e temos assim que $I^{n+1} = J^{n+1} + I^n a_s$.

Como $c(x' + \beta_s a_s) = cx \in I^{n+1} = J^{n+1} + I^n a_s$, existe $y \in I^n$ tal que $c(x' + \beta_s a_s) - ya_s \in J^{n+1} \subseteq J^n$. Temos que $c\beta_s a_s - ya_s \in J^n$, pois $x' \in J^n$. Como $a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_r, a_s$ é sequência regular ([4] teorema 119), temos que $a_s + J$ não é divisor de zero em A/J, portanto $a_s \notin P$ se P é um ideal primo associado à J.

Temos então, $(c\beta_s - y)a_s \in J^n$, J gerado por uma seqüência regular e $a_s \notin P$ para qualquer ideal primo P asociado à J. Logo $c\beta_s - y \in J^n$.

Daí, como $y \in I^n \supseteq J^n$, temos que $c\beta_s \in I^n$ e, por indução, $\beta_s \in I^n$, portanto $\beta_s a_s \in I^{n+1}$ e conseqüentemente $x = x' + \beta_s a_s \in I^{n+1}$. ∎

LEMA 1.2. *Sejam A um anel local e I um ideal de A gerado por uma seqüência regular $a_1, \ldots, a_r$. Então $(I^n : a_r) = I^{n-1}$ para algum inteiro $n \geq 0$.*

PROVA: Seja $n \geq 0$. É óbvio que $I^{n-1} \subseteq (I^n : a_r)$. Vejamos a outra inclusão. Seja $x \in (I^n : a_r)$, então $xa_r \in I^n$. Seja $J = (a_1, \ldots, a_{r-1})$. Temos que $I^n = J^n + a_r I^{n-1}$, logo existe $y \in I^{n-1}$ tal que $a_r(x - y) = xa_r - ya_r \in J^n$. Como $a_r + J$ não é divisor de zero em A/J, $a_r \notin P$ se P for um ideal primo de A associado à J. Logo, pelo lema 1.1, vale que $x - y \in J^n \subseteq I^n \subseteq I^{n-1}$. Portanto $x \in I^{n-1}$ e temos que $(I^n : a_r) \subseteq I^{n-1}$. ∎

LEMA 1.3. *Sejam A um anel e I um ideal de A. Se $x \in I$ então $\frac{Ax}{I^n \cap Ax}$ é isomorfo à $\frac{A}{(I^n : x)}$ como A-módulos.*

PROVA: Definimos $\varphi: Ax \to \frac{A}{(I^n:x)}$ por $\varphi(ax) = a + (I^n : x)$. Se $a_1, a_2 \in A$ são tais que $a_1 x = a_2 x$, então $a_1 - a_2 \in (I^n : x)$, isto é, $\overline{a}_1 = \overline{a}_2$, portanto φ esta bem definida. É fácil ver que φ é um homomorfismo de A-módulos. Como o núcleo de φ é $\{ax/Q \in (I^n : x)\} = \{ax | ax \in I^n\} = I^n \cap Ax$ e como φ é sobrejetor, temos $\frac{A}{I^n \cap Ax} \simeq \frac{A}{(I^n:x)}$ como A-módulos. ∎

PROPOSIÇÃO 1.4. *Seja A um anel local de Cohen-Macaulay. Se I é um ideal de A gerado por um sistema de parâmetros, então $m(I) = \ell_A(A/I)$.*

PROVA: A prova será feita por indução em $d(A)$. Se $d(A) = 0$ então $I = 0$ e $\ell_A(\frac{A}{I^n}) =$

$\ell_A(A)$ para qualquer inteiro $n > 0$, portanto $\chi_0^A(Y) = \frac{\ell_A(A)}{0!} Y^0$ e assim $m(I) = \ell_A(A) = \ell_A(A/I)$.

Seja A tal que $d(A) = r$. Suponhamos que $r > 0$ e que a proposição valha para aneis de Cohen-Macaulay de dimensão $r - 1$.

Seja $I = (a_1, \ldots, a_r)$ um ideal de A gerado por um sistema de parâmetros. Como A é anel de Cohen-Macaulay $a_1, \ldots, a_r$ é seqüência regular ([4] teorema 129).

Consideremos a seqüência exata de A-módulos

$$0 \longrightarrow \frac{I^n + Aa_r}{I^n} \longrightarrow \frac{A}{I^n} \longrightarrow \frac{A}{I^n + Aa_r} \longrightarrow 0.$$

Temos que

$$\ell_A\left(\frac{A}{I^n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I^n + Aa_r}\right) = \ell_A\left(\frac{I^n + Aa_r}{I^n}\right).$$

Como

$$\frac{I^n + Aa_r}{I^n} \simeq \frac{Aa_r}{I^n \cap Aa_r},$$

temos que

$$\ell_A\left(\frac{I^n + Aa_r}{I^n}\right) = \ell_A\left(\frac{Aa_r}{I^n \cap Aa_r}\right)$$

e pelo lema 1.3,

$$\ell_A\left(\frac{Aa_r}{I^n \cap Aa_r}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{(I^n : a_r)}\right).$$

Pelo lema 1.2,

$$\ell_A\left(\frac{A}{(I^n : a_r)}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{I^{n-1}}\right).$$

Logo

$$\ell_A\left(\frac{A}{I^n}\right) - \ell_A\left(\frac{A}{I^n + Aa_r}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{I^{n-1}}\right),$$

mas

$$\frac{A}{I^n + Aa_r} \simeq \frac{A/Aa_r}{(I/Aa_r)^n}$$

como $\frac{A}{Aa_r}$-módulos e assim

$$\chi_I^A(n) - \chi_{I/Aa_r}^{A/Aa_r}(n) = \chi_I^A(n-1).$$

Denotamos $F(Y) := \chi_I^A(Y)$ e $G(Y) := \chi_{I/Aa_r}^{A/Aa_r}(Y)$ e sabemos que o grau de F é r e que o gra de G é $r-1$, pois $d(\frac{A}{Aa_r}) = r-1$. Temos $F(Y) = \frac{m(I)}{r!}Y^r +$ termos de menor grau e $G(Y) = \frac{m(I/Aa_r)}{(r-1)!}Y^{r-1} +$ termos de menor grau. Assim, $G(Y) = F(Y-1) = 0Y^r + \frac{1}{r!}m(I)rY^{r-1} +$ termos de menor grau. Portanto $m(I) = m(I/Aa_r)$. Como A/Aa_r é anel de Cohen-Macaulay ([4] teorema 141) de dimensão menor que r, por indução, $m(I/Aa_r) = \ell_{A/Aa_r}\left(\frac{A/Aa_r}{I/Aa_r}\right) = \ell_A(\frac{A}{I})$, portanto $m(I) = \ell_A(\frac{A}{I})$. ∎

LEMA 1.5. *Sejam (A, M) um anel local e $Q_1 \subset Q_2$ ideais de A M-primários. Se não existe um ideal entre Q_1 e Q_2 então também não existe um ideal de $A[X]$ entre $Q_1[X]$ e $Q_2[X]$.*

PROVA: Seja Q um ideal de $A[X]$ tal que $Q_1[X] \subset Q \subset Q_2[X]$. Suponhamos que $Q \neq Q_2[X]$, assim temos que $Q \cap A = Q_1$.

Seja $f(X) \in Q \backslash Q_1[X]$ polinômio não nulo de grau mínimo, digamos $f(X) = aX^r + b_{r-1}X^{r-1} + \cdots + b_0$. Afirmamos que $a \notin Q_1$, caso contrário $f(x) - ax^r \in Q$ e $f(X) - aX^r \notin Q_1[X]$. Como $f(X) - aX^r$ tem grau menor que r, $f(X) - aX^r$ é o polinômio nulo, ou seja, $f(X) = aX^r \in Q_1[X]$ contradizendo a escolha de $f(X)$. Portanto $a \notin Q_1$. Por outro lado, como $f(X) \in Q \subset Q_2[X]$, temos que $a \in Q_2$, logo $Q_1 \subset Q_1 + Aa = Q_2$. Temos então $f(X) \in Q \subseteq Q_2[X] = Q_1[X] + aA[X]$, logo podemos escrever $f(X) = af_1(X) + h(X)$, onde $h(X) \in Q_1[X]$ e $f_1(X)$ é um polinômio mônico de grau r. Assim $af_1(X) = f(X) - h(X) \in Q$. Como $Q \subset Q_2[X]$ e $f_1(X)^n \notin Q_2[X]$ qualquer que seja o inteiro $n > 0$, já que $f_1(X)$ é polinômio mônico, temos que $f_1(X)^n \notin Q$. Como Q é primário, $a \in Q$, logo $a \in Q \cap A = Q_1$, que é uma contradição. Logo $Q = Q_1[X]$. ∎

LEMA 1.6. *Sejam (A, M) um anel local e $B = A[X]_{M[X]}$. Se Q é um ideal de B MB-primário e $I := Q \cap A$, então $m(Q) = m(I)$. Em particular $m(A) = m(B)$.*

PROVA: Sendo Q um ideal MB-primário, qualquer ideal próprio de B que contenha uma potência de Q é um ideal MB-primário. Por outro lado, existe uma bijeção, que preserva a inclusão, entre os ideais MB-primários de B e os ideais $M[X]$-primários de $A[X]$. Logo, para $n \geq 0$ vale que

$$\ell_B\left(\frac{B}{Q^n}\right) = \ell_B\left(\frac{B}{MB}\right) + \ell_B\left(\frac{MB}{Q^n}\right) = 1 + \ell_{A[X]}\left(\frac{M[X]}{Q^n \cap A[X]}\right) = 1 + \ell_{A[X]}\left(\frac{M[X]}{I^n[X]}\right).$$

Observamos que se $I^n \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_s \subset M$ é uma cadeia de ideais de A, então $I^n[X] \subseteq Q_1[X] \subseteq \cdots \subseteq Q_s[X] \subseteq M[X]$ é uma cadeia de ideais de $A[X]$, portanto $\ell_A\left(\frac{M}{I^n}\right) \leq \ell_{A[X]}\left(\frac{M[X]}{I^n[X]}\right)$. Como antes, os ideais $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ são M-primários uma vez que I é M-primário. Pelo lema 1.5, se $I^n \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_s \subset M$ for uma cadeia saturada de ideais, então $I^n[X] \subset Q_1[X] \subset \cdots \subset Q_s[X] \subset M[X]$ também será uma cadeia saturada em $A[X]$, decorre daí que $\ell_A\left(\frac{M}{I^n}\right) = \ell_{A[X]}\left(\frac{M[X]}{I^n[X]}\right)$, portanto

$$\ell_A\left(\frac{A}{I^n}\right) = 1 + \ell_A\left(\frac{M}{I^n}\right) = 1 + \ell_{A[X]}\left(\frac{M[X]}{I^n[X]}\right) = \ell_B\left(\frac{B}{Q^n}\right).$$

Temos assim que, para n suficientemente grande, $\chi_I^A(n) = \chi_A^B(n)$, logo $m(I) = m(Q)$. ∎

PROPOSIÇÃO 1.7. *Seja (A, M) anel local de Cohen-Macaulay. Existe um ideal I de A M-primário, gerado por um sistema de parâmetros e tal que $m(I) = m(A)$.*

PROVA: Denotemos por B o anel $A[X]_{M[X]}$. Como A é um anel de Cohen-Macaulay, $A[X]$ é um anel de Cohen-Macaulay ([4] teorema 151) e portanto B também será um anel de Cohen-Macaulay ([4] teorema 139). Observamos que $\frac{B}{MB} \simeq \left(\frac{A[X]}{MA[X]}\right)_{M[X]} \simeq \frac{A}{M}(X)$ que é um corpo infinito. Assim, existe um ideal Q em B MB-primário gerado por um sistema de parâmetros e tal que $m(B) = m(Q)$ ([9] teorema 22, VIII, §10).

Pelo lema 1.6 $I = Q \cap A$ é um ideal M-primário de A e $m(I) = m(Q) = m(B) = m(A)$. Escrevemos $Q = (f_1, \ldots, f_{d(B)})$ onde $f_1, \ldots, f_{d(B)}$ podem ser escolhidos em $A[X]$. Como $d(A) = d(B)$, $I = Q \cap A = (f_1(0), \ldots, f_{d(A)}(0))$, ou seja, I é um ideal M-primário, gerado por um sistema de parâmetros e tal que $m(A) = m(I)$. ∎

PROVA DO TEOREMA 1: Pela proposição 1.7 existe um ideal I de A M-primário gerado por $d(A)$ elementos e tal que $m(I) = m(A)$. Temos $\ell_A(\frac{A}{I}) - 1 = \ell_A(\frac{M}{I}) \geq \ell_A(\frac{M}{I+M^2})$, pois

$I \subseteq I + M^2$. Consideremos a seqüência exata de A-módulos $0 \to \frac{I+M^2}{M^2} \to \frac{M}{M^2} \to \frac{M}{I+M^2} \to 0$, e temos

$$\ell_A\left(\frac{M}{M^2+I}\right) = \ell_A\left(\frac{M}{M^2}\right) - \ell_A\left(\frac{I+M^2}{M^2}\right).$$

Como I é gerado por $d(A)$ elementos, vale que

$$\ell_A\left(\frac{I+M^2}{M^2}\right) = \dim_{\frac{A}{M}}\left(\frac{I+M^2}{M^2}\right) \leq d(A),$$

onde $\dim_{A/M}\left(\frac{I+M^2}{M^2}\right)$ é a dimensão de $\frac{I+M^2}{M^2}$ como $\frac{A}{M}$-espaço vetorial. Portanto $\ell_A(\frac{A}{I}) - 1 \geq \ell_A(\frac{M}{M^2}) - d(A) = \epsilon(A) - d(A)$. Pela proposição 1.4, vale que $m(A) = \ell(\frac{A}{I})$. Logo $m(A) - 1 = m(I) - 1 \geq \epsilon(A) + d(A)$, ou seja, $\epsilon(A) \leq d(A) + m(A) - 1$. ∎

§2 Anel graduado associado a um anel local

Vamos considerar agora, A um anel graduado homogêneo isomorfo à $\frac{k[X_0,\ldots,X_n]}{I}$, onde $n \geq 0$, I é um ideal homogêneo de $k[X_0,\ldots,X_n]$, k é um corpo algebricamente fechado e $d(A) \geq 1$. Usaremos as seguintes notações:

- $A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$;

- $\dim_k A_r$ é a dimensão de A_r como k-espaço vetorial;

- $\mu_P(f) = \ell_{A_P}(\frac{A_P}{fA_P}) \geq 1$, onde $f \in A_r$, $r > 0$, $f \neq 0$ e P é um ideal primo minimal de f, e neste caso, P é ideal homogêneo.

TEOREMA 2. *Seja A um domínio graduado homogêneo como acima. Então $\dim_k A_1 \leq d(A) + m(A) - 1$.*

Observamos que, se $A = k$ então $d(A) = 0$, $\dim_k A_1 = m(A) = 0$ e a desigualdade é falsa. Portanto a hipótese $d(A) \geq 1$ é necessária para o teorema 2.

Antes da demonstração deste teorema vejamos alguns resultados preliminares.

Lema 2.1. *Seja A um domínio graduado homogêneo. Então existe um ideal homogêneo não nulo T_A de A contido em $\bigoplus_{r=1}^{\infty} A_r$ tal que se P é um ideal primo homogêneo de A e $T_A \not\subset P$ então A_P é regular.*

Prova: Seja X a variedade projetiva definida por I e T_A o ideal de A gerado pelos polinômios homogêneos de A que se anulam em cada ponto singular de X. Se P é um ideal primo homogêneo de A tal que $T_A \not\subset P$, então existe $f \in T_A$ e $f \notin P$. Como k é algebricamente fechado, existe $x_0 \in \{x \in X/g(x) = 0$ para cada $g \in P\}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como $f \in T_A$ e $f(x_0) \neq 0$, temos que x_0 é ponto regular de X, isto é, o anel das funções regulares em x_0, $\mathcal{O}_{x_0}$, é um anel regular. Como $\mathcal{O}_{x_0} \simeq A_{M_{x_0}}$, onde $M_{x_0} := \{f \in A | f(x_0) = 0\}$ ([**3**] teorema 3.4, I), $A_{M_{x_0}}$ é um anel regular e também $(A_{M_{x_0}})_{PA_{M_{x_0}}}$ é anel regular ([**5**] corolário 1.18, VI). Como $(A_{M_{x_0}})_{PA_{M_{x_0}}} \simeq A_P$ temos que A_P é anel regular. ∎

Lema 2.2. *Seja $s > 0$ e $f \in A_s$ uma forma não nula. Então $sm(A) = \sum_{i=1}^{t} \mu_{P_i}(f) m(A/P_i)$, onde $P_1, \ldots, P_t$ são os ideais primos minimais de f em A.*

Prova: Seja $f \neq 0$ forma de grau $s > 0$. Definimos $B := \frac{A}{Af} \simeq \frac{k[X_1,\ldots,X_n]}{I+Af}$ anel graduado homogêneo, escrevemos $B = \bigoplus_{r=0}^{\infty} B_r$. Temos que ([**7**] teorema 14.7) $m(B) =$

$$\sum_{i=1}^{t} m\left(\frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} B_r}{Q_i}\right) \ell_{B_{Q_i}}(B_{Q_i}),$$ onde $Q_1, \ldots, Q_t$ são os ideais primos mínimos de B tais que $d(\frac{B}{Q_i}) = d(B)$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$. Podemos escrever $Q_i = \frac{P_i}{Af}$, onde P_i é ideal primo mínimo de f em A para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$. Pela de finição de B, $\bigoplus_{r=1}^{\infty} B_r = \frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} A_r}{Af}$,

portanto

$$m\left(\frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} B_r}{Q_i}\right) = m\left(\frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} A_r}{Af} \Big/ \frac{P_i}{Af}\right) = m\left(\frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} A_r}{P_i}\right) = m\left(\frac{A}{P_i}\right)$$

para cada $i \in \{1, \dots, t\}$. Agora,

$$\ell_{B_{Q_i}}\left(\frac{\bigoplus_{r=1}^{\infty} B_r}{Q_i}\right) = \ell_{(\frac{A}{Af})_{\frac{P_i}{Af}}}\left(\left(\frac{A}{Af}\right)_{\frac{P_i}{Af}}\right) = \ell_{\frac{A_{P_i}}{fA_{P_i}}}\left(\frac{A_{P_i}}{fA_{P_i}}\right) = \ell_{A_{P_i}}\left(\frac{A_{P_i}}{fA_{P_i}}\right)$$

onde a última igualdade decorre do fato de ser fA_{P_i} contido no anulador do A_{P_i}-módulo $\frac{A_{P_i}}{fA_{P_i}}$ para cada $i \in \{1, \dots, t\}$.

Vejamos agora que $m(\frac{A}{Af}) = sm(A)$. Temos $B_r = \frac{A_r}{Af \cap A_r}$ para cada $r \geq 0$. Consideremos a seqüência exata de k-módulos $0 \to A_{r-s} \xrightarrow{i} A_r \xrightarrow{j} B_r \to 0$, onde

$$\begin{aligned} i: A_{r-s} &\to A_r \\ g &\mapsto gf \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j: A_r &\to B_r \\ g &\mapsto g + Af \cap A_r. \end{aligned}$$

Logo, $\ell_k(B_r) = \ell_k(A_r) - \ell_k(A_{r-s})$. Portanto, para N suficientemente grande $\mathcal{P}_B(N) = \mathcal{P}_A(N) - \mathcal{P}_A(N-s)$. Escrevemos $d = d(A) - 1$ e $\mathcal{P}_A(N) = \frac{m(A)}{d!}N^d + c_{d-1}N^{d-1} +$ termos de menor grau, e como $d(B) = d$, temos que $\mathcal{P}_B(N) = \frac{m(B)}{(d-1)!}N^{d-1} +$ termos de menor grau $= (\frac{m(A)}{d!}N^d + c_{d-1}N^{d-1} +$ termos de menor grau$) - (\frac{m(A)}{d!}(N-s)^d + c_{d-1}(N-s)^{d-1} +$ termos de menor grau$) = \frac{m(A)}{d!}(N^d - (N-s)^d) + c_{d-1}(N^{d-1} - (N-s)^{d-1}) +$ termos de menor grau $= \frac{m(A)}{d!}N^d - \frac{m(A)}{d!}N^d + \frac{m(A)}{d!}dsN^{d-1} + c_{d-1}N^{d-1} - c_{d-1}N^{d-1} +$ termos de menor grau $= \frac{m(A)}{d!}sN^{d-1} +$ termos de menor grau. Logo $m(B) = m(A)$, ou seja, $m(\frac{A}{Af}) = sm(A)$. ∎

LEMA 2.3. *Seja (B, M) anel regular de dimensão um. Seja $D \supset B$ um anel tal que D é um B-módulo finitamente gerado. Sejam $M_1, \ldots, M_r$ os ideais maximais de F. São verdadeiras as afirmações:*

i) Se I é um ideal de B então $ID \cap B = I$;

ii) Se D é anel regular e $f \in M$ é um elemento não nulo de B então

$$\ell_B(\frac{B}{fB}) \leq \sum_{i=1}^{r} \ell_{D_{M_i}} \left(\frac{D_{M_i}}{fD_{M_i}}\right).$$

PROVA: Como D é uma extensão inteira de B, $D \cap cf(B)$ é uma extensão inteira de B. Por outro lado B é um domínio regular, logo um domínio integralmente fechado ([**9**] corolário 1, VIII §11), logo $D \cap cf(B) = B$. Como B é anel regular de dimensão um, B é domínio de ideais principais, assim $I = yB$, onde $y \in B$. Seja $x \in ID \cap B$, temos que existe $x' \in D$ tal que $x = yx'$. Observamos que $x' \in D$ e $x' = x/y \in cf(B)$, logo $x' \in D \cap cf(B) = B$, daí $x \in yB = I$. Logo $ID \cap B = I$ o que prova (i).

Seja $f \in M$, $f \neq 0$. Temos que D_{M_i} é anel regular e que $d(D_{M_i}) = \text{alt}(M_i) = 1$, pois D é uma extensão inteira de B, logo $M_i D_{M_i}$ é ideal principal gerado por um elemento que pode ser escolhido em M_i. Seja $d_1, \ldots, d_r \in D$ tais que $d_i D_{M_i} = M_i D_{M_i}$. Como $f \in M$, então $f \in M_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Temos então $f = d_1^{t_1} \frac{x_1}{y_1}$, onde $t_1 > 0$, $\frac{x_1}{y_1}$ um elemento inversível de D_{M_i}. Suponhamos que $f = d_1^{t_1} \ldots d_i^{t_i} \frac{x_i}{y_i}$ com $1 \leq i < r$, $t_i > 0$, x_i/y_i um elemento invertível de $D_{M_1} \cap D_{M_2} \cap \cdots \cap D_{M_i}$. Temos

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{f}{d_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot d_i^{t_i}} \in M_{i+1} D_{M_{i+1}},$$

pois $d_j \notin M_t$ se $j \neq t$ para cada $j, t \in \{1, \ldots, r\}$. Logo

$$\frac{x_i}{y_i} = d_{i+1}^{t_{i+1}} \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}},$$

com $t_{i+1} > 0$ e $\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$ um elemento inversível de $D_{M_{i+1}}$. Por outro lado,

$$\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}} = \frac{x_i}{y_i d_{i+1}^{t_{i+1}}} \in \bigcap_{j=1}^{i} D_{M_j}$$

é um elemento inversível de $\bigcap_{j=1}^{i} D_{M_j}$. Logo $\frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$ é um elemento inversível de $\bigcap_{j=1}^{i+1} D_{M_j}$ e $f = d_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot d_{i+1}^{t_{i+1}} \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$. Assim, repetindo o raciocínio, temos $f = d_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot d_r^{t_r} \frac{x_r}{y_r}$, com $\frac{x_r}{y_r}$ um elemento inversível de $\bigcap_{i=1}^{r} D_{M_i}$, isto é, um elemento inversível de D. Seja $I_j := Dd_j^{t_j}$. Pelo teorema chines dos restos, temos que

$$\frac{D}{Df} = \frac{D}{d_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot d_r^{t_r} D} \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \frac{D}{d_j^{t_j} D}.$$

Logo

$$\ell_D\left(\frac{D}{Df}\right) \leq \sum_{j=1}^{r} \ell_D\left(\frac{D}{d_j^{t_j} D}\right) = \sum_{j=1}^{r} \ell_{D_{M_j}}\left(\frac{D_{M_j}}{d_j^{t_j} D_{M_j}}\right) = \sum_{j=1}^{r} \ell_{D_{M_j}}\left(\frac{D_{M_j}}{fD_{M_j}}\right).$$

Resta mostrar que $\ell_D(\frac{D}{fD}) \geq \ell_B(\frac{B}{fB})$. Para tanto, seja $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_\ell \subset B$ uma cadeia de ideais de B tal que $f \in Q_1$. Pela parte (i) temos que $Q_i D \cap B = Q_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, logo $Q_1 D \subset Q_2 D \subset \cdots \subset Q_\ell D \subset D$ é uma cadeia de ideais de D de comprimento ℓ se $Q_i \neq Q_j$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ e $f \in Q_1 D$. Logo $\ell_B(\frac{B}{fB}) \leq \ell_D(\frac{D}{fD})$ o que finaliza a prova de (ii). ∎

Estamos considerando A o anel graduado homogêneo $\frac{k[X_0,\ldots,X_n]}{I}$. Denotemos $S := k[X_0, \ldots, X_n]$ e $R := k[X_1, \ldots, X_n]$. Suponhamos que o ideal homogêneo I seja um ideal primo contido em $(X_1, \ldots, X_n)S$. Seja $Q := I \cap R$ e $B := R/Q$. Suponhamos que $d(A) = d(B)$ e $d(B) \geq 2$. Então, como A e B são k-algebras finitamente geradas, temos que $cf(A)$ é uma extensão algébrica do $cf(B)$ ([**5**] corolário 3.6, II), portanto existem $p_0, \ldots, p_n \in R$ tais que $p_m X_0^m + \cdots + p_1 X_0 + p_0 \in I$ e $p_m \notin Q$. Como tanto Q quanto I são ideais homogêneos, podemos supor que $p_0, \ldots, p_m$ sejam polinômios homogêneos.

Sejam T_A e T_B os ideais homogêneos definidos no lema 2.1. Nestas condições temos os dois lemas abaixo:

LEMA 2.4. *Seja N um ideal primo de R tal que $Q \subset N$. Suponhamos aud $p_m \notin N$. Seja s o sistema multiplicativo $B \backslash N/Q$, $B_s = B_{N/Q}$. Então* *i)* A_s *é* B_s*-módulo finitamente gerado;*

ii) *Se* $T_B \not\subseteq N/Q$ *então* B_s *é anel regular;*

iii) *Se* $T_A \not\subseteq P/I$ *qualquer que seja* P *ideal primo de* S *tal que* $I \subset P$ *e* $P \cap R = N$*, então* A_s *é regular;*

iv) *Se* $d(R/N) = d(B) - 1$*, então* $d(A_s) = d(B_s) = 1$*.*

PROVA: (i) Como $p_n \notin N$, $p_m + Q \in s$, logo X_0 é um elemento inteiro sobre B_s. Por outro lado, $A = B[X_0]$, logo $A_s = B_s[X_0]$, portanto A_s é B_s-módulo finitamente gerado.

(ii) Decorre diretamente da definição de T_B.

(iii) Como B_s é anel local e, pela parte (i) deste lema, A_s é B_s- módulo finitamente gerado, temos que A_s é anel semi-local e cada ideal maximal de A_s é da forma $\frac{P}{I}A_s$, onde P é um ideal primo de S tal que $I \subset P$ e $P \cap R = N$. Por hipótese $T_A \not\subseteq P/I$, logo $A_{P/I}$ é regular. Como $(A_s)_{\frac{P}{I}A_s} \simeq A_{P/I}$ e como $\frac{P}{I}A_s$ são os ideais maximais de A_s, temos que A_s é anel regular;

(iv) Para mostrar iv, mostraremos que o ideal máximo $\frac{N}{Q}B_{N/Q} = \frac{N}{Q}B_s$ tem altura um e que os ideais máximos de A_s também têm altura um.

Como $Q \subset N$ são ideais primos de R tais que $d(\frac{R}{N}) = d(B) - 1 = d(\frac{R}{Q}) - 1$, então $\text{alt}(\frac{N}{Q}) = 1$ e, consequentemente, $d(B_{N/Q}) = 1$.

Já sabemos que os ideais maximos de A_s são do tipo $\frac{P}{I}A_s$, onde P é um ideal primo de S tal que $P \supset I$ e $P \cap R = N$. Portanto basta mostrar que $\text{alt}(\frac{P}{I}) = 1$ para P um ideal primo de S tal que $I \subset P$ e $P \cap R = N$. Se $P \supset I$ então $d(\frac{S}{P}) < d(\frac{S}{I}) = d(B)$, isto é, $d(\frac{S}{P}) \leq d(B) - 1$. Por outro lado como tanto $\frac{S}{P}$ quanto $\frac{R}{N}$ são k-álgebras finitamente geradas e $\frac{S}{P} \supset \frac{R}{N}$, pelo lema de Normalização de Noether temos

$$d(\frac{S}{P}) = grtr_k(cf(\frac{S}{P})) \geq grtr_k(cf(\frac{R}{N})) = d(\frac{R}{N})$$

([5] corolário 3.6, II), ou seja,

$$d(\frac{S}{P}) \geq d(\frac{R}{N}) = d(B) - 1,$$

logo

$$d(\frac{S}{P}) = d(B) - 1$$

o que finaliza a prova do ítem (iv). ∎

LEMA 2.5. *Existe $f \in R$ forma de grau um tal que se N é um ideal primo minimal de $Rf+Q$ e $s = B\backslash N/Q$, então A_s e B_s são aneis regulares de dimensão um, A_s é B_s-módulo finitamente gerado e $d(\frac{R}{N}) = d(A) - 1 = d(B) - 1$.*

PROVA: Sejam $\tilde{T}_A$ e $\tilde{T}_B$ imagens inversas de T_A e T_B em S e R respectivamente. Observamos que $\tilde{T}_A$ e $\tilde{T}_B$ são ideais homogêneos. Temos assim que $Q \subseteq \tilde{T}_B$ e $I \subseteq \tilde{T}_A$. Denotemos $d = d(A) - 1 = d(B) - 1$.

Sejam $Q_1, \ldots, Q_t$ os ideais primos minimais de $\tilde{T}_B$ em R tais que $d(\frac{R}{Q_i}) = d \geq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$. Sejam $I_1, \ldots, I_r$ os ideais primos minimais de $\tilde{T}_A$ em S tais que $d(\frac{S}{I_j}) = d \geq 1$ e $I_j \neq (X_1, \ldots, X_n)S$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Segue daí que $(X_1, \ldots, X_n)R \not\subset Q_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$ e $(X_1, \ldots, X_n)S \not\subset I_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Observamos que $Q_1, \ldots, Q_t$, $I_1, \ldots, I_r$ são ideais primos homogêneos, pois $\tilde{T}_A$ e $\tilde{T}_B$ são ideais homogêneos.

Sejam $J := Rp_m + Q$ e $P_1, \ldots, P_s$ os ideais primos minimais de J. Como J é ideal homogêneo, $P_1, \ldots, P_s$ são ideais primos homogêneos. Como para cada $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ $P_{\ell/Q}$ é ideal primo minimal de Bp_m, temos, pelo teorema do ideal principal de Krull, que $\text{alt}(\frac{P_\ell}{Q}) = 1$. Sendo R domínio catenário, $d(\frac{R}{P_\ell}) = d(\frac{R}{Q}) - 1 = d(B) - 1 = d \geq 1$, logo $(X_1, \ldots, X_n)R \not\subset P_\ell$ para cada $\ell \in \{1, \ldots, s\}$, caso contrário $d(\frac{R}{(X_1, \ldots, X_n)}) \geq d \geq 1$.

Denotemos por R_1 o conjunto das formas de grau um de R. Temos que $R_1 \not\subset Q_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$, $R_1 \not\subset I_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$ e $R_1 \not\subset P_\ell$ para cada $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ e como tanto R_1 quanto os Q_i's, I_j's e P_ℓ's são k-espaços vetoriais e k é um corpo infinito, temos que $R_1 \not\subset Q_1 \cup \cdots \cup Q_t \cup I_1 \cup \cdots \cup I_r \cup P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Logo, existe $f \in R_1 \backslash Q_1 \cup \cdots \cup Q_t \cup I_1 \cup \cdots \cup I_r \cup P_1 \cup \cdots \cup P_s$.

Seja N um ideal primo minimal de $Rf + Q$, como $Rf + Q$ é um ideal homogêneo, N é um ideal primo homogêneo. Como $f \notin Q$, pelo teorema do ideal principal de Krull, $\text{alt}(\frac{N}{Q}) = 1$ e como R é domínio catenário, $d(\frac{R}{N}) = d(\frac{R}{Q}) - 1 = d(B) - 1 = d$.

Para terminar a demonstração resta ver que A_s e B_s são anéis regulares e $d(A_s) = d(B_s) = 1$. Basta então ver que N satisfaz as hipóteses do lema anterior.

Primeiro, $p_m \notin N$, caso contrário $J \subset N$ e como $\text{alt}(\frac{N}{Q}) = 1$, teríamos que N é ideal primo minimal de J, isto é, $N \in \{P_1, \ldots, P_s\}$ o que implicaria $f \in \bigcup_{\ell=1}^{s} P_\ell$.

Segundo, se $\tilde{T}_B \subseteq N$ então existiria $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que o ideal primo minimal Q_i de $\tilde{T}_B$ seria tal que $Q_i \subseteq N$. Como $f \in N$ e $f \notin Q$, teríamos $N \supset Q_i$. Como $N \supseteq Q_i \supseteq \tilde{T}_B \supset Q$ e como $d(\frac{R}{N}) = d(\frac{R}{Q}) - 1$ então $Q = Q'$ o que implicaria $T_B = \frac{\tilde{T}_B}{Q} = 0$. Logo $\tilde{T}_B \nsubseteq N$, portanto $T_B \not\subset N/Q$.

Finalmente, suponhamos que exista P um ideal primo de S tal que $I \subset P$, $P \cap R = N$ e $P \supseteq \tilde{T}_A \supseteq I$. Então $P \neq (X_1, \ldots, X_n)S$, de fato, se $P = (X_1, \ldots, X_n)S$ então $N = R \cap P = (X_1, \ldots, X_n)R$ e $d(\frac{R}{N}) = 0 < d$. Já vimos na demonstração do lema anterior que, para tal ideal P, $d(\frac{S}{P}) = d = d(\frac{S}{I}) - 1$, portanto $P \in \{I_1, \ldots, I_r\}$ o que é um absurdo já que $f \in N \subseteq P$ e $f \notin \bigcup_{j=1}^{r} I_j$. Logo $T_A \not\subset \frac{P}{I}$ qualquer que seja o ideal primo P de S tal que $I \subseteq P$ e $P \cap R = N$. ∎

Usando as mesmas notações para R e S, ou seja, $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ e $R = [X_1, \ldots, X_n]$ e supondo que $n \geq 1$, temos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.6. *Sejam A e B domínios graduados homogêneos, A isomorfo à S/I, onde $I \subseteq (X_1, \ldots, X_n)S$ é um ideal primo homogêneo e B isomorfo a R/Q, onde $Q = I \cap R$. Então $d(A) + m(A) > d(B) + m(B)$.*

PROVA: Como $B \subseteq A$ são k-álgebras finitamente geradas, pelo lema de Normalização de Noether ([5], corolário 3.6, II), temos $d(B) = grtr_k(cf(B)) \leq grtr_k(cf(A)) = d(A)$. A prova será feita por indução em $d(A)$.

Se $d(A) = 1$, como $I \subseteq (X_1, \ldots, X_n)S$ temos que $I = (X_1, \ldots, X_n)S$, logo $A \simeq k[X_0]$ e $B \simeq k$, logo $m(A) = 1$, $d(B) = 0$, $m(B) = 0$ e vale que $d(A) + m(A) > d(B) + m(B)$.

Suponhamos que $d(A) > 1$.

Analisaremos primeiro o caso em que $d(A) > d(B)$. Após, analisaremos o caso em que $d(A) = d(B)$.

Se $d(A) > d(B)$, então $grtr_k(cf(B)) < grtr_k(cf(A))$. Como $cf(A) = cf(B)(X_0)$ temos que $d(B) = d(A) - 1$, portanto se $p_m(X_1, \ldots, X_n)X_0^m + \cdots + p_1(X_1, \ldots, X_n)X_0 + p_0(X_1, \ldots, X_n) \in I$ então $p_j(X_1, \ldots, X_n) \in Q$ com $j \in \{0, \ldots, m\}$.

Consideremos a aplicação k-bilinear sobrejetora

$$k[X_0] \times B \longrightarrow A$$

$$(f(X_0), g(X_1, \ldots, X_n) + Q) \longmapsto f(X_0)g(X_1, \ldots, X_n) + I$$

para cada $f(X_0) \in k[X_0]$ e $g(X_1, \ldots, X_n) \in R$.

Logo, existe $\varphi : k[X_0] \otimes_k B \to A$ k-linear sobrejetora. Vejamos a injetividade. Seja

$$F = \sum_{i=1}^{t} f_i(X_0) \otimes (g_i(X_1, \ldots, X_n) + Q) \in k[X_0] \otimes_k B,$$

onde $f_i(X_0) = \sum_{j=1}^{\ell_i} a_{ij} X_0^j$. Observamos que F pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{\ell_i} X_0^j \otimes (h_{ij} + Q),$$

onde

$$h_{ij} = a_{ij} g_i(X_1, \ldots, X_n).$$

Suponhamos agora que $\varphi(F) = \overline{0}$, assim,

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{\ell_i} X_0^j h_{ij} + I = \overline{0},$$

temos então que

$$\sum_{i=1}^{t} X_0^{\ell} h_{i\ell} + \sum_{i=1}^{t} X_0^{\ell-1} h_{i,\ell-1} + \cdots + \sum_{i=1}^{t} X_0^0 h_{i0} \in I,$$

onde

$$\ell = \max\{\ell_1, \ldots, \ell_t\},$$

logo

$$\sum_{i=1}^{t} h_{ij} \in Q$$

para cada $j = 0, \dots, \ell$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{t} a_{ij} g_i \in Q$$

para cada $j = 0, \dots, \ell$ e temos

$$F = \sum_{i=1}^{t} f_i \otimes (g_i + Q) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{\ell_i} (X_0^j \otimes (a_{ij} g_i + Q))$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell_i} X_0^j \otimes \sum_{i=1}^{t} (a_{ij} g_i + Q) = \sum_{j=1}^{\ell} (X_0^j \otimes \bar{0}) = \bar{0}.$$

O que prova que φ é isomorfismo.

Como $B = \bigoplus_{r=0}^{\infty} B_r$ e $A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$, temos um isomorfismo de k-álgebras graduadas:

$$\bigoplus_{r=0}^{\infty} B_r[X_0] \simeq \bigoplus_{r=0}^{\infty} (k[X_0] \otimes B_r) \simeq k[X_0] \otimes (\bigoplus_{r=0}^{\infty} B_r) \simeq \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$$

e

$$A_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} B_i X_0^{\ell - i}$$

(observamos que $A_0 = B_0 = k$), portanto

$$\ell_k(A_\ell) = \ell_k(B_0) + \cdots + \ell_k(B_\ell).$$

Existe $N > 0$ inteiro tal que se $m > N$ então

$$\ell_k(A_m) = \ell_k(B_0) + \cdots + \ell_k(B_n) + \mathcal{P}_B(N+1) + \cdots + \mathcal{P}_B(m),$$

ou seja, para cada m suficientemente grande

$$\mathcal{P}_A(m) = \mathcal{P}_B(0) + \cdots + \mathcal{P}_B(m) + C,$$

onde $C \in \mathbf{Q}$. Denotemos $d := d(A) - 1$. Dividindo por m^d o lado esquerdo da equação acima fica:

$$\frac{\mathcal{P}_A(m)}{m^d} = \frac{m(A)}{d!} \frac{m^d}{m^d} + \frac{\text{termos de menor grau}}{m^d},$$

que tende à $\frac{m(A)}{d!}$ quando m tende a infinito, e o lado direito fica:

$$\left(\frac{1^{d-1}+2^{d-1}+\cdots+m^{d-1}}{m^d}\right)\frac{m(B)}{d(B)!}+\frac{\text{termos de menor grau}}{m^d},$$

que tende à $\frac{1}{d}\frac{m(B)}{d(B)!}$ quando m tende a infinito. Decorre daí que vale $d(A)+m(A) > d(B)+m(B)$.

Consideremos agora o cado em que $d(A) = d(B)$. Faremos a prova por indução na dimensão. Já vimos que a desigualdade vale se $d(A) = d(B) = 1$. Suponhamos que $d(A) = d(B) > 1$ e que a proposição valha para anéis de dimensão menor que $d(A)$.

Pelo lema 2.5 existe f forma de grau 1 tal que se N é um ideal primo mínimo de $Q + Rf$ então A_s é $B_{N/Q}$-módulo finitamente gerado, onde $s = B\backslash N/Q$, A_s e $B_{N/Q} = B_s$ são anéis regulares de dimensão um e $d(\frac{R}{N}) = d(A)-1 = d(B)-1$. Sejam $\overline{N}_1, \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_s$ os ideais primos mínimos de $\overline{f}$ em B e $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_t$ os ideais primos mínimos de $\overline{f}$ em A. Do lema 1.2 segue que

$$m(A) = \sum_{i=1}^{s} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f})d(\frac{A}{\overline{P}_i})$$

e

$$m(B) = \sum_{j=1}^{t} \mu_{\overline{N}_j}(\overline{f})d(\frac{B}{\overline{N}_j}).$$

Para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ seja $s_j = B\backslash\overline{N}_j$. Pelo lema 2.5, A_{s_j} é uma extensão inteira de $B_{\overline{N}_j}$, logo existe um ideal máximo M de A_{s_j} tal que

$$M \cap B_{\overline{N}_j} = M \cap B_{s_j} = \overline{N}_j B_{\overline{N}_j}.$$

Como $d(A_{s_j}) = 1$ e $\overline{f} \in \overline{N}_j B_{\overline{N}_j} \subseteq M$ então $1 = \mathrm{alt}(M) = \mathrm{alt}(M \cap A)$ e $\overline{f} \in M \cap A$, logo $M \cap A$ é um ideal primo mínimo de $A\overline{f}$, isto é, existe $i \in \{1,\ldots,s\}$ tal que $\overline{P}_i = M \cap A$. Logo

$$\overline{P}_i \cap B = M \cap A \cap B = M \cap B_{\overline{N}_j} \cap B = \overline{N}_j B_{\overline{N}_j} \cap B = \overline{N}_j.$$

Logo, para cada $j \in \{1,\ldots,s\}$ existe $i \in \{1,\ldots,t\}$ tal que $\frac{B}{\overline{N}_j} \subseteq \frac{A}{\overline{P}_i}$. Além disso, $d(\frac{B}{\overline{N}_j}) = d(\frac{A}{\overline{P}_i})$, portanto decorre da definição de multiplicidade que $m(\frac{B}{\overline{N}_j}) \leq m(\frac{A}{\overline{P}_i})$.

Como $\overline{f} \in \frac{(X_1,\dots,X_n)}{I}$, existe $i \in \{1,\dots,s\}$ tal que $\overline{P}_i \subseteq \frac{(X_1,\dots,X_n)}{I}$. Podemos supor $i = 1$, isto é, $\overline{P}_1 \subseteq \frac{(X_1,\dots,X_n)}{I}$. Como $k[X_0] \subseteq \frac{A}{P_1}$ temos que $m(\frac{A}{P_1}) \geq 1$.

Se $\overline{P}_1 \cap B \notin \{\overline{N}_1,\dots,\overline{N}_t\}$, então

$$m(A) > \sum_{j=1}^{s} \sum_{\overline{P}_i\cap B=\overline{N}_j} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f})m\left(\frac{A}{\overline{P}_i}\right) \geq \sum_{j=1}^{s} \sum_{\overline{P}_i\cap B=\overline{N}_j} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f})m\left(\frac{B}{\overline{N}_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} m\left(\frac{B}{\overline{N}_j}\right) \sum_{\overline{P}_i\cap B=\overline{N}_j} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f}).$$

Como A_{s_j} é $B_{\overline{N}_j}$-módulo finitamente gerado e

$$(A_{s_j})_{\overline{P}_i A_{s_j}} \simeq A_{\overline{P}_i},$$

do lema 2.3 segue que

$$\mu_{\overline{N}_j}(\overline{f}) = \ell_{B_{\overline{N}_j}}\left(\frac{B_{\overline{N}_j}}{\overline{f}B_{\overline{N}_j}}\right) = \sum_{\overline{P}_i\cap B=\overline{N}_j} \ell_{A_{\overline{P}_i}}\left(\frac{A_{\overline{P}_i}}{\overline{f}A_{\overline{P}_i}}\right)$$

logo

$$m(A) > \sum_{j=1}^{s} m(\frac{B}{\overline{N}_j})\mu_{\overline{N}_j}(\overline{f}) = m(B).$$

Se $\overline{P}_1 \cap B \in \{\overline{N}_1,\dots,\overline{N}_t\}$, digamos $\overline{P}_1 \cap B = \overline{N}_1$. Seja P_1 ideal primo de S tal que $\frac{P_1}{Q} = \overline{P}_1$. Temos que $\frac{B}{\overline{N}_1}$ e $\frac{A}{\overline{P}_1}$ são domínios graduados homogêneos tal que $\frac{A}{\overline{P}_1} \simeq \frac{S/I}{P_1/I} \simeq \frac{S}{P_1}$ e $P_1 \subseteq (X_1,\dots,X_n)S$ é um ideal primo homogêneo de S, $\frac{B}{\overline{N}_1} = \frac{B}{\overline{P}_1\cap B} \simeq \frac{R/Q}{(P_1\cap R)/Q} \simeq \frac{R}{P_1\cap R}$. Além disso, $d(\frac{B}{\overline{N}_1}) = d(\frac{A}{\overline{P}_1}) < d(A) = d(B)$, logo por indução temos

$$m(\frac{A}{\overline{P}_1}) + d(\frac{A}{\overline{P}_1}) > m(\frac{B}{\overline{N}_1}) + d(\frac{B}{\overline{N}_1}),$$

ou seja,

$$m(\frac{A}{\overline{P}_1}) > m(\frac{B}{\overline{N}_1})$$

logo

$$m(A) \geq \sum_{j=1}^{s} \sum_{\overline{P}_i \cap B = \overline{N}_j} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f}) m(\frac{A}{\overline{P}_i}) > \sum_{j=1}^{s} \sum_{\overline{P}_i \cap B = \overline{N}_j} m(\frac{B}{\overline{N}_j}) \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f})$$

$$= \sum_{j=1}^{s} m(\frac{B}{\overline{N}_j}) \sum_{\overline{P}_i \cap B = \overline{N}_j} \mu_{\overline{P}_i}(\overline{f}) = \sum_{j=1}^{s} m(\frac{B}{\overline{N}_j}) \mu_{\overline{N}_j}(\overline{f}) = m(B). \blacksquare$$

PROVA DO TEOREMA 2: Sabemos que $A \simeq \frac{k[X_0,\ldots,X_n]}{I}$ para algum $n \geq 0$. Denotaremos $q(A) := \min\{n / A \simeq \frac{k[X_0,\ldots,X_n]}{I}\}$. Faremos a prova por indução em $q(A)$.

Se $q(A) = 0$, como $d(A) \geq 1$, então $A \simeq k[X_0]$, logo $d(A) = 1$, $\dim_k A_1 = 1$, $m(A) = 1$ e vale o teorema.

Suponhamos agora que $q(A) \geq 1$ e que o teorema vale para cada domínio graduado homogêneo B tal que $d(B) \geq 1$ e $q(B) < q(A)$.

Como I é um ideal homogêneo, $I \subsetneq (X_0, \ldots, X_n)$. Se $I = (X_0, \ldots, X_n)$ então $k = A$, o que contradiz o fato que $d(A) \geq 1$. Logo existe um $X_j \notin I$. Suponhamos que $X_0 \notin I$. Como k é algebricamente fechado, existe $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$ que é zero de I; podemos supor que $a_0 = 1$, pois I é ideal homogêneo e $X_0 \notin I$ e, com mudança de coordenadas, que $(a_0, \ldots, a_n) = (1, 0, \ldots, 0)$. Então $I \subsetneq (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Sejam $Q = I \cap k[X_1, \ldots, X_n]$ e $B = \frac{k[X_1,\ldots,X_n]}{Q}$. Pela proposição 2.6, $d(A) + m(A) > d(B) + m(B)$. Além disso, escrevendo $B = \bigoplus_{r=0}^{\infty} B_r$, A_1 é gerado por B_1 e a classe de X_0. Logo $\dim_k A_1 = \dim_k B_1 + 1$.

Se $d(B) = 0$ então $Q = (X_1, \ldots, X_n)$ e $B = k$. Assim, $\dim_k B_1 = 0$ e $\dim_k A_1 = 1$. Logo $I = (X_1, \ldots, X_n)$ e $A \simeq k[X_0]$ e assim $d(A) = 1 = m(A)$ e temos $\dim_k A_1 \leq d(A) + m(A) - 1$.

Se $d(B) \geq 1$, como $q(B) \leq n - 1 = q(A) - 1$, o teorema vale para B. Assim, $\dim_k A_1 = \dim_k B_1 + 1 \leq d(B) + m(B) \leq d(A) + m(A) - 1$. $\blacksquare$

O teorema 3 a seguir é, na verdade, um corolário do teorema 2.

TEOREMA 3. *Seja (A, M) um anel local tal que $d(A) \geq 1$, A/M é um corpo algebricamente fechado e $gr(A)$ é um domínio. Então $e(A) \leq m(A) + d(A) - 1$.*

OBSERVAÇÃO: Geometricamente, se A é o anel local de um ponto $\mathcal{P}$ de uma variedade V, então dizer que o $Gr(A)$ é irredutível e $\frac{A}{M}$ é algebricamente fechado, significa dizer que o cone tangente de V em $\mathcal{P}$ é irredutível.

PROVA: Por definição do anel graduado associado ao anel local (A, M) temos $Gr(A) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{M^{i+1}} \simeq \frac{\frac{A}{M}[X_0, \ldots, X_n]}{I}$, onde I é um ideal homogêneo do anel de polinômios $\frac{A}{M}[X_0, \ldots, X_n]$. Como por hipótese $Gr(A)$ é um domínio, temos que I é um ideal primo. Além disso, sendo $\frac{A}{M}$ um corpo algebricamente fechado, pelo teorema 2 temos $\dim_k \frac{M}{M^2} \leq d(Gr(A)) + m(Gr(A)) - 1$.

Por ([7] teorema 13.9) temos que $d(A) = d(Gr(A))$. Pela definição do polinômio de Hilbert-Samuel para anéis locais, A e $Gr(A)$ têm mesmo polinômio de Hilbert-Samuel e portanto $m(A) = m(Gr(A))$. E assim vale que $e(A) \leq d(A) + m(A) - 1$. ∎

CAPÍTULO II

Veremos, neste capítulo, que não é possível encontrar uma função f de duas variáveis tal que $e(A) \leq f(d(A), m(A))$ para todo anel local A. Como já observamos na introdução, Abhyankar mostrou que não existe uma tal função f para anéis locais de multiplicidade 2. Para isto Abhyankar em [**1**] mostrou que dados e e d tais que $e > d \geq 2$ existe um anel local A de multiplicidade 2 tal que $e(A) = e$ e $d(A) = d$. É natural perguntar se o mesmo vale para anéis locais de multiplicidade 1, ou seja, se dados dois inteiros e e d tais que $e > d \geq 2$ existe um anel local A de multiplicidade 1 tal que $e(A) = e$ e $d(A) = d$. Observamos que se existir um tal anel local, este não pode ser de Cohen-Macaulay, pois pelo teorema 1 teríamos $e(A) \leq d(A) + m(A) - 1 = d(A)$ o que contradiz o fato $e > d$. Não poderia também ser um anel geométrico, pois um anel geométrico de multiplicidade um é um anel local regular ([**8**], 34.9 e 39.6). Vamos mostrar que é possível encontrar um tal anel local A de multiplicidade um, de modo que A seja um anel pseudo-geométrico, isto é, se P é um ideal primo de A e T um corpo que é uma extensão finita de $cf(\frac{A}{P})$ então o fecho inteiro de $\frac{A}{P}$ em T é um $\frac{A}{P}$-módulo finitamente gerado. De fato Lequain em [**6**] mostrou o seguinte resultado mais geral

TEOREMA 4. *Sejam $m \geq 1$, $d \geq 2$ e $e \geq md$ inteiros. Existe um anel local (A, M) tal que*

a) $d(A) = d$, $m(A) = m$ e $e(A) = e$;

b) A é anel pseudo-geométrico;

c) A_Q é regular para cada ideal primo $Q \neq M$.

A construção de (A, M), ou seja, a prova do teorema 4 será baseada na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4.1. *Seja k um corpo e $(B, M_1, \ldots, M_u)$ um domínio semi-local tal que para cada $i \in \{1, \ldots, u\}$ existe um homomorfismo sobrejetor $\varepsilon_i : B \to k$ com Núcleo $(\varepsilon_i) = M_i$. Seja $A = \{x \in B / \varepsilon_i(x) = \varepsilon_j(x)$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, u\}\}$. Então:*

1) 1.1) A é um domínio local com maximal $M = M_1 \cap \cdots \cap M_u$ e $\frac{A}{M} \simeq \frac{B}{M_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, u\}$.

1.2) $\ell_A\left(\frac{M^v}{M^{v+1}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i^v B_{M_i}}{M_i^{v+1} B_{M_i}}\right)$ para $v \geq 1$.

2) 2.1) $d(A) = d(B)$.

2.2) $e(A) = \sum_{i=1}^{u} e(B_{M_i})$.

2.3) $\mathcal{P}_A(X) = \sum_{i=1}^{u} \mathcal{P}_{B_{M_i}}(X) - (u-1)$.

2.4) $m(A) = \sum m(B_{M_i})$ tal que $d(B) = alt(M_i)$.

3) *Para cada ideal primo $Q \neq M$ de A, existe um único ideal primo Q' de B tal que $Q' \cap A = Q$ e $A_Q = B_{Q'}$.*

PROVA: (1.1) Vamos mostrar primeiro que B é A-módulo finitamente gerado.

Seja $\varepsilon: B \rightarrow k^u$ homomorfismo definido por $\varepsilon(b) := (\varepsilon_1(b), \ldots, \varepsilon_u(b))$. Como ε_j é sobrejetor para cada $j \in \{1, \ldots, u\}$ e seus núcleos são dois a dois comaximais, ε é sobrejetor pelo teorema Chinês dos Restos.

Sejam $\beta_1, \ldots, \beta_u \in B$ tais que $\varepsilon(\beta_1) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon(\beta_2) = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon(\beta_u) = (0, \ldots, 0, 1)$. Vejamos que $B = A + A_{\beta_1} + \cdots + A_{\beta_u}$. Seja $b \in B$ e para cada $j = 1, \ldots, u$ seja $b_j \in B$ tal que $\varepsilon(b_j) = (\varepsilon_j(b), \ldots, \varepsilon_j(b))$, assim temos $b_j \in A$ e $\varepsilon(b) = \sum_{j=1}^{u} \varepsilon(b_j)\varepsilon(\beta_j) = \varepsilon(\sum_{j=1}^{u} b_j\beta_j)$, portanto $b - \sum_{j=1}^{u} b_j\beta_j \in$ Núcleo $(\varepsilon) = M_1 \cap \cdots \cap M_u \subseteq A$, logo $B = A + A\beta_1 + \cdots + A_{\beta_u}$.

Observamos que $M_i \cap A = M_1 \cap \cdots \cap M_u$ para cada $i \in \{1, \ldots, u\}$. De fato, seja $a \in M_i \cap A$, para cada $j \in \{1, \ldots, u\}$ temos $\varepsilon_j(a) = \varepsilon_i(a) = 0$, logo $A \cap M_i \subseteq M_1 \cap \cdots \cap M_u$. Por outro lado $M_1 \cap \cdots \cap M_u \subseteq A \cap M_i$ trivialmente.

Agora, sendo B A-módlo finitamente gerado temos que $M_i \cap A$ é ideal maximal de A para cada $i \in \{1, \ldots, u\}$, ou seja, $M = M_1 \cap \cdots \cap M_u$ é ideal maximal de A, como $M_1, \ldots, M_u$ são os únicos ideais maximais de B, $M = M_1 \cap \cdots \cap M_u$ é o único ideal maximal de A ([**2**] corolário 5.8). Observamos ainda que A é domínio noetheriano, pois B é domínio noetheriano e A-módulo finitamente gerado ([**2**] proposição 7.2).

Seja $i \in \{1, \ldots, u\}$, para terminar a demonstração de (1.1), vejamos que $A/M \simeq$

B/M_i. Temos o seguinte homomorfismo de aneis $\underset{a \mapsto a+M_i}{A \to B/M_i}$ que é sobrejetor, pois dado $b \in B$, tomamos $a \in B$ tal que $\varepsilon(a) = (\varepsilon_i(b), \dots, \varepsilon_i(b))$, pela definição de A, $a \in A$ e $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_i(a)$, logo $a - b \in$ Núcleo $(\varepsilon_i) = M_i$. Portanto $\frac{A}{M}$ e $\frac{B}{M_i}$ são isomorfos.

(1.2) Se v é um inteiro positivo então os ideais $M_1^v, \dots, M_u^v$ são, dois a dois, comaximais, assim,

$$M^v = (M_1 \cap \dots \cap M_u)^v = (M_1 \cdot \dots \cdot M_u)^v = M_1^v \cdot \dots \cdot M_u^v = M_1^v \cap \dots \cap M_u^v.$$

Considere o isomorfismo dado pelo teorema Chinês dos Restos:

$$\psi : \frac{B}{M^{v+1}} \to \frac{B}{M_1^{v+1}} \oplus \dots \oplus \frac{B}{M_u^{v+1}}.$$

Temos que

$$\psi^{-1}\left(\frac{M_1^v}{M_1^{v+1}} \oplus \dots \oplus \frac{M_u^v}{M_u^{v+1}}\right) = \frac{M^{v+1} + (M_1^v \cap \dots \cap M_u^v)}{M^{v+1}} = \frac{M^{v+1} + M^v}{M^{v+1}} = \frac{M^v}{M^{v+1}},$$

logo ψ induz o isomorfismo

$$\frac{M^v}{M^{v+1}} \to \frac{M_1^v}{M_1^{v+1}} \oplus \dots \oplus \frac{M_u^v}{M_u^{v+1}}.$$

Agora temos

$$\ell_A\left(\frac{M^v}{M^{v+1}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_A\left(\frac{M_i^v}{M_i^{v+1}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_{\frac{A}{M}}\left(\frac{M_i^v}{M_i^{v+1}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_{\frac{B}{M_i}}\left(\frac{M_i^v}{M_i^{v+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{u} \ell_{\frac{B_{M_i}}{M_i B_{M_i}}}\left(\frac{M_i^v B_{M_i}}{M_i^{v+1} B_{M_i}}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i^v B_{M_i}}{M_i^{v+1} B_{M_i}}\right).$$

(2.1) Como B é integral sobre A, $d(A) = d(B)$ ([7] teorema 9.7).

(2.2) Com $v = 1$ em 1.2 temos

$$e(A) = \ell_A\left(\frac{M}{M^2}\right) = \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i B_{M_i}}{M_i^2 B_{M_i}}\right) = \sum_{i=1}^{u} e(B_{M_i}).$$

(2.3) Consideremos a seqüência exata de A-módulo $0 \to \frac{M}{M^v} \to \frac{A}{M^v} \to \frac{A}{M} \to 0$ com $v \geq 1$, temos então

$$\ell_A\left(\frac{A}{M^v}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{M}\right) + \ell_A\left(\frac{M}{M^v}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{M}\right) + \sum_{j=1}^{v-1} \ell_A\left(\frac{M^j}{M^{j+1}}\right)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{v-1}\sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i^j B_{M_i}}{M_i^{j+1} B_{M_i}}\right) = 1 + \sum \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}}\right).$$

Consideremos agora a seguinte seqüência exata de B_{M_i}-módulos, com $i \in \{1, \ldots, u\}$:

$$0 \to \frac{M_i B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}} \to \frac{B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}} \to \frac{B_{M_i}}{M_i B_{M_i}} \to 0.$$

assim

$$1 + \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{M_i B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}}\right) - \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{B_{M_i}}{M_i B_{M_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{u} \ell_{B_{M_i}}\left(\frac{B_{M_i}}{M_i^v B_{M_i}}\right) - (u-1).$$

Portanto, tomando v suficientemente grande, obtemos $\mathcal{P}_A(v) = \sum_{i=1}^{u} \mathcal{P}_{B_{M_i}}(v) - (u-1)$ e assim, $\mathcal{P}_A(X) = \sum_{i=1}^{u} \mathcal{P}_{B_{M_i}}(X) - (u-1)$.

(2.4) Segue do ítem anterior que $m(A) = \sum_{i=1}^{u} m(B_{M_i})$ tal que $\text{alt}(M_i) = d(B)$.

(3) Seja $Q \neq M$ um ideal primo de A. Suponhamos que $Q' \neq Q''$ são dois ideais primos de B tais que $Q' \cap A = Q'' \cap A = Q$. Sabemos que $Q' \not\subseteq Q''$ e Q'' não é ideal maximal, assim podemos escolher $b \in B$ tal que $b \in Q' \cap M_1 \cap \cdots \cap M_u = Q' \cap M = Q$ e $b \notin Q''$ que contradiz o fato de $Q \subseteq Q''$, provando a unicidade.

Vejamos agora que $A_Q = B_{Q'}$. Seja $s = A \backslash Q$. Como B é uma extensão inteira de A, B_s é uma extensão inteira de A_s. Seja P' um ideal maximal de B_s, então $P' = P_s$, onde P é um ideal primo de B tal que $s \cap P = \phi$. Como Q_s é o único ideal maximal de $A_s = A_Q$, temos que $P' \cap A_Q = Q_s$, ou seja, $P \cap A = Q$, logo $P = Q'$ e assim, $B_s = B_{Q'}$. Sejam $b \in B$ e $a \in M \backslash Q \subseteq s$, temos $b = \frac{ab}{a} \in A_s$. Assim, $B \subseteq A_Q = A_s$, $B_{Q'} = B_s \subseteq A_s = A_Q \subseteq B_{Q'}$ e consequentemente, $A_Q = B_{Q'}$. ∎

PROVA DO TEOREMA 4: Seja k um corpo qualquer. Seja $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ um conjunto infinito de indeterminadas sobre k. Definimos o corpo $K := k(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$. Sejam ainda d, ϵ, m inteiros tais que $m \geq 1$, $d \geq 2$ e $md \leq \epsilon$.

Sejam $Y_{11}, \ldots, Y_{1d}; \ldots; Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}; Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}$ indeterminadas sobre K. Definimos o anel B por $B := (K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}; \ldots; Y_{m1}, \ldots, Y_{md}; Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}])_s$, onde $s = K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}; \ldots; Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}; Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}] \backslash (Y_{11}, \ldots, Y_{1d}) \cup \cdots \cup (Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}) \cup (Z_1) \cup \cdots \cup (Z_{\epsilon-dm})$.

Assim temos que B é anel semi-local e seus ideais maximais são:

$$M_1 := (Y_{11}, \ldots, Y_{1d})B; \qquad M_2 := (Y_{21}, \ldots, Y_{2d})B; \ldots;$$

$$M_m := (Y_{m_1}, \ldots, Y_{md})B; \qquad M_{m+1} = Z_1 B; \ldots; \qquad M_{m+\epsilon-dm} := Z_{\epsilon-dm}B.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{B}{M_1} &\simeq \left(\frac{K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}; \ldots; Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}]}{(Y_{11}, \ldots, Y_{1d})} \right)_s \\ &= K(Y_{21}, \ldots, Y_{2d}; \ldots; Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}) \\ &= k(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)(Y_{21}, \ldots, Y_{2d}, \ldots, Y_{m_1}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}) \\ &\simeq k(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots) = K. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{B}{M_i} \simeq K$ para cada $i \in \{2, \ldots, m, \ldots, m + \epsilon - dm\}$.

Logo, para cada $i \in \{1, \ldots, m, \ldots, m + \epsilon - dm\}$ existe um homomorfismo sobrejetor $\varphi_i : B \to K$ com núcleo igual à M_i. Tomamos $A := \{x \in B / \varphi_i(x) = \varphi_j(x)$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, m+\epsilon-dm\}\}$. Pela proposição 4.1, A é um domínio local com as propriedades a, b, c. De fato:

(a) $d(A) = d(B) = \text{alt}(M_i) = d$, onde $i \in \{1, \ldots, m\}$. Supondo que B é super-regular, ou seja, B_p é anel regular qualquer que seja P ideal primo de B. temos que B_{M_i} é regular para cada $i \in \{1, \ldots, m, \ldots, m + \epsilon - dm\}$ e assim $e(B_{M_i}) = d(B_{M_i}) = \text{alt}(M_i)$ que é igual à d se $i \in \{1, \ldots, m\}$ e é igual a um se $i \in \{m, \ldots, m + \epsilon - dm\}$.

Para ver que B é de fato super-regular, seja P um ideal primo de B, então $P = Q_s$, onde $Q \cap s = \phi$ e Q é um ideal primo de $K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}]$ que é um anel super-regular ([4] teorema 171), logo $K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}, \ldots, Y_{m1}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}]_Q$ é regular, mas $B_P \simeq K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}]_Q$, pois $Q \subseteq K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}, \ldots, Y_{m1}, \ldots, Y_{md}, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}] \backslash s$.

Obtemos

$$\epsilon(A) = \sum_{i=1}^{m+\epsilon-dm} \epsilon(B_{M_i}) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon(B_{M_i}) + \sum_{i=m+1}^{m+\epsilon-dm} \epsilon(B_{M_i}) = md + (m + \epsilon - dm - m) = e.$$

E

$$m(A) = \sum m(B_{M_i}) = m1 = m.$$

(b) Como $K[Y_{11}, \ldots, Y_{1d}, \ldots, Z_1, \ldots, Z_{\epsilon-dm}]$ é domínio pseudo-geométrico ([9] teorema 9, v, §4), B é domínio pseudo-geométrico. Seja P um ideal primo de A e P' ideal primo de B tal que $A \cap P' = P$. Como B é A-módulo finitamente gerado, vale que $\frac{B}{P'}$ é $\frac{A}{P}$-módulo finitamente gerado. Sejam $T := cf(\frac{A}{P})[x_1, \ldots, x_r]$ e $L := cf(\frac{B}{P'})[x_1, \ldots, x_r]$ extensões algébricas finitas dos corpos de frações de $\frac{A}{P}$ e $\frac{B}{P'}$ respectivamente. Denotemos $\overline{(\frac{B}{P'})}$ o fecho inteiro de $\frac{B}{P'}$ em L e $\overline{(\frac{A}{P})}$ o fecho inteiro de $\frac{A}{P}$ em T. Temos então que $\overline{(\frac{B}{P'})}$ é $\frac{B}{P'}$-módulo finitamente gerado, pela definição de domínio pseudo-geométrico. Assim, $\overline{(\frac{B}{P'})}$ é $\frac{A}{P}$-módulo finitamente gerado. Como $\overline{(\frac{B}{P'})} \cap T = \overline{(\frac{A}{P})}$, $\overline{(\frac{A}{P})}$ é um $\frac{A}{P}$-módulo finitamente gerado. Isto prova que A é um domínio pseudo-geométrico.

(c) Para qualquer ideal primo $Q \neq M$ de A, pela proposição 4.1 (3), existe Q' ideal primo de B tal que $B_{Q'} = A_Q$. Como B é anel super regular, $B_{Q'}$ é regular, portanto A_Q é regular. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] S.S. Abhyankar, "Local Rings of High Embedding Dimension", Amer. J. Math. 89 (1967), 1073–1077.

[2] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley, Reading, Mass (1969).

[3] R. Hartshorne, "Algebraic Geometry", Springer, Heidelberg (1977).

[4] I. Kaplansky, "Commutative Rings", Allyn and Bacon, Boston, Mass (1970).

[5] E. Kunz, "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry", Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser (1985).

[6] Y. Lequain, "Embedding Dimension in Local Rings", Communications in Algebra, 18 (11), 3923–3931 (1990).

[7] H. Matsumura, "Commutative Algebra", Cambrige University Press. (1986).

[8] M. Nagata, "Local Rings", John Wiley and Sons, New York, (1962).

[9] O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra", Springer-Verlang, New York, Vol. I–II (1979).