

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação de
Transferência Radiativa
Dependente do Tempo pelos
Métodos Espectral e LTS_N**

por

Sandra Pacheco Renz

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena
Orientador

Porto Alegre, fevereiro de 1999.

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Renz, Sandra Pacheco

Solução da Equação de Transferência Radiativa Dependente do Tempo pelos Métodos Espectral e LTS_N / Sandra Pacheco Renz. – Porto Alegre: CPGMAp UFRGS, 1999.

52 p.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1999.

Orientador: Vilhena, Marco Túllio

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Cotta (Eng. Mecânica / COPPE – RJ)

Prof. Dr. Horácio Dottori (Dept. Astronomia/ IF/UFRGS)

Prof. Dr. Volnei Borges (DENUK/UFRGS))

Dissertação:

- 1- Equação Transferência Radiativa
- 2- Método Espectral
- 3- Método LTS_N

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais que sempre me incentivaram e conduziram mostrando que vale a pena lutar pelos nossos ideais.

Ao Prof. Dr. Marco Túlio de Vilhena pelo valioso apoio na orientação deste trabalho, bem como pela amizade e incentivo.

Ao Humberto pela paciência, dedicação, compreensão e carinho presente em todas as horas.

Aos Colegas Fabão, Mary, Valdecir, Rejane, Karine, Leo e Gariba pela colaboração, pelo bom humor e pela grande amizade.

Ao professor e colega, Panta, pelo incentivo e amizade desde os tempos de graduação.

Aos amigos Bassani, Flávio e Sandi pelo incentivo e também a professora Solange.

A todos os colegas do CPGMA_p, em especial a Patricia secretária da Pós e também ao Moacir e ao Fabrício do setor de Recursos Computacionais.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNP_q pela concessão da bolsa de estudos.

Em fim a todos os familiares e amigos que sempre torceram pelo sucesso na realização deste trabalho.

A Deus, por tudo...

Aos meus pais

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz quadrada de ordem N , independente do parâmetro s
$a_{i,j}$	Elementos da matriz A
$B(x)$	Matriz da transformada inversa de Laplace $M_N^{-1}(s)$
$B^+(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores positivos
$B^-(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores negativos
$B_{ij}^+(x)$	Elementos da matriz $B^+(x)$
$B_{ij}^-(x)$	Elementos da matriz $B^-(x)$
c	Velocidade da luz no vácuo
D	Matriz diagonal dos autovalores de A
$f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t)$	Função de distribuição de fótons na posição definida pelo vetor \mathbf{r} na direção Ω descrito pelos ângulos, polar θ e o azimutal φ , com a frequência ν no tempo t .
f_m	Intensidade angular de partículas incidentes na fronteira $x = 0$, na direção discreta μ_m da placa
g_m	Intensidade angular de partículas incidentes na fronteira $x = x_o$, na direção discreta μ_m da placa
h	Constante de Planck
$H(x)$	Vetor convolução da matriz $B(x)$ com o vetor $S(x)$
I	Matriz Identidade
$I(x, \mu, t)$	Intensidade específica de radiação na direção μ na posição x no tempo t
$I_m^n(0)$	Intensidade angular de partículas incidentes na fronteira $x = 0$ da placa, na direção discreta μ_m e no tempo t_n

$I_m^n(L)$	Intensidade angular de partículas incidentes na fronteira $x = L$ da placa, na direção discreta μ_m , e no tempo t_n
$\bar{I}_m^n(s)$	Transformada de Laplace da função $I_m^n(x)$
$\bar{\mathbf{I}}(s)$	Vetor de componentes $\bar{I}_m^n(s)$
$\mathbf{I}(0)$	Vetor cujas componentes são os fluxos angulares em cada direção discreta, em $x = 0$
L	Espessura da placa
$L_k(t)$	Polinômios de Laguerre
$\bar{\mathbf{M}}_N(s)$	Matriz simbólica associada à formulação LTS _N
$\bar{\mathbf{M}}_N^{-1}(s)$	Matriz inversa da matriz $\bar{\mathbf{M}}_N(s)$
M	Grau de truncamento da série de polinômios de Laguerre
N	Ordem da quadratura de Gauss
\mathbf{P}^K	Matrizes de coeficientes resultantes da inversão da transformada de Laplace
$Q(x, \mu, t)$	Termo de fonte na direção μ , na posição x e no tempo t
$Q_m^n(x)$	Termo de fonte na direção discreta μ_m e no tempo t_n
q	Emissão de ftons
s	Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace
s_k	Raízes do polinômio característico de $\bar{\mathbf{M}}_N(s)$ ou autovalores da matriz $-\mathbf{A}$
$\bar{S}_m^n(s)$	Transformada de Laplace da função $S_m^n(x)$
$\bar{\mathbf{S}}(s)$	Vetor de componentes $\bar{S}_m^n(s)$
x	Variável espacial na geometria da placa
\mathbf{X}	Matriz de autovetores

$\Gamma_1(\mu, t)$	Intensidade de radiação incidente em $x = 0$ no tempo t
$\Gamma_2(\mu, t)$	Intensidade de radiação incidente em $x = L$ no tempo t
ΔV	Diferencial de volume
μ	Variável angular
μ_m	Raízes do polinômio de Legendre de n -ésimo grau, direções discretas
ν	Frequência
σ_a	Coefficiente de absorção
σ_s	Seção de choque de espalhamento diferencial
σ_t	Seção de choque total
ω_m	Pesos da quadratura de Gauss-Legendre
φ	Ângulo azimutal
θ	Ângulo polar
*	Operação de convolução
\mathcal{L}^{-1}	Operador da transformada inversa de Laplace

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA	3
2.1 Sistema Euleriano	3
3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PELA COMBINAÇÃO DO MÉTODO ESPECTRAL E LTS_N	7
3.1 Fundamentos do Método Espectral	7
3.2 Método Espectral	8
3.3 Método LTS_N	11
3.4 Inversão da matriz $\overline{M}_N(s)$	14
3.5 Solução LTS_N	16
3.6 Recentes Avanços no Método LTS_N	19
3.7 Convergência	21
4 RESULTADOS NUMÉRICOS	27
5 CONCLUSÕES	46
BIBLIOGRAFIA	47

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	Temperatura de radiação para tempo $t=0,1$ (Vermelho $M=98$, Verde $M=99$, Azul $M=100$).	28
Figura 4.2	Temperatura de radiação para tempo $t=0,5$ (Vermelho $M=54$, Verde $M=55$, Azul $M=56$).	29
Figura 4.3	Temperatura de radiação para tempo $t=1$ (Vermelho $M=83$, Verde $M=84$, Azul $M=85$).	30
Figura 4.4	Temperatura de radiação para tempo $t=2$ (Vermelho $M=60$, Verde $M=61$, Azul $M=62$).	31
Figura 4.5	Temperatura de radiação para tempo $t=3$ (Vermelho $M=64$, Verde $M=65$, Azul $M=66$).	32
Figura 4.6	Temperatura de radiação para tempo $t=4$ (Vermelho $M=87$, Verde $M=88$, Azul $M=89$).	33
Figura 4.7	Temperatura de radiação para tempo $t=5$ (Vermelho $M=85$, Verde $M=86$, Azul $M=87$).	34
Figura 4.8	Temperatura de radiação para tempo $t=0,1$ (Vermelho $M=20$, Azul $M=40$, Rosa $M=60$, Verde $M=80$, Amarela $M=100$).	35
Figura 4.9	Temperatura de radiação para tempo $t=1$ (Vermelho $M=20$, Azul $M=40$, Rosa $M=60$, Verde $M=80$, Amarela $M=100$).	36
Figura 4.10	Temperatura de radiação para tempo $t=0.1$, $M=100$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	38
Figura 4.11	Temperatura de radiação para tempo $t=0.5$, $M=56$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	39
Figura 4.12	Temperatura de radiação para tempo $t=1$, $M=85$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	40
Figura 4.13	Temperatura de radiação para tempo $t=2$, $M=62$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	41
Figura 4.14	Temperatura de radiação para tempo $t=3$, $M=66$, (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	42
Figura 4.15	Temperatura de radiação para tempo $t=4$, $M=89$, (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).	43

Figura 4.16 Temperatura de radiação para tempo $t=5$, $M=87$, (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$). 44

RESUMO

Neste trabalho, resolve-se um problema de transferência radiativa dependente do tempo combinando o método espectral e LTS_N . Para tal, expande-se a intensidade angular de radiação dependente do tempo em uma série truncada de polinômios de Laguerre na variável tempo, substitui-se esta expansão no problema de transferência radiativa, toma-se momentos e obtém-se problemas estacionários, que são resolvidos pelo método LTS_N . Apresenta-se resultados numéricos para o tempo adimensional variando de 0,1 à 5, a ordem de aproximação na expansão truncada em polinômios de Laguerre, M , variando de 54 a 100 e calcula-se o termo integral que corresponde a fonte pela regra do trapézio considerando-se 10, 20 e 30 pontos.

ABSTRACT

In this work, the time dependent radiative transfer problem is solved combining the spectral and LTS_N methods. To this end, the angular radiation intensity is expanded in the time variable, in a truncated Laguerre polynomial series. Replacing this ansatz in the radiative transfer problem taking moments, steady-state problems are obtained, that are solved by the LTS_N method. Numerical results are presented for the dimensionless time ranging from 0.1 to 5, the order of approximation of the truncated series in Laguerre polynomials, M , varying from 54 to 100 and the integral term corresponding to the source is evaluated by the trapezoidal rule considering 10, 20 and 30 points.

1 INTRODUÇÃO

A teoria de transporte descreve a distribuição de partículas como nêutrons, elétrons, fótons, moléculas de gás, íons e ondas eletromagnéticas em um meio [15]. Este trabalho direciona-se para a equação de transferência radiativa que descreve o transporte de fótons. A equação de transferência radiativa é uma equação íntegro diferencial. A complexidade desta equação decorre do fato da mesma ser descrita num espaço de fase constituído de sete variáveis independentes (três de posição, duas de direção, uma de frequência e uma de tempo).

Inúmeros métodos de solução têm sido propostos para a solução desta equação dependente do tempo, dentre os quais, cita-se: em 1981, Levermore e Pomraning [25] deduziram a teoria da difusão partindo da equação de transferência radiativa; em 1987, Pomraning [35] derivou a condição inicial e de contorno para esta aproximação; Ganapol [18], em 1986, obteve uma solução numérica para a equação de transporte dependente do tempo usando a técnica de expansão em polinômios de Legendre; Larsen e Pomraning [24], em 1991, mostraram que as equações de ordenadas discretas (equações S_N) são um limite assintótico da equação de transporte dependente do tempo; em 1992, Szilard e Pomraning [43] resolveram numericamente a equação de transferência radiativa acoplada com a equação de balanço de energia. Neste trabalho o termo correspondente à derivada temporal é aproximado pelo método das diferenças finitas em esquema *backward*, o termo da derivada espacial foi aproximado por elementos finitos linear e o termo integral pelas equações S_N . Szilard e Pomraning [43] também resolveram este problema tanto para o caso de absorção pura bem como para espalhamento. Cabe observar que nestes casos a equação de transferência radiativa é linear. Uma revisão detalhada sobre os métodos de solução da equação de transferência radiativa ou de transporte sem simetria azimutal dependente do tempo é discutida por Oliveira [28].

Neste trabalho, seguindo a idéia de Oliveira [28], resolve-se a equação de transferência radiativa linear dependente do tempo em uma placa plana, considerando-se espalhamento isotrópico, pelo método espectral. Este método consiste na expansão da intensidade de radiação angular em uma série truncada de polinômios ortogonais de Laguerre na variável temporal. Substitui-se esta expansão na equação de transferência radiativa tomando-se momentos, isto resulta num conjunto de problemas estacionários unidimensionais com fonte a serem resolvidos recursivamente pelo método LTS_N . Este método, proposto por Vilhena e colaboradores [3,45,37,38,46], consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável espacial no sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem decorrentes da aproximação de ordenadas discretas da equação de transferência radiativa estacionária. Uma descrição detalhada e completa pode ser encontrada no trabalho de revisão do método LTS_N , por Vilhena e colaboradores [47] e ainda nos trabalhos de Segatto et al [37,39,20].

O trabalho está organizado em 5 capítulos: no capítulo 2 deduz-se a equação de transferência radiativa clássica no sistema Euleriano. No capítulo 3 descreve-se os fundamentos do método espectral bem como a aplicação deste método, combinado com o método LTS_N , na solução da equação de transferência radiativa com espalhamento isotrópico em uma placa plana e, ainda, solução simbólica do sistema algébrico resultante pela combinação do método de Schur e particionamento. No capítulo 4 mostram-se os resultados numéricos encontrados pelo método proposto para diferentes valores de tempos e ordem de aproximação da série truncada em polinômios de Laguerre. Finalmente, no capítulo 5, discute-se os resultados encontrados e apresenta-se sugestões de trabalhos futuros.

2 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

Neste capítulo deduz-se a equação de transferência radiativa clássica no sistema Euleriano.

2.1 Sistema Euleriano

O principal objetivo da teoria de transporte consiste na determinação da distribuição de partículas num meio, levando-se em conta o deslocamento e interações com o meio. Entretanto, devido à natureza aleatória dos eventos de interação, não é possível prever-se o número exato de partículas, numa certa região, num dado tempo. Por isso, trabalha-se com uma descrição matemática de processos de transporte de partículas estatisticamente, baseada em considerações do tipo: as colisões são consideradas instantâneas; entre as colisões as partículas deslocam-se em linha reta e com velocidade constante; as partículas são consideradas pontuais; as propriedades do material são consideradas isotrópicas.

A equação de transferência radiativa é uma equação de conservação de fótons. Esta equação pode ser deduzida de várias maneiras. Neste trabalho apresenta-se a derivação da equação no sistema Euleriano[34]. Para tal, considera-se um elemento de volume ΔV definido como:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi. \quad (2.1)$$

O número de fótons no tempo t nesse cubo é dado por:

$$n = f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi, \quad (2.2)$$

onde $f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t)$ é a função de distribuição de fótons na posição definida pelo vetor \mathbf{r} na direção Ω descrito pelos ângulos, polar θ e o azimutal φ , com a frequência ν no tempo t .

A equação de transferência radiativa obedece ao seguinte balanço de energia cujos termos são descritos a seguir:

i. variação do número de fótons no tempo

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) \Delta V = \Delta V \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t), \quad (2.3)$$

onde ΔV é o elemento de volume no espaço de fase;

ii. variação de fótons através da superfície no cubo - considera-se a taxa de fluxo de fótons através da superfície no cubo, na direção normal. Assim sendo, na direção x , tem-se:

$$(fluxo)_x = \dot{x} f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) \Big|_x^{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta \nu \Delta \mu \Delta \varphi, \quad (2.4)$$

onde o sub-índice x denota a componente de velocidade do fóton na direção x , dada por $\dot{x} = c\Omega_x$, e o ponto é a derivada em relação ao tempo, c é a velocidade da luz e $\mu = \cos \theta$. A equação (2.4) pode ser reescrita como:

$$(fluxo)_x = \Delta V \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t). \quad (2.5)$$

Procedendo-se, analogamente, nas outras variáveis y, z, ν, μ, φ , obtém-se:

$$fluxo = \left[\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} f + \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} f + \frac{\partial}{\partial z} \dot{z} f + \frac{\partial}{\partial \nu} \dot{\nu} f + \frac{\partial}{\partial \mu} \dot{\mu} f + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} f \right] \Delta V, \quad (2.6)$$

que para simplicidade de notação negligencia-se o argumento de f ;

iii. absorção - a taxa de absorção de fótons no cubo é expressa como:

$$a = c\sigma_a f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) \Delta V, \quad (2.7)$$

onde σ_a é o coeficiente de absorção;

iv. espalhamento para fora do volume de fase - a taxa de espalhamento é dada por:

$$c\Delta V \int_0^\infty \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega', t) f(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) d\Omega' d\nu'; \quad (2.8)$$

onde $\sigma_s(\mathbf{r}, \nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega', t)$ é a seção de choque de espalhamento diferencial e $d\Omega$ é o ângulo sólido diferencial sendo, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi$;

v. espalhamento para dentro do volume de fase - a taxa de espalhamento é expresso como:

$$c\Delta V \int_0^\infty \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega, t) f(\mathbf{r}, \nu', \Omega', t) d\Omega' d\nu'; \quad (2.9)$$

vi. emissão de fótons - a taxa de emissão de fótons emitidos por unidade de tempo e volume é representada por:

$$q = q(\mathbf{r}, \nu, t)\Delta V. \quad (2.10)$$

A equação de transferência radiativa é então obtida somando-se os termos com o sinal apropriado para designar perdas e ganhos no balanço. Cancelando-se o termo ΔV comum a todos os termos descritos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\nu, \Omega) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} f(\nu, \Omega) + \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} f(\nu, \Omega) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{z} f(\nu, \Omega) + \frac{\partial}{\partial \nu} \dot{\nu} f(\nu, \Omega) \\ + \frac{\partial}{\partial \mu} \dot{\mu} f(\nu, \Omega) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} f(\nu, \Omega) = -c\sigma_a(\nu) f(\nu, \Omega) + q(\nu) \\ + c \int_0^\infty \int_{4\pi} \sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) f(\nu', \Omega') - \sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega') f(\nu, \Omega) d\Omega' d\nu'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para simplicidade de notação, os argumentos \mathbf{r} e t foram desconsiderados na equação (2.11). Observando-se que $\dot{\mu} = \dot{\varphi} = 0$ pois esses ângulos são fixos, assumindo-se que o fóton percorre uma trajetória retilínea entre sucessivas colisões e ainda considerando-se que os fótons com velocidade c , direção Ω não mudam de

frequência, então $\dot{\nu} = 0$. Finalmente, observando-se que:

$$\dot{x} = c\Omega_x, \quad (2.12)$$

$$\dot{y} = c\Omega_y, \quad (2.13)$$

$$\dot{z} = c\Omega_z. \quad (2.14)$$

Então, das simplificações acima citadas, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\nu, \Omega) + c\Omega \cdot \nabla f(\nu, \Omega) &= q(\nu) - c\sigma_a(\nu)f(\nu, \Omega) \\ + c \int_0^\infty \int_{4\pi} \sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) f(\nu', \Omega') &- \sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega') f(\nu, \Omega) d\Omega' d\nu'. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Introduzindo-se a definição de intensidade específica de radiação,

$$I = h\nu f(\nu, \Omega), \quad (2.16)$$

onde h é a constante de Planck, então a equação (2.15) é expressa como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I(\nu, \Omega) + \Omega \cdot \nabla I(\nu, \Omega) &= h\nu q(\nu) - \sigma_a(\nu)I(\nu, \Omega) + \\ \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{\nu}{\nu'} \sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \cdot \Omega) I(\nu', \Omega') &- \sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega') I(\nu, \Omega) d\Omega' d\nu', \end{aligned} \quad (2.17)$$

que é a equação clássica de transferência radiativa. É importante salientar que a mesma expressão é encontrada quando a derivação é feita em um sistema Lagrangeano [34].

3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA PELA COMBINAÇÃO DO MÉTODO ESPECTRAL E LTS_N

Neste capítulo apresentam-se os fundamentos dos métodos espectral e LTS_N e exemplifica-se suas aplicações na solução de um problema de transferência radiativa dependente do tempo, em uma placa plana, considerando-se espalhamento isotrópico.

3.1 Fundamentos do Método Espectral

As transformadas integrais são operadores, definidos em domínios não limitados e limitados, amplamente empregados na busca de soluções analíticas ou semi-analíticas de modelos em engenharia e física, descritos por equações diferenciais, integrais, íntegro-diferenciais e de diferenças, entre outras aplicações. A principal vantagem desta técnica consiste na redução do número de variáveis independentes destas equações ou simplificações das citadas equações em uma equação algébrica. Entre as transformadas em domínio não limitados, destacam-se as transformadas de Laplace, Fourier, Mellin e Hankel. Existe uma vasta literatura sobre o tema o que torna impossível que seja feita uma revisão completa e detalhada, mas que não impede a sugestão da leitura dos livros [2,6,14,17,23,40,44].

Por outro lado, a aplicação da transformada integral em domínio limitado teve seu início com o trabalho de Grinberg [22]. Também existe uma vasta literatura sobre o assunto entre os quais aparecem os trabalhos de Mikhailov e Ozisik [26], Cotta e Mikhailov [11], Cotta [10,12]. O procedimento formalizado por estes autores foi denominado de técnica da transformada integral generalizada (GITG). As principais etapas deste método são: elaboração do par de transformada pela

solução do problema de Sturm-Liouville; aplicação da transformada e solução do sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes e aplicação da transformada inversa.

Cabe ressaltar que este método é aplicável a problemas em que é possível determinar-se um problema de Sturm-Liouville associado ao problema em consideração. Para problemas em que estas construções não são realizáveis, utiliza-se o método espectral [19,21]. A característica básica deste método consiste na expansão da solução em duas diferentes bases. A primeira é constituída de um número finito de funções globais ortogonais e suaves. A segunda é formada pela base de Lagrange em um conjunto discreto de pontos no domínio (normalmente as raízes do esquema de quadratura de Gauss [19]).

Finalmente, transformadas integrais em domínio discreto (transformada de Fourier, transformada Z) não serão objeto de análise porque fogem do escopo deste trabalho.

3.2 Método Espectral

Nesta seção descreve-se a solução do problema de transferência radiativa linear dependente do tempo em uma placa plana considerando-se espalhamento isotrópico aplicando-se o método espectral descrito na seção anterior. Para tal, expande-se a intensidade de radiação angular em uma série truncada de polinômios ortogonais de Laguerre na variável t . Substitui-se esta expansão na equação de transferência radiativa e condições de contorno e toma-se momentos, resultando num conjunto de problemas estacionários unidimensionais com fonte a serem resolvidos recursivamente pelo método LTS_N , que será descrito na próxima seção.

Seja então, a equação de transferência radiativa dependente do tempo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu, t) + \sigma I(x, \mu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) I(x, \mu', t) d\mu', \quad (3.1)$$

sujeito às condições de contorno

$$I(0, \mu, t) = \Gamma_1(\mu, t), \quad \mu > 0 \quad (3.2)$$

$$I(L, \mu, t) = \Gamma_2(\mu, t), \quad \mu < 0 \quad (3.3)$$

e condição inicial

$$I(x, \mu, 0) = I_o(x, \mu), \quad (3.4)$$

onde $I(x, \mu, t)$ é a intensidade específica de radiação, $x \in [0, L]$ é a variável espacial, $\mu \in [-1, 1]$ é o cosseno do ângulo polar entre a direção do fóton e o eixo x , $t > 0$ é a variável temporal, c é a velocidade da luz, σ é a seção de choque total macroscópica e $\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu)$ é a seção de choque de espalhamento diferencial. Por uma questão de notação assume-se que $\sigma_s = \sigma_s(\mu' \rightarrow \mu)$.

Para eliminar a dependência no tempo da intensidade angular de radiação expande-se a intensidade em uma série truncada de polinômios de Laguerre na variável t , ou seja

$$I(x, \mu, t) = \sum_{k=0}^M L_k(t) I^k(x, \mu), \quad (3.5)$$

onde M é a ordem de truncamento da aproximação em polinômios de Laguerre. Substitui-se a expressão (3.5) na equação (3.1) e toma-se momentos,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t} L_n(t) \left[\frac{1}{c} \sum_{k=0}^M L'_k(t) I^k(x, \mu) + \sum_{k=0}^M L_k(t) \mu \frac{\partial}{\partial x} I^k(x, \mu) + \sigma \sum_{k=0}^M L_k(t) I^k(x, \mu) \right] dt \\ & = \frac{\sigma_s}{2} \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^M e^{-t} L_n(t) L_k(t) I^k(x, \mu') d\mu' dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Levando em conta as relações de ortogonalidade,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} L_k(t) L_n(t) dt = \begin{cases} (n!)^2 & k = n, \\ 0 & k \neq n, \end{cases} \quad (3.7)$$

resulta:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I^n(x, \mu) (n!)^2 + \sigma (n!)^2 I^n(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} (n!)^2 \int_{-1}^1 I^n(x, \mu') d\mu' - \frac{1}{c} \sum_{k=0}^M \alpha_k(n) I^n(x, \mu), \quad (3.8)$$

onde

$$\alpha_k(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} L'_k(t) L_n(t) dt = \begin{cases} -k! n! & n < k, \\ 0 & n \geq k. \end{cases} \quad (3.9)$$

A igualdade em (3.9) pode ser verificada pelo princípio da indução matemática conforme Oliveira[28]. A equação (3.8) pode ser reescrita como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I^n(x, \mu) + \sigma I^n(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 I^n(x, \mu') d\mu' + \frac{1}{c} \sum_{k=n+1}^M \frac{k!}{n!} I^k(x, \mu), \quad (3.10)$$

substituindo a expressão (3.5) na condição inicial (3.4), resulta:

$$\sum_{k=n+1}^M k! I^k(x, \mu) = I_o(x, \mu) - \sum_{k=0}^n k! I^k(x, \mu), \quad (3.11)$$

e a equação (3.11) em (3.10), encontra-se,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I^n(x, \mu) + \sigma^* I^n(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 I^n(x, \mu') d\mu' + Q^n(x, \mu), \quad (3.12)$$

onde

$$\sigma^* = \sigma + \frac{1}{c}, \quad (3.13)$$

$$Q^n(x, \mu) = \frac{I_o(x, \mu)}{cn!} - \frac{1}{cn!} \sum_{k=0}^{n-1} k! I^k(x, \mu). \quad (3.14)$$

Finalmente, substitui-se (3.5) nas condições de contorno (3.2) e (3.3), tomando momentos, ou seja,

$$I^n(0, \mu) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_1(\mu, t) dt, \quad \mu > 0 \quad (3.15)$$

$$I^n(L, \mu) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_2(\mu, t) dt, \quad \mu < 0. \quad (3.16)$$

Desta forma, obtém-se o seguinte problema estacionário de transferência radiativa,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I^n(x, \mu) + \sigma^* I^n(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 I^n(x, \mu') d\mu' + Q^n(x, \mu), \quad (3.17)$$

sujeito às condições de contorno

$$I^n(0, \mu) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_1(\mu, t) dt, \quad \mu > 0 \quad (3.18)$$

$$I^n(L, \mu) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_2(\mu, t) dt, \quad \mu < 0 \quad (3.19)$$

Agora, para solucionar o problema estacionário de transferência radiativa utiliza-se a solução LTS_N , detalhada a seguir.

3.3 Método LTS_N

O método LTS_N consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável espacial no problema de ordenadas discretas unidimensional, equações S_N , resultando num sistema de equações algébricas lineares dependentes do parâmetro complexo s e na inversão da intensidade de radiação angular transformada.

Nesta seção descreve-se brevemente o método LTS_N , para tal, considera-se o problema de ordenadas discretas:

$$\mu_m \frac{d}{dx} I_m(x) + \sigma_t I_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{k=1}^N \sigma^{mk} I_k(x) w_k + Q_m(x), \quad (3.20)$$

onde, $x \in [0, x_o]$ é a variável espacial, $\mu \in [-1, 1]$ é o cosseno do ângulo polar, $m=1, \dots, N$, N par, e condições de contorno,

$$I_m(0) = f_m, \quad m = 1 : \frac{N}{2} \quad (3.21)$$

$$I_{m+\frac{N}{2}}(x_o) = g_m, \quad m = 1 : \frac{N}{2}. \quad (3.22)$$

Aqui, f_m e g_m são a intensidade de radiação incidentes na fronteira do domínio; $I_m(x) = I(x, \mu_m)$ é a intensidade específica de radiação angular na direção μ_m ; $Q_m(x) = Q(x, \mu_m)$ é o termo de fonte; σ_t é a seção de choque total; σ_s é a seção de choque de espalhamento diferencial; μ_m são as raízes do polinômio de Legendre de n -ésimo grau, são simétricas e ordenadas tal que

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1$$

e w_k são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre, ainda σ^{mk} é da forma:

$$\sigma^{mk} = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu_m), \quad (3.23)$$

com β_l os coeficientes da expansão dos polinômios de Legendre.

A equação (3.20) pode ser escrita na forma matricial como,

$$\frac{d}{dx} \mathbf{I}(x) + \mathbf{A} \mathbf{I}(x) = \mathbf{S}(x) \quad (3.24)$$

com condições de contorno,

$$\mathbf{I}_1(0) = \mathbf{f}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{I}_2(x_o) = \mathbf{g}, \quad (3.26)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz $N \times N$, da forma,

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{\sigma_t}{\mu_i} - \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & \text{se } i = j, \\ -\frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j) & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (3.27)$$

para $i, j = 1 : N$. Os vetores $\mathbf{I}(x)$ e $\mathbf{S}(x)$ são expressos como:

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}_1(x) \quad \mathbf{I}_2(x)]^T, \quad (3.28)$$

sendo $\mathbf{I}_1(x)$ e $\mathbf{I}_2(x)$ vetores cujas componentes contém a intensidade de radiação nas respectivas direções discretas positiva e negativa e o vetor fonte com componentes:

$$\mathbf{S}(x) = \frac{Q(x, \mu_i)}{\mu_i}, \quad i = 1 : N. \quad (3.29)$$

Conhecida a solução LTS_N do problema (3.20) a intensidade angular de radiação pode ser determinado como, [38]:

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{I}(0) + \mathbf{H}(x), \quad (3.30)$$

onde

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \mathbf{S}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \tau) \mathbf{S}(\tau) d\tau \quad (3.31)$$

e

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1} \left((s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \right). \quad (3.32)$$

Para determinar as componentes desconhecidas do vetor $\mathbf{I}(0)$, escreve-se a equação (3.30) na forma de matrizes em bloco,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(x) \\ \mathbf{I}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(x) & \mathbf{B}_{12}(x) \\ \mathbf{B}_{21}(x) & \mathbf{B}_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(0) \\ \mathbf{I}_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

aplica-se a condição de contorno (3.26) na equação (3.30) em $x = x_o$, encontrando:

$$\mathbf{I}_2(0) = \mathbf{B}_{22}^{-1}(x_o) [\mathbf{I}_2(x_o) - \mathbf{B}_{21}(x_o)\mathbf{I}_1(0) - \mathbf{H}_2(x_o)]. \quad (3.34)$$

Com isso determina-se o vetor $\mathbf{I}_2(0)$ e, conseqüentemente, calcula-se o vetor intensidade angular de radiação dado pela expressão (3.30).

A inversa da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$ será feito pelo algoritmo de Schur descrito na próxima seção.

3.4 Inversão da matriz $\overline{\mathbf{M}}_N(s)$

Nesta seção apresenta-se os processos utilizados para a inversão da matriz simbólica gerada pela aplicação da transformada de Laplace.

Considera-se a matriz,

$$\overline{\mathbf{M}}_N(s) = s\mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad (3.35)$$

cuja inversa

$$\overline{\mathbf{M}}_N^{-1}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.36)$$

deseja-se determinar. Primeiramente, aplica-se a fatoração de Schur [42] na matriz \mathbf{A} , segundo o qual, para qualquer matriz quadrada \mathbf{A} , existe uma matriz unitária \mathbf{U} tal que o produto,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^T, \quad (3.37)$$

é uma matriz triangular superior. Substitui-se a expressão (3.37) em (3.36), tem-se

$$\overline{\mathbf{M}}_N^{-1}(s) = \mathbf{U}(s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1}\mathbf{U}^T \quad (3.38)$$

assim, a matriz a ser invertida tem a forma

$$s\mathbf{I} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} s + t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ 0 & s + t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s + t_{NN} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

onde o determinante é dado por:

$$\Delta_N = \det(s\mathbf{I} + \mathbf{T}) = \prod_{i=1}^N (s + t_{ii}). \quad (3.40)$$

Com o objetivo de determinar a inversa da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{T})$, um processo recursivo é estabelecido tal que

$$\mathbf{S}_1 = [s + t_{11}], \quad (3.41)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} s + t_{11} & t_{12} \\ 0 & s + t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & t_{12} \\ 0 & s + t_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} s + t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & s + t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & s + t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2 & t_{13} \\ & t_{23} \\ 0 \cdots 0 & s + t_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

e para a k -ésima matriz, tem-se:

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} s + t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1k} \\ 0 & s + t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2k} \\ 0 & 0 & s + t_{33} & \cdots & t_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s + t_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & t_{1k} \\ & & & & t_{2k} \\ & \mathbf{S}_{k-1} & & & \\ & & & & t_{3k} \\ & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & s + t_{kk} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

onde $k = 2 : N$ e $\mathbf{S}_N = (s\mathbf{I} + \mathbf{T})$. Usando a propriedade de matrizes em bloco:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

a inversa da matriz \mathbf{S}_k , é dada por:

$$\mathbf{S}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k-1}^{-1} & -\frac{\mathbf{S}_{k-1}^{-1}\mathbf{v}}{s + t_{kk}} \\ 0 \cdots 0 & \frac{1}{s + t_{kk}} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$k = 2 : N$, onde o vetor \mathbf{v} é definido como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t_{1k} & t_{2k} & t_{3k} & \cdots & t_{(k-1)k} \end{bmatrix}^T. \quad (3.47)$$

Para efetuar a transformada inversa de Laplace da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1}$, por Heaviside, é necessário encontrar sua adjunta. Assim, multiplica-se as equações (3.46) e (3.40) obtendo:

$$\text{Adj}(\mathbf{S}_k) = \mathbf{S}_k^{-1} \det(\mathbf{S}_k) = \begin{bmatrix} \text{Adj}(\mathbf{S}_{k-1})(s + t_{kk}) & -\text{Adj}(\mathbf{S}_{k-1})\mathbf{v} \\ 0 \cdots 0 & \det(\mathbf{S}_{k-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Finalmente usa-se a técnica de expansão de Heaviside e encontra-se a seguinte expressão para a matriz inversa de $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$:

$$\mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}) = \mathbf{U} \left[\sum_{l=1}^N \frac{\text{Adj}(\mathbf{S}_N) |_{s=s_l}}{\frac{d}{ds}(\Delta_N) |_{s=s_l}} e^{s_l t} \right] \mathbf{U}^T. \quad (3.49)$$

3.5 Solução LTS_N

Nesta seção aplica-se a solução LTS_N , descrita na seção anterior, no problema proposto em (3.17). Para tal, considera-se a equação de transferência

radiativa, em uma placa plana, com espalhamento isotrópico. Discretiza-se a variável angular μ por ordenadas discretas. O termo integral da equação (3.17) é aproximado por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N , resultando em um conjunto de equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{d}{dx}I_m^n(x) + \frac{\sigma^*}{\mu_m}I_m^n(x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{k=1}^N I_k^n(x)w_k + \frac{Q_m^n(x)}{\mu_m}, \quad (3.50)$$

onde, $x \in [0, L]$, $\mu \in [-1, 1]$, $m = 1, 2, \dots, N$, N par e condições de contorno:

$$I_m^n(0) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_1(\mu_m, t) dt, \quad \mu_m > 0 \quad (3.51)$$

$$I_m^n(L) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \Gamma_2(\mu_m, t) dt, \quad \mu_m < 0. \quad (3.52)$$

Aqui, $I_m^n(x) = I(x, \mu_m, t_n)$ representa a intensidade angular de radiação na direção μ_m , no tempo t_n ; $Q_m^n(x) = Q(x, \mu_m, t_n)$ é o termo de fonte.

Aplica-se o método LTS_N na resolução do problema de ordenadas discretas (3.50). Desta feita, aplica-se a transformada de Laplace na variável espacial x , obtendo a equação transformada,

$$s\bar{I}_m^n(s) + \frac{\sigma^*}{\mu_m}\bar{I}_m^n(s) - \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{k=1}^N \bar{I}_k^n(s)w_k = \bar{I}_m^n(0) + \frac{\bar{Q}_m^n(s)}{\mu_m}, \quad (3.53)$$

onde a barra denota a transformada de Laplace e $m=1,2,\dots,N$. A equação (3.53), representa um sistema linear algébrico de N equações e N incógnitas, que matricialmente pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{M}}_N(s)\bar{\mathbf{I}}(s) = \mathbf{I}(0) + \bar{\mathbf{S}}(s). \quad (3.54)$$

A matriz $\bar{\mathbf{M}}_N(s)$ é uma matriz quadrada de ordem N , dada por:

$$\bar{\mathbf{M}}_N(s) = s\mathbf{I} + \mathbf{A}, \quad (3.55)$$

sendo que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N e os elementos da matriz \mathbf{A} tem a forma,

$$a(i, j) = \begin{cases} \frac{\sigma^*}{\mu_i} - \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i = j, \\ -\frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.56)$$

Os vetores, $\bar{\mathbf{I}}(s)$, $\mathbf{I}(0)$ e $\bar{\mathbf{S}}(s)$ são expressos como:

$$\bar{\mathbf{I}}(s) = [\bar{I}_1(s) \bar{I}_2(s) \dots \dots \bar{I}_N(s)]^T, \quad (3.57)$$

que representa o vetor intensidade de radiação transformado;

$$\mathbf{I}(0) = [I_1(0) I_2(0) \dots \dots I_N(0)]^T, \quad (3.58)$$

que representa o vetor intensidade de radiação incidentes na fronteira em $x = 0$ em todas as direções e o vetor fonte e expresso por:

$$\bar{\mathbf{S}}(s) = \left[\frac{\bar{Q}_1(s)}{\mu_1} \quad \frac{\bar{Q}_2(s)}{\mu_2} \quad \dots \quad \dots \quad \frac{\bar{Q}_N(s)}{\mu_N} \right]^T. \quad (3.59)$$

Para a resolução da equação (3.54), é necessário que se determine a inversa da matriz $\bar{\mathbf{M}}_N(s)$. Conhecida a matriz inversa de $\bar{\mathbf{M}}_N(s)$ obtém-se a intensidade angular de radiação transformada

$$\bar{\mathbf{I}}(s) = \bar{\mathbf{M}}_N^{-1}(s) \mathbf{I}(0) + \bar{\mathbf{M}}_N^{-1}(s) \bar{\mathbf{S}}(s), \quad (3.60)$$

e aplicada a transformada inversa de Laplace, resulta que a intensidade angular de radiação pode ser determinada como:

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{I}(0) + \mathbf{H}(x), \quad (3.61)$$

sendo

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\overline{\mathbf{M}}_N^{-1}(s)\} \quad (3.62)$$

e

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \mathbf{S}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \tau)\mathbf{S}(\tau)d\tau, \quad (3.63)$$

onde

$$\mathbf{S}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\overline{\mathbf{S}}(s)\}, \quad (3.64)$$

e o asterisco denota convolução. Cada elemento da matriz $\overline{\mathbf{M}}_N^{-1}(s)$ é uma função racional e portanto a transformada inversa de Laplace pode ser calculada analiticamente pela técnica de expansão de Heaviside, resultando que,

$$\mathbf{B}(x) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}^k e^{s_k x}, \quad (3.65)$$

sendo s_k as N raízes do determinante da matriz $\overline{\mathbf{M}}_N(s)$, que também podem ser obtidos como autovalores da matriz $-\mathbf{A}$ e \mathbf{P}^k são as N matrizes de coeficientes, provenientes da inversão da transformada de Laplace.

As componentes desconhecidas do vetor $\mathbf{I}(0)$, dado pela equação (3.61), são determinadas da mesma forma que na equação (3.30).

3.6 Recentes Avanços no Método LTS_N

Um dos recentes avanços no método LTS_N é o método da diagonalização [39] que permite inverter a matriz simbólica $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$. Para tal, decompõe-se a matriz \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}, \quad (3.66)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal de autovalores e \mathbf{X} é uma matriz de autovetores correspondentes. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left((s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1} \right) \\ &= \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1} \left((s\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1} \right) \mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{X}e^{-\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

O método da diagonal é aplicável a problemas de transferência radiativa em placa com espessura grande. Muitas vezes, o aumento da espessura da placa ou da ordem da quadratura ocasionam problemas de *overflow*. Para eliminar tal problema decompõe-se a solução LTS_N em homogênea e particular que contém somente direções positivas, $\mu_k > 0$, e negativas $\mu_k < 0$ [20]. É necessário lembrar-se que as direções discretas μ_k são simétricas ao redor de $\mu = 0$. Por outro lado, fisicamente falando, isto corresponde a considerar a partícula viajando da direita para a esquerda com $\mu_k < 0$ e o mesmo para a partícula viajando da esquerda para a direita com $\mu_k > 0$. Esta propriedade é conhecida como propriedade da invariância das direções discretas [15], desta feita,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^+x}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^-x}\mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{B}^+(x) + \mathbf{B}^-(x), \end{aligned} \tag{3.68}$$

cujos elementos das matrizes \mathbf{D}^+ e \mathbf{D}^- são da forma:

$$d_{ij}^+ = \begin{cases} d_{ij} & d_{ij} > 0 \\ 0 & d_{ij} < 0 \end{cases} \tag{3.69}$$

e

$$d_{ij}^- = \begin{cases} d_{ij} & d_{ij} < 0 \\ 0 & d_{ij} > 0 \end{cases} \tag{3.70}$$

com d_{ij} os elementos da matriz \mathbf{D} .

Utilizando-se da propriedade da invariância e a decomposição da matriz $\mathbf{B}(x)$, descrita acima, a solução LTS_N pode ser reescrita como:

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{B}^+(x - x_o)\mathbf{I}(x_o) + \mathbf{B}^-(x)\mathbf{I}(0) + \mathbf{H}(x), \quad (3.71)$$

onde

$$\mathbf{H}(x) = \int_{x_o}^x \mathbf{B}^+(x - \tau)\mathbf{S}(\tau)d\tau + \int_0^x \mathbf{B}^-(x - \tau)\mathbf{S}(\tau)d\tau. \quad (3.72)$$

Para determinar as componentes desconhecidas $\mathbf{I}_2(0)$ e $\mathbf{I}_1(x_o)$ dos vetores $\mathbf{I}(0)$ e $\mathbf{I}(x_o)$ respectivamente, aplica-se as condições de contorno (3.25) e (3.26) encontrando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(x_o) \\ \mathbf{I}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^+(-x_o) & \mathbf{B}_{12}^-(0) \\ \mathbf{B}_{21}^+(0) & \mathbf{B}_{22}^-(x_o) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{11}^-(0))\mathbf{I}_1(0) - \mathbf{B}_{12}^+(-x_o)\mathbf{I}_2(x_o) - \mathbf{H}_1(0) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{22}^+(0))\mathbf{I}_2(x_o) - \mathbf{B}_{21}^-(x_o)\mathbf{I}_1(0) - \mathbf{H}_2(x_o) \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

neste ponto é importante salientar que todos os argumentos das exponenciais são negativos, portanto não existe problemas de *overflow*.

3.7 Convergência

Nesta seção, discute-se a idéia adotada por Pazos, Vilhena e Renz [33] que demonstra a convergência da solução proposta para o problema de transferência radiativa dependente do tempo. Para tal, considera-se a equação de transferência radiativa dependente do tempo t :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu, t) + \sigma_t I(x, \mu, t) = k \int_{-1}^1 I(x, \mu', t) d\mu' + q(x, \mu, t), \quad (3.74)$$

sujeito às condições de contorno

$$I(0, \mu, t) = A(\mu, t), \quad \mu > 0 \quad (3.75)$$

$$I(l, \mu, t) = B(\mu, t), \quad \mu < 0 \quad (3.76)$$

e condição inicial

$$I(x, \mu, 0) = I_0(x, \mu), \quad (3.77)$$

onde

$$k = \frac{\sigma_s}{2}. \quad (3.78)$$

Têm-se diferentes opções para aproximar o problema exato [32], neste trabalho considera-se o esquema S_N , para a variável μ e expande-se a intensidade angular de radiação numa série de polinômios de Laguerre na variável t , reduzindo o problema a um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável x . Assim, define-se as seguintes matrizes:

$K_m = \left[\frac{\sigma_s}{2} \delta_{ij} \right]$	matriz de espalhamento associada;
$M_m = [\mu_i \delta_{ij}]$	matriz das ordenadas discretas;
$Q_m(x, t) = [q(x, \mu_i, t)]$	vetor fonte;
$\Sigma_m = [\sigma_t \delta_{ij}]$	matriz de colisão associada;
$I_m(x, t) = [I_i(x, \mu, t)]$	intensidade angular de radiação;
$W_m = [w_i \delta_{ij}]$	matriz dos pesos associada.

Então, obtém-se um sistema de equações com as correspondentes condições de fronteira:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I_m(x, t) + M_m \frac{\partial}{\partial x} I_m(x, t) + \Sigma_m I_m(x, t) = K_m W_m I_m(x, t) + Q_m(x, t), \quad (3.79)$$

sujeito às condições de contorno

$$I_m(0, t) = A_m(t), \quad \mu_i > 0 \quad (3.80)$$

$$I_m(l, t) = B_m(t), \quad \mu_i < 0 \quad (3.81)$$

e condição inicial

$$I_m(x, 0) = I_{0,m}(x), \quad (3.82)$$

expande-se a intensidade angular de radiação S_N numa série truncada de polinômios de Laguerre na variável t , ou seja:

$$I_m(x, t) = \sum_{k=0}^M L_k(t) I_m^k(x), \quad (3.83)$$

e substitui-se (3.83) em (3.79), obtendo-se,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^M L'_k(t) I_m^k(x) + M_m \sum_{k=0}^M L_k(t) \frac{d}{dx} I_m^k(x) + \sum_m \sum_{k=0}^M L_k(t) I_m^k(x) \\ &= K_m W_m \sum_{k=0}^M L_k(t) I_m^k(x) + Q_m(x, t). \end{aligned} \quad (3.84)$$

A seguir, toma-se momentos e leva-se em conta as relações de ortogonalidade descritas em (3.7) encontrando-se:

$$\frac{1}{c} \sum_{k=0}^M \alpha_k(n) I_m^n(x) + M_m \frac{d}{dx} I_m^n(x) + \sum_m I_m^n(x) = K_m W_m I_m^n(x) + Q_m^n(x), \quad (3.85)$$

onde

$$\alpha_k(n) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L'_k(t) dt, \quad (3.86)$$

$$Q_m^n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty e^{-t} Q_m(x, t) L_k(t) dt. \quad (3.87)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na variável espacial em (3.85),

$$\frac{1}{c} \sum_{k=0}^M \alpha_k(n) \bar{I}_m^n(s) + M_m (s \bar{I}_m^n(s) - I_m^n(0)) + \sum_m \bar{I}_m^n(s) = K_m W_m \bar{I}_m^n(s) + \bar{Q}_m^n(s), \quad (3.88)$$

e reescrevendo a equação (3.88) na forma matricial tem-se:

$$(s\mathbf{A} + \mathbf{B}) \bar{I}(s) = \mathbf{A}I(0) + \bar{Q}(s),$$

cuja solução é da forma

$$I(x) = \left\{ \sum_{k=1}^{N_n} e^{-s_k x} \mathbf{P}_k \right\} \mathbf{A}I(0) + \sum_{k=1}^{N_n} e^{-s_k x} \mathbf{P}_k * \mathbf{Q}(x), \quad (3.89)$$

e o asterisco denota a convolução.

Considerando-se hipóteses na aproximação do termo integral, prova-se que a solução proposta converge para a solução exata quando $N \rightarrow \infty$. Apresenta-se a demonstração para o intervalo fechado $X = [0, L]$ e define-se o erro da solução, conforme Pazos [33], como:

$$\epsilon_m(x, t) = I(x, t, \mu_m) - I_m(x, t), \quad \text{para todo } m = 1, \dots, N_n \quad (3.90)$$

e o erro de truncamento na aproximação do termo integral:

$$\tau_N(x, t) = \int_v I(x, t, \mu') d\mu' - \sum_{n=1}^N w_n I(x, t, \mu_n), \quad (3.91)$$

onde $I(x, t, \mu_m)$ é a solução exata para a intensidade de radiação na direção μ_m e $I_m(x, t)$ é solução devido ao método proposto também na direção μ_m .

Com estas definições obtém-se a seguinte formula entre ambos os erros,

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_m(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_m(x, t) + \sigma_t \epsilon_m(x, t) = \sum_{n=1}^{N_n} w_n k_{n,m} \epsilon_n(x, t) + \tau(x, t) \quad (3.92)$$

para todo $m=1, \dots, N_n$. Agora, expande-se os erros em uma série truncada de polinômios de Laguerre para a variável t ,

$$\begin{cases} \epsilon_m(x, t) = \sum_{k=0}^M \epsilon_m^k(x) L_k(t) \\ \tau(x, t) = \sum_{k=0}^M \tau^k(x) L_k(t) \end{cases}, \quad (3.93)$$

a partir desta expansão, determina-se as normas

$$\begin{cases} \|\epsilon^k\| = \sqrt{\frac{1}{2l} \int_0^l \sum_{m=1}^{N_n} w_m (\epsilon_m^k(x))^2 dx} \\ \|\tau^k\| = \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l (\tau^k(x))^2 dx} \end{cases}, \quad (3.94)$$

substitui-se os erros na equação (3.92) e encontra-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M \epsilon_m^k(x) \frac{d}{dt} L_k(t) + \mu_m \sum_{k=0}^M \frac{d}{dx} \epsilon_m^k(x) L_k(t) + \sigma_t \sum_{k=0}^M \epsilon_m^k(x) L_k(t) = \\ = \sum_{n=1}^{N_n} w_n k_{n,m} \sum_{k=0}^M \epsilon_m^k(x) L_k(t) + \sum_{k=0}^M \tau^k(x) L_k(t), \end{aligned} \quad (3.95)$$

esta equação é multiplicada pelo polinômio de Laguerre $L_j(t) \times e^{-t}$ e então é integrada com respeito a variável t

$$(j!) \mu_m \frac{d}{dx} \epsilon_m^j(x) + \sum_{k=0}^M \alpha_j(k) \epsilon_m^k(x) + (j!) \sigma_t \epsilon_m^j(x) = (j!) \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^{N_n} w_n \epsilon_n^j(x) + (j!) \frac{\sigma_s}{2} \tau^j(x), \quad (3.96)$$

onde $\alpha_j(k) = \int_0^\infty L_j(t) \frac{d}{dy} L_k(t) dt$. Agora esta equação é multiplicada por $\epsilon_m^j(x)$ e integrada com respeito a x obtendo-se:

$$\begin{aligned} (j!) \frac{\mu_m}{2} \left[(\epsilon_m^j(a))^2 - (\epsilon_m^j(0))^2 \right] + \sum_{k=0}^M \alpha_j(k) \int_0^l \epsilon_m^j(x) \epsilon_m^k(x) dx + (j!) \sigma_t \int_0^l [\epsilon_m^j(x)]^2 dx = \\ = (j!) \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^{N_n} w_n \int_0^l \epsilon_m^j(x) \epsilon_n^j(x) dx + (j!) \frac{\sigma_s}{2} \int_0^l \epsilon_m^j(x) \tau^j(x) dx. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Este primeiro termo do lado direito da equação, $\frac{\mu_m}{2} [(\epsilon_m^j(l))^2 - (\epsilon_m^j(0))^2] \geq 0$, porque os coeficientes $\epsilon_m^j(x)$ da expansão em polinômios de Laguerre e o erro do fluxo aproximado $\epsilon_m(x, t)$ são nulos para $x=0$ ou $x=l$. Depois de alguma manipulação algébrica, o restante da inequação é multiplicada com w_m , assim tem-se:

$$\sigma_t \int_0^l \sum_{m=1}^{N_n} w_m (\epsilon_m^j(x))^2 dx \leq \frac{\sigma_s}{2} \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{N_n} w_n \epsilon_n^j(x) \right]^2 dx + \frac{\sigma_s}{2} \int_0^l \left[\sum_{m=1}^{N_n} w_m \epsilon_m^j(x) \right] \tau^j(x) dx \quad (3.98)$$

Aplica-se a inequação de Cauchy-Schwarz em cada termo do lado direito, da equação:

$$\left| \sum_{m=1}^{N_n} w_m \epsilon_m^j(x) \right| = \left| \sum_{m=1}^{N_n} \sqrt{w_m} \sqrt{w_m} \epsilon_m^j(x) \right| \leq \left| \sum_{m=1}^{N_n} w_m \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{m=1}^{N_n} w_m (\epsilon_m^j(x))^2 \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.99)$$

obtem-se a relação

$$2l\sigma_t \|e^j\|^2 \leq 2l\sigma_t \|e^j\|^2 + \frac{\sqrt{2}\sigma_s}{2} \int_0^l \sqrt{\sum_{m=1}^{N_n} w_m (\epsilon_m^j(x))^2} |\tau^j(x)| dx. \quad (3.100)$$

Aplica-se na forma integral a inequação de Cauchy-Schwarz no último termo do lado direito da equação:

$$2l\sigma_t \|e^j\|^2 \leq 2l\sigma_s \|e^j\|^2 + \frac{\sqrt{2}\sigma_s}{2} \sqrt{2l} \|e^j\| \|\tau^j\|. \quad (3.101)$$

Finalmente, obtem-se

$$\|e^j\| \leq \frac{\frac{\sigma_s}{2}}{\sigma_t - \sigma_s} \|\tau^j\| \quad (3.102)$$

inequação valida para todo $j = 0, \dots, L$. Se o erro de truncamento na formula da quadratura tender a zero, então $\tau^j(x)$ tende a zero também e assim $\|\tau^j\| \rightarrow 0$.

A última desigualdade indica que o erro no fluxo aproximado é um fator de truncamento na fórmula da quadratura . Se para todo $j = 0 : L$, $\|\tau^j\| \rightarrow 0$, assim para todo $j = 0 : L$, $\|e^j\| \rightarrow 0$.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para análise da formulação proposta implementou-se um programa em linguagem Fortran 90. Para inverter a matriz $\overline{\mathbf{M}}_N(s)$ utilizou-se o método recursivo de inversão que combina o método de Schur com o método do particionamento e ainda o pacote matemático LAPACK. A convolução que aparece em (3.61) foi resolvida numericamente utilizando a regra do trapézio. Cabe ainda ressaltar que as unidades aparecem adimensionalizadas.

Considera-se o problema de transferência radiativa dependente do tempo em uma placa plana, com os seguintes parâmetros $L = 0, 1$, $c = 1$, $\sigma = 1$, $\sigma_s = 1$, $I(0, \mu, t) = 2$ para $\mu > 0$, $I(L, \mu, t) = 0$, para $\mu < 0$ e $I(x, \mu, 0) = \frac{10^{-10}}{2}$.

Os resultados encontrados pelo método proposto para a temperatura definida como,

$$T_r^A(x, t) = \int_{-1}^1 I(x, \mu', t) d\mu',$$

são apresentados nas figuras 4.1 até 4.7 para M variando de 54 até 100, $N=2$, considerando-se 10, 20, 30 pontos na regra do trapézio e o tempo variando de 0,1 até 5. Mostra-se os resultados encontrados por Szilard e Pomraning [43] para $N = 16$ na figura 4.15.

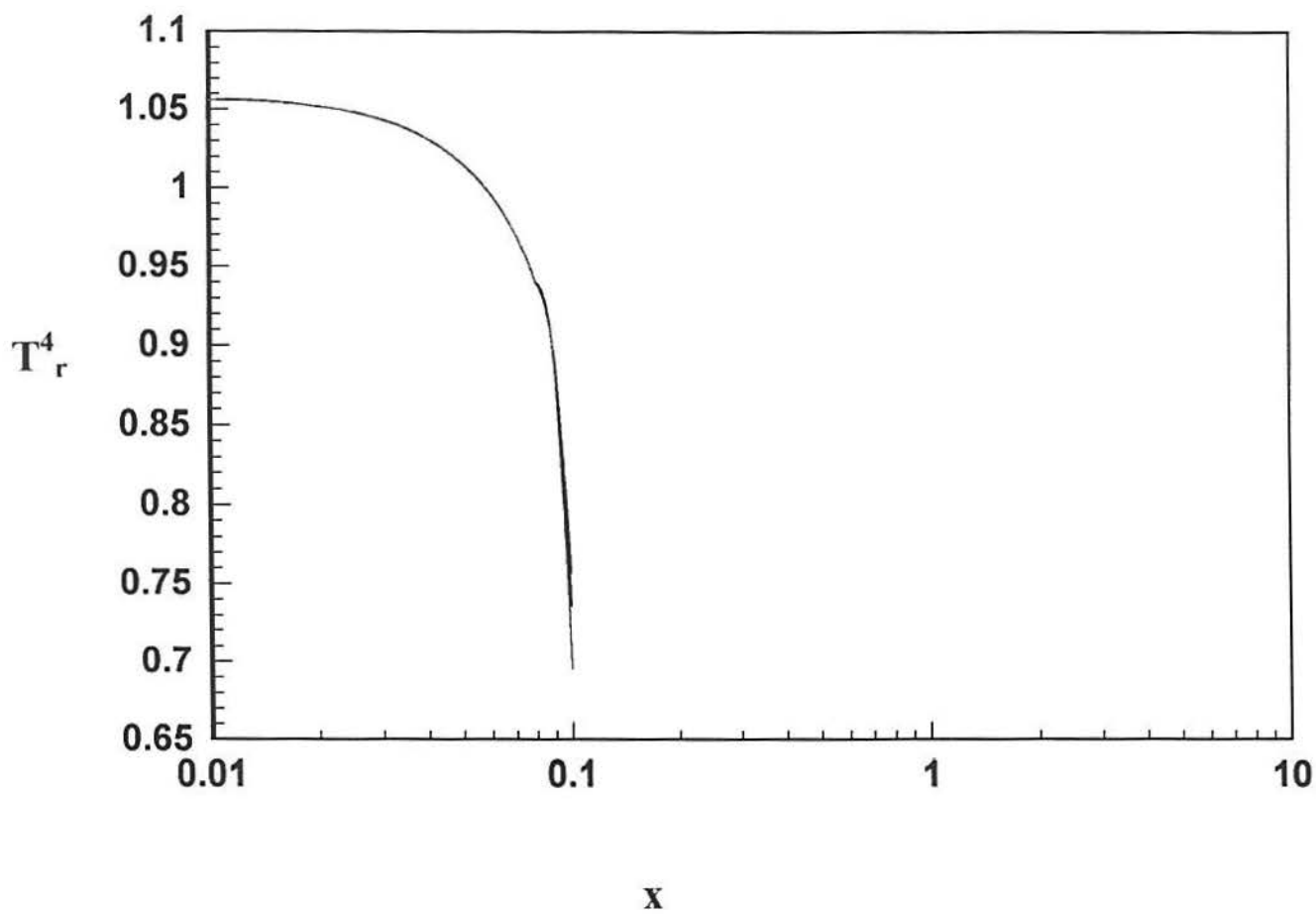


Figura 4.1: Temperatura de radiação para o $t = 0,1$ (Vermelho $M=98$, Verde $M=99$, Azul $M=100$).

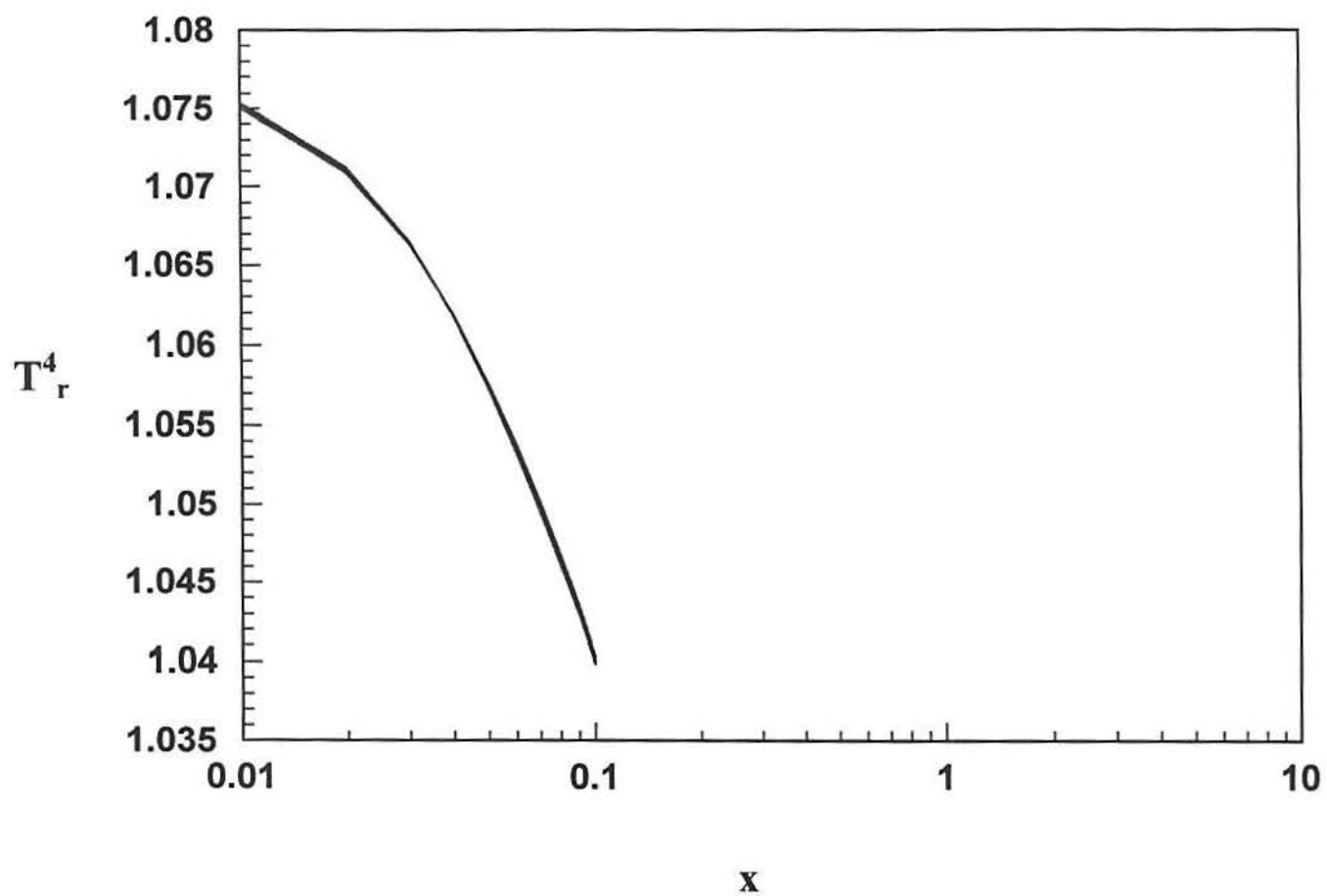


Figura 4.2: Temperatura de radiação para o $t = 0,5$ (Vermelho $M=54$, Verde $M=55$, Azul $M=56$).

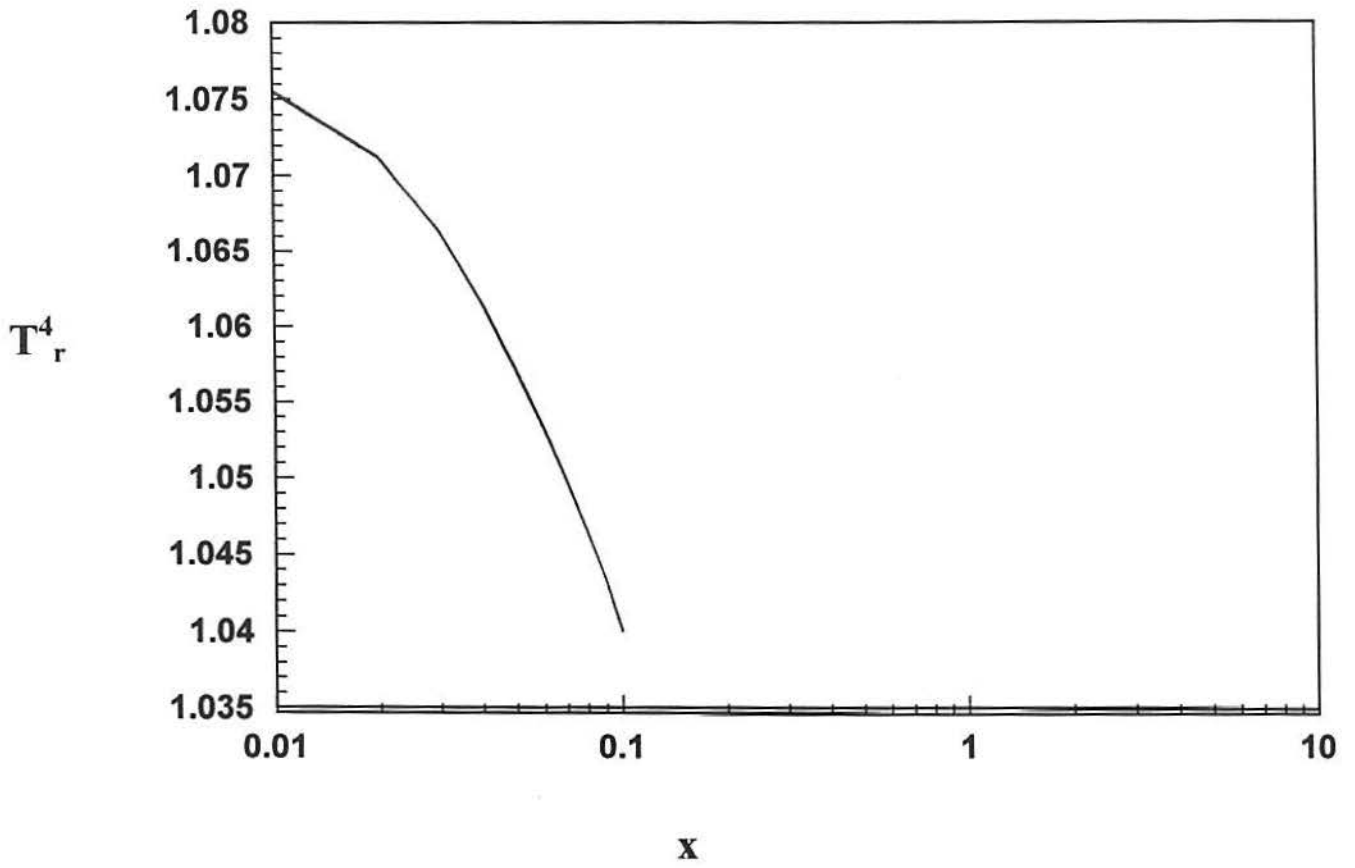


Figura 4.3: Temperatura de radiação para o $t = 1$ (Vermelho $M=83$, Verde $M=84$, Azul $M=85$).

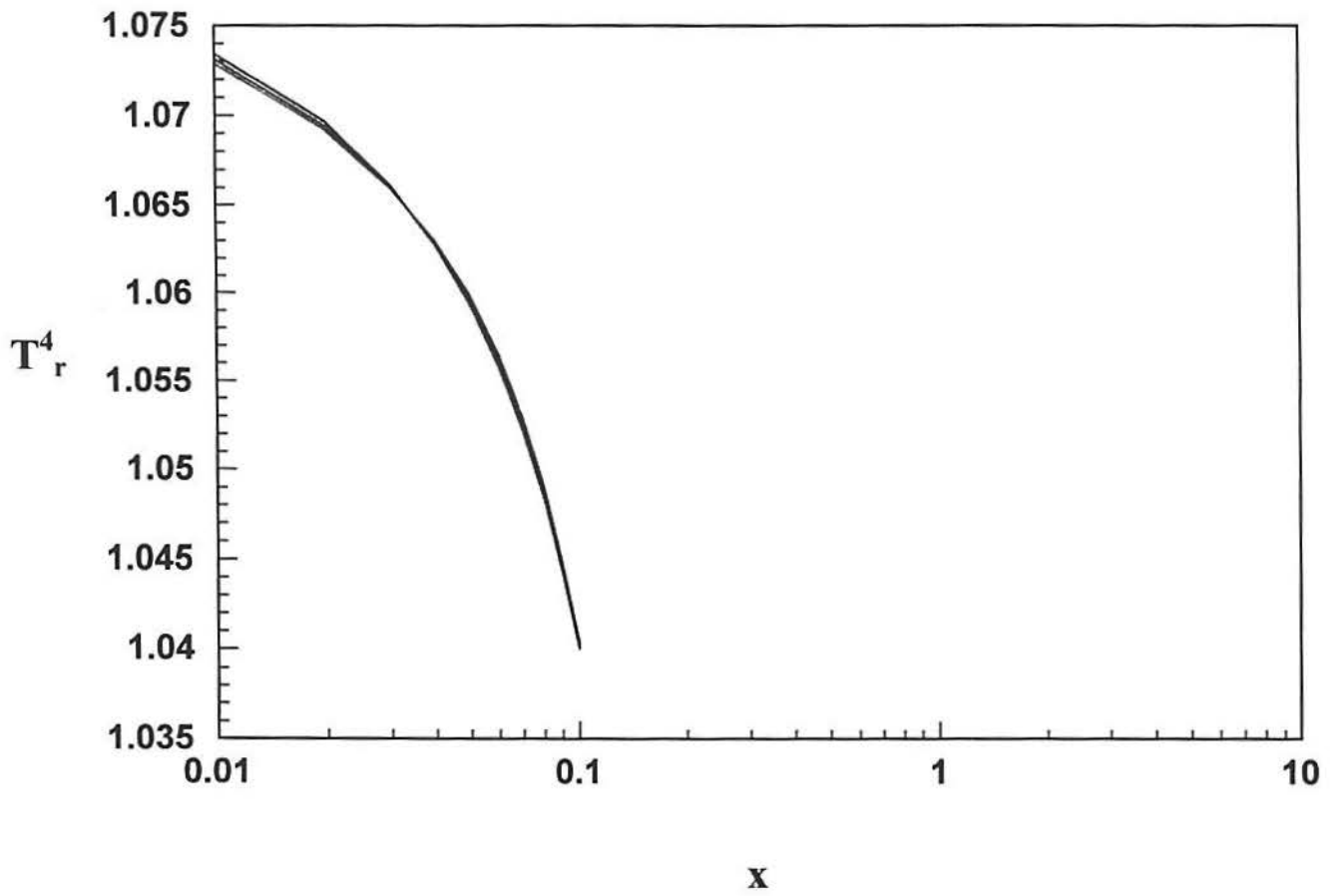


Figura 4.4: Temperatura de radiação para o $t = 2$ (Vermelho $M=60$, Verde $M=61$, Azul $M=62$).

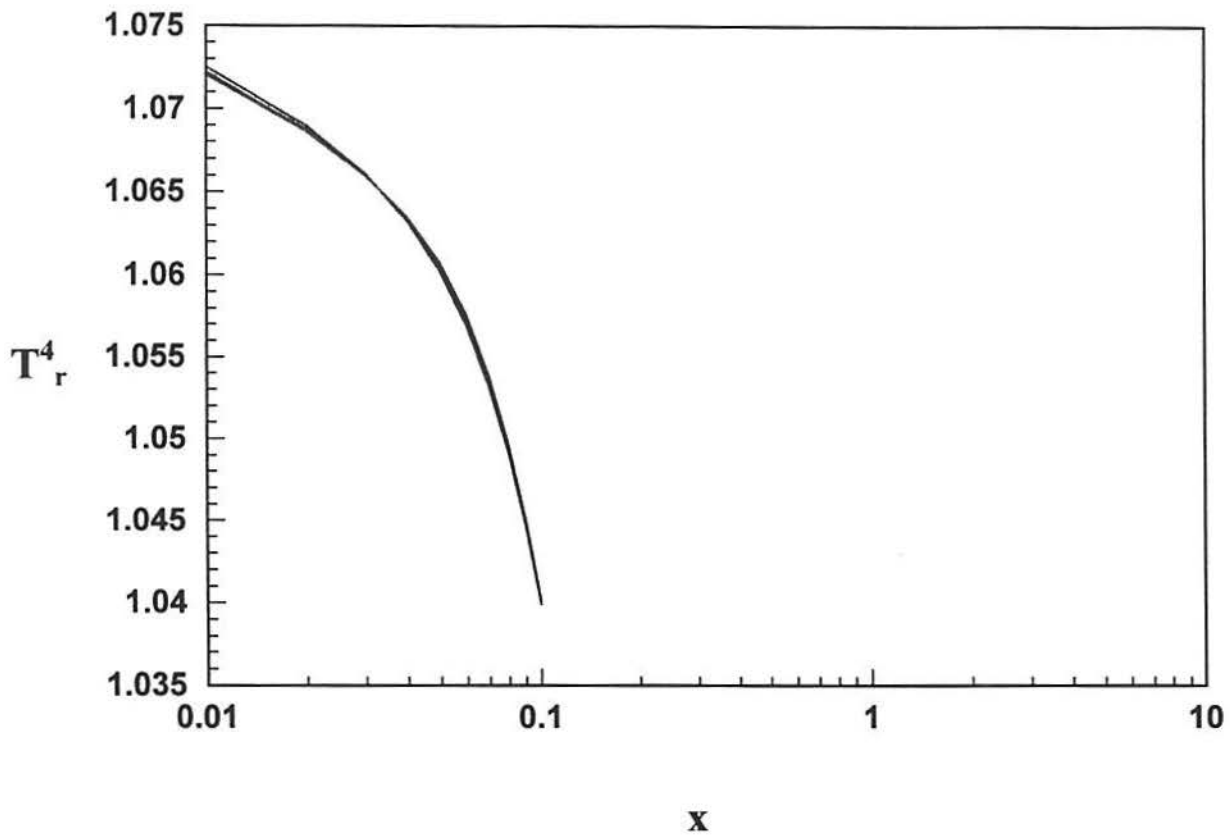


Figura 4.5: Temperatura de radiação para o $t=3$ (Vermelho $M=64$, Verde $M=65$, Azul $M=66$).

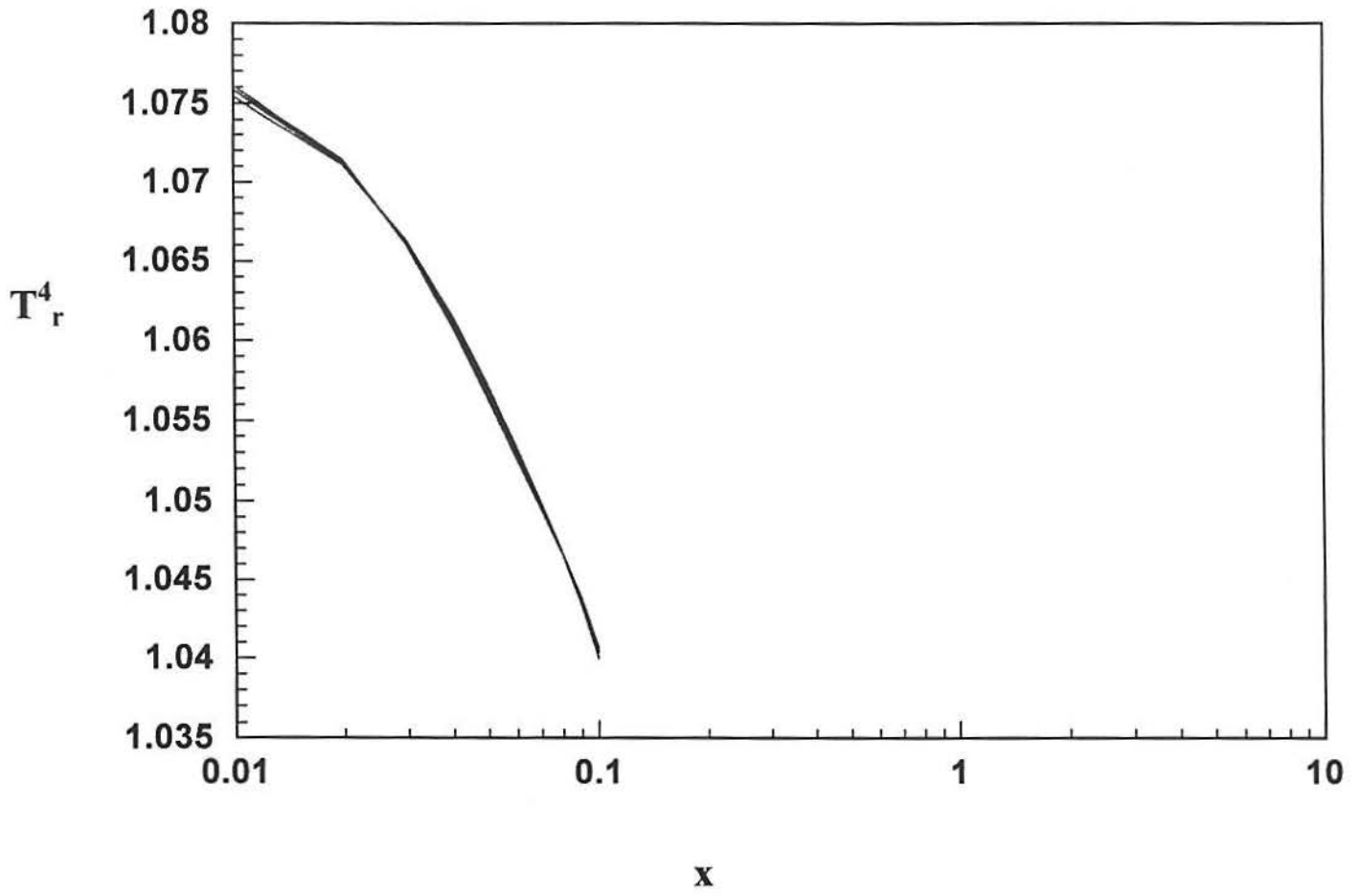


Figura 4.6: Temperatura de radiação para o $t=4$ (Vermelho $M=87$, Verde $M=88$, Azul $M=89$).

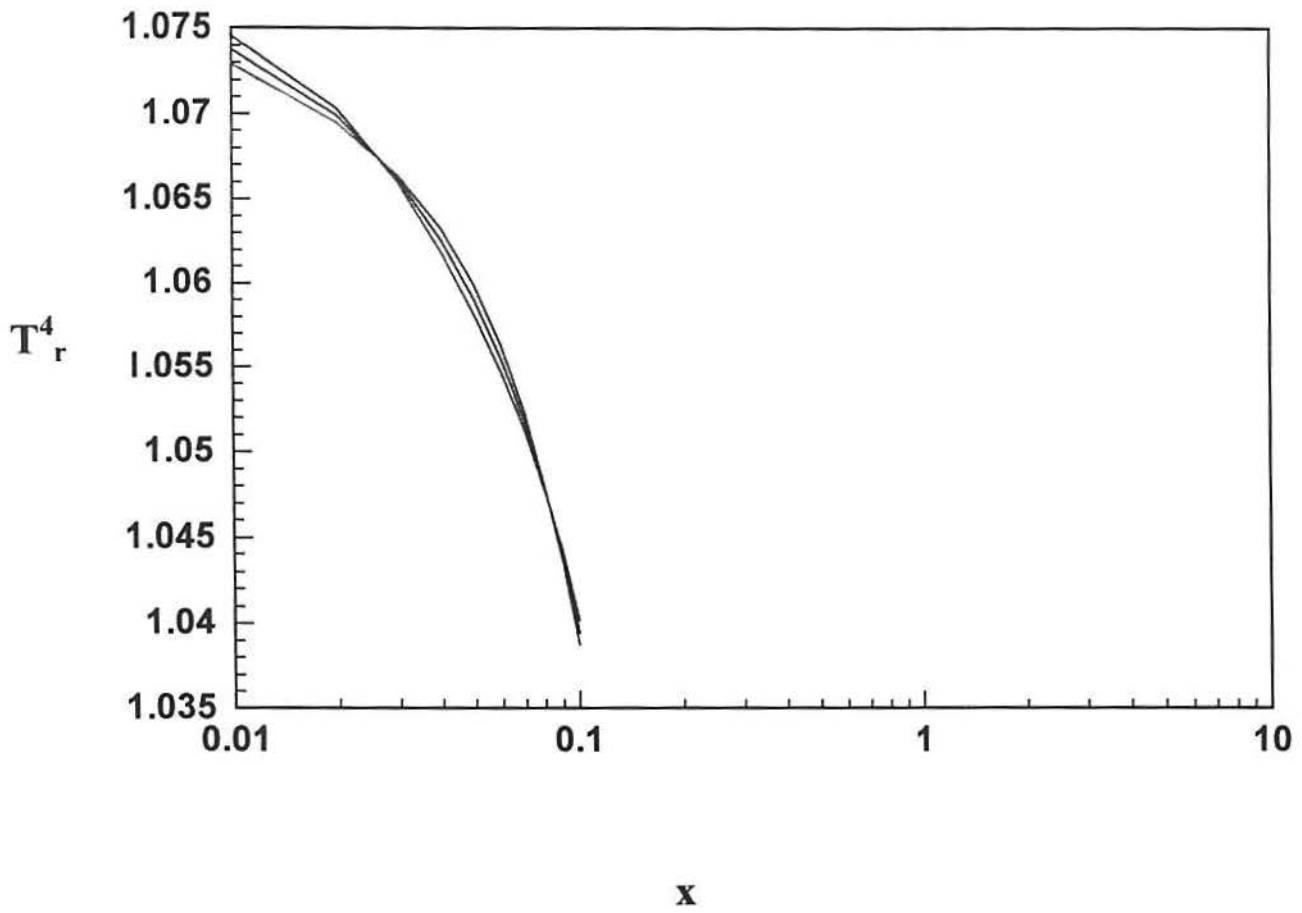


Figura 4.7: Temperatura de radiação para o $t=5$ (Vermelho $M=85$, Verde $M=86$, Azul $M=87$).

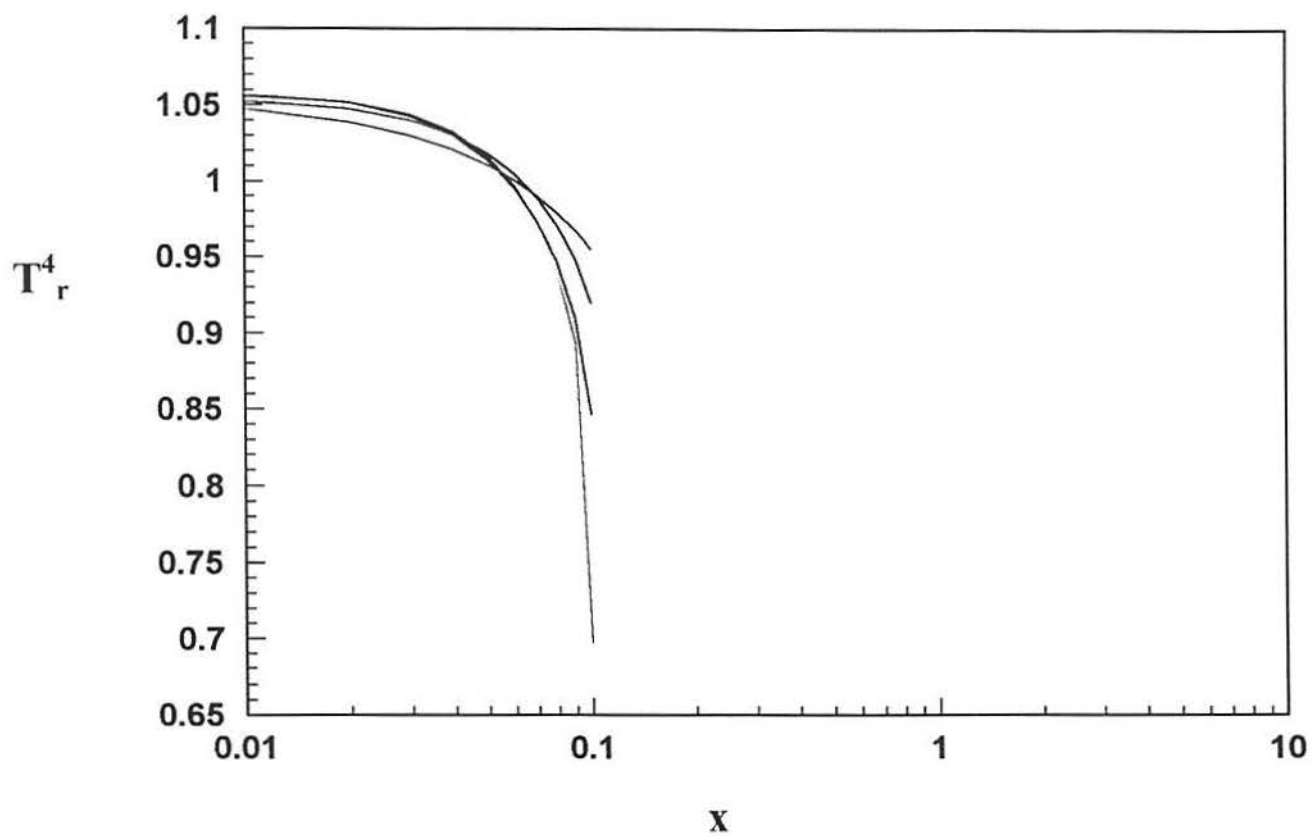


Figura 4.8: Temperatura de radiação para o $t = 0,1$ (Vermelho $M=20$, Azul $M=40$, Rosa $M=60$, Verde $M=80$, Amarela $M=100$).

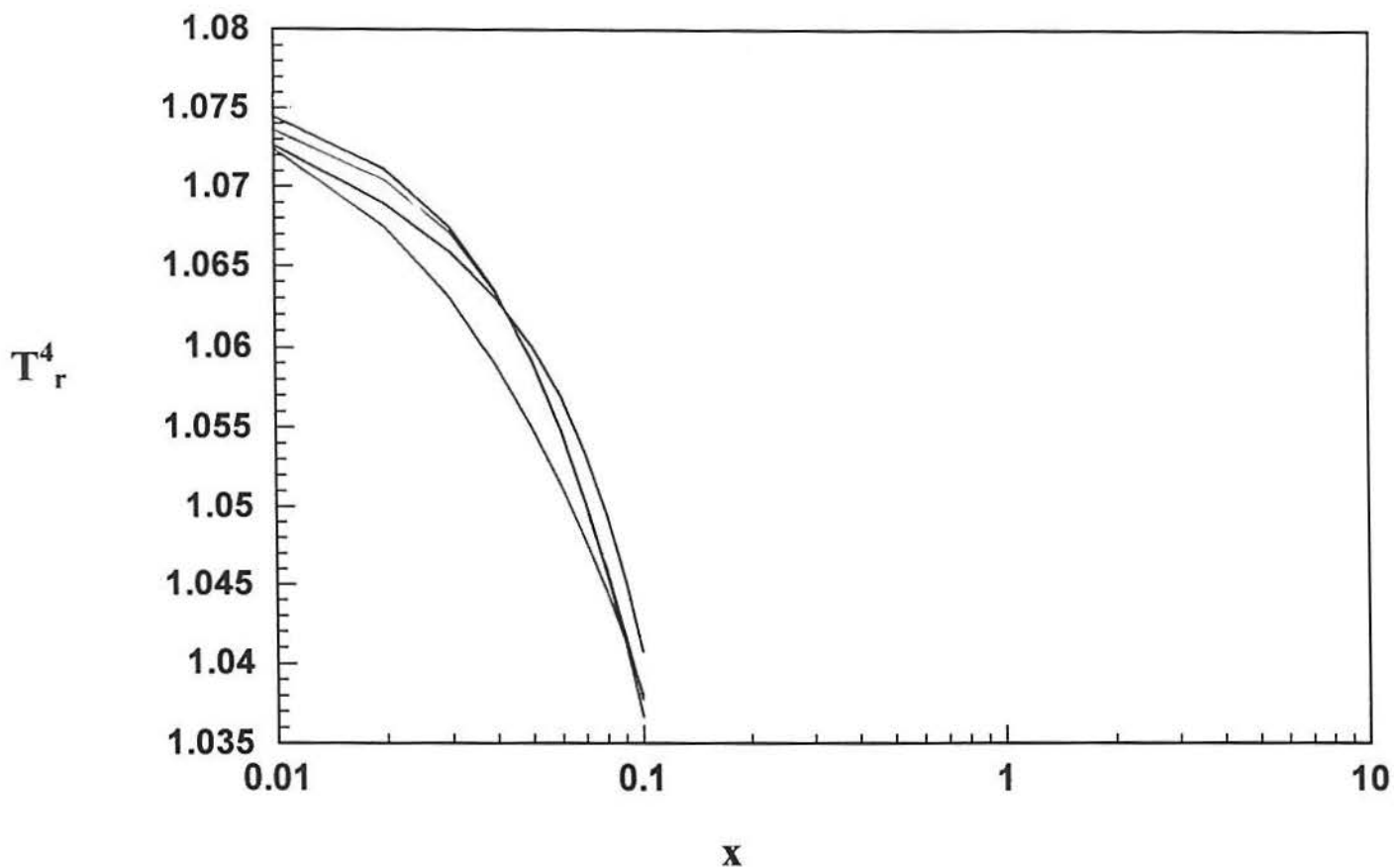


Figura 4.9: Temperatura de radiação para o $t=1$ (Vermelho $M=20$, Azul $M=40$, Rosa $M=60$, Verde $M=80$, Amarela $M=100$).

A seguir apresenta-se nas figuras 4.10 até 4.16 a influência do número de pontos utilizados na regra do trapézio para o cálculo de fonte. Para tal, considera-se o valor de M convergido nos casos analisados e toma-se 10, 20 e 30 pontos na regra do trapézio.

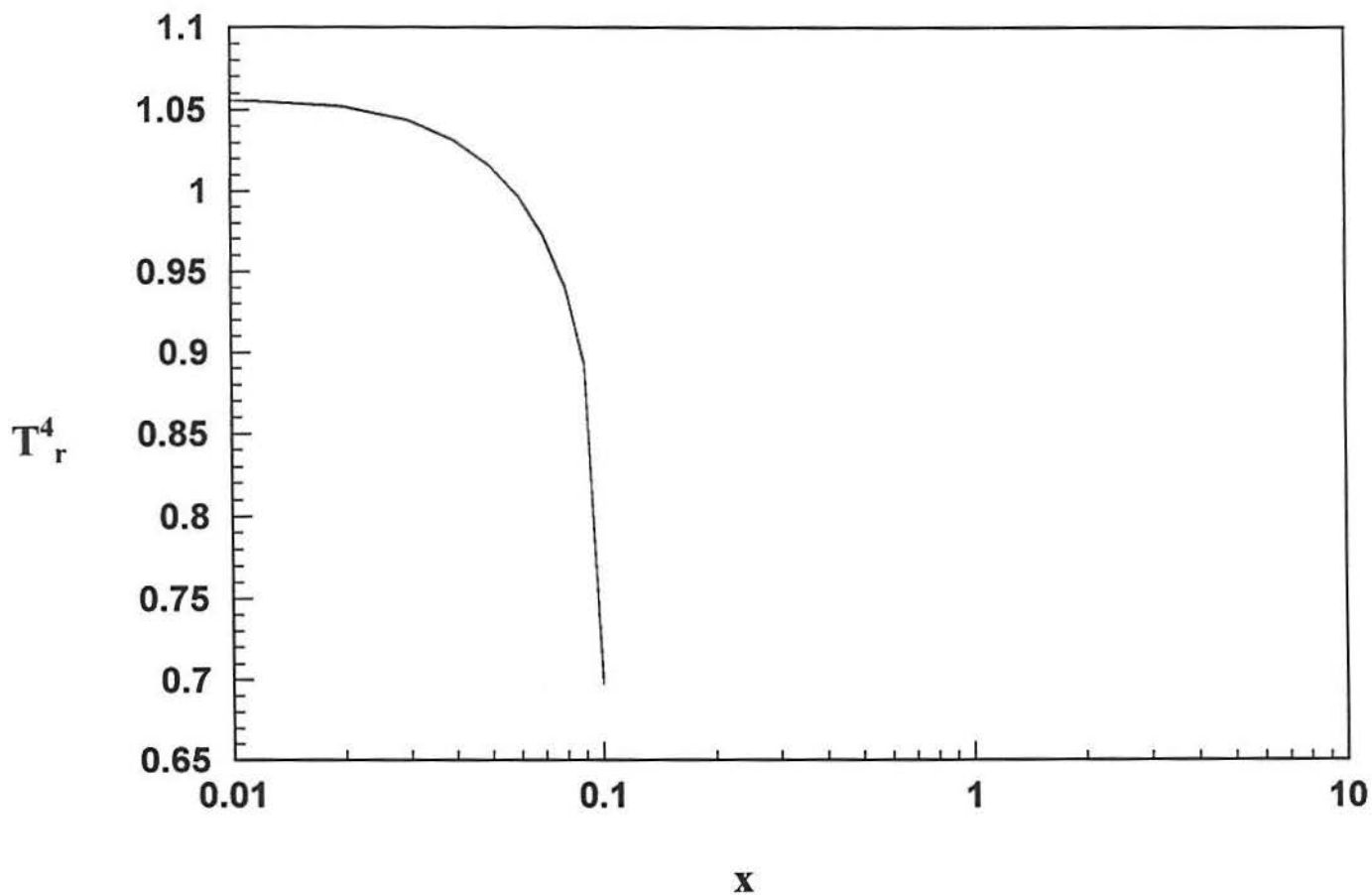


Figura 4.10: Temperatura de radiação para o $t=0,1$, $M=100$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

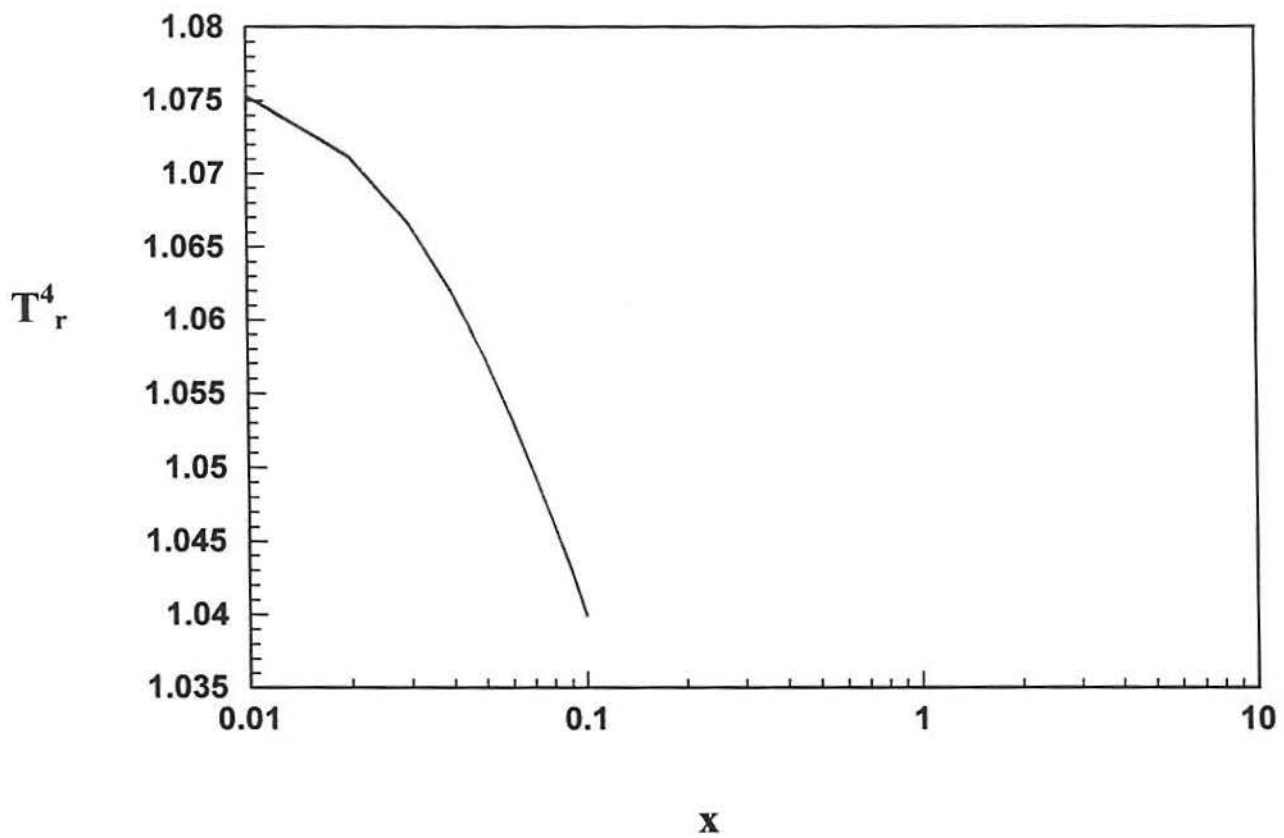


Figura 4.11: Temperatura de radiação para o $t=0,5$, $M=56$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

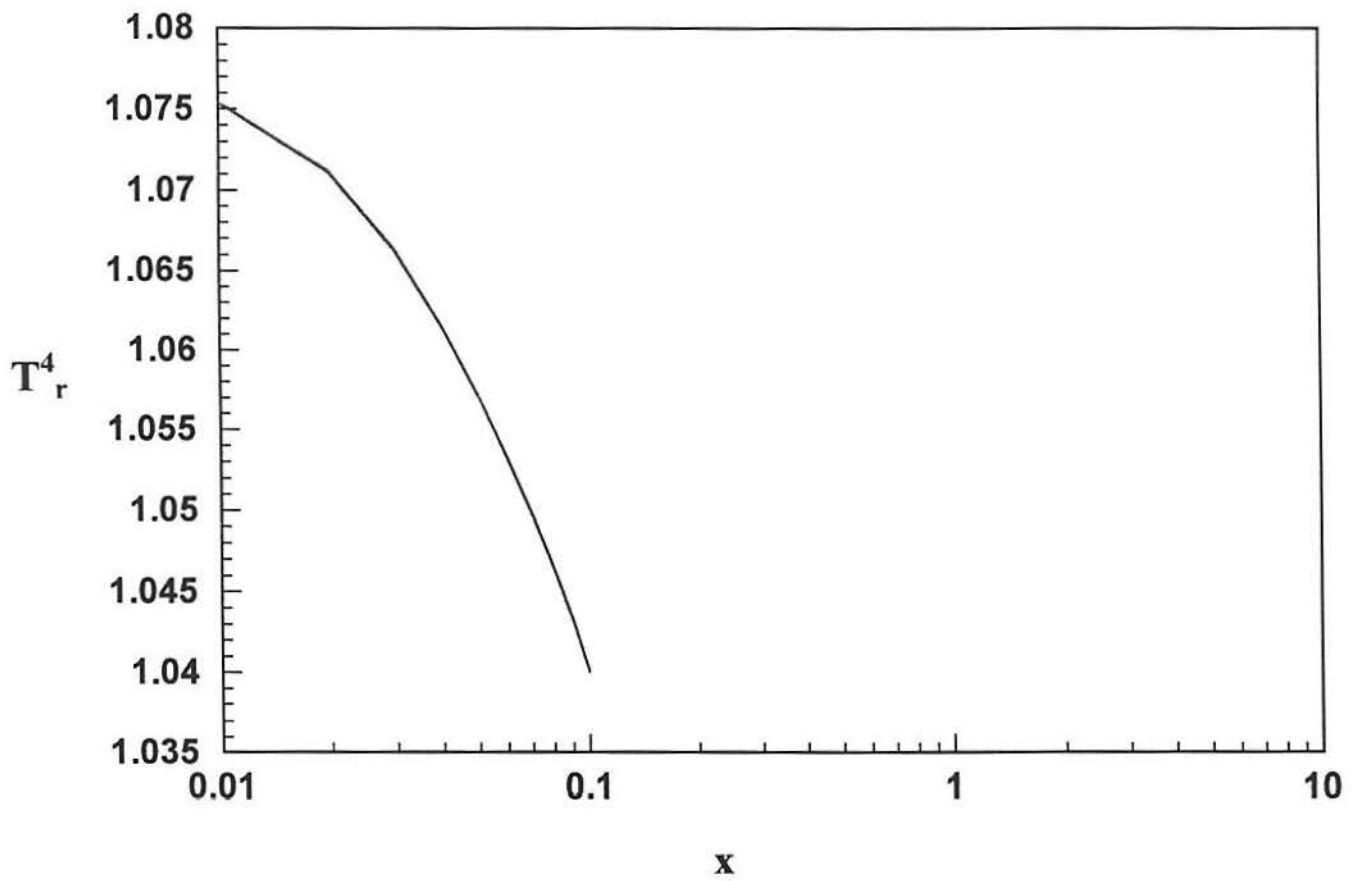


Figura 4.12: Temperatura de radiação para o $t = 1$, $M = 85$ (Vermelho $P = 10$, Verde $P = 20$, Azul $P = 30$).

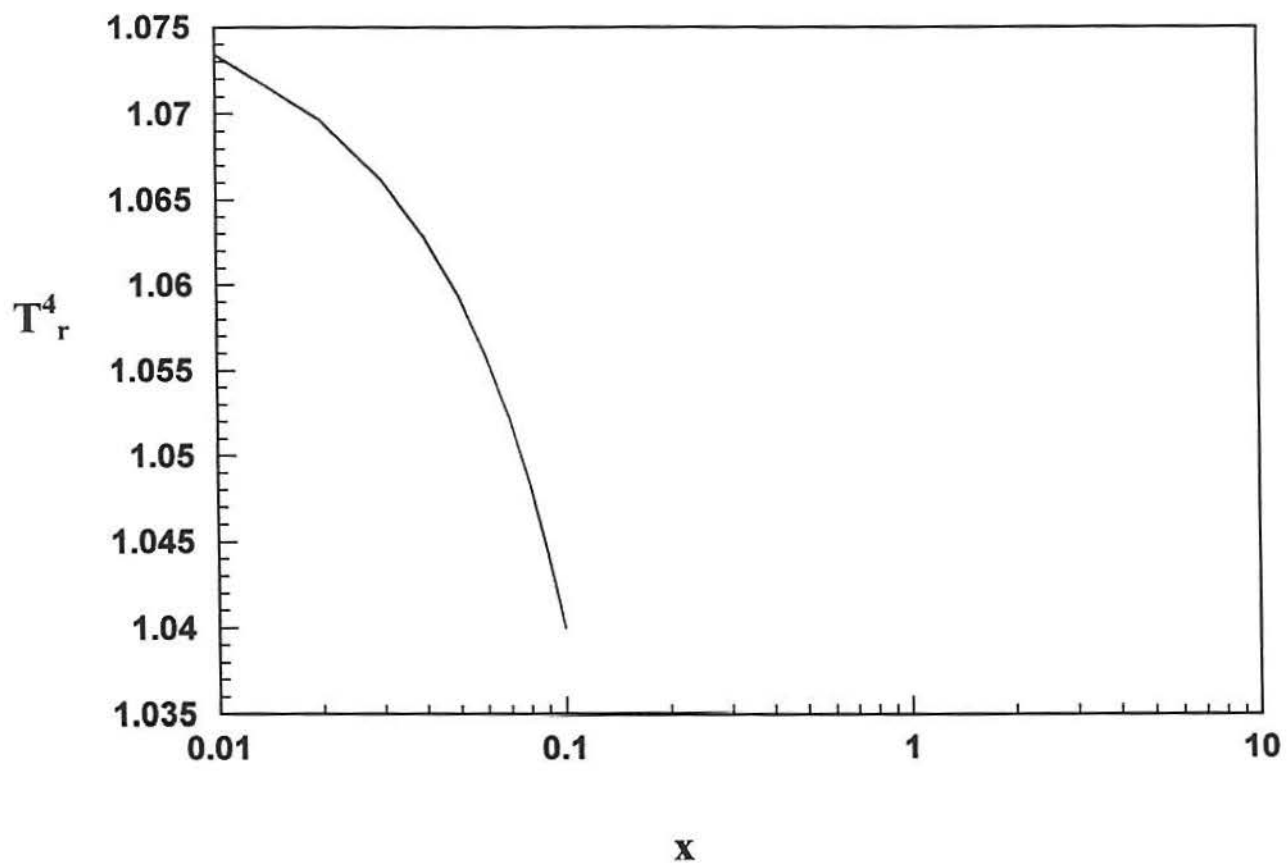


Figura 4.13: Temperatura de radiação para o $t=2$, $M=62$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

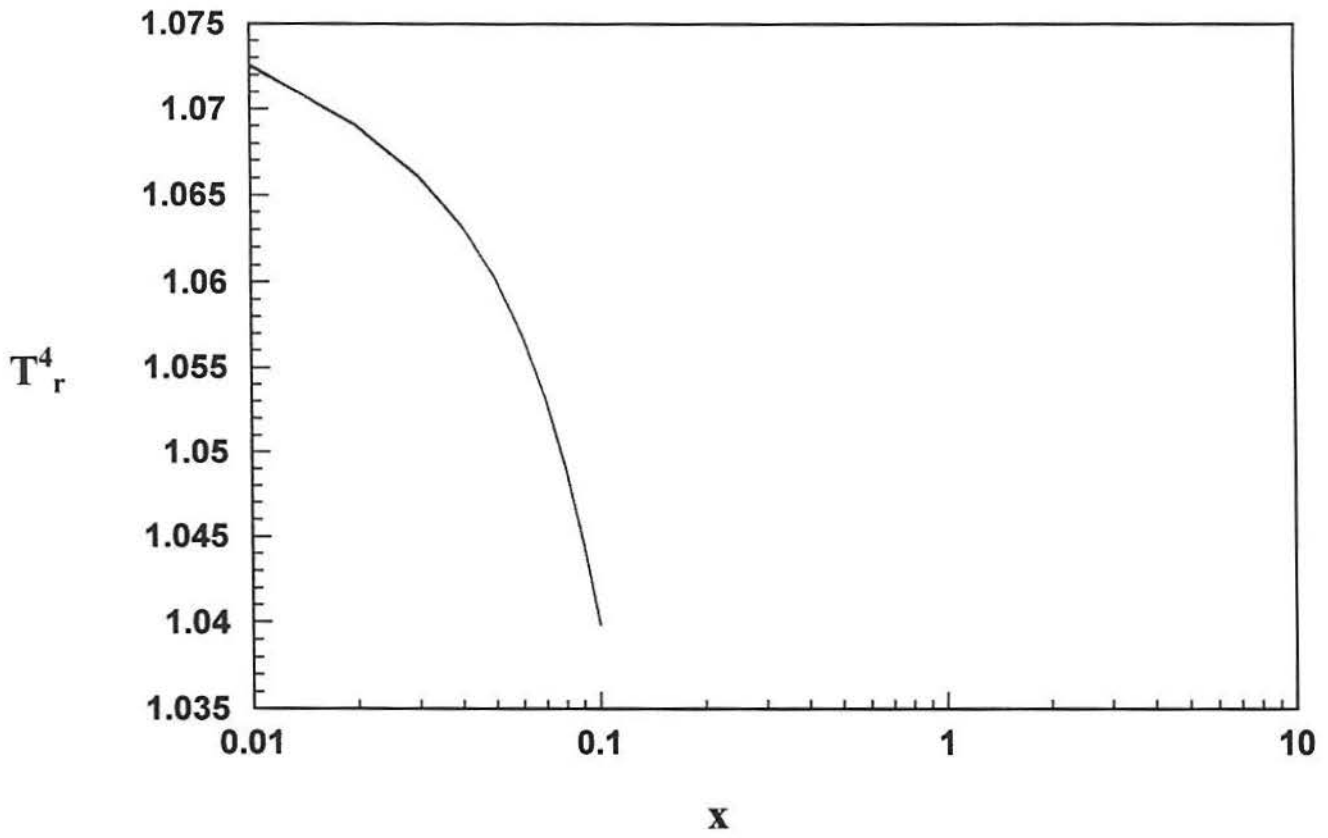


Figura 4.14: Temperatura de radiação para o $t=3$, $M=66$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

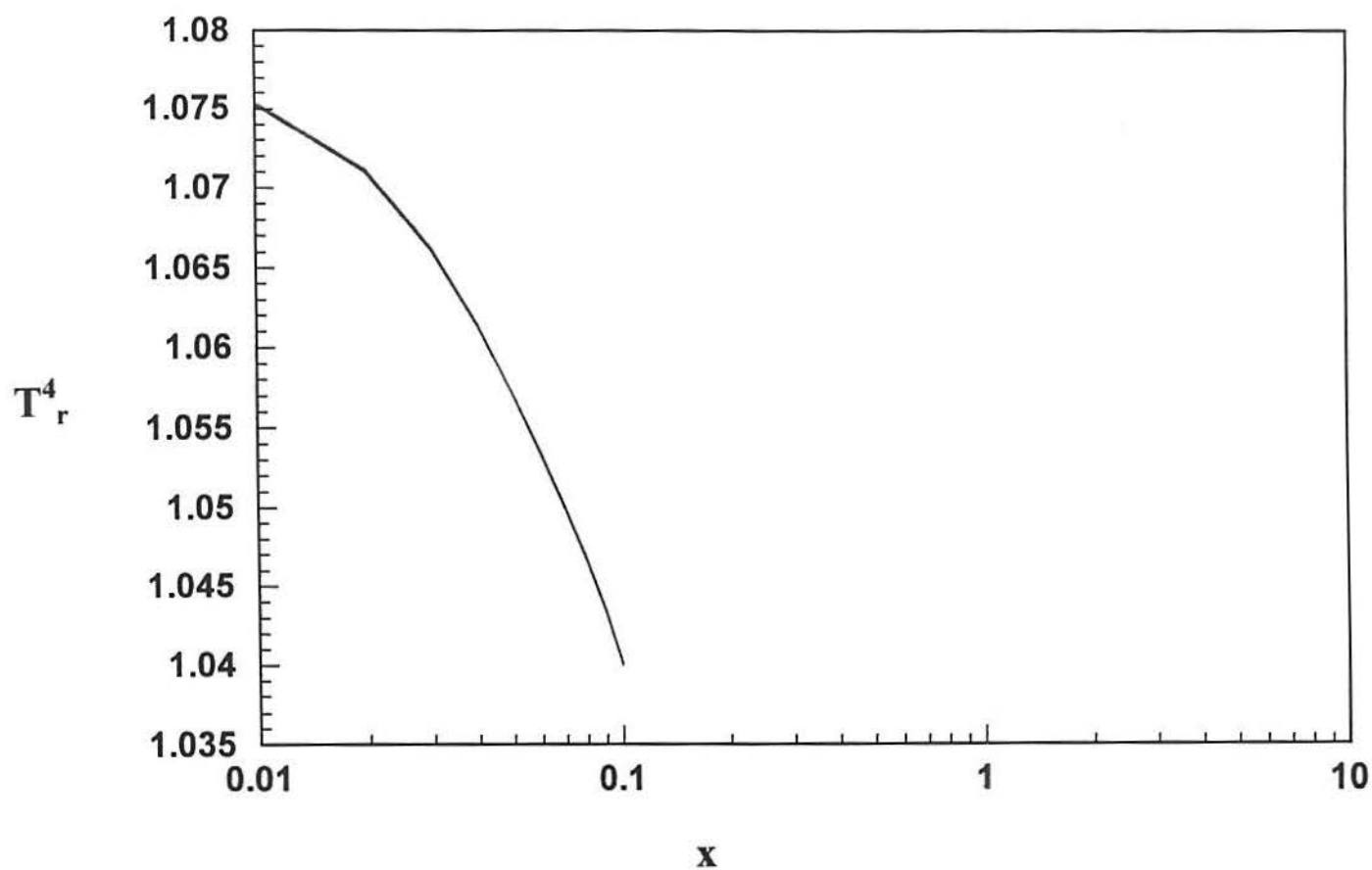


Figura 4.15: Temperatura de radiação para o $t=4$, $M=89$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

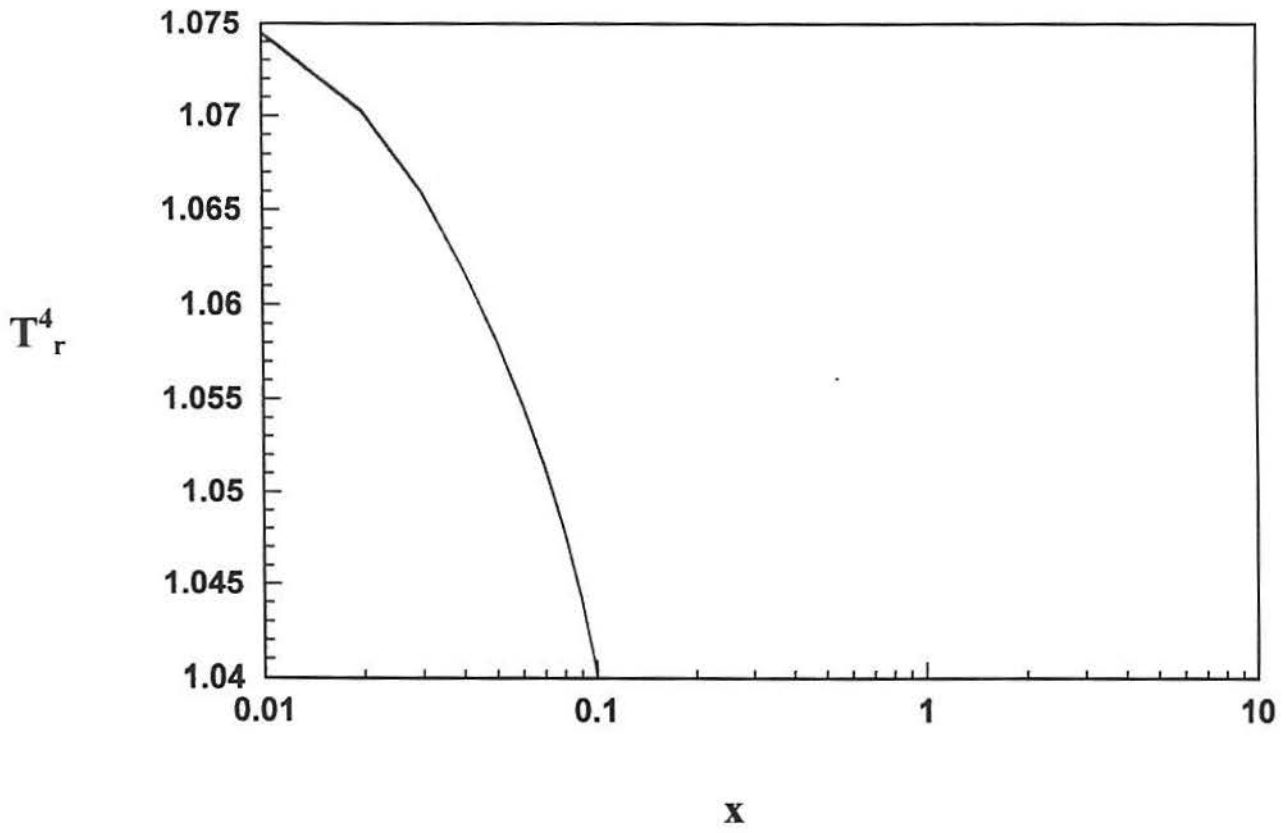


Figura 4.16: Temperatura de radiação para o $t=5$, $M=87$ (Vermelho $P=10$, Verde $P=20$, Azul $P=30$).

Analisando-se os resultados mostrados nos gráficos das figuras 4.1 à 4.7, observa-se a convergência numérica da solução proposta, uma vez que, as curvas encontradas para três valores próximos de M em todas as figuras, apresentam uma boa concordância ou coincidência.

5 CONCLUSÕES

Tendo em vista que a meta desse trabalho constitui-se no estudo da viabilidade da aplicação combinada dos métodos espectral e LTS_N na solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo em uma placa plana, considerando-se espalhamento isotrópico, e não a precisão dos resultados, acredita-se que o objetivo foi alcançado.

Essa afirmativa, justifica-se pelos seguintes argumentos: inicialmente provou-se a convergência do método proposto para solução exata [33], e mostrou-se que a curva dos resultados obtidos por este método para $N=2$ apresentam a mesma forma das curvas de Szilard e Pomaring [43] para $N=16$.

Concluindo, observa-se que, obviamente, a precisão dos resultados pode ser melhorada aumentando-se N , a ordem de quadratura de Gauss, e M , a ordem de truncamento da aproximação em polinômios de Laguerre, o que é confirmado pela convergência da solução proposta.

Como trabalho futuro sugere-se a implementação do algoritmo de diagonalização da matriz simbólica LTS_N bem como seu *scaling* na solução proposta, para permitir a aplicação deste método à placas de grande espessura e problemas de transferência radiativa fortemente anisotópico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C. et al. **LAPACK, User's Guide**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 1992.
- [2] ANTIMIROV, M, Ya; KOLYSHKIN, A. A.; VAILLANCOURT, Remi. **Applied Integral Transforms**, CRM Monograph Series, vol. 2, American Mathematical Society, 1993.
- [3] BARICHELLO, L.B. **Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas Unidimensional**. Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1992.
- [4] BRANCHER, J. D.; CARDONA, A. V.; VILHENA, M. T. A Recursive Method to Invert the LTS_N Matrix. **Progress in Nuclear Energy**, Great Britain, v.33, n. 4, p. 393-401, 1998.
- [5] BRANCHER, J. D., SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T. The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Great Britain. In press.
- [6] BRYCHKOV, Y. A.; GLAERKE, A. P.; PRUDNIKOV, A. P.; TUAN, V. K. **Multidimensional Integral Transformations**. Gordon and Breach Science Publishers, 1992.
- [7] CANUTO, Claudio. Topics in Spectral Methods for Hyperbolic Equations. In: **Partial Differential Equations of Hyperbolic Type and Applications**. Giuseppe Geymonat, p. 1-32, World Scientific, 1987.
- [8] CASE, K. M.; ZWEIFEL, P.F. **Linear Transport Theory**. Reading: Addison-Wesley, Massachusetts 1967.

- [9] CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**, London: Oxford University Press, 1950
- [10] COTTA, R. M. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [11] COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms Symbolic Computation**. Wiley-Interscience, Europe, 1997.
- [12] COTTA, R. M. **The Integral Transforms Method in Thermal and Fluids Science and Engineering**, Begel House, New York, 1998.
- [13] DAVIS, P. J.; RABINOWITZ, P. **Methods of Numerical Integration**, London: Academic Press, 1975.
- [14] DEBNATH, L. **Integral Transforms and their Applications**. CRC Press, 1995.
- [15] DUDERSTADT, J; MARTIN, W,R. **Transport Theory**. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1975.
- [16] DUFFY, D, G. **Transform Methods for Solving Partial Differential Equations**, CRC Press, 1994.
- [17] GABEL, Robert A.; ROBERTS, Richard A.; **Signals and Linear Systems**. New York, John Wiley & Sons, 1987.
- [18] GANAPOL, B. D.. Solution of the One-Group Time-Dependent Neutron Transport Equation in a Infinite Medium by Polynomial reconstruction. **Nuclear Science and Engineering**, 92, p. 272-279, 1986.
- [19] GEYMONAT, G. **Partial Differential Equations of Hiperbolic Type and Applications**. World Scientific Publishing Co, 1987

- [20] GONÇALVES, G. A.; SEGATTO, C.F.; VILHENA, M. T., The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**. Great Britain, submetido
- [21] GOTTLIEB, David; ORSZAG, Steven A. **Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1977.
- [22] GRINBERG, G. A. **Selected Problems of the Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Phenomena**. Academy of Sciences of the USSR, Moscow-Leningrado, 1948.
- [23] HSU, Hwei P. **Theory and Problems of Signals and Systems**. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Inc., 1995.
- [24] LARSEN, E. W., POMRANING, G. C., The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry. **Nuclear Science and Engineering**: 109, p. 49-75, 1991.
- [25] LEVERMORE, C. D.; POMRANING, G. C., A Flux-Limited Diffusion Theory. **The Astrophysical Journal**, USA, n. 248, p. 321-334, 1981.
- [26] MIKHAILOV, M. D.; OZISIK, M. N. **Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**. John Wiley, New York, 1984.
- [27] OLIVEIRA, J. P., Vilhena, M. T., CARDONA, A. V. **Solution of Time Dependent Transport Equation by Spectral and LTS_N Methods**, submetido para publicação.
- [28] OLIVEIRA, J. P. **Solução da Equação de Transporte Dependente do Tempo numa Placa Plana pela Combinação do Método Espectral e da Transformada de Laplace**. Tese de Doutorado, em preparação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

- [29] PAZOS, R. P. **Equação de Transporte de Neutrons: Enfoque de Semi-Grupos C_0** . Dissertação de Mestrado - Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Univerdade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1995.
- [30] PAZOS, R. P.; VILHENA, M. T. Convergence of the LTS_N Method: Approach of C_0 SemiGroups. **Progress in Nuclear Energy**, Great Britain, n.1, v. 34, p. 77-86, 1998.
- [31] PAZOS, R. P.; VILHENA, M. T. Convergence in Transport Theory. **Applied Numerical Mathematics**. In press.
- [32] PAZOS, R. P. **Estudo da Convergência de Aproximações da Equação de Transporte Multidimensional em Geometria Cartesiana**. Tese de Doutorado em preparação. Univerdade Federal do Rio Grande do Sul.
- [33] PAZOS, R. P.; VILHENA, M. T.; RENZ, S. P. Convergence of the Spectral Solution of the Time-Dependente Radiative Transfer Equation in Slab, em preparação.
- [34] POMRANING, G. C. **The Equation of Radiation Hydrodynamics**. Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [35] POMRANING, G. C., Initial and Boundary Conditions for Flux-Limited Diffusion Theory. **Journal of Computational Physics**, n.75 p.73-85, 1988.
- [36] SANCHEZ, R.; POMRANING, G. C., A Family of Flux-Limited Diffusion Theories. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Great Britain, v. 45, n. 6 p. 313-337, 1991.
- [37] SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T. Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem without Azimutal Symmetry. In: **Annals of Nuclear Energy**, Great Britain, n.11, v. 21, p. 701-710, 1994

- [38] SEGATTO, C. F. **Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo.** Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.
- [39] SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T.; GOMES, M. G., The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab with High Degree of Quadrature. In: **Annals of Nuclear Energy**, Great Britain. In press.
- [40] SNEDDON, Ian N.; **The Use of Integral Transform**, McGraw-Hill, 1972.
- [41] SPIGEL, M. R. **Mathematical Handbook of Formulas and Tables.** McGraw-Hill, New York, 1968.
- [42] STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications.** New York, Academic Press, 1976
- [43] SZILARD, R. H.; POMRANING, G. C. Numerical Transport and Diffusion Methods and Radiative Transfer. **Nuclear Science and Engineering:** 112, p. 256-269, 1992.
- [44] TITCHMARSH, E. C. **Introduction to the Theory of Fourier Integrals.** Oxford University Press, New York, 1948.
- [45] VILHENA, M.T.; BARICHELLO, L. B. A General Approach to One-Group One Dimensional Transport Equation. **Kerntechnik**, Germany, v. 58, n. 3, p. 182-184, 1993.
- [46] VILHENA, M.T.; SEGATTO, C. F.; BARICHELLO, L. B. A Particular Solution for the S_N Radiative Transfer Problems. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Great Britain, n. 4, v. 53, p. 467-469, 1995.
- [47] VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.; ZABADAL, I. R.; SEGATTO, C. F.; CARDONA, A. V. General Solution of One-Dimensional Approximations

to the Transport Equation. **Progress in Nuclear Energy**, Great Britain,
v. 33, n. 1/2, p. 99-115, 1998.

