

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DA EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV

por
LEONARDO PRANGE BONORINO

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática
como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre.

Orientador
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Porto Alegre, Abril de 1993.

Dedico este trabalho a Rosângela.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke pelo estímulo dado à minha curiosidade científica e à minha formação acadêmica.

Gostaria também de agradecer à minha família, aos meus colegas, em particular ao Rogério, e aos datilógrafos Fábio e Valéria pelo apoio dado à conclusão do meu mestrado.

Por fim, agradeço a Rosângela pela compreensão e carinho.

Resumo:

Neste trabalho estudamos uma formulação variacional para a equação de Grad-Shafranov em um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Primeiro estabelecemos a relação entre a formulação variacional e a equação original. A seguir, conforme o trabalho de P. Laurence e W. Stredulinsky, provamos que o funcional desta formulação possui um mínimo (supostamente a solução do problema original) e que este possui algumas propriedades de regularidade. Estudamos então o problema quando o domínio Ω for convexo. Para este caso, apresentamos uma espécie de discretização devido aos mesmos autores. Estabelecemos ainda propriedades geométricas importantes para a solução do problema discretizado.

Abstract:

In this work we study a variational formulation to the Grad-Shafranov equation in an open and bounded set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. First we establish a relationship between the variational formulation and the original equation. Then, according to P. Laurence and W. Stredulinsky we prove that the functional of this formulation attains a minimum (supposedly the solution of the original problem) and this minimum has some characteristics of regularity. For the case of Ω convex, we introduce a kind of discretisation due to the above mentioned authors. We finally establish some important geometric properties of the solution of the discretised problem.

ÍNDICE:

<u>Introdução:</u>	1
<u>Capítulo 0:</u> Preliminares	5
<u>Capítulo 1:</u> Um Problema Variacional e Estimativas para os seus Minimizadores e Pontos Críticos	18
<u>Capítulo 2:</u> O Problema Variacional para Funções com Conjuntos de Nível Convexos	47
<u>Capítulo 3:</u> Problema de Fronteiras Livres Aproximado	58
<u>Capítulo 4:</u> Condições de Fronteiras Livres e Aplicações	68
<u>Apêndice A:</u>	80
<u>Apêndice B:</u>	84
<u>Apêndice C:</u>	91
<u>Apêndice D:</u>	105
<u>Referências:</u>	115

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos a equação do plasma. O problema tem origem na fusão do hidrogênio. Este processo consiste na união de dois isótopos de hidrogênio, o deutério e o trítio. Por isto o nome fusão. Para que ocorra esta união, a força de repulsão causada pelos prótons, pois cargas iguais repelem-se, deve ser vencida. Isto pode ocorrer quando a energia cinética dos átomos é muito alta. Em outras palavras quando o meio possui temperatura muito elevada.

Este processo é de enorme interesse, pois nele há grande liberação de energia. Até o momento o homem só tem conseguido a fusão de forma bem sucedida nas explosões de bombas termonucleares. A dificuldade reside no fato de ser necessário elevar a temperatura do hidrogênio a milhões de graus Celsius. Não existe recipiente no mundo que não se derreta ao entrar em contato com uma substância de temperatura tão elevada (denominada plasma). A estratégia, então, é confiná-lo em "garrafas eletromagnéticas". Neste ponto podemos levantar duas questões:

- 1) Qual é o formato deste confinamento eletromagnético?
- 2) Como se comportaria o plasma neste confinamento?

Por isto veremos algumas equações relacionadas com o problema de compressão adiabática e difusão resistiva do plasma.

Muitos modelos matemáticos para este processo tem sido estudados. Eles basicamente envolvem equações não lineares elípticas com condições de fronteiras livres. Outros modelos, no entanto, tem sido considerados por J. Mossino [M]

[M.T.], R. Temam [T] e G. Vigfusson [V.1] [V.2]. Porém, todas as equações do plasma provém da equação de Grad-Shafranov. O caso de interesse físico é aquele em que a região de confinamento é um toróide com simetria. Porém, ao invés de preocupar-nos com o problema no toróide, estudaremos a questão nas suas secções transversais. Assim, a equação de Grad-Shafranov que nos interessa é aquela cujo domínio é bidimensional, que é dada por

$$\Delta\psi = -p'(\psi) - \frac{1}{2} (f^2(\psi))', \quad (1)$$

onde p e f são, respectivamente, as funções pressão e corrente poloidal e o símbolo $(')$ denota a derivada de p e f em relação as suas variáveis, no caso, ψ .

Para o modelo adiabático podemos dizer que

$$p(\psi) = \mu(\psi) \left(\frac{d\psi}{dV} \right)^\gamma \quad \text{e} \quad f(\psi) = \nu(\psi) \cdot \frac{d\psi}{dV}, \quad (2)$$

onde μ e ν são funções especiais e V indica volume. A derivação de ψ em relação a V pode estar parecendo estranha. Afinal, o que significa ela? Na verdade, é um abuso de linguagem que pode ser formalmente corrigido por

$$\frac{d\psi^*}{dv} (V_\psi(\psi)).$$

Substituindo (2) na equação (1) obtemos

$$\Delta\psi = -\frac{d}{d\psi} \left(\mu(\psi) \cdot \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^\gamma \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} \left(\nu(\psi) \cdot \frac{d\psi^*}{dv} \right)^2. \quad (3)$$

Concluiremos posteriormente (ver Propriedade (12)) que, sob certas condições, $\psi^*(V_\psi(t)) = (V'_\psi(t))^{-1}$ q.s.. Logo, tomando $t = \psi$, temos informalmente que

$$\frac{d}{d\psi} \cdot \frac{d\psi^*}{dv} = \frac{d}{dv} \cdot \frac{d\psi^*}{dv} \cdot \frac{dv}{d\psi} = \frac{d^2\psi^*}{dv^2} \cdot \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^{-1}.$$

A partir disto e de (3), concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & -\frac{d\mu}{d\psi} \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^\gamma - \gamma\mu \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^{\gamma-1} \cdot \frac{d^2\psi^*}{dv^2} \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^{-1} - \\ & - \left(\nu(\psi) \cdot \frac{d\psi^*}{dv} \right) \cdot \left[\frac{d\nu}{d\psi} \cdot \frac{d\psi^*}{dv} + \nu(\psi) \frac{d^2\psi^*}{dv^2} \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

No caso bidimensional, $\gamma = 2$. Se, além disso, tomarmos μ e ν tais que $\mu(\psi) = 1/2$ e $\nu(\psi) = 0$, temos

$$\Delta \psi = -\frac{d^2 \psi^*}{dv^2} (V_\psi(\psi)). \quad (4)$$

Esta equação foi primeiramente estudada por R. Temam. O autor também formulou o problema em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e impôs a condição $\psi = 0$ em $\partial\Omega$. Neste caso, o mínimo de ψ será zero. Pela Propriedade (8),

$$\psi^*(0) = 0. \quad (5)$$

Agora, para quaisquer constantes λ e c vale, pela Propriedade (13),

$$(\lambda\psi + c)^* = \lambda\psi^* + c.$$

Logo se ψ satisfaz (4), então o mesmo vale para $\lambda\psi + c$. Assim, podemos supor s.p.g que

$$\psi^*(|\Omega|) = 1. \quad (6)$$

Portanto, o nosso problema é resolver (4) com as condições (5) e (6).

O objetivo principal do presente trabalho é o de expor a abordagem deste problema feita por P. Laurence e E. Stredulinsky, [L.S.]. Ao invés de resolver diretamente o problema (4), (5) e (6), a idéia básica é estabelecer primeiro uma formulação variacional para o mesmo. Isto será feito no capítulo 1. No mesmo também será demonstrada a existência de um mínimo para o funcional proveniente da formulação variacional, e algumas estimativas para as suas derivadas. Alguns passos, por serem mais complexos, poderão ser encontrados nos apêndices.

Devido a complexidade do operador de rearranjo crescente, existem muitas dúvidas quanto às propriedades geométricas da solução do problema variacional bem como quanto a sua regularidade. Por isto, os capítulos 2,3 e 4 tratam de problemas aproximados com o intuito de, num futuro próximo, permitir que mais conhecimento seja obtido a respeito da solução do problema.

No capítulo 2, sob a hipótese do domínio ser convexo, concluiremos que o problema também tem solução sobre um espaço de funções cujos conjuntos de nível são convexos. O ideal seria demonstrar que uma solução deste subconjunto também fosse uma solução do problema original. Esta, porém, é uma importante questão em aberto. Alguns teoremas desse capítulo foram inicialmente provados em [L.S.] para o caso bidimensional. No entanto, apresentaremos demonstrações novas, válidas em qualquer dimensão finita.

No capítulo 3 estudaremos uma espécie de discretização do problema (4), chamada problema de n fronteiras livres. A vantagem em seu estudo é a existência de soluções com boas propriedades de regularidade. O objetivo seria fazer com que as soluções destes problemas tendessem a solução de (4).

Finalmente, no capítulo 4, será demonstrado que a solução do problema de n fronteiras livres é superharmônica e tem o gradiente limitado. Como os limites fracos destas soluções também são superharmônicos, há uma forte suspeita de que estas soluções devam, de fato, convergir fracamente à solução de (4).

CAPÍTULO 0 PRELIMINARES

O propósito deste capítulo é dar algumas definições importantes, assim como, o significado de algumas notações. Além disto, serão dados alguns esclarecimentos a respeito da fórmula da coárea. Posteriormente enunciaremos algumas propriedades de V_ψ e ψ^* , que serão definidas a seguir, e abordaremos um resultado a respeito de curvas de nível de funções harmônicas.

Inicialmente definiremos, a partir de uma função mensurável ψ definida em um $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, a função ψ^* a qual chamaremos de rearranjo crescente de ψ . Seja

$$V_\psi(t) = |\{x \in \Omega : \psi(x) < t\}|,$$

onde $|E|$ denota medida de Lebesgue de E . Agora defina

$$\psi^*(v) = \inf \{s : V_\psi(s) \geq v\}.$$

Note que ψ^* é uma espécie de inversa de V_ψ , sendo a inversa de V_ψ quando esta for injetiva. Observe também que ψ^* está bem definida em $(0, |\Omega|]$ ($\psi^*(0)$ será definido posteriormente).

Quanto à notação, adotaremos que:

1) $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), \text{ para } j = 1, \dots, n \right\}$, onde $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é a derivada parcial de f em relação a x_j no sentido das distribuições. Neste

espaço (de Sobolev) podemos definir a norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{\frac{1}{p}} ;$$

- 2) $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia da norma de $W^{1,p}(\Omega)$;
- 3) $H^\alpha(E)$ é a medida de Hausdorff α -dimensional do conjunto E ;
- e 4) O símbolo $|E|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto E .

Por uma questão de praticidade, denotaremos, por exemplo, o conjunto $\{x \in \Omega : \psi(x) \geq t\}$ por $\{\psi \geq t\}$.

Ao longo deste trabalho será de extrema importância o uso da fórmula da coárea dada por

$$\int_{\Omega} g \|\nabla f\| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\}} g dH^{n-1} dt.$$

Como estamos interessados na sua validade para $f \in W^{1,2}(\Omega)$, precisamos escolher um representante especial da classe de funções equivalentes à f para que o lado direito da igualdade faça sentido. Assim, dado $f \in W^{1,2}(\Omega)$, consideramos as médias $f_r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de f definidas por

$$f_r(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy,$$

onde $B_r(x) = \{y : |x-y| < r\}$. Seja $\bar{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x)$. A função \bar{f} está definida exceto num conjunto de capacidade 0 (ver [Z], Teorema 3.1.4, pág. 115; e [Z], Teorema 2.6.16, pág. 75). Além disto, $\bar{f} = f$ q.s.. Assim, quando tivermos $f \in W^{1,2}(\Omega)$, estará subentendido que o elemento representante da classe de equivalência de f é \bar{f} . A demonstração da fórmula da coárea é dada no Apêndice A para $f \in C^n(\Omega)$, no entanto, esta fórmula vale para as funções de variação limitada ($B \cdot V(\Omega : \mathbb{R}) \supset W^{1,2}(\Omega)$) cuja demonstração pode ser encontrada em [G], Teorema 1.23, pág. 20.

Agora, para qualquer função mensurável $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, daremos algumas propriedades de V_u e u^* que serão muito usadas posteriormente.

P(1): Se $a \in \mathbb{R}$ é tq $V_u(a) < v$ para $v \in (0, |\Omega|]$, então $u^*(v) = |\{s \geq a : V_u(s) < v\}| + a$.

DEM: Seja $v \in (0, |\Omega|]$. Como $V_u(t)$ é crescente, o conjunto $\{s \geq a : V_u(s) < v\}$ é um intervalo que inicia em a e cujo supremo é igual ao $\inf \{s : V_u(s) \geq v\}$. Assim, $|\{s \geq a : V_u(s) < v\}| = \inf \{s : V_u(s) \geq v\} - a = u^*(v) - a$.

OBS.: Se u é limitado inferiormente, podemos tomar $a = \inf \text{ess } u$ obtendo $u^*(v) = |\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) < v\}| + u^*(0)$ para $v \in [0, |\Omega|]$. Para $v = 0$, também vale a igualdade, pois $\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) < 0\} = \emptyset$. \diamond

P(2): u^* é contínua pela esquerda.

DEM: Seja $v_0 \in (0, |\Omega|]$. Usando P(1) e tomando um a especial, temos $\lim_{v \rightarrow v_0^-} u^*(v) = \lim_{v \rightarrow v_0^-} |\{s \geq a : V_u(s) < v\}| + a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{k=1}^n \{s \geq a : V_u(s) < v_k\} \right| + a$, onde $v_k \uparrow v_0$. Disto e de um resultado elementar de medida,

$$\lim_{v \rightarrow v_0^-} u^*(v) = |\{s \geq a : V_u(s) < v_0\}| + a = u^*(v_0). \quad \diamond$$

P(3): Para $v_0 \in (0, |\Omega|)$,

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) = u^*(v_0) + |\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}|.$$

DEM: Seja $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Usando P(1) e tomando a tq $V_u(a) < v_0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) &= \lim_{v \rightarrow v_0^+} |\{s \geq a : V_u(s) < v\}| + a \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{k=1}^n \{s \geq a : V_u(s) < v_k\} \right| + a, \end{aligned}$$

onde $v_k \downarrow v_0$. Disto e de um resultado elementar de medida,

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) = |\{s \geq a : V_u(s) \leq v_0\}| + a = u^*(v_0) + |\{s \geq a : V_u(s) = v_0\}|.$$

Note que $\{s \geq a : V_u(s) = v_0\} = \{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}$, pois se $s_0 \in \{s \geq a : V_u(s) = v_0\}$, então $V_u(s_0) = v_0 > 0 = V_u(\inf \text{ess } u)$ e, assim, $s_0 > \inf \text{ess } u$. Se $s_0 \in \{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}$, então $V_u(s_0) = v_0 > V_u(a)$ e, portanto, $s_0 > a$ demonstrando a propriedade. Se u for limitada inferiormente na norma $L^\infty(\Omega)$, então o resultado valerá para $v=0$. Basta tomar $a = \inf \text{ess } u$ e uma seqüência $v_k \rightarrow 0^+$. Neste caso, podemos concluir que $\lim_{v \rightarrow 0^+} u^*(v) = |\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = 0\}| + u^*(0)$. \diamond

P(4): $V_u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua pela esquerda.

DEM: De fato, seja $t \in (0, +\infty)$. Seja (t_n) seqüência crescente tq $t_n \uparrow t$. Assim, $V_u(t) = |\{x : u(x) < t\}| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : u(x) < t_n\} \right|$ que, por uma propriedade elementar, é igual a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \bigcup_{k=1}^n \{x : u(x) < t_n\} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\{x : u(x) < t_n\}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_u(t_n). \quad \diamond$$

P(5): $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) = V_u(t_0) + |\{x : u(x) = t_0\}|$ para $t_0 \in [0, +\infty)$.

DEM: De fato, seja (t_n) seqüência decrescente tq $t_n \downarrow t_0$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{t_n \rightarrow t_0^+} V_u(t_n) &= \lim_{t_n \rightarrow t_0^+} |\{x : u(x) < t_n\}| = \left| \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : u(x) < t_n\} \right| \\ &= |\{x : u(x) \leq t_0\}| = |\{x : u(x) < t_0\}| + |\{x : u(x) = t_0\}|. \quad \diamond \end{aligned}$$

P(6): Se $v \in [0, |\Omega|]$, então $V_u(u^*(v)) \leq v$.

DEM: Seja $v \in [0, |\Omega|]$. Sabemos que $u^*(v) = \inf \{s : V_u(s) \geq v\}$. Seja (t_n) seqüência crescente tq $t_n \uparrow u^*(v)$. Pela definição de $u^*(v)$, conclui-se que $V_u(t_n) <$

$v \forall n \in \mathbb{N}$ e, assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_u(t_n) \leq v$. Portanto, por P(4),

$$V_u(u^*(v)) = V_u(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n) \leq v. \quad \diamond$$

P(7): Se $\mathcal{E} > 0$ e $v \in [0, |\Omega|]$, então $V_u(u^*(v) + \mathcal{E}) \geq v$. Como $u^*(v) + \mathcal{E} > \inf \{s : V_u(s) \geq v\}$, então $V_u(u^*(v) + \mathcal{E}) \geq v$. Observe que se V_u é contínua em $u^*(v)$, então $V_u(u^*(v)) = v$. \diamond

P(8): (i) $u^*(0, |\Omega|) \subset [\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u]$ e

(ii) $V_u(\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u) \subset (0, |\Omega|)$.

DEM (i): Seja $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Para $\mathcal{E} > 0$, $V_u(\sup \text{ess } u + \mathcal{E}) = |\{u < \sup \text{ess } u + \mathcal{E}\}| \geq |\{u \leq \sup \text{ess } u\}| = |\Omega| \geq v_0$. Logo $\sup \text{ess } u + \mathcal{E} \in \{s : V_u(s) \geq v_0\} \forall \mathcal{E} > 0$. Assim, $\sup \text{ess } u \geq u^*(v_0)$. Por outro lado, $V_u(\inf \text{ess } u) = |\{u < \inf \text{ess } u\}| = 0 < v_0$. Logo $\inf \text{ess } u \notin \{s : V_u(s) \geq v_0\}$. A partir disto e de V_u ser crescente, conclui-se que $\inf \text{ess } u \leq u^*(v_0)$.

OBS.: Este resultado resolve o problema de como definir $u^*(0)$ de forma razoável sem que u^* deixe de ser crescente. Definiremos $u^*(0) = \inf \text{ess } u$. Logo $u^*[0, |\Omega|] \subset [\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u]$. Note que a demonstração continua sendo válida mesmo que u seja ilimitada. Além disto, é fácil ver que $u^*(|\Omega|) = \sup \text{ess } u$.

(ii) Seja $t_0 \in (\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u)$. Como $t_0 < \sup \text{ess } u$, então $|\{u \geq t_0\}| > 0$ e, portanto, $|\Omega| > |\Omega| - |\{u \geq t_0\}| = |\{u < t_0\}| = V_u(t_0)$. Por outro lado, se $t_0 > \inf \text{ess } u$, então $|\{u < t_0\}| > 0$. Logo $V_u(t_0) > 0$ concluindo P(8). \diamond

P(9): u^* é contínua em $(0, |\Omega|)$ se e somente se $V_u(t)$ é estritamente crescente em $(\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u)$.

DEM: \Rightarrow : Suponhamos que existam $t_1 < t_2$ tq $t_1, t_2 \in (\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u)$ e

$V_u(t_1) = V_u(t_2) = v_0$. Por P(8), $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Por P(3),

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) &= u^*(v_0) + |\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}| \geq \\ &\geq u^*(v_0) + t_2 - t_1 > u^*(v_0). \end{aligned}$$

Logo u^* não é contínua em $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Assim, segue-se o resultado.

\Leftarrow : Suponhamos que u^* seja descontínua em $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Como $u^*(v)$ é crescente, temos

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) - \lim_{v \rightarrow v_0^-} u^*(v) = a > 0.$$

Por P(2) e P(3), $a = |\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}|$. Como $V_u(s)$ é crescente, $\{s \geq \inf \text{ess } u : V_u(s) = v_0\}$ é um intervalo de comprimento a . Logo existem $t_1 < t_2$ dentro do intervalo tq $V_u(t_1) = V_u(t_2) = v_0$. Assim, segue-se o resultado. \diamond

P(10): $u^*(V_u(t)) \leq t$ para $t \in \mathbb{R}$.

DEM: Seja $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $t_0 \in \{s : V_u(s) \geq V_u(t_0)\}$, então $t_0 \geq \inf \{s : V_u(s) \geq V_u(t_0)\} = u^*(V_u(t_0))$. \diamond

P(11): Se V_u é estritamente crescente em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, então $u^*(V_u(t)) = t$ em (a, b) .

DEM: Seja $t_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Se $t < t_0$, então $V_u(t) < V_u(t_0)$. Portanto, $t \notin \{s : V_u(s) \geq V_u(t_0)\}$. Logo se $t \in \{s : V_u(s) \geq V_u(t_0)\}$, então $t \geq t_0$. Assim, $u^*(V_u(t_0)) = \inf \{s : V_u(s) \geq V_u(t_0)\} \geq t_0$. Disto e de P(10), segue-se a igualdade. \diamond

P(12): Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um aberto conexo de \mathbb{R}^n , ou se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um aberto qualquer de \mathbb{R}^n , então

$$u^*(V_u(t)) = t \text{ em } (\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u).$$

DEM: Imediata do Teorema (1.14) do capítulo 1, de P(9) e P(11). \diamond

OBS.: Uma aplicação interessante desta propriedade e do Teorema (1.14) é a igualdade

$$u^{*'}(V_u(t)) = \frac{1}{V'_u(t)} \text{q.s.},$$

cuja demonstração é feita no Teorema (1.16).

P(13): Se f e g são funções mensuráveis definidas em Ω e $f \geq g$ q.s., então:

(i) $V_f \leq V_g$ em \mathbb{R} ,

(ii) $f^* \geq g^*$ em $[0, |\Omega|]$, e

(iii) $(\lambda f + c)^* = \lambda f^* + c$, onde $\lambda \geq 0$ e c são constantes.

DEM (i): Dado $t \in \mathbb{R}$, como $f \geq g$ q.s., é fácil ver que $\{x : f(x) < t\} \subset \{x : g(x) < t\} \cup \{x : f(x) < g(x)\}$. A partir disto e de $|\{x : f(x) < g(x)\}| = 0$, conclui-se que $V_f(t) \leq V_g(t)$.

(ii) Seja $v \in [0, |\Omega|]$. Por (i), segue que $\{s : V_f(s) \geq v\} \subset \{s : V_g(s) \geq v\}$. Logo $f^*(v) \geq g^*(v)$. A demonstração continua sendo válida para f e g ilimitadas em $L^\infty(\Omega)$.

(iii) É fácil mostrar diretamente esta parte, porém, para $\lambda > 0$, segue de (ii) de P(14). Quando $\lambda = 0$, $V_{\lambda f + c}(t) = |\{x : c < t\}| = |\Omega| \chi_{\{t > c\}}$. Dado $v \in [0, |\Omega|]$, $t > c$ se e somente se $t \in \{s : |\Omega| \chi_{\{t > c\}}(s) \geq v\}$. Assim $c^*(v) = c$. \diamond

P(14): Se f é uma função real estritamente crescente, então

(i) $V_{f \circ u}(f(t)) = V_u(t) \forall t \in \mathbb{R}$, e

(ii) se além das hipóteses feitas acima, f for contínua, então $(f \circ u)^*(v) = f(u^*(v))$ para $v \in [0, |\Omega|]$.

DEM (i): Seja $t \in \mathbb{R}$. Por definição, $V_{f \circ u}(f(t)) = |\{x : f \circ u(x) < f(t)\}|$. Mas a condição $(f \circ u)(x) < f(t)$ é equivalente à $u(x) < t$, pois f é estritamente crescente.

Logo $V_{f \circ u}(f(t)) = V_u(t)$.

(ii) Por uma questão de simplicidade, demonstraremos (ii) somente para u tq $\inf \text{ess } u > -\infty$ e $\sup \text{ess } u < +\infty$. Seja $v \in (0, |\Omega|]$. Como u^* é crescente, então $u^*(v) \leq u^*(|\Omega|) = \sup \text{ess } u < \infty$ (ver P(8)). Por definição, $u^*(v) = \inf \{t : V_u(t) \geq v\}$. Seja (t_n) seqüência tq $V_u(t_n) \geq v$ e $t_n \downarrow u^*(v)$. Por (i), $V_{f \circ u}(f(t_n)) \geq v$. Defina $s_n = f(t_n)$. Assim, $s_n \in \{s : V_{f \circ u}(s) \geq v\}$, portanto, $s_n \geq (f \circ u)^*(v) \forall n$. Quando $n \rightarrow \infty$, segue-se que $t_n \rightarrow u^*(v)$ e, pela continuidade de f , $s_n \rightarrow f(u^*(v))$. Assim, $f(u^*(v)) \geq (f \circ u)^*(v)$. Agora tomemos $t_n < u^*(v)$ tq $t_n \uparrow u^*(v)$. Por definição, $V_u(t_n) < v$. Definindo s_n de forma análoga, conclui-se que $V_{f \circ u}(s_n) < v$. Assim, $(f \circ u)^*(v) > s_n \forall n$. Similarmente à outra desigualdade, conclui-se que $f(u^*(v)) \leq (f \circ u)^*(v)$, provando a igualdade para $v \in (0, |\Omega|]$. Se $v_0 = 0$, pela definição de P(8), $(f \circ u)^*(0) = \inf \text{ess } f \circ u = f(\inf \text{ess } u) = f(u^*(0))$. \diamond .

P(15): Seja $t_0 \in [\inf \text{ess } u, \sup \text{ess } u]$ tq V_u seja descontínua em t_0 . então valem:

- (i) u^* é igual a constante t_0 em $(V_u(t_0), V_u(t_0^+)]$ e
- (ii) u^* é diferente de t_0 fora de $[V_u(t_0), V_u(t_0^+)]$.

DEM (i): Seja $v \in (V_u(t_0), V_u(t_0^+)]$. Mostraremos que $u^*(v) \leq t_0$. Seja $t > t_0$. Então, como V_u é crescente, temos $V_u(t) \geq V_u(t_0^+)$ e, portanto, $t \in \{s : V_u(s) \geq v\}$. Assim, $u^*(v) = \inf \{s : V_u(s) \geq v\} \leq t$. Como t é um real qualquer maior que t_0 , deduz-se que $u^*(v) \leq t_0$. Agora veremos que $u^*(v) \geq t_0$. Como $v > V_u(t_0)$, então $t_0 \notin \{s : V_u(s) \geq v\}$. Disto e de V_u ser crescente, concluimos que $t_0 \leq \inf \{s : V_u(s) \geq v\} = u^*(v)$.

(ii) Para $v > V_u(t_0^+)$ vale $u^*(v) > t_0$: como $v > V_u(t_0^+)$, então existe $t > t_0$ tq $V_u(t_0^+) < V_u(t) < v$. Logo $t \notin \{s : V_u(s) \geq v\}$. Disto e de V_u ser crescente, temos que $t \leq u^*(v)$. Assim, $u^*(v) > t_0$. Se $v < V_u(t_0)$, então $u^*(v) < t_0$: como $V_u(t_0) = V_u(t_0^-)$, então existe $t < t_0$ tq $v < V_u(t) < V_u(t_0)$. Logo $t \in \{s : V_u(s) \geq v\}$. Assim, $u^*(v) \leq t < t_0$ concluindo a demonstração.

OBS.: O resultado continua válido se u for ilimitada em $L^\infty(\Omega)$. \diamond

P(16): Se u^+ é a parte positiva de u , isto é, $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, então

- (i) $V_{u^+} = V_u$ em $(0, \infty)$ e $V_{u^+} = 0$ em $(-\infty, 0]$; e
- (ii) $(u^+)^* = (u^*)^+$ em $[0, |\Omega|]$.

DEM (i): Quando $t > 0$, vale $\{u^+ < t\} = \{u < t\}$. Assim, $V_{u^+}(t) = V_u(t)$ para $t > 0$. Como $u^+ \geq 0$, então $\{u^+ < t\} = \emptyset$ quando $t \leq 0$. Logo $V_{u^+}(t) = 0$ para $t \leq 0$.

(ii): Seja $v_0 = V_u(0)$. Veremos que $(u^+)^*(v) = u^*(v)$ para $v > v_0$ e $u^*(v) = 0$ para $v \leq v_0$. Seja $v_0 < v \leq |\Omega|$. Se $V_u(s) \geq v$, então $V_u(s) \geq v_0 = V_u(0)$. Logo $s > 0$. Assim, se $t \in \{s : V_u(s) \geq v\}$, então $t > 0$ e, por (i), $t \in \{s : V_{u^+}(s) \geq v\}$. Logo $\{s : V_u(s) \geq v\} \subset \{s : V_{u^+}(s) \geq v\}$. Por outro lado, se $t \in \{s : V_{u^+}(s) \geq v\}$, então $V_{u^+}(t) > 0$. A partir disto e de (i), $t > 0$ e, portanto, $t \in \{s : V_u(s) \geq v\}$. Assim, concluímos que $\{s : V_{u^+}(s) \geq v\} = \{s : V_u(s) \geq v\}$. Logo $0 \leq (u^+)^*(v) = u^*(v)$.

Seja $0 \leq v \leq v_0$. Suponhamos que $v = 0$. Se $\inf \text{ess } u \geq 0$, então podemos redefinir u em um conjunto de medida nula tq $u = u^+$. Neste caso, $(u^+)^*(0) = u^*(0)$. Se $\inf \text{ess } u < 0$, então é fácil ver que $\inf \text{ess } u^+ = 0$, logo $(u^+)^*(0) = 0 = (u^*)^+(0)$. Agora suponhamos que $0 < v \leq v_0$. Se $t > 0$, então $V_{u^+}(t) = V_u(t) \geq V_u(0) = v_0 \geq v$. Logo se $t > 0$, então $t \in \{s : V_{u^+}(s) \geq v\}$, e se $t \leq 0$, então $V_{u^+}(t) = 0 < v$. Portanto, $(u^+)^*(v) = 0$. A partir disto e de P(13), $u^*(v) \leq 0$. Logo $(u^*)^+(v) = 0$. Assim, $(u^+)^*(v) = (u^*)^+(v)$ o que conclui a propriedade. \diamond

P(17): Se u^* é absolutamente contínua em compactos de $(0, |\Omega|)$ e $u^{*'}(V_u(t)) \leq k$ para quase todo t em $[a, b] \subset (\inf u, \sup u)$, então $u^{*'}(v) \leq k$ para todo $v \in [V_u(a), \lim_{t \rightarrow b^+} V_u(t)]$, onde exista derivada.

DEM: Mostraremos que u^* é de Lipschitz em $[V_u(a), \lim_{t \rightarrow b^+} V_u(t)]$. Sejam v, h tq $v, v+h \in [V_u(a), V_u(b^+)]$. Por P(1), $u^*(v+h) - u^*(v) = |\{s \geq a : V_u(s) < v+h\}| - |\{s \geq a : V_u(s) < v\}| = |\{s \geq a : v \leq V_u(s) < v+h\}|$, onde a é o de P(1).

Como V_u é crescente, o conjunto $A = \{s \geq a : v \leq V_u(s) < v + h\}$ é um intervalo de extremidades c e d . Se $t \in (c, d)$, então $t \in A$. Logo

$$V_u(c^+) = \lim_{t \rightarrow c^+} V_u(t) \geq v \geq V_u(a).$$

A partir disto e de V_u ser estritamente crescente, também concluímos que $c \geq a$. Analogamente $V_u(d^-) = V_u(d) \leq v + h$ e, portanto, $d \leq b$. Podemos redefinir V_u em $\{c\}$, da forma $V_u(c) = V_u(c^+)$. Assim, a função V_u é contínua e crescente, logo

$$\int_c^d V'_u(t) dt \leq V_u(d^-) - V_u(c^+) \leq v + h - v = h.$$

Pela observação de P(12), $V'_u(t) = (u'(V_u(t)))^{-1}$ q.s.. Logo $V'_u(t) \geq k^{-1}$ q.s. em $[a, b]$ e, portanto, em $[c, d]$. Assim,

$$\int_c^d \frac{1}{k} dt \leq h.$$

Logo $d - c \leq k \cdot h$. Lembrando que $|(c, d)| = |A| = u^*(v + h) - u^*(v)$, temos $u^*(v + h) - u^*(v) \leq k \cdot h$ completando a demonstração. \diamond

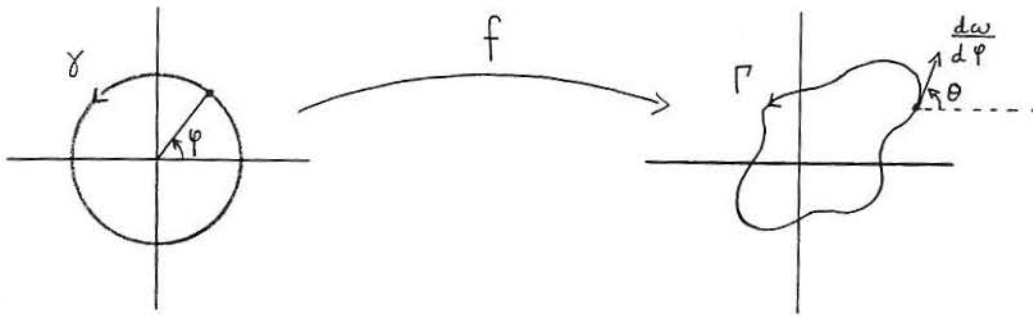
Agora veremos um resultado sobre funções harmônicas, Corolário 22, que será importante aos Capítulos 3 e 4. Para isto, teremos de ver algumas propriedades. Estas propriedades podem ser encontradas como exercícios em [P.S.], Parte III, cap. 3, pág. 125, probl. 106.

PROPOSIÇÃO 18: Se uma curva Γ é a imagem do círculo $|z| = r$ por uma função holomorfa f localmente injetiva, então a curvatura de Γ é dada por

$$k = \frac{1 + \Re \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)^2} \right)}{|zf'(z)|}.$$

OBS.: k = curvatura com sinal, $\frac{d\theta}{ds}$.

DEM: Seja γ o círculo cuja imagem é Γ . Podemos parametrizar γ por $z = re^{i\varphi}$ (ver Figura (0.1)). Assim, Γ fica parametrizada por $\omega = f(z) = f(re^{i\varphi})$. Seja s o comprimento de arco em Γ .



Sabemos que

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\varphi} : \frac{ds}{d\varphi},$$

onde $\theta = \arg\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right) = \text{Im}\left(\log \frac{d\omega}{d\varphi}\right)$. Note que $\frac{ds}{d\varphi} = \left|\frac{d\omega}{d\varphi}\right| = |f'(re^{i\varphi}) \cdot rie^{i\varphi}| = |zf'(z)|$ e $\frac{d\theta}{d\varphi} = \theta' = \text{Im}(\log \omega')' = \text{Im} \frac{\omega''}{\omega'}$. Também temos que $\omega = f(z)$, $\omega' = izf'(z)$ e $\omega'' = i^2zf''(z) + (iz)^2f''(z)$. Assim,

$$\frac{\omega''}{\omega'} = \frac{izif''(z) + (iz)^2f''(z)}{(iz)f'(z)} = i \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right).$$

Logo

$$\text{Im}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right) = \Re\left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = 1 + \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

e, portanto, segue-se o resultado. \diamond

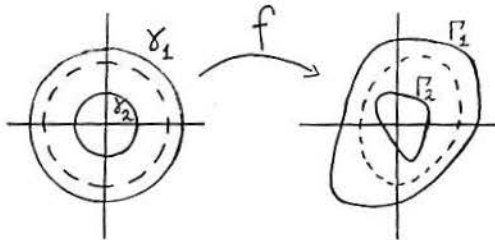
CONSEQÜÊNCIA 19: A curva Γ é convexa quando $k \geq 0$, isto é, se

$$\Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq -1.$$

OBSERVAÇÃO 20: Se f é holomorfa e f' não se anula, então $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ é holomorfa e,

portanto, $U(z) = \Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$ é harmônica.

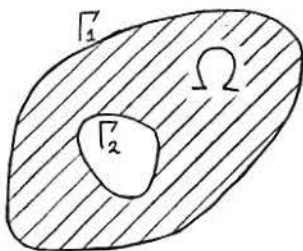
COROLÁRIO 21: Seja f uma bijeção holomorfa (aplicação conforme) entre o anel



limitado por 2 círculos concêntricos γ_1 e γ_2 e a região entre as curvas convexas Γ_1 e Γ_2 . Então qualquer que seja γ círculo concêntrico entre γ_1 e γ_2 , a curva $\Gamma = f(\gamma)$ é convexa.

DEM: Se Γ_1 e Γ_2 são curvas convexas, então a função harmônica $U(z)$, da Observação (20), é maior ou igual a -1 em γ_1 e em γ_2 . Pelo Princípio do Máximo, U assume seu mínimo na fronteira. Logo $U \geq -1$ em todo anel circular. Assim, $\Gamma = f(\gamma)$ é convexa. \diamond

COROLÁRIO 22: Seja Ω a região entre as curvas convexas Γ_1 e Γ_2 , seja u a solução do Problema de Dirichlet



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_1 \\ u = 1 \text{ em } \Gamma_2. \end{cases}$$

Então as curvas de nível de u são todas convexas.

DEM: Como Ω é duplamente conexo, existe um anel circular entre dois círculos concêntricos γ_1 e γ_2 de raios r_1 e r_2 e existe f , aplicação conforme, entre o anel circular e Ω (r_1/r_2 é unicamente determinado) [ver [Ne], pág. 334]. Assim, $u \circ f$ é harmônica no anel circular com $u \circ f = 0$ em γ_1 , $u \circ f = 1$ em γ_2 . Seja $v = u \circ f$. Qualquer que seja T , rotação em torno da origem, T é holomorfa. A partir disto e de v ser harmônica, segue que $v \circ T$ é harmônica e, então, v e $v \circ T$ são soluções do

mesmo Problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_1 \\ u = 1 \text{ em } \Gamma_2. \end{cases}$$

Logo $v = v \circ T$. Assim, as curvas de nível de $v = u \circ f$ são os círculos $|z| = r$. Portanto, as curvas de nível de u são as imagens dos círculos $|z| = r$ por f , que é conforme. Então as curvas de nível de u são convexas. \diamond

CAPÍTULO 1

Um Problema Variacional e Estimativas para os seus Minimizadores e Pontos Críticos

Nesta secção daremos uma formulação variacional ao problema (4). Em seguida estabeleceremos a existência de um mínimo para esta nova formulação. Posteriormente obteremos algumas estimativas para os pontos críticos e de mínimo. Um dos resultados de interesse, que se demonstra, é o fato de ψ^* ser de Lipschitz.

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n . Defina

$$J(\psi) = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_0^{|\Omega|} (\psi^{*'}(v))^2 dv. \quad (1.1)$$

Nosso objetivo é minimizar J em

$$W = \left\{ \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \psi^* \in W^{1,2}(0, |\Omega|), \psi^*(0) = 0 \text{ e } \psi^*(|\Omega|) = 1 \right\}. \quad (1.2)$$

Observe que está implícito que $\psi = 0$ em $\partial\Omega$. Pela Propriedade (8), $\psi^*(0) = 0$ e $\psi^*(|\Omega|) = 1$ são equivalentes a $\inf_{\text{ess}} \psi = 0$ e $\sup_{\text{ess}} \psi = 1$.

Agora estabeleceremos informalmente uma relação entre um ponto crítico de J e uma solução do problema (4). Suponhamos que ψ seja um ponto crítico de J e que $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$. Seja $P_t = \{x \in \Omega : \psi(x) = t\}$. De $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ e $\Omega \setminus (P_0 \cup P_1)$ ser aberto temos que

$$\sup_K \psi < 1 \quad \text{e} \quad \inf_K \psi > 0$$

para qualquer compacto K em $\Omega \setminus (P_0 \cup P_1')$. Seja $\eta \in C_0^\infty(\Omega \setminus (P_0 \cup P_1))$. Logo, para ε suficientemente pequeno, $\psi_\varepsilon = \psi + \varepsilon\eta \in W$. Daí, por derivação, obtemos

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J(\psi_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \, dx + 2 \int_0^{|\Omega|} \psi^{*\prime} \langle \eta \rangle' \, dv, \quad (1.3)$$

onde $\langle \eta \rangle(v) = \frac{d}{d\varepsilon} (\psi + \varepsilon\eta)^*(v) \Big|_{\varepsilon=0}$.

O segundo termo do lado direito de (1.3) pode ser obtido, supondo que a ordem de derivação em relação a ε , v possa ser invertida. Pelo Apêndice (C), se $|\nabla \psi| \neq 0$ em $\bar{\Omega} \setminus P_0 \cup P_1$, então $\langle \eta \rangle$ é uma espécie de média de ψ dada por

$$\langle \eta \rangle(v) = \int_{S(v)} \eta \cdot |\nabla \psi|^{-1} \, dH^{n-1} \Big/ \int_{S(v)} |\nabla \psi|^{-1} \, dH^{n-1},$$

onde $S(v) = \{x : V_\psi(\psi(x)) = v\}$.

Note que, por P(8), $V_\psi(\psi(x)) = 0$ equivale a $\psi(x) \leq 0$, assim, $\eta = 0$ em $S(0)$. Analogamente $V_\psi(\psi(x)) = |\Omega|$ equivale a $\psi(x) \geq 1$ e, portanto, $\eta = 0$ em $S(|\Omega|)$.

Usando este fato, a integração por partes em (1.3) e que $\eta = 0$ numa vizinhança de $\partial\Omega$ obtemos que

$$\int_{\Omega} \eta \Delta \psi \, dx + \int_0^{|\Omega|} \psi^{*\prime\prime} \langle \eta \rangle \, dv = 0. \quad (1.4)$$

Pelo Teorema (C.5) do apêndice (C), $\frac{d}{dt} V_\psi(t) = \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi|^{-1} \, dH^{n-1}$ é contínua. Logo $V_\psi \in C^1(0,1)$. Assim, $V_\psi \circ \psi \in C^1(\Omega)$ e $\nabla(V_\psi \circ \psi) = V_\psi' \cdot \nabla \psi$. Podemos, então, usar a fórmula da coárea (ver Apêndice (A)) para $V_\psi \circ \psi$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^{*\prime\prime}(V_\psi(\psi(x))) \eta(x) \, dx &= \\ \int_0^{|\Omega|} \int_{\{x: V_\psi(\psi(x))=v\}} \frac{\psi^{*\prime\prime}(V_\psi(\psi(x))) \cdot \eta(x)}{|\nabla V_\psi \circ \psi|} \, dH^{n-1} \, dv &= \\ \int_0^{|\Omega|} \psi^{*\prime\prime}(v) \int_{S(v)} \frac{\eta}{\int_{S(v)} |\nabla \psi|^{-1} \, dH^{n-1} \cdot |\nabla \psi|} \, dH^{n-1} \, dv &= \int_0^{|\Omega|} \psi^{*\prime\prime}(v) \langle \eta \rangle(v) \, dv. \end{aligned}$$

Logo de (1.4), concluímos que

$$\int_{\Omega} \eta \Delta \psi \, dx + \int_{\Omega} \psi^{*''} \left(V_{\psi}(\psi(x)) \right) \eta(x) \, dx = 0.$$

Portanto, $\Delta \psi = -\psi^{*''} \left(V_{\psi}(\psi(x)) \right)$ em $\Omega \setminus (P_0 \cup P_1)$.

Isto justifica o porquê de procurar um ponto crítico de J em W .

1.1 TEOREMA: O funcional J tem mínimo em W .

DEM.: Seja (ψ_n) uma sequência tq $J(\psi_n) \rightarrow \inf_{\psi \in W} J(\psi)$.

Logo $(J(\psi_n))$ é limitada e assim pela definição de J , (ψ_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e (ψ_n^*) é limitada em $W^{1,2}(0, |\Omega|)$. Como estes espaços são reflexivos e estão imersos de forma compacta em $L^2(\Omega)$ e $L^2(0, |\Omega|)$, respectivamente, concluímos que existe uma subsequência de ψ_n , que podemos supor s.p.g. ser a própria ψ_n , tq

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ fracamente em } W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ em } L^2(\Omega),$$

e

$$\psi_n^* \rightarrow g \text{ fracamente em } W^{1,2}(0, |\Omega|),$$

$$\psi_n^* \rightarrow g \text{ em } L^2(0, |\Omega|).$$

O operador $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(0, |\Omega|)$, dado por $T(\psi) = \psi^*$, é uma contração, i.e., $\|T(\psi) - T(\varphi)\|_{L^2(0, |\Omega|)} \leq \|\psi - \varphi\|_{L^2(\Omega)}$ (ver Teorema (B.7), apêndice B). Portanto, $\|T(\psi_n) - T(\psi)\| \leq \|\psi_n - \psi\| \rightarrow 0$. Logo $\psi_n^* \rightarrow \psi^*$ em $L^2(0, |\Omega|)$ e, então, $g = \psi^*$.

Veremos que $\{\varphi \in W^{1,2}(0, |\Omega|) : \varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi(|\Omega|) = 1\}$ é fechado. Dada uma sequência no conjunto em questão tq $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $W^{1,2}(0, |\Omega|)$, existe no tq

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \int_x^y |\varphi_n'| \, dv \leq \|\varphi_n\|_{W^{1,2}(0, |\Omega|)} \cdot |x - y|^{1/2} \leq M \cdot |x - y|^{1/2},$$

para $n \geq n_0$ e $0 \leq x < y \leq |\Omega|$. A partir disto e de $\varphi_n(0) = 0$, segue-se que φ_n é limitada e, além disso, equicontínua. Portanto, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, existe uma subsequência que converge uniformemente a φ . Logo $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(|\Omega|) = 1$. Assim, $\{\varphi \in W^{1,2}(0, |\Omega|) : \varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi(|\Omega|) = 1\}$ é convexo e fechado na topologia da norma e, portanto, na topologia fraca. Então ψ^* pertence a este espaço e, assim, $\psi \in W$. Como os funcionais $\int |\nabla \psi|^2 dx$ e $\int (g')^2 dv$ são convexos e contínuos, pela reflexividade de $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $W^{1,2}(0, |\Omega|)$, segue que os funcionais são também semicontínuos inferiormente na topologia fraca. Logo

$$\underline{\lim} \int_{\Omega} |\nabla \psi_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \quad \text{e} \quad \underline{\lim} \int (\psi_n^{*'})^2 dv \geq \int (\psi^{*'})^2 dv,$$

concluindo o teorema. \diamond

1.2 OBSERVAÇÃO: Mesmo que a condição $u^*(0) = 0$ da definição de W seja retirada, continua valendo a existência de um mínimo e para qualquer mínimo ainda se cumpre $u^*(0) = 0$.

DEM: É fácil ver que a prova do Teorema (1.1) continua válida se retirarmos da definição de W a condição $u^*(0) = 0$. Assim, veremos que $u^*(0) = 0$ se u for um minimizador.

Seja u um minimizador de J no novo W . Como $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, é fácil ver que se $t > 0$, então $|\{u < t\}| > 0$, pois $u = 0$ em $\partial\Omega$ no sentido fraco. Uma argumentação semelhante pode ser vista no Teorema (2.6). Daí $u^*(0) = 0$. Agora seja u_+ a função definida na Propriedade (16). Claramente $u_+ = f \circ u$, onde f é a função identidade no semi-eixo positivo e a função nula no semi-eixo negativo. Logo $u_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\nabla u_+ = \chi_{\{u \geq 0\}} \nabla u$ q.s.. Por P(16), $(u_+)^* = (u^*)_+$. Então $(u_+)^* \in W^{1,2}(0, |\Omega|)$ e $(u_+)^{*'} = \chi_{\{u^* \geq 0\}} \cdot u^{*'}$ q.s.. Também temos que $(u_+)^*(0) = 0$, pois infess $u = u^*(0) \leq 0$ (ver raciocínio da Propriedade (16)). Além disso, $u^*(|\Omega|) = 1$. Assim, u_+ pertence ao antigo W e, por definição de J , é fácil ver que $J(u_+) < J(u)$ a menos que $(u_+)^{*'} = (u^*)'$ quase sempre, isto é, $u^* \geq 0$. A partir disto e de u^* ser contínua conclui-se que $u^*(0) = 0$. \diamond

1.3 OBSERVAÇÃO: Na verdade, é possível ir mais além. Podemos substituir W por

$$\bar{W} = \left\{ \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) : \psi^* \in W^{1,2}(0, |\Omega|) \text{ e } \psi^*(|\Omega|) \geq 1 \right\}, \quad (1.5)$$

sem alterar o mínimo de J e o fato de $\psi^*(|\Omega|) = 1$ para os minimizadores. Isto decorre da Propriedade (13). \diamond

1.4 OBSERVAÇÃO: Não se sabe ao certo se o minimizador de J em W é único em geral. Porém, quando Ω é uma bola, sabe-se que o mínimo é único e radial (ver Exemplo 1.7).

Nós gostaríamos de introduzir um resultado de regularidade para ψ^* , onde ψ é um ponto crítico. Para isto, iniciaremos definindo a função

$$W(t) = \int_{\{\psi < t\}} |\nabla \psi|^2 dx.$$

Pela fórmula da coárea (ver nas Preliminares), $W(t)$ é uma função absolutamente contínua e

$$\frac{dW}{dt}(t) = \int_{\{\psi = t\}} |\nabla| dH^{n-1} \quad \text{q.s..}$$

1.5 LEMA: Para demonstrarmos o próximo teorema, é necessário notar que, a menos de um conjunto enumerável em $[0, |\Omega|]$,

$$\psi^{*'}(v) = \psi^{*'}(\bar{V}_\psi(\psi^*(v))),$$

onde $\bar{V}_\psi(t) = \frac{V_\psi(t^+) + V_\psi(t^-)}{2}$.

DEM.: Primeiro seja $\{t_i\}$ a coleção enumerável de pontos em $[\text{inf } \psi, \text{sup } \psi]$ tq $|\{\psi = t_i\}| > 0$. Por P(5), para tais t_i 's, $V_\psi(t_i^-) < V_\psi(t_i^+)$. Seja $A = \bigcup_i (V_\psi(t_i^-), V_\psi(t_i^+))$. Se $v \in A$, então existe t_i tq $v \in (V_\psi(t_i^-), V_\psi(t_i^+))$. Por P(15), ψ^* é igual a constante t_i neste intervalo. Logo $\psi^{*'}(v) = 0$, e ainda, por definição de \bar{V}_ψ , temos que $\bar{V}_\psi(\psi^*(v)) = \bar{V}_\psi(t_i) \in (V_\psi(t_i^-), V_\psi(t_i^+))$. Assim, $\psi^{*'}(\bar{V}_\psi(\psi^*(v))) = 0$. Logo a igualdade se cumpre quando $v \in A$.

Se $v \in [0, |\Omega|] \setminus \bigcup [V_\psi(t_i^-), V_\psi(t_i^+)]$, então V_ψ é contínua em $u^*(v)$ e, assim, por P(7), $v = V_\psi(\psi^*(v)) = \bar{V}_\psi(\psi^*(v))$ garantindo a igualdade do lema. Portanto, só não podemos garantir a igualdade em $\bigcup \{V_\psi(t_i^-)\} \cup \bigcup \{V_\psi(t_i^+)\}$ que é enumerável. \diamond

1.6 TEOREMA: Se ψ é um ponto crítico do problema variacional (1.1) e (1.5), então

$$\frac{dW(t)}{dt} + \psi^{*'}(V_\psi(t)) = J(\psi) \quad \text{q.s.}$$

e, portanto, ψ^* é de Lipschitz.

DEM.: Seja $\psi_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \psi$, onde $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon h(x)$, $h \in C_0^\infty(0,1)$ e $|\varepsilon|$ é tão pequeno que $|\varepsilon h'| < 1$ em $(0,1)$. Temos

$$\nabla \psi_\varepsilon = f'_\varepsilon(\psi) \nabla \psi. \quad (1.6)$$

Também temos $f'_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon h'(x)$. A partir disto e de $|\varepsilon h'| < 1$, concluímos que $f'_\varepsilon(x) > 0$, portanto, f'_ε é estritamente crescente com inversa C^∞ . Logo, por P(14),

$$(f_\varepsilon \circ \psi)^*(v) = f_\varepsilon(\psi^*(v)).$$

Assim,

$$(\psi_\varepsilon^*)'(v) = (f_\varepsilon \circ \psi)^*(v) = f'_\varepsilon(\psi^*(v)) \cdot \psi^{*'}(v). \quad (1.7)$$

Portanto, de (1.1), (1.6) e (1.7), temos

$$J(\psi_\varepsilon) = \int_\Omega (f'_\varepsilon(\psi))^2 \cdot |\nabla \psi|^2 dx + \int_0^{|\Omega|} [f'_\varepsilon(\psi^*(v))]^2 \cdot [\psi^{*'}(v)]^2 dv. \quad (1.8)$$

Note também que $\psi_\varepsilon \in \bar{W}$ e $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi$ em $W^{1,2}(\Omega)$, pois $\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{W^{1,2}} \leq \varepsilon \|h\|_{W^{1,2}}$. Usando isto e o fato de ψ ser ponto crítico, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\psi_\varepsilon) - J(\psi)}{\varepsilon} = 0,$$

que, através de (1.8), permite concluir facilmente

$$\int_{\Omega} h'(\psi) |\nabla \psi|^2 dx + \int_0^{|\Omega|} h'(\psi^*) \cdot [\psi^{*'}(v)]^2 dv = 0. \quad (1.9)$$

Usando a observação (1.4) e a fórmula da coárea, obtemos

$$\int_{\Omega} h'(\psi) \cdot |\nabla \psi|^2 dx = \int_0^1 h'(\psi) \frac{dW(t)}{dt} dt. \quad (1.10)$$

Usaremos o fato de que se $r(v)$ é crescente e absolutamente contínua, e g é Borel-mensurável, vale

$$\int_a^b g(r(v)) \cdot r'(v) dv = \int_{r(a)}^{r(b)} g(t) dt. \quad (1.11)$$

Tomando $r(v) = \psi^*(v)$ e $g(t) = h'(t) \cdot \psi^*(\bar{V}_{\psi}(t))$, onde \bar{V}_{ψ} foi definido no Lema (1.5), temos

$$g(r(v)) \cdot r'(v) = h'(\psi^*(v)) \cdot \psi^{*'}(\bar{V}_{\psi}(\psi^*(v))) \cdot \psi^{*'}(v) = h'(\psi^*(v)) \cdot (\psi^{*'}(v))^2,$$

exceto num conjunto enumerável. Disto e de (1.11), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{|\Omega|} h'(\psi^*(v)) \cdot (\psi^{*'}(v))^2 dv &= \int_0^1 h'(t) \cdot \psi^{*'}(\bar{V}_{\psi}(t)) dt \\ &= \int_0^1 h'(t) \cdot \psi^{*'}(V_{\psi}(t)) dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A última desigualdade ocorre pois $\{t: V_{\psi}(t) \neq \bar{V}_{\psi}(t)\}$ é enumerável. Logo, de (1.9), (1.10) e (1.12), temos

$$\int_0^1 h'(t) \left[\frac{dW(t)}{dt} + \psi^{*'}(V_{\psi}(t)) \right] dt = 0 \quad \forall h \in C_0^{\infty}(0,1).$$

Assim, $\frac{dW(t)}{dt} + \psi^{*'}(V_{\psi}(t)) = C$ q.s.. Como $\frac{dW}{dt} \geq 0$, temos $\psi^{*'} \leq C$ q.s.. A partir disto e da Propriedade (17), ψ^* é de Lipschitz. Por outro lado, usando as igualdades (1.10) e (1.12) sem h' , temos

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 C dt = \int_0^1 \frac{dW(t)}{dt} dt + \int_0^1 \psi^{*'}(V_{\psi}(t)) dt \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \int_0^{|\Omega|} (\psi^{*'})^2 dv. \end{aligned}$$

Logo $C = J(\psi)$ o que completa a demonstração. \diamond

1.7 EXEMPLO: Agora veremos que se Ω é uma bola de raio R , então existe um único ponto de mínimo que é radial. Seja ψ_0 este ponto. Logo $\psi_0(x) = f_0(|x|)$, onde f_0 é uma função definida no semi-eixo real positivo. Também vale

$$f_0'(r) = -J(\psi_0)(n\omega_n r^{n-1} + (n\omega_n r^{n-1})^{-1})^{-1}. \quad (1.13)$$

Primeiro veremos que o ponto de mínimo é radial. Seja Ψ a simetrização de um ponto de mínimo ψ . Por definição de simetrização, o conjunto de nível $\{\Psi \geq t\}$ é uma bola cuja medida é a mesma de $\{\psi \geq t\}$. Logo $V_\Psi(t) = V_\psi(t)$. Portanto, $\Psi^* = \psi^*$ e, assim,

$$\int_0^{|\Omega|} (\Psi^*)^2 dv = \int_0^{|\Omega|} (\psi^*)^2 dv.$$

A respeito de simetrização, também é conhecido que

$$\int_\Omega |\nabla \Psi|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla \psi|^2 dx,$$

(ver [B], Teorema 2.2, pág. 55). Logo $J(\Psi) \leq J(\psi)$. A igualdade ocorrerá se e somente se $\psi = \Psi$. Portanto, se ψ minimiza J , então $\psi(x) = f(|x|)$, onde f é uma função definida em $[0, R]$, absolutamente contínua, decrescente tq $f(0) \geq 1$ e $f(R) = 0$. É fácil concluir, por absurdo, que $f(0) = 1$.

Veremos agora que f é único e vale (1.13). Para isto, seja $\psi(x) = f(|x|)$ função radial em \overline{W} , onde f é decrescente. Provaremos que $\psi^*(\omega_n(R^n - r^n)) = f(r)$ para $r \in [0, R]$. Sejam $r_0 \in [0, R]$ e $t = f(r_0)$. Seja $r_t = \max\{r \in [0, R] : f(r) \geq t\}$. Logo $r_t \geq r_0$. Como f é decrescente e contínua, $x \in \{x : \psi(x) = f(|x|) < t\}$ se e somente se $r_t < |x| \leq R$. Assim, $V_\psi(t) = \omega_n(R^n - r_t^n) \leq \omega_n(R^n - r_0^n)$. Portanto, por P(9), $V_\psi(s) < \omega_n(R^n - r_0^n)$ para $s < t$. Logo $\psi^*(\omega_n(R^n - r_0^n)) \geq t$. Por outro lado, se $s > t = f(r_0)$ então $r_0 \notin \{a \in [0, R] : f(a) \geq s\}$, que é um intervalo de início em 0. Disto, conclui-se que $r_0 > r_s = \max\{a \in [0, R] : f(a) \geq s\}$. Portanto, $V_\psi(s) = \omega_n(R^n - r_s^n) > \omega_n(R^n - r_0^n)$, e, então, $\psi^*(\omega_n(R^n - r_0^n)) \leq t$. Temos

então, a igualdade, que derivada em relação a r resulta em

$$-n\omega_n r^{n-1} \frac{d\psi^*}{dv} (\omega_n(R^n - r^n)) = \frac{df}{dr}(r).$$

Logo $\frac{d\psi^*}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{df}{dr}$ e, assim, $\frac{d\psi^*}{dv} = \frac{df}{dv}$, pois $\frac{dv}{dr}$ tem inversa limitada em compactos de $[0, R]$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{d\psi^*}{dv} \right)^2 dv &= \lim_{i \rightarrow 0} \int_I^{|\Omega|} \left(\frac{df}{dv} \right)^2 dv = \lim_{i \rightarrow 0} \int_I^{|\Omega|} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 \cdot \left(\frac{dr}{dv} \right)^2 dv \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \int_R^i (f'(r))^2 \frac{dr}{dv} \cdot dr = \int_0^R \frac{(f'(r))^2}{n\omega_n r^{n-1}} dr. \end{aligned}$$

Disto e de $|\nabla \psi(x)| = f'(|x|)$ temos que

$$J(\psi) = \int_0^R (f'(r))^2 n\omega_n r^{n-1} dr + \int_0^R \frac{(f'(r))^2}{n\omega_n r^{n-1}} dr. \quad (1.14)$$

Seja g a função definida em $[0, R]$ por $g(r) = n\omega_n r^{n-1} + (n\omega_n r^{n-1})^{-1}$.

O que faremos agora é minimizar o funcional

$$L(f) = \int_0^R (f'(r))^2 [n\omega_n r^{n-1} + (n\omega_n r^{n-1})^{-1}] dr$$

sobre o conjunto $V = \{f: [0, R] \rightarrow \mathbb{R} : f \in L^2[0, R], f'^2 g \in L^1[0, R], f(0) = 1, f(R) = 0\}$. Primeiramente teremos de garantir a existência de um mínimo. Seja $f_n \in V$ uma sequência que minimiza L em V . Note que $V \subset W^{1,2}[0, R]$ e f_n é limitada em $W^{1,2}[0, R]$, pois $g \geq \lambda > 0$ em $[0, R]$ implicando $\lambda \int_0^R f_n'^2 dr \leq \int_0^R (f_n')^2 g dr < \infty$.

Logo existe $f \in W^{1,2}[0, R]$ tq $f_n \rightarrow f$ fracamente em $W^{1,2}[0, R]$. Para $a > 0$, defina o funcional $L_a(h) = \int_a^R (h')^2 \cdot g dr$. Como g é limitada superiormente em $[a, R]$, L_a está definido e é contínuo em $W^{1,2}[a, R]$. A partir disto, da convexidade de L_a e da reflexividade de $W^{1,2}[a, R]$, concluímos que L_a é semicontínuo inferiormente na topologia fraca deste espaço. Logo existe $L_a(f)$ e $\liminf L_a(f_n) \geq L_a(f)$.

Mas f_n tende ao mínimo de L e $L(f_n) \geq L_a(f_n)$ para $a > 0$, assim, $L_a(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) < \infty$ independente de a . Logo $\exists L(f)$ e $L(f) \leq \lim L(f_n)$. Observe que $L(f_n)$ é limitado, portanto, existe $M > 0$ tq $\|f'_n\|_{L^2} \leq M \forall n$. Logo, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos, $\forall x_0, h$ tq $(x_0, x_0 + h) \subset [0, R]$, que $|f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f'_n| dx \leq h^{1/2} M^{1/2}$ independente de n . Portanto, f_n é limitada e equicontínua. Usando o Teorema de Arzela-Ascoli, concluímos que existe uma subsequência f_{n_k} que converge uniformemente a f . Podemos supor s.p.g. que f_{n_k} é a própria f_n . Logo $f(0) = 1$ e $f(R) = 0$. Assim, $f \in V$.

A partir disto e da forma integral de L , conclui-se que

$$\int_0^R 2f'g\eta dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(0, R).$$

Note que para tais η 's, $f + \varepsilon\eta \in V \quad \forall \varepsilon > 0$. Logo $f'g$ é identicamente constante ($f'g \equiv C$). Portanto,

$$\min_V L = L(f) = \int_0^R f'^2 g dr = \int_0^R f' C dr = C(f(R) - f(0)) = -C.$$

Isso nos dá

$$f' = -\min_V L \cdot (g)^{-1/2}, \quad (1.15)$$

garantindo a unicidade do mínimo de L em V . Observe que $f(|x|) \in \bar{W}$ e f é decrescente. Logo $J(f(|x|)) = L(f)$. Portanto, $\min_{\bar{W}} J \leq \min_V L$. Mas também vale que o mínimo de J é da forma $f(|x|)$, onde f é decrescente e, assim, por (1.14), $f \in V$. Logo $\min_{\bar{W}} J = J(f(|x|)) = L(f) \geq \min_V L$ concluindo que $\min_{\bar{W}} J = \min_V L$. A partir disto e da unicidade do mínimo de L em V , é fácil concluir a unicidade do mínimo de J em \bar{W} . A igualdade (1.13) conclui-se de (1.15). \diamond

Uma questão de interesse é saber se \bar{W} é muito menor que $W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo, através dos Lemas (1.8), (1.9) e do Teorema (1.10), mostraremos que se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então u^* é contínuo em $(0, |\Omega|)$. Também veremos, pelos Lemas (1.11), (1.13) e Teoremas (1.14), (1.15), que se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $u^* \in W_{L^1}^{1,2}(0, |\Omega|)$.

1.8 LEMA: Seja Ω um aberto conexo. Sejam A e C conjuntos disjuntos tq $A \cup C = \Omega$ e $|A|, |C| > 0$. Então existe $B = B_r(x) \subset \Omega$ tq $|B \cap A| \geq 0$ e $|B \cap C| > 0$.

DEM: Suponhamos que não vale o lema. Assim, para $B_r(x) \subset \Omega$, vale ou $|B_r(x) \cap A| = 0$ ou $|B_r(x) \cap C| = 0$. Sejam $\mathcal{F}_1 = \{B_r(x) \subset \Omega \mid |B_r(x) \cap A| = 0\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{B_r(x) \subset \Omega \mid |B_r(x) \cap C| = 0\}$. Os conjuntos $\bigcup_{B_r(x) \in \mathcal{F}_1} B_r(x)$ e

$\bigcup_{B_r(x) \in \mathcal{F}_2} B_r(x)$ são abertos. Como Ω é aberto conexo, conclui-se que existem $B_{r_x}(x) \in \mathcal{F}_1$ e $B_{r_y}(y) \in \mathcal{F}_2$ tq $B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y) \neq \emptyset$. Por outro lado, $|B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y) \cap A| \leq |B_{r_x}(x) \cap A| = 0$. Conclui-se o análogo para B . Como $\Omega = A \overset{\dagger}{\cup} B$, deduz-se que $|B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y)| = |B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y) \cap (A \cup B)| = 0$ o que é absurdo, pois a intersecção de dois abertos não disjuntos tem medida positiva. \diamond

OBS.: Por raciocínio análogo podemos supor que B é um cubo.

1.9 TEOREMA: Sejam Ω , A e C tais como no Lema (1.8). Então a função $\chi_A \notin W^{1,p}(\Omega)$.

DEM.: Suponhamos que $\chi_A \in W^{1,p}(\Omega)$. Logo $\chi_A \in W^{1,p}(B)$, onde B é o cubo descrito no Lema (1.8). Podemos supor s.p.g que $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < 1\}$. Seja $D = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_i < 1\}$. Por teorema, existe uma função f tq $f = \chi_A$ q.s. e é absolutamente contínua ao longo de todos os segmentos de reta da forma $s \rightarrow (y, s)$ com $s \in (0, 1)$ e $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$, onde $V \subset D$ e $H^{n-1}(D \setminus V) = 0$. Chamaremos a estes segmentos de reta de r_y . De $f = \chi_A$ q.s., segue que

$$\int_B |f - \chi_A| dx = 0,$$

e pelo Teorema de Fubini

$$\int_D \int_0^1 |f - \chi_A| ds dH^{n-1} = 0. \text{ Assim, } \int_0^1 |(f - \chi_A)(y, s)| ds = 0 \quad \forall y \in V' \subset V,$$

onde $H^{n-1}(V \setminus V') = 0$. Podemos supor s.p.g que $V' = V$. Logo $f|_{r_y} = \chi_A|_{r_y}$ q.s. $\forall y \in V$. Disto e de $f|_{r_y}$ ser absolutamente contínua $\forall y \in V$, conclui-se que ou

$f|_{r_y} \equiv 1$ ou $f|_{r_y} \equiv 0$. Sejam $A' = \{y \in V \mid f|_{r_y} \equiv 1\}$ e $C' = \{y \in V \mid f|_{r_y} \equiv 0\}$. Temos $A' \dot{\cup} C' = V$. Portanto, $H^{n-1}(D \setminus A' \dot{\cup} C') = 0$. Logo

$$\begin{aligned} |A| &= \int_B \chi_A dx = \int_D \int_0^1 f ds dH^{n-1} \\ &= \int_{A' \dot{\cup} C'} \int_0^1 f ds dH^{n-1} = \int_{A'} 1 dH^{n-1} = H^{n-1}(A'). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo com $1 - \chi_A$, concluí-se que $H^{n-1}(C') = |C|$. Também vale que se $f \in W^{1,p}(\Omega)$, então existe $s_0 \in (0,1)$ tq $f|_{Dx\{s_0\}} \in W^{1,p}(Dx\{s_0\})$. Além disso, $f|_{Dx\{s_0\}}(y) = \chi_{A'x\{s_0\}}(y) \quad \forall y \in V$, pois se $y \in V$, então $y \in A'$ ou $y \in C'$. Se $y \in A'$, então, por definição de A' , $f(y,s) = 1 \quad \forall s \in (0,1)$, logo, $f(y, s_0) = 1 = \chi_{A'x\{s_0\}}(y, s_0)$. O análogo pode ser feito se $y \in C'$. Portanto, $\chi_{A'x\{s_0\}} \in W^{1,p}(Dx\{s_0\})$, $H^{n-1}(A') > 0$ e $H^{n-1}(C') > 0$. Concluímos assim que se a nossa suposição vale para dimensão n , então vale para dimensão $n-1$ e, portanto, para $n=1$. Tal fato é absurdo, pois se uma função está em $W^{1,p}([a,b])$, ela é absolutamente contínua, e as únicas funções características absolutamente contínuas em $[a,b]$ são $f \equiv 1$ e $f \equiv 0$ o que contradiz $|A| > 0$ e $|C| > 0$. \diamond

1.10 LEMA: Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $p > 1$ e Ω é um aberto conexo, então u^* é contínuo em $(0, |\Omega|)$.

DEM: Suponhamos u^* descontínua em $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Como $u^*(v)$ é crescente, temos que

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} u^*(v) - \lim_{v \rightarrow v_0^-} u^*(v) = a > 0$$

Por P(2) e P(3), $a = |\{s \geq \alpha : V_u(s) = v_0\}|$ com α conveniente. Como $V_u(s)$ é crescente, $\{s \geq \alpha : V_u(s) = v_0\}$ é um intervalo de comprimento a . Logo existem $t_1 < t_2$ dentro do intervalo tq $V_u(t_1) = V_u(t_2) = v_0$. Portanto, $|\{x : t_1 \leq u(x) < t_2\}| = V_u(t_2) - V_u(t_1) = 0$. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq t_2 \\ \frac{t-t_1}{t_2-t_1} & \text{para } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{para } t < t_1 \end{cases} .$$

Então $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $f \circ u = \chi_{\{u \geq t_2\}}$ q.s., pois se $u(x) \leq t_1$, então $f \circ u(x) = 0$; se $u(x) \geq t_2$, então $f \circ u(x) = 1$. Assim, $f \circ u \neq \chi_{\{u \geq t_2\}}$ somente em $\{x: t_1 < u(x) < t_2\}$ cuja medida é zero.

$$\text{Por outro lado, } |\{x: u(x) < t_2\}| = V_u(t_2) = v_0 > 0 \quad \text{e}$$

$$|\{x: u(x) \geq t_2\}| = |\Omega| - v_0 > 0$$

Dai chegamos a uma contradição com o Teorema (1.9). Logo u^* é contínua em $(0, |\Omega|)$. \diamond

1.11 LEMA: (Uma versão da desigualdade isoperimétrica): Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então $(|\Omega| - V_u(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} H^{n-1}(\{u = t\})$ q.s..

DEM.: Para quase todo $t \in (\inf u, \sup u)$, $|\{u = t\}| = 0$. Trabalharemos com tais t 's. Dado t , seja $k \in \mathbb{R}$ tq $t+k \in (\inf u, \sup u)$ e $|\{u = t+k\}| = 0$.

Defina $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por
$$h(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < t \\ s - t & \text{se } t \leq s < t+k \\ k & \text{se } s \geq t+k \end{cases}$$

A função h é de Lipschitz. Portanto, $h \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$. Pela definição de h , temos que $h \circ u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo podemos usar a desigualdade de Sobolev, $\|\psi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \|\nabla \psi\|_1$, para $\psi = h \circ u$.

Também valem: i) $h \circ u = (u - t)\chi_{\{t \leq u < t+k\}} + k\chi_{\{u \geq t+k\}}$ e

ii) $\nabla(h \circ u) = h'(u) \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \chi_{\{t < u < t+k\}}$ q.s..

Justificativa de (i): se $x \in \{u < t\}$, então $u(x) < t$ e assim, $h(u(x)) = 0 = (u(x) - t)\chi_{\{t \leq u < t+k\}}(x) + k\chi_{\{u \geq t+k\}}(x)$; se $x \in \{t \leq u < t+k\}$, então $h(u(x)) = (u(x) - t) = (u(x) - t)\chi_{\{t \leq u < t+k\}}(x) + k\chi_{\{u \geq t+k\}}(x)$; e se $x \in \{u \geq t+k\}$, então $h(u(x)) = k = (u(x) - t)\chi_{\{t \leq u < t+k\}}(x) + k\chi_{\{u \geq t+k\}}(x)$.

Justificativa de (ii): supondo $x \in \{u < t\}$, então $h'(u(x)) = 0$, logo $h'(u(x)) \cdot \nabla u(x) = 0 = (\nabla u \cdot \chi_{\{t < u < t+k\}})(x)$; no caso $x \in \{t \leq u < t+k\}$, então $h'(u(x)) = 1$ q.s.¹, pois embora não exista derivada de h em t , por hipótese, $|\{u = t\}| = 0$. Assim $h'(u(x)) \cdot \nabla u(x) = \nabla u(x) = (\nabla u \cdot \chi_{\{t < u < t+k\}})(x)$;

¹OBS.: Os q.s.'s acima significam quase sempre no conjunto em questão.

quando $x \in \{u \geq t + k\}$, então $h'(u(x))' = 0$ q.s.* , pela mesma razão do caso anterior. Logo $h'(u(x)) \cdot \nabla u(x) = 0 = (\nabla u \cdot \chi_{\{t < u < t+k\}})(x)$. De (i), (ii) e da desigualdade de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_{\Omega} |\nabla u| \chi_{\{t < u < t+k\}} dx &\geq \\ &\geq \left[\int_{\Omega} [(u-t)\chi_{\{t \leq u < t+k\}} + k\chi_{\{u \geq t+k\}}]^{n-1} dx \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ &\geq \left[\int_{\Omega} [k\chi_{\{u \geq t+k\}}]^{n-1} dx \right]^{\frac{n-1}{n}} = k \left(\int_{\{u \geq t+k\}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \\ &k(|\Omega| - V_u(t+k))^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

Pela fórmula da coárea,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u| \chi_{\{t < u < t+k\}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{u=s\}} \chi_{\{t < u < t+k\}} dH^{n-1} ds \\ &= \int_t^{t+k} \int_{\{u=s\}} dH^{n-1} ds = \int_t^{t+k} H^{n-1}(\{u = s\}) ds. \end{aligned}$$

Disto e da desigualdade anterior, temos

$$k(|\Omega| - V_u(t+k))^{\frac{n-1}{n}} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_t^{t+k} H^{n-1}(\{u = s\}) ds. \quad (1.16)$$

Note que esta desigualdade vale para todo t e k do início da demonstração. Se dividirmos a integral de (1.16) por uma sequência qualquer de k 's que tende a 0, teremos que este quociente convergirá a $H^{n-1}(\{u = s\})$ q.s.. Tomando uma sequência especial de k 's para os t 's onde exista esta convergência e usando (1.16), concluímos que

$$(|\Omega| - V_u(t^+))^{\frac{n-1}{n}} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} H^{n-1}(\{u = t\}) \text{ q.s..}$$

A partir disto e de V_u ser monótona, segue-se o resultado. \diamond

1.12 OBSERVAÇÃO: Se $t_0 \in (\text{infess } u, \text{supess } u)$ é tq $H^{n-1}(\{u = t_0, |\nabla u| = 0\}) = 0$, então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\{u = t_0\}) &= \int_{\{u=t_0\}} 1 dH^{n-1} = \int_{\{u=t_0\}} \frac{|\nabla u|^{1/2}}{|\nabla u|^{1/2}} dH^{n-1} \leq \\ &\leq \left(\int_{\{u=t_0\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right)^{1/2} \left(\int_{\{u=t_0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pela parte (i) de P(8), temos que $V_u(t_0) < |\Omega|$. Disto e do Lema (1.11), temos que $H^{n-1}(\{u = t_0\}) > 0$. Logo, se $\int_{\{u=t_0\}} |\nabla u| dH^{n-1}$ e $\int_{\{u=t_0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1}$ são finitos, então são positivos também. \diamond

1.13 LEMA: Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Sejam $v \in [0, |\Omega|]$ e $h > 0$ tq $v+h \in [0, |\Omega|]$. Se $u^*(v+h) > u^*(v)$, então $V_u(u^*(v)) + |\{x \in \Omega : u^*(v) \leq u(x) < u^*(v+h), |\nabla u(x)| = 0\}| \geq v$.

DEM: Seja $\mathcal{E} > 0$ tq $u^*(v) + \mathcal{E} < u^*(v+h)$. Pela parte (i) do Lema (1.16)*, segue que

$$\begin{aligned} &V_u(u^*(v)) + |\{x : u^*(v) \leq u(x) < u^*(v+h); |\nabla u| = 0\}| - V_u(u^*(v) + \mathcal{E}) \\ &= \int_{-\infty}^{u^*(v)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds + |\{u < u^*(v), |\nabla u| = 0\}| + \\ &|\{u^*(v) \leq u < u^*(v+h); |\nabla u| = 0\}| - \\ &- \int_{-\infty}^{u^*(v)+\mathcal{E}} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds - |\{u < u^*(v) + \mathcal{E}, |\nabla u| = 0\}| = \\ &- \int_{u^*(v)}^{u^*(v)+\mathcal{E}} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds + \\ &+ |\{u^*(v) + \mathcal{E} \leq u < u^*(v+h), |\nabla u| = 0\}|. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\mathcal{E} \rightarrow 0$, conclui-se que

$$V_u(u^*(v)) + |\{u^*(v) \leq u < u^*(v+h), |\nabla u| = 0\}| - \lim_{\mathcal{E} \rightarrow 0} V_u(u^*(v) + \mathcal{E}) \geq 0.$$

*OBS.: A parte (i) do Lema (1.16) não utiliza o Lema (1.13) ou qualquer uma de suas consequências.

Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(u^*(v) + \varepsilon) \geq v$ por P(7), segue-se o resultado. \diamond

1.14 TEOREMA: Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um aberto conexo de \mathbb{R}^n , ou se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é um aberto qualquer de \mathbb{R}^n , então u^* é absolutamente contínua em qualquer $[a,b] \subset (0, |\Omega|)$.

DEM: Sejam a e b reais tq $[a,b] \subset (0, |\Omega|)$. Primeiro demonstraremos que u^* é absolutamente contínua em $[a,b]$ quando $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sejam v e h tq $v, v+h \in [a,b]$. Pela parte (i) do Lema (1.16),

$$\begin{aligned} & V_u(u^*(v+h)) - V_u(u^*(v)) - |\{u^*(v) \leq u < u^*(v+h), |\nabla u| = 0\}| \\ &= \int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Lema (1.13) e P(6) para $V_u(u^*(v+h))$, temos que

$$\int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds \leq (v+h) - v = h. \quad (1.18)$$

Pela parte (i) do Lema (1.16), $H^{n-1}(\{u = t, |\nabla u| = 0\}) = 0$ q.s.. A partir disto e da Observação (1.12), segue que

$$(H^{n-1}(\{u = s\}))^2 \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} \leq \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} \quad \text{q.s..} \quad (1.19)$$

Note que as integrais em (1.19) são finitas quase sempre, basta aplicar a fórmula da coárea para $g = \nabla u$ e $g = 1$. Usando (1.18) e (1.19), temos

$$\int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} [H^{n-1}(\{u = s\})]^2 \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \leq h.$$

Disto e da desigualdade isoperimétrica, concluímos que

$$\int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - V_u(s))^{\frac{2(n-1)}{n}} \cdot \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \leq h. \quad (1.20)$$

Como $s \leq u^*(v+h)$, $V_u(s) \leq V_u(u^*(v+h))$. Disto e de P(6), $V_u(s) \leq v+h \leq b$. Logo $(|\Omega| - V_u(s)) \geq (|\Omega| - b) > 0$. Portanto,

$$n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - b)^{\frac{2(n-1)}{n}} \int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \leq h.$$

Seja C a constante que acompanha a integral acima. Logo, para qualquer coleção de intervalos disjuntos em $[a,b]$ da forma $(v_i, v_i + h_i)$, tem-se

$$C \int_A \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \leq \sum h_i, \quad (1.21)$$

onde $A = \cup [u^*(v_i), u^*(v_i + h_i)]$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum u^*(v_i + h_i) - u^*(v_i) &= \int_A 1 ds \leq \int_A \frac{\left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{1/2}}{\left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{1/2}} ds \leq \\ &\leq \left(\int_A \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds \right)^{1/2} \left(\int_A \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aplicando a fórmula da córea à desigualdade (1.22), temos

$$\sum u^*(v_i + h_i) - u^*(v_i) \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_A \left[\int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right]^{-1} ds \right)^{1/2}.$$

Disto e de (1.21), conclui-se que

$$\sum u^*(v_i + h_i) - u^*(v_i) \leq \left[C^{-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \cdot \sum h_i \right]^{1/2}.$$

Portanto, u^* é absolutamente contínua em $[a,b]$.

Agora demonstraremos o teorema para o caso $u \in W^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é conexo. Seja U a simetrização de u . No Exemplo (1.7), vimos que $U^* = u^*$ em

$[0, |\Omega|]$. Portanto, se provarmos que U^* é absolutamente contínua em compactos de $(0, |\Omega|)$, estará demonstrado o resultado. Sabemos que $U \in W^{1,2}(B_r)$ (Ver [B], pag. 55, Teorema 2.2), onde B_r é uma bola de raio r . Como U é uma simetrização, então $U + c \in W_0^{1,2}(B_r)$, onde c é uma constante conveniente. A partir disto, do caso anterior e da parte (iii) de P(13), concluímos que $U^* + c$ é absolutamente contínua em compactos demonstrando o teorema. \diamond

1.15 TEOREMA: Supondo as mesmas hipóteses do Teorema (1.14), então $u \in W_{L^0c}^{1,2}(\Omega)$.

DEM: Basta mostrar que $\int_a^b (u^*)^2 dv < +\infty$ para qualquer $[a,b] \subset (0, |\Omega|)$. Analogamente ao Teorema (1.14), faremos primeiro uma demonstração para $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Depois, usando a simetrização de u , concluiremos o teorema quando $u \in W^{1,2}(\Omega)$ para Ω conexo.

Se no Teorema (1.14) tivéssemos tomado $A = [u^*(v), u^*(v+h)]$, onde $v \in [a,b]$ e $v+h \in [a', b']$ com $0 < a' < a < b < b' < |\Omega|$, e não usássemos a fórmula da coárea em (1.22), teríamos concluído, a partir de (1.21) e (1.22), que

$$u^*(v+h) - u^*(v) \leq \left(\frac{h}{c} \cdot \int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds \right)^{1/2}.$$

Assim,

$$\frac{(u^*(v+h) - u^*(v))^2}{h^2} \leq \frac{c^{-1}}{h} \int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds. \quad (1.23)$$

Note que estamos supondo $h > 0$. Agora, integrando a inequação em relação a v , obtemos

$$\int_a^b \left(\frac{u^*(v+h) - u^*(v)}{h} \right)^2 dv \leq \frac{c^{-1}}{h} \int_a^b \int_{u^*(v)}^{u^*(v+h)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds dv.$$

Disto, de u^* ser absolutamente contínua e de $s \rightarrow \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1}$ ser Lebesgue-

mensurável, podemos fazer uma troca de variável na integral da direita obtendo

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{u^*(v+h) - u^*(v)}{h} \right)^2 dv &\leq \\ &\leq \frac{c^{-1}}{h} \int_a^b \int_v^{v+h} \left(\int_{\{u=u^*(x)\}} |\nabla u| dH^{n-1} \right) u^{*'}(x) dx dv = \frac{c^{-1}}{h} I, \end{aligned}$$

onde I é a integral tripla da direita. Para cada v , podemos definir $y = x - v$ e fazer uma troca de variável obtendo

$$I = \int_a^b \int_0^h \int_{\{u=u^*(y+v)\}} |\nabla u| dH^{n-1} \cdot u^{*'}(y+v) dy dv.$$

Se aplicarmos o Teorema de Fubini e em seguida fizermos uma troca de variável, obteremos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h \int_a^b \int_{\{u=u^*(y+v)\}} |\nabla u| dH^{n-1} \cdot u^{*'}(y+v) dv dy = \\ &= \int_0^h \int_{u^*(y+a)}^{u^*(y+b)} \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds dy \leq \\ &\leq \int_0^h \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{u=s\}} |\nabla u| dH^{n-1} ds dy \leq h \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

A última desigualdade veio da fórmula da coárea. Assim,

$$\int \left(\frac{u^*(v+h) - u^*(v)}{h} \right)^2 dv \leq \frac{c^{-1}}{h} \cdot h \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = c^{-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Como a estimativa independe de h , segue-se o Teorema (ver [G.T], pag. 162). \diamond

1.16 LEMA: Seja $dV_u(t)$ a medida de Lebesgue Stieltjes induzida por $V_u(t)$ para $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então

$$(i) \quad dV_u(t) = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} dt + dS(t),$$

onde $S(t) = |\{u < t\} \cap \{|\nabla u| = 0\}|$. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ou se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, onde Ω é conexo, então

$$(ii) \quad u^{*'}(V_u(t)) \leq \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} \right)^{-1} \text{ q.s. em } (\inf_{\text{ess } u}, \sup_{\text{ess } u}).$$

Se $dS(t)$ é puramente descontínua*, então valem: 1) $dS(t) = \sum_i |\{u = t_i\}| d\delta_{t_i}(t)$, onde os t_i 's são enumeráveis e $tq |\{u = t_i\}| > 0$; 2) a igualdade em (ii).

DEM: (i) Note que $V_u(t) = |\{u < t\}| = |\{u < t, |\nabla u| > 0\}| + |\{u < t, |\nabla u| = 0\}|$. Seja $g = \chi_{E(t)} |\nabla u|^{-1}$, onde $E(t) = \{u < t, |\nabla u| > 0\}$. Logo $|E(t)| = \int_{\Omega} g |\nabla u| dx$. Disto e da fórmula da córea

$$\begin{aligned} |E(t)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{u=s\}} \chi_{\{u < t, |\nabla u| > 0\}} \cdot |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds = \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{\{u=s\}} \chi_{\{|\nabla u| > 0\}} \cdot |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Onde $|\nabla u| = 0$ adotaremos $|\nabla u|^{-1} = +\infty$. Também temos

$$0 = \int_{\Omega} \chi_{\{|\nabla u| = 0\}} \cdot |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{u=t\}} \chi_{\{|\nabla u| = 0\}} dH^{n-1} dt$$

e, assim,

$$H^{n-1}(\{u = t, |\nabla u| = 0\}) = 0 \text{ quase sempre.} \quad (1.24)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} &= \int_{\{u=s\}} \chi_{\{|\nabla u| \geq 0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} = \\ &= \int_{\{u=s\}} \chi_{\{|\nabla u| > 0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} + \int_{\{u=s\}} \chi_{\{|\nabla u| = 0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} = \\ &= \int_{\{u=s\}} \chi_{\{|\nabla u| > 0\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} \text{ q.s..} \end{aligned}$$

Logo $|E(t)| = \int_{-\infty}^t \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds$. Então

$$V_u(t) = \int_{-\infty}^t \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds + |\{u < t, |\nabla u| = 0\}|.$$

* Uma medida é puramente descontínua se é da forma $\sum_{i=1}^{\infty} c_i d\delta_{t_i}$, onde $d\delta_{t_i}$ é a medida de massa um concentrada em t_i .

(ii) Primeiro mostraremos que $u^*(V_u(t)) = \frac{1}{|\nabla u(t)|}$ q.s. em $(\text{infess } u, \text{supess } u)$. Seja $A = \{t \in (\text{infess } u, \text{supess } u) : \text{n\~{o} existe } u^*(V_u(t))\}$. Logo, por P(8), $V_u(A) \subset \{v \in (0, |\Omega|) : \text{n\~{o} existe } u^*(v)\} = B$. Portanto, $u^*(V_u(A)) \subset u^*(B)$. Sabemos que u^* é absolutamente contínua localmente em $(0, |\Omega|)$ pelo Teorema (1.14) e $|B| = 0$, pois u^* é crescente, logo $|u^*(B)| = 0$ e, assim, $|u^*(V_u(A))| = 0$. Por P(12), $u^*(V_u(A)) = A$. Logo $|A| = 0$. Seja $C = \{t \in (\text{infess } u, \text{supess } u) : \text{n\~{o} existe } V'_u(t)\}$. Portanto, $|C| = 0$. Então $|A \cup C| = 0$. Seja $t_0 \in (A \cup C)^c \cap (\text{infess } u, \text{supess } u)$. Temos que existem $V'_u(t_0)$, $u^*(V_u(t_0))$ e

$$V'_u(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_u(t) - V_u(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_u(t) - V_u(t_0)}{u^*(V_u(t)) - u^*(V_u(t_0))} = \frac{1}{u^*(V_u(t_0))}.$$

Assim, segue-se a igualdade q.s.. Logo $u^*(V_u(t))$ é mensurável. Pela parte (i),

$$V_u(t) = \int_{-\infty}^t \int_{\{u=s\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} ds + S(t). \quad (1.25)$$

Como $S(t)$ é crescente e a integral que aparece em (1.25) é absolutamente contínua, então

$$V'_u(t) = \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} + S'(t) \geq \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1} \quad \text{q.s..}$$

Logo $\frac{1}{u^*(V_u(t))} \geq \int_{\{u=t\}} |\nabla u|^{-1} dH^{n-1}$ q.s. o que conclui (ii). Para completar o lema, note que a parte descontínua da medida $S(t)$ é da forma $\sum c_i d\delta_{t_i}$, onde $c_i = \lim_{t \rightarrow t_i^+} S(t) - S(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} |\{t_i \leq u < t, |\nabla u| = 0\}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ t_i \leq u < t_i + \frac{1}{k}, |\nabla u| = 0 \right\} \right| = |\{u = t_i, |\nabla u| = 0\}|$. Logo a parte descontínua da medida $dS(t)$ é

$$dS_s(t) = \sum_{t_i < t} |\{u = t_i, |\nabla u| = 0\}| d\delta_{t_i}.$$

Se $dS(t)$ for puramente descontínua, então $dS(t) = dS_s(t)$ o que conclui o lema. \diamond

1.17 PROPOSIÇÃO: Se ψ é um ponto crítico do problema (1.1) e (1.5), então

$$(i) \int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1} \geq J(\psi) \left(\frac{S^2(t)}{S^2(t)+1} \right) \quad \text{q.s.,}$$

onde $S(t) = H^{n-1}(\{\psi=t\})$, e

$$(ii) 0 \leq \psi^{*'}(v) \leq \frac{J(\psi)}{\left\{ 1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v)^{\frac{2(n-1)}{n}} \right\}}.$$

DEM (i): Seja $S(t) = H^{n-1}(\{\psi=t\})$. Por (1.24) do Lema (1.16), vale

$$H^{n-1}(\{\psi=t, |\nabla\psi|=0\}) = 0, \quad (1.26)$$

para quase todo t . Também temos do Lema (1.16) que

$$\int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi|^{-1} dH^{n-1} < \infty \quad \text{quase sempre.} \quad (1.27)$$

Finalmente, aplicando a fórmula da coárea, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1} dt = \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx < \infty,$$

de onde se deduz que

$$\int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1} < \infty \quad \text{q.s..} \quad (1.28)$$

Logo, para os t 's que satisfazem (1.26), (1.27) e (1.28), concluímos pela Observação (1.11), que $\int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1}$ e $\int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi|^{-1} dH^{n-1}$ são positivos e, portanto, vale

$$\left(\int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi|^{-1} dH^{n-1} \right)^{-1} \leq (S(t))^{-2} \int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1} \quad \text{q.s..}$$

Aplicando a parte (ii) do Lema (1.16), temos que

$$\psi^{*'}(V_{\psi}(t)) \leq (S(t))^{-2} \int_{\{\psi=t\}} |\nabla\psi| dH^{n-1}, \quad (1.29)$$

para quase todo $t \in (\text{infess } \psi, \text{supess } \psi)$. Para os t 's no complementar deste intervalo, vale a desigualdade do enunciado, pois aplicando a fórmula da coárea concluímos que $S(t) = 0$ q.s. em $(-\infty, \text{infess } \psi) \cup (\text{supess } \psi, +\infty)$. De (1.29) e do Teorema (1.6), segue que

$$J(\psi) - \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi| dH^{n-1} \leq (S(t))^{-2} \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi| dH^{n-1} \quad \text{q.s.}$$

Isolando $\int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi| dH^{n-1}$ conclui-se o resultado.

(ii) Vimos na parte (i) que

$$\begin{aligned} (H^{n-1}(\{\psi=t\}))^2 &\leq \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi|^{-1} dH^{n-1} \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi| dH^{n-1} \leq \\ &\leq \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi|^{-1} dH^{n-1} (J(\psi) - \psi^{*'}(V_\psi(t))) \quad \text{q.s.} \end{aligned}$$

A última desigualdade segue do Teorema (1.6).

Agora usaremos a desigualdade acima e uma versão da desigualdade isoperimétrica (ver Lema (1.10)). Dela segue

$$\left[n\omega_n^{1/n} (|\Omega| - V_\psi(t))^{n^{11}/n} \right]^2 \leq \int_{\{\psi=t\}} |\nabla \psi|^{-1} dH^{n-1} \cdot (J(\psi) - \psi^{*'}(V_\psi(t))) \quad \text{q.s.}$$

Disto e da parte (ii) do Lema (1.16), para quase todo t tq $\psi^{*'}(V_\psi(t)) \neq 0$, vale

$$\left[n\omega_n^{1/n} (|\Omega| - V_\psi(t))^{n^{11}/n} \right]^2 \leq (\psi^{*'}(V_\psi(t)))^{-1} \cdot (J(\psi) - \psi^{*'}(V_\psi(t))).$$

Isolando $\psi^{*'}(V_\psi(t))$ conclui-se que

$$\psi^{*'}(V_\psi(t)) \leq J(\psi) \cdot \left[1 + n^2 \omega_n^{c/2n} (|\Omega| - V_\psi(t))^{2-n^{11}/n} \right]^{-1}.$$

Claramente esta desigualdade continua valendo se $\psi^{*'}(V_\psi(t)) = 0$, assim, esta vale quase sempre. Agora veremos que vale a desigualdade do enunciado.

Seja $v_0 \in [0, |\Omega|]$. Seja $t_0 = \sup \{t : V_\psi(t) \leq v_0\}$. Logo, pela continuidade à esquerda de V_ψ , $V_\psi(t_0) \leq v_0$ e, por definição de t_0 , $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V_\psi(t) \geq v_0$. Portanto,

$$\left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - V_\psi(t))^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1} \leq \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1}$$

q.s. em $[0, t_0]$, pois neste intervalo $V_\psi(t) \leq v_0$.

Logo $\psi^{*'}(V_\psi(t)) \leq J(\psi) \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1}$ q.s. em $[0, t_0]$. Observe que ψ^* é absolutamente contínua em $[0, |\Omega|]$, pois ψ^* é absolutamente contínua em compactos de $(0, |\Omega|)$, é decrescente e contínua em $[0, |\Omega|]$.

Primeiro, suponha que $v_0 < \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_\psi(t)$. Portanto, usando a última desigualdade, o fato de ψ^* ser absolutamente contínua e a Propriedade (17), conclui-se que

$$\psi^*(v_0 + h) - \psi^*(v_0) \leq h \cdot J(\psi) \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1},$$

onde h é tq $v_0 + h \leq V_\psi(t_0^+)$. Conclui-se assim que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi^*(v_0 + h) - \psi^*(v_0)}{h} \leq J(\psi) \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1} \quad (1.30)$$

Agora suponha que $v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_\psi(t)$. Seja $t_1 > t_0$ tq $V_\psi(t_1)$ seja tão próximo de v_0 que permita concluir que

$$\begin{aligned} & \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - V_\psi(t_1))^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1} < \\ & < \varepsilon + \left[1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Fazendo o raciocínio do primeiro caso, pois $v_0 < V_\psi(t_1) \leq V_\psi(t_1^+)$ (ver P(9)), conclui-se que

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\psi^*(v_0 + h) - \psi^*(v_0)}{h} \leq J(\psi) \left[\varepsilon + \left(1 + n^2 \omega_n^{2/n} (|\Omega| - v_0)^{2-n^*1-n/n}\right)^{-1} \right].$$

Como $\mathcal{E} > 0$ é arbitrário, concluímos que vale (1.30). Portanto, não só concluímos que para todo v que tem derivada vale a desigualdade do enunciado, como também que o limte superior das razões incrementais são limitados por esta cota para todo v . \diamond

1.18 OBSERVAÇÃO: Usando a idéia de um método numérico introduzido por Harold Grad, abordaremos um meio geométrico de analisar o problema variacional. Para isto, definiremos em \overline{W} um funcional D , que só depende das curvas de nível da função em que está sendo aplicado, isto é, se $\psi_1, \psi_2 \in \overline{W}$ possuem a mesma família de curvas de nível, então $D(\psi_1) = D(\psi_2)$. Primeiro, dado $\psi \in \overline{W}$, defina

$$\overline{V}(x) = V_\psi(\psi(x)).$$

Observe que se duas função ψ_1 e ψ_2 tem os mesmos conjuntos de nível, então as suas respectivas \overline{V}_1 e \overline{V}_2 são iguais.

$$\text{Agora seja } K(v) = \int_{\{\overline{V}(x)=v\}} |\nabla \overline{V}| dH^{n-1}.$$

Finalmente, defina $D(\psi) = \left(\int_0^{|\Omega|} \frac{1}{1+K(v)} dv \right)^{-1}$. Veremos que o funcional D tem certas semelhanças com o funcional J . O ideal seria que D possuísse mínimo e este fosse igual ao mínimo de J . Entretanto, esta é uma questão em aberto. Porém, se D satisfizer

- (i) D tem um ponto de mínimo ψ_0 em \overline{W} ,
 - (ii) existe $a > 0$ tq $\psi_0^*(v) \geq a$ q.s. e
 - (iii) existe $b > 0$ tq $\psi_1^*(v) \geq b$ q.s., onde ψ_1 é ponto de mínimo de J em \overline{W} ,
- então $\min_{\overline{W}} D = \min_{\overline{W}} J$.

As condições (i) e (ii) garantem que $\min D \geq \min J$, enquanto (i) e (iii) implicam em $\min D \leq \min J$. Inicialmente veremos ser possível supor que $\psi_0^*(0) = 0$. Suponhamos que $\psi_0^*(0) = t_0 \in [-\infty, 0)$. Logo, por P(8), infess

$\psi_0 < 0$ e, portanto, $|\{\psi_0 < 0\}| = v_0 > 0$. Seja ψ_0^+ a parte positiva de ψ_0 . Note que se $x \in \{\psi_0 \leq 0\}$, então $V_{\psi_0^+}(\psi_0^+(x)) = V_{\psi_0^+}(0) = |\{\psi_0^+ < 0\}| = 0$, e se $x \in \{\psi_0 > 0\}$, pela demonstração de (i) de P(16), segue que $V_{\psi_0^+}(\psi_0^+(x)) = V_{\psi_0}(\psi_0(x)) \geq V_{\psi_0}(0) \geq v_0$. Assim, $\{V_{\psi_0^+}(\psi_0^+(x)) = v\} = \emptyset$ quando $v \in (0, v_0)$ e $V_{\psi_0^+} \circ \psi_0^+ = V_{\psi_0} \circ \psi_0$ em $\{V_{\psi_0^+}(\psi_0^+(x)) = v\} = \{V_{\psi_0}(\psi_0(x)) = v\}$ para $v \in (v_0, |\Omega|)$. Logo $K_{\psi_0^+}(v) = 0$ em $(0, v_0)$ e $K_{\psi_0^+}(v) = K(v)$ em $(v_0, |\Omega|)$. Portanto, $D(\psi_0^+) \leq D(\psi_0)$.

Agora veremos que para uma f conveniente, estritamente crescente, vale

$$\int_{\{f \circ \psi_0 = t\}} |\nabla(f \circ \psi_0)| dH^{n-1} + (f \circ \psi_0)^{\star'}(V_{f \circ \psi_0}(t)) = 1 \text{ q.s. em } (0, \text{sup ess } \psi_0).$$

$$\text{Seja } f(t) = \int_0^t \frac{1}{\int_{\{\psi_0 = s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1} + \psi_0^{\star'}(V_{\psi_0}(s))} ds.$$

Note que como $\psi_0^{\star'}(v) \geq a$ q.s., $\psi_0^{\star'}$ leva conjuntos de medida positiva em conjuntos de medida positiva. Assim, dado um conjunto $B \subset [0, \text{sup ess } \psi_0]$ de medida 0, então $|V_{\psi_0}(B)| = 0$, pois por P(12), $B = \psi_0^{\star'}(V_{\psi_0}(B))$. Logo V_{ψ_0} é absolutamente contínua e, portanto, $\psi_0^{\star'}(V_{\psi_0}(s)) \geq a$ q.s. em $(0, \text{sup ess } \psi_0)$. Disto, concluímos que o integrando é positivo e limitado superiormente por a^{-1} . Logo f' é limitada superiormente q.s. por a^{-1} . Também temos $f' > 0$ q.s., pois existe $\psi_0^{\star'}(V_{\psi_0})$ e, pelo Teorema (1.17), existe $\int_{\{\psi_0 = s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}$ q.s. Logo f é estritamente crescente e de Lipschitz com $f(0) = 0$. Portanto, $f \circ \psi_0 \in W_0^{1,2}$. A partir disto e de P(14), temos que

$$\int_{\{f \circ \psi_0 = t\}} |\nabla(f \circ \psi_0)| dH^{n-1} + (f \circ \psi_0)^{\star'}(V_{f \circ \psi_0}(t)) = \int_{\{\psi_0 = s\}} f'(s) |\nabla \psi_0| dH^{n-1} + f'(s) \psi_0^{\star'}(V_{f \circ \psi_0}(t)), \quad (1.31)$$

onde $s = f^{-1}(t)$. Também temos, por P(14), que $V_{f \circ \psi_0}(f(s)) = V_{\psi_0}(s)$. De (1.31)

e da definição de f , conclui-se que

$$\int_{\{f \circ \psi_0 = t\}} |\nabla(f \circ \psi_0)| dH^{n-1} + (f \circ \psi_0)^{*'} (V_{f \circ \psi_0}(t)) = \\ f'(s) \left[\int_{\{\psi_0 = s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1} + \psi_0^{*'} (V_{\psi_0}(s)) \right] = 1. (1.32)$$

Observe que multiplicando f por $c_0 = (f(\text{sup ess } \psi_0))^{-1}$ temos que $(c_0 f) \circ \psi_0 \in \overline{W}$. Seja $f_1 = c_0 f$. Note que $f_1(\text{sup ess } \psi_0) = 1$ e $f_1(0) = 0$. Também temos, pela demonstração do Teorema (1.6) e por (1.32), que

$$J(f_1 \circ \psi_0) = \int_0^1 \left[\int_{\{f_1 \circ \psi_0 = t\}} |\nabla(f_1 \circ \psi_0)| dH^{n-1} + (f_1 \circ \psi_0)^{*'} (V_{f_1 \circ \psi_0}(t)) \right] dt \\ = \int_0^1 c_0 \cdot 1 dt = (f(\text{sup ess } \psi_0))^{-1}.$$

Agora veremos que

$$K(v) = \int_{\{\overline{V} = v\}} V'_{\psi_0}(\psi_0(x)) \cdot |\nabla \psi_0| dH^{n-1} < \infty \quad \text{q.s..}$$

De $\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(s)) \geq a$ q.s. e de P(12), segue que V_{ψ_0} é de Lipschitz e, assim, $V_{\psi_0}(\psi_0(x)) \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\nabla \overline{V} = (V'_{\psi_0} \circ \psi_0) \cdot \nabla \psi_0$. Portanto, para $\Omega' = \{a \leq \overline{V} \leq b\}$, temos

$$\int_{\Omega'} |\nabla \overline{V}|^2 dx = \int_{\Omega'} V'_{\psi_0} |\nabla \psi_0| \cdot |\nabla \overline{V}| dx = \int_a^b \int_{\{\overline{V} = v\}} V'_{\psi_0} |\nabla \psi_0| dH^{n-1} dv.$$

Por raciocínio análogo,

$$\int_{\Omega'} |\nabla \overline{V}|^2 dx = \int_a^b K(v) dv.$$

Como a e b são arbitrários, concluímos o desejado. Assim,

$$D(\psi_0) = \left(\int_0^{|\Omega|} \frac{1}{1 + \int_{\{\overline{V} = v\}} V'_{\psi_0} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}} dv \right)^{-1}.$$

Por P(9), V_{ψ_0} é estritamente crescente. Logo $\{V_{\psi_0} \circ \psi_0 = v\} = \{\psi_0 = V_{\psi_0}^{-1}(v)\}$. A partir disto, de V_{ψ_0} ser absolutamente contínua e fazendo a mudança de variável $v = V_{\psi_0}(s)$, segue que

$$D(\psi_0) = \left(\int_0^{\sup \text{ess } \psi_0} \frac{V'_{\psi_0}(s)}{1 + V'_{\psi_0}(s) \int_{\{\psi_0=s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}} ds \right)^{-1}.$$

Por P(12),

$$\begin{aligned} D(\psi_0) &= \left(\int_0^{\sup \text{ess } \psi_0} \frac{(\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(s)))^{-1}}{1 + (\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(s)))^{-1} \int_{\{\psi_0=s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}} ds \right)^{-1} = \\ &= \left(\int_0^{\sup \text{ess } \psi_0} \frac{1}{\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(s)) + \int_{\{\psi_0=s\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}} ds \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Agora faremos a troca de variável $s = f_1^{-1}(t)$. Como f é absolutamente contínua com $f' > 0$ q.s., então f_1^{-1} é absolutamente contínua. Assim,

$$\begin{aligned} D(\psi_0) &= \left[\int_0^1 \frac{(f_1^{-1})'(t)}{\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(f_1^{-1}(t))) + \int_{\{\psi_0=f_1^{-1}(t)\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1}} dt \right]^{-1} = \\ &= \left[\int_0^1 \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(t)) \left[\psi_0^{*'}(V_{\psi_0}(f_1^{-1}(t))) + \int_{\{\psi_0=f_1^{-1}(t)\}} |\nabla \psi_0| dH^{n-1} \right]} dt \right]^{-1}. \end{aligned}$$

De (1.32) e $f_1 = cf$, temos que o denominador do integrando em (1.33) é igual a $(f(\sup \text{ess } \psi_0))^{-1}$ q.s. em $(0, \sup \text{ess } \psi_0)$. A partir disto, de f_1^{-1} ser absolutamente contínua e de (1.34), podemos dizer que

$$D(\psi_0) = \left[\int_0^1 f(\sup \text{ess } \psi_0) dt \right]^{-1} = \frac{1}{f(\sup \text{ess } \psi_0)} = J(f_1 \circ \psi_0) \geq \frac{\min J}{W}.$$

Portanto, $\min D \geq \min J$ em \overline{W} . Vejamos a outra desigualdade. Podemos concluir de forma semelhante que

$$D(\psi_1) = \left[\int_0^1 \frac{1}{\int_{\{\psi_1 = s\}} |\nabla \psi_1| dH^{n-1} + \psi_1^{*'}(V_{\psi_1}(s))} ds \right]^{-1}.$$

Disto e do Teorema (1.6), segue que

$$D(\psi_1) = \left[\int_0^1 \frac{1}{J(\psi_1)} ds \right]^{-1} = J(\psi_1) = \frac{\min J}{\overline{W}}.$$

Logo $\frac{\min D}{\overline{W}} \leq \frac{\min J}{\overline{W}}$. \diamond

CAPÍTULO 2

O Problema Variacional para Funções com Conjuntos de Nível Convexos

Quando o domínio Ω for convexo, é natural esperar que os conjuntos de nível do minimizador de J em \bar{W} também sejam convexos. Por esta razão definiremos um subespaço de funções de \bar{W} . Os conjuntos de nível das funções pertencentes a este subespaço são convexos, embora a definição inicial não seja exatamente esta. A seguir mostraremos que J é minimizado neste novo conjunto. O nosso desejo seria que um destes minimizadores também optimizassem J em \bar{W} . Nos capítulos 3 e 4 mostraremos resultados que nos fazem acreditar que tal deva ocorrer. No entanto, esta é uma questão em aberto.

Alguns teoremas deste capítulo foram inicialmente provados em [L.S.] para o caso bidimensional. No entanto, apresentaremos novas demonstrações válidas em qualquer dimensão finita. Este é o caso do Teorema (2.7) cujos argumentos dados em [L.S.] só podem ser feitos em duas dimensões. A Proposição (2.5) também foi demonstrada em [L.S.] somente para o caso bidimensional, no entanto, o mesmo poderia ser feito mais geralmente. A demonstração apresentada naquele trabalho, embora interessante, é também complexa devido a argumentos extremamente geométricos. Em seu lugar outra demonstração será dada.

2.1 DEFINIÇÃO: Para Ω aberto, convexo e limitado defina $C_p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \text{exista um conjunto } \{t_n\} \text{ denso em } (\inf u, \sup u) \text{ e existam conjuntos convexos } C_n \text{ tq } u \geq t_n \text{ q.s. em } C_n \text{ e } u \leq t_n \text{ q.s. em } \Omega \setminus C_n\}$.

2.2 OBSERVAÇÃO: Podemos dar uma caracterização mais simples e mais precisa para \mathcal{C}_p : $\mathcal{C}_p = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \forall t \in (\inf u, \sup u), \text{ exista } C \text{ conjunto convexo tq } u \geq t \text{ q.s. em } C \text{ e } u < t \text{ q.s. em } \Omega \setminus C\}$.

De fato, dado $t \in (\inf u, \sup u)$, sejam $\{t_n\}$ e $\{C_n\}$ da Definição (2.1) tq $t_n \uparrow t$ e $t_n \neq t$. Seja $C = \bigcap_n C_n$. Logo C é convexo. Além disto,

- $u \geq t$ em C q.s.: Sejam $F_n = \{x \in C_n : u(x) < t_n\}$. Pela definição de C_n , $|F_n| = 0$. Seja $F = \bigcup_n F_n$. Logo $|F| = 0$. Se $x \in C \setminus F$, então $x \in C_n$ e $x \notin F_n \forall n$. A partir disto, $u(x) \geq t_n \forall n$ e, assim, $u(x) \geq t$. Portanto, $u \geq t$ em C q.s..

- $u < t$ em $\Omega \setminus C$ q.s.: Sejam $E_n = \{x \notin C_n : u(x) > t_n\}$. Pela definição de C_n , $|E_n| = 0$. Seja $E = \bigcup_n E_n$. Logo $|E| = 0$. Se $x \in (\Omega \setminus C) \setminus E$, então $x \in \Omega \setminus C$ e, portanto, existe n_0 tq $x \notin C_{n_0}$. De $x \notin E$, segue que $x \notin E_n \forall n$, logo $x \notin E_{n_0}$. De $x \notin E_{n_0}$ e $x \notin C_{n_0}$, temos que $u(x) \leq t_{n_0} < t$. Assim, $u < t$ em $(\Omega \setminus C) \setminus E$ justificando a observação. \diamond

2.3 OBSERVAÇÃO: Seja $u \in \mathcal{C}_p$. Dado $t \in (\inf_{\text{ess}} u, \sup_{\text{ess}} u)$, sejam $(t_{1,n})$ subsequência de (t_n) tq $t_{1,n} \uparrow t$ ($t_{1,n} \neq t$) e $C_{1,n}$ os respectivos conjuntos convexos. Analogamente, sejam $(t_{2,n})$ subsequência de (t_n) tq $t_{2,n} \downarrow t$ ($t_{2,n} \neq t$) e $C_{2,n}$ os conjuntos convexos associados.

$$\text{Defina } \Gamma(t) = \left(\overline{\bigcap_n C_{1,n}} \right) \setminus \left(\text{int } \bigcup_n C_{2,n} \right).$$

Note que $\{u = t\}$ difere de $\Gamma(t)$ por um conjunto de medida zero, pois pela demonstração da Observação (2.2), $u \geq t$ q.s. em $\bigcap_n C_{1,n}$ e $u < t$ q.s. em $\Omega \setminus \bigcap_n C_{1,n}$.

Por outro lado, $u > t$ q.s. em $\bigcup_n C_{2,n}$: se $x \in \bigcup_n C_{2,n} \setminus F$, onde F está definido na Observação (2.2), então existe n_0 tq $x \in C_{2,n_0}$ e $x \notin F_{n_0}$. Assim, $u(x) \geq t_{n_0} > t$.

Também vale $u \leq t$ q.s. em $\Omega \setminus \bigcup_n C_{2,n}$: Se $x \in \left(\Omega \setminus \bigcup_n C_{2,n} \right) \setminus E$, então $x \notin C_{2,n}$ e $x \notin E_n \forall n$, logo $u(x) \leq t_{2,n} \forall n$ e, portanto, $u(x) \leq t$.

Assim, concluímos que se $|\{u = t\}| > 0$, então $\Gamma(t)$ é uma região limitada pelas curvas convexas $\partial\left(\bigcap_n C_{1,n}\right)$ e $\partial\left(\bigcup_n C_{2,n}\right)$. Se $|\{u = t\}| = 0$, como os conjuntos $\bigcap_n C_{1,n}$ e $\bigcup_n C_{2,n}$ são convexos, então $\Gamma(t)$ é uma curva convexa.

Se $t = \infess u$, então tomaremos somente os conjuntos $C_{2,n}$'s e pode ser mostrado que $\{u = t\}$ e $\Omega \setminus \bigcup_n C_{2,n}$ diferem-se por um conjunto de medida nula. O mesmo pode ser dito para $\{u = t\}$ e $\bigcap_n C_{1,n}$ quando $t = \sup ess u$. \diamond

2.4 LEMA: Se $\psi_n \rightarrow \psi$ em $L^p(\Omega)$, então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, existe uma sequência (t_n) tq $t_n \uparrow t$ ($t_n \neq t$) e

$$|\{\psi_n \geq t_n\} \setminus \{\psi \geq t\}| + |\{\psi \geq t\} \setminus \{\psi_n \geq t_n\}| \rightarrow 0.$$

DEM.: Como $\{\psi \geq t\} = \bigcap_k \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k} \right\}$, então

$$\bigcap_k \left(\left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k} \right\} \setminus \{\psi \geq t\} \right) = \left(\bigcap_k \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k} \right\} \right) \setminus \{\psi \geq t\} \neq \emptyset.$$

$$\text{Assim, } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{n=1}^k \left(\left\{ \psi \geq t - \frac{1}{n} \right\} \setminus \{\psi \geq t\} \right) \right| = 0.$$

Seja k_1 tq $\left| \bigcap_{n=1}^{k_1} \left(\left\{ \psi \geq t - \frac{1}{n} \right\} \setminus \{\psi \geq t\} \right) \right| < \frac{1}{4}$. Note que

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{k_1} \left(\left\{ \psi \geq t - \frac{1}{n} \right\} \setminus \{\psi \geq t\} \right) &= \left(\bigcap_{n=1}^{k_1} \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{n} \right\} \right) \setminus \{\psi \geq t\} \\ &= \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k_1} \right\} \setminus \{\psi \geq t\}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \left| \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k_1} \right\} \setminus \{\psi \geq t\} \right| < \frac{1}{4}. \quad (2.1)$$

Podemos supor s.p.g. que $\frac{1}{k_1} < \frac{1}{4}$. Como $\psi_n \rightarrow \psi$ em $L^p(\Omega)$, então $\psi_n \rightarrow \psi$

em medida, assim, para $n \geq n_1$, $|\psi_n - \psi| < \frac{1}{2k_1}$ em $\Omega \setminus E$, onde $|E| < \frac{1}{4}$. Podemos supor $E = \left\{x \in \Omega : |\psi_n - \psi| \geq \frac{1}{2k_1}\right\}$. Mostraremos, para $n \geq n_1$, as seguintes desigualdades:

$$1^\circ) \left| \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \setminus \left\{ \psi \geq t \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{De } \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \setminus \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k_1} \right\} \subset \left\{ \psi_n - \psi \geq \frac{1}{2k_1} \right\} \subset E \text{ temos que}$$

$$\left| \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \setminus \left\{ \psi \geq t - \frac{1}{k_1} \right\} \right| \leq |E| < \frac{1}{4}.$$

A partir disto e de (2.1),

$$\left| \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \setminus \left\{ \psi \geq t \right\} \right| < \frac{1}{2} \text{ para } n \geq n_1.$$

$$2^\circ) \left| \left\{ \psi \geq t \right\} \setminus \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{Como } \left\{ \psi \geq t \right\} \setminus \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \subset \left\{ \psi - \psi_n \geq \frac{1}{2k_1} \right\} \subset E, \text{ então}$$

$$\left| \left\{ \psi \geq t \right\} \setminus \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \right| \leq |E| < \frac{1}{4}.$$

Concluimos assim que, para $n \geq n_1$,

$$\left| \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \setminus \left\{ \psi \geq t \right\} \right| + \left| \left\{ \psi \geq t \right\} \setminus \left\{ \psi_n \geq t - \frac{1}{2k_1} \right\} \right| < 1.$$

Se quiséssemos a desigualdade para $\frac{1}{2}$, tomaríamos $k_2 > k_1$ e $n_2 > n_1$ convenientes. Repetindo o processo sucessivamente, acharíamos, para $\frac{1}{m}$, $k_m > k_{m-1}$ e $n_m > n_{m-1}$. Logo, tomando $t_n = t - \frac{1}{2k_1}$ para $n \in \{n_1, \dots, n_2\}$, $t_n = t - \frac{1}{2k_1}$ para $n \in \{n_2, \dots, n_3\}$, etc, segue-se o resultado. \diamond

2.5 PROPOSIÇÃO: Dados $\psi_n \in C_p$ tq $\psi_n \rightarrow \psi$ fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$ ($p > 1$) e $t \in (\inf \psi, \sup \psi)$, então existe C conjunto convexo tq $\psi \geq t$ q.s. em C e $\psi \leq t$ q.s. em $\Omega \setminus C$.

DEM: Se $\psi_n \rightarrow \psi$ fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$, então existe uma subsequência (ψ_{n_k}) , que podemos supor s.p.g. ser (ψ_n) , tq $\psi_n \rightarrow \psi$ em $L^p(\Omega)$.

Pelo Lema (2.4), existe uma sequência (t_n) tq $t_n \uparrow t$, $t_n \neq t$ e

$$|\{\psi_n \geq t_n\} \setminus \{\psi \geq t\}| + |\{\psi \geq t\} \setminus \{\psi_n \geq t_n\}| \rightarrow 0.$$

Pela Observação (2.2), existem C_n 's, conjuntos convexos, tq

$$|\{\psi_n \geq t_n\} \setminus C_n| + |C_n \setminus \{\psi_n \geq t_n\}| = 0,$$

logo

$$|C_n \setminus \{\psi \geq t\}| + |\{\psi \geq t\} \setminus C_n| \rightarrow 0.$$

Tomaremos novamente uma subsequência (C_{n_k}) , (t_{n_k}) tq

$$|C_{n_k} \setminus \{\psi \geq t\}| + |\{\psi \geq t\} \setminus C_{n_k}| < \frac{1}{2^k}.$$

Chamaremos tais subsequências de (C_n) e (t_n) .

Seja $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n$. Note que:

1º) C é convexo.

2º) $\psi \geq t$ q.s. em C : por raciocínio análogo ao da Observação (2.2), 1ª parte, concluímos que $\psi \geq t$ q.s. em $\bigcap_{n=k}^{\infty} C_n \forall k$. Logo $\psi \geq t$ q.s. em $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=K}^{\infty} C_n \right)$.

3º) $\psi < t$ q.s. em $\Omega \setminus C$: sabemos que, para $k \in \mathbb{N}^*$, vale

$$\begin{aligned} \{\psi \geq t\} \setminus C &= \{\psi \geq t\} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n \right) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (\{\psi \geq t\} \setminus C_n) \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} (\{\psi \geq t\} \setminus C_n). \end{aligned}$$

Logo

$$|\{\psi \geq t\} \setminus C| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Como k é arbitrário, temos que $|\{\psi \geq t\} \setminus C| = 0$, ie, $|\{\psi \geq t\} \cap C^c| = 0$, portanto $\psi < t$ q.s. em $\Omega \setminus C$. \diamond

2.6 TEOREMA: O funcional J possui mínimo em $W \cap C_2$.

DEM: Para demonstrar este teorema, basta usar a demonstração do Teorema 1.1 e a Proposição (2.5). \diamond

O ideal seria mostrar que o mínimo de J sobre W possui curvas de nível convexas, isto é,

$$\min_{W \cap C_2} J = \min_W J,$$

esta, porém, é uma questão em aberto.

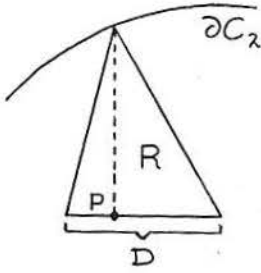
2.7 TEOREMA: Se $u \in C_p \cap L^\infty(\Omega)$, $p \geq n$, então existe \bar{u} tq $\bar{u} = u$ q.s. e \bar{u} é contínua.

DEM:

1ª Parte: Sejam t_1 e t_2 tq $\infess u < t_1 < t_2 < \supess u$. Pela Observação (2.2), existem C_1 e C_2 conjuntos convexas tq $\psi \geq t_1$ q.s. em C_1 e $\psi < t_1$ q.s. em $\Omega \setminus C_1$, onde $i \in \{1,2\}$. Logo $C_2 \subset C_1$. Provaremos que $\partial C_1 \cap \partial C_2 \cap \Omega = \emptyset$:

(i) Iniciaremos supondo que $\partial C_1 \cap \partial C_2 \cap \Omega \neq \emptyset$. Seja $P_0 \in \partial C_1 \cap \partial C_2 \cap \Omega$. Como $t_2 < \supess u$, $|\{u \geq t_2\}| > 0$. Logo $|C_2| > 0$. Disto e da convexidade de C_2 , temos $\text{int } C_2 \neq \emptyset$. Seja $y \in \text{int } C_2$. Seja $\delta > 0$ tq $B_\delta(y) \subset C_2$. Fazendo uma troca de coordenadas, podemos supor s.p.g. que $y = 0 = (0, \dots, 0)$ e $P_0 = (0, \dots, 0, 1)$. Seja D um disco $(n-1)$ -dimensional dado por $D = B_\delta(0) \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Em (ii) veremos que os pontos da fronteira ∂C_2 , que estão acima de D , formam o gráfico de uma função côncava definida em D .

(ii)



Dado $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) = P \in D$, considere a semi-reta $r = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t) \mid t \geq 0\}$. Como Ω é limitado, então $r \not\subset \Omega$. Seja $\bar{t} = \inf\{t \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t) \notin C_2\}$. Veremos agora que o cone aberto R da figura está contido no $\text{int } C_2$. De fato, existe $t_k \uparrow \bar{t}$ tq

$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t_k) \in r \cap C_2$. Por convexidade de C_2 , o cone R_k com base D e vértice no ponto $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t_k)$ está contido em C_2 . Logo $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \subset C_2$. Observe que, para $s < \bar{t}$, vale $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, s) \in \text{int } C_2$ e, para $t > \bar{t}$, ocorre $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t) \notin C_2$. Portanto, existe um único $t = \bar{t}$ tq $t > 0$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t) \in \partial C_2$ demonstrando o que desejávamos. Assim, sejam $f_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $F_2: D \rightarrow \partial C_2$ funções dadas por $f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) = \bar{t}$ e $F_2(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0))$. Podemos fazer o mesmo raciocínio para C_1 e Ω . Defina de forma análoga f e F para Ω , f_1 e F_1 para C_1 .

OBSERVAÇÕES: $f_1(0) = f_2(0) = 1$; $f_2(P) \leq f_1(P) \forall P \in D$, pois o pedaço de ∂C_2 que está sobre D , está também abaixo de ∂C_1 já que $C_2 \subset C_1$; f_1 e f_2 são de Lipschitz numa vizinhança de $y=0$, pois seus gráficos são côncavos. Tomando D menor, podemos supor s.p.g. que f_1 e f_2 são de Lipschitz em D . Seja M a constante de Lipschitz.

(iii) Agora veremos que existe um conjunto D' tq $u(F_1(P)) \leq t_1$ e $u(F_2(P)) \geq t_2$ para $P \in D'$, e $H^{n-1}(D \setminus D') = 0$. Sabemos que u é absolutamente contínua em toda reta que passa por $P, F_2(P), F_1(P)$ e $F(P)$ para $P \in D_1 \subset D$, onde D_1 é um conjunto conveniente tq $H^{n-1}(D \setminus D_1) = 0$. Primeiro mostraremos que existe um conjunto $D_2 \subset D_1$ tq $H^{n-1}(D \setminus D_2) = 0$ e $u(F_2(P)) \geq t_2 \forall P \in D_2$. Para isto, suponhamos o contrário. Então existe $E \subset D$ tq $H^{n-1}(E) > 0$ e $u(F_2(P)) < t_2 \forall P \in E$. Seja $P \in E \cap D_1$. Seja $\overline{PF_2(P)}$ o segmento de reta que une P e $F_2(P)$. Note que $u|_{\overline{PF_2(P)}}$ é absolutamente contínua e $u(F_2(P)) < t_2$. Logo $\int_{\overline{PF_2(P)}} \chi_{\{u < t_2\}} dH^1 =$

$\delta_p > 0$. Como a função $P \rightarrow \int_{PF_2(P)} \chi_{\{u < t_2\}} dH^1 = \int_0^\infty \chi_{\{u < t_2\} \cap C_2(P, \bullet)} dH^1$ é mensurável pelo Teorema de Tonelli, segue que $E_n = \{P \in E \cap D : \delta_p > \frac{1}{n}\}$ é mensurável. Como $E \cap D = \bigcup_n E_n$ e $H^{n-1}(E \cap D) > 0$, conclui-se que existe n_0 tq $H^{n-1}(E_{n_0}) > 0$. Logo

$$\begin{aligned} |C_2 \cap \{u < t_2\}| &= \int_{C_2} \chi_{\{u < t_2\}} dx \geq \int_E \int_P^{F_2(P)} \chi_{\{u < t_2\}} dH^1 dH^{n-1} \geq \\ &\geq \int_{E_{n_0}} \int_P^{F_2(P)} \chi_{\{u < t_2\}} dH^1 dH^{n-1} \geq \int_{E_{n_0}} \frac{1}{n_0} dH^{n-1} = H^{n-1}(E_{n_0}) \cdot \frac{1}{n_0} > 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo pela definição de C_2 . Assim, segue o resultado. A respeito de f e F definidas para Ω , pode-se dizer que $f(0) > f_1(0) = f_2(0) = 1$, pois $P_0 = (0, \dots, 0, 1) \in \Omega$ que é aberto. Como f é contínua também, podemos supor s.p.g. que $f > f_1, f_2$ em D . Portanto, a região que está sobre ∂C_1 e abaixo de $\partial \Omega$ é aberta. Logo, fazendo raciocínio análogo ao anterior, conclui-se que existe $D_3 \subset D$ tq $H^{n-1}(D \setminus D_3) = 0$ e $u(F_1(P)) \leq t_1 \forall P \in D_3$. Assim, tomando $D' = D_2 \cap D_3$, concluímos (iii).

Em (iv) veremos uma estimativa que irá permitir concluir a primeira parte da demonstração.

(iv) Seja $P \in D'$. Logo

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &\leq u(F_2(P)) - u(F_1(P)) = \int_{F_1(P)F_2(P)} \nabla u \cdot (0, \dots, 0, 1) dH^1 \leq \\ &\leq \left(\int_{F_2(P)F_1(P)} |\nabla u|^p dH^1 \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |F_2(P) - F_1(P)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo

$$(t_2 - t_1)^p \leq \int_{F_2(P)F_1(P)} |\nabla u|^p dH^1 \cdot |f_2(P) - f_1(P)|^{\frac{p}{q}}.$$

Usando a constante de Lipschitz M , temos $|f_1(P) - f_2(P)| \leq |f_1(P) - f_1(0)| + |f_1(0) - f_2(0)| + |f_2(0) - f_2(P)| \leq M|P| + M|P| = 2M|P| \leq 2Mr$, onde r é o raio de D . Assim

$$(t_2 - t_1)^p \leq \int_{F_2(P)F_1(P)} |\nabla u|^p dH^1 \cdot (2Mr)^{\frac{p}{q}}.$$

Portanto,

$$\int_{D'} (t_2 - t_1)^p dH^{n-1} \leq \int_{D'} \int_{F_2(P)F_1(P)} |\nabla u|^p dH^1 (2Mr)^{\frac{p}{q}} \cdot dH^{n-1}.$$

Logo

$$\frac{\omega_{n-1} r^{n-1} (t_2 - t_1)^p}{(2M)^{p/q} \cdot r^{p/q}} \leq \int_{D'} \int_{F_2(P)F_1(P)} |\nabla u|^p dH^1 \cdot dH^{n-1}.$$

Como $p \geq n$, $\frac{p}{q} = p - 1 \geq n - 1$ e, assim, $\frac{p}{q} - (n - 1) = \alpha \geq 0$. Portanto,

$$\frac{\omega_{n-1}}{(2M)^{p/q}} \cdot \frac{(t_2 - t_1)^p}{r^\alpha} \leq \int_{D'} \int_{F_1(P)F_2(P)} |\nabla u|^p dH^1 dH^{n-1} = \int_{\Omega_r} |\nabla u|^p dx, \quad (2.2)$$

onde Ω_r é a região limitada pelas superfícies ∂C_1 , ∂C_2 e pelo cilindro que tem o disco D como secção transversal (ver Figura 2.2).

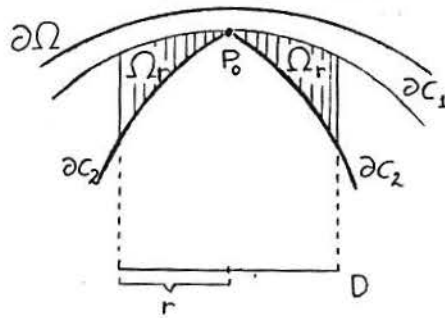


Fig. 2.2

Fazendo $r \rightarrow 0$, o lado direito de (2.2) converge a zero, pois $|\nabla u|^p$ é integrável em Ω e $\text{med}(\Omega_r) \rightarrow 0$. O mesmo não ocorre com o lado esquerdo de (2.2) o que é um absurdo. A contradição ocorreu pela suposição $\partial C_1 \cap \partial C_2 \cap \Omega \neq \emptyset$, concluindo a primeira parte.

2ª Parte: Sejam $t_1 = \infess u$ e $C_1 = \Omega$. Para $m \geq 2$, sejam (t_m) sequência densa em $(\infess u, \supess u)$ e C_m 's conjuntos convexos tq $u \geq t_m$ q.s.

em C_m e $u < t_m$ q.s. em $\Omega \setminus C_m$. Sejam E_m, F_m, E e F da Observação (2.2). Defina $\bar{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\bar{u}(x) = \sup\{t_m : x \in C_m\}.$$

Note que na primeira parte não foi usada a hipótese de u pertencer a $L^\infty(\Omega)$. Agora sim, faremos uso desta hipótese para demonstrar as seguintes propriedades a respeito de \bar{u} :

(i) $\bar{u} = u$ q.s.: seja $x \in (\Omega \setminus (E \cup F)) \cap \{x : u(x) \leq \text{sup ess } u\}$. Logo $x \in C_1$ e $x \notin F_1$, assim, $u(x) \geq t_1 = \text{inf ess } u$. Portanto, $u(x) \in [\text{inf ess } u, \text{sup ess } u]$. Temos que $\bar{u}(x) \leq u(x)$, pois se $x \in C_m$, então, como $x \notin F_m \subset F$, $u(x) \geq t_m$. Assim, $u(x) \geq \sup\{t_m : x \in C_m\} = \bar{u}(x)$.

Também vale que $\bar{u}(x) \geq u(x)$: se $u(x) = t_1$, então $\bar{u}(x) \geq u(x)$, pois $\bar{u}(x) \geq t_1 \forall x \in \Omega$. Se $u(x) > t_1$, existe (t_{n_k}) subsequência estritamente crescente tq $t_{n_k} \rightarrow u(x)$. Logo $u(x) > t_{n_k}$, e como $x \notin E_{n_k}$, então $x \in C_{n_k}$. Portanto, $\bar{u}(x) \geq t_{n_k} \forall n_k$, de onde segue-se o resultado. Logo $\bar{u}(x) = u(x) \forall x \in (\Omega \setminus (E \cup F)) \cap \{x \in \Omega : u(x) \leq \text{sup ess } u\}$. Como $|E \cup F| = 0$ e $|\{x \in \Omega : u(x) \leq \text{sup ess } u\}| = |\Omega|$, conclui-se que $|(\Omega \setminus (E \cup F)) \cap \{x \in \Omega : u(x) \leq \text{sup ess } u\}| = |\Omega|$.

(ii) \bar{u} é contínua em Ω : suponhamos que $\bar{u}(x) = t \in (\text{inf ess } u, \text{sup ess } u)$. Logo existe $t_{m_1} \leq t$ tq $t - t_{m_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Note que $x \in C_{m_1}$. Seja $t_{m_2} < t_{m_1}$ tq $t_{m_1} - t_{m_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $C_{m_1} \subset C_{m_2}$, $x \in C_{m_2}$ mas $x \notin \partial C_{m_2}$, pois senão $x \in \partial C_{m_1} \cap \partial C_{m_2} \cap \Omega$ o que seria absurdo. Portanto, $x \in \text{int} C_{m_2}$. Analogamente $x \in \text{int}(\Omega \setminus C_{m_3})$, onde $\bar{u}(x) < t_{m_3} < \bar{u}(x) + \varepsilon$. Logo $x \in \text{int}(C_{m_2} \setminus C_{m_3})$. Assim, existe $\delta > 0$ tq $B_\delta(x) \subset C_{m_2} \setminus C_{m_3}$. Se $y \in B_\delta(x)$, então $y \in C_{m_2}$ de onde $\bar{u}(y) = \sup\{t_m : y \in C_m\} \geq t_{m_2} > t - \varepsilon$. Também vale que $y \in C_{m_3}$ e, assim, $y \in C_m \forall t_m \geq t_{m_3}$ e, então, $\bar{u}(y) \leq t_{m_3} < \bar{u}(x) + \varepsilon$. Logo $|\bar{u}(y) - t| < \varepsilon \forall y \in B_\delta(x)$. Portanto, \bar{u} é contínua em x .

Suponhamos que $\bar{u}(x) = \text{inf ess } u$. Basta mostrar que $\bar{u}(y) < \bar{u}(x) + \varepsilon \forall y \in B_\delta(x)$ para δ pequeno. Tal raciocínio é igual ao anterior. O análogo pode

ser feito para $\bar{u}(x) = \sup_{\Omega} u$. \diamond

CAPÍTULO 3

Problema de Fronteiras Livres Aproximado

Neste capítulo faremos uma espécie de discretização do funcional J . Informalmente, as soluções destas discretizações devem aproximar-se da solução do problema original. Esta aproximação, no entanto, é uma questão a ser discutida, e cujo estudo não será feito nesta dissertação, pois ela pertence a uma etapa posterior da pesquisa. Contudo, há razões para efetuarmos tal formulação discretizada. A primeira delas é a possibilidade de fazer algumas estimativas para o mínimo do novo problema. A segunda, é a de dar um primeiro passo em direção a um dos objetivos do capítulo 2, isto é, criar uma solução para o problema original que tenha conjuntos de nível convexos quando Ω for convexo. Além disto, é mais fácil esboçar uma solução para este problema do que para o problema original, pois permite separar a influência dos dois termos em J .

Agora veremos uma "discretização" de

$$\int_0^{|\Omega|} (\psi^*)'^2 dv.$$

Primeiramente observe que

$$\int_0^{|\Omega|} (\psi^*)'^2 dv = \int_0^1 \psi^{*'}(V_\psi(t)) dt,$$

(ver argumento do teorema (1.6)). Por P(12), $\psi^{*'}(V_\psi(t)) = (V'_\psi(t))^{-1}$ q.s., logo

$$\int_0^{|\Omega|} (\psi^{*'}(v))^2 dv = \int_0^1 \frac{1}{V'_\psi(t)} dt. \quad (3.1)$$

Sejam $t_i = i/\bar{n}$, onde $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, 1, \dots, \bar{n}\}$. Claramente $\{t_i\}$ é uma partição regular de $[0,1]$. Substituiremos a integral da direita de (3.1) por

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{1}{V'_\psi(t_i)} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Agora substituiremos $V'_\psi(t_i)$ pela aproximação

$$\frac{V_\psi(t_i) - V_\psi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}},$$

obtendo $\sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{V_\psi(t_i) - V_\psi(t_{i-1})}$, que, de $t_i - t_{i-1} = 1/\bar{n}$, é igual a $\sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i|}$, onde $|A_i| = V_\psi(t_i) - V_\psi(t_{i-1}) = |\{t_{i-1} \leq \psi < t_i\}|$ com $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$.

Assim faz sentido definir o funcional

$$J_{\bar{n}}(\psi) = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i|}.$$

Observe que $|A_i|$ depende de ψ , assim $|A_i| = |A_i(\psi)|$.

A idéia é que, conseguindo minimizar $J_{\bar{n}}$ em um espaço conveniente, seja possível obter uma sequência de soluções $\psi_{\bar{n}}$ que acredita-se convergir fracamente para a solução do problema original. Como trabalharemos com funções que possuem curvas de nível convexas, espera-se que a solução do problema original também tenha esta propriedade.

Inicialmente procuraremos minimizar $J_{\bar{n}}$ sobre

$$F_0 = \left\{ \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C_2 : \psi^*(0) = 0 \text{ e } \psi^*(|\Omega|) = 1 \right\}.$$

Veremos que isto é impossível. No entanto, será provado que $J_{\bar{n}}$ possui mínimo em

$$F_1 = \left\{ \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C_2 : \psi^*(0) = 0 \text{ e } 1 - \frac{1}{\bar{n}} \leq \psi^*(|\Omega|) \leq 1 \right\},$$

que é o mesmo que o mínimo em

$$F_2 = \left\{ \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C_2 : \psi^*(0) = 0 \right\}.$$

Daqui em diante trabalharemos somente em duas dimensões, que é o caso de real interesse físico.

Agora mostraremos dois lemas que serão usados na demonstração do Teorema (3.3).

3.1 LEMA: Seja (u_n) uma sequência que converge à u em medida. Se V_u é contínua em $t \in \mathbb{R}$, então $V_{u_n}(t) \rightarrow V_u(t)$.

DEM: Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ onde V_u é contínua, seja $\mathcal{E} > 0$. Como $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} V_u(t) = V_u(t_0)$, então existe $\delta > 0$ tq $V_u(t_0 + \delta) - V_u(t_0) < \mathcal{E}$ e $V_u(t_0) - V_u(t_0 - \delta) < \mathcal{E}$. De $u_n \rightarrow u$ em medida, concluímos que existe n_0 tq $\forall n \geq n_0 |u_n - u| < \delta$ em E^c , onde $E = \{|u_n - u| \geq \delta\}$ e $|E| < \mathcal{E}$. Para demonstrarmos o lema, veremos as seguintes desigualdades:

1º) Demonstraremos que $|\{u < t_0\} \setminus \{u_n < t_0\}| < 2\mathcal{E}$: claramente $\{u < t_0\} \setminus \{u_n < t_0\} = \{u < t_0, u_n \geq t_0\}$. Assim, $\{u < t_0\} \setminus \{u_n < t_0\} \subset (\{u < t_0, u_n \geq t_0\} \cap E) \cup (\{u < t_0, u_n \geq t_0\} \cap E^c)$. Como $(\{u < t_0, u_n \geq t_0\} \cap E) \subset E$ e $(\{u < t_0, u_n \geq t_0\} \cap E^c) \subset \{u < t_0, u > u_n - \delta \geq t_0 - \delta\}$, concluímos que $|\{u < t_0\} \setminus \{u_n < t_0\}| \leq |E| + |\{u < t_0, u \geq t_0 - \delta\}| < \mathcal{E} + V_u(t_0) - V_u(t_0 - \delta) < 2\mathcal{E}$.

2º) Agora mostraremos que $|\{u_n < t_0\} \setminus \{u < t_0\}| < 2\mathcal{E}$: de forma análoga ao raciocínio anterior $\{u_n < t_0\} \setminus \{u < t_0\} \subset E \cup (\{u_n < t_0, u \geq t_0\} \cap E^c)$. Como $(\{u_n < t_0, u \geq t_0\} \cap E^c) \subset \{u - \delta < u_n < t_0, u \geq t_0\}$, então $|\{u_n < t_0\} \setminus \{u < t_0\}| \leq |E| + |\{u < t_0 + \delta, u \geq t_0\}| < \mathcal{E} + V_u(t_0 + \delta) - V_u(t_0) < 2\mathcal{E}$.

$$\text{Logo } |V_{u_n}(t_0) - V_u(t_0)| = \left| |\{u_n < t_0\}| - |\{u < t_0\}| \right| \leq 4\mathcal{E} \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, conclui-se o lema. Observe que mesmo para os pontos onde V_u é descontínua podemos dizer alguma coisa. De fato, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ valem:

1) $V_u(t_0) \leq \underline{\lim} V_{u_n}(t_0)$: V_u é contínua pela esquerda em \mathbb{R} , logo a 1ª desigualdade vale para t_0 e a partir disto, $V_u(t_0) - V_{u_n}(t_0) = |\{u < t_0\}| - |\{u_n < t_0\}| \leq |\{u < t_0\} \setminus \{u_n < t_0\}| \rightarrow 0$. Portanto,

$$V_u(t_0) - \underline{\lim} V_{u_n}(t_0) = \overline{\lim} (V_u(t_0) - V_{u_n}(t_0)) \leq 0.$$

2) $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) \geq \overline{\lim} V_{u_n}(t_0)$: dado $\varepsilon > 0$, seja $t_1 > t_0$ tq $V_u(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) < \varepsilon$ e tq V_u é contínua em t_1 . Logo $V_u(t_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{u_n}(t_1)$. Disto e de $V_{u_n}(t_1) \geq V_{u_n}(t_0) \forall n$, concluímos que $V_u(t_1) \geq \overline{\lim} V_{u_n}(t_0)$. Logo $\overline{\lim} V_{u_n}(t_0) - \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) \leq V_u(t_1) - \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_u(t) < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, segue-se o resultado. \diamond

3.2 LEMA: Sejam C_1 e C_2 dois conjuntos convexos e limitados de \mathbb{R}^2 tq $C_1 \subset C_2$ e $|C_1| < |C_2|$. Então, dado $m \in (|C_1|, |C_2|)$, é possível construir um convexo C tq $C_1 \subset C \subset C_2$ e $|C| = m$.

DEM: Primeiro defina um sistema de coordenadas xy qualquer. A seguir, sejam $x_1 = \inf\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in \overline{C_1} \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\}$ e $x_2 = \sup\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in \overline{C_1} \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\}$. Sejam também r_1 e r_2 as retas que passam por x_1 e x_2 respectivamente e que são paralelas ao eixo y (ver Figura (3.1)), e F a faixa compreendida entre r_1 e r_2 . É fácil mostrar

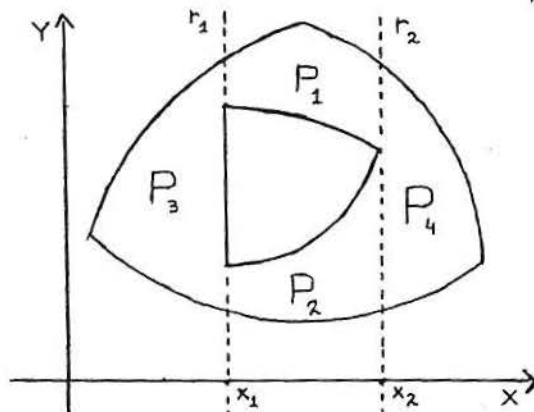


Fig. 3.1

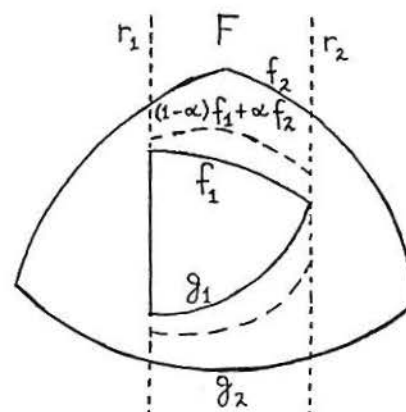


Fig. 3.2

que r_1 e r_2 dividem $\overline{C_2} \setminus \overline{C_1}$ em 4 partes, como mostra a Figura (3.1), que serão denotadas por P_1, P_2, P_3 e P_4 . Note também que os pedaços superiores de $\partial C_1 \cap \text{int } F$ e $\partial C_2 \cap \text{int } F$ são gráficos de funções reais definidas em x as quais chamaremos de f_1 e f_2 . O mesmo vale para os pedaços inferiores de $\partial C_1 \cap \text{int } F$ e $\partial C_2 \cap \text{int } F$ cujas funções serão designadas por g_1 e g_2 . Assim, podemos construir uma família de convexos C_α cujas áreas estão entre as medidas de C_1 e $C_1 \cup P_1 \cup P_2$. Basta tomar os convexos limitados por r_1, r_2 e pelos gráficos de $(1 - \alpha)f_1 + \alpha f_2$ e $(1 - \alpha)g_1 + \alpha g_2$, onde $\alpha \in [0,1]$ (ver Figura (3.2)). Como a aplicação $\alpha \rightarrow |C_\alpha|$ é contínua, a construção está completa para $m \in [|C_1|, |C_1 \cup P_1 \cup P_2|]$.

Agora observe que as partes de ∂C_2 que não estão em F , também são gráficos de funções h_1 e h_2 definidas em y . Tomando o gráfico de $y \rightarrow \beta x_1 + (1 - \beta)h_1(y)$, onde o domínio da função é o conjunto de y 's tq $(x_1, y) \in C_2$ e $\beta \in [0,1]$, podemos construir uma família de curvas convexas compreendidas entre r_1 e o pedaço de ∂C_2 que está a esquerda de r_1 (ver Figura (3.3)). O análogo pode ser feito

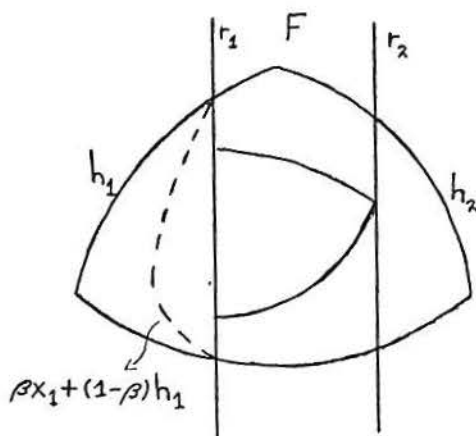


Fig. 3.3

para a região P_4 . Assim, se $m \in [|C_1 \cup P_1 \cup P_2|, |C_2|]$, basta tomar um convexo que contenha $C_1 \cup P_1 \cup P_2$, e cuja fronteira seja formada por $\partial C_2 \cap F$ e pelos gráficos das funções $\beta x_1 + (1 - \beta)h_1$ e $\beta x_2 + (1 - \beta)h_2$, onde β é um real

conveniente em $[0,1]$. \diamond

3.3 TEOREMA: Seja $J = \inf_{\psi \in F_1} J_{\bar{n}}(\psi)$. Então existe $\psi_0 \in F_1$ tq $J_{\bar{n}}(\psi_0) = J$. Além disto, se $J_{\bar{n}}$ é minimizado por algum $\psi \in F_2$, então podemos redefinir ψ em um conjunto de medida zero obtendo que:

- (i) ψ seja contínua,
- (ii) existam curvas convexas $\gamma_i, i = 1, \dots, \bar{n} - 1$ tq $\gamma_i = \{\psi = \frac{i}{\bar{n}}\}$ para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 2\}$ e $\gamma_{\bar{n}-1} = \partial\{\psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}\}$, onde $\{\psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}\}$ é um conjunto convexo, e

$$(iii) \quad \psi \text{ seja harmônica em } \Omega \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^{\bar{n}-1} \gamma_i \right\}.$$

DEM - 2ª parte: Primeiro veremos uma forma de se obter uma $\bar{\psi} \in F_2$ a partir de $\psi \in F_2$ tal que $J_{\bar{n}}(\bar{\psi}) \leq J_{\bar{n}}(\psi)$ com desigualdade estrita a menos que $\psi = \bar{\psi}$ q.s.. Suponhamos que $\psi \in F_2$ minimize $J_{\bar{n}}$. Como $J_{\bar{n}}(\psi) < \infty$, então $|\{1 - \frac{1}{\bar{n}} \leq \psi < 1\}| = |A_{\bar{n}}| > 0$ e, portanto, $\sup \text{ess } \psi \geq 1 - \frac{1}{\bar{n}}$. De $\psi \in F_2$, temos $\psi^*(0) = 0$. A partir disto e de P(8), $\inf \text{ess } \psi = 0$. Logo, pela Observação (2.2), existem C_i conjuntos convexas tq $\psi \geq t_i$ q.s. em C_i e $\psi < t_i$ q.s. em $\Omega \setminus C_i$, onde os t_i 's estão definidos no início deste capítulo ($i \in \{0, 1, \dots, \bar{n} - 1\}$). Sejam $C_0 = \Omega$ e $\gamma_i = \partial C_i$ para $i \in \{0, \dots, \bar{n} - 1\}$. Pela demonstração do Teorema (2.7), $\{\gamma_i\}_{i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}}$ é uma família de curvas que não se interceptam duas a duas em Ω . Como $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $\psi = 0$ H^1 -q.s. em $\partial\Omega$, portanto, pode-se concluir de forma similar à demonstração do Teorema (2.7), 1ª parte - (iv), que $\partial C_i \cap \partial\Omega = \emptyset$ para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$. Assim, $\{\gamma_i\}_{i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}}$ é uma família de curvas disjuntas em Ω . Sejam $R_i = \overline{C_{i-1}} \setminus \overline{C_i}$ para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$ e $R_{\bar{n}} = \overline{C_{\bar{n}-1}}$. Observe que os anéis R_i 's são limitados externamente pelas curvas γ_{i-1} e internamente pelas curvas γ_i . Logo é possível construir uma função $\bar{\psi}$ que seja harmônica em $\text{int } R_i$ (Ver Preliminares, Corolário (22)), contínua em $\overline{R_i}$ e que valha t_{i-1} e t_i em γ_{i-1} e γ_i respectivamente. Então $t_{i-1} = \min \bar{\psi} \leq \psi < \max \bar{\psi} = t_i$ em R_i para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$ e $\bar{\psi} \geq t_{\bar{n}-1}$ em $R_{\bar{n}}$. Portanto $R_i \subset \{t_{i-1} \leq \bar{\psi} < t_i\}$ e $R_{\bar{n}} \subset \{t_{\bar{n}-1} \leq \bar{\psi}\}$. Como

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\bar{n}} R_i$, conclui-se que $R_i = \{t_{i-1} \leq \psi < t_i\}$. Disto e do princípio do máximo

para funções harmônicas, segue que $\bar{\psi} = t_i$ somente em γ_i para $i \in \{0, \dots, \bar{n} - \frac{1}{2}\}$ e, como $\partial R_{\bar{n}} = \gamma_{\bar{n}-1}$ na qual $\bar{\psi} = t_{\bar{n}-1}$, concluimos que $\bar{\psi} = t_{\bar{n}-1}$ em $\bar{R}_{\bar{n}}$. Assim, $\bar{\psi}$ satisfaz as condições (i) e (ii). Também vale $|R_i| = |A_i|$ para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$, pois $|R_i| = |\overline{C_{i-1}}| - |\overline{C_i}| = |C_{i-1}| - |C_i| = |\{\psi \geq t_{i-1}\}| - |\{\psi \geq t_i\}| = |\{t_{i-1} \leq \psi < t_i\}| = |A_i(\psi)|$. Além disto, $|R_{\bar{n}}| = |\overline{C_{\bar{n}-1}}| = |\{\psi \geq t_{\bar{n}-1}\}| \geq |A_{\bar{n}}(\psi)|$, onde a igualdade será válida se e somente se $|\{\psi \geq 1\}| = 0$. De qualquer forma concluimos que $|A_i(\psi)| \leq |R_i| = |\{t_{i-1} \leq \bar{\psi} < t_i\}|$ e, assim,

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi)|} \geq \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\bar{\psi})|}. \quad (3.2)$$

Por outro lado, o funcional $\int_{R_i} |\nabla \psi|^2 dx$ com as condições de fronteira $\psi = t_{i-1}$ em γ_{i1} e $\psi = t_i$ em γ_i (para $t_{\bar{n}-1}$ só haverá a condição de fronteira $\psi = t_{\bar{n}-1}$ em $\gamma_{\bar{n}-1}$) assume o seu valor mínimo somente quando ψ for harmônica. Portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{\psi}|^2 dx = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \int_{R_i} |\nabla \bar{\psi}|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{\bar{n}} \int_{R_i} |\nabla \psi|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx. \quad (3.3)$$

Note que no capítulo zero foi mostrado que uma função com as hipóteses da função $\bar{\psi}$ possui curvas de nível convexas, assim, $\bar{\psi} \in F_2$. Portanto, como ψ é o mínimo do funcional $J_{\bar{n}}$, usando a desigualdade (3.2), concluimos que deve ocorrer a igualdade em (3.3) e, assim, ψ é harmônica q.s. em R_i com $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$. Pela unicidade da solução do Problema de Dirichlet, deduz-se que $\psi = \bar{\psi}$ q.s.. Logo ψ satisfaz a condição (iii) concluindo a 2ª parte.

DEM - 1ª parte: Agora mostraremos a 1ª parte do Teorema usando a 2ª parte. Inicialmente temos de observar que existe $\psi_0 \in F_1$ tq $J_{\bar{n}}(\psi_0) < \infty$. Para isto, basta construir $\bar{n} - 1$ curvas convexas disjuntas em Ω . Daí constrói-se ψ_0 como construímos $\bar{\psi}$ na 1ª parte. Só é necessário observar que, pelas Preliminares, as curvas de nível são convexas. Logo $\inf_{\psi \in F_1} J(\psi) < \infty$. Seja $\psi_m \in F_1$ uma sequência

minimizante para $J_{\bar{n}}$ em F_1 . Como na 1ª parte, constrói-se $\bar{\psi}_m$ a partir de ψ_m . Já foi visto que $J(\bar{\psi}_m) \leq J(\psi_m)$. Assim, $\bar{\psi}_m$ também é uma sequência minimizante. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo, existem $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e uma subsequência de $(\bar{\psi}_m)$ convergindo fracamente à ψ . Podemos supor s.p.g. que $\bar{\psi}_m \rightharpoonup \psi$ fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema (2.6), $\psi \in C_2$ e, como a imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, então $\bar{\psi}_m \rightarrow \psi$ em $L^2(\Omega)$. A partir disto e por construção de $\bar{\psi}_m$ (ver 2ª parte), $\sup \text{ess } \bar{\psi}_m = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ e $\inf \text{ess } \bar{\psi}_m = 0 \forall m$, logo $\sup \text{ess } \psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ e $\inf \text{ess } \psi = 0$. Para $i \in \{0, \dots, \bar{n} - 1\}$, seja $\Gamma(t_i)$ a região definida na Observação (2.3). Pelo Lema (3.1), $V_\psi(t_i) \leq \liminf V_{\bar{\psi}_m}(t_i) \leq \overline{\lim} V_{\bar{\psi}_m}(t_i) \leq \lim_{t \rightarrow t_i^+} V_\psi(t)$. Portanto, podemos extrair uma subsequência $(\bar{\psi}_{m_k})$ tq existe $\lim_{m_k \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_{m_k}}(t_i)$ para $i \in \{0, \dots, \bar{n} - 1\}$. Assim, podemos supor s.p.g. que $\forall i \in \{0, \dots, \bar{n} - 1\}$ existe $\lim_{m \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_m}(t_i) \in [V_\psi(t_i), \lim_{t \rightarrow t_i^+} V_\psi(t)]$. Nos t_i 's onde V_ψ é descontínua, por P(5), $|\{\psi = t_i\}| > 0$. Logo, pela Observação (2.3), $|\Gamma(t_i)| > 0$. Portanto, $\Gamma(t_i)$ é uma região limitada por duas curvas convexas, $\partial(\cap C_{1,k})$ e $\partial(\cup C_{2,k})$, onde $t_{1,k} \uparrow t_i$ e $t_{2,k} \downarrow t_i$. Pela Observação (2.3) e por P(5), $|\cap C_{1,k}| = |\{\psi \geq t_i\}| = |\Omega| - V_\psi(t_i)$ e $|\cup C_{2,k}| = |\{\psi > t_i\}| = |\{\psi \geq t_i\}| - |\{\psi = t_i\}| = (|\Omega| - V_\psi(t_i)) - \left(\lim_{t \rightarrow t_i^+} V_\psi(t) - V_\psi(t_i)\right) = |\Omega| - \lim_{t \rightarrow t_i^+} V_\psi(t)$.

Pelo Lema (3.2), podemos construir um convexo C_{t_i} tq $\bigcup_k C_{2,k} \subset C_{t_i} \subset \bigcap_k C_{1,k}$ e $|C_{t_i}| = |\Omega| - \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\psi}_m(t_i) \in \left[|\Omega| - \lim_{t \rightarrow t_i^+} V_\psi(t), |\Omega| - V_\psi(t_i)\right] = \left[|\bigcup_k C_{2,k}|, \left|\bigcap_k C_{1,k}\right|\right]$. Quando V_ψ for contínua em t_i , pelo Lema (3.1), $\lim_{m \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_m}(t_i) = V_\psi(t_i)$, e, assim, construiremos $C_{t_i} = \bigcap_k C_{1,k}$. Agora, defina $\gamma_i = \partial C_{t_i}$. Logo $\gamma_i = \partial \bigcap_k C_{1,k}$ ou $\gamma_i \subset \bigcap_k C_{1,k} \setminus \bigcup_k C_{2,k}$. Por raciocínio análogo ao do Teorema (2.7), parte 1, conclui-se que $\left(\partial\left(\bigcap_k C_{1,k}\right) \cup \partial\left(\bigcup_k C_{2,k}\right)\right) \cap$

$\left(\partial\left(\bigcap_{\ell} C_{1,\ell}\right) \cup \partial\left(\bigcup_{\ell} C_{2,\ell}\right)\right) = \emptyset$, onde $t_{1,k} \uparrow t_i$ e $t_{1,\ell} \uparrow t_j$ para $t_i \neq t_j$. Assim, pelo argumento da 1ª parte, γ_i 's são fronteiras disjuntas. Portanto, é possível construir $\bar{\psi}$ que seja contínua em $\bar{\Omega}$, valha t_i em γ_i e seja harmônica em $\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{\bar{n}-1} \gamma_i$.

De $\text{sup ess } \psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ e $\text{inf ess } \psi = 0$, temos que $\text{sup ess } \bar{\psi} = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ e $\text{inf ess } \bar{\psi} = 0$. Logo $\bar{\psi}^*(0) = 0$ e $\bar{\psi}^*(|\Omega|) = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$. Note que $\bar{\psi} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disto, pelas Preliminares, as curvas de nível de $\bar{\psi}$ são convexas. Logo $\bar{\psi} \in F_1$. Quanto a $J_{\bar{n}}(\bar{\psi})$, pela 2ª parte, $|A_i(\bar{\psi})| = |R_i| = |C_{t_{i-1}} \setminus C_{t_i}| = \left(|\Omega| - \lim_{m \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_m}(t_{i-1})\right) - \left(|\Omega| - \lim_{m \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_m}(t_i)\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_{\bar{\psi}_m}(t_i) - V_{\bar{\psi}_m}(t_{i-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} |A_i(\bar{\psi}_m)|$, e também vale

$$\int |\nabla \bar{\psi}|^2 dx \leq \int |\nabla \psi|^2 dx \leq \underline{\lim} \int |\nabla \bar{\psi}_m|^2 dx,$$

pois $\bar{\psi}$ é harmônica em $\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{\bar{n}-1} \gamma_i$ o que prova a 1ª desigualdade. A 2ª desigualdade segue da semicontinuidade inferior na topologia fraca do funcional $\psi \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx$. (ver argumento do Teorema (1.1)). Logo $J_{\bar{n}}(\bar{\psi}) \leq \underline{\lim} J_{\bar{n}}(\bar{\psi}_m)$ o que mostra o teorema. \diamond

3.4 PROPOSIÇÃO:

$$J = \inf_{\psi \in F_i} J_{\bar{n}}(\psi)$$

é independente de i , $i=0,1,2$.

DEM: Como $F_0 \subset F_i \subset F_2$, então $\inf_{F_0} J_{\bar{n}} \geq \inf_{F_1} J_{\bar{n}} \geq \inf_{F_2} J_{\bar{n}}$. Pelo Teorema (3.3), se $\psi \in F_2$ é tq $J(\psi) < \infty$, então $\psi \in F_1$. Logo $\inf_{F_2} J_{\bar{n}} = \inf_{F_1} J_{\bar{n}}$. Falta mostrar que $\inf_{F_0} J_{\bar{n}} \leq \inf_{F_1} J_{\bar{n}}$.

Seja ψ o mínimo de J em F_1 . Pela 2ª parte do Teorema (3.3), $\text{sup ess } \psi = t_{\bar{n}-1}$ e $R_{\bar{n}} = \{\psi = t_{\bar{n}-1}\}$ é um conjunto convexo de medida positiva. Logo $\text{int } R_{\bar{n}} \neq \emptyset$. Sejam $y \in \text{int } R_{\bar{n}}$ e $R > 0$ tq $D_R(y) \subset R_{\bar{n}}$. Defina $f_m: D_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_m(x) = \frac{1}{\bar{n}} \frac{R^{\frac{1}{\bar{n}}} - |x|^{\frac{1}{\bar{n}}}}{R^{\frac{1}{\bar{n}}}}$$

Logo f_m 's são funções radiais. Assim,

$$|\nabla f_m(x)| = \left| \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\bar{n}} \frac{R_m^{\frac{1}{m}} - r^{\frac{1}{m}}}{R_m^{\frac{1}{m}}} \right] (x) \right| = \left| \frac{1}{\bar{n}} \left(-\frac{1}{m} \right) \frac{r^{\frac{1}{m}-1}}{R_m^{\frac{1}{m}}} \right|,$$

onde $r = |x|$. Então,

$$|\nabla f_m(x)|^2 = \frac{r^{\frac{2}{m}-2}}{\bar{n}^2 m^2 R_m^{\frac{2}{m}}}.$$

Logo

$$\int_{D_R(0)} |\nabla f_m|^2 dH^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r^{\frac{2}{m}-2}}{\bar{n}^2 m^2 R_m^{\frac{2}{m}}} r dr dv = \frac{2\pi}{2\bar{n}^2 m}.$$

Transladando a origem de f_m para y , podemos redefinir f_m em Ω de forma que $f_m = 0$ em $\Omega \setminus B_R(y)$. Seja $\psi_m = \psi + f_m$. Como $\sup \text{ess } \psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$, $\psi = 1 - \frac{1}{\bar{n}}$ em $B_R(y)$ e $f_m = 0$ em $\Omega \setminus B_R(y)$, então $\sup \text{ess } \psi_m = \sup \text{ess } \psi + \sup \text{ess } f_m = 1 - \frac{1}{\bar{n}} + \frac{1}{\bar{n}} = 1$. Logo $\psi_m^*(|\Omega|) = 1$. É fácil ver que as curvas de nível são convexas e, portanto, $\psi_m \in F_0$. Como $\psi_m = \psi$ em R_i para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$ e $\psi_m \geq \psi$ em $R_{\bar{n}}$, então $|A_i(\psi_m)| = |R_i| = |A_i(\psi)|$ para $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$. Se $x \in \Omega$ e $x \neq y$, então $0 \leq f_m(x) < \frac{1}{\bar{n}}$. Logo $1 - \frac{1}{\bar{n}} \leq f_m + \psi < \frac{1}{\bar{n}} + 1 - \frac{1}{\bar{n}} = 1$ para $x \in R_{\bar{n}}$ tq $x \neq y$. Assim, $|A_{\bar{n}}(\psi_m)| = |R_{\bar{n}}| = |A_{\bar{n}}(\psi)|$. Também sabemos que $\nabla \psi_m = \nabla \psi$ em $\bigcup_{i=1}^{\bar{n}-1} R_i$

e $\nabla \psi = 0$ em $R_{\bar{n}}$, logo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \psi_m|^2 dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\bar{n}-1} R_i} |\nabla \psi_m|^2 dx + \int_{R_{\bar{n}}} |\nabla \psi_m|^2 dx \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\bar{n}-1} R_i} |\nabla \psi|^2 dx + \int_{R_{\bar{n}}} |\nabla f_m|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \frac{2\pi}{2\bar{n}^2 m}. \end{aligned}$$

A partir disto, fazendo $m \rightarrow \infty$, $J_{\bar{n}}(\psi_m) \rightarrow J_{\bar{n}}(\psi)$. Portanto, $\inf_{\psi \in F_0} J(\psi) \leq \inf_{\psi \in F_1} J(\psi)$. \diamond

3.5 COROLÁRIO: $J_{\bar{n}}$ é minimizado em F_2 .

DEM: Imediata do Teorema (3.3), da Proposição (3.4) e do fato de $F_1 \subset F_2$. \diamond

CAPÍTULO 4

Condições de Fronteiras Livres e Aplicações

Neste capítulo procuraremos demonstrar que os minimizadores de $J_{\bar{n}}$ são superharmônicos e tem seus gradientes limitados. A validade destas propriedades faz-nos acreditar que as soluções do funcional $J_{\bar{n}}$ aproximam-se, na topologia fraca, da solução do problema original, pois a superharmonicidade é mantida na convergência fraca.

Estudaremos agora uma igualdade para as funções que minimizam o funcional $J_{\bar{n}}$. O raciocínio que veremos dá uma boa idéia do porquê da igualdade, embora não seja completo. Inicialmente, seja ψ minimizador de $J_{\bar{n}}$ em F_1 . Dado $i \in \{1, \dots, \bar{n} - 1\}$, sejam $\Omega_i = A_i \cup A_{i+1}$ e $\mathcal{E} \rightarrow T_{\mathcal{E}}$ uma família de homeomorfismos de Ω_i sobre Ω_i que são difeomorfismos por partes tq: 1) as compostas $\psi \circ T_{\mathcal{E}}$ pertençam a $W \cap C_2$; 2) $T_{\mathcal{E}}$ coincida com a identidade em alguma vizinhança fixa de $\partial\Omega_i$ independente de \mathcal{E} ; 3) $T_{\mathcal{E}}$ convirja uniformemente à identidade I quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$; 4) a função $f: \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ definida por $f(x) = \frac{d}{d\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}}(x)$ seja também contínua em Ω_i e um difeomorfismo por partes.

Observe que $f=0$ numa vizinhança de $\partial\Omega_i$, pois $T_{\mathcal{E}} = I$ nas proximidades de $\partial\Omega_i$. Além disto, podemos estender $T_{\mathcal{E}}$ para o resto de Ω de forma que $T_{\mathcal{E}} = I$ em $\Omega \setminus \Omega_i$.

Calcularemos $\frac{d}{d\mathcal{E}} J_{\bar{n}}(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|_{\mathcal{E}=0}$. Para isto, note que

$$\begin{aligned}
& \frac{J_{\bar{n}}(\psi \circ T_{\mathcal{E}}) - J_{\bar{n}}(\psi \circ I)}{\mathcal{E}} \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \left[\int_{\Omega} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|} - \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi)|} \right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{E}} \left[\int_{\Omega_i} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx - \int_{\Omega_i} |\nabla\psi|^2 dx + \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|} - \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi)|} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_{i+1}(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|} - \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_{i+1}(\psi)|} \right].
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de $T_{\mathcal{E}} = I$ em $\Omega \setminus \Omega_i$.

(i) Primeiro calcularemos $\frac{d}{d\mathcal{E}} \int_{\Omega_i} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx$. Para tanto, observe que a aplicação $\mathcal{E} \mapsto \int_{\Omega} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx$ é igual a composição $A_5 \circ A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1(\mathcal{E})$, onde $A_1(\mathcal{E}) = T_{\mathcal{E}}$, $A_2(T_{\mathcal{E}}) = \psi \circ T_{\mathcal{E}}$, $A_3(\psi \circ T_{\mathcal{E}}) = \nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})$, $A_4(\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})) = |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2$ e $A_5(|\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2) = \int_{\Omega_i} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx$. Logo

$$\begin{aligned}
A'_1(0) \cdot 1 &= \frac{\partial T_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} \Big|_{\mathcal{E}=0} = f, \quad A'_2(I) \cdot f = \nabla\psi \cdot f, \quad A'_3(\psi \circ I) \cdot (\nabla\psi \cdot f) = \\
A_3(\nabla\psi \cdot f) &= \nabla(\nabla\psi \cdot f), \quad A'_4(\nabla(\psi \circ I)) \cdot (\nabla(\nabla\psi \cdot f)) = 2\langle \nabla\psi, \nabla(\nabla\psi \cdot f) \rangle, \\
A'_5(|\nabla(\psi \circ I)|^2) \cdot (2\langle \nabla\psi, \nabla(\nabla\psi \cdot f) \rangle) &= A_5(2\langle \nabla\psi, \nabla(\nabla\psi \cdot f) \rangle) = \\
2 \int_{\Omega_i} \langle \nabla\psi(x), \nabla(\nabla\psi(x) \cdot f(x)) \rangle dx.
\end{aligned}$$

Note que existe $\nabla(\nabla\psi(x) \cdot f(x))$ q.s., pois f é um difeomorfismo por partes e, pelo Teorema (3.3), ψ é harmônica em $\Omega_i \setminus \gamma_i$. Obtemos então,

$$\frac{d}{d\mathcal{E}} \int_{\Omega_i} |\nabla(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|^2 dx = 2 \int_{A_i \cup A_{i+1}} \nabla\psi(x) \cdot \nabla(\nabla\psi(x) \cdot f(x)) dx. \quad (4.1)$$

(ii) Calcularemos agora $\frac{d}{d\mathcal{E}} \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|}$. Para tal, observe que $T_{\mathcal{E}}(A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})) = A_i(\psi)$, pois $y \in T_{\mathcal{E}}(A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}}))$ se e somente se existe x tq $y = T_{\mathcal{E}}(x)$ e $t_{i-1} \leq$

$\psi \circ T_{\mathcal{E}}(x) < t_i$. Esta, por sua vez, é verdadeira se e somente se $t_{i-1} \leq \psi(y) < t_i$ que é equivalente a $y \in A_i$. Logo $|A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})| = |T_{\mathcal{E}}^{-1}(A_i(\psi))| = \int_{A_i(\psi)} |\det T'_{\mathcal{E}}(x)|^{-1} dx$. A aplicação $\mathcal{E} \mapsto \int_{A_i(\psi)} |\det T'_{\mathcal{E}}(x)|^{-1} dx$ é igual a composição $A_6 \circ A_5 \circ \dots \circ A_1(\mathcal{E})$, onde $A_1(\mathcal{E}) = T_{\mathcal{E}}$, $A_2(T_{\mathcal{E}}) = T'_{\mathcal{E}}$, $A_3(T'_{\mathcal{E}}) = \det T'_{\mathcal{E}}$, $A_4(\det T'_{\mathcal{E}}) = |\det T'_{\mathcal{E}}|^{-1}$, $A_5(|\det T'_{\mathcal{E}}|^{-1}) = \int_{A_i(\psi)} |\det T'_{\mathcal{E}}(x)|^{-1} dx$, $A_6\left(\int_{A_i(\psi)} |\det T'_{\mathcal{E}}(x)|^{-1} dx\right) = \left(\int_{A_i(\psi)} |\det T'_{\mathcal{E}}(x)|^{-1} dx\right)^{-1}$. Derivando as aplicações, obtemos $A'_2(I) \cdot f = A_2(f) = Df$. A aplicação que leva uma matriz no seu determinante é multilinear, se pensarmos na matriz como um elemento de $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (n fatores). Assim,

$$A'_3(I) \cdot Df = \begin{vmatrix} f^1_{x_1} & 0 \\ f^2_{x_1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & f^1_{x_2} \\ 0 & f^2_{x_2} \end{vmatrix} = f^1_{x_1} + f^2_{x_2} = \nabla \cdot f,$$

onde $(f^1, f^2) = f$. Continuando o cálculo,

$$A'_4(\det I) \cdot (\nabla \cdot f) = \frac{-\operatorname{sgn}(\det I)}{(\det I)^2} (\nabla \cdot f) = -(\nabla \cdot f),$$

$$A'_5(1) \cdot (-\nabla \cdot f) = A_5(-\nabla \cdot f) = \int_{A_i(\psi)} -\nabla \cdot f dx,$$

$$\begin{aligned} A'_6\left(\int_{A_i(\psi)} |\det I|^{-1} dx\right) \cdot \left(\int_{A_i(\psi)} -\nabla \cdot f dx\right) = \\ - \frac{1}{\left(\int_{A_i(\psi)} 1 dx\right)^2} \cdot \int_{A_i(\psi)} -\nabla \cdot f dx = \int_{A_i(\psi)} \nabla \cdot f dx / |A_i(\psi)|. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathcal{E}} \bar{n}^{-2} \left[\frac{1}{|A_{i+1}(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|} - \frac{1}{|A_i(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|} \right] \\ = \bar{n}^{-2} \left[\frac{1}{|A_{i+1}(\psi)|} \int_{A_{i+1}(\psi)} \nabla \cdot f dx - \frac{1}{|A_i(\psi)|} \int_{A_i(\psi)} \nabla \cdot f dx \right]. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Até o momento os cálculos realizados foram formais. Agora concluiremos informalmente alguns resultados. Primeiro, aplicando o Teorema da Divergência às

regiões A_i , A_{i+1} e usando o fato de $f=0$ em uma vizinhança de $\partial A_i \setminus \gamma_i$ e $\partial A_{i+1} \setminus \gamma_i$, obtemos de (4.1) e (4.2)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\mathcal{E}} J_{\bar{n}}(\psi \circ T_{\mathcal{E}})|_{\mathcal{E}=0} &= 2 \left[\int_{\gamma_i} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial n_e} n_i \right) \cdot n_i \left(-\frac{\partial\psi}{\partial n_e} n_i \right) \cdot f dH^1 + \right. \\
&+ \int_{\gamma_i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n_i} n_i \right) \cdot n_e \left(\frac{\partial\psi}{\partial n_i} n_i \right) \cdot f dH^1 - \int_{A_i \cup A_{i+1}} \Delta\psi \nabla\psi \cdot f dx \left. \right] - \\
&- \bar{n}^{-2} \left[-\frac{1}{|A_{i+1}|} \int_{\gamma_i} f \cdot n_i dH^1 + \frac{1}{|A_i|} \int_{\gamma_i} f \cdot n_i dH^1 \right] \\
&= 2 \int_{\gamma_i} \left(\left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e} \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i} \right|^2 \right) f \cdot n_i dH^1 + \\
&+ \bar{n}^{-2} \int_{\gamma_i} (|A_i|^{-2} - |A_{i+1}|^{-2}) f \cdot n_i dH^1, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

onde γ_i é a curva que divide A_i e A_{i+1} (ver definição no Teorema (3.3)), n_e é o vetor unitário normal à γ_i que aponta para fora de A_{i+1} e $n_i = -n_e$. Observe que n_e existe exceto numa quantidade enumerável. Note também que a validade do Teorema da Divergência não foi justificada. Para isto, seria necessário o uso de argumentos de limite.

Agora, usando a igualdade (4.3) e o fato de ψ ser ponto crítico, podemos concluir que

$$2 \int_{\gamma_i} \left(\left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e} \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i} \right|^2 \right) f \cdot n_i dH^1 = \bar{n}^{-2} \int_{\gamma_i} (|A_{i+1}|^{-2} - |A_i|^{-2}) f \cdot n_i dH^1. \tag{4.4}$$

Como a igualdade (4.4) ocorre para uma classe "suficientemente grande" de f , podemos concluir que em γ_i vale

$$2 \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e} \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i} \right|^2 \right] = \bar{n}^{-2} \left(\frac{1}{|A_{i+1}|^2} - \frac{1}{|A_i|^2} \right), i = 1, \dots, \bar{n} - 1. \tag{4.5}$$

Para os pontos P 's, nos quais não existe n_e , podemos definir

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_e}(P) = \lim_{P_n \rightarrow P} \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(P_n),$$

onde (P_n) é uma sequência de pontos em γ_i que possuem n_e .

Observe que a igualdade (4.5) foi obtida informalmente. A dificuldade em mostrar que a classe de $f \cdot n_i$ seja tão grande que permita a conclusão desta igualdade, reside no fato de que os difeomorfismos por partes $T_{\mathcal{E}}$ devam preservar a convexidade. \diamond

Veremos agora algumas aplicações de (4.5).

4.1 TEOREMA: Se ψ é um ponto de mínimo de $J_{\bar{n}}$ em F_1 , então ψ é superharmônica.

4.2 TEOREMA: Se ψ é um ponto de mínimo de $J_{\bar{n}}$ em F_1 , então

$$|\nabla\psi| \leq \frac{\bar{n}^{-1}}{|A_{\bar{n}}|}.$$

4.3 OBSERVAÇÃO: Lembre que $|\psi^{*'}| \leq J(\psi)$ para soluções do problema variacional (1.1), (1.2) e que $\bar{n}^{-1}/|A_{\bar{n}}|$ é o quociente diferença correspondente à $\psi^*(|\Omega|)$ (ver introdução do Capítulo 3). A partir disto e de outras considerações, esperamos que futuramente o Teorema (4.2) permita achar uma estimativa independente de \bar{n} .

Antes de demonstrarmos os Teoremas (4.1) e (4.2), precisamos apresentar alguns resultados a respeito de funções harmônicas. Seja A um anel aberto e limitado por duas curvas convexas disjuntas. Sejam Γ_1 a curva externa e Γ_2 a curva interna.

4.4 PROPOSIÇÃO: Se h é harmônica em A e se $h = c_i$ em Γ_i , $i=1,2$, $c_1 \leq c_2$, então $|\nabla h|$ é crescente ao longo das curvas integrais do campo ∇h .

DEM: Pelas Preliminares, as curvas de nível de h são convexas. Seja $P_0 \in A$. Suponhamos s.p.g. que $P_0 = (0,0)$, $h(P_0) = 0$ e que o vetor externo normal à curva de nível que passa por P_0 seja $(0,1)$. Note que está subentendido que $|\nabla h(P_0)| \neq 0$. Seja $y = g_t(x)$ a parametrização local para as curvas de nível $\{h = t\}$ numa vizinhança de P_0 . Logo $h(x, g_t(x)) = t$ para x e t pequenos. Observe que $(0, g_0(0)) = (0,0) = P_0$.

Como a curva de nível que passa por P_0 é convexa e tem $(0,1)$ como o vetor normal externo no ponto P_0 , então $g'_0(0) = 0$ e $g''_0(0) \leq 0$, onde a linha indica derivação em relação a x . Como $\frac{d^2}{dx^2} h(x, g_t(x)) = 0$, então, pela regra da cadeia, temos que $\frac{d}{dx} (h_x + h_y g'_t(x)) = 0$, $h_{xx} + h_{xy} g'_t + h_{yx} g'_t + h_{yy} (g'_t)^2 + h_y g''_t = 0$. A partir disto, de $h_{xx} = -h_{yy}$, pois h é harmônica, e ainda de $g'_0(0) = 0$ temos

$$-h_{yy} + h_y g''_0 = 0 \text{ em } P_0. \quad (4.6)$$

Também temos

$$\begin{aligned} \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \cdot \nabla (|\nabla h|^2) &= \frac{(h_x, h_y)}{|\nabla h|} \cdot \nabla (h_x^2 + h_y^2) \\ &= \frac{(h_x, h_y)}{|\nabla h|} \cdot [(2h_x h_{xx}, 2h_x h_{xy}) + (2h_y h_{yx}, 2h_y h_{yy})] \\ &= \frac{2}{|\nabla h|} [(h_x^2 h_{xx} + h_x h_y h_{xy}) + (h_x h_y h_{yx} + h_y^2 h_{yy})] \\ &= \frac{2}{|\nabla h|} (h_x^2 h_{xx} + 2h_x h_y h_{xy} + h_y^2 h_{yy}). \end{aligned}$$

Como $(0,1)$ é o vetor externo normal à curva de nível no ponto P_0 , temos que $\nabla h(P_0) = \lambda(0,1)$, onde $\lambda < 0$. Logo $h_x(P_0) = 0$ e $h_y(P_0) = \lambda$, de onde $\lambda = -|\nabla h(P_0)|$. Assim, $-h_y(P_0) = |\nabla h(P_0)|$. Portanto, em P_0 vale

$$\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \cdot \nabla (|\nabla h|^2) = \frac{2}{-h_y} (0 \cdot h_{xx} + 2 \cdot 0 \cdot h_y h_{xy} + h_y^2 h_{yy}) = -2h_y h_{yy}. \quad (4.7)$$

De (4.6) e de $h_y = -|\nabla h| < 0$, temos $-2h_y h_{yy} + 2h_y^2 g''_0 \geq 0$. Disto e de (4.7),

$$\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \cdot \nabla (|\nabla h|^2) \geq -2h_y^2 g''_0.$$

A partir disto e de $g''_0(0) \leq 0$, temos

$$\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \cdot \nabla (|\nabla h|^2) \geq 0.$$

Logo $|\nabla h|^2$ é crescente nas curvas integrais concluindo a proposição. \diamond

4.5 PROPOSIÇÃO: Se h é igual ao da Proposição (4.4), então

$$V_h''(t) \leq 0 \quad \text{em } (c_1, c_2).$$

A partir disto, concluímos que

$$\left| \left\{ c_1 \leq h < \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \right\} \right| \geq \left| \left\{ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \leq h < c_2 \right\} \right|.$$

DEM: Seja $t \in (c_1, c_2)$. Pelo Apêndice D, $|\nabla h(x)| \neq 0 \forall x \in \{0 < h < 1\}$. Logo, pelo Teorema (C.5), a aplicação $t \rightarrow \int_{\{h=t\}} |\nabla h|^{-1} dH^1$ é contínua e, assim,

$V_h'(t) = \int_{\{h=t\}} |\nabla h|^{-1} dH'$. Usando o Teorema da Divergência para a região $\{t_0 \leq h \leq t\}$, conclui-se

$$\begin{aligned} \int_{\{h=t\}} |\nabla h|^{-1} dH^1 &= \int_{\{h=t\}} \frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \cdot \frac{\nabla h}{|\nabla h|} dH^1 = \int_{\{t_0 \leq h \leq t\}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) dH^2 + \\ &+ \int_{\{h=t_0\}} \frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \cdot \frac{\nabla h}{|\nabla h|} dH^1, \end{aligned}$$

onde $t_0 \in (c_1, t)$. Logo

$$\begin{aligned} V_h''(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\{t_0 \leq h \leq t\}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) dH^2 \\ &= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \int_{\{h=s\}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) \frac{1}{|\nabla h|} dH^1 ds = \int_{\{h=t\}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) |\nabla h|^{-1} dH^1. \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_x}{h_x^2 + h_y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{h_y}{h_x^2 + h_y^2} \\ &= h_{xx} \frac{1}{h_x^2 + h_y^2} - h_x \frac{(2h_x h_{xx} + 2h_y h_{yx})}{(h_x^2 + h_y^2)^2} + h_{yy} \frac{1}{h_x^2 + h_y^2} - \\ &\quad - \frac{h_y (2h_x h_{xy} + 2h_y h_{yy})}{(h_x^2 + h_y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\nabla h|^4} (h_{xx}h_x^2 + h_{xx}h_y^2 - 2h_x^2h_{xx} - 2h_xh_yh_{xy} + h_{yy}h_x^2 + h_{yy}h_y^2 - \\
&\quad - 2h_yh_xh_{xy} - 2h_y^2h_{yy}) \\
&= \frac{1}{|\nabla h|^4} (-h_x^2h_{xx} + h_{xx}h_y^2 - 2h_xh_yh_{xy} - h_y^2h_{yy} + h_{yy}h_x^2 - 2h_xh_yh_{yx}) \\
&= \frac{1}{|\nabla h|^4} (-h_x^2h_{xx} - h_y^2h_{xx} - 2h_xh_yh_{yx} + 2h_y^2h_{xx} - h_y^2h_{yy} - h_x^2h_{yy} - \\
&\quad - 2h_xh_yh_{yx} + 2h_x^2h_{yy}) \\
&= \frac{1}{|\nabla h|^4} (-\Delta h \cdot |\nabla h|^2 - 4h_xh_yh_{xy} + 2h_y^2h_{xx} + 2h_x^2h_{yy}). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Seja $(x(t), y(t))$ uma parametrização local pelo comprimento de arco no sentido anti-horário de algum ponto x de $\{h = t\}$. Logo $h(x(t), y(t)) = K$, de onde $h_x\dot{x} + h_y\dot{y} = 0$ e, portanto,

$$h_{xx}\dot{x}^2 + h_{xy}\dot{x}\dot{y} + h_x\ddot{x} + h_{yx}\dot{x}\dot{y} + h_{yy}\dot{y}^2 + h_y\ddot{y} = 0.$$

Assim,

$$h_{xx}\dot{x}^2 + h_{yy}\dot{y}^2 + 2h_{xy}\dot{x}\dot{y} = -h_x\ddot{x} - h_y\ddot{y}.$$

Note que $(-\dot{y}, \dot{x}) = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$, pois $(\dot{x}, \dot{y}) \perp \nabla h$. A partir disto, de ∇h apontar para dentro da curva e (\dot{x}, \dot{y}) estar no sentido anti-horário, temos

$$h_{xx} \frac{h_y^2}{|\nabla h|^2} + h_{yy} \frac{h_x^2}{|\nabla h|^2} - 2h_{xy} \frac{h_x h_y}{|\nabla h|^2} = -h_x\ddot{x} - h_y\ddot{y}. \tag{4.9}$$

Como $(x(t), y(t))$ é parametrização pelo comprimento de arco, então $(\dot{x}, \dot{y}) \perp (\ddot{x}, \ddot{y})$ e, portanto, $(\ddot{x}, \ddot{y}) \parallel (h_x, h_y)$. Note que (\ddot{x}, \ddot{y}) aponta para dentro da curva, pois $\{h = t\}$ é convexa. Logo $h_x\ddot{x} + h_y\ddot{y} \geq 0$. Disto e de (4.9)

$$2h_{xx}h_y^2 + 2h_{yy}h_x^2 - 4h_{xy}h_xh_y \leq 0.$$

Portanto, de (4.8) e de $\Delta h = 0$, segue que $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|^2} \right) \leq 0$ o que mostra que $V_h''(t) \leq 0$.

Agora mostraremos a 2ª parte da Proposição. De $V_h''(t) \leq 0$, temos que $V_h\left(\frac{1}{2}(C_1 + C_2)\right) \geq \frac{1}{2}(V(C_1) + V(C_2))$. Mas

$$\left| \left\{ c_1 \leq h < \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \right\} \right| = V_h\left(\frac{1}{2}(c_1 + c_2)\right) - V_h(c_1) \quad e$$

$$\left| \left\{ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \leq h < c_2 \right\} \right| = V_h(c_2) - V_h\left(\frac{1}{2}(c_1 + c_2)\right).$$

Logo

$$\left| \left\{ c_1 \leq h < \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \right\} \right| - \left| \left\{ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \leq h < c_2 \right\} \right|$$

$$= 2V_h\left(\frac{1}{2}(c_1 + c_2)\right) - (V_h(c_1) + V_h(c_2)) \geq 0,$$

e assim, segue-se o resultado. \diamond

DEMOSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.1. Seja ψ um ponto de mínimo. A princípio, para demonstrar que ψ é superharmônica, teríamos de provar que

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega) \text{ tal que } \eta \geq 0.$$

No entanto, por comodidade, mostraremos a desigualdade somente para $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega_i)$, onde $\Omega_i = A_i \cup A_{i+1}$, $i = 1, \dots, \bar{n}-1$. Isto não afeta a demonstração, pois $\Omega_i \cap \Omega_{i+1} = A_{i+1}$ e, portanto, se $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $\eta \geq 0$, então $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_{\bar{n}-1}$, onde $\eta_i \in C_0^{\infty}(\Omega_i)$ e $\eta_i \geq 0$.

Agora usaremos o Teorema da Integração por Partes em \mathbb{R}^n às funções η e ψ sobre as regiões A_i e A_{i+1} . Note que, para o uso deste teorema, é necessário que A_i , A_{i+1} , η e ψ possuam uma "boa regularidade". Embora $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega_i)$, ψ seja harmônica no int $(\Omega_i \setminus \gamma_i)$ (ver Teorema (3.3)) e as fronteiras de A_i e A_{i+1} sejam convexas, seria preciso ainda o uso de algum raciocínio adicional. De fato, assim como no início do capítulo, podemos garantir a validade do Teorema da Integração por Partes usando argumentos de limite. Informalmente, aplicando o Teorema para a região A_i , temos

$$\int_{A_i} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \, dx = \int_{\partial A_i} \nabla \psi \cdot (-n_e) \eta \, dH^1 - \int_{A_i} \eta \Delta \psi \, dx,$$

onde n_e é o da observação inicial. Como ψ é harmônica no int A_i e $\eta = 0$ em γ_{i-1} , segue-se que

$$\int_{A_i} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \, dx = - \int_{\gamma_i} \nabla \psi \cdot n_e \eta \, dH^1.$$

Observe que $\partial A_i = \gamma_{i-1} \cup \gamma_i$. Note também que $\nabla \psi$ possui a mesma direção e sentido contrário ao de n_e . Por isto

$$\nabla \psi \cdot (-n_e) = - \frac{\partial \psi}{\partial n_e} = \left| \frac{\partial \psi}{\partial n_e} \right|.$$

Analogamente

$$\int_{A_{i+1}} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \, dH^2 = \int_{\gamma_i} \nabla \psi \cdot (-n_i) \eta \, dH^1 = \int_{\gamma_i} - \left| \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \right| \eta \, dH^1.$$

Logo

$$\int_{\Omega_i} \nabla \psi \cdot \nabla \eta \, dx = \int_{\gamma_i} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial n_e} \right| - \left| \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \right| \right) \eta \, dH^1. \quad (4.10)$$

Por (4.5), conclui-se que a diferença das derivadas normais é positiva se $|A_i| \geq |A_{i+1}|$ e negativa se $|A_i| \leq |A_{i+1}|$. No primeiro caso, por (4.10), ψ seria superharmônica e no segundo subharmônica. Suponhamos que $|A_i(\psi)| < |A_{i+1}(\psi)|$ e, portanto, ψ seja subharmônica em Ω_i . Seja h função harmônica em Ω_i que é igual a ψ em γ_{i-1} e γ_{i+1} . Logo $\psi \leq h$ em Ω_i . Da Proposição (4.5),

$$\begin{aligned} |A_i(h)| &= \left| \left\{ \frac{i-1}{\bar{n}} \leq h < \frac{1}{2} \left(\frac{i+1}{\bar{n}} + \frac{i-1}{\bar{n}} \right) \right\} \right| \geq \\ &\geq \left| \left\{ \frac{i}{\bar{n}} \leq h < \frac{i+1}{\bar{n}} \right\} \right| = |A_{i+1}(h)|. \end{aligned}$$

Como $\psi \leq h$, é fácil ver que a curva de nível $\{\psi = i/\bar{n}\}$ está contida na região $\{h \geq i/\bar{n}\}$. Também temos que $\{\psi = i-1/\bar{n}\} = \{h = i-1/\bar{n}\} = \gamma_{i-1}$. Logo $A_i(h) \subset A_i(\psi)$ e, portanto, $|A_i(h)| \leq |A_i(\psi)|$. Analogamente $|A_{i+1}(h)| \geq |A_{i+1}(\psi)|$. Assim $|A_i(\psi)| \geq |A_i(h)| \geq |A_{i+1}(h)| \geq |A_{i+1}(\psi)|$ o que contradiz a nossa suposição. Logo ψ é superharmônica. \diamond

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.2. Se $x \in A_{\bar{n}} \setminus \partial A_{\bar{n}}$, então $|\nabla\psi(x)| = 0$, pois $\psi = 1 - 1/\bar{n}$ em $A_{\bar{n}}$ (ver Teorema (3.3)). Agora suponhamos que $x \in A_i$, $i \neq \bar{n}$. Como ψ é harmônica em A_i , pela Proposição (4.4), $|\nabla\psi|$ cresce ao longo da curva integral do campo $\nabla\psi$ que passa por x . Note que se $x \in \partial A_i$, pode ocorrer de não existir curva integral que toque em x . Porém, isto só ocorrerá se $\frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x) = 0$. Neste caso as estimativas que faremos para $x \in A_i \setminus \partial A_i$ também serão válidas. Assim, para facilitar, faremos a demonstração supondo sempre que, para qualquer $y \in \Omega \setminus A_{\bar{n}}$, existe uma curva integral que toque este ponto. Logo

$$|\nabla\psi(x)| \leq \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_0) \right|,$$

onde x_0 é a intersecção entre a curva integral que passa por x e a curva de nível γ_i . Lembrando as considerações feitas a respeito de n_e e $\frac{\partial\psi}{\partial n_e}$ no início deste capítulo e usando (4.5), concluímos que $\left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e} \right|$ é limitado em γ_i . A estimativa vale, inclusive, para os pontos onde não existir n_e . Neste caso a limitação é feita sobre $\lim_{P_n \rightarrow P} \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(P_n)$ (ver início do capítulo). Feito isto, é fácil mostrar a limitação de $\left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i} \right|$ em γ_i . Basta notar que (4.5) é positiva (ver Teorema 4.1).

Podemos, a partir de x_0 , definir x_1 de forma análoga e, assim, sucessivamente até alcançar algum $x_{\bar{n}-i}$ em $\gamma_{\bar{n}-1}$. Desta forma podemos obter

$$\begin{aligned} |\nabla\psi(x)|^2 &\leq \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_0) \right|^2 = \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_0) \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_0) \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_0) \right|^2 \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_0) \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_0) \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_1) \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_1) \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_1) \right|^2 \leq \\ &\leq \dots \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_0) \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_0) \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_e}(x_{\bar{n}-i}) \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_{\bar{n}-i}) \right|^2 + \\ &\qquad\qquad\qquad + \left| \frac{\partial\psi}{\partial n_i}(x_{\bar{n}-i}) \right|^2. \end{aligned}$$

A partir disto, de (4.5) e do fato da última parcela ser zero, pois

$\psi = 1 - 1/\bar{n}$ em $A_{\bar{n}}$, obtemos

$$|\nabla\psi(x)|^2 \leq \sum_{k=i}^{\bar{n}-1} \frac{\bar{n}^{-2}}{2} (|A_{k+1}|^{-2} - |A_k|^{-2}) \leq \frac{\bar{n}^{-2}}{|A_{\bar{n}}|^2}$$

demonstrando o teorema. \diamond

APÊNDICE A

Fórmula da Coárea: Seja Ω aberto de \mathbb{R}^n . Se $f \in W^{1,2}(\Omega)$ e g é mensurável tq $g |\nabla f|$ seja integrável, então

$$\int_{\Omega} g |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\}} g dH^{n-1} dt,$$

onde o representante de f é dado nas Preliminares.

Faremos aqui uma demonstração para o caso no qual $f \in C^n(\Omega)$ e g é função mensurável positiva.

DEM.: Seja $x_0 \in \Omega$ tq $|\nabla f(x_0)| \neq 0$. Suponhamos s.p.g que $f_{x_n}(x_0) \neq 0$. Note que $f_{x_k} = \nabla f \cdot e_k$. Seja $B = B_R(x_0)$ tq $f_{x_n} \neq 0$ em B . Pelo Teorema Local das Submersões, existem A aberto tq $x_0 \in A \subset B$, U aberto de \mathbb{R} tq $f(x_0) \in U$, V aberto de \mathbb{R}^{n-1} tq o ponto formado com as $(n-1)$ primeiras coordenadas de x_0 esteja em V , h difeomorfismo C^n entre A e $V \times U$ tq $\Pi_n \circ h = f$, onde $\Pi_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$. De fato, h pode ser tomado de forma que $h(z,y) = (z, f(z,y))$, onde $(z,y) = x \in A$ com $z = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $y = x_n$.

Fazendo uma mudança de variável e aplicando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_A g(x) |\nabla f(x)| dx &= \int_{V \times U} g(h^{-1}(x)) |\nabla f(h^{-1}(x))| |\det(h^{-1})'(x)| dx \\ &= \int_U \int_V g |\nabla f| |\det(h^{-1})'(v)| dH^{n-1} du. \end{aligned}$$

Também temos

$$h'(z,y) = \begin{bmatrix} 1 & & \circ & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \circ & & 1 & 0 \\ f_{x_1} & \dots & f_{x_{n-1}} & f_{x_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (h^{-1})' = \begin{bmatrix} 1 & & \circ & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \circ & & 1 & 0 \\ -\frac{f_{x_1}}{f_{x_n}} & \dots & -\frac{f_{x_{n-1}}}{f_{x_n}} & \frac{1}{f_{x_n}} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $|\det(h^{-1})'| = |f_{x_n}|^{-1}$. Logo

$$\int_A g|\nabla f|dx = \int_U \int_V g \frac{|\nabla f|}{|f_{x_n}|} dH^{n-1} dt. \quad (\text{A.1})$$

Sabemos que as curvas de nível de f , $\{f = t\}$, contidas em A , são subvariedades $(n-1)$ -dimensionais e que suas parametrizações são dadas por $L(v) = (v, \ell(v))$, onde $v \in V$ e $\ell(v) = \Pi_n \circ h^{-1}(v, t)$ com $t \in U$. Além disso, a integral em relação à medida H^{n-1} se expressa em termos da parametrização como

$$\int_{\{f=t\} \cap A} g dH^{n-1} = \int_V g(L(v)) \left| \det \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \frac{\partial x_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial v_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{bmatrix} \right| dv_1 \dots dv_{n-1}, \quad (\text{A.2})$$

onde $N = (N_1, \dots, N_n) = \nabla f \cdot |\nabla f|^{-1}$ é o vetor normal unitário, pois a forma volume de uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional é dada por

$$\omega = \sum_{i=1}^n N_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Note que como $g \geq 0$, a igualdade (A.2) faz sentido, mesmo que os dois lados sejam infinitos. Observe que, pela definição de L , vale

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \frac{\partial x_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial v_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_n \\ 1 & \circ & \ell_{x_1} \\ & \ddots & \vdots \\ \circ & & 1 & \ell_{x_{n-1}} \end{bmatrix}$$

A partir disto e de $\ell'(v) = \nabla \Pi_n \circ (h^{-1})'(v)$ temos

$$\ell'(v) = \left(-\frac{f_{x_1}}{f_{x_n}}, \dots, -\frac{f_{x_{n-1}}}{f_{x_n}} \right).$$

O termo $(f_{x_n})^{-1}$ foi omitido, pois ℓ depende só das $n-1$ primeiras coordenadas, logo

$$L'(v) = \begin{bmatrix} \frac{f_{x_1}}{|\nabla f|} & \cdots & \frac{f_{x_n}}{|\nabla f|} \\ 1 & \circ & -\frac{f_{x_1}}{f_{x_n}} \\ \circ & \ddots & \vdots \\ \circ & & 1 & -\frac{f_{x_{n-1}}}{f_{x_n}} \end{bmatrix}.$$

Por indução, demonstra-se que

$$|\det L'(v)| = \frac{f_{x_1}^2}{|\nabla f| |f_{x_n}|} + \cdots + \frac{f_{x_n}^2}{|\nabla f| |f_{x_n}|} = \frac{|\nabla f|}{|f_{x_n}|}. \quad (\text{A.3})$$

Logo, de (A.1), (A.2) e (A.3) temos,

$$\int_A g |\nabla f| dx = \int_U \int_{\{f=t\} \cap A} g dH^{n-1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\} \cap A} g dH^{n-1} dt. \quad (\text{A.4})$$

Concluimos assim que a igualdade vale para um aberto que contém x_0 . Agora queremos estabelecer (A.4) para um compacto qualquer de $D = \{|\nabla f| \neq 0\}$. Seja K um compacto de D . Para todo $x \in D$, seja A_x o aberto onde vale a igualdade. Como K é compacto existe x_1, \dots, x_m tq $K \subset \bigcup_{i=1}^m A_{x_i} \subset D$. Note que o aberto tomado de forma que valesse a igualdade independe de g , só depende de f . Assim

$$\int_{A_{x_1} \cup A_{x_2}} g |\nabla f| dx = \int_{A_{x_1}} g |\nabla f| dx + \int_{A_{x_2}} g_1 |\nabla f| dx,$$

$$\text{onde } g_1 = \begin{cases} g & \text{se } x \in A_{x_1} \setminus A_{x_2} \\ 0 & \text{se } x \in A_{x_1} \cap A_{x_2} \end{cases}.$$

Aplicando (A.4) nas integrais da direita, concluimos que

$$\int_{A_{x_1} \cup A_{x_2}} g |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\} \cap (A_{x_1} \cup A_{x_2})} g dH^{n-1} dt.$$

Fazendo este raciocínio sucessivamente, conclui-se o mesmo para $\bigcup_{i=1}^m A_{x_i}$. Observe que a igualdade vale também para $K \subset \bigcup_{i=1}^m A_{x_i}$. Basta você redefinir g de forma que se anule em K^C . Isto não invalida a igualdade (A.4).

Agora seja K_m uma seqüência crescente de compactos tq $\bigcup K_m = D$. Como g é positiva e (A.4) vale para K_m , usando o Teorema da Convergência Monótona para a integral da direita de (A.4), conclui-se que

$$\int_D g |\nabla f| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\} \cap D} g dH^{n-1} dt.$$

Agora mostraremos que a igualdade também vale em D^c : Pelo Lema de Sardi

$$H^1(\{t : f(x) = t \text{ e } |\nabla f(x)| = 0 \text{ para algum } x \in \Omega\}) = 0.$$

Logo $H^1\left(\left\{t : \int_{\{f=t\} \cap D^c} g dH^{n-1} \neq 0\right\}\right) = 0$, e então $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\{f=t\} \cap D^c} g dH^{n-1} dt = 0$.

Também vale $\int_{D^c} g |\nabla f| dx = 0$. Logo a igualdade também vale em D^c e, portanto, em todo Ω concluindo o resultado no caso particular. \diamond

APÊNDICE B

B.1 DEFINIÇÃO: Diremos que a partição de $[a,b]$, $a = r'_0 < r'_1 < \dots < r'_n = b$, é rearranjo de permutação σ de $a = r_0 < r_1 < \dots < r_n = b$, se $r'_{i+1} - r'_i = r_{1+\sigma(i)} - r_{\sigma(i)}$, onde σ é uma permutação do conjunto $\{0, \dots, n-1\}$.

B.2 LEMA: Sejam $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = b$ e $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ partições de $[0,b]$ tq $|r_i - s_i| < \frac{\mathcal{E}}{3n}$ para $i \in \{0, \dots, n\}$.

Sejam $0 = r'_0 < r'_1 < \dots < r'_n = b$ e $0 < s'_0 < \dots < s'_n = b$ seus respectivos rearranjos de permutação σ em $[0,b]$ com $s'_0 = s_0$. Então

$$m([r'_i, r'_{i+1}] \setminus I_i) < 2\mathcal{E} \quad \text{e} \quad m([s'_i, s'_{i+1}] \setminus I_i) < 2\mathcal{E},$$

onde $I_i = [r'_i, r'_{i+1}] \cap [s'_i, s'_{i+1}]$.

DEM: Note que $r'_i = r'_0 + (r'_1 - r'_0) + \dots + (r'_i - r'_{i-1}) = 0 + (r_{1+\sigma(0)} - r_{\sigma(0)}) + \dots + (r_{1+\sigma(i-1)} - r_{\sigma(i-1)})$.

Analogamente $s'_i = s_0 + (s_{1+\sigma(0)} - s_{\sigma(0)}) + \dots + (s_{1+\sigma(i-1)} - s_{\sigma(i-1)})$.

Assim,

$$\begin{aligned} |r'_i - s'_i| &\leq |s_0| + \sum_{k=0}^i |r_{\sigma(k)} - s_{\sigma(k)}| + \sum_{k=0}^i |r_{1+\sigma(k)} - s_{1+\sigma(k)}| < \\ &< \frac{\mathcal{E}}{3n} + \sum_{k=0}^i \frac{\mathcal{E}}{3n} + \sum_{k=0}^i \frac{\mathcal{E}}{3n} \leq \mathcal{E}. \end{aligned}$$

A partir disto, conclui-se o lema. \diamond

B.3 LEMA: Seja $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função simples dada por $f = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \chi_{(r_i, r_{i+1}]}$. Então

$$f^* = \sum_{i=1}^{n-1} h_{\sigma(i)} \chi_{(r'_i, r'_{i+1}]}, \text{ onde a partição } \{r'_i\} \text{ é rearranjo de permutação } \sigma \text{ de } \{r_i\} \text{ tq}$$

$$h_{\sigma(0)} \leq h_{\sigma(1)} \leq \dots \leq h_{\sigma(n-1)}.$$

DEM: Seja σ permutação de $\{0, \dots, n-1\}$ tq $h_{\sigma(0)} \leq h_{\sigma(1)} \leq \dots \leq h_{\sigma(n-1)}$. Seja $0 = r'_0 < r'_1 < \dots < r'_n = b$ rearranjo de permutação σ de $\{r_i\}$. Para $t \in \mathbb{R}$ temos

$$V_f(t) = |\{x : f(x) < t\}| = \left| \bigcup_{i \text{ tq } h_i < t} (r_i, r_{i+1}] \right| = \sum_{h_i < t} r_{i+1} - r_i.$$

Se não existir $h_i < t$, então $\sum_{h_i < t} r_{i+1} - r_i = 0$. Caso exista $h_i < t$,

$$\sum_{h_i < t} (r_{i+1} - r_i) = \sum_{h_{\sigma(i)} < t} (r_{1+\sigma(i)} - r_{\sigma(i)}) = \sum_{h_{\sigma(i)} < t} r'_{i+1} - r'_i = r'_{k+1} - r'_0 = r'_{k+1},$$

onde k é tq $h_{\sigma(k)} < t \leq h_{\sigma(k+1)}$ ou $t > h_{\sigma(n-1)}$, pois $\{h_{\sigma(i)} : h_{\sigma(i)} < t\}$ é igual a $\{h_{\sigma(0)}, h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(k)}\}$ ou é igual ao conjunto vazio. Assim, temos que $V_f(t) = r'_{k+1}$.

Logo se $s > h_{\sigma(k)}$, então

$$V_f(s) = \sum_{h_{\sigma(i)} < s} r'_{i+1} - r'_i \geq \sum_{i=0}^k r'_{i+1} - r'_i = r'_{k+1}, \quad (\text{B.1})$$

e se $s \leq h_{\sigma(k)}$, então

$$V_f(s) = \sum_{h_{\sigma(i)} < s} r'_{i+1} - r'_i = \sum_{i < k} r'_{i+1} - r'_i \leq r'_k. \quad (\text{B.2})$$

Agora seja $v \in (0, b]$. Portanto, $v \in (r'_k, r'_{k+1}]$ para algum k . Se $r'_k < v \leq V_f(s)$, então, por (B.2), $s > h_{\sigma(k)}$. Logo $\inf \{s : V_f(s) \geq v\} \geq h_{\sigma(k)}$. Por (B.1), temos que

para qualquer $s > h_{\sigma(k)}$ vale $V_f(s) \geq r'_{k+1} \geq v$. Então $\inf \{s : V_f(s) \geq v\} \leq h_{\sigma(k)}$. Logo $f^*(v) = h_{\sigma(k)}$. \diamond

B.4 TEOREMA: Sejam φ e ψ funções simples definidas em Ω limitado, dadas por $\varphi = \sum_{i=1}^k h_i \chi_{F_i}$ e $\psi = \sum_{i=1}^{\ell} \ell_i \chi_{F'_i}$, onde $\{F_i\}$ e $\{F'_i\}$ são partições de Ω . Então $\|\varphi^* - \psi^*\|_{L^2[0,\Omega]} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)}$.

DEM: Podemos supor s.p.g. que $\varphi = \sum_{j=1}^n h_j \chi_{E_j}$, $\psi = \sum_{j=1}^n \ell_j \chi_{E_j}$, onde $\{E_j\}$ é uma partição conveniente de Ω . Podemos também supor que $h_j \leq h_{j+1}$ para $j \in \{1, \dots, n-1\}$, basta reenumerar E_j de forma conveniente.

Agora sejam $f, g: [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f = \sum_{j=1}^n h_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{j=1}^n \ell_j \chi_{A_j},$$

onde a partição $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = |\Omega|$ é tq $m(A_j) = m(E_j)$ com $A_j = (r_{j-1}, r_j]$. Como h_j é crescente, então $f^* = f$ pelo Lema (B.3). Por outro lado, $f^* = \varphi^*$ e $g^* = \psi^*$. Logo

$$\|f^* - g^*\|_{L^2[0,|\Omega|]} = \|\psi^* - \varphi^*\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{B.3})$$

Também vale

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)} &= \int \left| \sum_{j=1}^n (h_j - \ell_j) \chi_{E_j} \right|^2 dx = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \left| \sum_{j=1}^n (h_j - \ell_j) \chi_{E_j} \right|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |h_k - \ell_k|^2 dx = \sum_{k=1}^n |h_k - \ell_k|^2 m(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n |h_k - \ell_k|^2 m(A_k) = \|f - g\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Usando a partição $\{r_j\}$, construiremos uma nova partição $0 < s_0 < \dots < s_n = |\Omega|$ tq $0 < s_j - r_j < \frac{\varepsilon}{3(n+1)}$, onde $\varepsilon > 0$ e $s_j - s_{j-1} \in \mathbb{Q}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Sejam

$B_0 = (0, s_0]$ e $B_j = (s_{j-1}, s_j]$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Defina

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^n h_j \chi_{B_j} \quad \text{e} \quad \bar{g} = \sum_{j=0}^n \ell_j \chi_{B_j},$$

com $h_0 = \min f$ e $\ell_0 = \min g$. Logo $\bar{f} = f$ em $\bigcup (A_j \cap B_j)$. Assim, $\bar{f} \neq f$ no máximo em $(\bigcup B_j) \setminus (\bigcup (A_j \cap B_j)) \cup B_0 \subset \bigcup [B_j \setminus (A_j \cap B_j)] \cup B_0$. Portanto, $m(\{x: \bar{f} \neq f\}) \leq \sum_{j=1}^n m(B_j \setminus A_j \cap B_j) + m(B_0) < \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{E}}{3(n+1)} < \mathcal{E}$. Logo $\|\bar{f} - f\|_{L^2[0,|\Omega|]} \leq \mathcal{E}^{1/2} \cdot M$, onde $M = \max_{0 \leq j \leq n} \{|h_j|, |\ell_j|\}$. Analogamente, $\|\bar{g} - g\|_{L^2[0,|\Omega|]} \leq \mathcal{E}^{1/2} \cdot M$. Pelo Lema (B.3), g^* e \bar{g}^* são rearranjos crescentes das funções g e \bar{g} pela mesma permutação σ . Assim, pelo Lema (B.2), $m(\{x: g^* \neq \bar{g}^*\}) < 2\mathcal{E}(n+1)$. Logo $\|g^* - \bar{g}^*\|_{L^2[0,|\Omega|]} \leq [2\mathcal{E}(n+1)]^{1/2} M$. Suponhamos s.p.g. que

$$\|f - \bar{f}\|, \|g - \bar{g}\|, \|f^* - \bar{f}^*\| \text{ e } \|g^* - \bar{g}^*\| < \mathcal{E}/4. \quad (\text{B.5})$$

Provaremos agora que $\|\bar{f}^* - \bar{g}^*\|_{L^2[0,|\Omega|]} \leq \|\bar{f} - \bar{g}\|_{L^2[0,|\Omega|]}$. Como $s_j - s_{j-1} \in \mathbb{Q}$, então existe uma partição $0 = u_0 < s_0 = u_1 < \dots < u_m = |\Omega|$ tq $u_{k+1} - u_k$ seja uma constante C para $k \in \{1, \dots, m\}$ e, dado j , $(s_{j-1}, s_j] = \bigcup_{k=k_j}^{k_{j+1}} (u_{k-1}, u_k]$ para algum $k_j < k_{j+1} \in \{1, \dots, m\}$. Podemos supor que

$$\bar{f} = \sum_{k=0}^{m-1} d_k \chi_{(u_k, u_{k+1}]} \quad (d_k \text{ crescente}) \quad \text{e} \quad \bar{g} = \sum_{k=0}^{m-1} e_k \chi_{(u_k, u_{k+1}]},$$

onde $\{d_k\} = \{h_j\}$ e $\{e_k\} = \{\ell_j\}$. Pelo Lema (B.3),

$$\bar{g}^* = \sum_{k=0}^{m-1} e_{\sigma(k)} \chi_{(u'_k, u'_{k+1}]},$$

onde $e_{\sigma(k)}$ é crescente, $u'_0 = u_0 = 0$ e $u'_1 = u_1 = s_0$ ($e_k \geq \min \bar{g} = \ell_0 = e_0$). Assim, após o rearranjo, podemos supor que o intervalo $(u_0, u_1]$ não é permutado. Portanto, $u'_k = u'_0 + (u'_1 - u'_0) + \dots + (u'_k - u'_{k-1}) = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_{\sigma(1)+1} -$

$u_{\sigma(1)} + \dots + (u_{\sigma(k-1)+1} - u_{\sigma(k-1)}) = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_k - u_{k-1}) = u_k$. A 3ª igualdade ocorre porque $u_{i+1} - u_i$ é constante. Então

$$\bar{g}^* = \sum_{k=0}^{m-1} e_{\sigma(k)} \chi_{(u_k, u_{k+1}]}$$

Logo

$$\|\bar{f}^* - \bar{g}^*\|_{L^2[0, |\Omega|]} = \sum_{k=0}^{m-1} |d_k - e_{\sigma(k)}|^2 \cdot C \quad \text{e} \quad \|\bar{f} - \bar{g}\|_{L^2[0, |\Omega|]} = C \sum_{k=0}^{m-1} |d_k - e_k|^2.$$

Note que a permutação σ é uma composta de permutações σ_{ij} , onde $\sigma_{ij}(i) = j$, $\sigma_{ij}(j) = i$, $\sigma_{ij}(k) = k$ se $k \notin \{i, j\}$ e i, j são tq $i < j$ e $e_i \geq e_j$. De $d_i \leq d_j$ e $e_i \geq e_j$ temos $(d_i - d_j)(e_i - e_j) \leq 0$. Então $d_i e_i + d_j e_j \leq d_i e_j + d_j e_i$. Portanto,

$$d_i^2 - 2e_i d_i + e_i^2 + d_j^2 - 2e_j d_j + e_j^2 \geq d_i^2 - 2e_j d_j + e_j^2 + d_j^2 - 2e_i d_j + e_i^2.$$

Logo $|d_i - e_i|^2 + |d_j - e_j|^2 \geq |d_i - e_{\sigma_{ij}(i)}|^2 + |d_j - e_{\sigma_{ij}(j)}|^2$.

Assim, concluímos que

$$\sum_{k=0}^{m-1} |d_k - e_k|^2 \geq \sum_{k=0}^{m-1} |d_k - e_{\sigma_{ij}k}|^2 \geq \dots \geq \sum_{k=0}^{m-1} |d_k - e_{\sigma k}|^2.$$

Portanto,

$$\|\bar{f}^* - \bar{g}^*\| \leq \|\bar{f} - \bar{g}\|. \quad (\text{B.6})$$

De (B.5), (B.6) e de \mathcal{E} ser arbitrário, segue que $\|f^* - g^*\|_{L^2[0, |\Omega|]} \leq \|f - g\|_{L^2[0, |\Omega|]}$. A partir disto, de (B.3) e (B.4), conclui-se o teorema. \diamond

B.5 LEMA: Se $f \in L^2(\Omega)$ para Ω limitado, então $f^* \in L^2(0, |\Omega|)$ e

$$\|f^*\|_{L^2(0, |\Omega|)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

DEM: Dado $\mathcal{E} > 0$, seja $A_i = \{x \in \Omega : i\mathcal{E} \leq f(x) < (i+1)\mathcal{E}\}$ para $i \in \mathbb{Z}$. Defina

$$\psi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\mathcal{E} \chi_{A_i}.$$

É fácil ver que $0 \leq f - \psi < \mathcal{E}$. Logo

$$\|\psi\| \leq \|f\| \leq \|\psi + \mathcal{E}\| \leq \|\psi\| + \mathcal{E}|\Omega|^{1/2}. \quad (\text{B.7})$$

Também temos, por (ii) da Propriedade (13), que

$$\psi^* \leq f^* \leq (\psi + \mathcal{E})^*.$$

Usando (iii) da Propriedade (13), concluímos que

$$\psi^* \leq f^* \leq \psi^* + \mathcal{E}. \quad (\text{B.8})$$

Agora calcularemos $\|\psi^*\|_{L^2(0,|\Omega|)}$. Para isto, seja

$$g = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\mathcal{E}\chi_{(r_i, r_{i+1}]},$$

onde $\{r_i\}$ é uma partição de $[0, |\Omega|]$, $0 \leq \dots \leq r_{-2} \leq r_{-1} \leq r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq |\Omega|$, tq $r_k = \sum_{i=-\infty}^{k-1} m(A_i)$. Note que $\{r_i\}$ pode ser infinito, caso f seja ilimitada. Além disto, $r_{k+1} - r_k = m(A_k)$. Assim, concluímos facilmente que $V_g = V_\psi$ e, portanto, $g^* = \psi^*$. Como g é crescente, então $g^* = g$. Logo

$$\|\psi^*\|_{L^2(0,|\Omega|)} = \|g\|_{L^2(0,|\Omega|)}.$$

Usando (B.4), temos que

$$\|\psi^*\|_{L^2(0,|\Omega|)} = \|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

A partir disto, de (B.7) e de (B.8), deduzimos que

$$-\mathcal{E}|\Omega|^{1/2} < \|f\| - \|f^*\| < \mathcal{E}.$$

Fazendo $\mathcal{E} \rightarrow 0$, conclui-se o lema. \diamond

Observe que, com o mesmo raciocínio deste lema, poderíamos concluir que $\|f^*\|_{L^p(0,|\Omega|)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$ para $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$.

B.6 LEMA: Se $f \in L^2(\Omega)$ (Ω limitado), então existe uma função simples

$$\varphi = \sum_{i=1}^n h_i \chi_{E_i}$$

$$\|f - \varphi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|f^* - \varphi^*\|_{L^2(0,|\Omega|)} < \varepsilon.$$

DEM: No Lema (B.5) foi mostrado que existe uma função ψ parecida com a função φ que desejamos. A diferença é que aquela ψ pode assumir infinitos valores. No entanto, o problema pode ser facilmente resolvido. Primeiro, seja ψ a função definida no Lema (B.5). A seguir, defina

$$\varphi_n = \sum_{i=-n}^n i \chi_{A_i},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e A_i está descrito no Lema (B.5). De forma semelhante ao referido lema, podemos definir g_ψ e g_{φ_n} a partir de ψ e φ_n respectivamente. Assim, é fácil mostrar que

$$\|\psi - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = \|g_\psi - g_{\varphi_n}\|_{L^2(0,|\Omega|)} = \|\psi^* - \varphi_n^*\|_{L^2(0,|\Omega|)}.$$

Portanto, tomando n suficientemente grande, conseguimos aproximar φ_n de ψ obtendo

$$\|\psi - \varphi_n\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|\psi^* - \varphi_n^*\| < \varepsilon$$

o que conclui o lema. \diamond

B.7 TEOREMA: Se f e g são funções em $L^2(\Omega)$, então

$$\|f^* - g^*\|_{L^2(0,|\Omega|)} \leq \|f - g\|_{L^2(\Omega)}.$$

DEM: Imediata do Teorema (B.4) e Lema (B.6). \diamond

APÊNDICE C

C.1 LEMA: Seja $f: \Omega \rightarrow [m, M]$ função $C^1(\bar{\Omega})$, onde Ω é um aberto limitado e $|\nabla f| \neq 0$ em um conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$. Sejam K um compacto de \mathbb{R}^n , tq $K \subset \Omega_0$, e $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$. Então

(i) existem $h, \mathcal{E}_0 > 0$ tq a aplicação $G: (-h, h) \times (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0) \times K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(s, \mathcal{E}, y) = (f + \mathcal{E}\eta) \left(y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} \right)$$

seja estritamente crescente em $(-h, h) \forall \mathcal{E} \in (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0) \forall y \in K$; e

(ii) dado $\delta > 0$, existe $d_0 > 0$ tq para $y \in K$ e $d \in [0, d_0]$ exista $x \in B_\delta(y)$ para o qual $|f(x) - f(y)| = d$.

DEM (i): É fácil ver que $\frac{\partial G}{\partial s} = (\nabla f + \mathcal{E}\nabla\eta) \left(y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} \right) \cdot \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}$ e que $\frac{\partial G}{\partial s}$ é uniformemente contínua em $[-h, h] \times [-L, L] \times K$, onde $L \in \mathbb{R}$ e h é tão pequeno que os pontos da forma $y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}$ estejam em Ω para $s \in [-h, h]$. Assim, existem h, \mathcal{E}_0 pequenos tq

$$\left| \frac{\partial G}{\partial s}(s, \mathcal{E}, y) - \frac{\partial G}{\partial s}(0, 0, y) \right| < \rho$$

para $\mathcal{E} \in [-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0]$, $s \in [-h, h]$ e $y \in K$, onde $\rho = \frac{1}{2} \inf_{y \in K} |\nabla f(y)| > 0$. Como $\frac{\partial G}{\partial s}(0, 0, y) = |\nabla f(y)|$, decorre que $\frac{\partial G}{\partial s}(s, \mathcal{E}, y) \geq \frac{1}{2} \inf_{y \in K} |\nabla f(y)|$ e, portanto, segue-se (i).

(ii): Podemos obter as seguintes estimativas tomando $\mathcal{E} = 0$: para $y \in K$

$$f \left(y + s_1 \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} \right) - f(y) = \int_0^{s_1} \frac{\partial G}{\partial s}(s, 0, y) ds \geq \frac{s_1}{2} \inf_{y \in K} |\nabla f(y)|, \quad (C.1)$$

onde $s_1 \in [0, h]$. Analogamente, para $s \in [-h, 0]$,

$$f\left(y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}\right) - f(y) \leq \frac{s}{2} \inf_{y \in K} |\nabla f(y)|. \quad (C.2)$$

Agora sejam $y \in K$ e $\delta > 0$. Além disto, sejam h de (i), tq $h < \delta$, e $d_0 = \frac{h}{4} \inf_{y \in K} |\nabla f(y)|$.

Disto e de (C.1), para $s_1 \in (\frac{h}{2}, h)$, temos que

$$f\left(y + s_1 \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}\right) - f(y) \geq \frac{s_1}{2} \frac{4d_0}{h} > d_0.$$

Quando $s = 0$ a diferença é 0. Logo, pela continuidade desta diferença, existe $s_0 \in (0, s_1)$ tq a subtração seja d , para $d \in (0, d_0]$. Assim, basta tomarmos

$$x = y + s_0 \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}$$

para concluir o lema. \diamond

C.2 TEOREMA: Seja f função definida em Ω aberto limitado de \mathbb{R}^n tq $f \in C^2(\bar{\Omega})$, $f = 0$ em $\partial\Omega$ e $|\nabla f| \neq 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{x \in \Omega : f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = \sup f\}$. Seja $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ e lembre que $P_t = \{f = t\}$. Então, se $t_0 \in (0, \sup f)$, valem:

(i) existe $h_0 > 0$ tq a função $\alpha : P_{t_0} \times (-h_0, h_0) \rightarrow \Omega$ definida por

$$\alpha(y, s) = y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|},$$

seja injetora e $B = \alpha(P_{t_0} \times (-h_0, h_0))$ seja aberto; e

(ii) existem $\mathcal{E} > 0$ e uma função $s : P_{t_0} \rightarrow (-h_0, h_0)$ de classe C^1 tq valha a igualdade entre os conjuntos:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}\eta} &= \{x \in \Omega : f(x) + \mathcal{E}\eta(x) = t_0\} \\ &= \left\{ x \in \Omega : x = y + s(y) \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}, \text{ onde } y \in P_{t_0} \right\} = M_{s(y)}. \end{aligned}$$

DEM (i): Como $|\nabla f| \neq 0$ em P_{t_0} , este é uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional. Logo, para $x \in P_{t_0}$, existe $\varphi_x : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow P_{t_0}$ parametrização de P_{t_0} de classe C^2 , onde U é aberto e $x \in \varphi_x(U)$.

Seja $F_x : U \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ dado por $F_x(u, s) = \varphi(u) + s \frac{\nabla f(\varphi(u))}{|\nabla f(\varphi(u))|}$.

Seja também $g = \frac{(\nabla f) \circ \varphi}{|(\nabla f) \circ \varphi|}$. Pondo $g = (g^1, \dots, g^n)$ e $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, temos

$$F'_x(u, s) = \begin{bmatrix} \varphi_{u_1}^1(u) + s g_{u_1}^1(u) & \cdots & \varphi_{u_{n-1}}^1(u) + s g_{u_{n-1}}^1(u) & g^1(u) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_{u_1}^n(u) + s g_{u_1}^n(u) & \cdots & \varphi_{u_{n-1}}^n(u) + s g_{u_{n-1}}^n(u) & g^n(u) \end{bmatrix}.$$

Quando $s=0$ a matriz é inversível, pois φ é parametrização e, portanto, $\varphi'(u) \cdot e_1, \dots, \varphi'(u) \cdot e_{n-1}$ são linearmente independentes e ortogonais a $\nabla f(\varphi(u))$. Logo existe O_x aberto em $U \times \mathbb{R}$ tq $F(O_x) = I_x$ seja aberto em Ω , com $x \in I_x$, e F seja inversível em O_x . Suponhamos s.p.g. que $I_x = B_{r_x}(x)$. Seja $O'_x = F^{-1}(B_{\frac{r_x}{3}}(x))$.

Como O'_x é aberto em $U \times \mathbb{R}$, podemos construir um aberto, cujo fecho está em O'_x , da forma $U_1 \times (-h_x, h_x)$, onde U_1 é aberto em U e $h_x > 0$. Defina $A_x = F(U_1 \times (-h_x, h_x))$. Claramente $\overline{A_x} \subset B_{\frac{r_x}{3}}(x)$. Além disto,

$$A_x = \left\{ z : z = y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}, \text{ onde } y \in \varphi(U_1) \text{ e } s \in (-h_x, h_x) \right\}.$$

Note que h_x independe de y . A coleção $\{A_x\}_{x \in P_{t_0}}$ cobre P_{t_0} , que é compacto. Podemos, portanto, extrair uma subcobertura finita, $A_{x_1} \cup \dots \cup A_{x_m} \supset P_{t_0}$. A aplicação α é injetora em $(A_{x_k} \cap P_{t_0}) \times (-h_{x_k}, h_{x_k})$ para $k \in \{1, \dots, m\}$, pois $F_x|_{U_1 \times (-h_x, h_x)}$ é injetora. Se $P_{t_0} \cap (\overline{A_{x_k}} \cap \overline{A_{x_j}}) \neq \emptyset$, então $P_{t_0} \cap (\overline{A_{x_k}} \cup \overline{A_{x_j}}) \subset P_{t_0} \cap B_{r_{x_j}}(x_j)$. Assim, α é injetora em $P_{t_0} \cap (\overline{A_{x_k}} \cup \overline{A_{x_j}}) \times (-h, h)$, onde $0 < h \leq \min\{h_{x_k}, h_{x_j}\}$. Se $P_{t_0} \cap (\overline{A_{x_k}} \cap \overline{A_{x_j}}) = \emptyset$, então, tomando h_{x_k}, h_{x_j} pequenos, temos que $\overline{A_{x_k}} \cap \overline{A_{x_j}} = \emptyset$. Logo, tomando h_0 conveniente, conclui-se que α é injetora em $P_{t_0} \times (-h_0, h_0)$. Além disto, o B da definição é aberto, pois $B = \bigcup_{k=1}^m A_{x_k}$.

DEM (ii): 1º passo: Mostraremos que existe $\varepsilon_1 > 0$ tq $\bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]} P_t \subset B$.

Como B^c é fechado e P_{t_0} é compacto, então $\text{dist}(P_{t_0}, B^c) = \delta > 0$. Seja d_0 o da

parte (ii) do Lema (C.1) com $K = \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]} P_t$, onde $\varepsilon_0 > 0$ é tq $0 < t_0 - \varepsilon_0$ e $t_0 + \varepsilon_0 < \sup f$. De fato, K é um compacto de \mathbb{R}^n em Ω , pois claramente $K = f^{-1}([t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0])$ e como f é contínua podendo ser estendida a $\partial\Omega$, conclui-se que K é fechado em $\bar{\Omega}$. A partir disto e de $\bar{\Omega}$ ser compacto, inferimos que K é compacto. Também vale que $K \subset \Omega$, pois $f = 0$ em $\partial\Omega$. Agora note que se $y \in K \cap \bigcup_{t \in [t_0 - d_0, t_0 + d_0]} P_t$, então existe $x \in B_\delta(y)$ tq $f(x) - f(y) = t_1 - t_0 < d_0$, onde $t_1 = f(y)$. Portanto, $f(x) = t_0$ e, assim, $\text{dist}(y, P_{t_0}) < \delta$. Logo $y \in B$. Então, tomando $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, d_0\}$, concluímos o 1º passo.

2º passo: Existe $\varepsilon_2 > 0$ tq se $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$, então $P_{\varepsilon\eta} \subset \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]} P_t \subset B$. Seja $\varepsilon_2 > 0$ tq $\varepsilon_2 \cdot \sup|\eta| < \varepsilon_1$. Se $x \in P_{\varepsilon\eta}$, onde $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$, então $|f(x) - t_0| = |\varepsilon\eta(x)| \leq |\varepsilon_2\eta(x)| < \varepsilon_1$. Portanto, $x \in \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]} P_t$.

3º passo: Existem $\varepsilon_3 > 0$ e uma função $s(y)$ definida em P_{t_0} tq $P_{\varepsilon\eta} \subset M_{s(y)}$.

Sejam $h, \varepsilon_0 > 0$ os determinados na parte (i) do Lema (C.1), isto é, tais que $G(s, \varepsilon, y)$ seja estritamente crescente em $(-h, h) \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \forall y \in P_{t_0}$. Podemos supor s.p.g que $h = h_0$, onde h_0 foi obtido em (i) deste lema.

Agora seja $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$, onde ε_2 foi achado no 2º passo. Para $x \in P_{\varepsilon\eta}$, com $\varepsilon \leq \varepsilon_3$ fixo, temos que $x \in B$. Como α é uma bijeção entre $P_{t_0} \times (-h_0, h_0)$ e B , então existe um único $(y_x, s_x) \in P_{t_0} \times (-h_0, h_0)$ tq $x = \alpha(y_x, s_x)$. Assim, está bem definida a aplicação $x \rightarrow s_x$. Agora note que se $s \neq s_x$, então $G(s, \varepsilon, y_x) \neq G(s_x, \varepsilon, y_x)$, pois G é estritamente crescente em $(-h, h)$. Observe também que $G(s_x, \varepsilon, y_x) = (f + \varepsilon\eta)(\alpha(y_x, s_x)) = (f + \varepsilon\eta)(x) = t_0$. Assim, $\alpha(y_x, s) \notin P_{\varepsilon\eta}$. Logo a aplicação $x \rightarrow y_x$ definida em $P_{\varepsilon\eta}$ é injetora, pois, caso contrário, existiriam $s_1 \neq s_2$ tq $\alpha(y_x, s_1), \alpha(y_x, s_2) \in P_{\varepsilon\eta}$ contradizendo o que acabamos de concluir. Logo x é uma função de y_x e, conseqüentemente, s_x é uma função de y , ie, $s_x = s(y)$. Observe que ε independe de y . Assim, para todo $y = y_x, x \in P_{\varepsilon\eta}$, podemos definir

$s(y)$ tq $\alpha(y, s(y)) = x$. Logo $P_{\mathcal{E}\eta} \subset M_{s(y)}$ com $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_3$ e $s(y)$ assim obtidos. Veremos a seguir que $s(y)$ está definida para qualquer $y \in P_{t_0}$, bastando tomar \mathcal{E} suficientemente pequeno.

4º passo: Existe $\mathcal{E}_4 > 0$ tq se $\eta(y) > 0$ para $y \in P_{t_0}$, então, para $\mathcal{E} \in (0, \mathcal{E}_4]$, existe $s(y) \in (-h_0, 0)$, onde $\alpha(y, s(y)) = x \in P_{\mathcal{E}\eta}$.

Seja $y \in P_{t_0}$ tq $\eta(y) > 0$. De (C.2) do Lema (C.1), temos que $f(\alpha(y, s)) - f(y) \leq \frac{s}{2}c$, onde $c = \inf_{P_{t_0}} |\nabla f|$ e $s \in (-h_0, 0)$. Logo

$$f(\alpha(y, s)) + \mathcal{E}\eta(\alpha(y, s)) \leq \frac{s}{2}c + f(y) + \mathcal{E}\eta(\alpha(y, s)) < f(y) = t_0$$

para $s = -1/2 h_0$ e $\mathcal{E} < \mathcal{E}_4$ suficientemente pequeno. Quando $s=0$, a soma da esquerda é maior que t_0 , assim, existe o $s(y)$ desejado. Observe que \mathcal{E}_4 independe de y , pois a desigualdade (C.1) do Lema (C.1) vale $\forall y \in P_{t_0}$. Então conclui-se o 4º passo. Quando $\eta(y) < 0$, o análogo pode ser estabelecido observando que $s(y) \in (0, h_0)$. Caso $\eta(y) = 0$, trivialmente, $s(y) = 0$. Logo conclui-se que, para $\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_4$, existe uma função $s(y)$ definida em P_{t_0} tq $M_{s(y)} \subset P_{\mathcal{E}\eta}$. Finalmente, tomando $\mathcal{E} \leq \min\{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$, conclui-se que a função $s(y)$ construída no 3º passo está definida em todo P_{t_0} e $P_{\mathcal{E}\eta} = M_{s(y)}$. A igualdade entre as funções achadas no 3º e 4º passo deve-se ao fato de $s(y)$ ser única como verificamos.

5º passo: $S(y) \in C^1(P_{t_0})$.

Sejam $\varphi : U \rightarrow P_{t_0}$ e $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ as parametrizações definidas em (i), onde U é tq $F(U \times (-h_0, h_0))$ é aberto (pela demonstração de (i), vimos que isto é possível). Portanto, $F(u, s(u))$ é parametrização local de $P_{\mathcal{E}\eta}$, que é superfície C^1 , pois f e $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ e $\nabla f + \mathcal{E}\nabla\eta \neq 0$ para \mathcal{E} pequeno. Logo $\varphi(u) + s(\varphi(u)) \cdot g(u)$ é C^1 , onde g está definida em (i). Como g é C^1 , pois ∇f e φ são de classe C^1 , então $s \in C^1(P_{t_0})$. \diamond

C.3 LEMA: Existe $\mathcal{E}_0 > 0$ tq a aplicação $\mathcal{E} \rightarrow s(y, \mathcal{E})$ seja uma função $C^1(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Além disto, para \mathcal{E}_0 especial, se $\eta(y) > 0$ para $y \in P_{t_0}$, então $s(y, \mathcal{E})$ é

estritamente decrescente em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Analogamente se $\eta(y) < 0$, então $s(y, \mathcal{E})$ é estritamente crescente em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Quando $\eta(y) = 0$, então $s(y, \mathcal{E}) \equiv 0$.

DEM: Seja G a função definida no Lema (C.1). Tomando \mathcal{E}_0 , h e $K = P_{t_0}$ desse mesma lema, temos que $\frac{\partial G}{\partial s} > 0$ em $(-h, h) \times (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0) \times P_{t_0}$.

Fixando $y \in P_{t_0}$, podemos ver G como uma função de 2 parâmetros definida no aberto $(-h, h) \times (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Assim, aplicando o Teorema da Função Implícita para $G(s, \mathcal{E}) = t_0$ e usando o fato de G ser de classe C^1 , temos que s é uma função de \mathcal{E} de classe C^1 . Logo $s(y) = s(y, \mathcal{E})$ concluindo a 1ª parte deste lema.

Agora suponhamos que $\eta(y) > 0$ para $y \in P_{t_0}$. Primeiramente veremos, por absurdo, que $s(y, \mathcal{E})$ é injetora em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Suponhamos que existam $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$ tq $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ e $s(y, \mathcal{E}_1) = s(y, \mathcal{E}_2)$. Logo $\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1)) = \alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))$. Disto e da definição de $s(y, \mathcal{E})$, temos

$$(f + \mathcal{E}_1 \eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))) = t_0 = (f + \mathcal{E}_2 \eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))). \quad (C.3)$$

Portanto, $\mathcal{E}_1 \eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))) = \mathcal{E}_2 \eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1)))$. Como $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$, temos que

$$\eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))) = 0. \quad (C.4)$$

A partir disto e de (C.3), segue-se que $f(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))) = f(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))) = t_0$. Note que $f(\alpha(y, s)) = G(s, 0, y)$. Logo $f(\alpha(y, s))$ é estritamente crescente em $(-h, h)$. Disto e de $t_0 = f(y) = f(\alpha(y, 0))$, concluímos que $s(y, \mathcal{E}_1) = s(y, \mathcal{E}_2) = 0$. Mas, usando (C.4), inferimos que $0 = \eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_1))) = \eta(\alpha(y, 0)) = \eta(y) > 0$ o que é absurdo. Assim, conclui-se que $s(y, \mathcal{E})$ é injetora em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Como esta função também é contínua, portanto, ou é estritamente crescente ou é estritamente decrescente em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Mostraremos agora que $s(y, \mathcal{E})$ é estritamente decrescente em $(-\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)$, onde $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_0$ e, portanto, pelo que acabamos de demonstrar, estritamente decrescente em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$.

Como η é contínua e $\eta(y) > 0$, então $\eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}))) > 0$, onde $\mathcal{E} \in (-\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)$ para \mathcal{E}_1 pequeno. Suponhamos que existam $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ tq $-\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_1$ e $s(y, \mathcal{E}_2) < s(y, \mathcal{E}_3)$. Pela definição de \mathcal{E}_1 e de $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3$, temos

$$(f + \mathcal{E}_2\eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))) < (f + \mathcal{E}_3\eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))).$$

Por outro lado, $(f + \mathcal{E}_2\eta)(\alpha(y, s))$ é igual a $G(s, \mathcal{E}_2, y)$ que é estritamente crescente em $(-h, h)$. Note que $s(y, \mathcal{E}_2), s(y, \mathcal{E}_3) \in (-h, h)$. Logo

$$(f + \mathcal{E}_3\eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))) < (f + \mathcal{E}_3\eta) \circ (\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_3))).$$

A partir disto e da definição de $s(y, \mathcal{E})$, temos

$$t_0 = (f + \mathcal{E}_2\eta)(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_2))) < (f + \mathcal{E}_3\eta)(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_3))) = t_0,$$

chegando a um absurdo. Logo $s(y, \mathcal{E}_2) > s(y, \mathcal{E}_3)$ concluindo o resultado.

Finalmente, por definição de $s(y, \mathcal{E})$, $s(y, \mathcal{E}) \equiv 0$ em $(-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$ quando $\eta(y) = 0$ para $y \in P_{t_0}$. \diamond

C.4 LEMA: As funções $s(y, \mathcal{E})$ e $\frac{\partial s}{\partial y}(y, \mathcal{E})$ convergem uniformemente a 0 em P_{t_0} quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

DEM: Veremos primeiro que $s(y, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ uniformemente quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$. Por definição, $s(y, \mathcal{E})$ é tq $f(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}))) = t_0 - \mathcal{E}\eta(\alpha(y, s(y, \mathcal{E})))$. Assim, $f(\alpha(y, s(y, \mathcal{E})))$ converge uniformemente a 0 quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$. Como $s(y, \mathcal{E}) \in (-h, h)$, onde h é o do Lema (C.1), valem as desigualdades (C.1) e (C.2) para qualquer $y \in P_{t_0}$. Logo $s(y, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ uniformemente.

Agora mostraremos que $\frac{\partial s}{\partial y}(y, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ uniformemente quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$. Seja $\varphi: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow P_{t_0}$ uma parametrização local de P_{t_0} como a descrita no Teorema (C.2), então, temos

$$(f + \mathcal{E}\eta) \circ (\varphi(u) + s(\varphi(u), \mathcal{E})g(u)) = t_0,$$

onde $g(u)$ está definida no Teorema (C.2). Derivando esta igualdade em relação a u e aplicando em $h \in \mathbb{R}^{n-1}$, segue que

$$(\nabla f + \mathcal{E} \nabla \eta) \cdot \left(\varphi'(u) \cdot h + g(u) \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \varphi'(u) \cdot h + s(\varphi(u), \mathcal{E}) g'(u) \cdot h \right) = 0.$$

Quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$, valem: 1) $(\nabla f + \mathcal{E} \nabla \eta) \cdot \varphi'(u) \cdot h \rightarrow 0$ uniformemente em compactos de U , pois $\nabla f(\varphi(u)) \perp \varphi'(u) \cdot h$ e as funções f , η e φ tem derivadas contínuas.

Daqui em diante, quando falarmos em convergência uniforme, estará subentendido que é uniforme em compactos.

2) $(\nabla f + \mathcal{E} \nabla \eta) \cdot g'(u) \cdot h \cdot s(\varphi(u), \mathcal{E}) \rightarrow 0$ uniformemente, pois $s(\varphi(u), \mathcal{E})$ tende a 0 uniformemente e g' é limitado já que $f \in C^2(\bar{\Omega})$ com $|\nabla f| > c > 0$ em P_{t_0} . Logo, de 1) e 2), conclui-se que

$$(\nabla f + \mathcal{E} \nabla \eta) g(u) \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \varphi'(u) \cdot h \rightarrow 0 \text{ uniformemente.}$$

Portanto, $\nabla f(\varphi(u) + s(\varphi(u), \mathcal{E})g(u)) \cdot g(u) \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \varphi'(u) \cdot h \rightarrow 0$ uniformemente.

Como $g \cdot \nabla f = |\nabla f| > c > 0$ em P_{t_0} , temos que $\frac{\partial s}{\partial y} \varphi'(u) \cdot h \rightarrow 0$ uniformemente.

Também temos que $|\varphi'(u) \cdot h| > a > 0$ em um compacto de U quando h for um elemento arbitrário de \mathbb{R}^{n-1} tq $|h| = 1$. Por isto, $\frac{\partial s}{\partial y} \rightarrow 0$ uniformemente neste compacto.

Se tais compactos forem fechados de abertos, poderemos cobrir P_{t_0} com finitas imagens destes abertos e, assim, concluir a convergência uniforme em todo P_{t_0} . \diamond

C.5 TEOREMA: Seja f uma função com as hipóteses do Teorema (C.2), então

$$\frac{dV_f(t)}{dt} = \int_{\{f=t\}} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} \text{ em } (\inf f, \sup f).$$

DEM: Como $\{f = t\}$ é uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional, então $|\{f = t\}| = 0$.
 A partir disto e da fórmula da coárea,

$$V_f(t) = \int_{\Omega} \chi_{\{f \leq t\}} dx = \int_{-\infty}^t \int_{\{f=s\}} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} ds.$$

Veremos que a aplicação $t \rightarrow \int_{\{f=t\}} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1}$ é contínua em $(\inf f, \sup f)$, concluindo o teorema. Seja $t_0 \in (\inf f, \sup f)$. Pela demonstração do Teorema (C.2), existem $\mathcal{E}_0 > 0$ e $s(y, \mathcal{E}) \in C^1(P_{t_0} \times (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0))$ tq $P_{\mathcal{E}\eta} = M_{s(y, \mathcal{E})}$ para $\mathcal{E} \in (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Tomando η constante, temos que $P_{\mathcal{E}\eta} = P_t$ com t próximo de t_0 . Logo P_t pode ser parametrizado localmente por $\varphi_t(u) = \varphi(u) + s(\varphi(u), \mathcal{E})g(u)$, onde g e $\varphi: U \rightarrow P_{t_0}$ estão definidas no Teorema (C.2) e \mathcal{E} é um real que só depende de t . Note que $\mathcal{E} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_0$. Agora, usando o argumento do Apêndice A, temos que

$$\int_{\{f=t\} \cap \varphi_t(U)} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} = \int_U \left| \nabla f(\varphi_t(u)) \right|^{-1} \cdot \left| \det F'(u, s(\varphi(u))) \right| dx,$$

onde $F'(u, s)$ também pode ser encontrado no Teorema (C.2). Como $s(y, \mathcal{E}) \rightarrow 0$, $\frac{\partial s}{\partial y}(y, \mathcal{E}) \rightarrow 0$ e $\nabla f(\varphi_t(u)) \rightarrow \nabla f(\varphi(u))$ uniformemente quando $t \rightarrow t_0$, então

$$\int_{\{f=t\} \cap \varphi_t(U)} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} \rightarrow \int_{\{f=t_0\} \cap \varphi(U)} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1}. \quad (C.5)$$

Veremos agora que esta convergência não ocorre somente na restrição $\varphi_t(U)$. Para isto, sejam $\varphi_1: U_1 \rightarrow P_{t_0}$ e $\varphi_2: U_2 \rightarrow P_{t_0}$ duas parametrizações locais de P_{t_0} tq o conjunto $A = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \neq \emptyset$. Assim, A é um aberto de P_{t_0} e, conseqüentemente, $U_3 = \varphi_1^{-1}(A)$ é um aberto de U_1 . Observe também que a convergência em (C.5) pode ser feita para abertos de U . Logo (C.5) vale para U_1 , U_2 , U_3 e, portanto, pode ser aplicada a $U_1 \setminus U_3$ e U_2 demonstrando que

$$\int_{\{f=t\} \cap (\varphi_{t_1}(U_1) \cup \varphi_{t_2}(U_2))} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} \rightarrow \int_{\{f=t_0\} \cap (\varphi_1(U_1) \cup \varphi_2(U_2))} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1}.$$

Fazendo este raciocínio sucessivamente para uma família de parametrizações que seja uma cobertura de P_{t_0} , concluímos o teorema. \diamond

C.6 TEOREMA: $V_{f+\varepsilon\eta}(t_0) - V_f(t_0) = \delta(\varepsilon) \int_{\{f=t_0\}} \frac{-\varepsilon\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1}$, onde $t_0 \in (\inf f, \sup f)$ e $\delta(\varepsilon) \rightarrow 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

DEM: Seja t_0 do enunciado e $\varepsilon_0 > 0$ tq $P_{\varepsilon\eta} \subset B$ para $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Temos $\{f < t_0\} \dot{\cup} \{t_0 \leq f < t_0 - \varepsilon_0\eta, \eta < 0\} = \{f < t_0 - \varepsilon_0\eta\} \dot{\cup} \{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f < t_0, \eta > 0\}$. Assim $V_{f+\varepsilon_0\eta}(t_0) - V_f(t_0) = |\{t_0 \leq f < t_0 - \varepsilon_0\eta, \eta < 0\}| - |\{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f < t_0, \eta > 0\}| = |\{t_0 \leq f \leq t_0 - \varepsilon_0\eta, \eta < 0\}| - |\{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f \leq t_0, \eta > 0\}|$. Esta última igualdade segue de $|\{f = t_0\}| = 0$. Note que $\{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f \leq t_0, \eta > 0\} = \bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} P_{\varepsilon\eta} \cap \{\eta > 0\}$, pois se x é do conjunto esquerdo, então $f(x) \leq t_0$ e $(f + \varepsilon_0\eta)(x) \geq t_0$. Como a aplicação $\varepsilon \rightarrow f(x) + \varepsilon\eta(x)$ é contínua, então existe $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ tq $(f + \varepsilon\eta)(x) = t_0$. Assim, $x \in P_{\varepsilon\eta} \cap \{\eta > 0\}$. A outra inclusão é imediata. Portanto,

$$\{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f \leq t_0\} = \bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} M_{s(y, \varepsilon)} \cap \{\eta > 0\}.$$

Pelo Lema (C.3), $s(y, [0, \varepsilon_0]) = [s(y, \varepsilon_0), 0] \forall y \in P_{t_0}$. A partir disto, concluímos que

$$\begin{aligned} & \{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f \leq t_0\} \\ &= \left\{ x \in \Omega : x = y + s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} \text{ tq } y \in P_{t_0}, s \in [s(y, \varepsilon_0), 0] \text{ e } \eta(y) > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Note que $P_{t_0} \cap \{\eta > 0\}$ é um aberto de P_{t_0} . Portanto, existe uma família enumerável de parametrizações $\varphi_k : U_k \rightarrow P_{t_0}$, onde U_k é aberto em \mathbb{R}^{n-1} tq $P_{t_0} \cap \{\eta > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k(U_k)$. Disto e de (C.6),

$$\{t_0 - \varepsilon_0\eta \leq f \leq t_0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

onde $I_k = \{x \in \Omega : x = F_k(u, s) \text{ tq } u \in U_k \text{ e } s \in [s(\varphi_k(u), \mathcal{E}_0), 0]\}$ com F_k definida na parte (i) do Teorema (C.2). Claramente

$$|I_k| = \int_{U_k} \int_{s(\varphi_k(u), \mathcal{E}_0)}^0 |\det F'_k(u, s)| ds du. \quad (C.7)$$

Observe que podemos mostrar, de forma similar à demonstração do 1º passo do Teorema (C.2), que $\{t_0 - \mathcal{E}_0\eta \leq f \leq t_0\}$ é compacto. Disto e de F_k ser contínua, temos que

$$\int_{s(\varphi_k(u), \mathcal{E}_0)}^0 |\det F'_k(u, s)| ds = \lambda_k(u, \mathcal{E}_0) \int_{s(\varphi_k(u), \mathcal{E}_0)}^0 |\det F'_k(u, 0)| ds,$$

onde $\lambda_k(u, \mathcal{E}_0)$ é uma função tq $\lambda_k(u, \mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ uniformemente em U_k quando $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$. Logo, usando (C.7), temos que

$$|I_k| = \lambda_k(\mathcal{E}_0) \int_{U_k} -s(\varphi_k(u), \mathcal{E}_0) \cdot |\det F'_k(u, 0)| du \quad (C.8)$$

para $\lambda_k(\mathcal{E}_0)$ conveniente que só depende de \mathcal{E} graças à convergência uniforme de $\lambda_k(u, \mathcal{E}_0)$ em U_k . Além disto, $\lambda_k(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ se $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$.

Agora obteremos uma estimativa para $s(y, \mathcal{E}_0)$. Como $(f + \mathcal{E}_0\eta)(\alpha(y, s(y, \mathcal{E}_0))) = t_0$, temos

$$f(y) + \nabla f(y) \cdot s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} + o_f(s) + \mathcal{E}_0\eta(y) + \mathcal{E}_0\nabla\eta(y) \cdot s \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} + \mathcal{E}_0l_\eta(s) = t_0.$$

Então

$$s|\nabla f(y)| + o_f(s) + \mathcal{E}_0\nabla\eta(y) \cdot \frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|} \cdot s + \mathcal{E}_0l_\eta(s) = -\mathcal{E}_0\eta(y).$$

Portanto

$$1 + \frac{o_f(s)}{s|\nabla f(y)|} + \mathcal{E}_0 \frac{(\nabla\eta \cdot \nabla f)(y)}{|\nabla f(y)|^2} + \frac{\mathcal{E}l_\eta(s)}{s|\nabla f(y)|} = \frac{-\mathcal{E}_0\eta(y)}{s|\nabla f(y)|}.$$

Nestes cálculos está subentendido $s = s(y, \mathcal{E}_0)$ que ao tender a zero implica em $\frac{\mathcal{E}_0 \eta(y)}{s(y, \mathcal{E}_0) |\nabla f(y)|} \rightarrow 1$. Logo $s(y, \mathcal{E}_0) = \gamma(y, \mathcal{E}_0) \left[\frac{-\mathcal{E}_0 \eta(y)}{|\nabla f(y)|} \right]$, onde $\gamma(y, \mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ uniformemente em P_{t_0} quando $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$. Seja $\delta_k(y, \mathcal{E}_0) = \lambda_k(\mathcal{E}_0) \cdot \gamma(y, \mathcal{E}_0)$. De (C.8),

$$|I_k| = \int_U \delta_k(y, \mathcal{E}_0) \cdot \frac{\mathcal{E}_0 \eta(y)}{|\nabla f(y)|} |\det F'_k(u, 0)| du = \delta_k(\mathcal{E}_0) \int_{\varphi_k(U_k)} \frac{\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1},$$

onde $\delta_k(\mathcal{E}_0)$ só depende de \mathcal{E}_0 . Observe que, usando o raciocínio do Teorema (C.5), concluímos que

$$\begin{aligned} |I_k \cup I_j| &= |I_k| + |I_j \setminus I_k| \\ &= \delta_k(\mathcal{E}_0) \int_{\varphi_k(U_k)} \frac{\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} + \delta'_j(\mathcal{E}_0) \int_{\varphi_j(U_j) \setminus \varphi_k(U_k)} \frac{\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1}, \end{aligned}$$

onde δ'_j corresponde à restrição $\varphi_j(U_j) \setminus \varphi_k(U_k)$ e $\delta'_j(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ quando $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$. Assim, tomando $\delta_{kj}(\mathcal{E}_0)$ conveniente tq $\min\{\delta_j(\mathcal{E}_0), \delta_k(\mathcal{E}_0)\} \leq \delta_{kj}(\mathcal{E}_0) \leq \max\{\delta_j(\mathcal{E}_0), \delta_k(\mathcal{E}_0)\}$, temos que

$$|I_k \cup I_j| = \delta_{kj}(\mathcal{E}_0) \int_{\varphi_k(U_k) \cup \varphi_j(U_j)} \frac{\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} \text{ e } \delta_{kj}(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1 \text{ quando } \mathcal{E}_0 \rightarrow 0.$$

Podemos estender o raciocínio para $\bigcup I_k$. Assim,

$$|P_{t_0} \cap \{\eta > 0\}| = |\bigcup I_k| = \delta(\mathcal{E}_0) \int_{P_{t_0} \cap \{\eta > 0\}} \frac{\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1}.$$

Embora o número de conjuntos I_k possa ser infinito, podemos garantir que $\delta(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1$, pois se deve notar que a função $\lambda: (\bigcup U_k) \times [0, \mathcal{E}_0] \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\lambda|_{U_k} = \lambda_k$ converge uniformemente a 1 em $\bigcup U_k$ e não somente em U_k .

Analogamente conclui-se que

$$|\{t_0 \leq f \leq t_0 - \mathcal{E}_0 \eta, \eta < 0\}| = \delta'(\mathcal{E}_0) \int_{P_{t_0} \cap \{\eta < 0\}} \frac{-\mathcal{E}_0 \eta}{|\nabla f|} dH^{n-1},$$

onde $\delta'(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ quando $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$. Logo

$$\begin{aligned} V_{f+\mathcal{E}_0\eta}(t_0) - V_f(t_0) &= \delta'(\mathcal{E}_0) \int_{P_{t_0} \cap \{\eta < 0\}} \frac{-\mathcal{E}_0\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} - \delta(\mathcal{E}_0) \int_{P_{t_0} \cap \{\eta > 0\}} \frac{\mathcal{E}_0\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} \\ &= \delta_*(\mathcal{E}_0) \int_{P_{t_0}} \frac{-\mathcal{E}_0\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} \end{aligned}$$

com $\delta_*(\mathcal{E}_0) \rightarrow 1$ quando $\mathcal{E}_0 \rightarrow 0$. \diamond

C.7 TEOREMA: Sejam f e η do Teorema (C.2). Para $v \in (0, |\Omega|)$,

$$\frac{d}{d\mathcal{E}} (f + \mathcal{E}\eta)^*(v) \Big|_{\mathcal{E}=0} = \int_{S(v)} \frac{\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} / \int_{S(v)} \frac{1}{|\nabla f|} dH^{n-1},$$

onde $S(v) = \{x : V_f(f(x)) = v\}$.

DEM: Seja $v_0 \in (0, |\Omega|)$. Tomando \mathcal{E}_0 suficientemente pequeno, temos $\nabla(f + \mathcal{E}\eta) \neq 0$ em $\bar{\Omega} \forall \mathcal{E} \in (-\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0)$. Assim, usando o Teorema (C.5), temos

$$\frac{d}{dt} V_{f+\mathcal{E}\eta}(t) = \int_{\{f+\mathcal{E}\eta=t\}} |\nabla f + \mathcal{E}\nabla\eta|^{-1} dH^{n-1} > 0 \text{ em } (\inf f + \mathcal{E}\eta, \sup f + \mathcal{E}\eta).$$

Logo

$$(f + \mathcal{E}\eta)^*(v) = \left(\int_{\{f+\mathcal{E}\eta=t\}} |\nabla f + \mathcal{E}\nabla\eta|^{-1} dH^{n-1} \right)^{-1} > 0 \text{ quando } v = V_{f+\mathcal{E}\eta}(t).$$

Além disto, existe um único $t_0 \in (\inf f + \mathcal{E}\eta, \sup f + \mathcal{E}\eta)$ tq $V_f(t_0) = v_0$. Pelo Teorema (C.6), $V_{f+\mathcal{E}\eta}(t_0) = v_0 + h_\mathcal{E}$, onde $h_\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}) \int_{\{f=t_0\}} \frac{-\mathcal{E}\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1}$. Assim, $(f + \mathcal{E}\eta)^*(v_0 + h_\mathcal{E}) = t_0$ e $f^*(v_0) = t_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} (f + \mathcal{E}\eta)^*(v_0) - f^*(v_0) &= (f + \mathcal{E}\eta)^*(v_0) - (f + \mathcal{E}\eta)^*(v_0 + h_\mathcal{E}) \\ &= -(f + \mathcal{E}\eta)^*(v_0) \cdot h_\mathcal{E} + l_{(f+\mathcal{E}\eta)^*}(h_\mathcal{E}) \\ &= \left(\int_{\{f+\mathcal{E}\eta=t_0\}} |\nabla f + \mathcal{E}\nabla\eta|^{-1} dH^{n-1} \right)^{-1} \cdot \delta(\mathcal{E}) \int_{\{f=t_0\}} \frac{\mathcal{E}\eta}{|\nabla f|} dH^{n-1} + l(h_\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Com o mesmo argumento do Teorema (C.5), conclui-se que

$$\int_{\{f+\varepsilon\eta=t_0\}} |\nabla f + \varepsilon \nabla \eta|^{-1} dH^{n-1} \longrightarrow \int_{\{f=t_0\}} |\nabla f|^{-1} dH^{n-1} \text{ quando } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Disto, de $h_\varepsilon \longrightarrow 0$ e $\frac{o(h_\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{o(h_\varepsilon)}{h_\varepsilon} \cdot \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, conclui-se o teorema. \diamond

APÊNDICE D

Neste apêndice vamos supor sempre que a função h e o anel A satisfaçam as condições da Proposição (4.4).

D.1 LEMA: O conjunto $\{|\nabla h| \neq 0\}$ é denso em $\{\min h \leq h \leq \max h\}$.

DEM: Imediata da harmonicidade de h e conexidade de A . \diamond

D.2 LEMA: Qualquer curva integral maximal do campo ∇h termina em Γ_2 .

DEM: Seja C uma curva integral maximal de ∇h . Seja $M = \sup_{z \in C} h(z)$. Fixa $\omega_0 \in C$ tq $|\nabla h(\omega_0)| = \delta > 0$. Sejam $\omega, z \in C$ tq $h(\omega_0) \leq h(\omega) < h(z)$ que serão chamados, respectivamente, por t_0, t_1 e t_2 . Podemos supor $t_0 < M$. Observe que

$$\int_{\omega}^z |\nabla h| ds = \int_{t_1}^{t_2} |\nabla h(x(t), y(t))| \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt,$$

onde $(x(t), y(t))$ é uma parametrização da curva C de ω a z . Esta parametrização pode ser feita, pois, pela Proposição (4.4), $|\nabla h| \neq 0$ em C de ω a z . Como (\dot{x}, \dot{y}) tem a mesma direção e sentido de ∇h , vale a igualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left| \nabla h(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \right| = \nabla h \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \frac{d}{dt} h(x(t), y(t)).$$

Assim,

$$\int_{\omega}^z |\nabla h| ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} h(x(t), y(t)) dt = h(z) - h(\omega).$$

Logo $h(z) - h(\omega) \geq \min_{C_{\omega}^z} |\nabla h| \cdot H^1(C_{\omega}^z)$, onde C_{ω}^z é o caminho de ω a z . Como $|\nabla h|$ é crescente em C , então $|\nabla h(z)| \geq |\nabla h(\omega)| \geq \delta \forall z, \omega \in C$ tq $h(z) \geq h(\omega) \geq t_0$. Então

$H^1(C_{\omega}^z) \leq \delta^{-1} [h(z) - h(\omega)]$. Portanto, para uma seqüência (z_n) em C tq $h(z_n) \rightarrow M$, temos que

$$\text{dist}(z_n, z_m) \leq \delta^{-1} |h(z_n) - h(z_m)|$$

para n e m grandes. Assim, (z_n) é uma seqüência de Cauchy. Portanto, a curva C converge para um único ponto que, pela continuidade de h , está em $\{h = M\}$. Seja P este ponto. Suponhamos que $M < \max h$. Neste caso como ∇h é contínuo em P e crescente ao longo de C , então $|\nabla h(P)| \neq 0$. Logo é possível estender a curva integral C para dentro de $\{h = M\}$ e, portanto, $M < \sup_{z \in C} h(z)$ o que é absurdo. Então, $M = \max h$ e $\{h = M\} = \Gamma_2$. \diamond

D.3 LEMA: Para $t \in (\min h, \max h]$, $\{|\nabla h| \neq 0\}$ é denso na curva de nível $\{h = t\}$.

DEM: Suponhamos que o lema seja falso. Logo existem $P_0 \in \{h = t_0\}$ e $\delta > 0$ tq $\nabla h = 0$ em $B_\delta(P_0) \cap \{h = t_0\}$. Assim como na Proposição (4.4), podemos tomar $\delta > 0$ tq $B_\delta(P_0) \cap \{h = t_0\}$ seja o gráfico de uma função côncava g definida em um intervalo de \mathbb{R} . Da concavidade de g , existe $P_1 \in B_\delta(P_0) \cap \{h = t_0\}$ tal que as derivadas laterais sejam iguais e contínuas em P_1 . Analogamente a Proposição (4.4), podemos supor s.p.g que $P_1 = (0, 0)$ e $(0, 1)$ é o vetor unitário externo normal a $\{h = h_0\}$. Como $g'(0) = 0$ e as derivadas laterais são contínuas em P_1 , existem $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ tq $0 \leq g'(x_1) < 1/3$ e $0 \geq g'(x_2) > -1/3$. A desigualdade em relação a zero pode ser obtida, pois g' é crescente nos negativos e decrescente nos positivos. Sejam r e s as retas que passam por $(x_1, g(x_1))$ e $(x_2, g(x_2))$, respectivamente, e cujas inclinações são $1/2$ e $-1/2$. Seja T a região limitada por r , s e $\{h = t_0\}$ (ver Figura (D.1)). Note que T contém o triângulo limitado por r , s e o eixo x tendo assim um interior não vazio. Logo, pelo Lema (D.1), existe $Z_0 \in \text{int } T$ tq $|\nabla h(Z_0)| \neq 0$. Portanto, existe C curva integral que passa por Z_0 . Pelo Lema (D.2), C atinge Γ_2 . Logo C cruza r ou s , pois não pode cruzar $T \cap \{h = t_0\}$, caso contrário, pela Proposição (4.4), haveria aí um ponto de gradiente não nulo contradizendo a hipótese (ver Figura (D.2)).

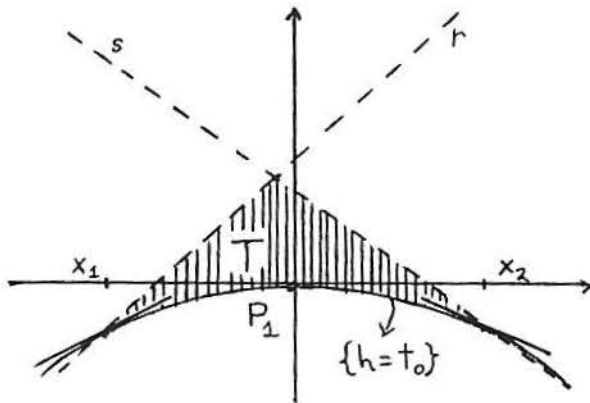


Fig. D.1

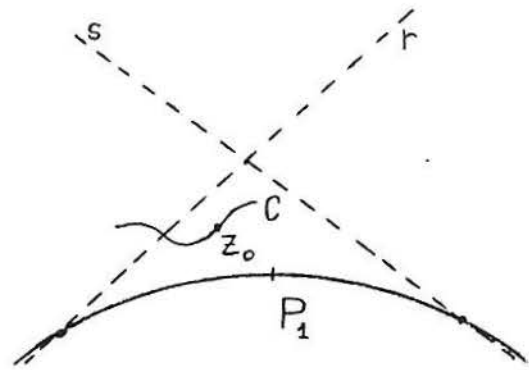


Fig. D.2

Suponhamos s.p.g que C intercepte r em um ponto Z_1 . O segmento de reta que une Z_0 a Z_1 tem coeficiente angular β menor que $1/2$, pois Z_0 está abaixo de r . Logo existe \vec{v} vetor tangente a C num ponto Z_2 cujo coeficiente angular é β (ver Figura (D.3)). Podemos supor que $Z_2 \in T$. Para isto, basta supor que $Z_1 = Z(t_1)$, $Z_0 = Z(\tilde{t}_1)$ e $t_1 > \tilde{t}_1$, onde $Z(t)$ é uma parametrização da curva C e $t_1 = \inf\{t > \tilde{t}_1 : Z(t) \notin T\}$. Assim, qualquer ponto em C entre Z_0 e Z_1 está em T . O coeficiente angular da reta r' , perpendicular a \vec{v} que passa por Z_2 , é $-\frac{1}{\beta}$, com $-\frac{1}{\beta} < -2 < -\frac{1}{2}$. Como $Z_2 \in r'$, cujo coeficiente angular é menor que o da reta s que é negativo, pode-se mostrar que r' intercepta o interior do segmento $\overline{(x_1, g(x_1))(x_2, g(x_2))}$ (ver Figura (D.4)). Este segmento está contido na região limitada por $\{h = t_0\}$. Isto é um absurdo, pois a curva de nível que passa por Z_2 , $\{h = t_2\}$ com $t_2 < t_0$, está contida em um dos semi-planos delimitados pela reta r' e, portanto, $\{h = t_2\}$ não envolve $\{h = t_0\}$ que está nos dois semi-planos. Então vale o lema.

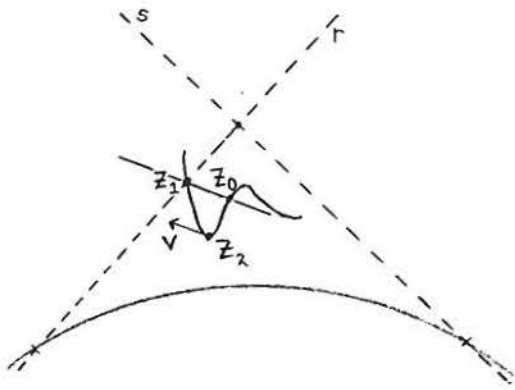


Fig. D.3

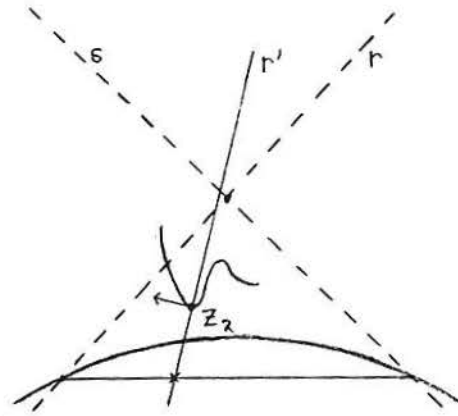


Fig. D.4

◇

D.4 LEMA: $|\nabla h| \neq 0$ em $\{\min h < h \leq \max h\}$.

(i) Vamos mostrar primeiro que qualquer curva integral, contida numa região conveniente, tem comprimento finito. Seja $t_0 \in (\min h, \max h]$. Assim como no Lema (D.3), podemos supor que, para δ conveniente, $B_\delta(P_0) \cap \{h = t_0\}$ é o gráfico de uma função côncava g definida em um intervalo do eixo x de um sistema de coordenadas xy com $P_0 = (0, 0)$ e $g(0) = 0$. Porém, não podemos garantir que as derivadas laterais sejam iguais em 0. Sejam P_1 e $P_2 \in B_\delta(P_0) \cap \{h = t_0\}$ tq P_0 esteja entre P_1 e P_2 e existam as derivadas nestes pontos. Sejam r e s retas tangentes a $\{h = t_0\}$ que passam por P_1 e P_2 respectivamente. Sejam r' e s' retas que passam por P_1 e P_2 respectivamente e cujas inclinações são levemente maiores que as das retas r e s , de forma que r' e s' interceptem-se em P_3 acima de $\{h = t_0\}$ (ver Figura (D.5)).

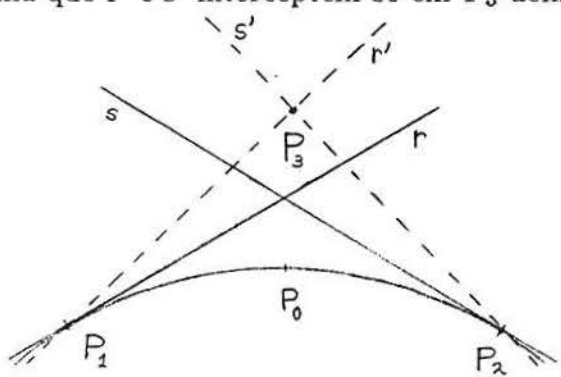


Fig. D.5

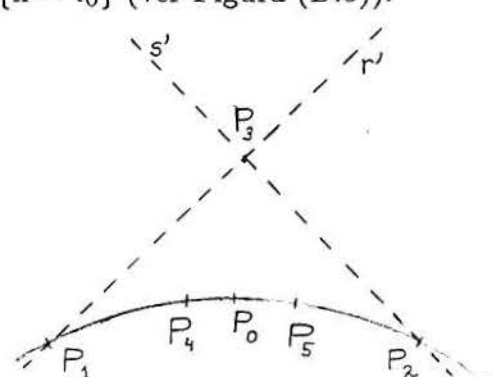


Fig. D.6

Como as curvas de nível são convexas, a região $\{h \geq t_0\}$ está abaixo de r e s , enquanto o interior dos segmentos $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_2P_3}$ está no complementar. Logo $h(P) < t_0 \forall P \in (\text{int}\overline{P_1P_3} \cup \text{int}\overline{P_2P_3}) \cap \Omega$. Sejam P_4 e $P_5 \in \{h = t_0\}$ tq P_4 esteja entre P_1 e P_0 , P_5 esteja entre P_0 e P_2 e $|\nabla h(P_4)| \neq 0 \neq |\nabla h(P_5)|$ (ver Figura (D.6)). Logo existem 2 curvas integrais C e D que passam por P_4 e P_5 respectivamente. Como C e D passam por curvas de nível cujos valores são vizinhos a t_0 , sejam $V_1 \in C \cap \{h < t_0\}$ e $V_2 \in D \cap \{h < t_0\}$ tq $h(V_1) = h(V_2) = t_1 < t_0$. Como P_4 e P_5 não estão em $\overline{P_1P_3} \cup \overline{P_2P_3}$, pois o triângulo $\Delta P_1P_3P_2$ foi construído de forma que $\overline{P_1P_3} \cap \{h = t_0\} = \{P_1\}$ e $\overline{P_2P_3} \cap \{h = t_0\} = \{P_2\}$, podemos supor que V_1 e V_2 estejam contidos em $\Delta P_1P_3P_2$. Logo a região R limitada por C , D , $\{h = t_0\}$ e $\{h = t_1\}$ deve estar contida em $\Delta P_1P_3P_2$ (ver Figura (D.7)).

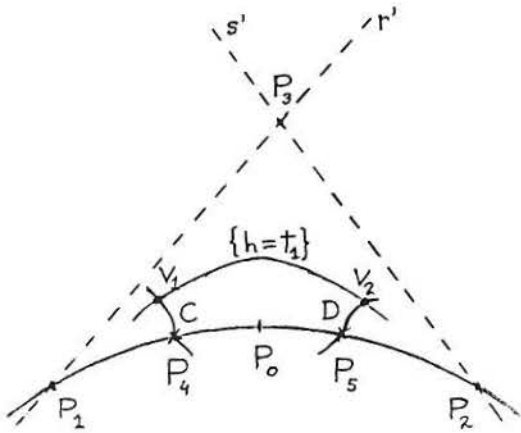


Fig. D.7

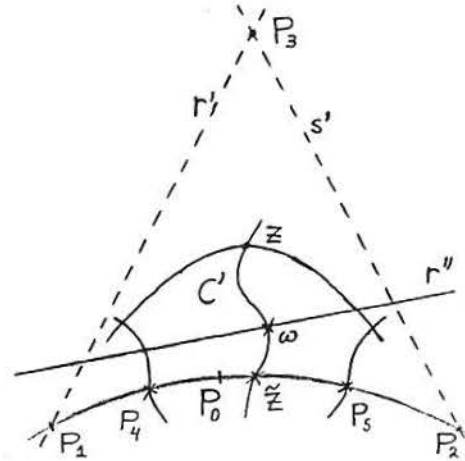


Fig. D.8

Seja $Z \in R \cap \{h = t_1\}$ tq $|\nabla h(Z)| \neq 0$. Note que Z está entre V_1 e V_2 . Seja C' a curva integral que passa por Z . Pelo Lema (D.2), C' deve atingir $\{h = t_0\}$ em um ponto \tilde{Z} que está em R , pois caso contrário, C' deveria interceptar C ou D em algum ponto o que seria absurdo devido ao fato de curvas integrais diferentes serem disjuntas no interior do anel.

Vejamos agora que o comprimento de $C' \cap R$, $H^1(C' \cap R)$, é limitado por M independente do Z tomado em $R \cap \{h = t_1\}$. Note que C' não deve sair de R e, portanto, de $\Delta P_1 P_3 P_2$ enquanto passa pelas curvas de nível $\{h = t\}$ com $t \in [t_1, t_0]$. Logo uma reta r'' , normal à curva C' em algum ponto ω de $C' \cap R$, não pode ter inclinação compreendida entre as inclinações dos segmentos $\overline{P_1 P_3}$ e $\overline{P_2 P_3}$, pois neste caso, r'' interceptaria o segmento $\overline{P_1 P_2}$ o que já foi visto ser absurdo (ver Figura (D.8)).

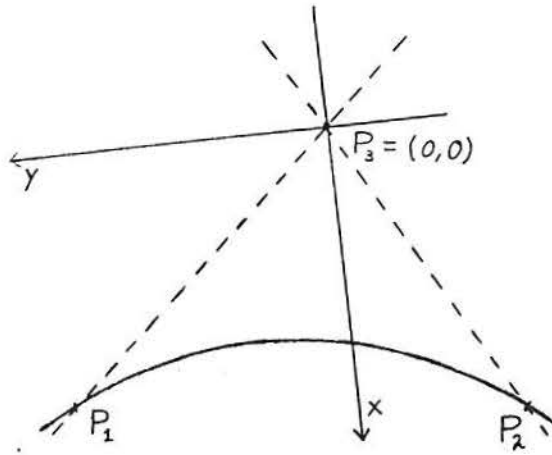


Fig. D.9

Logo existem \vec{v} vetor fixo e $\alpha > 0$, que independam de C' , tq $-\pi/2 + \alpha \leq \arg(\vec{v}, \dot{\gamma}(s)) \leq \pi/2 - \alpha$, onde $\gamma(s)$ é a parametrização de C' . Uma curva com esta propriedade e contida em um triângulo, tem comprimento finito, pois

$$H^1(C' \cap R) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

onde podemos supor que o eixo x tenha a direção de \vec{v} , $\gamma(x) = (x, f(x))$, onde f é uma função derivável tq $|f'| \leq \tan(\pi/2 - \alpha)$ e x_1, x_2 estejam limitados. Para aplicações futuras, suponhamos ainda que o eixo x tenha origem em P_3 e o semi-eixo positivo cruza $\{h = t_0\}$. O semi-eixo positivo de y aponta para a esquerda (ver Figura (D.9)).

(ii) Mostraremos agora que é possível parametrizar qualquer curva integral C' em R por $(x(t), y(t))$ de modo a ter $h(x(t), y(t)) = t$. Primeiro note que a curva $C' \cap R$

pode ser parametrizada por $(x, f(x))$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Seja $g(x) = h(x, f(x)) = t$. Portanto, $g'(x) = \nabla h(x, f(x)) \cdot (1, f'(x))$. Como $(1, f'(x))$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla h(x, f(x))$, que não se anula ao longo de $C' \cap R$, então $g'(x) > 0$. Logo existe a função inversa $g^{-1}(t)$. Seja $(x(t), y(t)) = (g^{-1}(t), f \circ g^{-1}(t))$. Assim, $t \mapsto (x(t), y(t))$ é uma parametrização da curva $C' \cap R$. Como $g^{-1}(t) = x(t)$, então $g(x(t)) = t$ e, portanto, $h(x(t), y(t)) = h(x(t), f(x(t))) = t$.

(iii) Agora veremos que a distância entre 2 pontos Z e ω pertencentes à $R \cap \{h = t_1\}$ é maior que a distância entre os respectivos \tilde{Z} e $\tilde{\omega}$ em $R \cap \{h = t_0\}$. Sejam $(x_1(t), y_1(t))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ as parametrizações de C' e C'' que passam, respectivamente, por Z e ω . Primeiro suponhamos que exista $t' \in [t_1, t_0]$ tq $y_1(t') = y_2(t')$, $x_1(t') > x_2(t')$. Como $\{h = t'\}$ é convexo e os vetores velocidade $(\dot{x}_1(t'), \dot{y}_1(t'))$ e $(\dot{x}_2(t'), \dot{y}_2(t'))$ têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores internos normais à curva de nível $\{h = t'\}$, deve ocorrer uma das duas possibilidades: 1) $(\dot{x}_1(t'), \dot{y}_1(t'))$ aponta para cima e para a esquerda ($\dot{y}_1(t') > 0$ e $\dot{x}_1(t') \leq 0$) e $(\dot{x}_2(t'), \dot{y}_2(t'))$ aponta para cima e para a direita ($\dot{y}_2(t') > 0$ e $\dot{x}_2(t') \leq 0$) (ver Figura (D.10)); 2) $\dot{x}_1(t') \geq 0$, $\dot{y}_1(t') < 0$, $\dot{x}_2(t') \leq 0$ e $\dot{y}_2(t') < 0$ (ver Figura (D.11)).

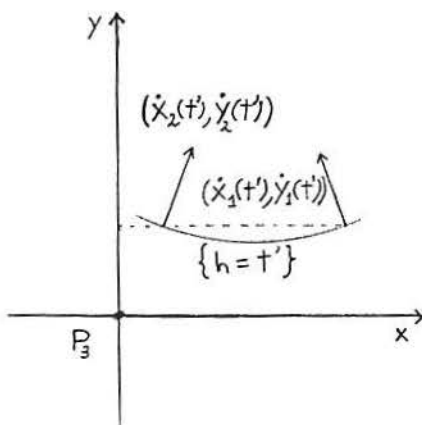


Fig. D.10

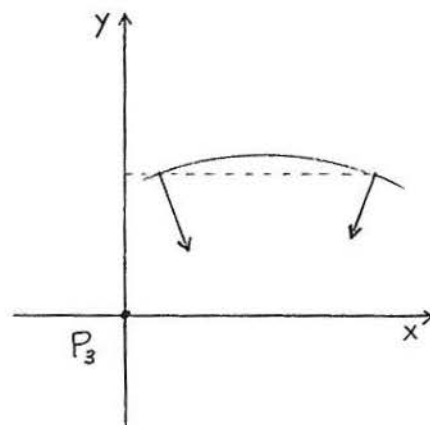


Fig. D.11

Em ambas alternativas chegamos a uma contradição com o fato de

$$\dot{x}_i(t) = \dot{g}_i^{-1}(t) = \frac{1}{\nabla h(x_i(t), y_i(t)) \cdot (1, f'(x_i(t)))} > 0,$$

em $[t_1, t_0]$, onde $i \in \{1, 2\}$. Logo não existe $t' \in [t_1, t_0]$ tq $y_1(t') = y_2(t')$. Suponhamos s.p.g que $y_1(t) > y_2(t) \forall t \in [t_1, t_0]$. Da convexidade das curvas de nível e do fato dos vetores velocidade terem os mesmos sentidos dos vetores normais internos, concluímos que o coeficiente angular do vetor perpendicular ao segmento $\overline{(x_1(t), y_1(t))(x_2(t), y_2(t))}$, que aponta para o interior de $\{h = t\}$, é maior que o coeficiente angular de $(\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t))$ e menor que o de $(\dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t))$ (ver Figura (D.12)).

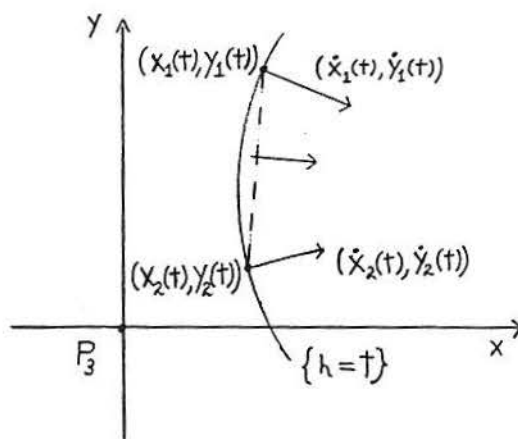


Fig. D.12

Logo

$$\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{x}_2(t)} \geq -\frac{x_1(t) - x_2(t)}{y_1(t) - y_2(t)} \geq \frac{\dot{y}_1(t)}{\dot{x}_1(t)}.$$

Observe que $x_i(t) > 0$ para $i \in \{1, 2\}$. Assim, conclui-se que $\dot{y}_2(y_1 - y_2) + \dot{x}_2(x_1 - x_2) \geq 0$ e $\dot{y}_1(y_1 - y_2) + \dot{x}_1(x_1 - x_2) \leq 0$. Logo $(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)(y_1 - y_2) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(x_1 - x_2) \leq 0$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)(t) \leq 0.$$

A partir disto, de $(x_1(t_1), y_1(t_1)) = Z$, $(x_2(t_1), y_2(t_1)) = \omega$, $(x_1(t_0), y_1(t_0)) = \tilde{Z}$ e $(x_2(t_0), y_2(t_0)) = \tilde{\omega}$ concluímos (iii).

(iv) Lembremos que para $Z \in \{h = t_1\} \cap \{|\nabla h| \neq 0\}$, \tilde{Z} é a intersecção de $\{h = t_0\}$ com a curva integral C' que passa por Z . Já foi visto que se Z está em R , então \tilde{Z} também está. Mostraremos que o conjunto de tais \tilde{Z} 's é denso em $R \cap \{h = t_0\}$.

Suponhamos que não. Então existem ω_1, ω_2 em $R \cap \{h = t_0\}$ tq entre ω_1 e ω_2 não exista qualquer \tilde{Z} . Como $P_4 = \tilde{V}_1$ (ver Figura (D.7)) e $\{|\nabla h| \neq 0\}$ é denso em $R \cap \{h = t_1\}$, concluímos que existe (Z_n) seqüência em $R \cap \{h = t_1\} \cap \{|\nabla h| \neq 0\}$ tq $Z_n \rightarrow V_1$. Por (iii), $\tilde{Z}_n \rightarrow P_4$. Logo $\omega_1 \neq P_4$. Analogamente $\omega_2 \neq P_5$. Portanto, tais \tilde{Z} 's devem estar entre P_4 e ω_1 ou entre ω_2 e P_5 . Seja $A_1 = \{Z \in R \cap \{h = t_1\} \cap \{|\nabla h| \neq 0\} : \tilde{Z} \text{ está entre } P_4 \text{ e } \omega_1\}$. Analogamente defina A_2 . Como $R \cap \{h = t_1\} \cap \{|\nabla h| \neq 0\} = A_1 \cup A_2$, então $A_1 \cup A_2$ é denso em $R \cap \{h = t_1\}$. Podemos estabelecer uma ordem em $A_1 \cup A_2$ de forma que $Z_1 < Z_2$, se Z_1 estiver entre P_4 e Z_2 . Se fizermos o mesmo em $\{h = t_0\}$, veremos que $Z_1 < Z_2$ equivale a $\tilde{Z}_1 < \tilde{Z}_2$, pois caso contrário, as curvas integrais que passassem por Z_1 e Z_2 interceptariam-se. Logo se $Z_1 \in A_1$ e $Z_2 \in A_2$, então $\tilde{Z}_1 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \tilde{Z}_2$. Portanto, fazendo uso de um abuso de linguagem, A_1 têm supremo S e A_2 possui ínfimo I . De $A_1 \cup A_2$ denso em $\{h = t_1\}$, conclui-se que $I = S \in \{h = t_1\}$ (ver Figura (D.13)). Logo existem $Z_1 \in A_1$ e $Z_2 \in A_2$ tq $d(Z_1, Z_2) < d(\omega_1, \omega_2)$. Pela parte (iii), $d(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) < d(\omega_1, \omega_2)$ o que é absurdo, pois \tilde{Z}_1 está entre P_4 e ω_1 , \tilde{Z}_2 está entre ω_2 e P_5 e $R \cap \{h = t_0\}$ é o gráfico da função g definida no início da demonstração. Logo o conjunto dos \tilde{Z} 's é denso em $R \cap \{h = t_0\}$. Portanto, existe (Z_n) , seqüência em $\{h = t_1\}$, tq $\tilde{Z}_n \in \{h = t_0\}$ e $\tilde{Z}_n \rightarrow P_0$.

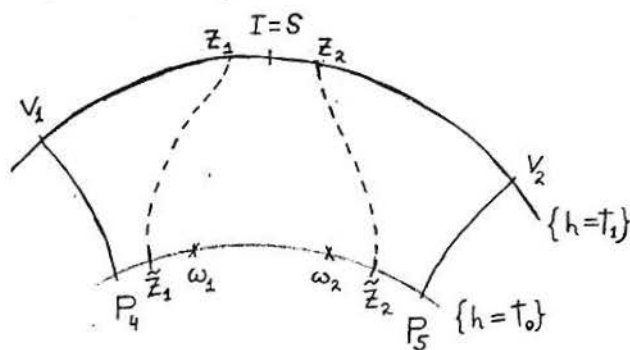


Fig. D.13

No Lema (D.2), vimos que $t_0 - t_1 = \int_{C_n} |\nabla h| ds$, onde C_n é a curva integral que vai

de Z_n a \tilde{Z}_n . Logo

$$t_0 - t_1 \leq \max_{C_n \cap R} |\nabla h| \cdot H^1(C_n \cap R).$$

Pela Proposição (4.4),

$$\max_{C_n \cap R} |\nabla h| = |\nabla h(\tilde{Z}_n)|.$$

Portanto, $(t_0 - t_1)[H^1(C_n \cap R)]^{-1} \leq |\nabla h(\tilde{Z}_n)|$. Por (i), $H^1(C_n \cap R) \leq M \forall n$. Logo $(t_0 - t_1) \cdot M^{-1} \leq |\nabla h(\tilde{Z}_n)|$. Disto, da continuidade de $|\nabla h|$ e de $Z_n \rightarrow P_0$, concluímos que $|\nabla h(P_0)| \geq (t_0 - t_1)M^{-1} > 0$ demonstrando o lema. \diamond

REFERÊNCIAS

- [B] Bandle, C., "Isoperimetric Inequalities and Applications", Universität Basel, Pitman, 1980.
- [G] Giusti, E., "Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation", Ed. Birkhauser, 1984.
- [Gr] Grad, H., *Magnetic confinement fusion energy research*, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics 21 (1979), 3-40.
- [G.T.] Gilbarg, D. e Trudinger, N.S., "Elliptical Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag, 1977.
- [L.S.] Laurence, P. and Stredulinsky, E.W., *A new approach to queer differential equations*, Communication on Pure and Applied Mathematics 38, Número 3 (1985), 333-355.
- [M] Mossino, J., *Some nonlinear problems involving a free boundary in Plasma Physics*, J. of Differential Equations 34 (1979), 114-138.
- [M.T.] Mossino, J. and Teman, R., *Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics*, Duke Math J. 43 (1981), 475-496.
- [Ne] Nehari, Z., "Conformal Mapping", Mc Graw-Hill, 1952.
- [P.S.] Polya, G. and Szegő, G., "Problems and Theorems in Analysis I", Springer-Verlag, 1972.
- [T] Teman, R., *Monotone rearrangement of a function and the Grad-Mercier equation of plasma physics*, Proc. Intl. Meeting on recent methods in nonlinear analysis, Roma, Maio de 1978, 83-89.
- [V.1] Vigfusson, G., *The averaged Green Function with applications to quasi-static plasma equilibrium*, Thesis, New York University, Dezembro de 1977.
- [V.2] Vigfusson, G., *The queer differential equations for adiabatic compression of a plasma*, Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979), 778-781.
- [Z] Ziemer, W.P., "Weakly Differentiable Functions", Springer-Verlag, New-York, 1989.