Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

TAXAS DE DECAIMENTO PARA AS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DISPERSIVO E DISSIPATIVO DO TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

por

VERA LÚCIA SALIM DA FONSECA

Porto Alegre, dezembro de 2000

Dissertação submetida por VERA LÚCIA SALIM DA FONSECA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dra. Vanilde Bisognin

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes
Dra. Eleni Bisognin
Dr. Jardel Morais Pereira

Data de Defesa: 11 de dezembro de 2000.

Agradecimentos

- Com satisfação, agradeço a professora Vanilde Bisognin, que com seu apoio e sugestões contribuiu para a compreensão deste trabalho;

- Agradeço a professora Eleni Bisognin, pelo carinho durante o período em que realizei o curso de mestrado;

- Aos colegas, Carmen, Danusa e Marcio pela amizade, companherismo e apoio constante;

- Aos meus pais, pelo amor e apoio irrestritos;

- A meu marido e a minha filha, pelo amor e compreensão que sempre me dedicaram durante o tempo que realizei o curso;

- Um agradecimento especial ao Centro Universitário Franciscano, CAPES e FAPERGS que permitiram a realização do curso;

- Um agradecimento aos professores da UFRGS, pela compência, amizade e pela atenção durante a realização do curso;

- A Silvete pelo trabalho de digitação da dissertação.

Resumo

Consideremos o problema de Cauchy para o sistema acoplado de equações dispersivas e dissipativas do tipo Benjamin-Bona-Mahony. Concentramos nossa atenção no comportamento assintótico das soluções para o caso dispersivo e para o caso dissipativo. Na primeira parte, provamos resultados de decaimento temporal, na norma uniforme, para soluções do sistema dispersivo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 v_x + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x = 0 \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Re$ com $|a_1| < 1$, $x \in \Re$, p $\in \mathcal{Z}$, p$\geq$1.

Na segunda parte, consideremos o sistema dispersivo e dissipativo

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x - \alpha u_{xx} = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x - \alpha v_{xx} = 0 \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Re$, $x \in \Re$, t$\geq$0, p $\in \mathcal{Z}$, p$\geq$4 e $\alpha > 0$. Obtemos resultados de decaimento para as soluções na norma L$^\beta(\Re)$, 2$\leq$ $\beta \leq +\infty$.

Abstract

We have considered the Cauchy problem to the coupled system of dispersive and dissipative equations of the Benjamin-Bona-Mahony's type. We have concentrated our attention on the asymptotic behaviour of the solutions ~~to the dispersive case and to the dissipative~~ one.

In the first part we have proved the results of the temporal decay in uniform norm to the solutions of the dispersive system.

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 v_x + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x = 0 \quad , x \in \Re,\ t \geq 0 \ . \end{cases}$$

where a_1, a_2, a_3, a_4 are real constants with $|a_1| < 1$ and p is an interger bigger or equal than one.

In the second part we have considered the dispersive and dissipative system

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x - \alpha u_{xx} = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x - \alpha v_{xx} = 0 \end{cases}$$

where a_1, a_2, a_3, a_4 are real constants with $|a_1| < 1$; p is an integer and $p \geq 4$.

We have obtained the decay results to the solutions in the $L^{\beta}(\Re)$ norm, $2 \leq \beta \leq +\infty$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho fazemos uma análise do problema de Cauchy e do comportamento assintótico das soluções do sistema

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_2 v_x + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Re$, $|a_1| < 1$, $x \in \Re$, p $\in \mathcal{Z}$, p$\geq$1.

O modelo (1.1) um modelo alternativo ao sistema de KdV que foi derivado em 1984 por Gear e Grinshaw em [17] e descreve a forte interação de ondas longas não lineares tendo a estrutura de um par de equações do tipo KdV acoplados, tanto na parte não linear quanto na parte dispersiva. O valor do parâmetro p está relacionado ao efeito não linear sofrido pela onda.

Em 1992, Bona-Pance-Saut-Tom, [14] mostraram, para o sistema KdV, que se, $|a_1|$ <1, tal sistema é globalmente bem posto em $H^s(\Re) \times H^s(\Re)$, s $\geq$1. Primeiramente os autores obtiveram solução local de (1.1) aplicando o teorema do ponto fixo de Banach para a equação integral associada a (1.1). Estimativas à priori em $H^1(\Re) \times H^1(\Re)$ permitiu a estensão da solução local para a solução global.

O comportamento assintótico das soluções foi estudado por V. Bisognin em [9] seguindo o método da fase estacionária. O resultado obtido em [9] coincide com aquele obtido por J. Albert em [2], [3] para o caso de uma única equação de Benjamin-Bona-Mahony. A idéia básica consiste em obter uma taxa de decaimento para o sistema linear associada a (1.1), via o método da fase estacionária, e a seguir, usar este resultado para a obtenção da taxa de decaimento da solução do problema não linear. O resultado obtido é o seguinte; se os dados iniciais pertencem a $H^m(\Re)\times H^m(\Re) \cap L^1(\Re)\times L^1(\Re)$, $m\geq 5$, $p>4$ e são pequenos então as soluções u e v de (1.1) decaem na taxa $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{\frac{-1}{3}}$ e $\|v(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{\frac{-1}{3}}$, $\forall t \geq 0$. O caso $1\leq p<4$ não se aplica. Sabe-se, ver [22] que no caso de um única equação do tipo Benjamin-Bona-Mahony, se $1 \leq p < 4$ então a equação possui solução do tipo onda viajante e portanto é estável. O caso p=4 é um problema em aberto.

Na segunda parte do nosso trabalho consideramos o sistema (1.1) com uma dissipação do tipo Burgers, isto é,

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4(u^p v)_x - \alpha u_{xx} = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4(u v^p)_x - \alpha v_{xx} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Re$, $|a_1| < 1$, $x \in \Re$, $p \in \mathcal{Z}$, $p\geq 1$.

O modelo (1.2) com $\alpha > 0$ foi estudado por J. M. Pereira, [21] no que concerne a existência, unicidade de solução e comportamento assintótico. Segundo as idéias contidas em [21], provamos que o problema (1.2) é globalmente bem posto em $H^s(\Re)\times H^s(\Re)$, $s \geq 2$ e $|a_1| < 1$. Inicialmente obtemos uma solução local para (1.2) simplesmente invertendo o operador $A = I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ e aplicando a teoria de semigrupo e o teorema do ponto fixo de Banach para a solução integral associada com (1.2). Para estender a solução local para a solução global usamos estimativas de energia em $H^1(\Re)\times H^1(\Re)$.

Devido a presença dos termos dissipativos, αu_{xx} e αv_{xx}, a energia associada ao sistema linear decai a zero quando $t \to +\infty$ e assim, é de se esperar o mesmo comportamento para as soluções de (1.2). Em [21], provou-se que de fato isto acontece desde que $p \geq 4$. Os resultados obtidos são os seguintes:

$$\|U(t)\|_{L^\beta \times L^\beta} \leq C(1+t)^{\frac{-1}{2}(1-\frac{1}{\beta})}, \quad 2\leq \beta \leq +\infty \text{ onde } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U$$

é solução de (1.2).

Diferentemente dos resultados anteriores, neste caso, os resultados provados não necessitam restrições alguma sobre os dados iniciais. A técnica usada em [21] não se aplica para o caso $1 \leq p < 3$. Recentemente em [8], E. Bisognin, V. Bisognin e G. P. Menzala consideram o sistema (1.2) do tipo KdV, isto é, onde os termos ($-u_{xxt}$) e ($-v_{xxt}$) foram substituidos pelos termos u_{xxx} e v_{xxx} e obtiveram resultados de decaimento das soluções periódicas para o caso p=1.

Este trabalho está organizado do seguinte modo. No capítulo 2 apresentamos os resultados básicos da teoria de análise funcional, semigrupos, espaços de Sobolev necessários para uma melhor compreensão dos capítulos seguintes. No capítulo 3 consideramos o problema de Cauchy associado a (1.1), provamos que é globalmente bem posto e estudamos o comportamento assintótico da solução. No capítulo 4 estudamos o sistema dissipativo, provamos que é globalmente bem posto e obtivemos taxas de decaimento das soluções.

Capítulo 2

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que são utilizados nos próximos capítulos. As demonstrações , por se tratarem de resultados conhecidos, são omitidos porém indicamos as referências das mesmas.

Proposição 2.1: (Desigualdade de Young) *Sejam* $x, y \geq 0$, $\varepsilon > 0$ *e* $1 < p < \infty$. *Então* $x \cdot y \leq \varepsilon x^p + \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} y^q$ *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demostração: Use o fato de que log: $]0\ ;\ +\infty[\longrightarrow \Re$ é côncava.

Definição 2.1: *Seja* p *um número real tal que* $1 \leq p < \infty$. *Representamos por* $L^p(\Re)$ *a classe de todas as funções reais mensuráveis, definidas em* $\Re$ *tais que* $|f|^p$ *é integrável à Lebesgue, com norma dada por*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 2.2: (Desigualdade de Hölder) *Se* $f \in L^p(\Re)$ *e* $g \in L^q(\Re)$ *então* $f \cdot g \in L^1(\Re)$ *e tem-se a desigualdade*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$$

onde $1 < p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$=1.

Demostração: [1]

Proposição 2.3: (Desigualdade de Gronwall)

Sejam $k \in L^1$ *([a, b];* $\Re$*),* $k \geq 0$ *e* $f, g \in C([a,b], \Re)$ *tais que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Então

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)exp(\int_s^t k(r)dr)g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Em particular, se $g(t) \equiv g$ *é constante em [a,b], temos*

$$f(t) \leq g \text{ exp } (\int_s^t k(s)ds), \quad a \leq t \leq b.$$

Demostração: [1]

Proposição 2.4 (Desigualdade de Gronwall generalizada): *Sejam* $g(t) \geq 0$*,* $h(t) \geq 0$ *funções contínuas em* $[0, \infty)$ *tais que*

$$g(t) \leq C(1+t)^{-\alpha} + \int_0^t (1+t-s)^{-\alpha} g(s)h(s)ds, 0 \leq \text{t ¡ } \infty;$$

onde C e α são constantes não negativas. Se $\int_0^\infty h(t)dt$, então $g(t) \leq C(1+t)^{-\alpha}exp(\int_0^\infty h(t)dt)$, $0 \leq t < \infty$.

Demostração:(Linghai Zhang, pag. 33)

Definição 2.2: *Uma função f, mensurável em* $\Re$*, é dita essencialmente limitada em* $\Re$ *quando existe uma constante k tal que*

$$|f(k)| \leq k, \quad \textit{quase sempre em } \Re.$$

Definição 2.3: *Chamamos de* $L^\infty(\Re)$ *o espaço vetorial de todas funções f essencialmente limitadas em* $\Re$*, cuja norma neste espaço é dada por*

$$\|f\| = \sup_{x \in \Re} \text{ ess } |f(x)|.$$

Teorema 2.1: *L^p é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostração: [16]

Definição 2.4: *Definimos <u>Espaço de Sobolev</u> de ordem m sobre $\Re$, como o espaço vetorial das $f \in L^2(\Re)$ tais que as derivadas $\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots, m$ pertençam a $L^2(\Re)$.*

Representamos por $H^m(\Re)$, $m \geq 1$ o espaço de Sobolev de ordem m sobre $\Re$ com norma dada

$$\|f\|_{H^m}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx + \sum_{\nu=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{d^\nu f}{dx^\nu})^2 dx.$$

Teorema 2.1: *O espaço vetorial $H^m(\Re)$ é um espaço de Hilbert.*

Demostração: [16]

Definição 2.5: *Sejam f e g funções integráveis em $\Re$. A função*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

chama-se convolução de f e g definida para quase todo $x \in \Re$ e, é integrável.

Definição 2.6: *Dada f: $\Re \rightarrow C$ integrável (no sentido de Riemann) em cada intervalo $[a, b]$ e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x)|dx = \|f\|_{L^1} < +\infty$$

diremos então, que f é integrável.

Definição 2.7: *Definimos a transformada de Fourier de f, f absolutamente integrável, como sendo a função $\widehat{f}$, f: $\Re \rightarrow C$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx, \quad \xi \in \Re.$$

Definição 2.8: *O espaço de Schwartz (ou das funções C^∞ rapidamente decrescentes), denotado por $S(\Re)$, é a coleção das f: $\Re \rightarrow C$ tais que, $f \in C^\infty(\Re)$ e*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\Re} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Proposição 2.5: *Seja* $f \in S(\Re)$. *Então* $f^{(\alpha)} \in S(\Re)$ *para todo* $\alpha \in \mathcal{N}$ *e*

$$(\widehat{f^{(\alpha)}})(\xi) = i^\alpha \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \Re.$$

Proposição 2.6: *Seja* $f \in S(\Re)$. *Então a transformada inversa de Fourier é*

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad \textit{para todo } x \in \Re.$$

Proposição 2.7: *A identidade de Parseval vale em* $S(\Re)$. *Mais precisamente se* f, $g \in S(\Re)$ *então,*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} \quad \text{para todo f} \in \mathrm{S}(\Re).$$

Proposição 2.8: *Seja* $f,g \in S(\Re)$. *Então*

$$\text{i)} \quad (f * g)\widehat{}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \Re;$$
$$\text{ii)} \quad (fg)\widehat{}(\xi) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(\xi) * \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \Re.$$

Proposição 2.9: *Sejam* $f \in S(\Re)$ *e* g *contínua e limitada. Suponha que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |y|)^\alpha |g(y)| dy < +\infty \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{N}.$$

Então $f{*}g \in S(\Re)$.

Com essas notações , definimos outra norma em $\mathrm{H}^s(\Re)$ $s \in \Re$, $s \geq 0$, equivalente a norma definida como

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |y|^2)^s |\widehat{f}(y)|^2 dy$$

Proposição 2.10: (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg):

i) Se $s \geq 1$ e $f \in H^s(\Re)$, então

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\|f\|_{L^2}^{1/2}\|f'\|_{L^2}^{1/2}$$

ii) Se $1 \leq j \leq m$ e $f \in H^m(\Re)$, então

$$\|\partial_x^j f\|_{L^2} \leq M\|f\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}}\|\partial_x^m f\|_{L^2}^{\frac{j}{m}}.$$

Demonstração: i) Combine a desigualdade de Hölder com o fato de que

$$f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}f^2(s)ds, \quad \forall x \in \Re.$$

ii) Veja [1].

Teorema 2.3 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Seja X um espaço métrico completo e seja $S:X \to X$ uma aplicação tal que*

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_X \leq C\|v_1 - v_2\|_X \text{ para todo } v_1, v_2 \in X, \text{ C<1}.$$

Então S tem um único ponto fixo, $u = Su$.

Demostração: [16]

Teorema 2.4 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sucessão de funções integrais em $\Re$ (no sentido de Lebesgue), convergente quase sempre para a função f. Se existir uma função integrável f_0 tal que $|f_n(x)| \leq f_0(x)$ quase sempre para todo $n \in \mathcal{N}$. Então f é integrável e tem-se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Teorema 2.5 (Imersões de Sobolov) *Seja $\Omega \subset \Re^n$ com fronteira bem regular. Então:*

1) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ se $m \cdot p < n$

2) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *onde* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *e* $q \in [p, +\infty[$

3) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *se* $mp > n$, *ou seja,* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$

Demostração: [16] (Brézis)

Definição 2.9: *Seja X um espaço de Banach e* $\mathcal{L}(x)$ *a álgebra dos operadores lineares limitados de* x. *Diz-se que uma aplicação* $S:\Re^+ \to \mathcal{L}(x)$ *é um* _semigrupo_ *de operadores lineares limitados de* x *se:*

i) $S(0)=I$, *onde I é o operador identidade de X,*

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \Re^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 *se*

iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\|_x = 0$, $\forall x \in X$.

Definição 2.10: *O operador* $A:D(A) \to X$ *definido por*

$$D(A) = \{x, \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ \ existe\} \ \ e$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ , \ \forall x \in D(A)$$

é dito _gerador infinitesimal_ *do semigrupo S.*

Proposição 2.11: *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

Demonstração: [20]

Teorema 2.6 (Hille-Yosida). *Uma condição necessária e suficiente para que um operador linear* $A : D(A) \subset X \to X, X$ *espaço de Banach, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* C_0 *é que:*

i) A seja fechado e $\overline{D(A)} = X$;

ii) Existem constantes reais M e w tais que para $\lambda \in R$, $\lambda > w$, *se tenha* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall \quad n \in N.$$

Neste caso $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall \ t \geq 0$.

Demonstração: [20]

Capítulo 3

Problema de Cauchy e comportamento assintótico das soluções do sistema conservativo do tipo BBM

3.1 Introdução

Consideremos o sistema não-linear de equações da forma:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_2 v_x + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde a_1, a_2, a_3 e a_4 são constantes reais, $a_2>0$ e $|a_1| < 1$; $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ funções reais com variáveis reais x e t; $\infty < x < +\infty$ e $t \geq 0$ e p é um inteiro maior ou igual a um. Aqui, u_x, v_x, u_t, v_t representam as derivadas parciais com respeito a x e t, respectivamente.

O sistema (3.1) é um sistema acoplado, através dos efeitos dispersivos e não-lineares, de duas equações do tipo Benjamin-Bona-Mahony. É um modelo alternativo para um par de equações do tipo KdV com coeficientes constantes que foi derivada por Gear e Grinshaw [17] e descreve a forte interação de ondas longas fracamente não-lineares.

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de Cauchy associado ao sistema (3.1). Na primeira parte provemos a existência e unicidade da solução global e a dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais. Na segunda parte estudamos o comportamento assintótico das soluções quando $t \to +\infty$.

3.2 Existência da solução local

Consideremos o problema de Cauchy associado a (3.1). O problema (3.1) pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} AU_t + BU_x + F(U)_x = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e, A, B e F são matrizes dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} & I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} a_3\frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4u^pv \\ a_3\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4uv^p \end{pmatrix}.$$

Formalmente, podemos escrever a solução de (3.2), como:

$$U(x,t) = U_0(x) - \int_0^t A^{-1}(BU_x + F(U)_x)ds. \tag{3.3}$$

O lema a seguir é útil para a prova da existência local da solução do problema(3.2).

<u>**Lema 3.1.**</u>*Seja A a matriz definida em (3.2) e $|a_1|<1$. Então:*

a) A^{-1} existe.

b) $A^{-1}g = K * g$ onde $g = (g_1;g_2) \in H^s(\Re) \times H^s(\Re)$ $s \geq 2$ e $K = (K_{lr})_{l,r=1,2}$ definida por

$$K_{lr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}a_{lr}(y)dy \text{ com}$$

$$\widehat{A^{-1}}(y) = (a_{lr})_{l,r=1,2}$$

e $*$ denota a operação convolução.

c) $K_{lr} \in L^1(\Re) \cap L^\infty(\Re)$ para l,r=1,2.

Demonstração : a) para U=$(u, v) \in$ H$^s(\Re) \times$ H$^s(\Re)$, s$\geq$2 tem-se

$$\begin{aligned}(AU;U)_{L^2\times L^2} &= (u - u_{xx} - a_1 v_{xx}; u)_{L^2} + (-a_1 u_{xx} + v - v_{xx}; v)_{L^2} \\ \| & \quad u\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2} + \|u_x\|^2_{L^2} + \|v_x\|^2_{L^2} + 2a_1(u_x, v_x)_{L^2}\end{aligned}$$

usando a desigualdade

$$2a_1(u_x; v_x)_{L^2} \geq -|a_1|(\|u_x\|^2_{L^2} + \|v_x\|^2_{L^2})$$

segue usando o fato que $|a_1|<1$, que existe uma constante positiva C, C=1, tal que

$$(AU;U)_{L^2\times L^2} \geq C(\|u\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2} + (\|u_x\|_{L^2} + \|v_x\|^2_{L^2})$$

$$(AU;U)_{L^2\times L^2} \geq C(\|u\|^2_{H^1} + \|v\|^2_{H^1}) \geq C(\|u\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2}),$$

isto é,

$$(AU;U)_{L^2\times L^2} \geq C\|U\|^2_{L^2\times L^2}. \tag{3.4}$$

Se (AU; U)$_{L^2\times L^2}$ = 0 então $\|$U$\|^2_{L^2}$ = 0 e portanto A^{-1} existe, isto demonstra (a).

b) Por definição $\widehat{K_{lr}}$ (y)=a_{lr}(y), portanto:

$$\begin{aligned}\widehat{A^{-1}g}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{A^{-1}}(y)\cdot\widehat{g(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(a_{lr}(y))\widehat{g(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{K_{lr}}(y)\widehat{g}(y) = (\widehat{K * g})(y).\end{aligned}$$

Logo

$$\widehat{A^{-1}}g(y) = (\widehat{K * g})(y).$$

Por (3.4) tem-se que A é um operador coercivo. Além disso é autoadjunto, pois sejam U$_1$ e U$_2$ $\in$ H$^s(\Re) \times$ H$^s(\Re)$ então:

$$\begin{aligned}(AU_1;U_2)_{L^2\times L^2} &= (u_1 - u_{1xx} - a_1 v_{1xx}; u_2)_{L^2} + (-a_1 u_{1xx} + v_1 - v_{1xx}; v_2)_{L^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(u_1u_2 - u_{1xx}u_2 - a_1v_{1xx}u_2 - a_1u_{1xx}v_2 + v_1v_2 - v_{1xx}v_2)dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}(AU_1; U_2)_{L^2\times L^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty}(u_1u_2 - u_{2xx}u_1 - a_1u_{2xx}v_1 - a_1u_1v_{2xx} + v_1v_2 - v_1v_{2xx})dx \\ &= (U_1; AU_2)_{L^2\times L^2}.\end{aligned}$$

Ou seja, A é autoadjunto.

O que significa que A é sobrejetora. Isto demostra (b).

c) Por (a) temos que A^{-1} existe, então da definição de A, obtemos:

$$\widehat{A^{-1}}g(y) = \begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \\ \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \widehat{g_1} \\ \widehat{g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{lr}(y) \end{pmatrix} \widehat{g(y)}.$$

Consequentemente segue que:

$$K_{11}(x) = K_{22}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4}dy$$

e

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\frac{(-a_1y^2)}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4}dy.$$

Provemos que:

i) $K_{11} = K_{22} \in L^1(\Re) \cap L^\infty(\Re)$

ii) $K_{21} = K_{12} \in L^1(\Re) \cap L^\infty(\Re)$

(i) Vamos mostrar que $K_{11} \in L^1(\Re)$, para todo $x\neq 0$, integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}K_{11}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim_{|y|\to\infty}\left(\frac{1}{ix}e^{ixy}\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4}\right)\right] \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\left[\frac{-2y-4y^3-2y^5+4a_1^2y^3+2a_1^2y^5}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^2}\right]dy\end{aligned}$$

Integrando novamente por partes, segue que

$$\begin{aligned}K_{11}(x) &= \lim_{|y|\to\infty}\frac{e^{ixy}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1+y^2}{ix((1+y^2)^2-a_1^2y^4)} + \frac{-2y-4y^3-2y^5-4a_1^2y^3}{x^2((1+y^2)^2-a_1^2y^4)^2}\right] - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-2+12a_1^2y^2+12y^4-12a_1^2y^4+16y^6-36a_1^2y^6}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^3}\right. \\ &+ \left.\frac{20a_1^4y^6+6y^8-12a_1^2y^8+6a_1^4y^8}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^3}\right]dy.\end{aligned}$$

Logo

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\frac{-2+12a_1^2y^2+(12-12a_1^2)y^4+(16-36a_1^2+20a_1^4)y^6)}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^3}$$
$$+ \frac{(6-12a_1^2+6a_1^4)y^8}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^3}|dy.$$

Como $|a_1|<1$, existe numa constante positiva C, tal que:

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{C}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+|y|^2+|y|^4+|y|^6+|y|^8}{[(1+y^2)^2-a_1^2y^4]^3}dy.$$

Mas

$$(1+2y^2+y^4-a_1^2y^4)^3 \geq (1+(1-a_1^2)y^4)^3.$$

Consequentemente,

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{C}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+|y|^2+|y|^4+|y|^6+|y|^8}{[1+(1-a_1^2)y^4]^3}dy \leq \frac{C}{x^2} \tag{3.5}$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+|y|^2+|y|^4+|y|^6+|y|^8}{[1+(1-a_1^2)y^4]^3} \leq C_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4} < +\infty.$$

Se | x| $\geq$1, de (3.5) temos

$$\int_{|x|\geq 1}|K_{11}(x)|dx \leq \int_{|x|\geq 1}\frac{C}{x^2}dx < +\infty.$$

e se | x| <1, então

$$|K_{11}(x)|dx \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}dy \leq C_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} < +\infty.$$

Logo

$$\int_{|x|<1}|K_{11}(x)|dx < +\infty.$$

Se | x | $\geq$1 então do fato de

$$|K_{11}(x)|dx \leq \frac{C}{x^2} \quad \text{obtemos} \int_{|x|\geq 1}|K_{11}(x)|dx < +\infty.$$

o que implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_{11}(x)|dx < +\infty.$$

Da discussão acima segue que, se $| x | \leq 1$ então $K_{11} \in L^{\infty}(| x | \leq 1)$ e se $|x| \geq 1$ também $K_{11} \in L^{\infty}(| x | \geq 1)$. Portanto $K_{11} \in L^1(\Re) \cap L^{\infty}(\Re)$. Analogamente, mostra-se que $K_{12} = K_{21} \in L^1(\Re) \cap L^{\infty}(\Re)$.

Lema 3.2. *Seja $g=(g_1;g_2) \in H^s(\Re) \times H^s(\Re)$, $s \geq 1$, $s \in \Re$ se $s \geq 1$ $0<a_1<1$.*

Então $K^* \frac{dg}{dx} \in H^s(\Re) \times H^s(\Re)$ e existe uma constante positiva $C>0$ tal que

$$\|K * \frac{dg}{dx}\|_{H^s \times H^s} \leq C\|g\|_{H^s \times H^s}$$

Demonstração : Por definição

$$\|K * \frac{dg}{dx}\|^2_{H^s \times H^s} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s \left|K * \frac{dg}{dx}\right|^2 dy$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|K * \frac{dg}{dx}\|^2_{H^s \times H^s} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s |\widehat{K}|^2 \left|\widehat{\frac{dg}{dx}}\right|^2 dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s |\widehat{K}|^2 |y|^2 |\widehat{g}(y)|^2 dy \end{aligned}$$

pelo lema 3.1,

$$\|K * \frac{dg}{dx}\|^2_{H^s \times H^s} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s y^2 \left[\begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \\ \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{g}_1(y) \\ \widehat{g}_2(y) \end{pmatrix} \right]^2 dy$$

como

$$\frac{(1+y^2)y}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4} \text{ e } \frac{-a_1y^3}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4}$$

são limitadas, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s y^2 (\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4} |\widehat{g}_i|)^2 dy &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|y|^2)^s |\widehat{g}_i|^2 \\ &\leq C\|g_i\|_{H^s(\Re)} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|y|^2)^s y^2\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}|\widehat{g_i}|)^2dy \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|y|^2)^s|\widehat{g_i}|^2$$
$$\leq C\|g_i\|_{H^s(\Re)}$$

com i=1,2.

Portanto

$$\|K*\frac{dg}{dx}\|_{H^s\times H^s}\leq C\|g\|_{H^s\times H^s} \tag{3.6}$$

Obs. Vale $\|K*\partial_x g\|_{H^{s+1}\times H^{s+1}}\leq C_0\|g\|_{H^s\times H^s}$, $\forall g\in H^s\times H^s$. Veja [21].

Teorema 3.1 : (Existência local) *Seja $U_0=(u_0,v_0)\in H^m(\Re)\times H^m(\Re)$; $m\geq 2$, $m\in\mathcal{Z}$, a_1, a_2, a_3, a_4, reais com a_2 qualquer, $|a_1|<1$ e $p\in\mathcal{Z}$, $p\geq 1$. Então existe $T_0>0$ e um único par de funções $(u,v)\in C(0,\ T_0;\ H^m(\Re))\times C(0,\ T_0;\ H^m(\Re))$ tal que $(u_t,v_t)\in C(0;\ T_0,\ H^m(\Re))\times C(0,\ T_0;\ H^m(\Re))$ e (u,v) satisfaz (3.1).*

Demonstração: Seja R>0 e definimos o espaço de funções

$Y_R(t)=\{\ \psi=(\psi_1,\psi_2)\in C(0,\ T_0;\ H^m(\Re))\times C(0,\ T_0;\ H^m(\Re))$ tal que $\sup_{0\leq t\leq T}\|\psi(\cdot,\ t)$ $-U_0\ \|_{H^m\times H^m}\leq R,\ \psi(\cdot,\ 0)=U_0\ \}$.

A norma $Y_R(T)$ é um espaço métrico completo quando munido da métrica induzida pela norma de $\mathcal{H}^m(\Re)=H^m(\Re)\times H^m(\Re)$.

Definimos a função

$$P:Y_R(T)\to C(0,T;H^m(\Re))\times C(0,T;H^m(\Re))$$

dada por:

$$P\varphi(x,t) = U_0(x)-\int_0^t K(x)*\frac{\partial}{\partial x}(B\varphi(\cdot,s)+F(\varphi(\cdot,s))ds\forall\ t;\ 0\leq t\leq T$$
$$\text{e } \varphi\in Y_R(T). \tag{3.7}$$

Vamos mostrar primeiramente que a função P está bem definida e a seguir que P: $Y_R(T)\to Y_R(T)$ é uma contração (se T é escolhido suficientemente pequeno).

Seja $G(\varphi(\cdot,t))=B\varphi(\cdot,t)+F(\varphi(\cdot,t))$, ou seja,

$$G(\varphi(\cdot,t)) = B\varphi(\cdot,t)\begin{pmatrix} a_3\frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4u^pv \\ a_3\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4uv^p \end{pmatrix} ,\forall\ \varphi \in \mathrm{Y}_R\mathrm{T}$$

P está bem definida, de fato:

Se $\varphi \in \mathrm{Y}_R\mathrm{T}$ então $\mathrm{G}(\varphi(\cdot,\mathrm{t})) \in \mathcal{H}^m(\Re)$, m$\geq$ 2, para cada t $\in$ [0, T] e tem-se

$$\|v^{p+1}(t)\|_{H^m} \leq \|v(t)\|_{H^m}^{p+1} \quad \text{e} \quad \|u^pv\|_{H^m} \leq \|u\|_{H^m}^p\|v\|_{H^m} \tag{3.8}$$

para p$\geq$1, p $\in \mathcal{Z}$

pois $\mathrm{H}^m(\Re)$ é uma Àlgebra de Banach para m$\geq$1.

Além disso, do lema 3.2 temos que

$$K * \frac{\partial}{\partial x}G(\varphi(\cdot,t)) \in \mathcal{H}^m(\Re), \quad \forall\ \mathrm{t} \in [0,\ \mathrm{T}].$$

Ainda

$K * \frac{\partial}{\partial x}G(\varphi(\cdot,t))$ é contínua em 0$\leq$s$\leq$t e t $\in$ [0, T] com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$.

De fato:

Dado δ >0 tal que s+δ $\in$ [0, T] e $\varphi \in \mathrm{Y}_R(T)$, pelo lema 2.2 temos

$$\|K * \frac{\partial}{\partial x}[G(\varphi(s+\delta) - G(\varphi(s))]_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq C\|G(\varphi(s+\delta) - G(\varphi(s))\|_{\mathcal{H}^m(\Re)}. \tag{3.9}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|G(\varphi(s+\delta)) \quad &- \quad G(\varphi(s))]_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq \|B[(\varphi(\cdot;s+\delta) - \varphi(\cdot;s)]\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \\ &+ \quad \|F(\varphi(\cdot;s+\delta)) - F(\varphi(\cdot;s)\|_{\mathcal{H}^m(\Re)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mostremos que o lado direito de (3.10) tende a zero quando $\delta \to 0^+$. Temos

$$\|B[\varphi(\cdot;s+\delta) - \varphi(\cdot;s)]\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq B\|(\varphi(\cdot;s+\delta) - \varphi(\cdot;s)]\|_{\mathcal{H}^m(\Re)}.$$

Como $\varphi \in \mathrm{Y}_R(T)$; $\varphi(\cdot\ ;\mathrm{s})$ é contínua 0$\leq$s$\leq$t portanto, a expressão acima, tende a zero quando $\delta \to 0^+$.

Por outro lado:

$$F(\varphi) = \begin{pmatrix} a_3\frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4u^pv \\ a_3\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4uv^p \end{pmatrix} \text{,}a_3\text{, } a_4 \text{ reais e}$$

$u, v \in$ C(0; T; H$^m(\Re)$), por hipótese, logo F(φ) $\in$ C(0; T; H$^m(\Re)$) $\times$ C(0; T; H$^m(\Re)$) e

$$\|F(\varphi(\cdot; s+\delta) - F\varphi(\cdot; s)\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \to 0 \text{ quando } \delta \to 0^+ \text{ pois,}$$

$$\begin{aligned}
\| \quad & F(\varphi(\cdot; s+\delta)) - F(\varphi(\cdot; s)\|^m_{\mathcal{H}}(\Re) = \|\frac{a_3}{p+1}\left(v^{p+1}(s+\delta) - v^{p+1}(s)\right) \\
+ \quad & \frac{1}{p+1}\left(u^{p+1}(s+\delta) - u^{p+1}(s)\right) + a_4(u^p(s+\delta)v(s+\delta) - u^p(s)v(s))\|^m_{\mathcal{H}} \\
+ \quad & \|\frac{a_3}{p+1}\left(u^{p+1}(s+\delta) - u^{p+1}(s)\right) + \frac{1}{p+1}\left(v^{p+1}(s+\delta) - v^{p+1}(s)\right) \\
+ \quad & a_4(u(s+\delta)v^p(s+\delta) - u(s)v^p(s))\|^m_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

Para p$\geq$1, p $\in \mathcal{Z}$, é valido que:

$$|s_1^{p+1} - s_2^{p+1}| = |s_1 - s_2||s_1^p + s_1^{p-1}s_2 + \ldots + s_2^p| \quad \forall \text{ s}_1\text{; s}_2 \in \Re$$

e sendo H$^m(\Re)$ uma álgebra de Banach para m$\geq$1, segue que

$$\begin{aligned}
\| \quad & F(\varphi(\cdot; s+\delta) - F\varphi(\cdot; s)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \frac{|a_3|+1}{p+1}[\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m}(\|v(s+\delta)\|^p_{H^m} \\
+ \quad & \ldots + \|v(s)\|^p_{H^m}) + \|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m}(\|u(s+\delta)\|^p_{H^m} \\
+ \quad & \ldots + \|(s)\|^p_{H^m})] + |a_4|[\|u^p(s+\delta)v(s+\delta) - u^p(s)v(s)\|_{H^m} \\
+ \quad & \|u(s+\delta)v^p(s+\delta) - u(s)v^p(s)\|_{H^m}]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|u^p(s \quad + \quad & \delta)v(s+\delta) - u^p(s)v(s)\|^p_{H^m} \leq \|u(s+\delta)\|^p_{H^m}\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m} \\
+ \quad & \|v(s)\|_{H^m}\|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m}(\|u(s+\delta)\|^{p-1}_{H^m} + \ldots + \|u(s)\|^{p-1}_{H^m}).
\end{aligned}$$

Seja C$_2$ = max$\left\{\frac{|a_3|}{p+1}; \frac{1}{p+1}, |a_4|\right\}$ para p$\geq$1, p $\in \mathcal{Z}$, então:

$$
\begin{aligned}
\| \quad & F(\varphi(\cdot; s+\delta)) - F(\varphi(\cdot; s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq C_2\{\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m}(\|v(s+\delta)\|^p_{H^m} \\
+ \quad & \ldots + \|v(s)\|^p_{H^m}) + \|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m}(\|u(s+\delta)\|^p_{H^m} \\
+ \quad & \ldots + \|u(s)\|^p_{H^m}) + \|u(s+\delta)\|^p_{H^m}\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m} \\
+ \quad & \|v(s)\|_{H^m}\|\|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m}(\|u(s+\delta)\|^{p-1}_{H^m} + \\
+ \quad & \ldots + \|u(s)\|^{p-1}_{H^m}) + \|v(s+\delta)\|^p_{H^m})\|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m} \\
+ \quad & \|u(s)\|_{H^m}\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m}(\|v(s+\delta)\|^{p-1}_{H^m} \\
+ \quad & \ldots + \|v(s)\|^{p-1}_{H^m})\}.
\end{aligned}
$$

Logo existe uma constante C>0, tal que:

$$
\|F(\varphi(\cdot; s+\delta)) \quad - \quad F(\varphi(\cdot; s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq C[\|u(s+\delta) - u(s)\|_{H^m} + [\|v(s+\delta) - v(s)\|_{H^m}]
$$

Pois $\varphi \in \mathrm{Y}_R(\mathrm{T})$ e portanto

$$
\|u\|^p_{H^m} \leq R + \|u_0\|^p_{H^m} \quad \text{e} \quad \|v\|^p_{H^m} \leq R + \|v_0\|^p_{H^m}.
$$

Assim

$$
\|F(\varphi(\cdot, s+\delta)) - F(\varphi(\cdot, s)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C\|\varphi(\cdot, s+\delta) - \varphi(\cdot, s)\|_{\mathcal{H}^m} \tag{3.11}
$$

e $\varphi(\cdot; s)$ é contínua para $0 \leq s \leq t$ portanto

$$
\|F(\varphi(\cdot; s+\delta) - F(\varphi(\cdot; s))\|_{\mathcal{H}^m} \to 0
$$

quando $\delta \to 0^+$, onde $C = C(m, R, p, |a_3|, |a_4|, \|U_0\|_{\mathcal{H}^m})$.

Portanto $K * \frac{\partial}{\partial x} G(\varphi(\cdot, s)$ é contínua à direita de s com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$. Analogamente prova-se que $K * \frac{\partial}{\partial x} G(\varphi(\cdot, s))$ é contíinua à esquerda de s com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$.

Tem-se que $P\varphi \in C(0, T_0; H^m(\Re)) \times C(0, T_0; H^m(\Re))$. Com efeito:

$$
\begin{aligned}
\|P\varphi(\cdot, t) - P\varphi(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} &= \| \int_{t_0}^t K(x) * \frac{\partial}{\partial x} G(\cdot, s) ds\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \\
&\leq \int_{t_0}^t \|K(x) * \frac{\partial}{\partial x} G(\cdot, s) ds\|_{\mathcal{H}^m} ds.
\end{aligned}
$$

Usando o lema 3.2 e (3.9), vem:

$$\begin{aligned}\|P\varphi(\cdot,t) &- P\varphi(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C\int_{t_0}^{t}\|B\varphi(\cdot;s)+F(\varphi(\cdot;s))\|_{\mathcal{H}^m(\Re)}ds\\ &\leq C\int_{t_0}^{t}[|a_2|(\|u\|_{H^m}+\|v\|_{H^m})+\frac{|a_3|+1}{p+1}(\|u\|_{H^m}^{p+1}+\|v\|_{H^m}^{p+1})\\ &+ |a_4|(\|u^pv\|_{H^m}+\|uv^p\|_{H^m})]ds.\end{aligned}$$

Tomando $C_2 = \max\left\{|a_2|; |a_4|; \frac{1}{p+1}, \frac{|a_3|}{p+1}\right\}$ e usando o fato que $\varphi \in Y_R(T)$

$$\begin{aligned}\|P\varphi(\cdot,t)-P\varphi(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{H}^m} &\leq C_2\sup_{[0,T]}\{\|u\|_{H^m}+\|v\|_{H^m}+\|u\|_{H^m}^{p+1}\\ &+ \|v\|_{H^m}^{p+1}+\|u^pv\|_{H^m}+\|uv^p\|_{H^m}\}|t-t_0|\end{aligned}$$

$$\|P\varphi(\cdot,t)-P\varphi(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C_1|t-t_0| \tag{3.12}$$

onde $C_1 = C_1\ (|a_2|, |a_4|, |a_3|, p, R, m, \|U_0\|_{\mathcal{H}^m})$.

Logo $P\varphi \in C(0, T; H^m(\Re)) \times C(0, T; H^m(\Re))$, $m \geq 2$ pois quando $t \to t_0$ o segundo membro de (3.12) tende a zero.

Tomando $t_0 = 0$ em (3.12)

$$\|P\varphi(\cdot;t)-P\varphi(\cdot;t_0)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C_1t \leq C_1T$$

e

$$\sup_{[0,T]}\|P\varphi(\cdot;t)-P\varphi(\cdot;t_0)\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq C_1T \quad \text{sendo } \varphi(\cdot;0)=U_0\ .$$

Mostremos agora que existe $T_0 > 0$ tal que P, $Y_R(T_0) \to Y_R(T_0)$ e que P é uma contração.

Da desigualdade acima vem

$$\sup_{[0,T]}\|P\varphi(\cdot;t)-U_0\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq C_1T. \tag{3.13}$$

Sejam ψ_1 e $\psi_2 \in Y_R$ para $t \in [0,T]$, tem-se

$$\|P\psi_1(t)-P\psi_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \int_0^t \|K * \frac{\partial}{\partial x}(G(\psi_1(s))-G(\psi_2(s)))\|_{\mathcal{H}^m}ds.$$

Pelo lema 3.2, temos

$$\|G(\psi_1(s)) - G(\psi_2(s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|B(\psi_1(s) - \psi_2(s))\|_{\mathcal{H}^m} + \|F(\psi_1(s)) - F(\psi_2(s))\|_{\mathcal{H}^m}. \quad (3.14)$$

Com o mesmo argumento feito anteriormente, existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\|F(\psi_1(s)) - F(\psi_2(s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq C_1 \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\|_{\mathcal{H}^m} \quad (3.15)$$

onde $C_1 = C_1(m, R, p, |a_3|, |a_4|, \|U_0\|_{\mathcal{H}^m})$.

De (3.13) e (3.15), vem

$$\begin{aligned} \|P\psi_1(t) - P\psi_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} &\leq C\int_0^t (\|B\|_{\mathcal{H}^m} + C_1)\|\psi_1(s) - \psi_2(s)\|_{\mathcal{H}^m} ds \\ &\leq C \sup_{[0,T]}(\|B\|_{\mathcal{H}^m} + C_1)\|\psi_1(s) - \psi_2(s)\|_{\mathcal{H}^m} \cdot T \end{aligned}$$

onde $C = C(p, m, R, \|U_0\|_{\mathcal{H}^m})$. Ou seja

$$\sup_{[0,T]} \|P\psi_1(t) - P\psi_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq CT\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathcal{H}^m}. \quad (3.16)$$

Escolhendo $T_0 < \min\left(\frac{R}{C_1}; \frac{1}{C}\right)$ tem-se, de (3.13) e (3.16), que $P\psi \in Y_R(T_0)$ e P é uma contração de $Y_R(T_0)$ em $Y_R(T_0)$.

Do princípio da contração de Banach, segue que existe uma única função U de $Y_R(T_0)$, ponto fixo de P.

Existe, portanto, uma única solução local para a equação integral (3.3).

Falta provar que U_t existe. Com efeito, pelo lema 3.2 podemos escrever (3.3) como

$$U(x,t) = U_0(x) - \int_0^t K * (BU_x + F(U)_x)ds.$$

Tomando $H(s,U) = BU + F(U)$, vem

$$U(x,t) = U_0(x) - \int_0^t \frac{dK}{dx} * H(s,U)ds.$$

Considere

$$z(x,t) = -\int_0^t \frac{dK}{dx} * H(s,U)ds.$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $t + \varepsilon \in [0, T_0]$. Então

$$\frac{z(x,t+\varepsilon) - z(x,t)}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} \frac{dK}{dx} * H(s,U)ds.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, temos

$$\begin{aligned}\frac{z(x,t+\varepsilon) - z(x,t)}{\varepsilon} &= \frac{-1}{\varepsilon}(\frac{dK}{dx} * H(t_\varepsilon, U)) \cdot \varepsilon \\ &= -\frac{dK}{dx} * H(t_\varepsilon, U)\end{aligned}$$

para $t_\varepsilon \in [t; t + \varepsilon]$.

Tomando $\varepsilon \to 0^+$ obtemos:

$$\frac{\partial^+ z}{\partial t} = -\frac{\partial K^+}{\partial x} * H(t,U).$$

Consequentemente $\frac{\partial z^+}{\partial t}$ existe $\frac{\partial z^+}{\partial t} = -\frac{\partial K^+}{\partial x} * (BU + F(U))$.

Analogamente prova-se que $\frac{\partial z^-}{\partial t} = \frac{\partial K^-}{\partial x} * (BU + F(U))$ e portanto $\frac{\partial z}{\partial t}$ existe e $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial K}{\partial x} * (BU + F(U))$. Isto é,

$$U_t = -A^{-1}(BU_x + F(U)_x). \tag{3.17}$$

Logo U = (u, v) satisfaz (3.1) e U(x,0) = U_0(x).

Finalmente temos que $U_t = (u_t,v_t) \in C(0, T_0; H^m(\Re)) \times C(0, T_0; H^m(\Re))$ pois pelo teorema do ponto fixo de Banach U=P(U) e P(U) é diferenciável em t, portanto, U_t e é dado por

$$U_t = (P(U))_t = -A^{-1}(BU_x + F(U)_x)$$

que é contínua em t com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$.

Para demonstrar a unicidade da solução usaremos a desigualde de Gronwall. Considere $W_1 = (u_1, v_1)$ e $W_2 = (u_2, v_2) \in C(0, T_0; H^m(\Re) \times C(0, T_0; H^m(\Re)$ duas soluções de (3.1) com $W_1(x,0) = W_2(x,0) = W_0(x)$ então W_1 e W_2 satisfazem a equação integral (3.3).

Seja $T_0 > 0$, tem-se

$$\|W_1(t) - W_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \int_0^t \|A^{-1}(G_x(W_1) - G_x(W_2))\|_{\mathcal{H}^m} ds, \quad t \in [0, T_0].$$

Pelos lemas 3.1 e 3.2, vem

$$\|W_1(t) - W_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C \int_0^t \|G(W_1) - G(W_2)\|_{\mathcal{H}}^m(\Re) ds.$$

Por (3.15), temos

$$\|W_1(t) - W_2(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C \int_0^t \|W_1(s) - W_2(s)\|_{\mathcal{H}^m} ds$$

Da desigualdade de Gronwall temos que $W_1 = W_2$.

3.3 Existência de solução global e dependência contínua

Teorema 3.2 (Existência da solução global). *Seja $U_0=(u_0, v_0) \in \mathcal{H}^m(\Re)$, $m\geq 2$, $m \in \mathcal{Z}$; $|a_1| < 1$, a_2, a_3, a_4 reais com $a_2 > 0$ e $a_3 = a_4$ em (3.1). Então existe um único par de funções $(u, v) \in C(0, T_0; H^m(\Re) \times C(0, T_0; H^m(\Re)$ para todo $T_0 > 0$ e $(u_t; v_t) \in C(0, T_0; H^m(\Re) \times C(0, T_0; H^m(\Re)$, (u, v) satisfazendo (3.1) e $(u(x,0); v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$.*

Demonstração : Multiplicando a 1ª equação em (3.1) por u, a 2ª equação por v e integrando em $\Re$ tem-se, prara todo t $\in$ [0, T_0].

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u+u_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}uv_{xxt}dx + a_3\int_{-\infty}^{\infty}uv^pv_xdx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}u(u^pv)_xdx = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v+v_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}vu_{xxt}dx + a_3\int_{-\infty}^{\infty}vu^pu_xdx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}v(v^pu)_xdx = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2 &+ v^2+u_x^2+v_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}(uv_{xxt}+vu_{xxt})dx \\ &+ a_3\int_{-\infty}^{\infty}(uv^pv_x+vu^pu_x)dx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}((u^pv)_xu \\ &+ (uv^p)_xv)dx = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty}(uv_{xxt}+vu_{xxt})dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(u_xv_{xt}+v_xu_{xt})dx = -\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_xv_x)dx \tag{3.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}((u^pv)_xu+(uv^p)_xv)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(u_xu^pv+v_xuv^p)dx. \tag{3.20}$$

Por hipótese $a_3 = a_4$, substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18) vem:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2)dx + a_1\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_xv_x)dx = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx = 0. \tag{3.21}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx]dt = 0.$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(u_0^2+v_0^2+u_{0x}^2+v_{0x}^2+2a_1u_{0x}v_{0x})dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2 &+ v^2+u_x^2+v_x^2)dx \le -2a_1\int_{-\infty}^{\infty}u_xv_xdx \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}(u_0^2+v_0^2+u_{0x}^2+v_{0x}^2+2a_1u_{0x}v_{0x})dx \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pelas desigualdades de Hölder e $ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$; $\forall a,b \in (\Re)$, vem

$$\int_{-\infty}^{\infty}2a_1u_{0x}v_{0x}dx \le 2a_1\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{u_{0x}^2}{2}+\frac{v_{0x}^2}{2})dx = \int_{-\infty}^{\infty}(a_1u_{0x}^2+a_1v_{0x}^2)dx \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}2a_1u_xv_xdx &\le 2|a_1|(\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\le |a_1|\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx+|a_1|\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Consequentemente de (3.23) e (3.24) obtemos, para $|a_1| < 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+(1-a_1)u_x^2+(1-a_1)v_x^2)dx \le \int_{-\infty}^{\infty}(u_0^2+v_0^2+(1+a_1)u_{0x}^2+(1+a_1)v_{0x}^2)dx$$

Logo, existe uma constante positiva C = $\frac{1+|a_1|}{1-|a_1|}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2)dx \le C\int_{-\infty}^{\infty}(u_0^2+v_0^2+u_{0x}^2+v_{0x}^2)dx$$

ou

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}^1} \le \|(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.25}$$

Multiplicando a $1^{\underline{o}}$ equação de (3.1) por ($-u_{xx}$) a $2^{\underline{o}}$ equação de (3.1) por ($-v_{xx}$) e integrando em $\Re$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u_{xx}^2)dx + a_1\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}v_{xxt}dx - a_3\int_{-\infty}^{\infty}v^pv_xu_{xx}dx \\ \quad -\int_{-\infty}^{\infty}u^pu_xu_{xx}dx - a_4\int_{-\infty}^{\infty}(u^pv)_xu_{xx}dx = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+v_{xx}^2)dx + a_1\int_{-\infty}^{\infty}v_{xx}u_{xxt}dx - a_3\int_{-\infty}^{\infty}u^pu_xv_{xx}dx \\ \quad -\int_{-\infty}^{\infty}v^pv_xv_{xx}dx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}(uv^p)_xv_{xx}dx = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx + a_1\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}v_{xxt}+u_{xxt}v_{xx})dx \\ &= a_3\int_{-\infty}^{\infty}(v^pv_xu_{xx}+u^pu_xv_{xx})dx + \int_{-\infty}^{\infty}(u^pu_xu_{xx}+v^pv_xv_{xx})dx \\ &+ a_4\int_{-\infty}^{\infty}(pu^{p-1}u_xvu_{xx}+u^pv_xu_{xx}+u_xv^pv_{xx}+puv^{p-1}v_xv_{xx})dx. \end{aligned}$$

Como $a_3=a_4$, por hipótese, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(u^pu_xu_{xx}+v^pv_xv_{xx})dx \\ &+ a_4\int_{-\infty}^{\infty}(pu^{p-1}u_xvu_{xx}+u^pv_xu_{xx} \\ &+ u_xv^pv_{xx}+puv^{p-1}v_xv_{xx}+v^pv_xu_{xx}+u^pu_xv_{xx})dx \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H^m(\Re) \hookrightarrow L^\infty(\Re)$ para $m\geq 1$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \leq \|u\|_{L^\infty}^p\|u_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2} \\ &+ \|v\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} + a_4[p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}^P\|v_{xx}\|_{L^2} \\ &+ p\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2} \\ &+ \|u^p\|_{L^\infty}\|u_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2}]. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \\
&\le C_1[(\|u_x\|_{H^1}^p+\|v_x\|_{H^1}^p)(\|u_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}+\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2}) \\
&+ \|u\|_{H^1}^p\|v_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}+\|v\|_{H^1}^p\|u_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^\infty}\|u_x\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}+\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^\infty}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2}].
\end{aligned}
$$

De (3.25) e da desigualdade de Young, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \\
&\le C(\|v_x\|_{L^2}^2+\|u_{xx}\|_{L^2}^2+\|u_x\|_{L^2}^2+\|v_{xx}\|_{L^2}^2 \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

onde C = C($\|U_0\|_{\mathcal{H}}$;p).

Integrando (3.26) de 0 a t:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} (& u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx \le \int_{-\infty}^{\infty}(u_{0x}^2+v_{0x}^2+u_{0xx}^2+v_{0xx}^2+2a_1u_{0xx}v_{0xx})dx \\
&- 2a_1\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}v_{xx})dx + C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxds. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Observando que - 2a $_1$u$_{xx}$ v_{xx} $\le$ a$_1$(u$_{xx}^2$ + v_{xx}^2). Então de (3.27), para $|a_1|$ <1, vem:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+(1-a_1)u_{xx}^2+(1-a_1)v_{xx}^2)dx \le C_1 + C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxds.
$$

Como $a_1 < 1$, então existem constantes positivas C$_2$ e C$_3$ tais que:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx \le C_2 + C_3\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx})dxds.
$$

Usando a desigualdade de Gronwall em (3.28) implica que:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx \le C_2e^{C_3T} \le C_2e^{C_3T}; \quad \forall \text{ t ; } 0\le t\le T. \qquad (3.28)
$$

Logo, temos que $(u,v) \in$ C(0,T;H$^2(\Re)$) $\times$ C(0,T;H$^2(\Re)$) por (3.25) e (3.28).

Pelo processo de indução podemos concluir que (u,v) $\in C(0,T;H^m(\Re)) \times C(0,T;H^m(\Re))$ para m$\geq$2. Como $U_t=(u_t;v_t)$ existe e satisfaz (3.1) então pelo lema 3.2, podemos concluir que (u,v) $\in C(0,T;H^m(\Re)) \times C(0,T;H^m(\Re))$.

A unicidade de solução é obtida utilizando a desigualdade de Cronwall.

Teorema 3.3 (Dependência contínua dos dados iniciais). *Sejam* U_0^n, $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$, $m\geq 2$, $m \in \mathcal{Z}$, $0< a_1<1$; a_2, a_3, a_4 *reais, com* $a_3=a_4$ *e,* $(u,v) \in C^1\ (0,T;H^m(\Re)) \times C^1(0,T;H^m(\Re))$; $(u^n,v^n) \in C^1\ (0,T;H^m(\Re)) \times C^1(0,T;H^m(\Re))$ *soluções de (3.1) e de*

$$\begin{cases} u_t^n - u_{xxt}^n - a_1 v_{xxt}^n + a_2 u_x^n + a_3(v^n)^p v_x^n + (u^n)^p u_x^n + a_4((u^n)^p v_x^n)_x = 0 \\ v_t^n - v_{xxt}^n - a_1 u_{xxt}^n + a_2 v_x^n + a_3(u^n)^p u_x^n + (v^n)^p v_x^n + a_4(u^n(v_x^n)^p)_x = 0 \\ u^n(x,0) = u^n(x); v_0^n(x,0) = v_0^n(x) \end{cases} \tag{3.29}$$

respectivamente, com $n \in \mathcal{Z}$, $n\geq 0$.

Se $U_0^n \to U_0$ *em* $\mathcal{H}(\Re)$ *para* $T>0$ *fixado, então* $(u^n,\ v^n) \to (u,v)$ *em* $C(0,T;H^m(\Re)) \times C(0,T;H^m(\Re))$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração : Seja W= U^n - U. Por (3.2) e (3.29) temos que W satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$AW_t + BW_x + F(U^n)_x - F(U)_x = 0; W(x,0) = U_0^n(0) - U_0(x). \tag{3.30}$$

Ainda W satisfaz a equação integral:

$$W(x,t) = W(x,0) - \int_0^t A^{-1}(BW_x + F(U^n)_x - F(U)_x)ds.$$

Logo

$$\|W(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|W(x,0)\|_{\mathcal{H}^m} + \int_0^t \|A^{-1}(BW_x + F(U^n)_x - F(U)_x)\|_{\mathcal{H}^m} ds.$$

Pelos lemas 3.1 e 3.2, e pelo teorema 3.1, vem:

$$\|W(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|W(x,0)\|_{\mathcal{H}^m} + C\int_0^t \|W(x,s)\|_{\mathcal{H}^m} ds.$$

Por Gronwall temos:

$$\|W(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|W(x,0)\|_{\mathcal{H}^m} e^{Ct}, \quad t \in [0,\ T]$$

Por Gronwall temos:

$$\|W(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|W(x,0)\|_{\mathcal{H}^m} e^{Ct}, \quad \text{t} \in [0,\, \text{T}]$$

$$\|U^n - U\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|U_0^n - U_0\|_{\mathcal{H}^m} e^{Ct}.$$

Como $U_0^n \to U_0$ em $\mathcal{H}^m$ temos $U^n \to U$ em $C(0,T;H^m(\Re)) \times C(0,T;H^m(\Re))$.

3.4 Comportamento assintótico

Nesta seção estudaremos o comportamento da solução do problema (1.1). Seguiremos o método da "fase estacionária". Usaremos várias idéias de J. Albert [2]; [3]. O primeiro passo é obter uma taxa de decaimento para a solução do problema linear associado ao problema (1.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x = 0 & \\ v_x - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_2 v_x = 0 & \text{x} \in \Re,\ \text{t} \geq 0 \\ u(x,o) = u_0(x)\ ;\ v(x,0) = v_0(x) & \end{cases} \tag{3.31}$$

O resultado que obtemos coincide com a taxa ótima de decaimento obtida por J. Albert [2], [3] para a equação generalizada de Benjamin-Bona-Mahony.

O lema a seguir é um resultado clássico de Van der Corput cuja demostração encontra-se em [2].

Lema 3.3 (Van der Corput). *Seja $\rho \in C^2\ (\Re)$ uma função côncova ou convexa no intervalo $[a,\ b]$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Então:*

$$1)\ \ |\int_a^b e^{i\rho(s)} ds| \leq 2\{\min_{[a,b]} |\rho'(s)|\}^{-1} \text{se } \rho'(s) \not\equiv 0 \text{ em } [a,b]$$

$$2)\ \ |\int_a^b e^{i\rho(s)} ds| \leq 4\{\min_{[a,b]} |\rho''(s)|\}^{\frac{-1}{2}} \text{se } \rho''(s) \not\equiv 0 \text{ em } [a,b]$$

c.q.d.

com $i = \sqrt{-1}$.

Usando a transformada de Fourier na variável x em (3.31), obtemos sua forma integral da solução

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_1(y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_2(y)}\hat{u_0}(y)dy \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_1(y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_2(y)}\hat{v_0}(y)dy] \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[-\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_1(y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_2(y)}\hat{u_0}(y)dy \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_1(y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+it\lambda_1(y)}\hat{v_0}(y)dy] \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $\lambda_1(y) = \dfrac{a_2y(1+y^2)+a_1a_2y^3}{(1+y^2)-a_1^2y^4}$ e $\lambda_2(y) = \dfrac{a_2y(1+y^2)-a_1a_2y^3}{(1+y^2)-a_1^2y^4}$.

As funções λ_1 e λ_2 satisfazem as seguintes propriedades:

1) λ_1, λ_2 são funções de classe $C^\infty(\Re)$, $\forall$ y e $0<a_1<1$;

2) λ_1, λ_2 possuem no máximo 9 pontos de inflexão não degenerados;

3) Existem constantes positivas, C_1 e C_2, tais que:
$|\lambda_1''(y)| \geq C_1|y|^{-3}$ e $|\lambda_2''(y)| \geq C_2|y|^{-3}$ para $|y|$ grande.

De fato:

1) Como λ_1, λ_2 são funções racionais temos $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(\Re)$, $\forall$ y e $0<a_1<1$.

2) Derivando λ_1 em relação a variável y:

$$\lambda_1'(y) = \frac{a_2+(5a_2+3a_1a_2)y^2+(7a_2+6a_1a_2-a_1^2a_2)y^4+(3a_2+3a_1a_2-3a_1^2a_2-3a_1^3a_2)y^6}{(1+2y^2+(1-a_1^2)y^4)^2}.$$

Derivando novamente em y, obtemos para o numerador de λ_1'' um polinômio de grau 9, portanto existem no máximo 9 pontos de inflexão não degeneredos.

Analogamente, prova-se para λ_2.

3) De (2) temos:

$$\lambda_j''(y) = \left(\sum_{i=0}^{9} A_iy^i\right)/((1+y^2)^2-a_1^2y^4)^3 \quad \text{onde } A_i \text{ é o coeficiente de } y^i.$$

$A_1 \in \Re$, i=0,...,9.

Ainda

$$[(1+y^2)^2 - a_1^2y^4]^3 \leq [1+(1+y^2)^2]^3 \leq (1+y^2)^6, \quad \text{pois } |a_1 < 1.$$

Portanto para $|y|$ suficientemente grande:

$$|\lambda_j^{''}(y)| = \frac{|\sum_{i=0}^{9} A_i y^i|}{|((1+y^2)^2 - a_1^2y^4)^3|} \geq \frac{|A_9 y^9|}{(1+a_1)^6(1+y^2)^6}$$

Como $y^{12} \leq (1+y^2)^6$ e $|\sum_{i=0}^{9} A_i y^i| \geq |A_9 y^9|$, temos:

$$|\lambda_j^{''}(y)| = C_1|y|^{-3}, \ |y| \text{ suficientemente grande e j=1,2.}$$

O que mostra a 3ª propriedade de λ_1 e λ_2.

Lema 3.4. *Sejam λ_1 e λ_2 como definidas acima e 0< a_1 <1. Seja η, η_1 >0, então, para r_1 e r_2 suficientemente grandes temos:*

$$\text{a)} \sup_{-\infty<\alpha<\infty} \left| \int_{-r_1}^{r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)} dy \right| \leq C[t^{-\eta} + t^{(\eta-1)/2} + t^{-1/2} r_1^{3/2}]$$

$$\text{b)} \sup_{-\infty<\alpha<\infty} \left| \int_{-r_2}^{r_2} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)} dy \right| \leq C[t^{-\eta_1} + t^{(\eta_1-1)/2} + t^{-1/2} r_2^{3/2}]$$

onde C é uma constante positiva (independente de r_1, r_2 e α).

Demonstração :

(a) Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_9$ os pontos de inflexão de λ_1.

Seja r_1 >0 um número suficientemente grande tal que $y_j \in (-r_1, r_1)$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Seja ε >0 suficientemente pequeno tal que $(y_j - \varepsilon, (y_j + \varepsilon) \subseteq (-r_1, r_1)$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Considere o conjunto

$$B_\varepsilon = \{y \in \Re / |y| < r_1 \ , \ |y - y_j| \geq \varepsilon, j = 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Calculemos a integral

$$I = \int_{r_1}^{r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy \;=\; \int_{|y|<r_1,||y-y_j\geq\varepsilon} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy + \int_{|y|<r_1,|y-y_j<\varepsilon|} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy \tag{3.34}$$

onde $\alpha = \frac{x}{t}$. Isto é:

$$I = I_1 + I_2.$$

Vamos estimar as integrais I_1 e I_2 separadamente.

Seja $\rho_1(y) = \lambda_1(y) + \alpha y$.

Então, $\rho_1'(y) = \lambda_1'(y) + \alpha$ e $\rho_1''(y) = \lambda_1''(y)$ com y_j é um ponto de inflexão não degenerado de λ_1, tem-se

$\rho_1''(y_1) = 0$ e $\rho_1'''(y_j) \neq 0$ para j=1,2,...,9.

Assim, se $\rho_1'''(y_j)>0$ temos $\rho_1'(y)$ é um ponto de mínimo local em y_j, caso $\rho_1'''(y_j)<0$ então $\rho_1'(y)$ é um ponto de máximo local em y_j.

Portanto, $\rho_1''(y) = \lambda_1''(y)<0$ ($\rho_1''(y) = \lambda_1''(y)>0$) para $y>y_j$ e $\rho_1''(y) = \lambda_1''(y)>0$ ($\rho_1''(y) = \lambda_1''(y)<0$) caso $y<y_j$, $\forall$ j=1, 2,...,9. Ou seja, $\rho_1(y)$ é côncava ou convexa numa pequena vizinhança de y_j.

Como $\rho_1''(y) \neq 0$, $\forall\, y \in B_\varepsilon$, podemos estimar I, usando o lema de Van der Corput. Assim:

$$|I_1| = \left|\int_{|y|<r_{1_{|y-y_j|\geq\varepsilon}}} e^{it\rho_1(y)}dy\right| \leq 4\{t \;\; \min_{B_\varepsilon} |\rho_1''(y)|\}^{-1/2}$$

ou

$$|I_1| \leq 4t^{-1/2}\{\; \min_{B_\varepsilon} |\rho_1''(y)|\}^{-1/2}. \tag{3.35}$$

Pela $3^{\underline{o}}$ propriedade de λ_1, resulta que:

$$\min_{y\in B_\varepsilon}|\rho_1''(y)| = \;\min_{y\in B_\varepsilon}|\lambda_1''(y)| = \min\,\{|\rho_1''(-r_1)|\,;|\rho_1''(+r_1)|;|\rho_1''(y_j\pm\varepsilon)|\} \leq C|y| \text{ para j=1, 2, ...,9.}$$

Mas $|y| \leq |r_1|$ para $y \in B_\varepsilon$, daí:

$$\min_{y\in B_\varepsilon}|\rho_1''(y)| \geq Cr_1^{-3} \text{ para } r_1 \text{ suficientemente grande.} \tag{3.36}$$

De (3.35) e (3.36) resulta que

$$|I_1| = |\int_{B_\varepsilon} e^{it\rho_1(t)}dy| \leq Ct^{-1/2}r_1^{3/2} \text{ onde C=C}(\varepsilon,\, y_j) \text{ e t grande.} \tag{3.37}$$

Para estimar I_2 em (3.34) vamos dividi-lá do seguinte modo:

$$I_2 = \int_{|y-y_j|,<\varepsilon|y|<r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy = \int_{|y-y_j|<t^{-\eta},|y|<r_1} + \int_{t^{-\eta}|y-y_j|<\varepsilon,|y|<r_1} \tag{3.38}$$

ou

$$I_2 = I_3 + I_4$$

onde η é um número a ser determinado.

Seja $y - y_j = s$ em I_3, então:

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left|\int_{|s|<t^{-\eta}} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy\right| \leq \int_{|s|<t^{-\eta}} |e^{it\rho_1(s+y_j)}|ds \\ &= 2\int_0^{t^{-\eta}} |e^{it\rho_1(s+y_j)}|ds. \end{aligned}$$

Resulta que

$$|I_3| = \left|\int_{|s|<t^{-\eta}} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy\right| \leq 2t^{-\eta}, \text{t grande.} \tag{3.39}$$

Para avaliar I_4 em (3.39) usaremos o lema de Van der Corput.

Observemos que $\rho_1''(y_j)=0$ e $\rho_1'''(y_j)\neq 0$, pelas hipóteses feitas, portanto y_y é um ponto de mínimo local ou máximo local para ρ_1'.

Como $t^{-\eta}<|y - y_j|<\varepsilon$ tem-se que para cada y, y pertencente a um dos conjuntos $t^{-\eta}+y_j < y < y_j+\varepsilon$ ou $y_j-\varepsilon < y < y_j-t^{-\eta}$ portanto $\rho_1''(y)=\lambda_1''(y)>0$ ou $\rho_1''(y)=\lambda_1''(y)<0$ e ρ_1 é uma função côncava ou convexa nestes conjuntos, pelo lema de Van der Corput podemos concluir que:

$$|I_4| \leq 4\{t \cdot \min_{t^{-\eta}<|y-y_j|<\varepsilon} |\rho_1''(y)|\}^{-1/2}. \tag{3.40}$$

Na vizinhança de cada y_j, j=1,...,9, a função $\rho_1''(y_j)$ tem um desenvolvimento de Taylor da forma

$$\rho_1''(y) = \rho_1'''(y_j)(y - y_j) + R(y)$$

onde

$$R(y) = \frac{\rho_1^4(\theta_j)(y - y_j)^2}{2} \quad \text{com } y_j < \theta < y \text{ e } \lim_{y \to y_j} \frac{R(y)}{y - y_j} = 0.$$

Assim:

$$|\rho_1''(y)| = |\rho_1'''(y_j) + \frac{\rho_1^{(4)}(\theta_j)}{2}(y - y_j)||y - y_j| \geq [|\rho_1'''(y_j) - \frac{1}{2}\rho_1^4(\theta_j)||y - y_j|]|y - y_j|,$$

$$\text{pois } |y - y_j| < 1 \qquad |\rho_1''(y)| \geq |\rho_1''(y_j) - \delta_1||y - y_j|.$$

Tome $\delta_1 = \frac{1}{2}\rho_1^{(4)}(\theta_j)$ com $\delta_1 > 0$, pequeno.

Fazendo

$0 < \delta_1 < \min_{1 \leq j \leq 9} |\rho_1'''(y_j)|$, então existe uma constante positiva C tal que $|\rho_1''(y)| \geq C|y - y_j|$ para todo y suficientemente próximo de y_j. Portanto:

$$\min_{t^{-\eta} < |y - y_j| < \varepsilon} |\rho_1''(y)| \geq C|y - y_j| \geq Ct^{-\eta} \text{ para } 1 \leq j \leq 9. \tag{3.41}$$

De (3.40) e (3.41) resulta que

$$|I_4| = \left| \int_{t^{-\eta} < |y - y_j| < \varepsilon} e^{it\rho_1(y)} dy \right| \leq 4\{t \cdot Ct^{-\eta}\}^{-1/2} \leq Ct^{\frac{\eta - 1}{2}}. \tag{3.42}$$

Logo, por (3.37), (3.39) e (3.42) obtemos

$$|I| = \left| \int_{-r_1}^{r_2} e^{it(\lambda_1(y) + \alpha y)} dy \right| \leq 2t^{-\eta} + Ct^{\frac{\eta - 1}{2}} + Ct^{-1/2} r_1^{3/2}, \quad \text{onde } C > 0.$$

O que prova (a), analogamente podemos provar (b).

Teorema 3.4. *Seja* $(u_o, v_0) \in H^4(\Re) \cap L^1(\Re) \times H^4(\Re) \cap L^1(\Re)$, a_1, a_2 *números reais com* $a_2 > 0$ *e* $0 < a_1 < 1$. *Então a solução do problema linear (3.31) satisfaz a estimativa:*

1) $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq (\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4})(1 + t)^{-1/3}$

2) $\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq (\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4})(1 + t)^{-1/3}$

para t suficientemente grande e C uma constante positiva independente de xe t.

Demonstração: De (3.32) e (3.33) tem-se:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy] \end{aligned} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[-\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy] \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde $\alpha = \frac{x}{t}$.

Provaremos a estimativa (1).

Seja $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ que serão determinados posteriormente, podemos dividir (3.43) em 2 partes e obtém-se:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[|\int_{|y|\leq r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy| + |\int_{|y|>r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy| \\ &+ |\int_{|y|\leq r_2} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy| + |\int_{|y|>r_2} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy| \\ &+ |\int_{|y|\leq r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy| + |\int_{|y|>r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy| \\ &+ |\int_{|y|\leq r_2} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy| + |\int_{|y|>r_2} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy|] \end{aligned} \tag{3.45}$$

ou

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8).$$

Vamos estimar a integral I_2 em (3.45)

$$I_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{|y|\geq r_1} |e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)|dy \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{|y|\geq r_1} |\hat{u_0}(y)|dy$$

$$I_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{|y|\geq r_1} |\hat{u_0}(y)| \cdot (1+|y|)^4(1+|y|)^{-4}dy.$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que:

$$I_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{|y|\geq r_1} |\hat{u_0}(y)|^2(1+|y|)^8 dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{|y|\geq r_1}(1+|y|)^{-8}dy\Big)^{1/2}.$$

Como

$$(1+|y|)^8 \leq C(1+|y|)^4 \text{ e}$$

$$\int_{|y|\geq r_1}(1+|y|)^{-8}dy = 2\int_{r_1}^{+\infty}(1+|y|)^{-8}dy = \frac{2}{7}(1+r_1)^{-7}.$$

Obtemos que

$$I_2 \leq C(1+r_1)^{-7/2}\|u_0\|_{H^4}. \tag{3.46}$$

De modo análogo, tem-se:

$$I_4 \leq C(1+r_2)^{-7/2}\|u_0\|_{H^4} \tag{3.47}$$

$$I_6 \leq C(1+r_1)^{-7/2}\|v_0\|_{H^4} \tag{3.48}$$

$$I_8 \leq C(1+r_2)^{-7/2}\|v_0\|_{H^4}. \tag{3.49}$$

Vamos estimar I_1.

Seja

$$h_1 = e^{it\lambda_1} = e^{it\left(\frac{a_2y(1+y^2)+a_1a_2y^3}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\right)}.$$

O integrando de I, pode ser reescrito como $e^{ixy}\cdot h_1(y,t)\hat{u}_0(y)$.

Seja $\beta(y,t)=\chi_M h_1(y,t)$, onde χ_M é a função caracteristica do conjunto M=$\{|y|\leq r_1\}$, então:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\beta(y,t)\hat{u}_0(y)dy\Big| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{(\beta(x,t))*\hat{u}_0(y))}dy\Big|.$$

Pela desigualdade de Young e pelas propriedades de convolução, tem-se

$$I_1 = \frac{1}{2}|\check{\beta}(x,t) * u_0(0)| \leq \frac{1}{2}\sup_{x\in\Re}|\check{\beta}(x,t) * u_0(0)|,$$

isto é,

$$I_1 \leq \|\check{\beta}(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1}. \tag{3.50}$$

Também

$$|\check{\beta}(x,t)| = |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\beta(y,t)dy| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\chi_M(y)dy|$$

onde $\alpha = \frac{x}{t}$.

Usando o lema 3.2, temos:

$$|\check{\beta}(x,t)| = |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{-\infty<\alpha<\infty}|\int_{-r_1}^{r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}dy| \leq C(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-1/2}r_1^{3/2})$$

pois

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\chi_M(y)dy| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-r_1}^{r_1} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y}dy|.$$

De (3.50) e do resultado acima, temos:

$$I_1 \leq C(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-1/2}r_1^{3/2})\|u_0\|_{L^1}. \tag{3.51}$$

Da mesma forma obtemos:

$$I_3 \leq C(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-1/2}r_2^{3/2})\|u_0\|_{L^1} \tag{3.52}$$

$$I_5 \leq C(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-1/2}r_1^{3/2})\|v_0\|_{L^1} \tag{3.53}$$

$$I_7 \leq C(t^{-\eta} + t^{\frac{\eta-1}{2}} + t^{-1/2}r_2^{3/2})\|v_0\|_{L^1}. \tag{3.54}$$

Por (3.45), (3.46), (3.47), (3.49), (3.51), (3.52), (3.53) e (3.54) podemos concluir que

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\leq C(t^{-\eta}+t^{\frac{\eta-1}{2}}+t^{-1/2}r_1^{3/2})(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1})\\ &+ C(t^{-\eta}+t^{\frac{\eta-1}{2}}+t^{-1/2}r_2^{3/2}(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1})\\ &+ C(1+r_1)^{-7/2}(\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4})+C(1+r_2)^{-7/2}(\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}).\end{aligned}$$

Tomando $r_1 = t^{1/10}$ e $\eta=\frac{1}{3}$, vem

$$C(t^{-\eta}+t^{\frac{\eta-1}{2}}+t^{-1/2}r_1^{3/2})) \leq Ct^{1/3} \text{ e é válido para } t \geq T_1.$$

Ainda se $r_2 = t^{1/10}$ e $\eta=\frac{1}{3}$, tem-se

$$C(t^{-\eta}+t^{\frac{\eta-1}{2}}+t^{-1/2}r_2^{3/2})) \leq Ct^{1/3} \text{ e é válido para } t \geq T_2.$$

Seja $T_0=\max\{T_1,T_2\}$. Então

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &= \sup_{-\infty<x<\infty} ess|u(x,t)| \leq C(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_o\|_{H^4}\\ &+ \|v_0\|_{H^4})t^{\frac{-1}{3}} \quad \text{para todo } t \geq T_0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Usando (3.43) podemos provar que:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_o\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}) \quad \text{para todo } t \geq T_0. \tag{3.56}$$

De (3.55) e (3.56), temos:

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_o\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4})(1+t)^{\frac{-1}{3}}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{3.57}$$

O que conclui a estimativa (1) do teorema 3.4.

De modo análogo podemos provar a estimativa (2).

Os próximos lemas são de grande importância para a obtenção da taxa de decaimento do sistema não-linear (3.1).

Lema 3.5 (W. Strauss). *Seja m(t) uma função real contínua, não negativa e tal que, existem constantes positivas* α_0, α_1 *e* β_1 *de modo que:*

$$m(t) \leq \alpha_0 + \alpha_1 \cdot m^{\beta_1}(t)$$

para algum t no intervalo contendo t=0, com $\beta_1 > 0$.

$$Se\ m(0) \leq \alpha_0\ e\ \alpha_0 \alpha_1^{(\beta_1-1)^{-1}} \leq (1-\beta_1^{-1})\beta_1^{-(\beta_1-1)^{-1}}$$

então, no mesmo intervalo, m(t) é limitada e $m(t) < \alpha_0(1-\beta_1^{-1})$.

Demonstração : Ver [24]

Lema 3.6. *Sejam* α_0, α_1, $\beta_1 \geq 0$ *satisfazendo* $\alpha_0 + \alpha_1 - \beta_1 \geq 1$, $\alpha_0 \geq \beta_1$ *ou* $\alpha_1 \geq \beta_1$ *se* $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1$ *se* $\alpha_0 = 1$.

Então

$$\sup_{0 \leq t < +\infty} \int_0^t (1+t)^{\beta_1}(1+t-s)^{-\alpha_0}(1+s)^{-\alpha_1} ds < +\infty.$$

Demonstração : Ver[24]

A seguir vamos obter a taxa de decaimento do problema não-linear (3.1).

Teorema 3.5:*Seja* $(u_0, v_0) \in H^5(\Re) \cap W^{1,1}(\Re) \times H^5(\Re) \cap W^{1,1}(\Re)$ *e p inteiro,* $p > 4$, a_1, a_2, a_3, a_4, *números reais com* $a_2 > 0$, $0 < a_1 < 1$ *e* $a_3 = a_4$. *Seja* (u, v) *o par de soluções globais do problema (3.1) então:*

$$1)\ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}$$

$$2)\ \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}\ \ \forall\ t\ \textit{suficientemente grande},$$

desde que $\|u_0\|_{L_1} + \|u_0'\|_{L_1} + \|v_0\|_{L_1} + \|v_0'\|_{L_1} + \|u_0\|_{H_5} + \|v_0\|_{H_5}$ *seja suficientemente pequeno, onde C é uma constante positiva independente de x e t.*

Demonstração: Sejam $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ soluções globais de (3.1), dados por:

$$u(x,t) \ = \ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t,s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) - \frac{a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) - \frac{a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)] \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) + \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)] \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) \\
&+ \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)]dyds\} \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{ \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_0}(y)dy \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_0}(y)dy \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) - \frac{a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)] \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) - \frac{a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)] \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) + \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)] \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) \\
&+ \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s)]dyds\} \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

onde

$$F_1(x,t) = a_3v^pv_x + u^pu_x + a_4(u^pv)_x$$

$$F_2(x,t) = a_3u^pu_x + v^pv_x + a_4(uv^p)_x.$$

Tem-se do lema 3.2, da seção 3 que:

$$\frac{1+y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) = \widehat{k_{11} * F_1}(x,s);$$

$$\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) = \widehat{k_{12} * F_2}(x,s);$$

$$\frac{1+y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4}\hat{F}_2(y,s) = \widehat{k_{22} * F_2}(x,s) \quad \text{e}$$

$$\frac{-a_1y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4}\hat{F}_1(y,s) = \widehat{k_{21} * F_1}(x,s).$$

Claramente $F_1(\cdot, t) \in L^2(\Re)$, pois usando a imersão de $H^1(\Re) \hookrightarrow L^\infty(\Re)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x,t)|^2 dx &\leq C\int_{-\infty}^{\infty}(|v^p v_x|^2 + |u^p u_x|^2 + |u^{p-1}u_x v|^2 + |u^p v_x|^2)dx \\
&\leq [\|v\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_x\|_{L^2}^2 \\
&+ \|u\|_{L^\infty}^{2p-2}\|u_x\|_{L^2}^2\|v\|_{L^\infty}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2].
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x,t)|^2 dx < +\infty.$$

Analogamente mostra-se que $F_2(\cdot, t) \in L^2(\Re)$.

Definimos para cada $t \geq 0$ a função m dada por:

$$\begin{aligned}
m(t) &= \sup_{0\leq s\leq t}\{(\|u(s)\|_{L^\infty} + \|u_x(s)\|_{L^\infty} + \|v(s)\|_{L^\infty}\|v_x(s)\|_{L^\infty})(1+t)^{1/3} \\
&+ \|u(s)\|_{H^4} + \|v(s)\|_{H^4}\}.
\end{aligned}$$

Mostremos que m é limitada, isto é, existe uma constante C, positiva, tal que

$$m(t) \leq (\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0'\|_{L^1} + \|v_0'\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5}) + Cm^{p+1}(t). \quad (3.60)$$

De fato

Pelo teorema 3.4 em (3.58) segue que

$$
\begin{aligned}
| \quad u(x,t)| &\leq C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4})(1+t)^{-1/3} \\
+ \quad C &\int_0^t [\sum_{i,j=1}^{2} \|k_{ij} * F_j\|_{L^1}] + \sum_{i,j=1}^{2} \|k_{ij} * F_j\|_{H^4})(1+t-s)^{-1/3} ds. \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Tem-se:

$$\|k_{11} * F_1\|_{L^1} \leq \|k_{11}\|_{L^1} \|a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 p u^{p-1} u_x v + a_4 u^p v_x\|_{L'}.$$

Usando a imersão de Sobolev de $\mathrm{H}^1(\Re) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Re)$, temos

$$
\begin{aligned}
\|k_{11} * F_1\|_{L^1} &\leq \|k_{11}\|_{L^1} [|a_3| \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^2} \|u_x\|_{L^2} \\
&+ \quad |a_4| p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |a_4| \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2}]
\end{aligned}
$$

como

$$\|v\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{H^1}^2 \leq \|v\|_{H^4}^2 \quad \text{e}$$

$\|u_x\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^4}$, podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
\|k_{11} \quad * \quad F_1\|_{L^1} &\leq \|k_{11}\|_{L^1} [|a_3| \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4}^2 \\
&+ \quad a_4 p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4} \|v\|_{H^4} + |a_4| \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4} \|v\|_{H^4}]. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

Analogamente:

$$
\begin{aligned}
\|k_{12} \quad * \quad F_2\|_{L^1} &\leq \|k_{12}\|_{L^1} [|a_3| \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{H^4}^2 \\
&+ \quad a_4 p \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{H^4} \|u\|_{H^4} + |a_4| \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{H^4} \|u\|_{H^4}]. \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|k_{21} \quad * \quad F_1\|_{L^1} &\leq \|k_{21}\|_{L^1} [|a_3| \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4}^2 \\
&+ \quad a_4 p \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4} \|v\|_{H^4} + |a_4| \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^4} \|v\|_{H^4}]. \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\|k_{22} \quad * \quad F_2\|_{L^1} &\leq \|k_{22}\|_{L^1}[|a_3|\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^4}^2 \\ &+ \quad a_4 p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^4}\|u\|_{H^4} + |a_4|\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^4}\|u\|_{H^4}]. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Por outro lado

$$\|k_{11} * F_1\|_{H^4}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(1+y^2)^4|\widehat{k_{11} * F_1}|^2 dy \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned}\|k_{11} * F_1\|_{H^4}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(1+y^2)^4\frac{(1+y^2)^2}{[(1+y^2)^2 - a_1^2y^4]^2}|\hat{F}_1(y)|^2 \\ &\leq \sup_{y\in\Re}\frac{(1+y^2)^3}{[(1+y^2)^2 - a_1^2y^4]^2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+y^2)^3|\hat{F}_1(y)|^2 dy.\end{aligned}$$

Como $|a_1| < 1$

$$\frac{(1+y^2)^3}{[(1+y^2)^2 - a_1^2y^4]^2} \leq \frac{1}{1+y^2} < 1 \quad \forall \in \Re.$$

Logo

$$\|k_{11} * F_1\|_{H^4} \leq \|F_1\|_{H^3}.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\|k_{12} * F_2\|_{H^4} \leq \|F_2\|_{H^3}; \|k_{21} * F_1\|_{H^4} \leq \|F_1\|_{H^3} \qquad \text{e}$$
$$\|k_{22} * F_2\|_{H^4} \leq \|F_2\|_{H^3}$$

ou seja

$$\|k_{ij} * F_j\|_{H^4} \leq \|F_j\|_{H^3} \quad \text{para i, j = 1,2.} \tag{3.66}$$

Usando a definição de F_1, obtemos

$$\begin{aligned}\|F_1\|_{H^3} &\leq |a_3|\|v^p v_x\|_{H^3} + \|u^p u_x\|_{H^3} \\ &+ |a_4|p\|u^{p-1}v_x v\|_{H^3} + |a_4|\|u^p v_x\|_{H^3}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Usando a imersão de $H^m(\Re) \hookrightarrow L^\infty(\Re)$, $m \geq 1$ obtemos para cada termo de (3.67)

$$\|v^p v_x\|_{H^3} = [\|v^p v_x\|_{L^2}^2 + \|(v^p v_x)_x\|_{L^2}^2 + \|(v^p v_x)_{xx}\|_{L^2}^2 + \|(v^p v_x)_{xxx}\|_{L^2}^2].$$

Daí

$$\begin{aligned}
\|v^p v_x\|_{H^3} &= C[\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^{p-2}\|v_x\|_{L^\infty}\|v_x\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_{xxx}\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}^{p-3}\|v_x\|_{L^\infty}^2\|v_x\|_{L^2}^2 \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^{p-2}\|v_x\|_{L^\infty}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_{xx}\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xxx}\|_{L^2}].
\end{aligned}$$

Da definição de m, temos:

$\|v\|_{L^\infty} \leq m(t)(1+s)^{-1/3}$

$\|v_x\|_{L^\infty} \leq m(t)(1+s)^{-1/3}$ e

$\|v\|_{H^4} \leq m(t)$.

Logo

$$\|v^p v_x\|_{H^3} \leq C[m^{p+1}(t)(1+s)^{\frac{1-p}{3}}]. \tag{3.68}$$

De modo análogo

$$\|k_{ij} * F_j\|_{L^1} \leq \|k_{ij}\|_{L^1} m^{p+1}(t)(1+s)^{\frac{1-p}{3}}, \text{ para i,j=1,2} \tag{3.69}$$

e

$$\|k_{ij} * F_j\|_{H^4} \leq \|F_j\|_{H^3} \leq C m^{p+1}(t)(1+s)^{\frac{1-p}{3}}, \text{ para i,j=1,2.} \tag{3.70}$$

Substituindo (3.69) e (3.70) em (3.61), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4})(1+t)^{-1/3} && (3.71)\\
&+ C m^{p+1}(t)\int_{-\infty}^{\infty}(1+t-s)^{-1/3}(1+s)^{\frac{1-p}{3}}ds. && (3.72)
\end{aligned}$$

Agora, tomando no lema 3.6, $\alpha_0 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = \frac{p-1}{3}$, segue que para p>4:

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq [C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) \\ &+ Cm^{p+1}(t)](1+t)^{-1/3}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}(1+t)^{1/3}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) \\ &+ Cm^{p+1}(t).\end{aligned} \tag{3.73}$$

De maneira análoga, por (3.67):

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^4} \leq C(\|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) + C\int_0^t (\sum_{i,j=1}^{2} \|k_{ij} * F_j\|_{H^4})ds.$$

Usando (3.70) na desigualdade acima:

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^4} \leq C(\|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) + Cm^{p+1}\int_0^t (1+s)^{\frac{1-p}{3}}ds.$$

Logo

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^4} \leq C(\|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) + Cm^{p+1}. \tag{3.74}$$

Agora, diferenciando a cada equação de (3.1) em relação a x e tomando $u_x = u_1$ e $v_x = v_1$, temos

$$\begin{cases} u_{1t} - u_{1xxt} - a_1 v_{1xxt} + a_2 u_{1x} + (F_1)_x = 0 \\ v_{1t} - v_{1xxt} - a_1 u_{1xxt} + a_2 v_{1x} + (F_2)_x = 0 \\ u_1(x,0) = u_{01}(x) \;\;;\;\; v_1(x,0) = v_{01}(x). \end{cases} \tag{3.75}$$

Usando a transformada de Fourier (no espaço) podemos obter a forma integral da solução de (3.75) como

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_{01}}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_{01}}(y)dy \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_{01}}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_{01}}(y)dy \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{11} * (F_1)_x} + \widehat{k_{12} * (F_2)_x}]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[k_{11}\hat{*}(F_1)_x + \widehat{k_{12} * (F_2)_x}]dyds \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{21} * (F_1)_x} + \widehat{k_{22} * (F_2)_x}]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{21} * (F_1)_x} + \widehat{k_{22} * (F_2)_x}]dyds\} \qquad (3.76)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{ \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{u_{01}}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{u_{01}}(y)dy \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(y)+\alpha y)}\hat{v_{01}}(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(y)+\alpha y)}\hat{v_{01}}(y)dy \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{11} * (F_1)_x} + \widehat{k_{12} * (F_2)_x}]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{11} * (F_1)_x} + \widehat{k_{12} * (F_2)_x}]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_1(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{21} * (F_1)_x} + \widehat{k_{22} * (F_2)_x}]dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)(\lambda_2(y)+\alpha y)}[\widehat{k_{21} * (F_1)_x} + \widehat{k_{22} * (F_2)_x}]dyds\} \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

com $\alpha = \frac{x}{t}$,

$$(F_1)_x = [a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4(u^p v)_x]_x$$
$$(F_2)_x = [a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4(uv^p)_x]_x.$$

Afirmamos que $(F_i(\cdot, t))_x \in L^2(\Re)$, i=1,2 para cada $t \geq 0$ e

$$\|k_{ij} * (F_j)_x\|_{H^4} \leq C\|(F_j)_x\|_{H^3}, \quad \text{i, j} = 1,2 \text{ , pois}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(F_1(x,t))_x|^2 dx \;&\leq\; C\int_{-\infty}^{\infty} (|v^{p-1}(v_x)^2|^2 + |v^p v_{xx}|^2 + |u^{p-1}(u_x)^2|^2 + |u^p u_{xx}|^2 \\
&+\; |u^{p-2}u_x^2 v|^2 + |u^p u_{xx} v|^2 + |u^{p-1}u_x v_x|^2 + |u^p u_{xx}|^2)dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H^1(\Re)\hookrightarrow L^\infty(\Re)$, $m\geq 2$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|(F_1(x,t))_x|^2dx &\leq C[\|v\|_{L^\infty}^{2p-2}\|v_x\|_{L^2}^4+\|v\|_\infty^{2p}\|v_{xx}\|_{L^2}^2+\|u\|_\infty^{2p-2}\|u_x\|_{L^2}^4 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_{xx}\|_{L^2}^2+\|u\|_\infty^{2p-4}\|u_x\|_{L^2}^4\|v\|_{L^2}^2 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_{xx}\|_{L^2}^2\|v\|_{L^2}^2+\|u\|_\infty^{2p-2}\|u_x\|_{L^2}^2\|v_x\|_{L^2}^2 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{2p}\|v_{xx}\|_{L^2}^2]<+\infty.\end{aligned}$$

Analogamente, $(F_2(\cdot,t))_x\in L^2(\Re)$.

Pelo lema 3.2 da seção 3.2 deste capítulo temos

$$\begin{aligned}\|k_{ij}*F_j\|_{H^4} &\leq C_1\|F_j\|_{H^4}\leq C_1[\|F_j\|_{L^2}\|(F_j)_x\|_{L^2}+\|(F_j)_{xx}\|_{L^2} \\ &+ \|(F_j)_{xxx}\|_{L^2}+\|(F_j)_{xxxx}\|_{L^2}].\end{aligned}$$

Logo existe uma constante positiva C, tal que:

$$\|k_{ij}*F_j\|_{H^4} \leq C\|F_j\|_{H^3} \quad , \text{i,j} = 1,\ 2.$$

Pelo teorema (3.4), (3.76) e usando a mesma sequência de idéias usadas anteriormente com cálculos similares, nós obtemos

$$\begin{aligned}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq C(\|u_0'\|_{L^1}+\|v_0'\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^5}+\|v_0\|_{H^5})(1+t)^{-1/3} \\ &+ Cm^{p+1}(t)\int_0^t(1+t-s)^{-1/3}(1+s)^{\frac{1-p}{3}}ds. \end{aligned}\tag{3.78}$$

Pelo lema (3.6) com $\alpha_0=\frac{1}{3}$, $\alpha_1=\frac{1-p}{3}$, $\beta_1=\frac{1}{3}$, segue que para $p>4$

$$(1+t)^{-1/3}\int_0^t(1+t)^{1/3}(1+(t-s))^{-1/3}(1+s)^{\frac{1-p}{3}}ds\leq C(1+t)^{-1/3}.$$

Substituindo em (3.78)

$$\begin{aligned}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq [C(\|u_0'\|_{L^1}+\|v_0'\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^5}+\|v_0\|_{H^5}) \\ &+ Cm^{p+1}(t)](1+t)^{-1/3}. \end{aligned}\tag{3.79}$$

Usando novamente o teorema 3.4, (3.59) e (3.77) prova-se de maneira análoga que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq [C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) \\ &+ Cm^{p+1}(t)](1+t)^{-1/3}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} \|v_x(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq [C(\|u_0'\|_{L^1} + \|v_0'\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5}) \\ &+ Cm^{p+1}(t)](1+t)^{-1/3}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

e

$$\|v(\cdot,t)\|_{H^4} \leq C(\|v_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) + Cm^{p+1}(t). \tag{3.82}$$

Usando (3.73), (3.74), (3.79), (3.80), (3.81), (3.82), e pela definição de m, tem-se (3.60), isto é, m é limitada.

Finalmente, verificando a hipótese do lema (3.5), da definição de m:

$$m(0) = \|u_0\|_{L^\infty} + \|v_0\|_{L^\infty} + \|u_{01}\|_{L^\infty} + \|v_{01}\|_{L^\infty} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}$$

Pela imersão de $H^m(\Re) \hookrightarrow L^\infty(\Re)$, vem

$$\begin{aligned} m(0) &\leq 3(\|u_0\|_{H^4} + \|u_0\|_{H^4}) \\ &\leq 3(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0'\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|v_0'\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5}). \end{aligned}$$

Portanto, se

$\alpha_0 \leq 3(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0'\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|v_0'\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5})$, α_1= C, β_1= p+1 e

$$\delta = \frac{p}{C^{\frac{1}{p+1}}(p+1)^{\frac{p+1}{p}}}$$

então todas as hipóteses do lema de Strauss ficam verificadas e portanto o resultado do teorema segue.

Capítulo 4

Comportamento assintótico da solução de um sistema não linear dissipativo do tipo Benjamin-Bona-Mahony

4.1 Introdução

Consideremos o sistema não-linear de equações da forma:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x - \alpha u_{xx} = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (u v^p)_x - \alpha v_{xx} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

onde a_1, a_3, a_4 são constantes reais, $|a_1| < 1$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ funções reais com variáveis reais x e t, $-\infty < x < \infty$ e $t \geq 0$ e p é um inteiro maior ou igual a um.

O sistema (4.1) é um sistema acoplado, através de efeitos dispersivos e não-lineares de duas equações de tipo Benjamin-Bona-Mahony, onde efeitos dissipativos são considerados.

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de Cauchy associado a (4.1). Provamos a existência e unicidade da solução global e dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais. Na segunda parte, estudaremos o comportamento assintótico das soluções quando $t \to \infty$.

4.2 Existência da solução local

Consideremos o problema de Cauchy associado a (4.1). O problema pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} AU_t + F(U)_x + DU_{xx} = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e A, D e F são matrizes dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} & I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} a_3\frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4u^pv \\ a_3\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4uv^p \end{pmatrix}.$$

Consideremos o problema linear associado a (4.2):

$$\begin{cases} AU_t + DU_{xx} = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \quad , t\geq 0 . \end{cases} \tag{4.3}$$

Vamos, em primeiro lugar, estudar certas propriedades do semigrupo associado a (4.3).

Seja $\mathcal{A}_\alpha$ o operador $\mathcal{A}_\alpha$: D($\mathcal{A}_\alpha$) $\subset X \to X$, $\mathcal{A}_\alpha$=(-A^{-1}D$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$) onde X=$\mathcal{H}^m(\Re)$, m$\geq$2 e $D(A_\alpha) = \{f \in H^2(\Re) talque (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\frac{\partial f^2}{\partial x^2} \in H^2(\Re)\}$.

Com esta notação tem-se de (4.3):

$$\begin{cases} AU_t = \mathcal{A}_\alpha U \\ U(x,0) = U_0(x) \quad , t\geq 0 . \end{cases} \tag{4.4}$$

Usando a transformada de Fourier obtemos que a solução de (4.4) é dada por:

$$\widehat{U}(y,t) = \widehat{U}_0(y)e^{-A^{-1}y^2Dt}$$

onde

$$A^{-1}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \\ \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} & \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2-a_1^2y^4} \end{pmatrix}.$$

Para $\alpha > 0$, y$\in \Re$ e $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$, m$\geq$2, definimos:

$$F_\alpha(t,y) = e^{-A^{-1}y^2Dt} \tag{4.5}$$

$$E_\alpha(t,y) = (F_\alpha(t,\cdot)\widehat{U}_0)^V. \tag{4.6}$$

Com esta notação , temos

Teorema 4.1._Seja_ $\alpha \in$ _(0, +∞). Então:_

_i)_ $E_\alpha(t) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}^m(\Re), \mathcal{H}^m(\Re))$, $\forall t > 0$ _e satisfaz_

$$\|E_\alpha(t)U_0\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}^m(\Re)} \quad \forall\ U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re). \tag{4.7}$$

ii) A aplicação $t \in (0, +\infty\ ) \to E_{\alpha(t)U_0}$ _é continua de_ $\Re^+ \to \mathcal{H}^m(\Re)$.

iii) A familia $E_\alpha(t)$: $\mathcal{H}^m(\Re) \to \mathcal{H}^m(\Re)$, t$\geq$0 _é um semigrupo de contrações ._

Demonstração:

i) Seja $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$, temos

$$E_\alpha(t,y) = (F_\alpha(t,\cdot)\widehat{U}_0)^V. \tag{4.8}$$

onde

$$e^{-A^{-1}y^2Dt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} & \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} \\ \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} & \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} \end{pmatrix},$$

com

$$\alpha_1 = \frac{-y^2(1+y^2)\alpha}{(1+y^2)^2 - a_1y^4} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{a_1y^4\alpha}{(1+y^2)^2 - a_1y^4}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(t)U_0\|^2_{\mathcal{H}^m} &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\widehat{u}_0(y) \\ &+ (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\widehat{v}_0(y)|^2dy \\ &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\widehat{u}_0(y) \\ &+ (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\widehat{v}_0(y)|^2dy \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
\|E_\alpha(t)U_0\|^2_{\mathcal{H}^m} &\leq \sup_t \sup_y (e^{2(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{2(\alpha_1-\alpha_2)}t) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\
&+ \sup_t \sup_y (e^{2(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{2(\alpha_1-\alpha_2)t}) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |\widehat{v}_0(y)|^2 dy.
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\|E_\alpha(t)U_0\|^2_{\mathcal{H}^m} \leq (\|\widehat{u}_0\|_{H^m} + \|\widehat{v}_0\|_{H^m}) \text{ e (i) segue.}
$$

ii) Vamos analisar a continuidade em $t=t_0$ à direita e à esquerda. Para todo $t>t_0$ temos de (4.9):

$$
\begin{aligned}
\| & E_\alpha(t)U_0 - E_\alpha(t_0)U_0\|^2_{\mathcal{H}^m} \\
\leq & \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}) - (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\
+ & \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}) - (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|\widehat{v}_0(y)|^2 dy \\
+ & \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}) - (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\
+ & \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}) - (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|\widehat{v}_0(y)|^2 dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\| & E_\alpha(t)U_0 - E_\alpha(t_0)U_O\|^2_{\mathcal{H}^m} \\
\leq & \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0})|^2 |\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|^2 |\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_0})|^2 |\widehat{v}_0(y)|^2 dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|^2)^m |(e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t_0})|^2 |\widehat{v}_0(y)|^2 dy
\end{aligned}
$$

ou

$$
\| \quad E_\alpha(t)U_0 - E_\alpha(t_0)U_0\|^2_{\mathcal{H}^m}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq & \int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}|^2||(e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{u}_0(y)|^2dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}|^2||(e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{u}_0(y)|^2dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}|^2||(e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{v}_0(y)|^2dy \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^m|(e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}|^2||(e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{v}_0(y)|^2dy \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

$$(4.11)$$

Os termos

$$|e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t_0-t)}-1| \to 0 \text{ e } |e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t_0-t)}-1| \to 0 \text{ quando t} \to \text{t}_0^+ .$$

Logo tem-se:

$$(1+|y|^2)^m|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)t}|^2|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{u}_0(y)|^2 \to 0 \text{ quando t} \to \text{t}_0^+$$

e

$$(1+|y|^2)^m|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)t}|^2|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{v}_0(y)|^2 \to 0 \text{ quando t} \to \text{t}_0^+ .$$

Ainda

$$|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)t}| \leq 1.$$

Portanto cada um dos integrandos de (4.11) fica majorado por:

$$(1 + |y|^2)^m|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)t}|^2|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{u}_0(y)|^2 \leq 2(1+|y|^2)^m|\widehat{u}_0(y)|^2$$

$$(1 + |y|^2)^m|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)t}|^2|e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)(t_0-t)}-1|^2|\widehat{v}_0(y)|^2 \leq 2(1+|y|^2)^m|\widehat{v}_0(y)|^2$$

e estas funções são integráveis. Logo do teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que cada uma das integrais de (4.11) tende a zero quando $t \to t_0^+$.

Assim,

$$\|E_\alpha(t)U_0 - E_\alpha(t_0)U_0\|_{\mathcal{H}^m} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow t_0^+.$$

Analogamente prova-se a continuidade à esquerda.

iii) Visto que $|e^{(\alpha_1 \pm \alpha_2)t}| \leq 1$, $\forall$ t $\in [0, +\infty)$, y $\in \Re$ temos de (4.7) que $E_\alpha(t)$ é uma contração em $\mathcal{H}^m(\Re)$, $\forall\ \alpha > 0$ e $t \geq 0$.

Ainda de (4.8) segue que:

a) $E_\alpha(0) = I$ pois $E_\alpha(0)U_0(x) = (e^{-A^{-1}y^2 D \cdot 0}\widehat{U}_0)^V = U_0(x)$

b) $E_\alpha(t+s) = E_\alpha(t) \cdot E_\alpha(s)$, pois:

$E_\alpha(t)U_0 = (F_\alpha(t,\cdot)\widehat{U}_0)^V = F_\alpha(t,\cdot)^V * U_0$. Logo:

$$\begin{aligned}
E_\alpha(t) \cdot E_\alpha(s)U_0 &= F_\alpha(t,\cdot)^V * E_\alpha(s)U_0 \\
&= F_\alpha(t,\cdot)^V * (F_\alpha(s,\cdot)^V * U_0) \\
&= (F_\alpha(t,\cdot)^V F_\alpha(s,\cdot))^V * U_0 \\
&= F_\alpha(t+s,\cdot)^V * U_0 \\
&= (F_\alpha(t+s,\cdot)\widehat{U}_0)^V = E_\alpha(t+s)U_0
\end{aligned}$$

c) Além disso, $E_\alpha(t)$ é fortemente contínuo, pois por (ii) tem-se

$$\|E_\alpha(t)U_0 - E_\alpha(t_0)U_0\|_{\mathcal{H}^m} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0.$$

Tomando t_0=0, vem

$$\lim_{t\rightarrow 0} \|(E_\alpha(t) - I)U_0\|_{\mathcal{H}^m} = 0.$$

De a), b) e c) concluímos que E_α(t) é um semigrupo de contrações.

Corolário 4.1: *Seja $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re) \subset D(\mathcal{A}_\alpha)$, $m \geq 2$. Então $U(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) \in C([0, +\infty[, \mathcal{H}^m(\Re)) \cap C^1([0, +\infty[, L^2(\Re) \times L^2(\Re))$ e é a única solução do problema de valor inicial (4.3).*

Demonstração : Segue do teorema de Hille-Yosida (ver Brézis [16]).

Consideremos o problema não-linear (4.2) e vamos provar que a existência e unicidade de solução local em $\mathcal{H}^m(\Re)$.

Seja $U(x,t)$ a solução do problema linear (4.3) então, formalmente de (4.2), temos:

$$U(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds. \tag{4.12}$$

Vamos provar que a equação integral (4.12) possui uma única solução numa classe conveniente de funções.

Teorema 4.2: *Seja $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$, $m \geq 2$. Então existe T_0 e uma única função $U \in C([0,T_0], \mathcal{H}^m(\Re))$ solução da equação integral (4.12).*

Demonstração : Fixado $R>0$, definimos o conjunto não-vazio

$$X_R(T) = \{V \in C([0,T_0], \mathcal{H}^m(\Re)) \ ; \ \sup_{[0,T]} \|V(t) - E_\alpha(t)U_0\|_{\mathcal{H}^m} \leq R, \\ V(x,0) = U_0(x)\}$$

onde $T>0$ será conviniente escolhido e que torna-se um espaço métrico completo quando munido da métrica induzida por

$$\|V\|_{X_R(T)} = \sup_{[0,T]} \|V(t)\|_{\mathcal{H}^m}.$$

Vamos definir para cada $V \in X_R(T)$ a função

$$P : X_R(T) \to C([0,T], \mathcal{H}^m(\Re)) \text{ como:}$$

$$(PV)(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s))ds, \tag{4.13}$$
$$\forall\ t \in [0,T].$$

Vamos mostrar que a função P está bem definida. A seguir, mostraremos que $P: X_R(T) \to X_R(T)$ e P é uma contração (se T é escolhido suficientemente pequeno).

Seja

$$G(V(x,s)) = E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s)) \text{ com } V \in X_R(T).$$

Tem-se que G(V(x,s)) $\in \mathcal{H}^m(\Re)$ V $\in$ X_R(T). Com efeito:

De (4.7) tem-se para todo $s \in$ [0, t].

$$\|G(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m}.$$

Pelos lemas (3.1) e (3.2) do capítulo 3, temos:

$$\begin{aligned} \|G(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m} &\leq \|K * \frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m} \\ &\leq C\|F(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m} \quad \forall \text{ s} \in [0,\text{t}]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, para cada s $\in$ [0,t], temos que G (V($\cdot$, s)) $\in \mathcal{H}^m(\Re)$ se V $\in$ X_R(T), já que:

$$\begin{aligned} \|F(V(\cdot,s))\|^2_{\mathcal{H}^m} &\leq \frac{a_3}{p+1}(\|u\|^{2p+2}_{H^m} + \|v\|^{2p+2}_{H^m}) \\ &+ \frac{1}{p+1}((\|u\|^{2p+2}_{H^m} + \|v\|^{2p+2}_{H^m}) \\ &+ a_4((\|u\|^{2p}_{H^m}\|v\|^{2p}_{H^m} + \|u\|^{2p}_{H^m} + \|v\|^{2p}_{H^m}), \end{aligned}$$

pois $H^m(\Re)$, m$\geq$1 é uma álgebra de Banach.

Portanto

$$F(V(\cdot,s)) \in \mathcal{H}^m(\Re).$$

Além disso, temos que se V $\in$ X_R(T) então G(v($\cdot$, s)) é contínua em s com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$.

De fato, para δ >0 tal que δ+s $\in$ [0,t] e V $\in$ X_R(T), segue que:

$$\begin{aligned} \|G(V(s+\delta)) &- G(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} = \|E_\alpha(t-(s+\delta))A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta)) \\ &- E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta))\|_{\mathcal{H}^m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|G(V(s+\delta)) - G(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} &= \|E_\alpha(t-s)[E_\alpha(\delta)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta)) \\ &- A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s))]\|_{\mathcal{H}^m}. \end{aligned}$$

De (4.7) segue que

$$\begin{aligned}\|G(V(s+\delta))-G(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} &\leq \|E_\alpha(\delta)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta)) \\ &- A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta))]\|_{\mathcal{H}^m}.\end{aligned}$$

O que resulta

$$\begin{aligned}\|G(V(s+\delta))-G(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} &\leq \|(E_\alpha(\delta)-I)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta))\|_{\mathcal{H}^m} \\ &+ \|A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta))A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x))\|_{\mathcal{H}^m}. \quad (4.15)\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o lado direito de (4.15) tende a zero quando $\delta \to 0^+$. Pela propriedades de semigrupo, temos

$$\|(E_\alpha(\delta)-I)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s+\delta))\|_{\mathcal{H}^m} \to 0 \text{ quando } \delta \to 0^+.$$

Pelo lema 3.2 do capítulo 3, obtemos

$$\|A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[F(V(x,s+\delta))-F(V(x,s))]\|_{\mathcal{H}^m} \leq CF(V(x,s+\delta))-F(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m}. \quad (4.16)$$

Vamos mostrar que o 2º membro de (4.16) tende a zero quando $\delta \to 0^+$.

$$\begin{aligned}\|F(V(s+\delta)) &- F(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq \|\frac{a_3}{p+1}(v^{p+1}(s+\delta)-v^{p+1}(s)) \\ &+ \frac{1}{p+1}(u^{p+1}(s+\delta)-u^{p+1}(s))+a_4(u^p(s+\delta)v(s+\delta)-u^p(s)v(s))\|_{H^m} \\ &+ \|\frac{a_3}{p+1}(u^{p+1}(s+\delta)-u^{p+1}(s))+\frac{1}{p+1}(v^{p+1}(s+\delta)-v^{p+1}(s)) \\ &+ a_4(v^p(s+\delta)u(s+\delta)-v^p(s)u(s))\|_{H^m}.\end{aligned}$$

Com os mesmos argumentos feitos no teorema 3.1 do capítulo 3, temos

$$\|F(V(s+\delta))-F(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} \leq C\|V(s+\delta)-V(s)\|_{\mathcal{H}^m}.$$

Como V $\in X_R(\mathrm{T})$ temos

$$\|F(V(s+\delta))-F(V(s))\|_{\mathcal{H}^m} \to 0 \text{ quando } \delta \to 0^+.$$

Assim

$$\lim_{\delta\to 0^+} \quad \|G(V(s+\delta)) - G(v(s))\|_{\mathcal{H}^m} = 0.$$

Ou seja, G(V(·, s)) é contínua à direita. A continuidade à esquerda segue de forma similar.

Tem-se que PV $\in$ C([0,T], $\mathcal{H}^m(\Re)$), pois:

$$(PV)(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - \int_0^t G(V(x,v))ds \quad \text{e assim,}$$

(PV)(t) é contínua como composta de funções contínua.

Vamos mostrar que existe $T_0 > 0$ tal que $P : X_R(T_0) \to X_R(T_0)$ e que P é uma contração.

Tem-se

$$\|(PV)(x,t) - E_\alpha(t)U_0(x)\|_{\mathcal{H}^m} = \| \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s)ds)\|_{\mathcal{H}^m}.$$

De (4.7) e do lema 3.2 do capítulo 3 segue que:

$$\begin{aligned}
\|(PV)(x,t) - E_\alpha(t)U_0(x)\|_{\mathcal{H}^m} &\leq \int_0^t \|A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(V(x,s)ds)\|_{\mathcal{H}^m}ds \\
&\leq C\int_0^t \|F(V(x,s))\|_{\mathcal{H}^m}ds.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|F(V(x,s)\|^2_{\mathcal{H}^m} &\leq \frac{a_3^2+1}{(p+1)^2}(\|u\|^{2p+2}_{H^m} + \|v\|^{2p+2}_{H^m}) + a_4^2\|u\|^2_{H^m}\|v\|^2_{H^m}(\|u\|^{2p-2}_{H^m} + \|v\|^{2p-2}_{H^m}) \\
&\leq \frac{a_3^2+1}{(p+1)^2}(\|u\|^2_{H^m} + \|v\|^2_{H^m})^{p+1} + a_4^2\|u\|^2_{H^m}\|v\|^2_{H^m}(\|u\|^2_{H^m} + \|v\|^2_{H^m})^{p-1}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, $a, b \in \Re$, $a, b > 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\|F(V(x,s)\|^2_{\mathcal{H}^m} &\leq \frac{a_3^2+1}{(p+1)^2}(\|u\|^2_{H^m} + \|v\|^2_{H^m})^{p+1} \\
&+ \frac{a_4^2}{2}(\|u\|^4_{H^m}\|v\|^4_{H^m})(\|u\|^2_{H^m} + \|v\|^2_{H^m})^{p-1}.
\end{aligned}$$

Logo existe uma constante C>0 tal que:

$$\|F(V(x,s)\|^2_{\mathcal{H}^m} \leq C(\|V(x,s)\|^2_{\mathcal{H}^m}) \quad \text{onde C=C}(a_3, a_4, \text{p}). \tag{4.17}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|PV(t) - E_\alpha(t)U_0\|_{\mathcal{H}^m} &\leq C\int_0^t \|V(x,s)\|_{\mathcal{H}^m} ds \\
&\leq C\sup_{0\leq t\leq T}\|V(x,s)\|_{\mathcal{H}^m}\cdot T
\end{aligned}$$

Mas

$$\|V\|_{X_R(T)} \leq R + \|E_\alpha(t)U_0\|_{\mathcal{H}^m} \leq R + \|U_0\|_{\mathcal{H}^m}.$$

Portanto

$$\|PV(t) - E_\alpha(t)U_0\|_{\mathcal{H}^m} \;\leq\; C_1 T \;\text{ onde }\; C_1 = C_1(R\|U_0\|_{\mathcal{H}^m}, p). \tag{4.18}$$

Se V e W $\in$ X_R(T) então para t $\in$ [0,T] temos:

$$\|PV(t) - PW(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \int_0^t \|E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[F(V(x,s)) - F(W(x,s))]_{\mathcal{H}^m} ds.$$

De (4.7), do lema 3.2 do capítulo 3 e de (4.17) segue que:

$$\begin{aligned}
\|PV(t) - PW(t)\|_{\mathcal{H}^m} &\leq \int_0^t \|V(x,s) - W(x,s)\|_{\mathcal{H}^m} ds \\
&\leq C \;\sup_{0\leq t\leq T}\; \|V(t) - W(t)\|_{\mathcal{H}^m}\cdot T \\
&\leq \|V(t) - W(t)\|_{X_R(T)}\cdot T.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|PV(t) - PW(t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq C\cdot T\|V(t) - W(t)\|_{X_R(T)}. \tag{4.19}$$

Tomando $T_0 <$ min $(\frac{1}{C_1}\|U_0\|_{\mathcal{H}^m}, \frac{1}{C})$ temos de (4.18) e (4.18) que P:X_R(T)$\to$$X_R$(T) e P é uma contração.

Do princípio da contração de Banach existe uma única função U $\in$ $X_R(T_0)$ ponto fixo de P, isto é, solução da equação integral (4.12).

Vamos mostrar da contração em C([0, T_0], $\mathcal{H}^m(\Re)$).

Lema 4.2: *Sejam U e V $\in$ C([0, T_0], $\mathcal{H}^m(\Re)$) soluções da equação integral (4.12) com U(x,0)=V(x,0)=$U_0(x)$. Então U$\equiv$ V, $\forall$ t $\in$ [0,T_0].*

Demonstração: Sejam U e V $\in C([0, T_0], \mathcal{H}(\Re))$ soluções da equação integral (4.12) então para t $\in [0, T_0]$ tem-se:

$$\|U(x,t) - V(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \int_0^t \|E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}[F(U(x,v)) - F(V(x,v))]\|_{\mathcal{H}^m} ds.$$

Do lema 3.2 do capítulo 3, de (4.7) e (4.17) temos:

$$\|U(x,t) - V(x,t)\|_{\mathcal{H}^m} \leq \int_0^t \|U(x,s) - V(x,s)\|_{\mathcal{H}^m} ds. \tag{4.20}$$

De (4.20) segue pela desigualdade de Gronwall que U≡V e, portanto a unicidade de solução.

Mostremos a seguir a existência de solução local para o problema de Cauchy (4.2).

Teorema 4.3: *Seja $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$. Então a função U definida pelo teorema 4.2 e é o único elemento de $C([0, T_0], \mathcal{H}^m(\Re))$ tal que*

$U_t \in C([0,T_0],\ L^2(\Re)\times\ L^2(\Re)$ e U satisfaz o problema de valor inicial (4.2).

Demonstração: Para mostrar a existência de solução local notemos que a parte (iii) do teorema 4.1 implica:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\alpha(t)U_0(x) = -\mathcal{A}_\alpha E_\alpha(t)U_0(x)\ ;\ \forall\ t \in \sqsubset 0, +\infty\ ), \tag{4.21}$$

pois $E_\alpha(t)$ é um semigrupo de contrações.

Vamos definir para $0 \leq t \leq T_0$.

$$V(t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \tag{4.22}$$

para $\varepsilon > 0$ tal que $t+\varepsilon \in [0, T_0]$ tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{V(t+\varepsilon) - V(t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} E_\alpha(t+\varepsilon-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \\ &+ \int_0^t (E_\alpha(t+\varepsilon-s) - E_\alpha(t-s))A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds.\end{aligned}$$

Usando as propriedades de semigrupo segue que

$$\begin{aligned}\frac{V(t+\varepsilon) - V(t)}{\varepsilon} &= \frac{E_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \\ &+ \frac{E_\alpha(\varepsilon) - I}{\varepsilon}\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Analisando o segundo membro de (4.23) temos pelo teorema 4.2, que o integrando do $1^{\underline{o}}$ termo é uma função contínua em s com valores em $\mathcal{H}^m(\Re)$ portanto, pelo teorema do valor médio para integrais, segue que:

$$\frac{E_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds = E_\alpha(\varepsilon)E_\alpha(t-t^*)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t^*))$$

com t* [t, t+ε].

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{V(t+\varepsilon)-V(t)}{\varepsilon} &= E_\alpha(\varepsilon)E_\alpha(t-t^*)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t^*))\\ &+ \frac{E_\alpha(\varepsilon)-I}{\varepsilon}\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \qquad (4.24)\end{aligned}$$

para quase todo x.

Tomando em (4.24) o limite quando $\varepsilon \to 0^+$ segue:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \quad \| & \frac{V(t+\varepsilon)-V(t)}{\varepsilon} - E_\alpha(\varepsilon)E_\alpha(t-t^*)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t^*))\\ - & \frac{E_\alpha(\varepsilon)-I}{\varepsilon}\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds\|_{\mathcal{H}^m} = 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(t+\varepsilon)-V(t)}{\varepsilon} &= A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t))\\ &- \mathcal{A}_\alpha\int_1^t E_\alpha(t-s)A^{-1}F(U(x,s))ds\end{aligned}$$

pois

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \quad \frac{E_\alpha(\varepsilon)-I}{\varepsilon} = \mathcal{A}_\alpha$$

portanto V é derivável à direita (forte em t) e tem-se,

$$\frac{\partial^+ V}{\partial t} = A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) - \mathcal{A}_\alpha\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}F(U(x,s))ds.$$

De modo análogo mostra-se que $\frac{\partial^- V}{\partial t}=\frac{\partial^+ V}{\partial t}$ e portanto V é derivável forte em t.

Portanto, para $0 \le t \le T_0$, temos

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A^{-1}F(U(x,s)) - \mathcal{A}_\alpha\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \qquad (4.25)$$

como por (4.12),

$$U(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - \int_1^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds$$

vem de (4.22) que:

$$U(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - V(x,t)$$

de (4.21)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\mathcal{A}_\alpha E_\alpha(t)U_0(x) - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Logo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\mathcal{A}_\alpha E_\alpha(t)U_0(x) - A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) + \mathcal{A}_\alpha\int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \quad (4.26)$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\mathcal{A}_\alpha[E_\alpha(t)U_0(x) - A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t))ds] - \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))$$

logo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -A^{-1}D\frac{\partial}{\partial x}U - A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) \quad (4.27)$$

assim

$$\begin{cases} AU_t + F(U)_x + DU_{xx} = 0 \\ U(x,0) = U_0(x). \end{cases}$$

Portanto, a função U definida pelo teorema 4.2 satisfaz o problema de valor inicial (4.2).

Além disso, (4.26) segue que $\frac{\partial U}{\partial t} \in$ C([0, T_0], $L^2(\Re) \times L^2(\Re)$). De fato, pelo teorema 4.2, temos:

$$G(U(x,t)) = A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) \in \mathrm{C}\ ([0,\ \mathrm{T}_0],\ \mathcal{H}^m(\Re)). \quad (4.28)$$

Do corolário 2.1 temos,

$$\mathcal{A}_\alpha E_\alpha(t)U_0(x) \ \in \mathrm{C}\ (0; +\infty],\ H^m(\Re) \times H^m(\Re)).$$

Da teoria de semigrupos segue que,

Se $A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) \in \mathcal{H}^m(\Re))$ para t $\in$ [0, $\mathrm{T_0}$], então

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds &= A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,t)) \\ &- E_\alpha(t)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U_0(x)).\end{aligned}$$

De (4.7) e (4.28) temos

$$\mathcal{A}_\alpha \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds \ \in \mathrm{C}\ ([0,\ \mathrm{T_0}],\ H^m(\Re) \times H^m(\Re)),\ \mathrm{m}\geq 2$$

logo segue a afirmação.

Unicidade: Consideremos V outra solução do problema de valor inicial(4.2) com V(x,0)=$\mathrm{U_0}(x)$ então V satisfaz a equação integral (4.12) e do lema 4.2 segue que U$\equiv$V.

4.3 Existência de solução global e dependência contínua:

Teorema 4.4: *Seja $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$. Então, para todo T> 0 fixado (porém arbritário), existe uma única função $U \in C([0,T],\mathcal{H}^m(\Re)) \cap C^1([0,T],\mathcal{H}^m(\Re))$ que é solução do problema de valor inicial (4.2), com $|a_1| < 1$ e $a_3 = a_4$ constantes reais.*

Demonstração: Multiplicando a 1º equação de (4.39) por u e a 2º equação por v, integrando em $\Re$, obtemos para todo t $\in$ [0,T$_0$].

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+u_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}uv_{xxt}dx + a_3\int_{-\infty}^{\infty}uv^pv_xdx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}(u^pv)_xudx \\ \qquad +\alpha\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+v_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}vu_{xxt}dx + a_3\int_{-\infty}^{\infty}vu^pv_xdx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}(uv^p)_xvdx \\ \qquad +\alpha\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2dx = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

somando as duas equações de (4.29) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} & (\quad u^2+v^2+u_x^2+v_x^2)dx - a_1\int_{-\infty}^{\infty}(uv_{xxt}+vu_{xxt})dx \\ + & \quad a_3\int_{-\infty}^{\infty}(uv^pv_x+vu^pv_x)dx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}[(u^pv)_xu+(uv^p)_xv]dx \\ + & \quad \alpha\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dx = 0 \end{aligned}$$

com cálculos análogos aos do teorema 3.2 do capítulo 3, obtemos;

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx] + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dxds = 0$$

Integando de 0 a t, segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}(u^2 \quad & + \quad v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dxds \\ & = \quad \int_{-\infty}^{\infty}(u_0^2+v_0^2+u_{0x}^2+v_{0x}^2+2a_1u_{0x}v_{0x})dx. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Pelas desigualdades de Höder e de $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, $a, b \in \Re$, vem

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2+2a_1u_xv_x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+u_x^2+v_x^2-|a_1|u_x^2-|a_1|v_x^2)dx \tag{4.31}$$

de (4.30) e (4.31), vem:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}(u^2+v^2+(1-|a_1|)u_x^2+(1-|a_1|)v_x^2)dx + 2\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dxds \\ \int_{-\infty}^{\infty} \leq (u_0^2+v_0^2+(1+|a_1|)u_{0x}^2+(1+|a_1|)v_{0x}^2)dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Como $\alpha > 0$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + v_x^2) dx ds > 0,$$

e do fato que $|a_1| < 1$, vem:

$$(1 - |a_1|) \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2 + u_x^2 + v_x^2) dx \leq (1 + |a_1|) \int_{-\infty}^{\infty} (u_0^2 + v_0^2 + u_{0x}^2 + v_{0x}^2) dx,$$

portanto existe uma constante C$=\frac{1+|a_1|}{1-|a_1|}$, C>0, tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2 + u_x^2 + v_x^2) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (u_0^2 + v_0^2 + u_{0x}^2 + v_{0x}^2) dx. \tag{4.33}$$

De (4.33) segue que:

$$\|U\|_{\mathcal{H}^1} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}^1} \quad , \ \forall \text{ t} \geq 0. \tag{4.34}$$

Multiplicando a 1ª equação de (4.39) por $(-u_{xx})$ e a 2ª equação por $(-v_{xx})$ e integrando em $\Re$, temos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 + u_{xx}^2)dx + a_1\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}v_{xxt}dx - a_3\int_{-\infty}^{\infty} v^p v_x u_{xx}dx \\ \quad -\int_{-\infty}^{\infty} u^p u_x u_{xx}dx - a_4\int_{-\infty}^{\infty}(u^p v)_x u_{xx}dx + \alpha\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}^2 dx = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2 + v_{xx}^2)dx + a_1\int_{-\infty}^{\infty} v_{xx}u_{xxt}dx - a_3\int_{-\infty}^{\infty} u^p u_x v_{xx}dx \\ \quad -a_4\int_{-\infty}^{\infty}(uv^p)_x v_{xx}dx + \alpha\int_{-\infty}^{\infty} v_{xx}^2 dx = 0 \end{cases} \tag{4.35}$$

somando as duas equações de (4.35) e usando o fato que $a_3 = a_4$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} & (\quad u_x^2 + v_x^2 + u_{xx}^2 + v_{xx}^2 + 2a_1 u_{xx}v_{xx})dx + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}^2 + v_{xx}^2)dx \\ & = \quad \int_{-\infty}^{\infty}(u^p u_x u_{xx} + v^p v_x v_{xx})dx + a_4\int_{-\infty}^{\infty}(v^p v_x u_{xx} \\ & + \quad u^p u_x v_{xx} + pu^{p-1}u_x v u_{xx} + u^p v_x u_{xx} + u_x v^p v_{xx} + puv^{p-1}v_x v_{xx})dx. \end{aligned}$$

O que resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 & + \quad v_x^2 + u_{xx}^2 + v_{xx}^2 + 2a_1 u_{xx}v_{xx})dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}(u^p u_x u_{xx} + (v^p v_x v_{xx})dx \\ & + \quad a_4\int_{-\infty}^{\infty}(v^p v_x u_{xx} + u^p v_x u_{xx} + pu^{p-1}u_x v u_{xx} + u^p v_x u_{xx} \\ & + \quad u_x v^p v_{xx} + puv^{p-1}v_x u_{xx})dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H^m(\Re) \hookrightarrow L^\infty(\Re)$, m≥1, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} & (u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \leq \|u\|_{L^\infty}^p\|u_x\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^\infty}\|v_{xx}\|_{L^2}^2 + a_4[\|v\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|u\|_{L^\infty}^p\|u_x\|_{L^\infty}\|v_{xx}\|_{L^2} + p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|u\|_{L^\infty}^p\|v_x\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^\infty}^p\|u_x\|_{L^\infty}\|v_{xx}\|_{L^2} + p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^\infty}\|v_x\|_{L^2}\|v_{xx}\|_{L^2}].
\end{aligned}$$

Com raciocínio análogo aos do teorema 3.2 do capítulo 3, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \leq C(\|u_x\|_{L^2}^2 \\
&+ \|v_x\|_{L^2}^2+\|u_{xx}\|_{L^2}^2+\|v_{xx}\|_{L^2}^2).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Integrando (4.36) de 0 a t

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2+2a_1u_{xx}v_{xx})dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}(u_{0x}^2+v_{0x}^2+u_{0xx}^2 \\
&+ v_{0xx}^2+2a_1u_{0xx}v_{0xx})dx + C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxds.
\end{aligned}$$

De onde

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+(1-a_1)u_{xx}^2+(1-a_1)v_{xx}^2)dx \leq C_1 \\
&+ C\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxds,
\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 &+ v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx \leq C_2 \\
&+ C_3\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxds
\end{aligned} \tag{4.37}$$

de (4.37) e da desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2+u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx \leq C_2e^{C_3t} \leq C_2e^{C_3T} < +\infty \quad \forall\ t\ ;\ 0 \leq t \leq T.$$

Portanto

$$\|u_x\|_{H^1}^2 + \|v_x\|_{H^1}^2 < +\infty \quad \forall \text{ t} ; 0 \leq t \leq T. \tag{4.38}$$

Em consequência de (4.34) e (4.38) obtemos que $(u, v) \in$ C([0,T], $\mathcal{H}^2(\Re)$). Usndo o processo de indução podemos concluir que $(u, v) \in$ C([0,T], $\mathcal{H}^m(\Re)$) para m≥2.

A unicidade segue usando a desigualdade de Gronwall.

Dependência Contínua de dados:

Teorema 4.5: *Sejam U_0^n, $U_0 \in \mathcal{H}^m(\Re)$, m≥2 e $(u, v) \in C([0,T], \mathcal{H}^m(\Re))$ e $(u^n, v^n) \in C([0,T], \mathcal{H}^m(\Re))$ soluções de (4.1) e de*

$$\begin{cases} u_t^n - u_{xxt}^n - a_1 v_{xxt}^n + a_3(v^n)^p v_x^n + (u^n)^p u_x + a_4((u^n)^p v^n)_x - \alpha u_{xx}^n = 0 \\ v_t^n - v_{xxt}^n - a_1 v_{xxt} + a_3(u^n)^p u_x^n + (v^n)^p v_x^n + a_4(u^n(v^n)^p)_x - \alpha v_{xx}^n = 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

respectivamente, com $n \in \mathcal{Z}$, n≥0.

Se $U_0^n \to U_0$ em $\mathcal{H}^m(\Re)$ e para T>0 fixado, então $(u^n, v^n) \to (u, v)$ em $C([0,T], \mathcal{H}^m(\Re))$ quando $n \to +\infty$.

Demonstração: A demonstração segue análoga ao do teorema do 3.3 capítulo 3.

4.4 Comportamento assintótico

Nesta seção estudamos o comportamento assintótico da solução do problema de cauchy

$$\begin{cases} AU_t + DU_{xx} + F(U)_x = 0, & x \in \Re \\ U(x, 0) = U_0(x) & , \text{t} \geq 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

onde A, D e F matrizes definidas em (4.2).

Para obter o comportamento assintótico de (4.40) vamos, primeiramente, obter a taxa de decaimento da solução do prblema linear associado. Posteriormente, a partir do resultado obtido, estudamos a taxa de decaimento do problema não linear.

Os lemas a seguir são úteis para estudar o comportamento assintótico que nos propomos.

Lema 4.3: *Seja $U_0 \in \mathcal{H}(\Re)$, $m \geq 2$. Consideremos U=(u, v) solução de 4.40, então:*

1) $\|(u,v\|_{\mathcal{H}^1} \leq C\|(u_0,v_0\|_{\mathcal{H}^1}, \forall t \geq 0.$

2) $\int_0^\infty(\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \|v_x(t)\|_{L^2}^2)dt < +\infty.$

Demostração: É consequência direta de 3.32 e 3.34 do teorema 3.1 da seção anterior.

Lema 4.4: *Seja $H \in C^1(\Re)$, $H(t) \geq 0$ tal que*

$$\int_0^\infty H(t)dt < +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^\infty |\frac{dH}{dt}|dt < +\infty.$$

Então $H(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Demostração: Dado $\varepsilon > 0$ então existe $M_1 = M_1(\varepsilon) > 0$ e $M_2 = M_2(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_{M_1}^\infty H(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \int_{M_2}^\infty |\frac{dH}{dt}|dt < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Sejam t e $\tilde{t} \geq M = max\{M_1, M_2\}$ com t> $\tilde{t}$. Por integração por partes obtemos

$$\int_{\tilde{t}}^t (s-\tilde{t})\frac{dH}{ds}ds = (t-\tilde{t})H(t) - \int_{\tilde{t}}^t H(s)ds.$$

Assim

$$(t-\tilde{t})H(t) \leq (t-\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^t \frac{dH}{ds}ds + \int_{\tilde{t}}^t H(s)ds.$$

Tomando $\tilde{t}$ tal que t-$\tilde{t} = \sqrt{\varepsilon}$, temos

$$H(t) \leq \int_{\tilde{t}}^t |\frac{dH}{ds}|ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tilde{t}}^t H(s)ds.$$

Ou seja

$$H(t) \leq \int_M^\infty |\frac{dH}{ds}|ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_M^\infty H(s)ds$$

$$H(t) \leq \int_{M_2}^\infty |\frac{dH}{ds}|ds + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{M_1}^\infty H(s)ds.$$

Segue que $H(t) \leq \sqrt{\varepsilon}$ o que prova o lema.

Lema 4.5: *Seja $U_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{H}^m(\Re)$, $m \geq 2$ e $U = (u,v)$ a solução do problema (4.40). Então, se $|a_1| < 1$ temos:*

1) $\lim_{t\to+\infty}(\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2} + \|v_x(\cdot,t)\|_{L^2}) = 0$

2) $\lim_{t\to+\infty}(\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty} + \|v_x(\cdot,t)\|_{L^\infty}) = 0$

Demostração: Multiplicando a 1ª de (4.40) por u_t e a 2ª por v_t e integrando em $\Re$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|u_t\|_{L^2}^2 &+ \|u_{xt}\|_{L^2}^2 - a_1\int_{-\infty}^{+\infty} v_{xxt}u_t dx + a_3\int_{-\infty}^{+\infty} v^p v_x u_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u^p u_x u_t dx \\
&+ a_4\int_{-\infty}^{+\infty}(u^p v)_x u_t dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_{L^2}^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|v_t\|_{L^2}^2 &+ \|v_{xt}\|_{L^2}^2 - a_1\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxt}v_t dx + a_3\int_{-\infty}^{+\infty} u^p u_x v_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} v^p v_x v_t dx \\
&+ a_4\int_{-\infty}^{+\infty}(uv^p)_x v_t dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|_{L^2}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Somando as duas equações acima, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|u_t\|_{L^2}^2 &+ \|v_t\|_{L^2}^2 + \|u_{xt}\|_{L^2}^2 + \|v_{xt}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(\|u_x\|_{l^2}^2 + \|v_x\|_{l^2}^2) \\
&= 2a_1\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xt}v_{xt}dx - a_3\int_{-\infty}^{+\infty}(u^p u_x v_t + v^p v_x u_t)dx \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty}(u^p u_x u_t + v^p v_x v_t)dx - a_4\int_{-\infty}^{+\infty}(u^p v_x u_t + u_x v^p v_t)dx \\
&- pa_4\int_{-\infty}^{+\infty}(u^{p-1}u_x v u_t + uv^{p-1}v_x v_t)dx.
\end{aligned}
$$

Da desigualdade de Hölder e de $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, $a, b \in \Re$, $a, b > 0$ e com raciocínio análogo ao teorema 3.2 do capítulo 3, segue que:

$$
\begin{aligned}
\| & u_t\|_{L^2}^2 + \|v_t\|_{L^2}^2 + \|u_{xt}\|_{L^2}^2 + \|v_{xt}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(\|u_x\|_{l^2}^2 + \|v_x\|_{l^2}^2) \\
\leq & |a_1|\|u_{xt}\|_{L^2}^2 + |a_1|\|v_{xt}\|_{L^2}^2 + C(\|u_x\|_{L^2}\|v_t\|_{L^2} + \|v_x\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2} \\
+ & \|u_x\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2} + \|v_x\|_{L^2}\|v_t\|_{L^2} + \|v_x\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2}\|v_t\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2} \\
+ & \|v_x\|_{L^2}\|v_t\|_{L^2}) \\
\leq & a_1(\|u_{xt}\|_{L^2}^2 + \|v_{xt}\|_{L^2}^2) + C(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2 \\
+ & \|v_x\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) + \eta\frac{\|v_t\|_{L^2}^2}{2} \\
+ & \eta\frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2} + \eta\frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2} + \eta\frac{\|v_t\|_{L^2}^2}{2} + \eta\frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2} \\
+ & \eta\frac{\|v_t\|_{L^2}^2}{2} + \eta\frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2} + \eta\frac{\|v_t\|_{L^2}^2}{2}
\end{aligned}
$$

onde $\eta > 0$ será escolhido posteriormente. Portanto

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_{L^2}^2 &+ \|v_t\|_{L^2}^2 + \|u_{xt}\|_{L^2}^2 + \|v_{xt}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) \\
&\leq a_1\|u_{xt}\|_{L^2}^2 + a_1\|v_{xt}\|_{L^2}^2 + C(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|v_t\|_{L^2}^2) \\
&+ 2\eta\|u_t\|_{L^2}^2 + 2\eta\|v_t\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
(1-2\eta)(\|u_t\|_{L^2}^2 &+ \|v_t\|_{L^2}^2) + (1-a_1)(\|u_{xt}\|_{L^2}^2 + \|v_{xt}\|_{L^2}^2) \\
&+ \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) \leq C(\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Escolhendo $0 < \eta < \frac{1}{2}$ e do fato que $0 < a_1 < 1$ tem-se de (4.33) que

$$\frac{d}{dt}(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) \leq C \quad \text{independente de t.}$$

Do lema (4.3) tem-se que

$$\int_0^{\infty}(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2)dt < +\infty$$

e pelo lema (4.4) tem-se que

$$\lim_{t\to+\infty}(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) = 0 \quad \text{o que prova (1).}$$

Para provar (2) observemos que

$$u^2(x,t) = 2\int_{-\infty}^{x} uu_x dx \leq 2\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}$$

e

$$v^2(x,t) = 2\int_{-\infty}^{x} vv_x dx \leq 2\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}.$$

Logo

$$\|u(t)\|_{L^\infty}^2 + \|v(t)\|_{L^\infty}^2 \leq 2(\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2})$$

pelo lema (4.3) $\|u(t)\|_{L^2}$ e $\|v(t)\|_{L^2}$ são limitadas, temos então:

$$\|u(t)\|_{L^\infty}^2 + \|v(t)\|_{L^\infty}^2 \leq C(\|u_x\|_{L^2}^2\|v_x\|_{L^2}^2),$$

o que resulta, do lema 4.4

$$\lim_{t\to\infty}(\|u(t)\|_{L^\infty}^2 + \|v(t)\|_{L^\infty}^2) = 0$$

4.5 Estimativa para a solução do problema linear

Consideremos o sistema linear associado a (4.40):

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} - \alpha u_{xx} = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} - \alpha v_{xx} = 0 \qquad x \in \Re,\ t \geq 0,\ \alpha > 0\ ;\ |a_1| < 1 \\ u(x,0) = u_o(x) \quad ,\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{4.41}$$

podemos escrevê-lo na forma:

$$\begin{cases} AU_t + DU_{xx} = 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \end{cases} \tag{4.42}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e A, D definidas nas seções anteriores.

Usando transformada de Fourier em (4.42) obtém-se:

$$\hat{U}(y,t) = e^{-A^{-1}y^2Dt}\hat{U}_0(y) \tag{4.43}$$

onde

$$A^{-1}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4} & \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4} \\ \frac{-a_1y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4} & \frac{1+y^2}{(1+y^2)-a_1^2y^4} \end{pmatrix}$$ e A, D definidas nas seções anteriores.

e

$$e^{A^{-1}y^2Dt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} & \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} \\ \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} & \frac{1}{2}e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + \frac{1}{2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t} \end{pmatrix}$$

com

$$\alpha_1 = \frac{-y^2(1+y^2)\alpha}{(1+y^2)^2 - a_1^2y^4} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{a_1 - y^4\alpha}{(1+y^2)^2a_1^2y^4}.$$

Por (4.43) temos

$$\begin{cases} \hat{u}(y,t) = a_{11}(y,t)\hat{u}_0 + a_{12}(y,t)\hat{v}_0(y) \\ \hat{v}(y,t) = a_{21}(y,t)\hat{u}_0 + a_{22}(y,t)\hat{v}_0(y) \end{cases} \tag{4.44}$$

sendo

$$\begin{cases} a_{11}(y,t) = a_{22}(y,t) = \frac{1}{2}[e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}] \\ a_{12}(y,t) = a_{21}(y,t) = \frac{1}{2}[e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}]. \end{cases} \tag{4.45}$$

De (4.44) obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}[a_{11}(y,t)\hat{u}_0(y) + a_{12}(y,t)\hat{v}_0(y)]dy \tag{4.46}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}[a_{21}(y,t)\hat{u}_0(y) + a_{22}(y,t)\hat{v}_0(y)]dy \tag{4.47}$$

Ainda

$$|a_{ij}| \leq Ce^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} \ , \ \text{i, j=1,2 e } \beta = \frac{\alpha}{1+a_1} \tag{4.48}$$

pois, de (4.45) vem

$$\begin{aligned} |a_{11}| = |a_{22}| &= \frac{1}{2}|e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}| \\ &\leq \frac{1}{2}(e^{\frac{-y^2\alpha}{1+(1+a_1)y^2}t} + e^{\frac{-y^2\alpha}{1+(1+a_1)y^2}t}) \end{aligned}$$

como $|a_1| < 1$

$$|a_{11}| = |a_{22}| \leq e^{\frac{-y^2\alpha}{1+(1+a_1)y^2}t} \leq e^{\frac{-y^2\alpha}{(1+y^2)(1+a_1)}t}.$$

Logo

$$|a_{11}| = |a_{22}| \leq Ce^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\alpha}{1+a_1}$$

analogamente

$$|a_{12}| = |a_{21}| \leq Ce^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} \quad \text{o que mostra (4.48) .}$$

Teorema 4.6. *Seja* $U_0 \in H^m(\Re) \cap L^1(\Re) \times H^m(\Re) \cap L^1(\Re)$, $m \geq 2$ *e* $|1a_1| < 1$. *Então, a solução* (u,v) *do problema linear (4.42) satisfaz a estimativa:*

i) $t^{1/2}\|(u,v)\|_{L^\infty \times L^\infty} \leq C\|(u_o, v_0)\|_{L^1 \times L^1}$

ii) $t^{1/2}\|(u,v)\|_{L^2 \times L^2} \leq C\|(u_o, v_0)\|_{L^1 \times L^1}$

para t suficientemente grande onde $C > 0$ é constante.

Demonstração: Por (4.46) vem:

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (|a_{11}(y,t)||\hat{u}_0(y)| + |a_{12}(y,t)||\hat{v}_0(y)|)dy$$

isto é,

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{v}_0(y)|)dy \}. \tag{4.49}$$

Seja

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{v}_0(y)|dy.$$

Vamos estimar separadmente cada uma das integrais I_1 e I_2. Para estimar I_1, observemos que:

$$I_1 = \int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy + \int_{|y|\geq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy. \tag{4.50}$$

Analisando a 2º integral de (4.50)

$$\text{como } 1 + y^2 \leq C(1+|y|)^2 \leq C \cdot 2^2|y|^2 \text{ para } |y| \leq 1 \text{ tem-se}$$
$$\frac{y^2}{1+y^2}\beta t \geq \frac{y^2}{c \cdot 2^2 y^2}\beta t \leq C_2 t.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy &\leq \int_{|y|\leq 1} e^{-C_2 t} |\hat{u}_0(y)|dy \\ &\leq e^{-C_2 t} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(y)|dy \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t} |\hat{u}_0(y)|dy \leq e^{-C_2 t} \|\hat{u}_0\|_{L^1}. \tag{4.51}$$

Para estimar a primeira integral de (4.50) observamos que

$$1 + y^2 \leq C_1(1+|y|^2)^2 \leq C_1 \cdot 2^2 \text{ desde que } |y| \leq 1.$$

Daí

$$\frac{y^2}{1+y^2}\beta t \geq \frac{y^2}{C_1 \cdot 2^2}\beta t \geq C_3 y^2 t \quad \text{para } |y| \leq 1$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|dy &\leq \sup_{|y|\in\Re} ess|\hat{u}_0(y)| \int_{|y|\leq 1} e^{-C_3 y^2 t}dy \\
&\leq 2\|\hat{u}_0\|_{L^\infty} \int_0^1 e^{-C_3 y^2 t}dy.
\end{aligned}$$

Consideremos $C_3 y^2 t = z$ logo $y = (\frac{z}{C_3}t)^{1/2}$ e $dy = \frac{1}{2}\frac{1}{(C_3 t)^{1/2}}z^{-1/2}dz$.

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|dy &\leq \frac{1}{(C_3 t)^{1/2}}\|\hat{u}_0\|_{L^\infty} \int_0^\infty e^{-z}z^{-1/2}dz \\
&\leq \frac{\Gamma(1/2)}{(C_3 t)^{1/2}}\|\hat{u}_0\|_{L^\infty} \leq C\|u_0\|_{L_1}t^{-1/2}
\end{aligned}$$

pois $\|\hat{u}_0\|_{L^\infty} \leq \mathrm{C}\|u_0\|_{L^1}$ uma vez que $u_0 \in H^m(\Re) \cap L^1(\Re)$, onde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dx, \quad x > 0.$$

Assim

$$\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|dy \leq C\|u_0\|_{L^1}t^{\frac{-1}{2}}. \tag{4.52}$$

De (4.51) e (4.52) tem-se para (4.50):

$$I_1 \leq Ct^{\frac{-1}{2}}\|u_0\|_{L^1} + e^{-C_2 t}\|\hat{u}_0\|_{L^1}.$$

Analogamente para I_2. Logo temos para (4.49) que:

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq Ct^{\frac{-1}{2}}(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}) \\
&+ e^{-C_2 t}(\|\hat{u}_0\|_{L^1} + \|\hat{v}_0\|_{L^1}).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Multiplicando (4.53) por $t^{\frac{1}{2}}$ e tomando o limite superior quando $t \to +\infty$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{\frac{1}{2}} \quad \| \quad u(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq \overline{\lim_{t\to+\infty}}[C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}) \\
&+ t^{\frac{1}{2}}e^{-C_2 t}(\|\hat{u}_0\|_{L^1} + \|\hat{v}_0\|_{L^1})],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1})$$

logo para todo t suficientemente grande

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{\frac{-1}{2}}(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}). \tag{4.54}$$

Analogamente podemos provar (4.54) para $v(\cdot,t)$, o que prova (i).

Usando o teorema de Plancherel e (4.46), temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = (\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(y,t)|^2 dy$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y,t)|^2 dy \quad + \quad 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{v}_0(y,t)|^2 dy. \tag{4.55}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy &= \int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \\ &+ \int_{|y|\geq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \end{aligned} \tag{4.56}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{v}_0(y)|^2 dy &= \int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{v}_0(y)|^2 dy \\ &+ \int_{|y|\geq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{v}_0(y)|^2 dy. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Para a segunda integral de (4.56), temos

$$1 + y^2 \leq C_1(1+|y|)^2 \leq C_1 2^2|y|^2 \quad \text{para } |y| \geq 1$$

portanto

$$\frac{2y^2}{1+y^2}\beta t \geq C_4 t$$

segue que:

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|\geq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy &\leq \int_{|y|\geq 1} e^{-C_4 t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \\
&\leq e^{-C_4 t}\|\hat{u}_0\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

Para a primeira integral de (4.56), temos

$$
1+y^2 \leq C_1(1+|y|)^2 \leq 4C_1 \quad \text{para } |y| \leq 1
$$

daí

$$
\frac{2y^2}{1+y^2}\beta t \geq C_5 y^2 t \quad |y| \leq 1
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy &\leq \int_{|y|\leq 1} e^{-C_5 y^2 t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \\
&\leq 2 \sup_{|y|\in\Re} ess|\hat{u}_0(y)|^2 \int_0^1 e^{-C_5 y^2 t} dy.
\end{aligned}
$$

Fazendo $C_5 t y^2 = z$ segue que

$$
y = \frac{1}{(C_5 t)^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(C_5 t)^{\frac{1}{2}}} z^{-1/2}.
$$

Assim

$$
\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \leq \|\hat{u}_0(y)\|_{L^\infty}^2 \frac{1}{(C_5 t)}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{-1/2} \|\hat{u}_0(y)\|_{L^\infty}^2 \frac{\Gamma(1/2)}{(C_5 t)^{1/2}}
$$

Logo, existe uma constante C> 0 tal que

$$
\int_{|y|\leq 1} e^{\frac{-2y^2}{1+y^2}\beta t}|\hat{u}_0(y)|^2 dy \leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-1/2}. \tag{4.59}
$$

De (4.58) e (4.60) tem-se para (4.56)

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leq C\|u_0\|_{L^1}^2 t^{-1/2} + e^{-C_4 t}\|u_0\|_{L^2}^2
$$

isto é,

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C\|u_0\|_{L^1} t^{-1/4} + e^{\frac{-C_4 t}{2}}\|u_0\|_{L^2}.
$$

Multiplicando por $t^{1/4}$ e tomando o limite superior quando $t \to +\infty$ tem-se:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} t^{1/4}\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}}(C\|u_0\|_{L^1} + t^{1/4}e^{\frac{-C_4 t}{2}}\|u_0\|_{L^2}).$$

Logo para t suficientemente grande temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq Ct^{-1/4}\|u_0\|_{L^1}.$$

Analogamente temos para (4.57) que $\|v(\cdot,t)\|_{L^2} \leq Ct^{-1/4}\|v_0\|_{L^1}$, o que prova (ii).

4.6 Taxas de decaimento para a solução do problema não linear

Nesta seção utilizaremos os resultados obtidos na seção anterior para estudar o comportamento assintótico da solução do problema não linear.

Teorema 4.7: *Seja* $U_0 \in H^m(\Re) \cap L^1(\Re) \times H^m(\Re) \cap L^1(\Re)$, $m \geq 2$ e $p > 3$.

i) $\|U(\cdot,t)\|_{L^\infty \times L^\infty} = \theta(t^{-1/2})$ quando $t \to +\infty$

ii) $\|U(\cdot,t)\|_{L^2 \times L^2} = \theta(t^{-1/4})$ quando $t \to +\infty$

Demonstração: Tomando a transformada de Fourier em x em (4.40) obtemos a forma integral da solução

$$\begin{aligned} u \quad (& \quad x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \\ [& \quad (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\hat{u}_0(y) + (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\hat{v}_0(y)]dy \\ + & \quad \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}[e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t-s)} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)})\hat{F}_1(y,s) \\ + & \quad e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t-s)} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)})\hat{F}_2(y,s)]dydx\} \end{aligned} \tag{4.60}$$

e

$$\begin{aligned} v \quad (& \quad x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \\ [& \quad (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\hat{u}_0(y) + (e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)t})\hat{v}_0(y)]dy \\ + & \quad \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}[e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t-s)} - e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)})\hat{F}_1(y,s) \\ + & \quad e^{(\alpha_1+\alpha_2)(t-s)} + e^{(\alpha_1-\alpha_2)(t-s)})\hat{F}_2(y,s)]dyds\} \end{aligned} \tag{4.61}$$

onde α_1 e α_2 estão definidas em (4.4) e F definida em (4.2). Isto é,

$$U(x,t) = E_\alpha(t)U_0(x) - \int_0^t E_\alpha(t-s)A^{-1}\frac{\partial}{\partial x}F(U(x,s))ds. \tag{4.62}$$

Tomando a norma em $L^\infty(\Re) \times L^\infty(\Re)$ em (4.62) e usando o teorema 4.6 (i) temos para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\|U(\cdot,t)_{L^\infty\times L^\infty} &\leq C[\|U_0\|_{L^1\times L^1}(1+t)^{-1/2} + \int_0^t \|k_{11} * F_1\|_{L^1} + \|k_{12} * F_2\|_{l^1} \\ &+ \|k_{21} * F_1\|_{L^1} + \|k_{22} * F_2\|_{L^2})(1+t-s)^{-1/2}ds].\end{aligned}$$

Tem-se da imersão de Sobolev $L^\infty(\Re) \hookrightarrow H^m\Re$, $m \geq 2$:

$$\begin{aligned}\|k_{11} * F_1\|_{L^1} &\leq \|k_{11}\|_{L^1}[|a_3|\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2} \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} + |a_4|p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &+ |a_4|\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}].\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg: $\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2}^{1/2}\|f_x\|_{L^2}^{1/2}$, $f \in H^1(\Re)$, tem-se

$$\begin{aligned}\|K_{11} \quad * \quad F_1\|_{L^1} &\leq C[\|v\|_{L^\infty}^{p-3}\|v\|_{L^2}^2\|v_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u\|_{L^2}^2\|u_x\|_{L^2}^2 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}^2\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u\|_{L^2}^2\|u_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}].\end{aligned}$$

Pelo lema (4.3) temos que $\|u\|_{L^2}$, $\|v\|_{L^2}$, $\|u\|_{L^\infty}$ e $\|v\|_{L^\infty}$ são limitadas, logo:

$$\begin{aligned}\|K_{11} \quad * \quad F_1\|_{L^1} &\leq C[\|v\|_{L^\infty}^{p-3}\|v_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u_x\|_{L^2}^2 \\ &+ \|u\|_{L^\infty}^{p-3}\|u_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}] \leq C(\|v\|_{L^\infty}^{p-3} + \|u\|_{L^\infty}^{p-3})(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2) \\ &\leq C_1(\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty})(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

Isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|K_{11} \quad * \quad F_1\|_{L^1} \leq C(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2)\|U\|_{L^\infty\times L^\infty}.$$

Analogamente obtemos

$$\|K_{ij} \quad * \quad F_j\|_{L^1} \leq C(\|u_x\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2)\|U\|_{L^\infty\times L^\infty} \quad \text{i,j=1,2}. \tag{4.63}$$

Portanto, de (4.63) tem-se para (4.62) que:

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{L^\infty\times L^\infty} &\leq C(1+t)^{-1/2}\|U_0\|_{L^1\times L^1}\\ &+ C\int_0^t(1+t-s)^{-1/2}\|U\|_{L^\infty\times L^\infty}(\|u_x\|_{L^2}^2+\|v_x\|_{L^2}^2)ds.\end{aligned}$$

Do lema de Gronwall, temos:

$$\|U(t)\|_{L^\infty\times L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/2}\|U_0\|_{L^1\times L^1}e^{C\int_0^t(1+t-s)^{-1/2}(\|u_x\|_{L^2}^2+\|v_x\|_{L^2}^2)ds}.$$

Do lema (4.3) temos $\int_0^\infty(\|u_x\|_{L^2}^2+\|v_x\|_{L^2}^2)dt<\infty$.

Então existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|U(t)\|_{L^{\infty\times\infty}}\leq C(1+t)^{-1/2} \quad \forall \text{ t } \geq 0.$$

Vamos provar (ii).

Tomando a norma de $L^2(\Re)$ em (4.60) e usando o teorema 4.7, item (ii), temos:

$$\|u(t)\|_{L^2}\leq C\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-1/4}+\int_0^t(1+t-s)^{-1/4}(\|k_{11}*F_1\|_{L^1}+\|k_{12}*F_2\|_{L^1})ds. \quad (4.64)$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\| \quad & K_{11}*F_1\|_{L^1}\leq C(\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}\\ + \quad & \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2})\\ \leq \quad & C(\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^1}^2+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^1}^2+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^1}^2)).\end{aligned}$$

Logo

$$\|K_{11}*F_1\|_{L^1}\leq C(\|u\|_{L^\infty}^{p-1}+\|v\|_{L^\infty}^{p-1})(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^1}^2).$$

Analogamente

$$\|K_{12}*F_2\|_{L^1}\leq C(\|u\|_{L^\infty}^{p-1}+\|v\|_{L^\infty}^{p-1})(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^1}^2).$$

Assim, pelo lema (4.3) item i, temos:

$$\|K_{ij}*F_j\|_{L^1} \leq C(\|u\|_{L^\infty}^{p-1}+\|v\|_{L^\infty}^{p-1})\|U_0\|_{H^1\times H^1}^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2} &\leq C_1\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-1/4} \\ &+ 2C\|U_0\|^2_{H^1\times H^1}\int_0^t(1+t-s)^{-1/4}(\|u\|^{p-1}_{L^\infty}+\|v\|^{p-1}_{L^\infty})ds.\end{aligned}$$

Da parte (i), temos:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_1\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-1/4}+C_2\int_0^t(1+t-s)^{-1/4}(\|u\|^{p-1}_{L^\infty}+\|v\|^{p-1}_{L^\infty})ds$$

$$\|u\|_{L^2} \leq C_1\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-1/4}+C_2\int_0^t(1+t-s)^{-1/4}(1+s)^{\frac{1-p}{2}}ds.$$

Usando o lema de Strauss e do fato de >3, obtemos:

$$\int_0^t(1+t-s)^{-1/4}(1+s)^{\frac{1-p}{2}}ds \leq C(1+t)^{-1/4}.$$

Logo existe $C=C(\|u_0\|_{L^1},\|v_0\|_{L^1})>0$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-1/4} \quad \forall\ t \geq 0.$$

Analogamente de (4.61) temos:

$$\|v(t)\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-1/4} \ , \ \forall\ t \leq 0.$$

Corolário: *Seja* $U_0 \in H^m(\Re)\cap L^1(\Re)$, $m\geq 2$ *e* $p\geq 4$. *Então:*

i) $\|u\|_{L^\beta} \leq C(1+t)^{\frac{-1}{2}.\frac{\beta-1}{\beta}}$

ii) $\|v\|_{L^\beta} \leq C(1+t)^{\frac{-1}{2}.\frac{\beta-1}{\beta}}$; $2\leq \beta \leq \infty$.

Demonstração: Do teorema anterior segue que

$$\begin{aligned}\|u\|^\beta_{L^\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^\beta dx &\leq \|u\|^{\beta-2}_{L^\infty}\|u\|^2_{L^2} \\ &\leq C(1+t)^{\frac{-(\beta-2)}{2}}(1+t)^{\frac{-1}{2}} \\ &\leq C(1+t)^{\frac{-1}{2}(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Logo (i) segue.

De modo análogo, segue (ii).

Capítulo 5

Conclusão

No caso conservativo, para p>4 e dados pequenos, obtivemos que as soluções do sistema (1.1) decaem

$$1)\ \ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}$$

$$2)\ \ \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}$$

para t suficientemente grande.

No caso de uma única equação e $1 \leq$ p < 4, Souganidis e Strauss mostraram a existência de ondas viajantes e portanto a solução converge.Para o sistema proposto não se conhece resultado semelhante. O caso p $= 4$ é um problema em aberto, tanto para a aquação de BBM quanto para o sistema.
No caso dissipativo, foram obtidas taxas de decaimento para p >3. Não se conhece resultados para o caso $1 \leq$ p ≤ 3. No caso de uma única equação os resultados de decaimento valem para p ≥ 1.
É um problema em aberto quando consideramos o sistema com uma dissipação em uma única equação .

Referências

[1] Adams, R.A. ,*Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Albert, J., *Dispersion of low-energy for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equations*, J. Differential Equations, **63**(1986), 117-134.

[3] Albert, J., *On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equations*, J. Math. Anal. Appl., **141**(1989), 527 -537.

[4] Amick, C. J., Bona, J. L. and Schonbek, N. E., *Decay solutions of some nonlinear wave equations*, J. Diff. Equations **81** (1989), 1-49.

[5] Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J., *Models equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London See. A, **272**(1972), 47-78.

[6] Biler, P., *Asymptotic behaviour in time of solutions to some equations gerelizig the Kortweg de Vries-Burgers equations*, Bulletin Polish Acad. Sciences, Mathemtics **32** (1984), 275-282.

[7] Bisognin E., Bisognin V. and Menzala G. P., *On the asymptotic behaviour in time of solutions od a coupled system of Kdv equations*, Funkcialaj **40** (1997), 353-370.

[8] Bisognin E., Bisognin V. and Menzala G. P., *Uniform stabilization of space periodic solutions of a nonlinear dispersive system* (submitted).

[9] Bisognin V., *On the asymptotic behaviour of the solutions of a nonlinear dispersive system of Benjamin-Bona-Mahony's type*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7)(1996), 99-128.

[10] Bisognin V. and Menzala G. P., *Decay rates of the solutions to nonlinear dispersive equations*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, **124** A (1994), 1231-1246.

[11] Bisognin V. and Menzala G. P., *Asymptotic behaviour of nonlinear dispersive models with variable coefficients*, Ann, Mat. Pura Appl., to appear (1993).

[12] Bisognin V. and Menzala G. P., *Asymptotic behaviour in time of Kdv equations with variable coefficients*, Appl. Math. Lett. vol.7 n$^{\underline{o}}$ 6 (1994), 85-89.

[13] Bona, J. L. and Lvo, L., *More results on the decay of solutions to nonlinear dispersive wave equations*, Discrete and Continuouns Dynamical Systems 1, n$^{\underline{o}}$ 2 (1995), 151-193.

[14] Bona, J. L., Ponce, G., Saut, J. C., Tom, M. M., *A model system for strong interaction between internal solitary waves*, Comm. Math. Phys., **143** (1992), 287-313.

[15] Bona, J. L., Smith, R., *The initial-value problem for the Kortewed-de Vries equations*, Philos. Trans. Royal soc. London A, **278** (1975), 55-601.

[16] Brézis, H. , *Análisis Funcional: theérie et applications*, Masson, Paris (1983).

[17] Gear, J. A. and Grimshaw R., *Weak and stronf interactions between internal solitary waves*,Studies in Appl. Math. **70** (1984), 235-258.

[18] Linghai Zhang, *Decay estimates for the solutions of some nonlinear evolution equation*, J. Diff. Euations **116** (1995), 31-58.

[19] Marshall Ash, J. Cohen, J. and Wang, G., *On strongly interactiv interacting internl solitary waves*, The Journal of Fourier Analysis and Appl. 2 n$^{\underline{o}}$ 5 (1996), 507-517.

[20] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[21] Pereira J. M., *Global existence and decay of solutions of a coupled system of BBM-Burges equations*,Revista Matemática Complutense, vol.XIII, n$^{\underline{o}}$2(2000), 1-20.

[22] Souganidis, P. and Strauss, W. A., *Instabilidade of a class of dispersive solitary waves*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **114**(1990), 195-212.

[23] Strauss, W. A., *Dispersion of low-energy waves for two conservative equations*, Arch. Rotional Mech. Anal., **55** (1974), 86-98.

[24] Strauss, W. A., *Decay and asymptotic for* $\natural u = f(u)$, J. Funcional Analysis, **2** (1968), 406-457.