Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

IDEAIS PRIMOS, MAXIMAIS E PRIMITIVOS EM CERTOS SUBANÉIS DE ANÉIS DE POLINÔMIOS

Por

EDILSON SOARES MIRANDA

Porto Alegre-RS

2008

Tese submetida por Edilson Soares Miranda[*] como requisito parcial para a obtenção de grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca examinadora:

Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (IME-USP)

Dr. Vitor de Oliveira Ferreira (IME-USP)

Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)

Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

Data da Defesa: 31 de março de 2008

[*]Bolsista do Concelho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Aos meus pais e irmãos

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- A Deus, pelo Dom da vida e pela luz divina que sempre me acompanha.

- Aos meus pais, Osvaldo e Lúcia, pelo contínuo apoio, ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

- Aos meus Irmãos, Edirley e Eder, meus eternos companheiros.

- Ao Orientador, Professor Dr. Miguel Ferrero, pela amizade e constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada. E principalmente pela confiança que depositou em mim. Minha eterna gratidão.

- À Secretária, Rosane, pela boa-vontade e pelos esclarecimentos sobre procedimentos acadêmicos.

- Aos colegas, em especial Jesus, João, Wagner, Virgínia, Luciane, Bárbara, Edite, Emilio, Paulo, Leandro e Cléber pelas conversas e trocas de conhecimentos, e outras coisas mais.

- Ao CNPq, pela bolsa concedida durante os anos do curso.

Finalmente, agradeço à minha noiva Meire, pelo amor e apoio em todos os momentos. E principalmente por entender minhas dificuldades e ausênsias.

Resumo

Nesta tese caracterizamos completamente ideais primos, primitivos e maximais em certos subanéis graduados de anéis de polinômios, que chamamos de subanéis admissíveis. Obtivemos uma correspondência biunívoca, via contração, entre certas subfamílias de ideais primos, primitivos e maximais de $R[x]$ e certas subfamílias de ideais primos, primitivos e maximais de subanéis admissíveis, respectivamente. Também caracterizamos ideais primos e maximais em subanéis admissíveis com várias variáveis. Ainda, estendemos alguns resultados sobre anéis de Jacobson para anéis admissíveis e generalizamos alguns resultados obtidos em subanéis admissíveis para certos subanéis de skew anéis de polinômios.

Abstract

In this thesis we completely characterize prime, primitive and maximal ideals in certain graded subrings of polynomial rings, that we call of admissible subrings. We obtain via contraction a one-to-one correspondence between certain subfamily of prime, primitive and maximal ideals of $R[x]$ and certain subfamily of prime, primitive and maximal ideals of admissible subrings, respectively. We also characterize prime and maximal ideals in admissible subrings with several variables. We also extend some results about Jacobson rings for admissible rings and we generalize some results obtained in admissible subrings for certain subrings of skew polynomial rings.

Sumário

Introdução

Nesta tese estudamos ideais primos, primitivos e maximais em certos subanéis de anéis de polinômios.

No Capítulo 1, introduzimos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Há uma seção sobre conceitos básicos na teoria de anéis e outra seção sobre anéis de quocientes de Martindale.

Os ideais primos em anéis de polinômios sobre anéis não necessariamente comutativos foram completamente caracterizados por Ferrero em [6]. Posteriormente, Cisneros, Ferrero e Conzáles em [3], estenderam os resultados de Ferrero obtidos em anéis de polinômios para skew anéis de polinômios.

O estudo de ideais maximais em anéis de polinômios foram iniciados por Ferrero em [7]. Neste trabalho são obtidas condições para a existência de ideais maximais de anéis de polinômios.

Em [19], Puczylowski e Smoktunowicz completaram a caracterização de Ferrero sobre ideais maximais em anéis de polinômios.

No Capítulo 2, dado um anel R, definimos subanéis admissíveis de $R[x]$, como anéis T da seguinte forma

$$T = S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n,$$

onde S_0 é um subanel de R e $S_1, ..., S_{n-1}$ são subgrupos aditivos de R. Estudamos ideais primos, primitivos e maximais em subanéis admissíveis. Obtivemos resultados similares aos resultados obtidos para anéis de polinômios usuais.

Na primeira seção, descrevemos completamente os ideais primos de T. Obtivemos que P é um ideal primo de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$ se, e somente se, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.

Se $R[x]x^n \subseteq P$, então $P = (P \cap S_0) + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$, onde $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0. Estes resultados são fundamentais nas provas dos principais resultados deste trabalho. Esta correspondência define uma correspondência biunívoca, via contração, entre os ideais primos de $R[x]$ não contendo $R[x]x$ e os ideais primos de T não contendo $R[x]x^n$.

Na segunda seção, caracterizamos completamente os ideais maximais de T. Estes resultados generalizam vários resultados em [7], [9] e [19]. Obtivemos uma correspondência biunívoca, via contração, entre o conjunto de todos os ideais L de $R[x]$ tal que $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]/L$ é simples com identidade e o conjunto de todos ideais M de T tal que $R[x]x^n \nsubseteq M$ e T/M é simples com identidade.

Na última seção, estudamos ideais primitivos à direita (à esquerda) de T. Como nas seções anteriores obtivemos uma correspondência biunívoca, via contração, entre o conjunto de todos os ideais primitivos de $R[x]$ não contendo $R[x]x$ e o conjunto de todos ideais primitivos de T não contendo $R[x]x^n$.

Watters em [21], mostrou que se cada ideal primo de um anel R é uma intersecção de ideais primitivos, então cada ideal primo de $R[x]$ é uma intersecção de ideais primitivos de $R[x]$.

Posteriormente, Ferrero e Parmenter em [8], estenderam o resultado de Watters para uma classe mais geral de ideais primos no lugar de ideais primitivos.

No Capítulo 3, generalizamos o resultado de Ferrero e Parmenter em anéis de polinômios. Além disso, estendemos o resultado para anéis admissíveis.

Na Capítulo 4, caracterizamos ideais primos e maximais em subanéis admissíveis de anéis de polinômios com várias variáveis. Estes resultados generalizam alguns resultados em [9].

No Capítulo 5, estendemos alguns resultados obtidos nas duas primeiras seções do Capítulo 2, para certos subanéis de skew anéis de polinômios. Estes resultados generalizam alguns resultados em [4].

Capítulo 1

Pré-Requisitos

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados básicos que precisaremos nos capítulos posteriores. Mais detalhes podem ser obtidos na bibliografia deste trabalho.

1.1 Noções Gerais

Seja R um anel associativo, mas não necessariamente com identidade. Quando um ideal I de R for bilateral, diremos simplesmente que I é um ideal de R. Um anel R é chamado simples se seus únicos ideais são os triviais, ou seja, (0) e R.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, incluindo o zero. Um anel R é dito $\mathbb{N}$-graduado se $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$, a soma direta de subgrupos aditivos R_i de R, com $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ para cada i, $j \in \mathbb{N}$. Claramente R_0 é um subanel de R.

Um ideal P de R é dito um ideal primo de R, se para quaisquer ideais I, J de R com $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito primo se (0) é um ideal primo de R.

A próxima proposição estabelece as equivalências mais usuais de ideais primos e a sua demonstração pode ser encontrada em ([14], Proposição 10.2).

Proposição 1.1 *Seja P um ideal de R. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) P é um ideal primo de R.

(ii) Se a, $b \in R$ e $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

(iii) Se I e J são ideais de R tais que $I \supseteq P$, $J \supseteq P$ e $IJ \subseteq P$, então $I = P$ ou $J = P$.

(iv) Se I e J são ideais à direita de R tais que $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.

(v) Se I e J são ideais à esquerda de R tais que $IJ \subseteq P$, então $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.

Consideremos $R[x]$ o anel de polinômios sobre R. Um ideal L de $R[x]$ é chamado R-disjunto se $L \neq 0$ e $L \cap R = 0$.

O seguinte lema é bem conhecido e sua prova pode ser encontrada em vários trabalhos, por exemplo ver ([18], Corolário 2.13).

Lema 1.2 *Sejam R um anel primo e L um ideal R-disjunto de $R[x]$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) L é um ideal primo.

(ii) L é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$.

Um anel R é chamado von Neumann regular se para cada $a \in R$ existe um $r \in R$ tal que $ara = a$.

Dado um subconjunto S de um anel R, o anulador à direita de S em R é, por definição, o ideal à direita de R, $A_{nn_r}(S) = \{r \in R \mid Sr = 0\}$. O anulador à esquerda de S em R é definido analogamente.

Um anel R é dito fortemente primo à direita se todo ideal não nulo de R contém um subconjunto finito cujo anulador à direita é igual a zero. Um ideal I de R é fortemente primo à direita se R/I é um anel fortemente primo à direita. De forma análoga é definido um anel e um ideal fortemente primo à esquerda. Não é difícil mostrar que cada ideal fortemente primo à direita (esquerda) de um anel R é um ideal primo de R.

Um anel R satisfaz a condição de cadeia ascendente (ACC) sobre ideais à direita (esquerda), se dada uma cadeia qualquer de ideais à direita (esquerda) $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$, existe um inteiro positivo k tal que $I_k = I_{k+1} = ...$

A condição de cadeia descendente (DCC) sobre ideais à direita (esquerda) pode ser definida de maneira análoga, apenas invertendo o sentido das inclusões.

Um anel R é dito Noetheriano à direita se R satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre ideais à direita de R. Um anel R é dito Artiniano à direita se R satisfaz a condição de cadeia descendente sobre ideais à direita de R. De maneira semelhante é definido um anel Noetheriano (Artiniano) à esquerda.

Um ideal à direita (esquerda) I de R é dito essencial se $I \cap J \neq 0$ para qualquer ideal à direita (esquerda) não nulo J de R.

Seja $Z_r(R)$ o conjunto consistindo de todos os elementos a de R tais que $A_{nn_r}(a)$ é um ideal à direita essencial de R. É fácil ver que $Z_r(R)$ é um ideal de R, que será chamado ideal singular à direita de R.

Um anel R é dito não singular à direita se $Z_r(R) = 0$. De maneira análoga é definido um anel não singular à esquerda.

Uma família $\mathcal{F}$ de ideais à direita (esquerda) de um anel R é chamada independente se $I_0 \cap (I_1 + ... + I_n) = 0$ para todos elementos distintos $I_0, ..., I_n \in \mathcal{F}$.

Um anel R tem dimensão de Goldie à direita finita se R não contém uma família independente infinita de ideais à direita. Caso contrário R tem dimensão de Goldie à direita infinita. De modo similar é definido a dimensão de Goldie à esquerda finita.

Um anulador à direita (esquerda) de um anel R é qualquer ideal à direita (esquerda) que é igual a um anulador à direita (esquerda) de algum subconjunto de R.

Um anel R é dito um anel de Goldie à direita se R tem dimensão de Goldie à direita finita e se R satisfaz ACC sobre anuladores à direita de R. De forma análoga é definido um anel de Goldie à esquerda.

Conforme ([10], Corolário 3.32), um anel R é primo de Goldie à direita se, e somente se, R é não singular à direita e tem dimensão de Goldie à direita finita.

Um ideal à direita (esquerda) M de um anel R é dito um ideal modular à direita (esquerda) em R, se existe um elemento $b \in R$ tal que $a - ba \in M$ $(a - ab \in M)$ para cada $a \in R$.

Um ideal P de um anel R é dito um ideal primitivo à direita (esquerda) em R, se existe um ideal à direita (esquerda) modular maximal M tal que $P = (M : R) = \{r \in R \mid Rr \subseteq M\}$ $(\{r \in R \mid rR \subseteq M\})$. Pode-se mostrar facilmente que $(M : R)$ é o maior ideal de R contido em M. Um anel R é dito primitivo à direita (esquerda) se (0) é um ideal primitivo à direita (esquerda) de R.

Conforme ([5], Lema 81), um ideal primitivo à direita (esquerda) de um anel R é um ideal primo de R.

1.2 Anéis de Quocientes de Martindale

Esta seção contém a construção do anel de quocientes (à direita) de Martindale de um anel primo. Mais detalhes podem ser obtidos em [2].

Sejam R um anel primo não necessariamente com identidade e $\mathcal{U}$ a coleção de todos os ideais não nulos de R. Note que, se I, $J \in \mathcal{U}$, então $IJ \in \mathcal{U}$ e $I \cap J \in \mathcal{U}$. Se I é um ideal de R diremos que uma aplicação $f : I \to R$ é um R-homomorfismo à direita se f é aditiva e $f(ar) = f(a)r$, para cada $a \in I$, $r \in R$. No que segue, consideraremos ideais $I \in \mathcal{U}$ e R-homomorfismos à direita $f : I \to R$.

Denotamos por Ω o conjunto de todos os pares (I, f), onde $I \in \mathcal{U}$ e $f : I \to R$ é um R-homomorfismo à direita.

Em Ω, definimos a relação de equivalência como segue: Se (I,f), $(J,g) \in \Omega$, dizemos que (I,f) é equivalente a (J,g) $((I,f) \sim (J,g))$, se existir um ideal não nulo $H \subseteq I \cap J$ tal que $f\mid_H = g\mid_H$. Podemos verificar facilmente que esta relação é uma relação de equivalência e que pode ser definida de maneira equivalente como segue: $(I,f) \sim (J,g)$ se, e somente se $f\mid_{I\cap J} = g\mid_{I\cap J}$.

Denotemos por $Q(R)$ o conjunto quociente $\Omega/\sim$ e por $[I,f]$ a classe de equivalência de (I,f), onde $(I,f) \in \Omega$. No que segue, dotaremos $Q(R)$ de uma estrutura de anel de modo a podermos a considerar $R \subseteq Q(R)$. Sejam $[I,f]$, $[J,g] \in Q(R)$. Definimos a soma e o produto em $Q(R)$ por:

(i) $[I,f]+[J,g] = [I\cap J, f+g]$, onde $f+g : I\cap J \to R$ é definida de modo natural: $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$, para todo $a \in I\cap J$.

(ii) $[I,f].[J,g] = [JI, f\circ g]$, onde $f\circ g : JI \to R$ é definida por $(f\circ g)(a) = f(g(a))$ para cada $a \in JI$. (Note que $f\circ g$ está bem definida, pois $g(JI) \subseteq I$ e assim $f(g(a))$ está bem definida)

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas em $Q(R)$, e mostrar o seguinte.

Teorema 1.3 $(Q(R),+,.)$ *é um anel com identidade.*

O anel definido acima é denominado anel de quocientes à direita de Martindale de R . De forma análoga é definido o anel de quocientes à esquerda de Martindale de R.

Vejamos como R pode ser mergulhado em $Q(R)$. Se $a \in R$, denotamos por a_l a multiplicação à esquerda por a, ou seja, $a_l : R \to R$ é definida por $a_l(x) = ax$ para cada $x \in R$. Claramente $[R,a_l]$ é um elemento de $Q(R)$, o qual denotaremos simplesmente por a_l. A aplicação $\Psi : R \to Q(R)$ definida por $\Psi(a) = a_l$ para cada $a \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis. Isto permite identificar R com sua imagem $\Psi(R)$ em $Q(R)$. Utilizando esta identificação, podemos supor $R \subseteq Q(R)$ e para cada $a \in R$, escrever $a_l = a$.

Os próximos lemas contém as propriedades mais importantes do anel $Q(R)$.

Lema 1.4 *Sejam R um anel primo e $Q(R)$ o anel de quocientes à direita de Martindale de R. Então:*

(i) $R \subseteq Q(R)$.

(ii) Se $I \in \mathcal{U}$ e $f : I \to R$ é um R-homomorfismo à direita, então existe $q \in Q(R)$ tal que $f(a) = qa$, para todo $a \in I$.

(iii) Dados n elementos $q_1, ..., q_n \in Q(R)$, existe um ideal $I \in \mathcal{U}$ tal que $q_i I \subseteq R$, para cada $i = 1, ..., n$.

(iv) Se $q \in Q(R)$ e $Jq = 0$ ou $qJ = 0$, para algum ideal $J \in \mathcal{U}$, então $q = 0$.

(v) Seja $q \in Q(R)$. Se $qR = Rq$, então q é invertível em $Q(R)$.

O centro de $Q(R)$ é chamado o centróide estendido de R, e é denotado por $C(R)$. Pelo lema anterior, $q \in C(R)$ se, e somente se, $qr = rq$ para cada $r \in R$.

O anel gerado por R e $C(R)$ é igual a $RC(R)$. Este subanel é particularmente importante, e é chamado o fecho central de R .

Um subanel de $Q(R)$ que contém R é chamado de anel de quocientes à direita de R. Claramente $RC(R)$ é um anel de quocientes à direita de R.

Lema 1.5 *Sejam R um anel primo e $Q(R)$ o anel de quocientes à direita de Martindale de R. Então:*

(i) Todo anel de quocientes à direita de R é um anel primo. Em particular, $Q(R)$ e $RC(R)$ são anéis primos.

(ii) $q \in C(R)$ se, e somente se, existe um ideal não nulo I de R e um homomorfismo de R-bimódulos $f : I \to R$ tal que $f(r) = qr$, para todo $r \in I$.

(iii) $C(R)$ é um corpo.

A seguinte proposição caracteriza os ideais primos R_1-disjuntos de $R_1[x]$, onde R_1 é um anel de quocientes à direita de um anel primo R. Em particular caracteriza ideais primos R-disjuntos de $R[x]$.

Proposição 1.6 ([6], Corolário 2.7) *Sejam R um anel primo e R_1 um anel de quocientes à direita de R. Um ideal R_1-disjunto P de $R_1[x]$ é primo se, e somente se, $P = Q(R)[x]f_0 \cap R_1[x]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C(R)[x]$.*

Capítulo 2

Ideais Primos em Certos Subanéis Graduados de Anéis de Polinômios

Seja R anel associativo, mas não necessariamente com identidade. A finalidade deste capítulo é estudar ideais primos, primitivos e maximais em certos subanéis graduados de anéis de polinômios. Isso foi estudado para anéis de polinômios usuais em [6], [7], [9], [19] e [20].

É fácil verificar que todo subanel de $R[x]$ contendo $R[x]x$ é da forma $S + R[x]x$, onde S é um subanel de R. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.1 *Seja R um anel qualquer. Um subconjunto T de $R[x]$ é chamado admissível em x (ou simplesmente admissível) se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T = S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n,$$

onde cada S_i é um subgrupo aditivo de R com $S_iS_j \subseteq S_{i+j}$ para todo

$i,\ j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ e com $S_m = R$ se $m \geq n$.

Claramente, T é um subanel de $R[x]$, S_0 é um subanel de R e cada S_i é um S_0 sub-bimódulo de R.

O próximo teorema caracteriza os subanéis admissíveis de $R[x]$.

Teorema 2.2 *Sejam R um anel qualquer e T um subanel de $R[x]$. Então T é admissível se, e somente se, T é $\mathbb{N}$-graduado contendo $R[x]x^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Suponhamos que $T = S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$, onde $S_0, ..., S_n$ são subgrupos aditivos de R e $S_iS_j \subseteq S_{i+j}$ para cada i, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Conseqüentemente, $T = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} R_k$, onde $R_i = S_ix^i$ para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$ e $R_j = Rx^j$ se $j \geq n$. Segue que cada R_i é um subgrupo aditivo de $R[x]$ e $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$ para todo i, $j \in \mathbb{N}$. Portanto T é $\mathbb{N}$-graduado contendo $R[x]x^n$.

Reciprocamente, suponhamos que T é um subanel $\mathbb{N}$-graduado de $R[x]$ contendo $R[x]x^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Sejam $S_i = \{r \in R \mid rx^i \in T\}$, onde $i \in \{0, ..., n-1\}$. Logo, $S_0, ..., S_{n-1}$ são subgrupos aditivos de R e $S_0+S_1x+...+S_{n-1}x^{n-1}+R[x]x^n \subseteq T$.

Seja $f = a_0 + a_1 + ... + a_kx^k \in T$. Como T é um subanel graduado de $R[x]$, então $a_ix^i \in T$ para cada $i \in \{0, 1, ..., k\}$. Assim $T \subseteq S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. Conseqüentemente $T = S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ e $S_iS_j \subseteq S_{i+j}$ para cada i, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Portanto T é um subanel de $R[x]$ admissível. ■

Em todo este trabalho denotaremos por T um anel admissível da forma,

$$S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n.$$

2.1 Ideais Primos em Subanéis Admissíveis

Seja $f = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \in R[x]$. Denotaremos por fx o polinômio

$$a_0x + a_1x^2 + ... + a_kx^{k+1} \in R[x].$$

Note que $x \notin R[x]$ se R não tem identidade. Logo, fx não é o produto de f por x em $R[x]$. Mais geralmente, se H é um subconjunto de $R[x]$ então $Hx = \{fx \mid f \in H\}$.

Lema 2.3 *Sejam L um ideal primo de $R[x]$ e P um ideal primo de T. Então*

(i) $R[x]x \nsubseteq L$ se, e somente se, $R[x]x^n \nsubseteq L \cap T$.

(ii) $Lx \subseteq L$ e $Px^j \subseteq P$ se $j \geq n$.

Prova. (i) Suponhamos por contradição que $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]x^n \subseteq L$. Então $(R[x]x)^n \subseteq R[x]x^n \subseteq L$. Como L é primo, então a Proposição 1.1 implica que $R[x]x \subseteq L$, absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que $R[x]x^n \nsubseteq L$. Como $R[x]x^n \subseteq R[x]x$, então $R[x]x \nsubseteq L$.

(ii) Como $LxR[x] \subseteq LR[x] \subseteq L$, então a Proposição 1.1 implica que $Lx \subseteq L$.

Temos que $Px^jT \subseteq P$ e $Px^j \subseteq T$ se $j \geq n$. Utilizando Proposição 1.1, $Px^j \subseteq P$ para cada $j \geq n$. ■

Observação 2.4 Se R é um anel com elemento identidade e L é um ideal primo de $R[x]$, então $x \in L$ se, e somente se $x^n \in L \cap T$.

O exemplo a seguir mostra que a contração de um ideal primo de $R[x]$ em $S + R[x]x$ nem sempre é um ideal primo de $S + R[x]x$.

Exemplo 2.5 *Sejam R o anel de matrizes $n \times n$ sobre um corpo K e S o anel de matrizes triangulares inferiores sobre K.* Temos que $P = R[x]x$ é um ideal primo de $R[x]$, pois $(R[x]/P) \simeq R$ e R é um anel primo. Por outro lado, $P \cap (S + R[x]x)$ não é um ideal primo de $S + R[x]x$, pois $(S + R[x]x)/P \simeq S$ e S não é um anel primo.

Este exemplo mostra que o caso $P \supseteq R[x]x$ é especial. Veremos que no caso contrário a contração e extensão de ideais primos estabelece uma correspondência biunívoca.

Para o caso do exemplo anterior a próxima proposição mostra que os ideais primos de T contendo $R[x]x^n$ são determinados pelos ideais primos de S_0.

Proposição 2.6 *Seja P um ideal de T com $R[x]x^n \subseteq P$. Então P é primo se, e somente se, $P = (P \cap S_0) + S_1 x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ e $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T com $R[x]x^n \subseteq P$. Como $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$ para cada i, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$, então $S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ é um ideal de T e $(S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n)^2 \subseteq R[x]x^n \subseteq P$. Logo, $S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n \subseteq P$ assim $S_{n-1}x^{n-1} \subseteq P$. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que $S_i x^i \subseteq P$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Então $P = (P \cap S_0) + S_1 x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. Logo, $(T/P) \simeq (S_0/(P \cap S_0))$ é um anel primo e segue que $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0.

Reciprocamente, suponhamos que $P = (P \cap S_0) + S_1 x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ e $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0. Como $(T/P) \simeq (S_0/(P \cap S_0))$, então P é um ideal primo de T. ■

A próxima proposição descreve completamente quando existe um ideal primo de T não contendo $R[x]x^n$. Além disso, ela é fundamental na prova dos principais resultados deste trabalho.

Proposição 2.7 *Seja P um ideal de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Então P é primo se, e somente se, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Se T é um anel primo , então $R[x]$ é um anel primo. De fato, sejam U, V ideais de $R[x]$ tais que $UV = 0$. Logo, Ux^n e Vx^n são ideais de T com $Ux^n Vx^n = 0$. Então $Ux^n = 0$ ou $Vx^n = 0$ daí $U = 0$ ou $V = 0$. Portanto $R[x]$ é um anel primo. Isso mostra o caso $P = 0$. Se $P \neq 0$, então $A = P + R[x]P + PR[x] + R[x]PR[x]$ é um ideal não nulo de $R[x]$. Como $R[x]x^n(A \cap T)R[x]x^n \subseteq R[x]x^n AR[x]x^n \subseteq P$, a hipótese sobre P implica que $A \cap T = P$. Pelo lema de Zorn, existe um ideal L de $R[x]$ contendo P e maximal com respeito a condição $L \cap T = P$.

Vamos mostrar que L é um ideal primo de $R[x]$ que não contém $R[x]x$. De fato, sejam U, V ideais de $R[x]$ tais que $U \supseteq L$, $V \supseteq L$ e $UV \subseteq L$. Então $(U \cap T)(V \cap T) \subseteq L \cap T = P$. Logo, $U \cap T = P$ ou $V \cap T = P$. Da maximalidade de L seque que $U = L$ ou $V = L$ assim L é um ideal primo de $R[x]$. Se $R[x]x \subseteq L$, então $R[x]x^n \subseteq L \cap T = P$, absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que L seja um ideal primo de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$. Sejam U, V ideais de T tal que $UV \subseteq L \cap T$. Temos que $R[x]x^nU$ e $R[x]x^nV$ são ideais à esquerda de $R[x]$ contidos em U e V, respectivamente. Logo,

$$R[x]x^nUR[x]x^nV \subseteq UV \subseteq L$$

e pela Proposição 1.1 temos que $R[x]x^nU \subseteq L$ ou $R[x]x^nV \subseteq L$. Novamente a Proposição 1.1 implica que $U \subseteq L$ ou $V \subseteq L$. Segue que $L \cap T$ é um ideal primo de T. ■

Corolário 2.8 *Seja P um ideal de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Se P é primo, então existe um único ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.*

Prova. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Para mostrar a unicidade, suponhamos que existe um ideal primo L_1 de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L_1$ tal que $L_1 \cap T = P$. Então $L_1R[x]x^n \subseteq L_1 \cap T = P = L \cap T$ assim $L_1 \subseteq L$. Por outro lado, $LR[x]x^n \subseteq L \cap T = P = L_1 \cap T$, então $L \subseteq L_1$. Portanto, $L_1 = L$. ■

Corolário 2.9 *(Going up) Sejam $P_0 \subseteq P_1$ ideais primos de T não contendo $R[x]x^n$. Se L_0 é um ideal primo de $R[x]$ tal que $L_0 \cap T = P_0$, então existe um ideal primo $L_1 \supseteq L_0$ de $R[x]$ tal que $L_1 \cap T = P_1$.*

Prova. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L_1 de $R[x]$ tal que $L_1 \cap T = P_1$. Como $L_0R[x]x^n \subseteq L_0 \cap T = P_0 \subseteq P_1 = L_1 \cap T$ e $R[x]x^n \nsubseteq L_1$, então $L_0 \subseteq L_1$. ■

Corolário 2.10 *Existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre :*

(i) O conjunto de todos os ideais primos de $R[x]$ não contendo $R[x]x$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primos de T não contendo $R[x]x^n$.

Prova. Consideremos a correspondência que associa cada ideal primo L de $R[x]$ não contendo $R[x]x$ com o ideal primo $L \cap T$ de T. Claramente $R[x]x^n \nsubseteq L \cap T$. A sobrejetividade e a injetividade da correspondência seguem respectivamente da Proposição 2.7 e do Corolário 2.8. Além disso, os Corolários 2.8 e 2.9 implicam que a correspondência preserva ordem. ■

O radical primo $Nil_*(R)$ de um anel R é definido como a intersecção de todos os ideais primos de R. Conforme ([14], Teorema 10.19), $Nil_*(R[x]) = Nil_*(R)[x]$.

A seguinte proposição estabelece relações entre os radicais primos de T e $R[x]$.

Proposição 2.11 *Para o anel T, $Nil_*(T) = Nil_*(R[x]) \cap T$.*

Prova. Seja I um ideal primo de R. Se $I = 0$, então $R[x]$ e T são anéis primos. Logo, $Nil_*(T) = 0 = Nil_*(R[x]) \cap T$.

Suponhamos que $I \neq 0$. Assim $I[x]$ é um ideal primo de $R[x]$ não contendo $R[x]x$. Utilizando a Proposição 2.7 obtemos, $I[x] \cap T$ é um ideal primo de T. Logo, $Nil_*(T) \subseteq I[x] \cap T$. Portanto $Nil_*(T) \subseteq Nil_*(R)[x] \cap T = Nil_*(R[x]) \cap T$.

Para a outra inclusão, seja $f \in Nil_*(R[x]) \cap T$. Se $f \notin Nil_*(T)$, então existe um ideal P primo de T tal que $f \notin P$. Pelo Corolário 10.4 em [14], $H = T \backslash P$ é um m-sistema de T, isto é, para cada f_1, $f_2 \in H$ existe um $g \in T$ tal que $f_1 g f_2 \in H$. Claramente H é um m-sistema de $R[x]$, pois $H \subseteq T \subseteq R[x]$. Como $f \in H \cap Nil_*(R[x])$, então a Proposição 4.20 em [17] implica que $0 \in H$, absurdo. Portanto $Nil_*(R[x]) \cap T \subseteq Nil_*(T)$, o que completa a prova. ■

Um ideal P de T é chamado S_0-disjunto se $P \neq 0$ e $P \cap S_0 = 0$.

Seja P um ideal primo de T tal que $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Podemos fatorar R como anel primo $\overline{R} = R/(L \cap R)$.

Sejam $\Psi_i : S_i \to R$ a aplicação inclusão e $\Phi : R \to \overline{R}$ a projeção canônica. Então $\Phi \circ \Psi_i : S_i \to \overline{R}$ é um homomorfismo com $Ker(\Phi \circ \Psi_i) = L \cap S_i$. Portanto $\overline{S}_i = S_i/(L \cap S_i)$ pode ser considerado como um subgrupo aditivo de $\overline{R}$ para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$. Não é difícil ver que $\overline{S}_i \overline{S}_j \subseteq \overline{S}_{i+j}$ para cada i, $j \in \{0, ..., n-1\}$ com $\overline{S}_m = \overline{R}$ se $m \geq n$. Portanto $\overline{T} = \overline{S}_0 + ... + \overline{S}_{n-1}x^{n-1} + \overline{R}[x]x^n$ é um subanel admissível de $\overline{R}[x]$.

Seja $\Psi : T \to \overline{T}$ a projeção canônica. Claramente Ψ é um homomorfismo sobrejetor com $Ker(\Psi) = (L \cap R)[x] \cap T$. Conseqüentemente $\overline{T} \simeq T/((L \cap R)[x] \cap T)$. Assim podemos fatorar P como

$$\overline{P} = P/((L \cap R)[x] \cap T) = P/((P \cap S_0) + (L \cap S_1)x + ... + (L \cap S_{n-1})x^{n-1} + (L \cap R)[x]x^n).$$

Então $\overline{T}/\overline{P} \simeq T/P$ e $\overline{P} \cap \overline{S}_0 = 0$. Além disso, não é difícil verificar que $\overline{P} = \overline{L} \cap \overline{T}$, onde $\overline{L} = L/(L \cap R)[x]$ é um ideal primo $\overline{R}$-disjunto de $\overline{R}[x]$.

Portanto o estudo de ideais primos P de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$, pode ser reduzido ao caso em que R é primo, $P \cap S_0 = 0$ e que existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.

Definição 2.12 *Um subanel S de R é dito um subanel essencial se $I \cap S \neq 0$ para cada ideal não nulo I de R.*

Exemplo 2.13 *$S + R[x]x$ é um subanel essencial de $R[x]$, onde R é um anel com identidade e S é um subanel de R.* De fato, seja L um ideal não nulo de $R[x]$. Então $L \cap (S + R[x]x) \neq 0$, pois $0 \neq Lx \subseteq L \cap (S + R[x]x)$.

Observação 2.14 Se S é um subanel primo e essencial de R, então R é um anel primo. De fato, sejam I e J ideais não nulos de R. Como S é essencial, então $I \cap S$ e $J \cap S$ são ideais não nulos de S. Logo, $(I \cap S)(J \cap S) \neq 0$, pois S é primo e então $IJ \neq 0$. Portanto R é um anel primo.

Corolário 2.15 *Assuma que S_0 é um subanel essencial de R. Se P um ideal primo S_0-disjunto de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$, então existe um ideal primo L R-disjunto de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.*

Prova. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Portanto $L \cap R = 0$, pois $L \cap S_0 = 0$ e S_0 é um subanel essencial de R. ■

Lema 2.16 *Sejam R um anel primo e S_0 um subanel essencial de R. Se P é um ideal primo S_0-disjunto de T e $R[x]x^n \nsubseteq P$, então $P \nsubseteq S_1x+...+S_{n-1}x^{n-1}+R[x]x^n$.*

Prova. Suponhamos por contradição que $P \subseteq S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. Pelo Corolário 2.15, existe um ideal primo L R-disjunto de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Seja $s \in (L + R[x]x^n) \cap S_0$. Então $s = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in L$ e $f_2 \in R[x]x^n$. Logo, $s - f_2 = f_1 \in L \cap T = P$ daí $s = 0$. Portanto $(L + R[x]x^n) \cap S_0 = 0$ assim $(L + R[x]x^n) \cap R = 0$, pois S_0 é essencial em R. Utilizando o Lema 1.2 obtemos que $R[x]x^n \subseteq L \cap T = P$, absurdo. Portanto $P \nsubseteq S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. ■

Corolário 2.17 *Assuma que S_0 é um subanel primo e essencial de R. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais primos R-disjuntos de $R[x]$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primos S_0-disjuntos de T.

Prova. Consideremos a correspondência que associa cada ideal primo R-disjunto L de $R[x]$ com o ideal primo S_0-disjunto $L \cap T$ de T. Se L é um ideal primo R-disjunto de $R[x]$ com $R[x]x \subseteq L$, então $L = R[x]x$. Assim $L \cap T = S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ é um ideal primo de T.

Por outro lado, se P é um ideal primo S_0-disjunto de T contendo $R[x]x^n$, então a Proposição 2.6 implica que $P = S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. O outro caso segue dos Corolários 2.10, 2.15 e do Lema 2.16. ■

A seguinte proposição estende a Proposição 1.6.

Proposição 2.18 *Sejam R um anel primo e S_0 um subanel essencial de R. Se P é um ideal primo S_0-disjunto de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$, então $P = Q(R)[x]f_0 \cap T$, para algum polinômio mônico irredutível f_0 em $C(R)[x]$.*

Prova. Suponhamos que P é um ideal primo S_0-disjunto de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pelo Corolário 2.15, existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Utilizando a Proposição 1.6, $L = Q(R)[x]f_0 \cap R[x]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C(R)[x]$. Portanto, $P = L \cap T = Q(R)[x]f_0 \cap T$. ■

O exemplo a seguir mostra que existem ideais primos S_0-disjuntos de T que não são maximais no conjunto dos ideais S_0-disjuntos de T.

Exemplo 2.19 *Seja $A = K + R[x]x$, onde K um corpo e $R = K[x_1, x_2, ..., x_n]$.* Temos que $I_i = \langle x_i, ..., x_n \rangle$ o ideal gerado por $x_i, ..., x_n$ em R é um ideal primo de R para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, $L_i = I_i[x]$ é um ideal primo de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L_i$.

Pela Proposição 2.7, $P_i = L_i \cap A$ é um ideal primo K-disjunto de A para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Além disso, se $P_i = P_{i+1}$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, então $L_i R[x]x \subseteq L_i \cap A = P_i = P_{i+1} \subset L_{i+1}$. Logo, $L_i \subseteq L_{i+1}$, absurdo. Portanto $P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n$ é uma cadeia de ideais primos K-disjuntos de A.

Lema 2.20 *Sejam S_0 um subanel primo de R e P um ideal de T. Se P é maximal no conjunto dos ideais S_0-disjuntos de T, então P é um ideal primo de T*

Prova. Sejam U, V ideais em T tais que $U \supseteq P$, $V \supseteq P$ e $UV \subseteq P$. Então $(U \cap S_0)(V \cap S_0) \subseteq P \cap S_0 = 0$ logo $U \cap S_0 = 0$ ou $V \cap S_0 = 0$. Pela maximalidade de P, $U = P$ ou $V = P$ assim P é um ideal primo de T. ■

Teorema 2.21 *Assuma que S_0 é um subanel primo essencial de R. Então P é um ideal primo S_0-disjunto de T se, e somente se, P é maximal no conjunto dos ideais S_0-disjuntos de T*

Prova. Uma parte segue do Lema 2.20. Agora vamos mostrar a recíproca.

Suponhamos que P é um ideal primo S_0-disjunto de T. Se $R[x]x^n \subseteq P$ a Proposição 2.6 implica que $P = S_1 x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ assim P é maximal no conjunto dos ideais S_0-disjuntos de T.

Se $R[x]x^n \nsubseteq P$ o Corolário 2.15 implica que existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Considere um ideal S_0-disjunto P' de T com $P \subseteq P'$. Podemos assumir que P' é maximal no conjunto dos ideais S_0-disjuntos de T.

Utilizando o lema anterior, P' é um ideal primo de T. Então a Proposição 2.6 e o Lema 2.16 implicam que $R[x]x^n \nsubseteq P'$. Pelo Corolário 2.9, existe um ideal primo $L' \supseteq L$ de $R[x]$ tal que $L' \cap T = P'$. Como S_0 é um subanel essencial de R, o Corolário 2.15 implica que $L' \cap R = 0$. Portanto $L = L'$, pois L é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$. Conseqüentemente $P = L \cap T = L' \cap T = P'$. ■

2.2 Ideais Maximais em Subanéis Admissíveis

Os principais resultados desta seção caracterizam os ideais maximais de T e generalizam alguns resultados em [1] e [19].

Observação 2.22 T não é um anel simples. De fato, se T é um anel simples, então $R[x]x^n = T = (R[x]x^n)^2$, absurdo.

Proposição 2.23 *Seja M um ideal primo de T com $R[x]x^n \nsubseteq M$. Se M é maximal, então existe um ideal L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $(T/M) \simeq (R[x]/L)$ e $L \cap T = M$. Em particular L é maximal em $R[x]$.*

Prova. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = M$. Temos que $M + R[x]x^n = T$ e $M \cap R[x]x^n = L \cap R[x]x^n$. Assim

$$(T/M) = ((M + R[x]x^n)/M) \simeq (R[x]x^n/(M \cap R[x]x^n)) = (R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n)).$$

Então Lx^n é um ideal maximal de $R[x]x^n$, pois $Lx^n = L \cap R[x]x^n$. Vamos mostrar que L é maximal em $R[x]$.

Seja U um ideal de $R[x]$ com $L \subseteq U$. Então $Lx^n \subseteq Ux^n$ assim $Ux^n = Lx^n$ ou $Ux^n = R[x]x^n$. Logo, $U = L$ ou $U = R[x]$ daí L é maximal em $R[x]$. Além disso,

$$(R[x]/L) = ((L + R[x]x^n)/L) \simeq (R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n)) \simeq (T/M).$$

■

O Exemplo 2.5 mostra que a contração de um ideal maximal de $R[x]$ contendo $R[x]x$ em T nem sempre é um ideal maximal de T. Como R não tem necessariamente identidade, então pode existir um ideal maximal de $R[x]$ que não é primo, neste caso o ideal contém $(R[x])^2$.

Proposição 2.24 *Seja L um ideal maximal de $R[x]$. Então,*

(i) Se L não é primo, então $L \cap T$ é um ideal maximal de T.

(ii) Se L é primo e $R[x]x \nsubseteq L$, então $(R[x]/L) \simeq (T/L \cap T)$. Em particular $L \cap T$ é um ideal maximal de T.

Prova. (i) Suponhamos que L não seja primo. Seja U um ideal de T com $L \cap T \subseteq U$. Logo, $U + L$ é um ideal de $R[x]$, pois $(R[x])^2 \subseteq L \subseteq L + U$. A maximalidade de L implica que $U \subseteq L \cap T$ ou $L + U = R[x]$.

Se $L + U = R[x]$, então $T = (L + U) \cap T = (L \cap T) + U \subseteq U$. Portanto $U = L \cap T$ ou $U = T$. Segue que $L \cap T$ é maximal em T.

(ii) Suponhamos que L seja primo e $R[x]x \nsubseteq L$. Pelo Lema 2.3, $R[x]x^n \nsubseteq L$ e assim $L + R[x]x^n = R[x]$. Temos que $R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n) \simeq (L + R[x]x^n)/L = R[x]/L$. Como $R[x]x^n \subseteq T$, então $(L \cap T) + R[x]x^n = (L + R[x]x^n) \cap T = (R[x] \cap T) = T$. Portanto

$$T/(L \cap T) = (((L \cap T) + R[x]x^n))/(L \cap T) \simeq R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n) \simeq (R[x]/L).$$

Conseqüentemente $L \cap T$ é um ideal maximal de T. ∎

O próximo corolário é uma conseqüência imediata das Proposições 2.23 e 2.24.

Corolário 2.25 *Seja M um ideal de T com $R[x]x^n \nsubseteq M$. Então T/M é simples com identidade se, e somente se, existe um ideal L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $R[x]/L$ é simples com identidade e $L \cap T = M$.*

A demonstração do seguinte corolário é análoga à demonstração do Corolário 2.10.

Corolário 2.26 *Existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais L de $R[x]$ tal que $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]/L$ é simples com identidade.

(ii) O conjunto de todos os ideais P de T tal que $R[x]x^n \nsubseteq P$ e T/P é simples com identidade.

Seja $f = a_m x^m + ... + a_n x^n \in T$ com $m \leq n$ tal que a_m e a_n são elementos não nulos de R. Então o comprimento $l(f)$ de f é definido por $l(f) = n - m + 1$, onde n é usualmente chamado o grau de f. Seja H um ideal S_0-disjunto de T. Denotamos por $\tau(H)$ o conjunto consistindo de zero e de todos os coeficientes líderes de polinômios de comprimento minimal em H.

O seguinte lema é inspirado no Lema 3 em [8].

Lema 2.27 *Sejam H um ideal S_0-disjunto de T e I um ideal primo não nulo de R. Se $\tau(H) \nsubseteq I$, então $(H + (I[x] \cap T)) \cap S_0 = I \cap S_0$.*

Prova. Suponhamos por absurdo que existe $s \in S_0 \backslash I$ tal que $s = h_1 + h_2$, onde $h_1 = c_0 + c_1 x + ... + c_t x^t \in H$ e $h_2 = d_0 + ... + d_t x^t \in I[x] \cap T$. Logo, $h_1 \neq 0$, $c_0 \notin I$ e $c_i \in I$ para cada $i \in \{1, ..., t\}$.

Seja $g = b_i x^i + ... + b_j x^j \in H$ de comprimento minimal em H com respeito as condições $b_i \notin I$ e $b_l \in I$ para cada $l \in \{i+1, ..., j\}$. Por hipótese, existe $f = a_k x^k + ... + a_m x^m \in H$ de comprimento minimal em H tal que $a_m \notin I$. Como I é um ideal primo de R, existem r_1, $r_2 \in R$ tais que $r_1 b_i \notin I$ e $r_2 a_m \notin I$. Se $j \leq m$, então os polinômios $r_1 x^{n+m-j} g$ e $r_2 x^n f$ são de graus $n + m$ e satisfazem as mesmas condições de g e f, respectivamente. Analogamente, obtemos a mesma conclusão se $j \geq m$. Então podemos supor que $m = j$. Temos que existe $r \in R$ tal que $b_i r a_m \notin I$, pois I é primo. Seja $h_3 = g r a_m x^n - b_j r x^n f \in H$ daí

$$h_3 = (b_i r a_m x^{n+i} + ... + b_j r a_m x^{n+j}) - (b_j r a_k x^{k+n} + ... + b_j r a_m) x^{n+j}).$$

Como $l(f) \leq l(g)$, ou seja $m - k \leq j - i$, então $i \leq k$.

Se $i = k$, então $l(h_3) \leq n+j-1-(k+n)+1 = j-k = m-k < m-k+1 = l(f)$. Pela minimalidade do comprimento de f em H segue que $h_3 = 0$, assim $b_i r a_m = b_j r a_k \in I$, absurdo.

Se $i < k$, então $l(h_3) \leq n + j - 1 - (n + i) + 1 = j - i < j - i + 1 = l(g)$. Portanto h_3 contradiz a minimalidade do comprimento de g. Concluímos que $(H + (I[x] \cap T)) \cap S_0 = I \cap S_0$. ■

Dado um anel R o pseudo radical $p_s(R)$ de R é, por definição, a intersecção de todos os ideais primos não nulos de R.

Conforme ([7], Corolário 2.2), se existe um ideal maximal R-disjunto de $R[x]$, então $p_s(R) \neq 0$. O próximo exemplo mostra que o mesmo não acontece em T.

Exemplo 2.28 *Sejam K um corpo e $A = S + R[x]x$, onde $S = K \times \{0\}$ e $R = K \times K$.* Temos que $M = R[x]x$ é um ideal maximal S-disjunto de A e $p_s(R) = 0$, pois $K \times \{0\}$ e $\{0\} \times K$ são ideais primos não nulos de R e $(K \times \{0\}) \cap (\{0\} \times K) = 0$.

Corolário 2.29 *Seja S_0 um subanel essencial de R. Se existe um ideal M maximal e S_0-disjunto de T, então $p_s(R) \neq 0$.*

Prova. Seja I um ideal primo não nulo de R. Se M não é um ideal primo, então $T^2 \subseteq M$. Logo, $R^2 x^{2n} = Rx^n Rx^n \subseteq T^2 \subseteq M$. Portanto todos os elementos de R^2 são coeficientes líderes de polinômios de comprimento minimal em M.

Então $R^2 \subseteq \tau(M)$ assim $\tau(M) \nsubseteq I$, pois $R^2 \nsubseteq I$. Utilizando o Lema 2.27 obtemos que $(M + (I[x] \cap T)) \cap S_0 = I \cap S_0$. Como $I \cap S_0 \neq 0$ a maximalidade de M implica que $M + (I[x] \cap T) = T$. Logo, $S_0 = I \cap S_0$ assim $S_0 \subseteq I$ e segue que $0 \neq S_0 \subseteq p_s(R)$.

Agora suponhamos que M é um ideal primo de T. Se $R[x]x^n \subseteq M$ então a

Proposição 2.6 implica que S_0 é um anel simples. Por hipótese, para cada ideal primo não nulo I de R segue que $I \cap S_0 \neq 0$. Logo, $I \cap S_0 = S_0$ assim $S_0 \subseteq p_s(R)$.

Se $R[x]x^n \nsubseteq M$, então a Proposição 2.23 implica que existe um ideal maximal L de $R[x]$ tal que $L \cap T = M$. Como S_0 é essencial em R, então $L \cap R = 0$. Utilizando o Corolário 4.3 em [9], otemos que $p_s(R) \neq 0$. ■

Um anel R é dito um anel com centro grande se para cada ideal não nulo I de R, $I \cap Z(R) \neq 0$, onde $Z(R)$ é o centro de R. Seja ρ a classe dos anéis primos não nulos com centro grande.

Teorema 2.30 *Para o anel T as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe um ideal S_0-disjunto M de T com $R[x]x^n \nsubseteq M$ tal que T/M é simples com identidade .

(ii) Existe um ideal primo I de R com $I \cap S_0 = 0$ tal que $p_s(\overline{R}) \neq 0$ e $\overline{R} \in \rho$, onde $\overline{R} = R/I$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja M um ideal S_0-disjunto de T com $R[x]x^n \nsubseteq M$ tal que T/M é simples com identidade. Pelo Corolário 2.25, existe um ideal L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $R[x]/L$ é simples com identidade e $L \cap T = M$. Daí o Corolário 4.8 em [9] implica que $R/(L \cap R) \in \rho$ e $p_s(R/(L \cap R)) \neq 0$. Além disso, $(L \cap R) \cap S_0 = M \cap S_0 = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que vale (ii) e seja $\overline{R} = R/I$. Pelo Corolário 4.8 em [9] existe um ideal $\overline{R}$-disjunto $\overline{L}$ de $\overline{R}[x]$ com $\overline{R}[x]x \nsubseteq \overline{L}$ tal que $\overline{R}[x]/\overline{L}$ é simples com identidade. Como $\overline{R}[x] = (R/I)[x] \simeq (R[x]/I[x])$, então existe um ideal L de $R[x]$ contendo $I[x]$ tal que $\overline{L} = L/I[x]$. Então $R[x]/L$ é simples com identidade, $R[x]x \nsubseteq L$ e $L \cap R = I$, pois $(R[x]/L) \simeq (\overline{R}[x]/\overline{L})$ e $\overline{L} \cap \overline{R} = 0$. Pelo Corolário 2.25, $T/(L \cap T)$ é um anel simples com identidade e $R[x]x^n \nsubseteq L \cap T$. Além disso, $(L \cap T) \cap S_0 \subseteq I \cap S_0 = 0$. ■

Observação 2.31 O teorema anterior permite descrever completamente quando existe um ideal S_0-disjunto M de T tal que T/M é um anel simples com identidade. De fato, se isso acontece ou temos $p_s(R/I) \neq 0$ e $(R/I) \in \rho$, para algum ideal primo I de R com $I \cap S_0 = 0$ ou então M contém $R[x]x^n$. Neste último caso a Proposição 2.6 implica que

$$M = S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$$

e segue que S_0 deve ser um anel simples com identidade. A recíproca também é verdadeira.

O seguinte resultado generaliza ([9], Teorema 4.8).

Corolário 2.32 *Seja S_0 um subanel essencial de R. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe um ideal S_0-disjunto M de T com $R[x]x^n \nsubseteq M$ tal que T/M é simples com identidade.

(ii) $R \in \rho$ e $p_s(R) \neq 0$.

(iii) R é primo e $p_s(R) \cap Z(R) \neq 0$.

Prova. O Teorema 2.30 implica que (i) e (ii) são equivalentes. Pelo Teorema 4.8 em [9] segue que (ii) e (iii) são equivalentes. Daí segue o resultado. ■

O radical de Brown-McCoy $U(R)$ de um anel R, é definido como a interseção de todos os ideais I de R tal que R/I é simples com identidade. Em particular um anel R é um anel radical de Brown-McCoy se $U(R) = R$, ou equivalentemente, se R não pode ser aplicado homomorficamente sobre um anel simples com identidade.

Em [13], Krempa provou que $U(R[x]) = (U(R[x]) \cap R)[x]$.

A seguinte proposição estabelece relações entre os radicais de Brown-McCoy de T e $R[x]$.

Proposição 2.33 *Para o anel T vale a seguinte igualdade.*

$$U(T) = U(T) \cap S_0 + (U(R[x]) \cap S_1)x + ... + (U(R[x]) \cap S_{n-1})x^{n-1} + U(R[x])x^n.$$

Prova. Seja M um ideal de T tal que T/M é um anel simples com identidade. Se $R[x]x^n \nsubseteq M$, então pelo Corolário 2.25 temos que existe um ideal L de $R[x]$ com $L \cap T = M$ tal que $R[x]/L$ é simples com identidade. Logo, $U(R[x]) \cap T \subseteq L \cap T = M$. Se $R[x]x^n \subseteq M$, então $M = (M \cap S_0) + S_1 x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. Em ambos os casos $U(R[x])x^n$ e $(U(R[x]) \cap S_i)x^i$ estão contidos em M para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Portanto

$$(U(T) \cap S_0) + (U(R[x]) \cap S_1)x + ... + (U(R[x]) \cap S_{n-1})x^{n-1} + U(R[x])x^n \subseteq U(T). \quad (2.1)$$

Para a outra inclusão, sejam $f = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k \in U(T)$ e L um ideal de $R[x]$ tal que $R[x]/L$ é um anel simples com identidade. Se $R[x]x \nsubseteq L$, então o Corolário 2.25 implica que $T/(L \cap T)$ é um anel simples com identidade. Logo, $U(T) \subseteq L \cap T$ assim o Lema 2.3 implica que $U(T)x \subseteq L$. Se $R[x]x \subseteq L$, então $L = L \cap R + R[x]x$ daí $U(T)x \subseteq R[x]x \subseteq L$. Pelos casos acima, $U(T)x \subseteq U(R[x])$. Logo, $fx \in U(T)x \subseteq U(R[x]) = (U(R[x]) \cap R)[x]$.

Então $a_i \in U(R[x]) \cap S_i$ para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$ e $a_j \in U(R[x]) \cap R$, $j \geq n$. Utilizando (2.1) obtemos que $f - a_0 \in U(T)$ daí $a_0 \in U(T)$. Portanto

$$U(T) \subseteq (U(T) \cap S_0) + (U(R[x]) \cap S_1)x + ... + (U(R[x]) \cap S_{n-1})x^{n-1} + U(R[x])x^n. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) obtemos a igualdade desejada. ■

Conforme ([19], Corolário 3), se R é um anel nil ou simples sem identidade, então $R[x]$ é um anel radical de Brown-McCoy.

Corolário 2.34 *Se R é um anel nil, então T é um anel radical de Brown-Mccoy.*

Prova. Suponhamos por contradição que existe um ideal M de T tal que T/M é simples com identidade. Se $R[x]x^n \subseteq M$, então a Proposição 2.6 implica que

$M = M \cap S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$, assim $S_0/(M \cap S_0) \backsimeq T/M$ é simples com identidade, o que contradiz a nilidade de S_0.

Se $R[x]x^n \nsubseteq M$, então a Corolário 2.25 implica que existe um ideal L de $R[x]$ talque $R[x]/L$ é simples com identidade e $L \cap T = M$. O que contradiz o Corolário 3 em [19]. ■

A demonstração da próxima proposição é análoga à prova do corolário anterior.

Proposição 2.35 *Seja R um anel simples sem identidade. Se S_0 é um subanel nil ou simples sem identidade, então T é um anel radical Brown-McCoy.*

Os próximos exemplos mostram que em geral T não é um anel radical de Brown-McCoy se ocorre apenas uma das seguintes possibilidades:

(i) S_0 é simples sem identidade

(ii) R é simples sem identidade.

Exemplo 2.36 *Sejam R um anel simples com identidade e S um subanel qualquer de R.* Não é difícil verificar que $L = (x + 1)R[x]$ é um ideal maximal R-disjunto de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$. Pelo Corolário 2.25, $(S + R[x]x)/(L \cap (S + R[x]x))$ é um anel simples com identidade. Assim $S + R[x]x$ não é um anel radical de Brown-McCoy.

Exemplo 2.37 *Sejam R um anel qualquer e S um subanel simples com identidade de R.* Temos que $(S + R[x]x)/R[x]x \simeq S$ é um anel simples com identidade. Assim $S + R[x]x$ não é um anel radical de Brown-McCoy.

Um anel R é chamado um anel radical de Beherens, se R não pode ser homomorficamente aplicado sobre um anel com um idempotente não nulo.

Lema 2.38 *([1], Proposição 3.1) Um anel R é radical de Beherens se, e somente se cada ideal à esquerda de R é um anel radical de Brown-Mccoy.*

Conforme ([1], Corolário 3.6), se R é um anel nil, então $R[x]$ é um anel radical de Beherens.

Teorema 2.39 *Se R é um anel nil, então T é um anel radical de Beherens.*

Prova. Utilizando o Lema 2.38, basta mostrar que cada ideal à esquerda de T é um anel radical de Brown-MCcoy. Suponhamos por contradição que existe um ideal à esquerda U de T tal que U não é um anel radical de Brown-MCcoy. Logo, existe um ideal I de U tal que U/I é simples com identidade.

Temos que $V = U + R[x]U$ é um ideal à esquerda de $R[x]$. Além disso, $R[x]x^nV$ é um ideal de U, pois $R[x]x^nV \subseteq R[x]x^nU + R[x]x^nR[x]U \subseteq U$. A maximalidade de I em U implica que $I + R[x]x^nV = U$ ou $R[x]x^nV \subseteq I$. Primeiramente suponhamos que $R[x]x^nV \subseteq I$. Então

$$(U \cap R[x]x^n)(U \cap R[x]x^n) \subseteq R[x]x^nU \subseteq R[x]x^nV \subseteq I$$

assim $U \cap R[x]x^n \subseteq I$, pois I é um ideal primo de U.

Seja $\overline{f} = f + I$ o elemento identidade de U/I, onde $f = a_0 + a_1x + ... + a_ix^i \in U$. Pela nilidade de R, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_0^j = 0$ assim $f^j \in U \cap R[x]x$. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k \in U \cap R[x]x^n \subseteq I$. Portanto $\overline{f} = \overline{f}^k = f^k + I$ e $f^k \in I$, absurdo.

Agora consideremos a outra possiblidade ou seja, $I + R[x]x^nV = U$. Neste caso, $R[x]x^nV/(I \cap R[x]x^nV) \simeq ((I + R[x]x^nV)/I) = (U/I)$. Como U/I é um anel simples com identidade, então $R[x]x^nV$ é um ideal à esquerda de $R[x]$ o qual não é um anel radical de Brown-Mccoy. Pelo Lema 2.38, $R[x]$ não é um anel radical de Beherens, o que contradiz o Corolário 3.6 de [1]. ■

2.3 Ideais Primitivos em Subanéis Admissíveis

Os principais resultados desta seção caracterizam os ideais primitivos à direita de T e generalizam alguns resultados em [20]. Analogamente podemos obter os mesmos resultados para ideais primitivos à esquerda de T.

Lema 2.40 *Seja U um ideal à direita de T com $R[x]x^n \nsubseteq U$. Então U é modular maximal em T se, e somente se, existe um ideal à direita V modular maximal de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq V$ tal que $V \cap T = U$.*

Prova. Suponhamos que U seja um ideal modular maximal à direita de T com $R[x]x^n \nsubseteq U$. Logo existe $g \in T$ tal que $f - gf \in U$, para cada $f \in T$. Pela maximalidade de U, $U + R[x]x^n = T$. Assim podemos escrever $g = g_1 + g_2$ com $g_1 \in U$ e $g_2 \in R[x]x^n$. Temos, $f - gf = f - g_1 f - g_2 f \in U$, para cada $f \in T$. Logo, $f - g_2 f \in U$, pois $g_1 f \in U$. Assim podemos assumir que $g \in R[x]x^n$.

Vamos mostrar que $(R[x]x^n)^2 \nsubseteq U$. De fato, suponhamos por absurdo que $(R[x]x^n)^2 \subseteq U$. Logo, $gR[x]x^n \subseteq U$ assim $R[x]x^n \subseteq U$, absurdo.

Se $(U + UR[x]) \cap T = T$, então $(R[x]x^n)^2 \subseteq (U + UR[x])R[x]x^n \subseteq U$, absurdo. Pela maximalidade de U, $(U + UR[x]) \cap T = U$.

Seja V um ideal à direita de $R[x]$ contendo U e maximal com respeito $V \cap T = U$. Primeiramente, vamos mostrar que V é um ideal à direita modular de $R[x]$.

Sejam $f \in R[x]$ e H o ideal à direita de $R[x]$ gerado por $f - gf$, isto é

$H = \mathbb{Z}(f - gf) + (f - gf)R[x]$. Se $(V + H) \cap T = T$, então

$$(R[x]x^n)^2 \subseteq TR[x]x^n \subseteq (V + H)R[x]x^n \subseteq VR[x]x^n + HR[x]x^n \subseteq U.$$

Isso contradiz o que mostramos acima. Logo, $U \subseteq (V+H) \cap T \neq T$. A maximalidade de U implica que $(V + H) \cap T = U$. Pela maximalidade de V temos, $V + H = V$ assim $H \subseteq V$. Portanto $f - gf \in V$, daí V é um ideal à direita modular de $R[x]$.

Agora vamos mostrar que V é um ideal à direita maximal de $R[x]$. De fato, suponhamos que J é um ideal à direita de $R[x]$ tal que $V \subseteq J$. Se $J \cap T = U$, então $J = V$, pois V é maximal no conjunto dos ideais com respeito $V \cap T = U$. Se $J \cap T \neq U$, então a maximalidade de U implica que $J \cap T = T$. Portanto $R[x] = J$, pois $gR[x] \subseteq T \subseteq J$ e $f - gf \in V \subseteq J$ para cada $f \in R[x]$. Concluímos que V é um ideal à direita modular maximal de $R[x]$.

Reciprocamente, seja V um ideal à direita modular maximal de $R[x]$ tal que $R[x]x \nsubseteq V$. Temos que existe $g \in R[x]$ tal que $f - gf \in V$, para cada $f \in R[x]$. Agora vamos mostrar que $R[x]x^n \nsubseteq V$.

Suponhamos por contradição que $R[x]x^n \subseteq V$. Como $V + R[x]x = R[x]$, então com o mesmo raciocínio do início da demonstração podemos assumir que $g \in R[x]x$.

Se $h \in R[x]x^{n-1}$ então $h - gh \in V$. Logo $h \in V$, pois $gh \in R[x]x^n \subseteq V$. Portanto $R[x]x^{n-1} \subseteq V$. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que $R[x]x \subseteq V$, absurdo. Logo, $R[x]x^n \nsubseteq V$ assim $V + R[x]x^n = R[x]$ e $(R[x]x^n)^2 \nsubseteq V$. Então podemos supor que $g \in R[x]x^n \subseteq T$, daí $V \cap T$ é um ideal à direita modular de T. Vamos mostrar que $V \cap T$ é um ideal à direita maximal de T. De fato, suponhamos que J é um ideal à direita de T tal que $V \cap T \subseteq J$. Se $J + JR[x] \subseteq V$, então $J = V \cap T$. Suponhamos que $J + JR[x] \nsubseteq V$. Pela maximalidade de V, $J + JR[x] + V = R[x]$. Logo, $R[x]R[x]x^n \subseteq JR[x]x^n + JR[x]R[x]x^n + VR[x]x^n \subseteq J$. Portanto $T = R[x] \cap T = (V + R[x]R[x]x^n) \cap T = (V \cap T) + R[x]R[x]x^n \subseteq J$. Concluímos que $V \cap T$ é um ideal à direita modular maximal de T. ∎

O Exemplo 2.5 mostra que a contração de um ideal primitivo à direita de $R[x]$ em T nem sempre é um ideal primitivo à direita de T.

Proposição 2.41 *Seja P um ideal de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Então P é um ideal primitivo à direita de T se, e somente se, existe um ideal L de $R[x]$ primitivo à direita com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primitivo à direita de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pelo Lema 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Por hipótese, existe um ideal à direita modular maximal U de T tal que P é o maior ideal contido em U ou seja, $P = (U : T) = \{f \in T \mid Tf \subseteq U\}$.

Se $R[x]x^n \subseteq U$, então $R[x]x^n \subseteq P$, pois $P + R[x]x^n$ é um ideal de T contido em U, isto contradiz o fato de que $R[x]x^n \nsubseteq P$ assim $R[x]x^n \nsubseteq U$. Pela Proposição 2.40, existe um ideal à direita maximal modular V de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq V$ tal que $V \cap T = U$. Portanto $L \cap T = P \subseteq U = V \cap T$. Se $V + L = R[x]$ então,

$$R[x]R[x]x^n \subseteq VR[x]x^n + LR[x]x^n \subseteq (V \cap T) + (L \cap T) \subseteq V \cap T = U.$$

Portanto $TR[x]x^n \subseteq U$ e assim $R[x]x^n \subseteq P$, absurdo. A maximalidade de V implica que $L \subseteq V$. Além disso, $L \subseteq (V : R[x]) = \{f \in R[x] \mid R[x]f \subseteq V\}$.

Seja $f \in (V : R[x])$. Por definição $R[x]f \subseteq V$ com isso $Tfx^n \subseteq V \cap T = U$. Logo, $fx^n \in (U : T) = P \subseteq L$. A Proposição 1.1 implica que $f \in L$. Portanto $L = (V : R[x])$ assim L é um ideal primitivo à direita de $R[x]$.

Reciprocamente, suponhamos que L seja um ideal primitivo à direita de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$. Temos que existe um ideal à direita modular maximal V de $R[x]$ tal que L é o maior ideal contido em V. Se $R[x]x \subseteq V$, então $R[x]x \subseteq L$, pois $L + R[x]x$ é um ideal de $R[x]$ contido em V. Como $R[x]x \nsubseteq L$, então $R[x]x \nsubseteq V$. Pela Proposição 2.40, $V \cap T$ é um ideal à direita maximal modular de T. Além disso, a Proposição 2.7 implica que $P = L \cap T$ é um ideal primo de T. É claro que $L \cap T = (V : R[x]) \cap T$.

Vamos verificar que $(V : R[x]) \cap T = (V \cap T : T)$. De fato, seja $f \in T$ tal que $R[x]f \subseteq V$, assim $Tf \subseteq V \cap T$ daí $(V : R[x]) \cap T \subseteq (V \cap T : T)$. Para a outra inclusão, considere $f \in T$ tal que $Tf \subseteq V \cap T$, assim $R[x]x^n f \subseteq V$ logo $fx^n \in (V : R[x]) = L$. Como L é primo e $R[x]x^n \nsubseteq L$, segue que da Proposição 1.1 que $f \in L$ assim $f \in L \cap T = (V : R[x]) \cap T$. Portanto $(V \cap T : T) = (V : R[x]) \cap T$. Conseqüentemente $L \cap T$ é um ideal primitivo à direita de T. $\blacksquare$

Utilizando o Corolário 2.10 e a proposição anterior, obtemos o seguinte.

Corolário 2.42 *Existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre :*

(i) O conjunto de todos os ideais primitivos à direita L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primitivos à direita P de T tais que $R[x]x^n \nsubseteq P$.

Conforme ([20], Corolário 1), se R é um anel nil, então $R[x]$ não pode ser homomorficamente aplicado sobre um anel primitivo à direita simples.

Proposição 2.43 *Seja R um anel nil. Então T não pode ser homomorficamente aplicado sobre um anel primitivo à direita simples.*

Prova. Suponhamos por contradição que existe um ideal P de T tal que T/P é um anel primitivo à direita simples. A nilidade do anel $S_0/(P \cap S_0)$ implica que $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pela Proposição 2.23, existe um ideal L de $R[x]$ com $L \cap T = P$ tal que $(R[x]/L) \simeq (T/M)$. Então L é um ideal primitivo á direita simples de $R[x]$. Isso contradiz o Corolário 1 em [20]. ■

O radical de Jacobson $J(R)$ de um anel R é definido como a intersecção de todos os ideais primitivos à direita de R. Um anel R é chamado anel radical de Jacobson se $J(R) = R$.

Conforme ([14], Teorema 5.10), $J(R[x]) = (J(R[x]) \cap R)[x]$.

Observação 2.44 Sejam R o anel de matrizes $n \times n$ sobre um corpo K e S o anel de matrizes triangulares inferiores sobre K. Segue que $J(R[x]) = (J(R[x]) \cap R)[x] = 0$, pois R é um anel simples com identidade. Se $A = S + R[x]x$, então $J(A) = 0$. De fato, pelo Teorema 6.14 de [17] obtemos que

$$0 = J(R[x]) \cap R[x]x = J(R[x]x) = J(A) \cap R[x]x$$

Logo, $J(A)x \subseteq J(A) \cap R[x]x = 0$. Assim $J(A) = 0$.

A seguinte proposição estabelece relações entre os radicais de Jacobson de T e $R[x]$.

Proposição 2.45 *Para o anel T temos, $J(T) = J(R[x]) \cap T$.*

Prova. Seja P um ideal primitivo à direita de T. Se $R[x]x^n \nsubseteq P$, então a Proposição 2.41 implica que existe um ideal primitivo à direita L de $R[x]$ com $L \cap T = P$. Logo, $J(R[x]) \cap T \subseteq L \cap T = P$.

Se $R[x]x^n \subseteq P$, então $P = P \cap S_0 + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$. Pelo Lema 5.10 em [14], $J(R[x]) \cap S_0$ é um ideal nil de S_0. Logo, o Corolário 6.8 em [17] implica que $J(R[x]) \cap S_0 \subseteq J(S_0)$. Portanto $J(R[x]) \cap S_0 \subseteq J(S_0) \subseteq P \cap S_0$, pois $P \cap S_0$ é um ideal primitivo à direita de S_0. Em ambos os casos $J(R[x])x^n$ e $(J(R[x]) \cap S_i)x^i$ estão em P para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$. Então $J(R[x]) \cap T \subseteq J(T)$.

Para a outra inclusão sejam $f = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \in J(T)$ e L um ideal primitivo à direita de $R[x]$. Se $R[x]x \nsubseteq L$, então a Proposição 2.41 implica que $L \cap T$ é um ideal primitivo à direita de T. Logo, $J(T) \subseteq L \cap T$. Pelo Lema 2.3 $J(T)x \subseteq Lx \subseteq L$. Se $R[x]x \subseteq L$, então $L = L \cap R + R[x]x$ assim $J(T)x \subseteq R[x]x \subseteq L$. Pelos casos acima, $J(T)x \subseteq J(R[x])$. Logo, $fx \in J(T)x \subseteq J(R[x]) = (J(R[x]) \cap R)[x]$. Então $a_i \in J(R[x]) \cap S_i$ para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$ e $a_j \in J(R[x]) \cap R$, $j \geq n$.

Portanto $f \in (J(R[x]) \cap R)[x] \cap T = J(R[x]) \cap T$ assim $J(T) \subseteq J(R[x]) \cap T$. Então obtemos a igualdade desejada. ■

Corolário 2.46 *O ideal $J(T) \cap S_0$ é um ideal nil.*

Prova. Pelo Teorema 5.10 em [14], $J(R[x]) \cap R$ é um ideal nil de R. Então a proposição anterior implica que $J(T) \cap S_0$ é um ideal nil de S_0. ■

Um anel R é chamado J-semisimples se $J(R) = 0$

Proposição 2.47 *Seja P um ideal primo de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Então T/P é um anel J-semisimples se, e somente se, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $R[x]/L$ é um anel J-semisimples e $L \cap T = P$.*

Prova. Suponhamos que $R[x]x^n \nsubseteq P$ e $J(T/P) = 0$. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$.

Por hipótese, existe uma família $(P_i)_{i\in\Omega}$ de ideais primitivos à direita de T contendo P tal que $P = \cap_{i\in\Omega} P_i$. Seja $(P_j)_{j\in\Lambda}$ a subfamília de $(P_i)_{i\in\Omega}$ tais que $R[x]x^n \nsubseteq P_j$, para cada $j \in \Lambda$. Temos que

$$(\cap_{j\in\Lambda} P_j)(\cap_{i\in\Omega-\Lambda} P_i) \subseteq (\cap_{j\in\Lambda} P_j) \cap (\cap_{i\in\Omega-\Lambda} P_i) = \cap_{j\in\Omega} P_j = P.$$

Como $R[x]x^n \subseteq \cap_{i\in\Omega-\Lambda} P_i$ e $R[x]x^n \nsubseteq P$, então a Proposição 1.1 implica que $P = (\cap_{j\in\Lambda} P_j)$.

Pela Proposição 2.41, para cada $j \in \Lambda$, existe um ideal primitivo à direita L_j de $R[x]$ contendo L tal que $L_j \cap T = P_j$. Temos,

$$(\cap_{j\in\Lambda} L_j)R[x]x^n \subseteq \cap_{j\in\Lambda}(L_j \cap T) = P \subseteq L.$$

Pela Proposição 1.1, $(\cap_{j\in\Lambda} L_j) = L$ assim $J(R[x]/L)) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que exista um ideal primo L de $R[x]$ tal que $R[x]x \nsubseteq L$ e $J(R[x]/L) = 0$. Logo, existe uma família $(L_i)_{i\in\Gamma}$ de ideais primitivos à direita de $R[x]$ contendo L tal que $L = \cap_{i\in\Gamma} L_i$. Seja $(L_j)_{j\in\Delta}$ a subfamília de $(L_i)_{i\in\Gamma}$ tal que $R[x]x \nsubseteq L_j$ para cada $j \in \Delta$. Temos,

$$(\cap_{j\in\Delta} L_j)(\cap_{i\in\Gamma-\Delta} L_i) \subseteq (\cap_{j\in\Delta} L_j) \cap (\cap_{i\in\Gamma-\Delta} L_i) = \cap_{i\in\Gamma} L_i = L.$$

Como $R[x]x \subseteq \cap_{i\in\Gamma-\Delta} L_i$ e $R[x]x \nsubseteq L$, então a Proposição 1.1 implica que $L = \cap_{j\in\Delta} L_j$. Utilizando a Proposição 2.41, $L_j \cap T$ é um ideal primitivo à direita de T contendo $L \cap T$, para cada $j \in \Delta$. Logo, $\cap_{j\in\Delta}(L_j \cap T) = (\cap_{j\in\Delta} L_j) \cap T = L \cap T$, assim $J(T/(L \cap T))) = 0$. ■

Teorema 2.48 *Seja R um anel nil. Então T é um anel radical de Jacobson se, e somente se, $R[x]$ é um anel radical de Jacobson.*

Prova. Suponhamos por contradição que T seja um anel radical de Jacobson e que $R[x]$ não seja um anel radical de Jacobson. Logo, existe um ideal primitivo à direita L de $R[x]$. A nilidade do anel $R/(L \cap R)$ implica que $R[x]x \nsubseteq L$. Daí a Proposição 2.41 implica que $L \cap T$ é um ideal primitivo à direita de T. Portanto T não é um anel radical de Jacobson, absurdo.

Reciprocamente, suponhamos por contradição que $R[x]$ seja um anel radical de Jacobson e que T não seja um anel radical de Jacobson. Logo, existe um ideal primitivo à direita P de T. A nilidade do anel $S_0/(P \cap S_0)$ implica que $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pela Proposição 2.41, existe um ideal primitivo à direita L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Assim $R[x]$ não é um anel radical de Jacobson, absurdo. ■

Existe uma famosa conjectura na teoria de anéis nil, que atualmente é denominada como problema de Köthe. Este problema foi introduzido por G. *Köthe* em 1930 e até presente momento continua em aberto.

O problema de Köthe pode ser formulado de várias maneiras elementares equivalentes. Sabemos que se I e J são ideais bilaterais nil de um anel R, então $I + J$ é um ideal nil de R. Porém não é conhecida a resposta da seguinte questão:

Problema de Köthe: A soma de dois ideais à direita nil é também um ideal à direita nil?

Na tentativa de solucionar este problema foram resolvidas várias questões na teoria de anéis relacionadas com nilidade. Além disso foram encontradas várias reformulações para este problema. Por exemplo, Krempa em [12] mostrou que o problema de Köthe tem solução positiva se, e somente se, para cada anel nil R, o anel de polinômios $R[x]$ é um anel radical de Jacobson.

Utilizando este resultado de Krempa e o Teorema 2.48, obtemos a seguinte formulação equivalente do problema de Köthe.

Corolário 2.49 *A conjectura de Köthe tem solução positiva se, e somente se, para cada anel nil R o anel T é um anel radical de Jacobson.*

Conforme ([20], Corolário 2) o problema de Köthe tem solução positiva se, e somente se, para cada anel nil R o anel de polinômios $R[x]$ não é um anel primitivo à direita (esquerda). Deste resultado e a Proposição 2.41 temos a seguinte formulação equivalente do problema de Köthe.

Corolário 2.50 *O problema de Köthe tem solução positiva se, e somente se, para cada anel nil R, T não é um anel primitivo à direita.*

Capítulo 3

Anéis de Jacobson e Anéis de Polinômios

Neste capítulo todos os anéis são associativos com elemento identidade. A finalidade principal é estender alguns resultados obtidos para anéis de polinômios usuais em [8] e [11], para o anel T.

3.1 Anéis de Jacobson e Anéis de Polinômios

Um anel R é dito um anel de Jacobson se cada ideal primo de R é uma intersecção de ideais primitivos à direita (ou à esquerda) de R.

Watters em [21] mostrou que R é um anel de Jacobson se, e somente se, o anel de polinômios $R[x]$ é um anel de Jacobson.

Seja $\mathcal{F}$ uma classe de anéis primos. Um ideal P de R é dito um $\mathcal{F}$-ideal se $R/P \in \mathcal{F}$. Denotemos por $\mathcal{F}(R)$ a intersecção de todos os $\mathcal{F}$-ideais de R.

Conforme [8], um anel R é dito $\mathcal{F}$-Jacobson quando cada ideal primo de R é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de R.

Uma classe de anéis primos $\mathcal{F}$ é dita satisfazer a condição (A) se $\mathcal{F}$ satisfaz a seguinte propriedade:

(A) Se $R \in \mathcal{F}$, então $R[x]/L \in \mathcal{F}$, para cada ideal primo R-disjunto L de $R[x]$.

Em ([8], Teorema 5), Ferrero e Parmenter mostraram que se $\mathcal{F}$ é uma classe de aneis primos satisfazendo (A) e R é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson, então $R[x]$ é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson. Além disso eles mostraram a seguinte proposição.

Proposição 3.1 *As seguintes classes de anéis satisfazem a condição* (A).

(i) Anéis simples (Corpos).

(ii) Anéis simples Artinianos à direita.

(iii) Anéis fortemente primos à direita.

(iv) Anéis primos não singulares à direita.

(v) Anéis primitivos à direita.

(vi) Anéis primos com dimensão de Goldie à direita finita.

(vii) Anéis primos de Goldie à direita.

Na Proposição 3.1 podemos substituir direita por esquerda.

Um anel primo R é dito fortemente primo unitário se $RC(R)$ é um anel simples. Claramente um anel simples é fortemente primo unitário.

Proposição 3.2 *As seguintes classes de anéis satisfazem a condição* (A).

(i) A classe dos anéis fortemente primos unitários.

(ii) A classe dos anéis fortemente primos unitários com pseudo radical nulo.

Prova. (i) e (ii) seguem respectivamente dos Lemas 2.6(ii) e 4.2 em [9]. ■

Conforme [11], um anel R é chamado um anel de Hilbert, se cada ideal fortemente primo unitário de R é uma interseção de ideais maximais de R.

Em ([11], Teorema 3.1), Kaučikas e Wisbauer mostraram que R é um anel de Hilbert se, e somente se, o anel de polinômios $R[x]$ é um anel de Hilbert.

O nosso objetivo é generalizar ([8], Teorema 5) e ([11], Teorema 3.1).

Definição 3.3 *Sejam $\mathcal{G}$ uma classe de anéis primos e $\mathcal{F}$ uma subclasse de $\mathcal{G}$. Um anel R é dito $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson se cada $\mathcal{G}$-ideal de R é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de R.*

Observação 3.4 A definição de anéis de Jacobson (Hilbert) é um caso particular da definição acima. Pois, basta tomar $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos (fortemente primos unitários) e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis primitivos à direita (simples). Além disso, muitas outras classes podem ser mencionadas com $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos, de acordo as Proposições 3.1 e 3.2.

Lema 3.5 *Sejam $\mathcal{G}$ uma classe de anéis primos e $\mathcal{F}$ uma subclasse de $\mathcal{G}$. Então imagens homomorfas de anéis $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson são anéis $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson.*

Prova. Sejam R um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson e I um ideal de R. Seja $\overline{J}$ um $\mathcal{G}$-ideal de $\overline{R} = R/I$. Então existe um ideal J de R contendo I tal que $\overline{J} = J/I$. Como $(\overline{R}/\overline{J}) \simeq (R/J)$, então J é um $\mathcal{G}$-ideal de R.

Por hipótese existe uma familia de $\mathcal{F}$-ideais $(J_i)_{i\in\Omega}$ de R tal que $J = \cap_{i\in\Omega} J_i$. Temos que $(R/I)/(J_i/I) \simeq R/J_i \in \mathcal{F}$ e $\overline{J} = (J/I) = (\cap_{i\in\Omega} J_i/I) = \cap_{i\in\Omega}(J_i/I)$. Assim $\overline{J}$ é uma intersecção de todos os J_i/I que são $\mathcal{F}$-ideais. Logo, R/I é um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson. ■

Corolário 3.6 *Se $R[x]$ é um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson, então R é $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson.*

Uma classe de anéis primos $\mathcal{G}$ é dita satisfazer a condição (B) se $\mathcal{G}$ satisfaz a seguinte propriedade:

(B) Se $R[x]/L \in \mathcal{G}$, então $R/(L \cap R) \in \mathcal{G}$, para cada ideal L de $R[x]$.

Um anel R é chamado um domínio se para quaisquer elementos a, b em R temos que $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$. Claramente a classe dos domínios e a classe dos anéis primos satisfazem a condição (B).

Proposição 3.7 *As seguintes classes de aneis satisfazem a condição* (B)*.*

(i) *Anéis fortemente primos à direita.*

(ii) *Anéis primos não singulares à direita.*

(iii) *Anéis fortemente primos unitários.*

(iv) *Anéis fortemente primos unitários com pseudo radical não nulo.*

Prova. (i) e (ii) seguem dos Corolários 4.3 e 4.6 em [6], respectivamente. Os itens (iii) e (iv) seguem dos Lemas 2.6(i) e 4.2 de [9], respectivamente. ■

Conforme ([8], Lema 4), se uma classe de anéis primos $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (A) e $R \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}(R[x]) = 0$.

O próximo teorema generaliza ([8], Teorema 5) e ([11], Teorema 3.1). Sua demonstração é a mesma à prova do Teorema 5 em [8].

Teorema 3.8 *Assuma que* $\mathcal{G}$ *é uma classe de anéis primos satisfazendo a condição* (B) *e que* $\mathcal{F}$ *é uma subclasse de* $\mathcal{G}$ *satisfazendo a condição* (A)*. Então* R *é um anel* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$*-Jacobson se, e somente se,* $R[x]$ *é um anel* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$*-Jacobson.*

Prova. Suponhamos que R seja um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson. Seja L um ideal de $R[x]$ tal que $R[x]/L \in \mathcal{G}$. Pela condição (B) obtemos que $R/(L \cap R) \in \mathcal{G}$. Podemos assumir que $L \cap R = 0$, caso contrário podemos fatorar R como $\overline{R} = R/(L \cap R)$ e L como $\overline{L} = L/(L \cap R)[x]$. Então $R \in \mathcal{G}$, isto é 0 é um $\mathcal{G}$-ideal de R. Por hipótese existe uma familia $(Q_i)_{i \in \Gamma}$ de $\mathcal{F}$-ideais de R tal que $\cap_{i \in \Gamma} Q_i = 0$. Utilizando o Lema 4 em [8] obtemos, $\mathcal{F}((R/Q_i)[x]) = 0$.

Temos que $(R/Q_i)[x] \simeq (R[x]/Q_i[x])$, daí $Q_i[x]$ é uma interseção de $\mathcal{F}$-ideais de $R[x]$ para todo $i \in \Gamma$. Como $\cap_{i\in\Gamma} Q_i[x] = 0$, então $\mathcal{F}(R[x]) = 0$, isto mostra o caso $L = 0$.

Se L é um ideal não nulo podemos supor que L é maximal com respeito a condição $L \cap R = 0$.

Seja $\rho(L)$ o ideal de R consistindo de zero e de todos os coeficientes líderes de polinômios de grau minimal em L.

Sejam $\Omega = \{i \in \Gamma \mid \rho(L) \nsubseteq Q_i\}$ e $\Delta = \{i \in \Gamma \mid \rho(L) \subseteq Q_i\}$. Temos que

$$(\cap_{i\in\Omega} Q_i)(\cap_{i\in\Delta} Q_i) \subseteq (\cap_{i\in\Omega} Q_i) \cap (\cap_{i\in\Delta} Q_i) = \cap_{i\in\Gamma} Q_i = 0.$$

Como R é primo e $0 \neq \rho(L) \subseteq \cap_{i\in\Delta} Q_i$, então a Proposição 1.1 implica que $\cap_{i\in\Omega} Q_i = 0$. Logo, o Lema 3 em [8] implica que $(L + Q_i[x]) \cap R = Q_i$, $i \in \Omega$.

Pelo Lema de Zorn para cada $i \in \Omega$, existe um ideal L_i de $R[x]$ contendo $L+Q_i[x]$ e maximal com respeito a condição $L_i \cap R = Q_i$. Logo, $\overline{R}_i = R/(L_i \cap R) = R/Q_i \in \mathcal{F}$. Como $\overline{L}_i = L_i/((L_i \cap R)[x])$ é um ideal $\overline{R}_i$-disjunto de $\overline{R}_i[x]$, então a condição (A) implica que $\overline{R}_i[x]/\overline{L}_i \in \mathcal{F}$. Então $R[x]/L_i \in \mathcal{F}$, pois $R[x]/L_i \simeq \overline{R}_i[x]/\overline{L}_i$. Além disso, $(\cap_{i\in\Omega} L_i) \cap R = \cap_{i\in\Omega} Q_i = 0$, então a maximalidade de L no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[x]$ implica que $L = \cap_{i\in\Omega} L_i$. Segue que L é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais, então $R[x]$ é um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson.

Reciprocamente, suponhamos que $R[x]$ é um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson. Então o Corolário 3.6 implica que R é um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson. ■

Lema 3.9 *(i) Se R é um anel fortemente primo unitário, então R é fortemente primo à direita.*

(ii) Se R é um anel primo de Goldie à direita, então R é não singular à direita.

Prova. (i) Seja I um ideal não nulo de R. Como R é fortemente primo unitário, então o Proposição 2.4 em [9] implica que existe $H = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq I$ tal que

$a_1c_1 + ... + a_nc_n = 1$, onde $c_1, ..., c_n \in C(R)$. Seja $a \in A_{nn_r}(H) = \{r \in R \mid Hr = 0\}$. Logo, $a = (a_1c_1 + ... + a_nc_n)a = a_1ac_1 + ... + a_nac_n = 0$, pois $a_ia = 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto $A_{nn_r}(H) = 0$ assim R é um anel fortemente primo à direita.

(ii) Segue do Corolário 3.32 em [10]. ■

Segue das Proposições 3.1, 3.2, 3.7 e do Lema 3.9. que as seguintes classes de aneis $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ satisfazem as hipóteses e a conclusão do Teorema 3.8. Isto é, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (A) e $\mathcal{G}$ satisfaz a condição (B).

$a)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis das Proposições 3.1 e 3.2.

$b)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples.

$c)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários.

$d)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples Artinianos à direita.

$e)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples.

$f)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários com pseudo radical nulo.

$g)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples Artinianos à direita.

$h)$ $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos não singulares à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis primos de Goldie à direita.

3.2 Aneis de Jacobson e Subanéis Admissíveis de Anéis de Polinômios

Nesta seção generalizamos os resultados obtidos para o anel de polinômios usuais na seção anterior, para o anel T.

Observação 3.10 R é uma imagem homomorfa de T. Pois, $\Psi : T \to R$ dada por $\Psi(a_0 + a_1x + ... + a_kx^k) = a_0 + a_1 + ... + a_k \in R$ é um homomorfismo sobrejetor.

Primeiramente vamos generalizar o resultado de Watters obtido em [21] para anéis de polinômios usuais.

Proposição 3.11 *S_0 e R são anéis de Jacobson se, e somente se, T é um anel de Jacobson.*

Prova. Suponhamos que S_0 e R são anéis de Jacobson. Seja P um anel primo de T. Se $R[x]x^n \subseteq P$, segue que $S_0/(P \cap S_0) \backsimeq T/P$ assim $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0. Por hipótese $P \cap S_0 = \cap_{i\in\Omega} J_i$, onde J_i é um ideal primitivo à direita de S_0 para cada $i \in \Omega$. Seja $P_i = J_i + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ para cada $i \in \Omega$. Temos que $P = \cap_{i\in\Omega} P_i$ e $(T/P_i) \simeq (S_0/J_i)$. Segue que P é uma intersecção de ideais primitivos à direita de T.

Se $R[x]x^n \nsubseteq P$, segue da Proposição 2.7 que existe um ideal primo L de $R[x]$ tal que $L \cap T = P$. Como R é um anel de Jacobson, então $R[x]$ também é um anel de Jacobson. Portanto existe uma familia $(L_i)_{i\in\Gamma}$ de ideais primitivos à direita de $R[x]$ tal que $L = \cap_{i\in\Gamma} L_i$. Sejam $\Omega = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \nsubseteq L_i\}$ e $\Delta = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \subseteq L_i\}$. Temos que

$$(\cap_{j\in\Omega} L_j)(\cap_{j\in\Delta} L_j) \subseteq (\cap_{j\in\Omega} L_j) \cap (\cap_{j\in\Delta} L_j) = \cap_{j\in\Gamma} L_j = L.$$

Como $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]x \subseteq \cap_{j\in\Delta} L_j$, então a Proposição 1.1 implica que $L = \cap_{j\in\Omega} L_j$. Pela Proposição 2.41, $L_j \cap T$ é um ideal primitivo á direita de T para cada $j \in \Omega$. Além disso $P = L \cap T = (\cap_{j\in\Omega} L_j) \cap T = \cap_{j\in\Omega}(L_j \cap T)$. Segue que P é uma intersecção de ideais primitivos à direita de T, daí T é um anel de Jacobson.

Reciprocamente suponhamos que T seja um anel de Jacobson. Temos que S_0 é uma imagem homomorfa de T. Além disso, a Observação 3.10 implica que R é uma imagem homeomorfa de T. Como imagens homeomorfas de anéis de Jacobson são anéis de Jacobson, então S_0 e R são anéis de Jacobson. ■

Uma classe de anéis primos $\mathcal{F}$ é dita satisfazer a condição (C) se $\mathcal{F}$ satisfaz a seguinte propriedade:

(C) Se $R[x]/L \in \mathcal{F}$, então $T/(L \cap T) \in \mathcal{F}$, para cada ideal L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$.

Segue do segundo capítulo que as classes dos anéis primos, primitivos e simples satisfazem a condição (C).

Proposição 3.12 *As seguintes classes de aneis satisfazem a condição* (C).

(i) *Domínios.*

(ii) *Anéis primos von Neumann regulares.*

(iii) *Anéis simples Artinianos à direita.*

(iv) *Anéis fortemente primos à direita.*

Prova. (i) segue do fato que $T/(L \cap T)$ é um subanel primo de $R[x]/L$.

(ii) Suponhamos que L é um ideal de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $R[x]/L$ é um anel primo von Neumann regular. Sejam $P = L \cap T$ e $\overline{g} = g + P \in T/P$, onde $g \in T$ é qualquer. Logo, $gx^n + L \in R[x]/L$. Por hipótese existe $f \in R[x]$ tal que $gx^n - gx^n fgx^n \in L$. Como L é primo e $R[x]x \nsubseteq L$, então $g - gx^n fg \in L \cap T = P$. Portanto T/P é von Neumann regular, pois $x^n f \in T$.

(iii) Suponhamos que L é um ideal de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ e tal que $R[x]/L$ é um anel simples Artiniano à direita. Pela Proposição 2.24(ii), $(R[x]/L) \simeq (T/(L \cap T))$. Segue que $L \cap T$ é um anel simples Artiniano à direita.

(iv) Suponhamos que L é um ideal fortemente primo à direita de $R[x]$ tal que $R[x]x \nsubseteq L$. Seja $\overline{U}$ um ideal não nulo de $T/(L \cap T)$. Então existe um ideal U de T contendo $L \cap T$ tal que $\overline{U} = U/(L \cap T)$. Logo, $\overline{V} = (L + R[x]x^n U R[x]x^n)/L$ é um ideal não nulo de $R[x]/L$.

Por hipótese existe um conjunto finito $\overline{H} = \{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_n\} \subseteq \overline{V}$ tal que o anulador à direita de $\overline{H}$ em $R[x]/L$, denotado por $A_{nn_r}(\overline{H})$, é zero.

Temos que $\overline{h}_i = h_i + L$, onde $h_i \in L + R[x]x^n U R[x]x^n$, $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existem $f_i \in L$, $g_i \in R[x]x^n U R[x]x^n \subseteq U$ tais que $h_i = f_i + g_i$.

Seja $\overline{J} = \{g_1 + (L \cap T), ..., g_n + (L \cap T)\} \subseteq U/(L \cap T)$. Vamos mostrar que o anulador à direita de $\overline{J}$ em $T/(L \cap T)$, denotado por $A_{nn_r}(\overline{J})$, é zero.

Seja $\overline{f} = f + (L \cap T) \in A_{nn_r}(\overline{J})$, onde $f \in T$. Então $\overline{J}\,\overline{f} = 0$, isto é $g_i f \in L \cap T$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Logo,

$$(h_i + L)(f + L) = h_i f + L = (f_i + g_i)f + L = (f_i f + g_i f) + L \subseteq L$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Então $\overline{H}(f + L) = 0$, ou seja $f + L \in A_{nn_r}(\overline{H})$. Como $A_{nn_r}(\overline{H}) = 0$, então $f \in L \cap T$. Portanto $A_{nn_r}(\overline{J}) = 0$ e assim $T/(L \cap T)$ é um anel fortemente primo à direita. ∎

Uma classe de anéis primos $\mathcal{F}$ é especial se para cada ideal não nulo I de R, $I \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $R \in \mathcal{F}$. Ver ([5], página 138). É conhecido que a classe de todos os anéis primos é especial.

Teorema 3.13 *Se $\mathcal{F}$ é uma classe de anéis primos especial, então $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (C).*

Prova. Suponhamos que $\mathcal{F}$ é uma classe de anéis primos especial. Seja L um ideal de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $R[x]/L \in \mathcal{F}$. Pela Proposição 2.7, $L \cap T$ é um ideal primo de T e $R[x]x^n \nsubseteq L \cap T$. Como $(L + R[x]x^n)/L$ é um ideal não nulo de $R[x]/L$, então $((L + R[x]x^n)/L) \in \mathcal{F}$. Além disso,

$$((L \cap T) + R[x]x^n)/(L \cap T) \simeq R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n) \simeq ((L + R[x]x^n)/L) \in \mathcal{F}.$$

Como $((L \cap T) + R[x]x^n)/(L \cap T)$ é um ideal não nulo do anel primo $T/(L \cap T)$, então $T/(L \cap T) \in \mathcal{F}$. Isso mostra que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (C). ■

Proposição 3.14 *As seguintes classes de anéis são especiais, em particular satisfazem a condição (C).*

(i) *Anéis primos não singulares à direita.*

(ii) *Anéis primos com dimensão de Goldie à direita finita.*

(iii) *Anéis primos de Goldie à direita.*

(iv) *Anéis fortemente primos unitários.*

(v) *Anéis fortemente primos unitários com pseudo radical nulo (ou não nulo).*

(vi) *Anéis primitivos à direita.*

(vii) *Anéis simples.*

Prova.

(i) Sejam R um anel primo e I um ideal não nulo R. Primeiramente vamos mostrar que $Z_r(I) = Z_r(R) \cap I$. Seja $a \in Z_r(I)$. Então $a \in I$ e $A_{nn_r}(a) = \{r \in I \mid ar = 0\}$ é um ideal à direita essencial de I. Seja J um ideal à direita de R.

Se $\{r \in R \mid ar = 0\} \cap J = 0$, então $A_{nn_r}(a) \cap (I \cap J) = 0$. Logo, $I \cap J = 0$. Portanto $JI \subseteq I \cap J = 0$ assim a Proposição 1.1 implica que $J = 0$. Concluimos que $\{r \in R \mid ar = 0\}$ é um ideal à direita essencial de R. Segue que $a \in Z_r(R)$ daí $Z_r(I) \subseteq Z_r(R) \cap I$.

Para a outra inclusão, seja $b \in Z_r(R) \cap I$. Então $A_{nn_r}(b) = \{r \in R \mid br = 0\}$ é um ideal à direita essencial de R. Seja H um ideal à direita de I.

Se $\{r \in I \mid br = 0\} \cap H = 0$, então $A_{nn_r}(b) \cap HI \subseteq \{r \in I \mid br = 0\} \cap H = 0$. Logo, $HI = 0$ pois HI é um ideal à direita de R. Pela Proposição 1.1, $H = 0$. Concluimos que $\{r \in I \mid br = 0\}$ é um ideal à direita essencial de I. Segue que $b \in Z_r(I)$ daí $Z_r(R) \cap I \subseteq Z_r(I)$. Portanto $Z_r(I) = Z_r(R) \cap I$.

Então $Z_r(R) = 0$ se, e somente se, $Z_r(I) = 0$, pois R é um anel primo. Logo, a classe dos anéis de (i) é especial. Em particular satisfaz a condição (C)

(ii) Considere R um anel primo e I um ideal não nulo de R. Suponhamos que I tem dimensão de Goldie à direita finita. Seja $(C_i)_{i\in\Omega}$ uma familia independente de ideais à direita de R. Se $I \cap C_i = 0$, então $C_i I \subseteq I \cap C_i = 0$. Pela Proposição 1.1, $C_i = 0$, absurdo. Logo, $(I \cap C_i)_{i\in\Omega}$ é uma familia independente de ideais à direita de I. Portanto R tem dimensão de Goldie à direita finita.

Suponhamos que R tem dimensão de Goldie à direita finita. Seja $(B_i)_{i\in\Gamma}$ uma familia independente de ideais à direita de I. Utilizando a Proposição 1.1 obtemos que $B_i I = 0$ se, e somente se, $B_i = 0$. Logo, $(B_i I)_{i\in\Gamma}$ é uma familia independente de ideais à direita de R com $B_i I \subseteq B_i$ para cada $i \in \Gamma$. Portanto I tem dimensão de Goldie à direita finita. Logo, a classe dos anéis primos de dimensão de Goldie à direita finita é especial. Em particular satisfaz a condição (C)

(iii) Segue do Corolário 3.32 em [10] e dos itens anteriores.

(iv) e (v) seguem da Proposição 2.2 em [9] e do Lema 4.4 em [9], respectivamente.

(vi) e (vii) seguem dos Teoremas 60 e 62 em [5], respectivamente. ■

Observação 3.15 As condições (A) e (C) não são equivalentes. De fato, pela Observação 2 em [8], a classe de todos os anéis de divisão (domínios) não satisfaz a condição (A). E claramente a classe dos anéis de divisão (domínios) satisfaz a condição (C). Por outro lado, sendo R o anel primo dos números inteiros segue que $R[x]$ é um anel primo com identidade e $A = 2R + R[x]x$ não tem identidade. Portanto a classe dos anéis primos com identidade não satisfaz a condição (C) e satisfaz a condição (A).

Do Lema 3.5 e da Observação 3.10, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.16 *Se T é um anel $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson, então S_0 e R são anéis $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson.*

O próximo teorema estende ([8], Teorema 5).

Teorema 3.17 *Assuma que $\mathcal{F}$ é uma classe de anéis primos satisfazendo as condições (A) e (C). Então S_0 e R são anéis $\mathcal{F}$-Jacobson se, e somente se, T é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson.*

Prova. Suponhamos que S_0 e R sejam anéis $\mathcal{F}$-Jacobson. Seja P um ideal primo de T. Se $R[x]x^n \subseteq P$, segue que $S_0/(P \cap S_0) \backsimeq T/P$ assim $P \cap S_0$ é um ideal primo de S_0. Por hipótese $P \cap S_0 = \cap_{i\in\Omega} J_i$, onde J_i é $\mathcal{F}$-ideal de S_0 para todo $i \in \Omega$. Seja $P_i = J_i + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$ para cada $i \in \Omega$. Temos que $P = \cap_{i\in\Omega} P_i$ e $(T/P_i) \simeq (S_0/J_i)$. Segue que P é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de T.

Se $R[x]x^n \nsubseteq P$ a Proposição 2.7 implica que existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Como R é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson e $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade (A), então do Teorema 5 em [8] implica que $R[x]$ também é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson. Portanto existe uma familia $(L_i)_{i\in\Gamma}$ de $\mathcal{F}$-ideais de $R[x]$ tal que $L = \cap_{i\in\Gamma} L_i$. Sejam $\Omega = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \nsubseteq L_i\}$ e $\Delta = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \subseteq L_i\}$. Logo,

$$(\cap_{j\in\Omega} L_j)(\cap_{j\in\Delta} L_j) \subseteq (\cap_{j\in\Omega} L_j) \cap (\cap_{j\in\Delta} L_j) = \cap_{j\in\Gamma} L_j = L.$$

Como $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]x \subseteq \cap_{j\in\Delta} L_j$, então a Proposição 1.1 implica que $L = \cap_{j\in\Omega} L_j$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade (C), segue que $L_j \cap T$ é um $\mathcal{F}$-ideal de T para cada

$j \in \Omega$. Além disso $P = L \cap T = (\cap_{j\in\Omega} L_j) \cap T = \cap_{j\in\Omega}(L_j \cap T)$. Segue que P é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de T, daí T é um anel $\mathcal{F}$-Jacobson.

Reciprocamente, suponhamos que T seja um anel $\mathcal{F}$-Jacobson. Então o Corolário 3.16 implica que S_0 e R são anéis $\mathcal{F}$-Jacobson. ■

Observação 3.18 *Utilizando as Proposições* 3.12 *e* 3.14 *obtemos que as classes de aneis das Proposições* 3.1 *e* 3.2 *satisfazem a condições* (A) *e* (C).

Agora vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que o anel T seja um anel $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-Jacobson.

Uma classe de anéis primos $\mathcal{G}$ é dita satisfazer a condição (D) se $\mathcal{G}$ satisfaz a seguinte propriedade:

(D) Se $T/P \in \mathcal{G}$ com $R[x]x^n \nsubseteq P$, então existe um ideal L de $R[x]$ com $L \cap T = P$ tal que $R[x]/L \in \mathcal{G}$, para cada ideal P de T.

Segue do segundo capítulo que a classe dos anéis primos, primitivos e simples com identidade satisfazem a condição (D).

Proposição 3.19 *As seguintes classes de anéis satisfazem a condição* (D).

(i) Domínios

(ii) Anéis fortemente primos à direita.

Prova. (i) Suponhamos que exista um ideal P de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$ tal que T/P seja um domínio. Como P é primo, então a Proposição 2.7 implica que existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Sejam $\overline{f}$, $\overline{g} \in R[x]/L$ tais que $\overline{f}\overline{g} = 0$. Temos que $\overline{f} = f + L$ e $\overline{g} = g + L$, onde f, $g \in R[x]$. Logo $fg \in L$ assim o Lema 2.3 implica que $fx^n gx^n \in Lx^{2n} \subseteq L \cap T = P$. Como T/P é um domínio então $fx^n \in P \subseteq L$ ou $gx^n \in P \subseteq L$. Portanto $fR[x]x^n \subseteq L$ ou $gR[x]x^n \subseteq L$.

Então o Lema 2.3 e a Proposição 1.1 implicam que $f \in L$ ou $g \in L$. Isso mostra que $R[x]/L$ é um domínio. Concluímos que os domínios satisfazem a condição (D).

(ii) Suponhamos que P seja um ideal fortemente primo à direita de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Vamos mostrar que L é um ideal fortemente primo à direita de $R[x]$.

Seja $\overline{V}$ um ideal não nulo de $R[x]/L$. Então existe um ideal V de $R[x]$ contendo L tal que $\overline{V} = V/L$. Se $V \cap T \subseteq L \cap T = P$, então $VR[x]x^n \subseteq L$. Pela Proposição 1.1, $V \subseteq L$, absurdo. Portanto $\overline{U} = (V \cap T)/(L \cap T)$ é um ideal não nulo de T/P.

Por hipótese existe um conjunto finito $\overline{H} = \{\overline{h}_1, ..., \overline{h}_n\} \subseteq \overline{U}$ tal que o anulador à direita de $\overline{H}$ em T/P é zero. Temos que $\overline{h}_i = h_i + P$, onde $h_i \in T$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Seja $\overline{J} = \{h_1 + L, ..., h_n + L\} \subseteq V/L$. Vamos mostrar que o anulador à direita de $\overline{J}$ em $R[x]/L$, é zero. Seja $\overline{f} = f + L \in A_{nn_r}(\overline{J})$, onde $f \in R[x]$. Conseqüentemente $\overline{J}\,\overline{f} = 0$, isto é $(h_i + L)(f + L) = 0$ assim $h_i f \in L$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto $h_i f x^n \in Lx^n \subseteq L \cap T = P$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Então $fx^n + P \in A_{nn_r}(\overline{H})$. Como $A_{nn_r}(\overline{H}) = 0$, então $fx^n \in L \cap T = P$. Pela Proposição 1.1, $f \in L$ assim $A_{nn_r}(\overline{J}) = 0$. Segue que $R[x]/L$ é um anel fortemente primo à direita. Isso completa a prova. ■

Teorema 3.20 *Se $\mathcal{G}$ é uma classe de anéis primos especial então $\mathcal{G}$ satisfaz a condição (D).*

Prova. Suponhamos que $\mathcal{G}$ seja uma classe de anéis primos especial. Seja P um ideal de T com $R[x]x^n \nsubseteq P$ tal que $T/P \in \mathcal{G}$. Pela Proposição 2.7, existe um ideal primo L de $R[x]$ com $R[x]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = P$. Logo, $R[x]x^n \nsubseteq L$ assim $H = ((L \cap T) + R[x]x^n)/(L \cap T) \in \mathcal{G}$, pois H é um ideal não nulo de T/P. Também,

$$(L + R[x]x^n)/L \simeq R[x]x^n/(L \cap R[x]x^n) \simeq ((L \cap T) + R[x]x^n)/(L \cap T) \in \mathcal{G}.$$

Como $(L+R[x]x^n)/L$ é um ideal não nulo do anel primo $R[x]/L$, então $R[x]/L \in \mathcal{G}$. Isso mostra que $\mathcal{G}$ satisfaz a condição (D). ■

O próximo teorema estende o Teorema 3.17

Teorema 3.21 *Sejam $\mathcal{G}$ é uma classe de anéis primos satisfazendo as propriedades (B) e (D) e que $\mathcal{F}$ é uma subclasse de $\mathcal{G}$ satisfazendo as propriedades (A) e (C). Então S_0 e R são anéis $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson se, e somente se, T é um anel $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson.*

Prova. Suponhamos que S_0 e R sejam anéis $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson. Seja P um ideal de T tal que $T/P \in \mathcal{G}$. Se $R[x]x^n \subseteq P$, então $S_0/(P\cap S_0) \backsimeq T/P$ e assim $S_0/(P\cap S_0) \in \mathcal{G}$. Por hipótese $P \cap S_0 = \cap_{i\in\Omega} J_i$, onde J_i é um $\mathcal{F}$-ideal de S, para todo $i \in \Omega$. Seja $P_i = J_i + S_1x + ... + S_{n-1}x^{n-1} + R[x]x^n$, para cada $i \in \Omega$. Temos que $P = \cap_{i\in\Omega} P_i$ e $(T/P_i) \simeq (S_0/J_i)$. Segue que P é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de T.

Se $R[x]x^n \nsubseteq P$, segue da condição (D) que existe um ideal L de $R[x]$ com $L\cap T = P$ e tal que $R[x]/L \in \mathcal{G}$. Pelo Teorema 3.8, $R[x]$ é um anel $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson. Portanto existe uma família $(L_i)_{i\in\Gamma}$ de $\mathcal{F}$-ideais de $R[x]$ tal que $L = \cap_{i\in\Gamma} L_i$. Sejam $\Omega = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \nsubseteq L_i\}$ e $\Delta = \{i \in \Gamma \mid R[x]x \subseteq L_i\}$. Temos que

$$(\cap_{j\in\Omega} L_j)(\cap_{j\in\Delta} L_j) \subseteq (\cap_{j\in\Omega} L_j) \cap (\cap_{j\in\Delta} L_j) = \cap_{j\in\Gamma} L_j = L.$$

Como $R[x]x \nsubseteq L$ e $R[x]x \subseteq \cap_{j\in\Delta} L_j$, então a Proposição 1.1 implica que $L = \cap_{j\in\Omega} L_j$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade (C) então $L_j\cap T$ é um $\mathcal{F}$-ideal de T para cada $j \in \Omega$. Além disso $P = L\cap T = (\cap_{j\in\Omega} L_j)\cap T = \cap_{j\in\Omega}(L_j\cap T)$. Segue que P é uma intersecção de $\mathcal{F}$-ideais de T, daí T é um anel $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson.

Reciprocamente, suponhamos que T é um anel $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson. O Corolário 3.16 implica que S_0 e R são anéis $(\mathcal{G},\mathcal{F})$-Jacobson. ■

Corolário 3.22 *S_0 e R são anéis de Hilbert se, e somente se T é um anel de Hilbert.*

Prova. Pelas Proposições 3.1 e 3.14 a classe dos anéis simples satisfaz as condições (A) e (C). As Proposições 3.7, 3.14 e 3.20 implicam que a classe dos anéis fortemente primos unitários satisfaz as condições (B) e (D). Utilizando o Teorema 3.21 obtemos o resultado. ■

Utilizando as Proposições 3.1, 3.2, 3.12, 3.14, 3.19 e 3.20, obtemos que as seguintes classes de aneis $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ satisfazem as hipóteses e a conclusão do Teorema 3.21. Isto é, $\mathcal{F}$ satisfaz as condições (A), (C) e $\mathcal{G}$ satisfaz as condições (B) e (D).

a) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis das Proposições 3.1 e 3.2.

b) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples.

c) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários.

d) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples Artinianos à direita.

e) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples.

f) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários com pseudo radical nulo.

g) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis fortemente primos unitários e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis simples Artinianos à direita.

h) $\mathcal{G}$ a classe dos anéis primos não singulares à direita e $\mathcal{F}$ a classe dos anéis primos de Goldie à direita.

Capítulo 4

Ideais Primos em Subanéis Admissíveis de Anéis de Polinômios com Várias Variáveis

Nesta seção denotaremos por $R[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinônios sobre R em n indeterminadas $\{x_1, ..., x_n\}$.

O objetivo desta seção é estudar ideais primos, primitivos e maximais em certos subaneis de anéis de polinômios com várias variáveis. Isso foi feito nas seções anteriores para o anel T.

Utilizando a Definição 2.1, um subanel A de $R[x_1, x_2]$ é admissível em $\{x_2\}$ se

$$A = R_0 + R_1x_2 + ... + R_{k-1}x_2^{k-1} + R[x_1, x_2]x_2^k,$$

onde $R_0, ..., R_{k-1}$ são subgrupos aditivos de $R[x_1]$ com $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$ para cada $j \in \{0, ..., k-1\}$ e com $R_m = R[x_1]$ se $m \geq k$.

Temos que R_0 é um subanel de $R[x_1]$, mas não necessariamente admissível em $\{x_1\}$. Se R_0 é um subanel admissível em $\{x_1\}$, dizemos que A é admissível em $\{x_1, x_2\}$. Com este raciocínio obtemos por indução a seguinte definição, que estende a Definição 2.1.

Definição 4.1 *Um subanel A de $R[x_1, ..., x_n]$ é admissível em $\{x_1, ..., x_n\}$ se*

$$A = R_0 + R_1x_n + ... + R_{k-1}x_n^{k-1} + R[x_1, ..., x_n]x_n^k,$$

onde $R_0, ..., R_{k-1}$ são subgrupos aditivos de $R[x_1, ..., x_{n-1}]$ com $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$ para cada $j \in \{0, ..., k-1\}$ e com $R_s = R[x_1, ..., x_{n-1}]$ se $s \geq k$. Além disso, R_0 é admissível em $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$.

Exemplo 4.2 *Seja S um subanel qualquer de R.* Claramente $S + R[x_1]x_1$ é um subanel de $R[x_1]$ admissível em $\{x_1\}$. Logo, $S + R[x_1]x_1 + R[x_1, x_2]x_2$ é admissível em $\{x_2\}$. Continuando com o mesmo raciocínio obtemos que

$$S + R[x_1]x_1 + R[x_1, x_2]x_2 + ... + R[x_1, ..., x_n]x_n$$

é um subanel de $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ admissível em $\{x_1, ..., x_n\}$.

Observação 4.3 Seja $T_n = S_{n,0} + S_{n,1}x_n + ... + S_{n,k_n-1}x_n^{k_n-1} + R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n}$ um subanel admissível em $\{x_1, ..., x_n\}$. Por definição, $S_{n,0}$ é um subanel admissível em $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Portanto

$$S_{n,0} = S_{n-1,0} + S_{n-1,1}x_{n-1} + ... + S_{n-1,k_{(n-1)}-1}x_{n-1}^{k_{(n-1)}-1} + R[x_1, ..., x_{n-1}]x_{n-1}^{k_{n-1}}$$

e $S_{n-1,0}$ é um subanel admissível em $\{x_1, ..., x_{n-2}\}$. Continuando com o mesmo raciocínio, obtemos que

$$T_n = S_{1,0} + \sum_{i=1}^{n}(S_{i,1}x_i + ... + S_{i,k_i-1}x_i^{k_i-1} + R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i}) \tag{4.1}$$

onde $S_{i,0}, ..., S_{i,k_i-1}$ são subgrupos aditivos de $R[x_1, ..., x_{i-1}]$ tais que

$$S_{i,0} = S_{i-1,0} + S_{i-1,1}x_{i-1} + ... + S_{i-1,k_{(i-1)}-1}x_{i-1}^{k_{(i-1)}-1} + R[x_1, ..., x_{i-1}]x_{i-1}^{k_{i-1}},$$

$S_{i,j}S_{i,k} \subseteq S_{i,j+k}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e j, $k \in \{1, ..., k_i - 1\}$, onde

$S_{i,t} = R[x_1, ..., x_{i-1}]$ se $t \geq k_i$. Além disso, $S_{1,0}$ é um subanel de R.

Pela observação anterior temos que todo subanel de $R[x_1, ..., x_n]$ admissível em $\{x_1, ..., x_n\}$ é da forma (4.1).

Nesta seção denotaremos por T_n um subanel de $R[x_1, ..., x_n]$ admissível em $\{x_1, ..., x_n\}$ com as mesmas notações em (4.1).

Não é difícil verificar que

$$T_n = T_{n-1} + S_{n,1}x_n + ... + S_{n,k_n-1}x_n^{k_n-1} + R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n},$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, denotaremos

$$R_{i,k_i} = S_{i,1}x_i + ... + S_{i,k_i-1}x_i^{k_i-1} + R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \subseteq R[x_1, ..., x_i]x_i.$$

Então $T_n = S_{1,0} + R_{1,k_1} + ... + R_{n,k_n}$.

4.1 Ideais Primos em Subanéis Admissíveis com Várias Variáveis

Lema 4.4 *Assuma que $n \geq 1$. Se K é um ideal não nulo de T_n, então existe um ideal não nulo J de $R[x_1, ..., x_n]$ tal que $J \subseteq K$.*

Prova. Sejam K um ideal não nulo de T_n e

$$J_1 = R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n}KR[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n}.$$

Temos que J_1 é um ideal de $R[x_1, ..., x_n]$, $J_1 \subseteq K$.

Se $J_1 \neq 0$ então J_1 satisfaz a condição procurada. Se $J_1 = 0$, então $J_2 = R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n}K$ e $J_3 = KR[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n}$ são ideais de $R[x_1, ..., x_n]$. Se $J_2 \neq 0$ ou $J_3 \neq 0$ então J_2 ou J_3 é o ideal procurado. Se $J_2 = J_3 = 0$, então K é um ideal não nulo de $R[x_1, ..., x_n]$. ■

Proposição 4.5 *Assuma que $n \geq 2$. Se P é um ideal primo em T_n, então $P \cap T_{n-1}$ é um ideal primo de T_{n-1}.*

Prova. Sejam U_1, U_2 ideais de T_{n-1} com $U_1U_2 \subseteq P \cap T_{n-1}$. Pelo lema anterior, existem ideais não nulos I_1, I_2 de $R[x_1, ..., x_{n-1}]$ tais que $I_1 \subseteq U_1$ e $I_2 \subseteq U_2$. Logo, $H_i = U_i + (I_i \cap S_{n,1})x_n + ... + (I_i \cap S_{n,k_n-1})x_n^{k_n-1} + I_i[x_n]x_n^{k_n}$ é um ideal de T_n, para cada $i \in \{1, 2\}$. Além disso, o Lema 2.3 implica que $H_1H_2 \subseteq P$.

Pela Proposição 1.1, $H_1 \subseteq P$ ou $H_2 \subseteq P$. Logo, $U_1 \subseteq P \cap T_{n-1}$ ou $U_2 \subseteq P \cap T_{n-1}$. Isso mostra que $P \cap T_{n-1}$ é um ideal primo de T_{n-1}. ∎

Proposição 4.6 *Seja P um ideal de T_n contendo $R[x_1, ..., x_j]x_j^{k_j}$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Então P é primo se, e somente se, $P = (P \cap S_{1,0}) + R_{1,k_1} + ... + R_{n,k_n}$ e $P \cap S_{1,0}$ é um ideal primo de $S_{1,0}$.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T_n. Como $R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n} \subseteq P$ então a Proposição 2.6 implica que $P = (P \cap T_{n-1}) + R_{n,k_n}$ e $P \cap T_{n-1}$ é um ideal primo de T_{n-1}. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que $P = (P \cap S_{1,0}) + R_{1,k_1} + ... + R_{n,k_n}$ e que $P \cap S_{1,0}$ é um ideal primo de $S_{1,0}$.

Reciprocamente, suponhamos que $P = (P \cap S_{1,0}) + R_{1,k_1} + ... + R_{n,k_n}$ e $P \cap S_{1,0}$ é um ideal primo de $S_{1,0}$. Como $(T_n/P) \simeq (S_{1,0}/(P \cap S_{1,0}))$, então P é um ideal primo de T_n. ∎

Observação 4.7 *Se R é um anel com identidade então P é um ideal primo de T_n com $R[x_1, ..., x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq P$ se, e somente se $x_j^{k_j} \notin P$.*

Proposição 4.8 *Sejam P um ideal de T_n e $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Então P é um ideal primo de T_n com $R[x_1, ..., x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq P$ se, e somente se, existe um ideal primo L de $R[x_1, ..., x_n]$ com $R[x_1, ..., x_j]x_j \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T_n com $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq P$. Se $R[x_1,...,x_n]x_n^{k_n} \nsubseteq P$, então a Proposição 2.7 implica que existe um ideal primo L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_n]x_n \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$. Pelo Lema 2.3, $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L$.

Se $R[x_1,...,x_n]x_n^{k_n} \subseteq P$, então a Proposição 2.6 implica que

$$P = P \cap T_{n-1} + S_{n,1}x_n + ... + S_{n,k_n-1}x_n^{k_n-1} + R[x_1,...,x_n]x_n^{k_n} = P \cap T_{n-1} + R_{n,k_n}.$$

Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que

$$P = P \cap T_i + R_{i+1,k_{i+1}} + ... + R_{n,k_n},$$

onde $i \in \{1,2,...,n\}$ é o maior inteiro tal que $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$.

Então $j \leq i$ e $T_i/(P \cap T_i) \simeq T_n/P$. Conseqüentemente $P \cap T_i$ é um ideal primo de T_i com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P \cap T_i$. Pela proposição 2.7, existe um ideal primo L_i de $R[x_1,...,x_i]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L_i$ tal que $L_i \cap T_i = P \cap T_i$. Seja

$$L = L_i + R[x_1,...,x_{i+1}]x_{i+1} + ... + R[x_1,...,x_n]x_n.$$

Então $L \cap T_n = P$, pois $P \subseteq L \cap T_n$ e

$$(L \cap T_n) \subseteq (L_i \cap T_i) + R_{i+1,k_{i+1}} + ... + R_{n,k_n} \subseteq (P \cap T_i) + P \subseteq P.$$

Como $(R[x_1,...,x_n]/L) \simeq R[x_1,...,x_i]/L_i$, então L é um ideal primo de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$.

Se $R[x_1,...,x_j]x_j \subseteq L \cap R[x_1,...,x_j]$. Como $L \cap R[x_1,...,x_j]$ é um ideal primo de $R[x_1,...,x_j]$, o Lema 2.3 implica que $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \subseteq L \cap T_j \subseteq L \cap T_n = P$, absurdo. Portanto L é um ideal primo de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$.

Reciprocamente, suponhamos que L seja um ideal primo de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L$.

Se $R[x_1,...,x_n]x_n \nsubseteq L$, então a Proposição 2.7 implica que $L \cap T_n$ é um ideal primo de T_n com $R[x_1,...,x_n]x_n^{k_n} \nsubseteq L \cap T_n$. Assim, $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq L \cap T_n$.

Se $R[x_1,...,x_n]x_n \subseteq L$, então $L = L \cap R[x_1,...,x_{n-1}] + R[x_1,...,x_n]x_n$. Portanto

$$L = L \cap R[x_1,...,x_i] + R[x_1,...,x_{i+1}]x_{i+1} + ... + R[x_1,...,x_n]x_n,$$

onde $i \in \{1,2,...,n\}$ o maior inteiro tal que $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$.

Como $(R[x_1,...,x_i]/(L \cap R[x_1,...,x_i])) \simeq (R[x_1,...,x_n]/L)$, então $L \cap R[x_1,...,x_i]$ é um ideal primo de $R[x_1,...,x_i]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L \cap R[x_1,...,x_i]$. Logo, a Proposição 2.7 implica que $(L \cap R[x_1,...,x_i]) \cap T_i = L \cap T_i$ é um ideal primo de T_i com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq L \cap T_i$. Seja

$$P = L \cap T_i + R_{i+1,k_{i+1}} + ... + R_{n,k_n}.$$

Temos que $T_n/P \simeq T_i/(L \cap T_i)$. Portanto $P = L \cap T_n$ é um ideal primo de T_n com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$.

Se $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \subseteq P = L \cap T_n$, então $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \subseteq L \cap T_j$. Logo, o Lema 2.3 implica que $R[x_1,...,x_j]x_j \subseteq L \cap R[x_1,...,x_j]$, absurdo. Portanto $L \cap T_n$ é um ideal primo de T_n com $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq L \cap T_n$. ■

Corolário 4.9 *Seja P um ideal primo de T_n tal que $R[x_1,...,x_l]x_l^{k_l} \nsubseteq P$ para algum $l \in \{1,2,...,n\}$. Então existe um único ideal primo L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_l]x_l \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$.*

Prova. Pela Proposição 4.8 obtemos que existe um ideal primo L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_l]x_l \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$. Afim de mostrar a unicidade, suponhamos que exista um ideal primo L_1 de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_l]x_l \nsubseteq L_1$ tal que $L_1 \cap T_n = P$.

Sejam i, $j \in \{1,2,...,n\}$ maximais tais que $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$ e $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L_1$.

Como $(R[x_1,...,x_j]x_j)^{k_j} \subseteq R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j}$ e $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L_1 \cap R[x_1,...,x_j]$, então a Proposição 1.1 implica que $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq L_1 \cap R[x_1,...,x_j]$. Logo,

$$R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq L_1 \cap T_n = P = L \cap T_n.$$

Como $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \subseteq R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L$, então $R[x_1,...,x_j]x_j \nsubseteq L$. A maximalidade de i implica que $j \leq i$. Analogamente podemos mostrar que $i \leq j$ assim $i = j$.

Seja $R_s = R[x_1,...,x_s]x_s$ para cada $s \in \{1,...,n\}$. Então

$$L = L \cap R[x_1,...,x_j] + R_{j+1} + ... + R_n \text{ e } L_1 = L_1 \cap R[x_1,...,x_j] + R_{j+1} + ... + R_n.$$

Temos que $H = R[x_1,...,x_n]x_j^{k_j}$ é um ideal de $R[x_1,...,x_n]$ tal que $H \nsubseteq L_1$, pois $R[x_1,...,x_n]x_j^{k_j} = R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} + R_{j+1}x_j^{k_j} + ... + R_nx_j^{k_j}$ e $R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq L_1$. Como $R_s \subseteq L_1$ para cada $s \geq j+1$, então

$$\begin{aligned} LH &= (L \cap R[x_1,...,x_j] + R_{j+1} + ... + R_n)(R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} + R_{j+1}x_j^{k_j} + ... + R_nx_j^{k_j}) \\ &\subseteq (L \cap R[x_1,...,x_j])R[x_1,...,x_j]x_j^{k_j} + L_1 \subseteq L \cap T_n + L_1 \subseteq L_1. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 1.1 obtemos que $L \subseteq L_1$. Analogamente podemos mostrar que $L_1 \subseteq L$, daí $L = L_1$. ■

Corolário 4.10 *Sejam $n \geq 1$ e $i \in \{1,2,...,n\}$. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais primos L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primos P de T_n com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$.

Prova. Consideremos a correspondência que associa o ideal primo L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$ para algum $i \in \{1,2,...,n\}$ com o ideal primo $L \cap T_n$ de T_n. A sobrejetividade e a injetividade da correspondência seguem respectivamente da Proposição 4.8 e do Corolário 4.9. ■

A demonstração da seguinte proposição é análoga a prova da Proposição 4.8.

Proposição 4.11 *Sejam P um ideal de T_n e $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Então P é primitivo à direita (esquerda) com $R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$ se, e somente se, existe um ideal primitivo à direita (esquerda) L de $R[x_1, ..., x_n]$ com $R[x_1, ..., x_i]x_i \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = P$.*

A demonstração do próximo corolário é análoga a prova do Corolário 4.10.

Corolário 4.12 *Sejam $n \geq 1$ e $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais primitivos à direita (esquerda) L de $R[x_1, ..., x_n]$ com $R[x_1, ..., x_i]x_i \nsubseteq L$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primitivos à direita (esquerda) P de T_n com $R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$.

4.2 Ideais Maximais em Subanéis Admissíveis com Várias Variáveis

Proposição 4.13 *Seja M um ideal primo de T_n com $R[x_1, ..., x_j]x_j^{k_j} \nsubseteq M$ para algum $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Se M é maximal, então existe um ideal L de $R[x_1, ..., x_n]$ com $R[x_1, ..., x_j]x_j \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_n = M$ e $(R[x_1, ..., x_n]/L) \simeq (T_n/M)$. Em particular L é maximal.*

Prova. Se $R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n} \nsubseteq M$, a Proposição 2.23 implica que existe um ideal L de $R[x_1, ..., x_n]$ com $R[x_1, ..., x_n]x_n \nsubseteq L$ tal que $L \cap T = M$ e $(R[x_1, ..., x_n]/L) \simeq (T/M)$.

Se $R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n} \subseteq M$, então a Proposição 2.6 implica que

$$M = M \cap T_{n-1} + S_{n,1}x_n + ... + S_{n,k_n-1}x_n^{k_n-1} + R[x_1, ..., x_n]x_n^{k_n} = M \cap T_{n-1} + R_{n,k_n}.$$

Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que

$$M = M \cap T_i + R_{i+1,k_{i+1}} + ... + R_{n,k_n},$$

onde $i \in \{1, 2, ..., n\}$ é o maior número tal que $R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq M$.

Então, $T_i/(M \cap T_i) \simeq T_n/M$. Pela Proposição 2.23, existe um ideal L_i de $R[x_1, ..., x_i]$ com $R[x_1, ..., x_i]x_i \nsubseteq L_i$ tal que $L_i \cap T_i = M \cap T_i$ e $(R[x_1, ..., x_i]/L_i) \simeq (T_i/(M \cap T_i)$. Seja

$$L = L_i + R[x_1, ..., x_{i+1}]x_{i+1} + ... + R[x_1, ..., x_n]x_n.$$

Com o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Teorema 4.8, temos que $L \cap T_n = M$, $(R[x_1, ..., x_n]/L) \simeq (R[x_1, ..., x_i]/L_i) \simeq (T_i/(M \cap T_i)) \simeq (T_n/M)$ e $R[x_1, ..., x_j]x_j \nsubseteq L$. ■

Teorema 4.14 *Seja L um ideal maximal de $R[x_1, ..., x_n]$. Então,*

(i) Se L não é primo, então $L \cap T_n$ é maximal em T_n.

(ii) Se L é primo e $R[x_1, ..., x_j]x_j \nsubseteq L$ para algum $j \in \{1, 2, ..., n\}$, então

$$(R[x_1, ..., x_n]/L) \simeq (T_n/(L \cap T_n)).$$

Em particular $L \cap T_n$ é maximal em T_n.

Prova. (i) Imediato da Proposição 2.24(i).

(ii) Seja $i \in \{1, ..., n\}$ o maior número tal que $R[x_1, ..., x_i]x_i \nsubseteq L$. Portanto

$$L = L \cap R[x_1, ..., x_i] + R[x_1, ..., x_{i+1}]x_{i+1} + ... + R[x_1, ..., x_n]x_n.$$

Temos que $(R[x_1, ..., x_n]/L) \simeq (R[x_1, ..., x_i]/(L \cap R[x_1, ..., x_i]))$ assim a Proposição 2.24(ii) implica que

$$(R[x_1, ..., x_i]/(L \cap R[x_1, ..., x_i])) \simeq (T_i/(L \cap T_i)).$$

Como $R_{j,k_j} \subseteq R[x_1,...,x_j] \subseteq L$ para cada $j \in \{i+1,...,n\}$, então

$$L \cap T_n = L \cap T_i + R_{i+1,k_{i+1}} + ... + R_{n,k_n}.$$

Portanto

$$(R[x_1,...,x_n]/L) \simeq (R[x_1,...,x_i]/(L \cap R[x_1,...,x_i])) \simeq (T_i/(L \cap T_i)) \simeq (T_n/(L \cap T_n)).$$

Segue que $L \cap T_n$ é maximal em T_n. ■

O seguinte corolário é uma consequência imediata das Proposições 4.13 e 4.14.

Corolário 4.15 *Sejam M um ideal de T_n e $i \in \{1,2,...,n\}$. Então T_n/M é simples com identidade com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq M$ se, e somente se, existe um ideal L de $R[x_1,...,x_n]$ tal que $R[x_1,...,x_n]/L$ é simples com identidade, $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$ e $L \cap T_n = M$.*

Corolário 4.16 *Sejam $n \geq 1$ e $i \in \{1,2,...,n\}$. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais L de $R[x_1,...,x_n]$ com $R[x_1,...,x_i]x_i \nsubseteq L$ tal que $R[x_1,...,x_n]/L$ é simples com identidade.

(ii) O conjunto de todos os ideais P de T_n com $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq P$ tal que T_n/P é simples com identidade.

Prova. Análoga a demonstração do Corolário 4.10 ■

Corolário 4.17 *Sejam $S = S_{1,0}$ um subanel essencial de R e M um ideal primo de T_n. Se M é um ideal maximal S-disjunto de T_n, então $p_s(R) \neq 0$.*

Prova. Se $R[x_1,...,x_i]x_i^{k_i} \subseteq M$ para cada $i \in \{1,2,...,n\}$, então aplicando a Proposição 4.6, obtemos que S é um anel simples. Portanto $S \subseteq p_s(R)$, pois $S \cap J = S$ para cada ideal primo não nulo J de R.

Se $R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq M$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$, então a Proposição 4.13 implica que existe um ideal maximal L de $R[x_1, ..., x_n]$ tal que $L \cap T_n = M$. Como S é essencial em R e $L \cap S = M \cap S = 0$, então $L \cap R = 0$. Utilizando o Corolário 4.3 em [9] obtemos que $p_s(R) \neq 0$. ■

O seguinte corolário estende o Teorema 4.12 em [9].

Corolário 4.18 *Assuma que $S = S_{1,0}$ é um subanel essencial de R. Então são equivalentes:*

i) Existem $n \geq 1$ e um ideal S-disjunto M de T_n tais que T_n/M é simples com identidade e $R[x_1, ..., x_i]x_i^{k_i} \nsubseteq M$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$.

(ii) $RC(R)$ é um anel simples com identidade e $p_s(R) \neq 0$

(iii) R é um anel primo e existem $a_1, ..., a_k \in p_s(R)$ e $c_1, ..., c_k \in C(R)$ tal que $a_1c_1 + ... + a_kc_k = 1$.

Prova. Imediato do Corolário 4.15 e do Teorema 4.12 em [9]. ■

Capítulo 5

Alguns Resultados em Skew Anéis de Polinômios

Neste capítulo R é um anel associativo, mas não necessariamente com identidade. Iremos estudar ideais primos e maximais em certos subanéis de skew anéis de polinômios de tipo automorfismo. Isso foi feito para anéis de polinômios usuais no segundo capítulo.

Seja σ um automorfismo de R. Um ideal I de R é um σ-ideal (ideal σ-invariante) se $\sigma(I) \subseteq I$ ($\sigma(I) = I$).

Um ideal σ-invariante K de R é chamado fortemente σ-primo se para quaisquer σ-ideal A de R e um ideal B de R tais que $AB \subseteq K$ tem-se $A \subseteq K$ ou $B \subseteq K$. Um anel R é dito fortemente σ-primo se (0) é um ideal fortemente σ-primo de R.

O skew anel de polinômios $R[x;\sigma]$ é definido como o conjunto dos polinômios da forma $\sum_{i=0}^{s} a_i x^i$, onde a soma é usual e a multiplicação é definida pela fórmula $xa = \sigma(a)x$. Um ideal P de $R[x;\sigma]$ é dito R-disjunto se $P \neq 0$ e $P \cap R = 0$.

A prova do próximo lema pode ser encontrada em ([18]), Corolário 2.13).

Lema 5.1 *Sejam R um anel fortemente σ-primo e L um ideal R-disjunto de $R[x;\sigma]$. Se L é primo, então L é maximal no conjunto dos ideais σ-invariantes R-disjuntos de $R[x;\sigma]$.*

A seguinte definição estende a Definição 2.1.

Definição 5.2 *Um subconjunto T_σ de $R[x;\sigma]$ é chamado σ-admissível em $R[x;\sigma]$ se $T_\sigma = U_0 + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$, onde U_i são subgrupos aditivos de R com $U_i\sigma^i(U_j) \subseteq U_{i+j}$, para cada i, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ e $U_m = R$ se $m \geq n$.*

Claramente, T_σ é um subanel de $R[x;\sigma]$, U_0 é um subanel de R e cada U_i é um U_0-submódulo à esquerda de R.

Neste capítulo denotaremos por T_σ um anel σ-admissível da forma,

$$U_0 + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n.$$

5.1 Ideais Primos em Subanéis σ-Admissíveis

Seja $f = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \in R[x;\sigma]$. Denotaremos por fx o polinômio

$$a_0x + a_1x^2 + ... + a_kx^{k+1} \in R[x;\sigma].$$

Mais geralmente, se H é um subconjunto de $R[x;\sigma]$ então $Hx = \{fx \mid f \in H\}$.

Lema 5.3 *Sejam L um ideal primo de $R[x;\sigma]$ e P um ideal primo de T_σ. Então*

(i) $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ se, e somente se, $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq L \cap T_\sigma$.

(ii) $Lx \subseteq L$ e $Px^j \subseteq P$, se $j \geq n$.

Prova. (i) Suponhamos por contradição que $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ e $R[x;\sigma]x^n \subseteq L \cap T_\sigma$. Então $(R[x;\sigma]x)^n \subseteq R[x;\sigma]x^n \subseteq L \cap T_\sigma$. Como L é primo, então a Proposição 1.1 implica que $R[x;\sigma]x \subseteq L$, absurdo.

Reciprocamente, suponhamos que $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq L \cap T_\sigma$. Como $R[x;\sigma]x^n \subseteq R[x;\sigma]x$, então $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$.

(ii) Como $LxR[x;\sigma] \subseteq LR[x;\sigma] \subseteq L$, então a Proposição 1.1 implica que $Lx \subseteq L$.

Temos que $Px^jT_\sigma \subseteq P$ e $Px^j \subseteq T_\sigma$ se $j \geq n$. Utilizando Proposição 1.1, $Px^j \subseteq P$ para cada $j \geq n$. ■

A próxima proposição mostra que os ideais primos de T_σ contendo $R[x;\sigma]x^n$ são determinados pelos ideais primos de U_0.

Proposição 5.4 *Seja P um ideal de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \subseteq P$. Então P é primo se, e somente se, $P = (P \cap U_0) + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$ e $P \cap U_0$ é um ideal primo de U_0.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \subseteq P$. Temos que $U_i\sigma^i(U_j) \subseteq U_{i+j}$ para cada $i,\ j \in \{0,1,...,n-1\}$. Então $U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$ é um ideal de T_σ e $(U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n)^2 \subseteq R[x;\sigma]x^n \subseteq P$.

Portanto $U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n \subseteq P$ assim $U_{n-1}x^{n-1} \subseteq P$. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a que $U_ix^i \subseteq P$ para cada $i \in \{1,...,n-1\}$. Então $P = (P \cap U_0) + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$. Como $(T_\sigma/P) \simeq (U_0/(P \cap U_0))$, segue que $P \cap U_0$ é um ideal primo de U_0.

Reciprocamente, suponhamos que $P = (P \cap U_0) + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$ e $P \cap U_0$ é um ideal primo de U_0. Como $(T_\sigma/P) \simeq (U_0/(P \cap U_0))$, então P é um ideal primo de T_σ. ■

A próxima proposição descreve completamente quando existe um ideal primo de T_σ não contendo $R[x;\sigma]x^n$. Além disso, ela é fundamental na prova dos principais resultados deste capítulo.

Proposição 5.5 *Seja P um ideal de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$. Então P é primo se, e somente se, existe um ideal primo L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_\sigma = P$.*

Prova. Suponhamos que P seja um ideal primo de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$. Se T_σ é um anel primo , então $R[x;\sigma]$ é um anel primo. De fato, sejam A, B ideais de $R[x;\sigma]$ tais que $AB = 0$. Logo, $\sigma^n(A)x^n = x^nA$ e Bx^n são ideais de T_σ com $x^nABx^n = 0$. Então $x^nA = 0$ ou $Bx^n = 0$ daí $A = 0$ ou $B = 0$. Portanto $R[x;\sigma]$ é um anel primo. Isso mostra o caso $P = 0$.

Se $P \neq 0$, então $V = P + R[x;\sigma]P + PR[x;\sigma] + R[x;\sigma]PR[x;\sigma]$ é um ideal não nulo de $R[x;\sigma]$. Como $R[x;\sigma]x^n(V \cap T_\sigma)R[x;\sigma]x^n \subseteq R[x;\sigma]x^nVR[x;\sigma]x^n \subseteq P$, a hipótese sobre P implica que $V \cap T_\sigma = P$. Pelo lema de Zorn, existe um ideal L de $R[x;\sigma]$ contendo P e maximal com respeito a condição $L \cap T_\sigma = P$.

Vamos mostrar que L é um ideal primo de $R[x;\sigma]$. De fato, sejam A, B ideais de $R[x;\sigma]$ tais que $A \supseteq L$, $B \supseteq L$ e $AB \subseteq L$. Então $(A\cap T_\sigma)(B\cap T_\sigma) \subseteq L\cap T_\sigma = P$. Logo, $A\cap T_\sigma = P$ ou $B\cap T_\sigma = P$. Da maximalidade de L seque que $A = L$ ou $B = L$ assim L é um ideal primo de $R[x;\sigma]$. Se $R[x;\sigma]x \subseteq L$, então $R[x;\sigma]x^n \subseteq L\cap T_\sigma = P$, absurdo.

Reciprocamente, seja L é um ideal primo de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$. Sejam A, B ideais de T_σ tal que $AB \subseteq L \cap T_\sigma$. Temos que $R[x;\sigma]x^nA$ e $R[x;\sigma]x^nB$ são ideais à esquerda de $R[x;\sigma]$ contidos em A e B, respectivamente.

Portanto $R[x;\sigma]x^nAR[x;\sigma]x^nB \subseteq AB \subseteq L$ daí a Proposição 1.1 implica que $R[x;\sigma]x^nA \subseteq L$ ou $R[x;\sigma]x^nB \subseteq L$. Novamente a Proposição 1.1 implica que $A \subseteq L$ ou $B \subseteq L$. Segue que $L \cap T_\sigma$ é um ideal primo de T_σ. ∎

Corolário 5.6 *Seja P um ideal de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$. Se P é primo, então existe um único ideal primo L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_\sigma = P$.*

Prova. Pela Proposição 5.5, existe um ideal primo L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_\sigma = P$. Para mostrar a unicidade, suponhamos que existe um ideal primo L_1 de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L_1$ tal que $L_1 \cap T_\sigma = P$.

Então $L_1R[x;\sigma]x^n \subseteq L_1 \cap T_\sigma = P = L \cap T_\sigma$ assim $L_1 \subseteq L$. Por outro lado, $LR[x;\sigma]x^n \subseteq L \cap T_\sigma = P = L_1 \cap T_\sigma$, então $L \subseteq L_1$. Portanto, $L_1 = L$. ■

Corolário 5.7 *(Going up) Sejam $P_0 \subseteq P_1$ ideais primos de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P_1$. Se L_0 é um ideal primo de $R[x]$ tal que $L_0 \cap T_\sigma = P_0$, então existe um ideal primo $L_1 \supseteq L_0$ de $R[x;\sigma]$ tal que $L_1 \cap T_\sigma = P_1$.*

Prova. Utilizando a Proposição 5.5, obtemos que existe um ideal primo L_1 de $R[x;\sigma]$ tal que $L_1 \cap T_\sigma = P_1$. Como $L_0R[x;\sigma]x^n \subseteq L_0 \cap T_\sigma = P_0 \subseteq P_1 = L_1 \cap T_\sigma$ e $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq L_1$, então $L_0 \subseteq L_1$. ■

Corolário 5.8 *Existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre :*

(i) O conjunto de todos os ideais primos de $R[x;\sigma]$ não contendo $R[x;\sigma]x$

(ii) O conjunto de todos os ideais primos de T_σ não contendo $R[x;\sigma]x^n$

Prova. Consideremos a correspondência que associa cada ideal primo L de $R[x;\sigma]$ não contendo $R[x;\sigma]x$ com o ideal primo $L \cap T_\sigma$ de T_σ. Logo, $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq L \cap T_\sigma$. A sobrejetividade e a injetividade da correspondência seguem respectivamente da Proposição 5.5 e do Corolário 5.6. Além disso, os Corolários 5.6 e 5.7 implicam que a correspondência preserva ordem. ■

Um ideal P de T_σ é chamado U_0-disjunto se $P \neq 0$ e $P \cap U_0 = 0$.

Corolário 5.9 *Assuma que U_0 é um subanel essencial de R. Se P um ideal primo U_0-disjunto de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$, então existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_\sigma = P$.*

Prova. Pela Proposição 5.5, existe um ideal primo L de $R[x;\sigma]$ tal que $L \cap T_\sigma = P$. Portanto $L \cap R = 0$, pois $L \cap U_0 = 0$ e U_0 é um subanel essencial de R. ■

Lema 5.10 *Sejam R um anel fortemente σ-primo e U_0 um subanel essencial de R. Se P um ideal primo U_0-disjunto de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$, então*

$$P \nsubseteq U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n.$$

Prova. Suponhamos por contradição que $P \subseteq U_1x+...+U_{n-1}x^{n-1}+R[x;\sigma]x^n$. Pelo Corolário 5.9, existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x;\sigma]$ tal que $L \cap T_\sigma = P$. Seja $s \in (L + R[x;\sigma]x^n) \cap U_0$. Então $s = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in L$ e $f_2 \in R[x;\sigma]x^n$. Logo, $s - f_2 = f_1 \in L \cap T_\sigma = P$ daí $s = 0$. Portanto $(L + R[x;\sigma]x^n) \cap U_0 = 0$ assim $(L + R[x;\sigma]x^n) \cap R = 0$, pois U_0 é essencial em R.

Utilizando o Lema 5.1, obtemos que $R[x;\sigma]x^n \subseteq L \cap T_\sigma = P$, absurdo. Portanto $P \nsubseteq U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$. ■

Corolário 5.11 *Assuma que U_0 é um subanel primo e essencial de R. Então existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais primos R-disjuntos de $R[x;\sigma]$.

(ii) O conjunto de todos os ideais primos U_0-disjuntos de T_σ.

Prova. Consideremos a correspondência que associa cada ideal primo R-disjunto L de $R[x;\sigma]$ com o ideal primo U_0-disjunto $L \cap T_\sigma$ de T_σ.

Se L é um ideal primo R-disjunto de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \subseteq L$, então $L = R[x;\sigma]x$ assim $L \cap T_\sigma = U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$ é um ideal primo de T_σ.

Por outro lado, se P é um ideal primo U_0-disjunto de T_σ contento $R[x;\sigma]x^n$, então a Proposição 5.4 implica que $P = U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$. O outro caso segue dos Corolários 5.8, 5.9 e do Lema 5.10. ■

Teorema 5.12 *Assuma que U_0 é um subanel primo essencial de R. Então P é um ideal primo U_0-disjunto de T_σ se, e somente se, P é maximal no conjunto dos ideais U_0-disjuntos de T_σ*

Prova. Suponhamos que P seja maximal no conjunto dos ideais U_0-disjuntos de T_σ. Sejam A, B ideais em T_σ tais que $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$.

Então $(A \cap U_0)(B \cap U_0) \subseteq P \cap U_0 = 0$, daí $A \cap U_0 = 0$ ou $B \cap U_0 = 0$. Pela maximalidade de P, $A = P$ ou $B = P$ assim P é um ideal primo de T_σ.

Reciprocamente, suponhamos que P seja um ideal primo U_0-disjunto de T_σ. Se $R[x;\sigma]x^n \subseteq P$ a Proposição 5.4 implica que $P = U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$ assim P é maximal no conjunto dos ideais U_0-disjuntos de T_σ.

Suponhamos que $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$. Pelo Corolário 5.9, existe um ideal primo R-disjunto L de $R[x;\sigma]$ tal que $L \cap T_\sigma = P$. Afim de mostrar que P é maximal no conjunto dos ideais U_0-disjuntos de T_σ, considere um ideal U_0-disjunto P' de T_σ com $P \subseteq P'$. Podemos supor que P' é maximal no conjunto dos ideais U_0-disjuntos de T_σ. Pela primeira parte já demonstrada, P' é um ideal primo de T_σ. Então a Proposição 5.4 e o Lema 5.10 implicam que $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P'$. Pelo Corolário 5.7, existe um ideal primo $L' \supseteq L$ de $R[x;\sigma]$ tal que $L' \cap T = P'$. Como U_0 é um subanel essencial de R o Corolário 5.9 implica que $L' \cap R = 0$. Utilizando o Lema 5.1 obtemos que $L = L'$. Conseqüentemente $P = L \cap T_\sigma = L' \cap T_\sigma = P'$. ■

5.2 Ideais Maximais em Subanéis σ-Admissíveis

Os principais resultados desta seção caracterizam os ideais maximais de T_σ e generalizam alguns resultados em [4].

Proposição 5.13 *Seja M um ideal de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$. Então T_σ/M é um anel simples com identidade se, e somente se, existe um ideal L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $R[x;\sigma]/L$ é um anel simples com identidade e $L \cap T_\sigma = M$.*

Prova. Suponhamos que T_σ/M seja simples com identidade e $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$.

Pela Proposição 5.5, existe um ideal primo L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $L \cap T_\sigma = M$. Como $(M + R[x;\sigma]x^n) = T_\sigma$, então

$$(T_\sigma/M) \simeq (R[x;\sigma]x^n/(M \cap R[x;\sigma]x^n)) = (R[x;\sigma]x^n/(L \cap R[x;\sigma]x^n)).$$

Portanto Lx^n é um ideal maximal de $R[x;\sigma]x^n$, pois $Lx^n = L \cap R[x;\sigma]x^n$. Vamos mostrar que L é maximal em $R[x;\sigma]$. Seja V um ideal de $R[x;\sigma]$ com $L \subseteq V$. Então $Lx^n \subseteq Vx^n$ assim $Vx^n = Lx^n$ ou $Vx^n = R[x;\sigma]x^n$. Logo, $V = R[x;\sigma]$ ou $V = L$ daí L é maximal em $R[x;\sigma]$ com $(L + R[x;\sigma]x^n) = R[x;\sigma]$. Então $(R[x;\sigma]/L) \simeq (R[x;\sigma]x^n/(L \cap R[x;\sigma]x^n)) \simeq (T_\sigma/M)$, ou seja $R[x;\sigma]/L$ é um anel simples com identidade.

Reciprocamente, seja $R[x;\sigma]/L$ um anel simples com identidade com $R[x]x \nsubseteq L$. Então L é um ideal primo de $R[x;\sigma]$ assim $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq L$. Conseqüentemente $L + R[x;\sigma]x^n = R[x;\sigma]$, daí

$$R[x;\sigma]x^n/(L \cap R[x;\sigma]x^n) \simeq (L + R[x;\sigma]x^n)/L = R[x;\sigma]/L.$$

Como $R[x;\sigma]x^n \subseteq T_\sigma$, então $(L \cap T_\sigma) + R[x;\sigma]x^n = (L + R[x;\sigma]x^n) \cap T_\sigma = T_\sigma$.

Portanto $T_\sigma/(L \cap T_\sigma) \simeq R[x;\sigma]x^n/(L \cap R[x;\sigma]x^n) \simeq (R[x;\sigma]/L)$. ■

A demonstração do seguinte corolário é análoga a demonstração do Corolário 5.8.

Corolário 5.14 *Existe uma correspondência biunívoca, via contração, preservando ordem entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais L de $R[x;\sigma]$ tal que $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ e $R[x;\sigma]/L$ é simples com identidade.

(ii) O conjunto de todos os ideais P de T_σ tal que $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq P$ e T_σ/P é simples com identidade.

Conforme ([4], Corolário 1.7), se R é um anel nil ou simples sem identidade, então $R[x;\sigma]$ é um anel radical de Brown-McCoy.

Corolário 5.15 *Se R é um anel nil, então T_σ é um anel radical de Brown-McCoy.*

Prova. Suponhamos por contradição que existe um ideal M de T_σ tal que T_σ/M é simples com identidade. Se $R[x;\sigma]x^n \subseteq M$, então a Proposição 5.4 implica que $M = (M \cap U_0) + U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$, assim $U_0/(M \cap U_0) \simeq T_\sigma/M$ é simples com identidade, o que contradiz a nilidade de U_0. Se $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$, então a Proposicão 5.13 implica que existe um ideal L de $R[x;\sigma]$ talque $R[x;\sigma]/L$ é simples com identidade e $L \cap T_\sigma = M$. O que contradiz o Corolário 1.7 em [4]. ■

A demonstração do seguinte corolário é análoga a demonstração do Corolário 5.15.

Proposição 5.16 *Seja R um anel simples sem identidade. Se U_0 é um subanel nil ou simples sem identidade, então T_σ é um anel radical Brown-McCoy.*

Um σ-ideal K de R é dito σ-primo se para quaisquer ideais σ-invariantes A e B de R temos que $AB \subseteq K$ implica que $A \subseteq K$ ou $B \subseteq K$. Um anel R é dito σ-primo se o ideal (0) é um ideal σ-primo.

O σ-pseudo radical $p_\sigma(R)$ de R é definido como a intersecção de todos os ideais σ-primos não nulos de R.

Um elemento $r \in R$ é dito σ-invariante se $\sigma(r) = r$. Um elemento $r \in R$ é dito σ^m-normalizante se $ra = a\sigma^m(r)$, para cada $r \in R$.

Seja $\mathcal{T}$ a classe de todos os anéis σ-primos não nulos R tal que cada σ-ideal não nulo de R contém um elemento σ-invariante não nulo o qual é σ^m-normalizante para algum $m \geq 1$.

O seguinte resultado generaliza ([4], Teorema 1.10).

Teorema 5.17 *Seja S_0 um subanel essencial de R. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) Existe um ideal S_0-disjunto M de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$ tal que T_σ/M é simples com identidade.

(ii) $R \in \mathcal{T}$ e $p_\sigma(R) \neq 0$.

(iii) R é σ-primo e $p_\sigma(R)$ contém um elemento não nulo σ-invariante e σ^m-normalizante, para algum $m \geq 1$.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja M um ideal S_0-disjunto de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$ tal que T_σ/M é simples com identidade. Pela Proposição 5.13, existe um ideal L de $R[x;\sigma]$ tal que $R[x;\sigma]/L$ é simples com identidade e $L \cap T_\sigma = M$. Daí o Teorema 1.10 em [4] implica que $R \in \mathcal{T}$ e $p_\sigma(R) \neq 0$, o que mostra (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $R \in \mathcal{T}$ e $p_\sigma(R) \neq 0$. Pelo Teorema 1.10 em [4], existe um ideal L de $R[x;\sigma]$ com $R[x;\sigma]x \nsubseteq L$ tal que $R[x;\sigma]/L$ é simples com identidade. Utilizando a Proposição 5.13 obtemos que $M = L \cap T_\sigma$ é um ideal S_0-disjunto de T_σ com $R[x;\sigma]x^n \nsubseteq M$ tal que T_σ/M é simples com identidade. O que mostra (i).

Pelo Teorema 1.10 em [4] segue que (ii) e (iii) são equivalentes. Isso completa a prova. ■

Observação 5.18 Seja U_0 um subanel essencial de R. O teorema anterior permite descrever completamente quando existe um ideal U_0-disjunto M de T_σ tal que T_σ/M é um anel simples com identidade. De fato, se isso acontece ou temos $p_\sigma(R) \neq 0$ e $R \in \mathcal{T}$ ou então M contém $R[x]x^n$. Neste último caso a Proposição 5.4 implica que

$$M = U_1x + ... + U_{n-1}x^{n-1} + R[x;\sigma]x^n$$

e segue que U_0 deve ser um anel simples com identidade. A recíproca também é verdadeira.

Bibliografia

[1] Beidar, K. I., Fong, Y., Puczylowski, E. R.; *Polynomial Rings over Nil Rings Cannot Be Homomorphically Mapped onto Rings with Nonzero Idempotents.* J. Algebra, 238 (2001), 389-399.

[2] Beidar, K. I., Mardindale III, W. S., Mikhlaev, A. V.; *Rings With Generalized Identities.* Monographs and Text books in Pure and Applied Mathematics 196 (1996).

[3] Cisneros, E., Ferrero, M., Conzáles, M. I.; *Prime Ideals of Skew Polynomial Rings and Skew Laurent Polynomial Rings.* Math. J. Okayama University 32 (1990), 61-72.

[4] Cortes, W., Ferrero, M.; *Partial Skew Polinomial Rings: Prime and Maximal Ideals.* Comm. Algebra 35(2007), 1183-1199.

[5] Divinsky, N.; *Rings and Radicals.* Allen and Unwin, London, 1965.

[6] Ferrero, M.; *Prime and Principal Closed Ideals in Polynomial Rings.* Journal of Algebra 134 (1990), 45-59.

[7] Ferrero, M.; *Prime and Maximal Ideals in Polynomial Rings.* Glasgow Math. Journal 37 (1995), 351-362.

[8] Ferrero, M., Parmenter, M. M.; *A Note on Jacobson Rings and Polynomial Rings.* Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1)(1989) 281-286.

[9] Ferrero, M., Wisbauer, R.; *Unitary Strongly Prime Rings and Related Radicals.* J.Pure Appl. Algebra 181 (2003), 209-226.

[10] Goodearl, K. R.; *Ring Theory-Nonsingular Rings and Modules.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York- Basel, 1976.

[11] Kaučikas, A., Wisbauer, R.; *Noncommutative Hilbert Rings.* Journal of Algebra and Its Applications, (34)(2004) 437-443.

[12] Krempa, J.; *Logical Connections Among Some Open Problems in Noncommutative Rings.* Fund. Math. 76 (1972) 121-130.

[13] Krempa, J.; *On Radical Properties of Polynomial Rings.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 20 (1972) 545-548.

[14] Lam, T. Y.; *A First Course in Noncommutative Rings.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] Lambek, J.; *Lectures on Rings and Modules.* McGill University, Chelsea Publishing Company, 2nd Edition, New York, 1976.

[16] Matczuc, J.; *Maximal Ideals of Skew Polynomial Rings with Automorphism Type.* Communications in Algebra 19(7) (1991), 1893-1907.

[17] McCoy, N. H.; *The Theory of Rings.* The Macmillan Conpany, New York, 1969.

[18] Pearson, K. R., Stephenson, A., Watters, J. F.; *Skew Polynomial and Jacobson Rings.* Proc. London. Math. Soc. (3)42(1981) 559-576.

[19] Puczylowski, E. R., Smoktunowicz, A.; *On Maximal Ideals and the Brown-McCoy Radical of Polynomial Rings.* Communications in Algebra 26(8) (1998), 2473-2482.

[20] Smoktunowicz, A.; *On Primitive Ideals in Polynomial Rings over Nil Rings.* Algebras and Representation Theory (2005)8: 69-73.

[21] Watters, J.; *Polynomial Extensions of Jacobson Rings.* J. Algebra 36 (1975), 302-308.

Índice Remissivo