

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Escoamento Incompressível com Condição de
Neumann para a Pressão: Simulação e
Formulação Matricial em Variáveis Primitivas**

por

Elba O. Bravo Asenjo

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, março de 1997

Escoamento Incompressível com Condição de Neumann para a Pressão: Simulação e Formulação Matricial em Variáveis Primitivas

por

Elba O. Bravo Asenjo

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Julio C. R. Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof. Dr. João L. F. de Azevedo

Prof. Dr. Haroldo de Campos Velho

Prof. Dr. Horácio Antonio Vielmo

Prof. Dr. Marco T. de Vilhena

Profa. Dra. Rosa Leamar Dias Blanco

Coordenadora do PROMEC

Porto Alegre, 17 de março de 1997

Dedico
esta Tese a
Ausberto, meu querido esposo,
Weyden e Arthur, meus adorados filhos

AGRADECIMENTOS

A meu orientador, Prof. Julio Claeysen, pela oportunidade de ter acesso ao seu trabalho de pesquisa, pelo apoio, pelo incentivo e pela sua paciência.

Aos professores: Sergio, Vilson, Rosa, Horácio, Awruch, Vilhena, Alwin e Zaro, pelos ensinamentos, incentivos e motivação.

Aos colegas do PROMEC, pelo companherismo; a Rodrigo e Wagner pelas experiências computacionais, e a Elisabeta e German pela sua prestatividade.

Aos funcionários, Sr. Paulo e Ivanise, pelo apoio e eficiência administrativa.

Ao CNPq, CAPES e FAPERGS, pelo indispensável auxílio, para a realização dos meus estudos.

A minha família, pelo apoio e compreensão.

RESUMO

Um algoritmo, com velocidade e pressão como variáveis primárias e com condição de Neumann para a pressão, visando analisar escoamentos incompressíveis e aplicado ao estudo do problema da cavidade, é apresentado neste trabalho. São utilizados métodos em diferenças central, up-wind e semi-lagrangeano e formulados matricialmente. O campo da pressão é atualizado de maneira direta, através da equação de Poisson, e inicializado por mínimos quadrados. Simulações são feitas com variados números de Reynolds, obtendo-se o deslocamento do vórtice central e a aparição de vórtices secundários e terciários.

TITLE: "INCOMPRESSIBLE FLOW WITH NEUMANN PRESSURE
CONDITION: SIMULATION AND MATRIX FORMULATION
IN PRIMITIVES VARIABLES"

ABSTRACT

An algorithm with velocity and pressure as primary unknowns and with Neumann pressure boundary condition, to analyse incompressible flows is presented in this work, and it is applied to study the driven cavity flow. Central, up-wind and semi-lagrangean finite differences schemes, formulated in matrix terms, are employed. The pressure field is updated directly from Poisson's equation and initialized by least-squares. Simulations with several Reynolds numbers are made, obtaining the displacement of the central vortex as well as the development of secondary and tertiary vortices.

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz da equação discretizada, singular, de Poisson
D	Operador de Dilatação
F_1	Operador de diferença finita
F_2	Operador de diferença finita
h	Incremento espacial
L	Operador de difusão–divergência
\mathbb{L}	Operador discretizado de difusão–divergência
\mathcal{L}	Comprimento de escala característico
M	Matriz de massa distribuída
\mathbb{M}	Matriz de massa discretizada
N	Operador de convecção
\mathbb{N}	Operador discretizado de convecção
\mathbf{n}	Vetor normal unitário
p	Campo de pressão
$p_{i,j}^k$	Valor da pressão no ponto $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ no tempo t_k
p^F	Vetor da pressão discretizado na fronteira
P	Operador gradiente de pressão
\mathbb{P}	Operador gradiente de pressão discretizado
R	Matriz da equação discretizada, não singular, de Poisson
Re	Número de Reynolds $[\mathcal{U} \mathcal{L} / \nu]$
t_k	Tempo discretizado
T	Operador de transformação semi–lagrangeano de cordenadas
\mathbf{u}	Campo de velocidades
u	Componente horizontal de velocidade
u_n	Componente normal de velocidade
u_τ	Componente tangencial de velocidade
u_Γ	Componente horizontal de velocidade na fronteira

u^F	Vetor da componente horizontal de velocidade discretizada na fronteira
$u_{i+1/2,j}^k$	Valor da componente horizontal de velocidade no ponto $(x_i, y_{j-1/2})$ e no tempo t_k
U	Vetor de estado velocidade–pressão
\mathcal{U}	Velocidade característica do problema
\mathbb{U}	Vetor de estado velocidade–pressão discretizado
\mathbb{U}^F	Vetor de estado velocidade–pressão discretizado na fronteira
v	Componente vertical de velocidade
$v_{i,j+1/2}^k$	Valor da componente vertical da velocidade no ponto $(x_{i-1/2}, y_j)$ e no tempo t_k
v_Γ	Componente vertical de velocidade na fronteira
v^F	Vetor da componente vertical de velocidade discretizada na fronteira
x_i	Ponto espacial horizontal da grade
y_j	Ponto espacial vertical da grade
∇^2	Operador de Laplace
∇	Operador nabla
Γ	Fronteira do domínio espacial
Δt	Incremento temporal
Δx	Incremento espacial horizontal
Δy	Incremento espacial vertical
Θ	Divergência de velocidade
ν	Viscosidade cinemática
τ	Vetor tangente unitário
Ω	Domínio espacial
$\partial\Omega$	Contorno do domínio espacial

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES DO CONTÍNUO PARA UM ESCOAMENTO IN-	
COMPRESSÍVEL	4
2.1 Equações Básicas	4
2.2 Equação de Poisson para a Pressão	6
2.3 Condições de Contorno para a Pressão	8
2.4 Condição de Compatibilidade	12
3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER–STOKES	14
3.1 Grade e Valores Nodais	14
3.2 Método de Diferença Central	19
3.3 Método de Diferença Upwind	23
3.4 Método de Euler–Lagrange	28
4 A FORMULAÇÃO MATRICIAL	36
4.1 Introdução	36
4.2 Método de Diferença Central	37

4.3	Método de Diferença Upwind	49
4.4	Método de Euler–Lagrange	52
5	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PRESSÃO	59
5.1	Introdução	59
5.2	Celas Interiores da grade	60
5.3	Celas adjacentes à fronteira da grade	64
6	ALGORITMO VELOCIDADE–PRESSÃO	70
6.1	Inicialização da Pressão	71
6.2	Equações da Pressão	76
6.3	Algoritmo Computacional Velocidade–Pressão	81
7	SIMULAÇÕES COM O PROBLEMA DA CAVIDADE	83
8	CONCLUSÕES	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
	APÊNDICE A-1 MÉTODO DE DIFERENÇA CENTRAL – MA- TRIZES	105
A-1.1	Submatrizes das matrizes \mathbb{L} e \mathbb{L}^F	105
A-1.2	Submatrizes das matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$	109
A-1.3	Submatrizes das matrizes \mathbb{P} e $\mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$	115

APÊNDICE A-2	MÉTODO DE DIFERENÇA UPWIND – MA-	
	TRIZES	121
A-2.1	Submatrizes da matriz $\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$	121
A-2.2	Submatrizes da matriz $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$	126

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Domínio Bidimensional	4
Figura 2.2	Sistema cartesiano local em P	8
Figura 3.1	Grade Computacional do retângulo Ω	15
Figura 3.2	Cela computacional, mostrando a localização das variáveis associadas ao ponto de referência (x_i, y_j)	16
Figura 3.3	Aproximação das condições de contorno da componente de velocidade tangencial	17
Figura 3.4	Grade Alternada	19
Figura 3.5	Grade euleriana-lagrangeana	29
Figura 6.1	Molécula para a pressão	79
Figura 6.2	Esquema para o cálculo da pressão nos pontos interiores	81
Figura 7.1	Estrutura do escoamento e condições de contorno para o problema da cavidade	84
Figura 7.2	Campo de velocidades em $t = 100$	87
Figura 7.3	Campo de velocidades e de pressão para $Re = 10000$ em $t = 100$	88
Figura 7.4	Perfis de velocidade, para as componentes u e v , no meio da cavidade e distribuição da pressão nos lados AB, BC e CD da cavidade para $Re = 10000$ em $t = 100$	89
Figura 7.5	Comparação entre o perfil de velocidade, para a componente u , obtido por Ghia et al. (*), e o deste trabalho (-) para $Re = 10000$ numa grade 129×129	93

Figura 7.6 Comparação entre o perfil de velocidade, para a componente v , obtido por Ghia et al. (*), e o deste trabalho (-) para $Re = 10000$ numa grade 129×129 93

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1	Comparação dos resultados, para a componente de velocidade u , ao longo da linha vertical através do centro geométrico da cavidade para $Re = 10000$	91
Tabela 7.2	Comparação dos resultados, para a componente de velocidade v , ao longo da linha horizontal através do centro geométrico da cavidade para $Re = 10000$	92

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, desenvolve-se um algoritmo em termos de velocidade–pressão em diferenças finitas para estudar o problema do escoamento numa cavidade, considerado como um sistema matricial singular, em que é incorporada a condição de Neumann para a pressão.

Para escoamentos incompressíveis, Gresho e Sani, 1987, consideram que a pressão é uma grandeza um tanto misteriosa. Não é uma variável termodinâmica, uma vez que não há equação de estado para um fluido incompressível. De outro lado, do ponto de vista matemático, o sistema de equações que descreve um escoamento incompressível é singular com relação à pressão; isto é, não há equação temporal para esta variável. Porém, na literatura, as equações para um fluido incompressível são consideradas principalmente como um sistema diferencial restrito: o campo de velocidades deve ser solenoidal e, no qual, são prescritas somente condições iniciais e de contorno para o campo de velocidades. No caso da pressão, existem algumas condições de contorno propostas para situações particulares, como a interface entre dois fluidos [Batchelor, 1970]. No trabalho de Gresho e Sani, 1987, é sugerida a inclusão da condição de contorno de Neumann para a pressão.

A atenção é focalizada na formulação matricial que resulta da discretização espacial das equações de Navier–Stokes, acompanhada de uma observação cuidadosa das condições de contorno para a pressão, apresentada por Gresho e Sani, 1987. Desta forma, é obtido um sistema diferencial singular, que será integrado utilizando um algoritmo em termos da velocidade–pressão modificado, isto é, extraindo, convenientemente, um sistema não–singular para os pontos interiores da grade considerada. Para isto, a pressão é inicializada discretizando a equação de Poisson com a condição de Neumann, em termos da velocidade inicial, e resolvida por mínimos quadrados, por ser um sistema singular. A pressão é atualizada, no decorrer do tempo, através da equação de Poisson munida da condição de Neumann.

Esta atualização é realizada de maneira direta, incorporando valores da pressão e do campo de velocidades já calculados.

Pretende-se, com este procedimento, incorporar ao estudo diversas técnicas e visualizar a influência da variação do número de Reynolds na formação de vórtices.

O escoamento numa cavidade quadrada tem sido usado freqüentemente para testar e avaliar diversas técnicas numéricas. Usualmente, o caso considerado envolve uma cavidade cheia de fluido. A parede superior movimenta-se com velocidade uniforme em seu próprio plano. Movimentos dentro da cavidade são causados pela tensão de cisalhamento, devido ao movimento da parede superior, à qual o fluido está sujeito. Simulações para escoamento laminar, numa cavidade sobre uma variedade de números de Reynolds, têm sido apresentadas por vários autores [Ghia et al., 1982; Schreiber e Keller, 1983; etc.].

Um problema semelhante, refere-se ao estudo do escoamento de um fluido, sob condições isotérmicas, numa cavidade em que a parede superior é formada pelo escoamento de um fluido mais leve que o confinado à cavidade, . As características físicas de interfaces líquido-líquido vêm sendo discutidas através dos anos [Mansel et al.,1994].

Este trabalho está organizado em nove capítulos, sendo que o primeiro e o último correspondem à introdução e bibliografia.

No segundo capítulo, faz-se, como suporte analítico, uma breve inclusão das idéias de Gresho e Sani, 1987, que são de interesse para o nosso trabalho.

No terceiro capítulo, apresenta-se a discretização espacial do sistema, utilizando os métodos das diferenças centrais, upwind e Euler-Lagrange, seguindo a formulação empregada por Casulli, 1988, para um esquema unificado.

No quarto capítulo, a discretização é considerada de maneira matricial, seguindo a metodologia utilizada por Claeysen e Campos Velho, 1994. Deste modo,

é possível observar o agrupamento nodal dos valores de contorno e, por sua vez, motivar uma conveniente manipulação para com os pontos interiores e adjacentes da grade. Esta versão semidiscreta para as equações de Navier–Stokes é discretizada, no tempo, utilizando uma aproximação de diferenças ascendentes (Euler explícito). Deve-se observar que esta formulação matricial pode ser considerada como um sistema diferencial–algébrico e, eventualmente, utilizam-se rotinas existentes, tais como o DASSL [Brenam et al., 1989].

No quinto e sexto capítulos, aborda-se a discretização, em diferenças centrais, da equação de Poisson para a pressão, com condições de Neumann, e apresenta-se um novo algoritmo velocidade–pressão. Por ser um algoritmo em variáveis primitivas, pode-se, em princípio, estendê-lo para outras situações. Além disso, ele é robusto, no sentido que pode integrar escoamentos para números de Reynolds muito altos, próprios de turbulência.

No sétimo capítulo, são apresentadas diversas simulações, com diferenças centrais, para o problema da cavidade, sob uma variedade de números de Reynolds, observando-se o deslocamento do vórtice central e o aparecimento de vórtices secundários e terciários, de acordo com a literatura [Guia et al.,1982].

No oitavo capítulo, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2 EQUAÇÕES DO CONTÍNUO PARA UM ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL

2.1 Equações Básicas

As equações de Navier–Stokes, transientes, incompressíveis, para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$ (velocidade e pressão cinemática, isto é, pressão dividida pela densidade), munidas de condições iniciais e de contorno para a velocidade, conformam o seguinte sistema diferencial

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \text{ em } \bar{\Omega} = \Omega \oplus \Gamma \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \Gamma = \partial\Omega. \quad (2.4)$$

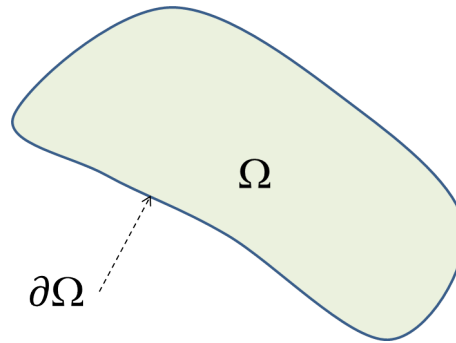


Figura 2.1 Domínio Bidimensional

Aqui, Ω é uma região bidimensional limitada, Γ sua fronteira, e o campo de velocidades inicial \mathbf{u}_0 é solenoidal em Ω

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.5)$$

Do sistema formulado, tem-se a velocidade normal inicial

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma. \quad (2.6)$$

Da equação da continuidade e do teorema da divergência, obtém-se a condição de conservação global de massa,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dx = 0. \quad (2.7)$$

Deve ser observado que, a priori, não é fornecida CC para a pressão. Assim, a solução de (2.1)–(2.7) incluirá p , sujeito a uma constante aditiva arbitrária (o nível de pressão hidrostática).

As condições de campo inicial solenoidal e velocidade normal inicial compatível com a CC, são requeridas para que o problema possua solução bem definida, única e solenoidal para todo $t \geq 0$ [Temam, 1985]. Para o campo inicial tangencial não é requerido que seja compatível com a CC; se o for, então a solução será mais bem comportada [Gresho e Sani, 1987].

Uma interpretação alternativa útil e importante de (2.1)–(2.2) é a seguinte: dado um campo de velocidades solenoidal apropriado, as equações (2.1)–(2.2) podem ser usadas para determinar o campo de pressão, e estabelecer que a aceleração também é solenoidal. Isto pode ser feito tomando a derivada com respeito ao tempo de (2.2) e reescrevendo (2.1)–(2.2) como

$$\mathbf{a} + \nabla p = f(\mathbf{u}) \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{a} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ e $f(\mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$; dado \mathbf{u} tal que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Das equações (2.8)–(2.9) podem ser obtidos a e p . As equações (2.3)–(2.7) também devem ser usadas para completar a especificação do problema.

2.2 Equação de Poisson para a Pressão

Assumindo diferenciabilidade apropriada, a equação de Poisson para a pressão é obtida aplicando primeiro o operador divergência à equação (2.1),

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla^2 p = \nu \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) . \quad (2.10)$$

Logo, assumindo que div e $\frac{\partial}{\partial t}$ podem ser comutados, e usando a identidade

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

e o fato que $div \ rot$ de um campo vetorial é zero, obtém-se

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla^2 p = \left(\nu \nabla^2 \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) \quad \text{em } \Omega , \quad (2.11)$$

onde $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ é a divergência da velocidade.

Mas, por (2.4) e (2.6), tem-se que a condição (2.2) aplica-se “em todo lugar e em todo tempo”, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \bar{\Omega} \quad \text{para } t \geq 0 . \quad (2.12)$$

Assim, substituindo (2.12) em (2.11), obtém-se a equação de Poisson para a Pressão (EPP)

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega \quad \text{para } t \geq 0 . \quad (2.13)$$

Embora (2.1) e (2.12) impliquem (2.13), porém, nem sempre (2.1) e (2.13) implicam (2.12). Isto pode ser visto como segue:

Subtraíndo (2.13) de (2.10), obtém-se

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

a qual, após comutar os operadores, torna-se a equação do calor transiente para Θ , isto é,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \Theta .$$

Desde que Θ é inicialmente zero em $\bar{\Omega}$, por (2.5), este permanecerá zero se, e somente se, Θ (ou $\frac{\partial \Theta}{\partial n}$) é mantido zero em Γ .

Por outro lado, considere-se a seguinte EPP equivalente,

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) . \quad (2.14)$$

Uma análise similar permite obter

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.15)$$

desconsiderando, assim, o valor de Θ em Γ . Integrando (2.15) no tempo obtém-se $\nabla \cdot \mathbf{u} = g(\mathbf{x})$; isto é, $\nabla \cdot \mathbf{u}$ é independente de t . Mas, por (2.5), tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$, e sendo $\nabla \cdot \mathbf{u} = g(\mathbf{x})$ para todo t , tem-se que $g(\mathbf{x}) = 0$. De modo que (2.1) e (2.14) implicam (2.12), sendo assim um problema bem posto, mas para que (2.1) e (2.13) impliquem (2.12) faz-se necessário um “auxílio” adicional.

Observe-se que, qualquer campo de velocidade, de divergência livre, induz um campo de pressão computável. Este campo de pressão assegura uma aceleração de divergência livre, a qual também é computável; isto é, a pressão induzida

assegura que o campo de velocidade permaneça de divergência livre, ao menos, até a imposição de condições de contorno para a pressão.

2.3 Condições de Contorno para a Pressão

Focalizando um domínio bidimensional suficientemente regular, assumase um sistema de coordenadas cartesianas com $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = (u, v)$ e um sistema cartesiano, local, erigido em cada ponto em Γ , tal que a normal local em Γ coincida com um de seus eixos. Uma análise similar pode ser feita para um domínio tridimensional suficientemente regular.

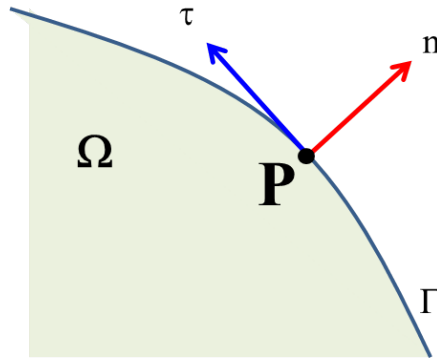


Figura 2.2 Sistema cartesiano local em P

Denotando por \mathbf{n} , o vetor normal unitário que aponta para fora, e por τ , o vetor tangente unitário em Γ , como mostra a Fig. 2.2, temos as seguintes identidades em Γ :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = u_n \frac{\partial}{\partial n} + u_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.17)$$

onde as derivadas com respeito a n são unilaterais.

Para completar a especificação do problema para a pressão, deve-se colocar condições de contorno em Γ . Como (2.13) e (2.14) são equações derivadas, as condições de contorno devem também ser derivadas. Uma maneira óbvia de fazer isto é, simplesmente, aplicar (2.1) na própria fronteira. Mas, como (2.1) é uma equação vetorial, e uma condição de contorno escalar é requerida, deve-se escolher uma condição de contorno para (2.13) e (2.14): ou a normal, ou a projeção tangencial de (2.1) sobre Γ . Escolhendo a primeira opção, obtém-se

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial n} = \nu \nabla^2 u_n - \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_n \right) \text{ em } \Gamma \text{ para } t \geq 0 \quad (2.18)$$

de modo que as equações (2.13)–(2.14) e (2.18) formam um **problema de Neumann** para a pressão; isto é, dado um campo de velocidade satisfazendo (2.1)–(2.7), o campo de pressão induzido pode ser obtido de (2.13)–(2.14) e (2.18), pelo menos, até uma constante aditiva arbitrária.

Observe-se que a expressão de conservação global de massa está sempre associada com o problema de Neumann. Esta condição associada com (2.14) e (2.18) é automaticamente satisfeita, quando (2.1)–(2.7) são satisfeitas; isto é, quando o problema original de Navier–Stokes é bem posto, também o é, o problema de Poisson/Neumann associado.

Por outro lado, a componente tangencial de (2.1) em Γ fornece a chamada *condição de Dirichlet*:

$$\tau \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial \tau} = \nu \nabla^2 u_\tau - \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\tau \right) \quad (2.19)$$

onde o valor de p em τ (isto é, dados de Dirichlet) é provisto pela integração de (2.19) ao longo de τ .

A seguir, mostra-se que uma solução de (2.13)–(2.14) e (2.18) satisfaz (2.19). Assumindo que (2.13) aplica-se em Γ , obtém-se, usando (2.16) e (2.17),

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\left(\frac{\partial}{\partial n} (\mathbf{u} \cdot \nabla u_n) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\tau) \right). \quad (2.20)$$

Diferenciando (2.18) na direção n ,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n} [\nu \nabla^2 u_n - \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_n \right)],$$

e substituindo o resultado em (2.20), decorre

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\tau) - \nu \nabla^2 \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_n}{\partial n} \quad (2.21)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ foi comutado com ∇^2 e $\frac{\partial}{\partial t}$. Agora, usando a equação da continuidade, (2.2), em Γ , na forma $\left(\frac{\partial u_n}{\partial n} \right) + \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \right) = 0$, em (2.21), e comutando uma vez mais os operadores obtém-se,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\nu \nabla^2 u_\tau - \frac{\partial u_\tau}{\partial t} \right)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\tau + \frac{\partial p}{\partial \tau} - \nu \nabla^2 u_\tau \right) = 0, \quad (2.22)$$

a qual implica que o termo entre parêntesis é independente de τ (em Γ). Mas, desde que a equação do movimento (e sua componente tangencial) deve ser satisfeita na vizinhança de Γ (não realmente em Γ), este termo deve ser zero; obtendo-se, desta

forma, a equação (2.19). Portanto, (2.13) e (2.18) implicam (2.19), ao menos, para soluções suficientemente regulares.

Logo, se a condição de contorno de Neumann é aplicada à equação de Poisson da pressão, a solução (se suficientemente regular) também verificará a condição de contorno de Dirichlet. Este resultado pode, também, ser interpretado de outra maneira, ou seja, que ambas as componentes normal e tangencial da equação da quantidade de movimento, (2.1), aplicam-se na (ou pelo menos muito perto dela) fronteira. Entretanto, como mostrado por Heywood, 1980, e por Heywood e Rannacher, 1982, unicamente a componente normal da equação da quantidade de movimento aplica-se sobre Γ , em $t = 0$, para o caso geral. Eles mostram também, que o campo de pressão inicial é obtido a partir do problema Poisson/Neumann: equações (2.13)–(2.14) e (2.18) em $t = 0$; isto é, estas equações aplicam-se para $t \geq 0$. Logo, a equação da quantidade de movimento tangencial na fronteira (e condições de contorno de Dirichlet concomitantes para a EPP) aplica-se, unicamente para $t > 0$, no caso geral.

Observa-se que

- Assim como as equações (2.13)–(2.14) e (2.18) implicam (2.19), pode ser mostrado, da mesma forma, que as equações (2.13)–(2.14) e (2.19) implicam (2.18).
- Para o caso mais simples e mais comum, em que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ , as equações (2.18) e (2.19) convertem-se em

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial n^2}$$

respectivamente.

- Para $Re \gg 1$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ , a equação (2.18) pode ser aproximada por $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ e a equação (2.19) por $\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$. Na verdade, a primeira

destas aproximações é freqüentemente feita na prática (como na teoria da camada limite).

- Se a solução de (2.1)–(2.7) é suficientemente regular e as expressões (2.13)–(2.14) são válidas, os mesmos campos de velocidade e pressão serão obtidos resolvendo (2.1)–(2.7) ou (2.1), (2.3)–(2.7), (2.12)–(2.14) e (2.18). (Se (2.18) é usado para calcular o campo de pressão inicial ($t = 0$), então a condição de contorno (2.18) pode ser substituída pela condição de contorno (2.19), para $t > 0$, mantendo-se os mesmos resultados.

2.4 Condição de Compatibilidade

A boa determinação da solução, para a equação de Poisson relativa à pressão (2.13), com condições de contorno de Neumann (2.18), requer que seja satisfeita a relação integral

$$\int \int_{\Omega} -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} p_n \, d\Gamma \quad (2.23)$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$ é o contorno da fronteira da área do domínio de solução Ω , $p_n = \mathbf{n} \cdot \nabla p$, e \mathbf{n} é o vetor unitário exterior, normal à fronteira Γ .

Observações:

1. A condição $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ em $\bar{\Omega}$, para $t \geq 0$, é muito forte. Tal condição afeta, profundamente, todos os aspectos dos escoamentos incompressíveis, inclusive a compreensão teórica, a escolha de algoritmos e a simulação numérica. Na fronteira Γ , a condição $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$, para todo $t \geq 0$, é apropriada.

2. Para resolver a equação de Poisson para a pressão, somente a condição de contorno de Neumann é sempre apropriada; isto é, esta fornece uma única solução para $t \geq 0$. A condição de fronteira de Dirichlet é, em geral, somente apropriada para $t > 0$; esta, freqüentemente, não é aplicável em $t = 0$. A solução única, obtida usando qualquer uma das condições de contorno, para $t > 0$, verificará a outra condição de contorno, sempre que seja usada a condição de contorno de Neumann em $t = 0$.
3. Qualquer aproximação discreta, consistente, das equações originais ou primitivas contém, como uma condição de contorno embutida e automática para a equação de Poisson da pressão discreta (implícada), a condição de contorno de Neumann, para $t \geq 0$.

3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER–STOKES

As equações de Navier–Stokes, em suas variáveis primitivas, para o escoamento de um fluido viscoso, incompressível, bidimensional, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

onde $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente, $p(x, y, t)$ é a pressão e ν é o coeficiente da viscosidade cinemática, o qual é suposto constante não negativo.

Neste capítulo, apresenta-se uma descrição da grade alternada, bem como os métodos de diferença central, upwind e Euler–Lagrange, usados para discretizar as equações de Navier–Stokes.

3.1 Grade e Valores Nodais

Para resolver, numericamente, o problema inicial e de contorno para as equações de Navier–Stokes, assume-se, por simplicidade, que Γ é um retângulo com vértices $(0, 0)$, $(A, 0)$, (A, B) , $(0, B)$ com $A > 0$, $B > 0$ e que Ω seja o interior de Γ .

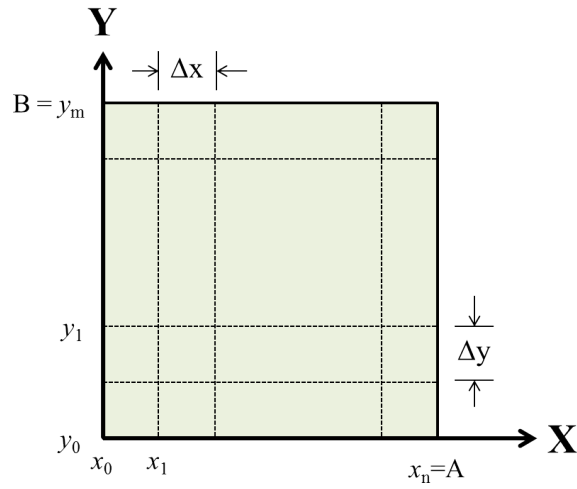


Figura 3.1 Grade Computacional do retângulo Ω

Com relação à Fig. 3.1, considere-se os pontos da grade

$$x_i = i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{A}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_j = j\Delta y, \quad \Delta y = \frac{B}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

que dividem o retângulo Ω em $n \times m$ celas retangulares de largura Δx e comprimento Δy . Os pontos da grade que estão na fronteira de Ω , correspondem a $i = 0, i = n, j = 0$ e $j = m$.

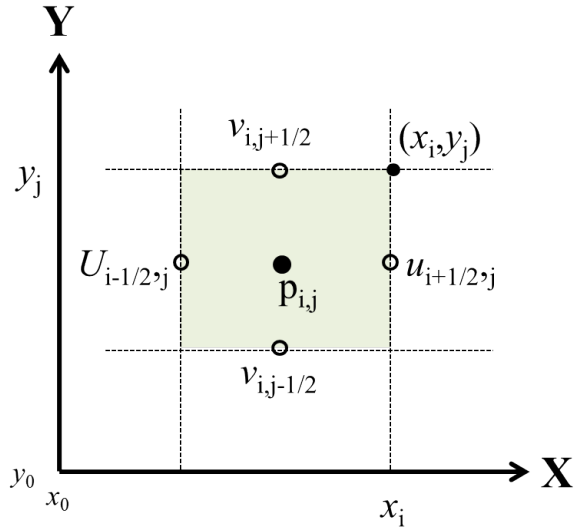


Figura 3.2 Cella computacional, mostrando a localização das variáveis associadas ao ponto de referência (x_i, y_j)

Os valores de u , v e p , no tempo k , serão considerados segundo a Fig. 3.2, isto é,

$$u_{i+1/2,j}^k = u(i\Delta x, (j-1/2)\Delta y, k\Delta t)$$

$$v_{i,j+1/2}^k = v((i-1/2)\Delta x, j\Delta y, k\Delta t)$$

$$p_{i,j}^k = p((i-1/2)\Delta x, (j-1/2)\Delta y, k\Delta t)$$

Assim, no tempo inicial $t_0 = 0$, as condições iniciais (2.3), que são dadas por

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (x, y) \text{ em } \Omega$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y)$$

implicam que

$$u_{i+1/2,j}^0 = u_0(x_i, y_{j-1/2}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$v_{i,j+1/2}^0 = v_0(x_{i-1/2}, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Como o campo de velocidade discreta é conhecido no passo de tempo t_k , a partir de (2.4), ou seja,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_\Gamma(x, y, t) \\ &\quad (x, y) \text{ em } \Gamma = \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ v(x, y, t) &= v_\Gamma(x, y, t) \end{aligned}$$

pode-se determinar condições de contorno da componente de velocidade tangencial, no tempo t_k , e condições de contorno da componente de velocidade normal, no tempo t_{k+1} .

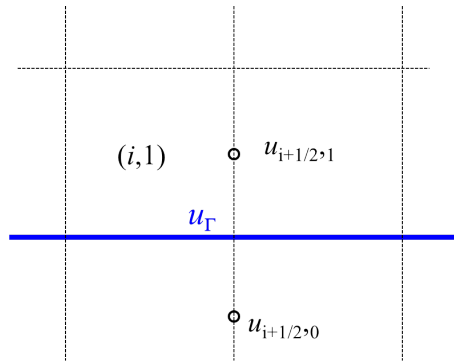


Figura 3.3 Aproximação das condições de contorno da componente de velocidade tangencial

Desde que as componentes de velocidade discretas u não estão localizadas nas fronteiras superior nem inferior, como indicado na Fig. 3.3, as condições

de contorno da velocidade tangencial são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{u_{i+1/2,0}^k + u_{i+1/2,1}^k}{2} &= u_{\Gamma}(x_i, 0, t_k), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{u_{i+1/2,m}^k + u_{i+1/2,m+1}^k}{2} &= u_{\Gamma}(x_i, b, t_k), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,\end{aligned}$$

a partir das quais obtém-se:

$$\begin{aligned}u_{i+1/2,0}^k &= 2u_{\Gamma}(x_i, 0, t_k) - u_{i+1/2,1}^k, \\ u_{i+1/2,m+1}^k &= 2u_{\Gamma}(x_i, b, t_k) - u_{i+1/2,m}^k,\end{aligned}\quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.6)$$

Analogamente, para as condições de contorno da componente de velocidade tangencial, nas fronteiras esquerda e direita, tem-se

$$\begin{aligned}v_{0,j+1/2}^k &= 2v_{\Gamma}(0, y_j, t_k) - v_{1,j+1/2}^k, \\ v_{n+1,j+1/2}^k &= 2v_{\Gamma}(a, y_j, t_k) - v_{n,j+1/2}^k,\end{aligned}\quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (3.7)$$

As condições de contorno da componente de velocidade normal, no tempo t_{k+1} , são calculadas pelas seguintes fórmulas:

$$u_{1/2,j}^{k+1} = u_{\Gamma}(0, y_{j-1/2}, t_{k+1}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.8)$$

$$u_{n+1/2,j}^{k+1} = u_{\Gamma}(a, y_{j-1/2}, t_{k+1}),$$

$$v_{i,1/2}^{k+1} = v_{\Gamma}(x_{i-1/2}, 0, t_{k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

$$v_{i,m+1/2}^{k+1} = v_{\Gamma}(x_{i-1/2}, b, t_{k+1}),$$

3.2 Método de Diferença Central

Este método é chamado *Método de Diferença Central*, devido ao uso de fórmulas de diferença central para aproximar as derivadas espaciais, nas equações (3.1) e (3.2), as quais são de segunda ordem. O termo u_t será aproximado com uma fórmula de diferença ascendente (Euler explícito).

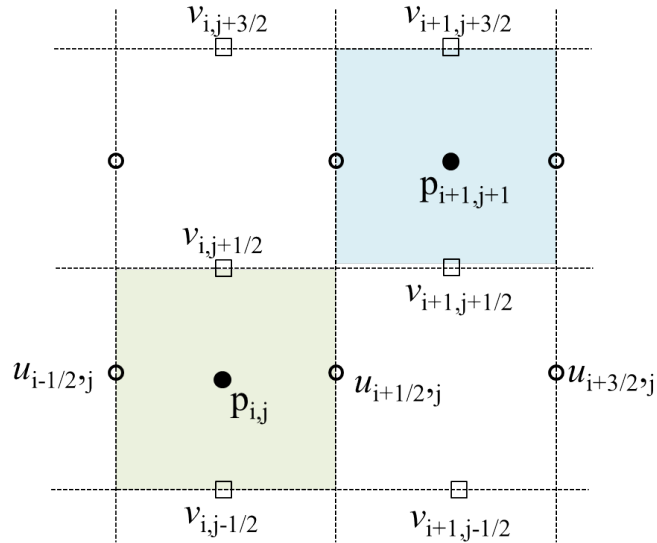


Figura 3.4 Grade Alternada

Assim, com relação à Fig. 3.4, no centro do lado vertical-direito de uma cela, cada um dos termos da equação diferencial (3.1) será aproximado pelas

seguintes fórmulas:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \approx u_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+3/2,j}^k - u_{i-1/2,j}^k}{2\Delta x} + \bar{v}_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - u_{i+1/2,j-1}^k}{2\Delta y} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i+3/2,j}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i+1/2,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} . \quad (3.12)$$

Substituindo as expressões (3.10)–(3.12) na equação diferencial (3.1), obtém-se a seguinte equação de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j}^{k+1} - u_{i+1/2,j}^k}{\Delta t} + u_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+3/2,j}^k - u_{i-1/2,j}^k}{2\Delta x} \\ & + \bar{v}_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - u_{i+1/2,j-1}^k}{2\Delta y} = -\frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \\ & + \nu \left(\frac{u_{i+3/2,j}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i+1/2,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$u_{i+1/2,j}^{k+1} = F_1 u_{i+1/2,j}^k - \Delta t \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \quad (3.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

onde o operador de diferença finita F_1 é definido por

$$\begin{aligned}
F_1 u_{i+1/2,j}^k &= u_{i+1/2,j}^k \tag{3.14} \\
&- \Delta t \left[u_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+3/2,j}^k - u_{i-1/2,j}^k}{2\Delta x} + \bar{v}_{i+1/2,j}^k \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - u_{i+1/2,j-1}^k}{2\Delta y} \right] \\
&+ \nu \Delta t \left(\frac{u_{i+3/2,j}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i+1/2,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right)
\end{aligned}$$

Como a componente de velocidade discreta v não está definida no centro do lado vertical da cela computacional, o termo $\bar{v}_{i+1/2,j}^k$ será definido como a média dos quatro pontos circunvizinhos da grade, nos quais v^k é conhecida, isto é,

$$\bar{v}_{i+1/2,j}^k = \frac{v_{i,j+1/2}^k + v_{i,j-1/2}^k + v_{i+1,j+1/2}^k + v_{i+1,j-1/2}^k}{4} \tag{3.15}$$

Analogamente, no centro do lado horizontal–superior de uma cela, uma aproximação, para cada um dos termos da equação diferencial (3.2), será dada como

segue:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \approx \bar{u}_{i,j+1/2}^k \frac{v_{i+1,j+1/2}^k - v_{i-1,j+1/2}^k}{2\Delta x} + v_{i,j+1/2}^k \frac{v_{i,j+3/2}^k - v_{i,j-1/2}^k}{2\Delta y} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{v_{i+1,j+1/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i-1,j+1/2}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+3/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i,j-1/2}^k}{(\Delta y)^2} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} \quad (3.18)$$

Substituindo as fórmulas (3.16) – (3.18) na equação diferencial (3.2), obtém-se a seguinte equação em diferenças finitas

$$v_{i,j+1/2}^{k+1} = F_2 v_{i,j+1/2}^k - \Delta t \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} \quad (3.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1$$

onde o operador de diferença finita F_2 é definido por

$$F_2 v_{i,j+1/2}^k = v_{i,j+1/2}^k - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j+1/2}^k \frac{v_{i+1,j+1/2}^k - v_{i-1,j+1/2}^k}{2\Delta x} + v_{i,j+1/2}^k \frac{v_{i,j+3/2}^k - v_{i,j-1/2}^k}{2\Delta y} \right] + \nu \Delta t \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i-1,j+1/2}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+3/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i,j-1/2}^k}{(\Delta y)^2} \right) \quad (3.20)$$

Como a componente de velocidade u não está definida no centro do lado horizontal da cela computacional, um valor para $\bar{u}_{i,j+1/2}^k$ será definido por

$$\bar{u}_{i,j+1/2}^k = \frac{u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k + u_{i+1/2,j+1}^k + u_{i-1/2,j+1}^k}{4} \quad (3.21)$$

3.3 Método de Diferença Upwind

Este método caracteriza-se pelo emprego de fórmulas de diferenças finitas do tipo “*upwind*” (ascendentes ou descendentes), as quais são de primeira ordem, para aproximar as derivadas espaciais de primeira ordem. Os termos u_t , v_t , Δu , Δv e o gradiente de pressão são discretizados do mesmo modo que no método de Diferença Central. Mais precisamente, considerando a equação diferencial (3.1) e segundo a Fig. 3.4, os termos u_x e u_y são aproximados pelas seguintes fórmulas:

$$u_x \approx \frac{u_{i+1/2,j}^k - u_{i-1/2,j}^k}{\Delta x} \quad \text{se} \quad u_{i+1/2,j}^k \geq 0 \quad (3.22)$$

$$u_x \approx \frac{u_{i+3/2,j}^k - u_{i+1/2,j}^k}{\Delta x} \quad \text{se} \quad u_{i+1/2,j}^k < 0 \quad (3.23)$$

$$u_y \approx \frac{u_{i+1/2,j}^k - u_{i+1/2,j-1}^k}{\Delta y} \quad \text{se} \quad \bar{v}_{i+1/2,j}^k \geq 0 \quad (3.24)$$

$$u_y \approx \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - u_{i+1/2,j}^k}{\Delta y} \quad \text{se} \quad \bar{v}_{i+1/2,j}^k < 0 \quad (3.25)$$

Assim, uma aproximação para os termos uu_x e vu_y é dada como segue

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[- \left(|u_{i+1/2,j}^k| - u_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+3/2,j}^k + 2|u_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. - \left(|u_{i+1/2,j}^k| + u_{i+1/2,j}^k \right) u_{i-1/2,j}^k \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial y} &\approx \frac{1}{2\Delta y} \left[- \left(|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| - \bar{v}_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+1/2,j+1}^k + 2|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. - \left(|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| + \bar{v}_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+1/2,j-1}^k \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Substituindo as fórmulas (3.26) , (3.27) , (3.11) e (3.12) na equação diferencial (3.1), obtém-se o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i+1/2,j}^{k+1} - u_{i+1/2,j}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x} \left[- \left(|u_{i+1/2,j}^k| - u_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+3/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. + 2|u_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k - \left(|u_{i+1/2,j}^k| + u_{i+1/2,j}^k \right) u_{i-1/2,j}^k \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} \left[- \left(|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| - \bar{v}_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+1/2,j+1}^k + 2|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. - \left(|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| + \bar{v}_{i+1/2,j}^k \right) u_{i+1/2,j-1}^k \right] = - \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \\ &\quad + \nu \left(\frac{u_{i+3/2,j}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i+1/2,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$u_{i+1/2,j}^{k+1} = F_1 u_{i+1/2,j}^k - \Delta t \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \quad (3.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

onde o operador de diferença finita F_1 é da forma

$$\begin{aligned} F_1 u_{i+1/2,j}^k &= u_{i+1/2,j}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[-(|u_{i+1/2,j}^k| - u_{i+1/2,j}^k) u_{i+3/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. + 2|u_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k - (|u_{i+1/2,j}^k| + u_{i+1/2,j}^k) u_{i-1/2,j}^k \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[-(|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| - \bar{v}_{i+1/2,j}^k) u_{i+1/2,j+1}^k + 2|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| u_{i+1/2,j}^k \right. \\ &\quad \left. - (|\bar{v}_{i+1/2,j}^k| + \bar{v}_{i+1/2,j}^k) u_{i+1/2,j-1}^k \right] \\ &\quad + \nu \Delta t \left(\frac{u_{i+3/2,j}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i-1/2,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1}^k - 2u_{i+1/2,j}^k + u_{i+1/2,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

na qual o termo espacial $\bar{v}_{i+1/2,j}^k$ é definido por (3.15).

Analogamente, considerando a equação diferencial (3.2) e segundo a Fig. 3.4 , os termos v_x e v_y são aproximados pelas seguintes fórmulas:

$$v_x \approx \frac{v_{i,j+1/2}^k - v_{i-1,j+1/2}^k}{\Delta x} \quad \text{se} \quad \bar{u}_{i,j+1/2}^k \geq 0 \quad (3.30)$$

$$v_x \approx \frac{v_{i+1,j+1/2}^k - v_{i,j+1/2}^k}{\Delta x} \quad \text{se} \quad \bar{u}_{i,j+1/2}^k < 0 \quad (3.31)$$

$$v_y \approx \frac{v_{i,j+1/2}^k - v_{i,j-1/2}^k}{\Delta y} \quad \text{se} \quad v_{i,j+1/2}^k \geq 0 \quad (3.32)$$

$$v_y \approx \frac{v_{i,j+3/2}^k - v_{i,j+1/2}^k}{\Delta y} \quad \text{se} \quad v_{i,j+1/2}^k < 0 \quad (3.33)$$

Logo, os termos uv_x e vv_y serão aproximados como segue

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[- (|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| - \bar{u}_{i,j+1/2}^k) v_{i+1,j+1/2}^k + 2|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k \right. \\ &\quad \left. - (|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| + \bar{u}_{i,j+1/2}^k) v_{i-1,j+1/2}^k \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial y} &\approx \frac{1}{2\Delta y} \left[- (|v_{i,j+1/2}^k| - v_{i,j+1/2}^k) v_{i,j+3/2}^k + 2|v_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k \right. \\ &\quad \left. - (|v_{i,j+1/2}^k| + v_{i,j+1/2}^k) v_{i,j-1/2}^k \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substituindo as fórmulas (3.34) , (3.35) , (3.17) e (3.18) na equação (3.2), obtém-se

o seguinte esquema:

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j+1/2}^{k+1} - v_{i,j+1/2}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x} \left[- \left(|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| - \bar{u}_{i,j+1/2}^k \right) v_{i+1,j+1/2}^k \right. \\
& \quad \left. + 2|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k - \left(|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| + \bar{u}_{i,j+1/2}^k \right) v_{i-1,j+1/2}^k \right] \\
& + \frac{1}{2\Delta y} \left[- \left(|v_{i,j+1/2}^k - v_{i,j+1/2}^k| \right) v_{i,j+3/2}^k + 2|v_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k \right. \\
& \quad \left. - \left(|v_{i,j+1/2}^k| + v_{i,j+1/2}^k \right) v_{i,j-1/2}^k \right] = -\frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} \\
& + \nu \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i-1,j+1/2}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+3/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i,j-1/2}^k}{(\Delta y)^2} \right)
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$v_{i,j+1/2}^{k+1} = F_2 v_{i,j+1/2}^k - \Delta t \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} \quad (3.36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1$$

onde o operador de diferença finita F_2 é da forma

$$\begin{aligned}
F_2 v_{i,j+1/2}^k &= v_{i,j+1/2}^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[-(|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| - \bar{u}_{i,j+1/2}^k) v_{i+1,j+1/2}^k \right. \\
&\quad \left. + 2|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k - (|\bar{u}_{i,j+1/2}^k| + \bar{u}_{i,j+1/2}^k) v_{i-1,j+1/2}^k \right] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[-(|v_{i,j+1/2}^k| - v_{i,j+1/2}^k) v_{i,j+3/2}^k + 2|v_{i,j+1/2}^k| v_{i,j+1/2}^k \right. \\
&\quad \left. - (|v_{i,j+1/2}^k| + v_{i,j+1/2}^k) v_{i,j-1/2}^k \right] \\
&\quad + \nu \Delta t \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i-1,j+1/2}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+3/2}^k - 2v_{i,j+1/2}^k + v_{i,j-1/2}^k}{(\Delta y)^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

e um valor para $\bar{u}_{i,j+1/2}^k$ é definido por (3.21).

3.4 Método de Euler–Lagrange

Para ilustrar o método de Euler–Lagrange, considere-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) , \tag{3.38}$$

onde os coeficientes convectivos u e v são supostos constantes, não negativos, e a constante ν é um coeficiente de difusão positivo.

Os termos convectivos da equação acima podem ser reescritos na forma de derivada lagrangeana (substancial ou material),

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \tag{3.39}$$

onde $\frac{d}{dt}$ indica que a razão de variação do tempo é calculada ao longo da linha de corrente, a qual é definida por

$$\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v . \quad (3.40)$$

Assim, pode-se escrever (3.38) na forma lagrangeana, isto é,

$$\frac{dc}{dt} = \nu \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) . \quad (3.41)$$

Uma discretização explícita natural da equação (3.41) é, simplesmente, dada por

$$\begin{aligned} \frac{c_{i,j}^{k+1} - c_{i-a,j-b}^k}{\Delta t} = & \nu \left(\frac{c_{i-a+1,j-b}^k - 2c_{i-a,j-b}^k + c_{i-a-1,j-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_{i-a,j-b+1}^k - 2c_{i-a,j-b}^k + c_{i-a,j-b-1}^k}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde

$$a = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad , \quad b = v \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (3.43)$$

são os *números de Courant*.

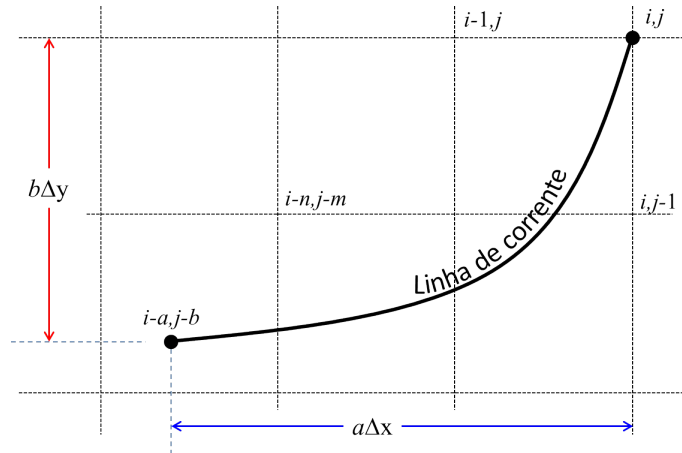


Figura 3.5 Grade euleriana-lagrangeana

É interessante observar o significado físico de (3.42). O novo valor de c , no tempo t_{k+1} em (i, j) , está relacionado ao valor de c no tempo t_k em $(i - a, j - b)$, o qual difunde-se num lapso de tempo Δt . Em geral, porém, a e b não são inteiros (ver Fig. 3.5) e, portanto, $(i - a, j - b)$ não é um ponto da grade. Por esta razão, uma fórmula de interpolação deve ser usada para definir $c_{i-a, j-b}^k$ e seus vizinhos na equação (3.42). A exatidão, estabilidade e difusão numérica de (3.42) dependem da fórmula de interpolação escolhida.

A interpolação mais simples, que pode ser tomada para calcular $c_{i-a, j-b}^k$ e seus vizinhos, é a *interpolação bilinear* sobre os quatro pontos circunvizinhos da grade. Sejam $a = n + p1$ e $b = m + q1$, onde n e m são as partes inteiras de a e b respectivamente, e $p1$ e $q1$ são suas partes decimais. Assim, $c_{i-a, j-b}^k$ é aproximado por

$$\begin{aligned} c_{i-a, j-b}^k &= (1 - p1) [(1 - q1)c_{i-n, j-m}^k + q1 c_{i-n, j-m-1}^k] \\ &+ p1 [(1 - q1)c_{i-n-1, j-m}^k + q1 c_{i-n-1, j-m-1}^k] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Portanto, o método de Euler-Lagrange (3.42) pode ser escrito na seguinte forma

$$c_{i,j}^{k+1} = F c_{i,j}^k$$

onde o operador F é dado por

$$\begin{aligned} F c_{i,j}^k &= c_{i-a, j-b}^k + \nu \Delta t \left(\frac{c_{i-a+1, j-b}^k - 2c_{i-a, j-b}^k + c_{i-a-1, j-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\left. + \frac{c_{i-a, j-b+1}^k - 2c_{i-a, j-b}^k + c_{i-a, j-b-1}^k}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

O método de Euler–Lagrange, descrito acima, também estende-se para o caso em que a equação (3.38) não é linear, isto é, quando u e v não são constantes. Neste caso, a determinação de a e b requer a resolução das equações (3.40), nas quais os termos à direita, u e v , são conhecidos unicamente no nível de tempo t_k . Portanto, assume-se que u e v não variam sobre um passo de tempo. Desta forma, em cada ponto da grade (i, j) as equações (3.40) podem ser integradas numericamente, retrocedendo no tempo de t_{k+1} a t_k , usando, por exemplo, o método de Euler. Assim, o passo de tempo Δt é dividido em N partes iguais de comprimentos $\tau_1 = \frac{\Delta t}{N}$ e as equações (3.40) são discretizadas na forma descendente como

$$\begin{aligned} x^{s-1} &= x^s - \tau_1 u^k(x^s, y^s), & x^N &= x_i \\ y^{s-1} &= y^s - \tau_1 v^k(x^s, y^s), & y^N &= y_j, \\ s &= N, N-1, N-2, \dots, 2, 1, \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $u^k(x^s, y^s)$ e $v^k(x^s, y^s)$ são interpoladas com uma fórmula similar a (3.44). Logo, em (x_i, y_j) , a e b são definidos por

$$a = \frac{x_i - x^0}{\Delta x}, \quad b = \frac{y_j - y^0}{\Delta y}.$$

Deste modo, as linhas de corrente, as quais em geral não são linhas retas, são melhor aproximadas.

Para melhorar a exatidão e a estabilidade dos métodos de diferenças, descritos nas secções prévias, considere-se uma aproximação do tipo Euler–Lagrange para discretizar as equações de Navier–Stokes. Para este propósito, expressar-se-á

as equações diferenciais (3.1) e (3.2), na forma lagrangeana, como segue:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.47)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.48)$$

Considerando a grade espacial da Fig. 3.4 e a grade euleriana-lagrangeana da Fig. 3.5, uma discretização da equação (3.47) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1/2,j}^{k+1} - u_{i+1/2,j-b}^k}{\Delta t} &= -\frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \\ &+ \nu \left(\frac{u_{i+3/2-a,j-b}^k - 2u_{i+1/2-a,j-b}^k + u_{i-1/2-a,j-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\left. + \frac{u_{i+1/2-a,j+1-b}^k - 2u_{i+1/2-a,j-b}^k + u_{i+1/2-a,j-1+b}^k}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$u_{i+1/2,j}^{k+1} = F_1 u_{i+1/2,j}^k - \Delta t \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} \quad (3.49)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

onde o operador de diferença finita F_1 está definido por

$$\begin{aligned}
F_1 u_{i+1/2,j}^k &= u_{i+1/2-a,j-b}^k \\
&+ \nu \Delta t \left(\frac{u_{i+3/2-a,j-b}^k - 2u_{i+1/2-a,j-b}^k + u_{i-1/2-a,j-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\
&\left. + \frac{u_{i+1/2-a,j+1-b}^k - 2u_{i+1/2-a,j-b}^k + u_{i+1/2-a,j-1-b}^k}{(\Delta y)^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Cada um dos termos do lado direito da fórmula (3.50) poderá ser calculado por interpolação bilinear. Assim, o termo $u_{i+1/2-a,j-b}^k$ será aproximado por

$$\begin{aligned}
u_{i+1/2-a,j-b}^k &= (1-p_1) [(1-q_1)u_{i+1/2-n,j-m}^k + q_1 u_{i+1/2-n,j-m-1}^k] \\
&+ p_1 [(1-q_1)u_{i-1/2-n,j-m}^k + q_1 u_{i-1/2-n,j-m-1}^k].
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Como as equações de Navier–Stokes são não-lineares, os valores de a e b serão determinados pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
x^{s-1} &= x^s - \tau_1 u^k(x^s, y^s) \quad , \quad x^N = x_i = (i + 1/2)\Delta x \\
y^{s-1} &= y^s - \tau_1 \bar{v}^k(x^s, y^s) \quad , \quad y^N = y_j = j\Delta y \\
s &= N, N-1, N-2, \dots, 2, 1,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde $\bar{v}_{i+1/2,j}^k$ é definido por (3.15). Os valores $u^k(x^s, y^s)$ e $\bar{v}^k(x^s, y^s)$ são interpoladas com fórmulas similares a (3.51). Finalmente, em $(X_i, Y_j) = (i + 1/2\Delta x, j\Delta y)$, os valores de a e b são calculados por

$$a = \frac{x_i - x^0}{\Delta x} \quad , \quad b = \frac{y_j - y^0}{\Delta y} .$$

Similarmente, uma aproximação de diferença finita para a equação (3.48) é dada por

$$v_{i,j+1/2}^{k+1} = F_2 v_{i,j+1/2}^k - \Delta t \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} \quad (3.53)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1$$

onde o operador de diferença finita F_2 é definido por

$$\begin{aligned} F_2 v_{i,j+1/2}^k &= v_{i-a,j+1/2-b}^k \quad (3.54) \\ &+ \nu \Delta t \left(\frac{v_{i-a+1,j+1/2-b}^k - 2v_{i-a,j+1/2-b}^k + v_{i-a-1,j+1/2-b}^k}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\left. + \frac{v_{i-a,j+3/2-b}^k - 2v_{i-a,j+1/2-b}^k + v_{i-a,j-1/2-b}^k}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned}$$

Cada um dos termos do lado direito da fórmula (3.54) é calculado por interpolação bilinear. Assim, o termo $v_{i-a,j+1/2-b}^k$ é aproximado por

$$\begin{aligned} v_{i-a,j+1/2-b}^k &= (1-p1) [(1-q1)v_{i-n,j+1/2-m}^k + q1 v_{i-n,j-1/2-m}^k] \quad (3.55) \\ &+ p1 [(1-q1)v_{i-1-n,j+1/2-m}^k + q1 v_{i-1-n,j-1/2-m}^k] \end{aligned}$$

e os valores de a e b são determinados através de:

$$\begin{aligned} x^{s-1} &= x^s - \tau_1 \bar{u}^k(x^s, y^s), & x^N &= x_i = i\Delta x \\ y^{s-1} &= y^s - \tau_1 v^k(x^s, y^s), & y^N &= y_j = (j + 1/2)\Delta y, \\ s &= N, N - 1, N - 2, \dots, 2, 1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde $\bar{u}_{i,j+1/2}^k$ é definido por (3.21). Os valores de $\bar{u}^k(x^s, y^s)$ e $v^k(x^s, y^s)$ são interpolados com uma fórmula similar a (3.55). Logo, em $(x_i, y_j) = (i\Delta x, (j + 1/2)\Delta y)$, os valores de a e b são calculados pelas fórmulas

$$a = \frac{x_i - x^0}{\Delta x} \quad , \quad b = \frac{y_j - y^0}{\Delta y} .$$

4 A FORMULAÇÃO MATRICIAL

4.1 Introdução

As equações de Navier–Stokes (3.1)–(3.2) e da continuidade (3.3), num escoamento bidimensional, podem ser escritas na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) & 0 & 0 \\ 0 & (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + NU = -PU + LU \quad (4.1)$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) & 0 & 0 \\ 0 & (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste capítulo apresenta-se uma *aproximação matricial*, para as equações de Navier–Stokes e da continuidade, usando três métodos de discretização para o campo de velocidades: *diferença central*, *upwind* e *Euler–Lagrange*.

4.2 Método de Diferença Central

Para obter uma *aproximação matricial* para o sistema (4.1) é usado o *método das linhas*, o qual consiste em separar as discretizações no tempo e no espaço.

O método das linhas, eficientemente promovido em trabalhos analíticos e numéricos por Liskovets, 1965, reduz equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinarias (EDOs), usualmente, por técnicas de diferenças finitas ou de elementos finitos. Se o problema original for um problema de valor inicial, o sistema de EDOs resultante forma um problema de valor inicial. Se o problema for um problema de valor na fronteira, também o será o sistema de EDOs resultante.

O primeiro passo do método das linhas consiste em aproximar os operadores diferenciais espaciais. Assim, a equação (4.1) torna-se um sistema singular não-linear de equações diferenciais ordinárias

$$\mathbb{M} \frac{d\mathbb{U}}{dt} + \mathbb{N}(\mathbb{U})\mathbb{U} + \mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)\mathbb{U}^F = -\mathbb{P}\mathbb{U} - \mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) + \mathbb{L}\mathbb{U} + \mathbb{L}^F\mathbb{U}^F \quad (4.2)$$

para o vetor $\mathbb{U} = [U_{i,j}]$ onde $U_{i,j}$ incluem os valores $u_{i+1/2,j}$, $v_{i,j+1/2}$, $p_{i,j}$ numa cela (i,j) , como mostra a Fig. 3.2. O vetor \mathbb{U}^F contém os valores na fronteira correspondentes aos termos u , v e p .

Em (4.2), a matriz \mathbb{M} e as matrizes \mathbb{N} , \mathbb{L} , \mathbb{P} , bem como suas correspondentes matrizes “fronteira” \mathbb{N}^F , \mathbb{L}^F , \mathbb{P}^F , representam os coeficientes da forma discreta das equações de Navier–Stokes. O sistema (4.2) não é completamente um sistema de equações diferenciais ordinárias devido ao fato de que a equação da continuidade não possui derivada temporal para a pressão. É um sistema singular pelo fato que $\det\mathbb{M} = 0$. A derivação dessas matrizes é realizada mais adiante.

Defina-se o *vetor nodal* \mathbb{U} , como o vetor que contém unicamente os valores nos pontos interiores da grade. Defina-se, também, o *vetor nodal fronteira* \mathbb{U}^F , o qual contém os valores nos pontos de fronteira da grade, isto é,

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}^F = \begin{bmatrix} u^F \\ v^F \\ p^F \end{bmatrix}$$

onde

$$u = \begin{bmatrix} u_{3/2,1} \\ u_{5/2,1} \\ \vdots \\ u_{n-1/2,1} \\ \\ u_{3/2,2} \\ u_{5/2,2} \\ \vdots \\ u_{n-1/2,2} \\ \vdots \\ u_{3/2,m} \\ \\ u_{5/2,m} \\ \vdots \\ u_{n-1/2,m} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{1,3/2} \\ v_{2,3/2} \\ \vdots \\ v_{n,3/2} \\ \\ v_{1,5/2} \\ v_{2,5/2} \\ \vdots \\ v_{n,5/2} \\ \vdots \\ v_{1,m-1/2} \\ \\ v_{2,m-1/2} \\ \vdots \\ v_{n,m-1/2} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{n,1} \\ \\ p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ \vdots \\ p_{n,2} \\ \vdots \\ p_{1,m} \\ \\ p_{2,m} \\ \vdots \\ p_{n,m} \end{bmatrix}$$

e

$$u^F = \begin{bmatrix} u_{3/2,0} \\ u_{5/2,0} \\ \vdots \\ u_{n-1/2,0} \\ \\ u_{1/2,1} \\ \\ u_{n+1/2,1} \\ \\ u_{1/2,2} \\ \\ u_{n+1/2,2} \\ \vdots \\ u_{1/2,m} \\ \\ u_{n+1/2,m} \\ \\ u_{3/2,m+1} \\ \vdots \\ u_{n-1/2,m+1} \end{bmatrix}, \quad v^F = \begin{bmatrix} v_{1,1/2} \\ \\ v_{2,1/2} \\ \vdots \\ v_{n,1/2} \\ \\ v_{0,3/2} \\ \\ v_{n+1,3/2} \\ \vdots \\ v_{0,m-1/2} \\ \\ v_{n+1,m-1/2} \\ \\ v_{1,m+1/2} \\ \\ v_{2,m+1/2} \\ \vdots \\ v_{n,m+1/2} \end{bmatrix}, \quad p^F = \begin{bmatrix} p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ \vdots \\ p_{n,0} \\ \\ p_{0,1} \\ \\ p_{n+1,1} \\ \\ p_{0,2} \\ \\ p_{n+1,2} \\ \vdots \\ p_{0,m} \\ \\ p_{n+1,m} \\ \\ p_{1,m+1} \\ \\ p_{2,m+1} \\ \vdots \\ p_{n,m+1} \end{bmatrix}$$

Os vetores u , v e p são de ordem $(m \times (n - 1)) \times 1$, $((m - 1) \times n) \times 1$, $(m \times n) \times 1$, respectivamente, e os vetores u^F , v^F e p^F são de ordem $2(m + n - 1) \times 1$, $2(m - 1 + n) \times 1$, $2(m + n)$ respectivamente.

O sistema algébrico–diferencial (4.2) é obtido a partir da equação (4.1), discretizando, de forma apropriada, cada um dos termos das matrizes N , P e L por separado. No caso da matriz L , usam-se fórmulas de diferença central para aproximar as derivadas espaciais. Assim, segundo a Fig. 3.4, os termos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ serão aproximados por

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i+1/2,j} \simeq \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{(\Delta x)^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+1/2,j} \simeq \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

respectivamente. Logo, o termo $\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ será aproximado pela seguinte expressão

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{i+1/2,j} \simeq \frac{\nu}{(\Delta x)^2} u_{i+3/2,j} - \left[\frac{2\nu}{(\Delta x)^2} + \frac{2\nu}{(\Delta y)^2} \right] u_{i+1/2,j} +$$

$$\frac{\nu}{(\Delta x)^2} u_{i-1/2,j} + \frac{\nu}{(\Delta y)^2} u_{i+1/2,j+1} + \frac{\nu}{(\Delta y)^2} u_{i+1/2,j-1}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

a qual, escrita em forma matricial, tem a seguinte forma

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \simeq L_{11} u + L_{11}^F u^F. \quad (4.3)$$

Analogamente, de acordo com a Fig. 3.4, uma aproximação em diferenças finitas para o termo $\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$ é da forma

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j+1/2} &\simeq \frac{\nu}{(\Delta x)^2} v_{i+1,j+1/2} - \left[\frac{2\nu}{(\Delta x)^2} + \frac{2\nu}{(\Delta y)^2} \right] v_{i,j+1/2} + \\ &\frac{\nu}{(\Delta x)^2} v_{i-1,j+1/2} + \frac{\nu}{(\Delta y)^2} v_{i,j+3/2} + \frac{\nu}{(\Delta y)^2} v_{i,j-1/2} \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

cuja expressão matricial é dada por

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \simeq L_{22} v + L_{22}^F v^F. \quad (4.4)$$

Os termos $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, os quais fazem parte da equação da continuidade, serão discretizados como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} &\simeq \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \simeq \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta y}, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

tais aproximações têm a seguinte forma matricial

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq L_{31} u + L_{31}^F u^F, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \simeq L_{32} v + L_{32}^F v^F. \quad (4.6)$$

Substituindo as expressões (4.3)–(4.6) na matriz L da equação (4.1), decorre,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}^F = \begin{bmatrix} L_{11}^F & 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^F & 0 \\ L_{31}^F & L_{32}^F & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes L_{11} , L_{22} , L_{31} , L_{32} e suas correspondentes matrizes fronteira L_{11}^F , L_{22}^F , L_{31}^F , L_{32}^F são dadas no apêndice A-1.1.

Para discretizar a matriz N (da equação (4.1)), a qual representa a parte convectiva não-linear das Equações de Navier–Stokes, utilizam-se esquemas de diferença central para aproximar as derivadas espaciais de primeira ordem. Especificamente, com relação à Fig. 3.4, uma aproximação para o termo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

é a seguinte expressão em diferenças finitas

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{i+1/2,j} &\simeq u_{i+1/2,j} \frac{u_{i+3/2,j} - u_{i-1/2,j}}{2\Delta x} + \\ &\bar{v}_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

onde o termo espacial $\bar{v}_{i+1/2,j}$ está definido por (3.15).

Uma expressão matricial para (4.7) é da forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \simeq [\text{diag}(u) A_1 + \text{diag}(Bv) C_1] u +$$

$$[\text{diag}(u) F_1 + \text{diag}(B^F v^F) F_2] u^F \quad (4.8)$$

Analogamente, uma aproximação em diferenças finitas para o termo

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

é dada por

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2} \simeq \bar{u}_{i,j+1/2} \frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}}{2\Delta x} +$$

$$v_{i,j+1/2} \frac{v_{i,j+3/2} - v_{i,j-1/2}}{2\Delta y} \quad (4.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1 ,$$

onde o termo espacial $\bar{u}_{i,j+1/2}$ está definido em (3.21) .

Escrevendo em forma matricial, a expressão (4.9) pode ser dada como segue

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \simeq [\text{diag}(B^t u) A_2 + \text{diag}(v) C_2] v +$$

$$[\text{diag}(\mathcal{B} u^F) F_3 + \text{diag}(v) F_4] v^F . \quad (4.10)$$

Substituindo as expressões (4.8) e (4.10) na matriz N da equação (4.1), obtém-se as matrizes

$$\mathbb{N}(\mathbb{U}) = \begin{bmatrix} \text{diag}(u)A_1 + \text{diag}(Bv)C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(B^t u)A_2 + \text{diag}(v)C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \text{diag}(u)F_1 + \text{diag}(B^F v^F)F_2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(\mathcal{B}u^F)F_3 + \text{diag}(v)F_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ contém os valores nos pontos interiores da grade, enquanto que a matriz $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ contém os valores nos pontos de fronteira, os quais representam os efeitos das condições de contorno de Dirichlet sobre os termos convectivos das Equações de Navier–Stokes.

As submatrizes das matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ são dadas no apêndice A-1.2.

Definindo,

$$\text{diag}(u) = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \right) = \text{diag}(B_0U)$$

$$\text{diag}(Bv) = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \right) = \text{diag}(B_1U)$$

$$\text{diag}(B^t u) = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} B^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \right) = \text{diag}(B_2U)$$

$$\text{diag}(v) = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} \right) = \text{diag}(B_3U)$$

a matriz $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ pode ser escrita como

$$\mathbb{N}(\mathbb{U}) = \begin{bmatrix} \text{diag}(B_0U)A_1 + \text{diag}(B_1U)C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(B_2U)A_2 + \text{diag}(B_3U)C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Analogamente, definindo apropriadamente cada termo da matriz $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$, obtém-se que esta matriz pode ser escrita

$$\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \text{diag}(B_0 U)F_1 + \text{diag}(B_1^F U^F)F_2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(B_2^F U^F)F_3 + \text{diag}(B_3 U)F_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Finalmente, no caso da matriz P , discretiza-se o gradiente de pressão usando fórmulas de diferença central, para aproximar as derivadas espaciais de primeira ordem com condições de contorno de Neumann, as quais foram usadas neste trabalho e são dadas pelas fórmulas (6.2)–(6.5). Mais precisamente, com relação à Fig. 3.4, os termos $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}$ são aproximados por

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+1/2, j} \simeq \frac{p_{i+1, j} - p_{i, j}}{\Delta x} , \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{i, j+1/2} \simeq \frac{p_{i, j+1} - p_{i, j}}{\Delta y}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m .$$

Na forma matricial, tem-se,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \simeq P_{13} p + P_{13}^F p^F ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq P_{23} p + P_{23}^F p^F .$$

Os termos $P_{13}^F p^F$ e $P_{23}^F p^F$ representam os efeitos das condições de contorno de Neumann para a pressão e decorrem das equações (6.2)–(6.5) na dis-

cretização do gradiente de pressão e são dados por

$$P_{13}^F p^F = -M_u \frac{du^F}{dt} - P_1 u^F . P_2 u^F + P_1 u^F . P_3 u - P_4 v . P_5 u^F \\ - P_6 v^F . P_5 u^F + P_7 v + P_8 v^F + P_9 u^F ,$$

$$P_{23}^F p^F = -M_v \frac{dv^F}{dt} - P_1^1 u . P_2^1 v^F - P_3^1 u^F . P_2^1 v^F - P_4^1 v^F . P_5^1 v^F \\ + P_4^1 v^F . P_6^1 v + P_7^1 v^F + P_8^1 u + P_9^1 u^F ,$$

onde

$$M_u = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad M_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Considerando a localização dos termos na matriz P da equação (4.1), decorrem as matrizes

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{13} \\ 0 & 0 & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{13}^F p^F \\ 0 & 0 & P_{23}^F p^F \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde a matriz \mathbb{P} contém os valores nos pontos interiores da grade, com relação à pressão, $p_{i,j}$. A matriz $\mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ representa os efeitos das condições de contorno de Neumann para a pressão.

As submatrizes das matrizes \mathbb{P} e $\mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ são dadas no apêndice A-1.3.

Mantendo o tempo como uma variável contínua, uma versão semi-discreta para as equações de Navier–Stokes pode ser escrita como o seguinte sistema algébrico–diferencial:

$$\mathbb{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbb{N}(\mathbf{U})\mathbf{U} + \mathbb{N}^F(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F)\mathbf{U}^F = -\mathbb{P}\mathbf{U} - \mathbb{P}^F(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F) + \mathbb{L}\mathbf{U} + \mathbb{L}^F\mathbf{U}^F . \quad (4.11)$$

4.3 Método de Diferença Upwind

Usando-se o método das linhas com esquemas de diferença do tipo *upwind* (ascendentes ou descendentes) para aproximar os operadores diferenciais espaciais, obtém-se que a equação (4.1) reduz-se a um sistema singular não-linear de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\mathbb{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbb{N}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F)\mathbf{U} + \mathbb{N}^F(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F)\mathbf{U}^F = -\mathbb{P}\mathbf{U} - \mathbb{P}^F(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F) + \mathbb{L}\mathbf{U} + \mathbb{L}^F\mathbf{U}^F . \quad (4.12)$$

Os vetores \mathbf{U} e \mathbf{U}^F e as matrizes \mathbb{M} , \mathbb{P} , \mathbb{P}^F , \mathbb{L} e \mathbb{L}^F são calculadas como no método de diferença central.

As matrizes $\mathbb{N}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F)$ e $\mathbb{N}^F(\mathbf{U}, \mathbf{U}^F)$ decorrem da discretização de cada um dos termos da matriz N da equação (4.1), usando-se esquemas de diferença *upwind*. Mais precisamente, segundo a Fig. 3.4, o termo $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ será aproximado

pela seguinte fórmula

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \Big|_{i+1/2,j} &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[- \left(|u_{i+1/2,j}| - u_{i+1/2,j} \right) u_{i+3/2,j} + \right. \\
&2|u_{i+1/2,j}|u_{i+1/2,j} - \left. \left(|u_{i+1/2,j}| + u_{i+1/2,j} \right) u_{i-1/2,j} \right] + \\
&\frac{1}{2\Delta y} \left[- \left(|\bar{v}_{i+1/2,j} - \bar{v}_{i+1/2,j} \right) u_{i+1/2,j+1} + 2|\bar{v}_{i+1/2,j}|u_{i+1/2,j} \right. \\
&\left. - \left(|\bar{v}_{i+1/2,j}| + \bar{v}_{i+1/2,j} \right) u_{i+1/2,j-1} \right] \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

cuja expressão matricial é dada por

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \approx [\mathcal{A}_1(u) + \mathcal{B}_1(v, v^F)] u + \mathcal{F}_1(u, v, v^F) u^F, \tag{4.14}$$

e um valor para o termo $\bar{v}_{i+1/2,j}$ é definido por (3.15).

Analogamente, segundo a Fig. 3.4, uma aproximação em diferenças finitas para o termo $u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2} &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[- \left(|\bar{u}_{i,j+1/2}| - \bar{u}_{i,j+1/2} \right) v_{i+1,j+1/2} + \right. \\
&2|\bar{u}_{i,j+1/2}| v_{i,j+1/2} - \left. \left(|\bar{u}_{i,j+1/2}| + \bar{u}_{i,j+1/2} \right) v_{i-1,j+1/2} \right] + \\
&\frac{1}{2\Delta y} \left[- \left(|v_{i,j+1/2} - v_{i,j+1/2} \right) v_{i,j+3/2} + 2|v_{i,j+1/2}| v_{i,j+1/2} \right. \\
&\left. - \left(|v_{i,j+1/2}| + v_{i,j+1/2} \right) v_{i,j-1/2} \right] , \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n , \quad j = 1, 2, \dots, m - 1 ,$$

a qual, escrita em forma matricial, tem a seguinte forma

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \approx [\mathcal{A}_2(u, u^F) + \mathcal{B}_2(v)] v + \mathcal{F}_2(u, u^F, v) v^F . \tag{4.16}$$

O termo espacial $\bar{u}_{i,j+1/2}$, na equação (4.15), está definido por (3.21).

Substituindo as expressões (4.14) e (4.16) na matriz N da equação (4.1), obtém-se as seguintes matrizes

$$\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1(u) + \mathcal{B}_1(v, v^F) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2(u, u^F) + \mathcal{B}_2(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(u, v, v^F) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(u, u^F, v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As submatrizes das matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ são dadas nos apêndices A-2.1 e A-2.2, respectivamente.

4.4 Método de Euler–Lagrange

Considere-se as equações de Navier–Stokes e da continuidade num escoamento bidimensional (3.1)–(3.3). Escrevendo os termos convectivos na forma de derivada lagrangeana, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.17)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.19)$$

cuja expressão matricial pode ser dada como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$M \frac{dU}{dt} = -PU + LU \quad (4.20)$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 & 0 \\ 0 & \nu(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando-se o método das linhas com fórmulas de diferenças finitas para aproximar os operadores diferenciais espaciais obtém-se que a equação (4.20) torna-se um sistema singular de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\mathbb{M} \frac{d\mathbb{U}}{dt} = -\mathbb{P}\mathbb{U} - \mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) + \mathbb{L} T(\mathbb{U}) + \mathbb{L}^F T(\mathbb{U}^F), \quad (4.21)$$

onde \mathbb{U} , \mathbb{U}^F , \mathbb{M} , \mathbb{P} e \mathbb{P}^F são dados como nos métodos descritos nas seções anteriores (diferença central e upwind). Os termos $\mathbb{L} T(\mathbb{U})$ e $\mathbb{L}^F T(\mathbb{U}^F)$, na equação (4.21), representam a forma matricial que resulta da discretização de cada termo da matriz L da equação (4.20), usando-se fórmulas de diferença central para aproximar as derivadas espaciais. Mais precisamente, segundo a Fig. 3.4 e a Fig. 3.5, o termo $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ será aproximado por:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_{i+1/2, j} \simeq \nu \left(\frac{u_{i+3/2-a, j-b} - 2u_{i+1/2-a, j-b} + u_{i-1/2-a, j-b}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1/2-a, j+1-b} - 2u_{i+1/2-a, j-b} + u_{i+1/2-a, j-1+b}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (4.22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Cada um dos termos do lado direito da expressão (4.22) é calculado por uma fórmula similar à (3.51).

Analogamente, uma aproximação em diferenças finitas para o termo $\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2$ será dada por:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j+1/2} \simeq \nu \left(\frac{v_{i-a+1,j+1/2-b} - 2v_{i-a,j+1/2-b} + v_{i-a-1,j+1/2-b}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i-a,j+3/2-b} - 2v_{i-a,j+1/2-b} + v_{i-a,j-1/2-b}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (4.23)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1 .$$

Cada um dos termos do lado direito da expressão (4.23) serão calculados por uma fórmula similar à (3.55).

Uma expressão matricial para as equações (4.22) e (4.23) pode ser dada como segue,

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \simeq L_{11} T u + L_{11}^F T u^F \quad (4.24)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \simeq L_{22} T v + L_{22}^F T v^F \quad (4.25)$$

onde

$$T(\mathbb{U}) = \begin{bmatrix} T u \\ T v \\ p \end{bmatrix}, \quad T(\mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} T u^F \\ T v^F \\ p^F \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
Tu &= \begin{bmatrix} u_{3/2-a_{3/2}^{(1)}, 1-b_{3/2}^{(1)}} \\ u_{5/2-a_{5/2}^{(1)}, 1-b_{5/2}^{(1)}} \\ \vdots \\ u_{n-1/2-a_{n-1/2}^{(1)}, 1-b_{n-1/2}^{(1)}} \\ \\ u_{3/2-a_{3/2}^{(2)}, 2-b_{3/2}^{(2)}} \\ u_{5/2-a_{5/2}^{(2)}, 2-b_{5/2}^{(2)}} \\ \vdots \\ u_{n-1/2-a_{n-1/2}^{(2)}, 2-b_{n-1/2}^{(2)}} \\ \vdots \\ u_{3/2-a_{3/2}^{(m)}, m-b_{3/2}^{(m)}} \\ u_{5/2-a_{5/2}^{(m)}, m-b_{5/2}^{(m)}} \\ \vdots \\ u_{n-1/2-a_{n-1/2}^{(m)}, m-b_{n-1/2}^{(m)}} \end{bmatrix} \\
Tv &= \begin{bmatrix} v_{1-a_1^{(3/2)}, 3/2-b_1^{(3/2)}} \\ v_{2-a_2^{(3/2)}, 3/2-b_2^{(3/2)}} \\ \vdots \\ v_{n-a_n^{(3/2)}, 3/2-b_n^{(3/2)}} \\ \\ v_{1-a_1^{(5/2)}, 5/2-b_1^{(5/2)}} \\ v_{2-a_2^{(5/2)}, 5/2-b_2^{(5/2)}} \\ \vdots \\ v_{n-a_n^{(5/2)}, 5/2-b_n^{(5/2)}} \\ \vdots \\ v_{1-a_1^{(m-1/2)}, m-1/2-b_1^{(m-1/2)}} \\ v_{2-a_2^{(m-1/2)}, m-1/2-b_2^{(m-1/2)}} \\ \vdots \\ v_{n-a_n^{(m-1/2)}, m-1/2-b_n^{(m-1/2)}} \end{bmatrix} \\
p &= \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{n,1} \\ \\ p_{1,2} \\ p_{2,2} \\ \vdots \\ p_{n,2} \\ \vdots \\ p_{1,m} \\ p_{2,m} \\ \vdots \\ p_{n,m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
u_{3/2-a_{3/2}^{(0)}, 0-b_{3/2}^{(0)}} \\
u_{5/2-a_{5/2}^{(0)}, 0-b_{5/2}^{(0)}} \\
\vdots \\
u_{n-1/2-a_{n-1/2}^{(0)}, 0-b_{n-1/2}^{(0)}} \\
u_{1/2-a_{1/2}^{(1)}, 1-b_{1/2}^{(1)}} \\
u_{n+1/2-a_{n+1/2}^{(1)}, 1-b_{n+1/2}^{(1)}} \\
u_{1/2-a_{1/2}^{(2)}, 2-b_{1/2}^{(2)}} \\
u_{n+1/2-a_{n+1/2}^{(2)}, 2-b_{n+1/2}^{(2)}} \\
\vdots \\
u_{1/2-a_{1/2}^{(m)}, m-b_{1/2}^{(m)}} \\
u_{n+1/2-a_{n+1/2}^{(m)}, m-b_{n+1/2}^{(m)}} \\
u_{3/2-a_{3/2}^{(m+1)}, m+1-b_{3/2}^{(m+1)}} \\
\vdots \\
u_{n-1/2-a_{n-1/2}^{(m+1)}, m+1-b_{n-1/2}^{(m+1)}}
\end{array} \right]
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
v_{1-a_1^{(1/2)}, 1/2-b_1^{(1/2)}} \\
v_{2-a_2^{(1/2)}, 1/2-b_2^{(1/2)}} \\
\vdots \\
v_{n-a_n^{(1/2)}, 1/2-b_n^{(1/2)}} \\
v_{0-a_0^{(3/2)}, 3/2-b_0^{(3/2)}} \\
v_{n+1-a_0^{(3/2)}, 3/2-b_0^{(3/2)}} \\
\vdots \\
v_{0-a_0^{(m-1/2)}, m-1/2-b_0^{(m-1/2)}} \\
v_{n+1-a_{n+1}^{(m-1/2)}, m-1/2-b_{n+1}^{(m-1/2)}} \\
v_{1-a_1^{(m+1/2)}, m+1/2-b_1^{(m+1/2)}} \\
v_{2-a_2^{(m+1/2)}, m+1/2-b_2^{(m+1/2)}} \\
\vdots \\
v_{n-a_n^{(m+1/2)}, m+1/2-b_n^{(m+1/2)}}
\end{array} \right]
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
p_{1,0} \\
p_{2,0} \\
\vdots \\
p_{n,0} \\
p_{0,1} \\
p_{n+1,1} \\
p_{0,2} \\
p_{n+1,2} \\
\vdots \\
p_{0,m} \\
p_{n+1,m} \\
p_{1,m+1} \\
p_{2,m+1} \\
\vdots \\
p_{n,m+1}
\end{array} \right]
\end{array}$$

As matrizes L_{11} , L_{11}^F , L_{22} , L_{22}^F são dadas como nos métodos descritos nas seções anteriores (diferença central e upwind).

Substituindo as expressões (4.5) , (4.6) , (4.24) , (4.25) na matriz L da equação (4.20), decorre,

$$\mathbb{L} T(\mathbb{U}) = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tu \\ Tv \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}^F T(\mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} L_{11}^F & 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^F & 0 \\ L_{31}^F & L_{32}^F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tu^F \\ Tv^F \\ p^F \end{bmatrix}$$

5 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PRESSÃO

5.1 Introdução

A equação de Poisson para a pressão é obtida por diferenciação e adição das equações da quantidade de movimento (3.1) e (3.2):

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - D_t \quad (5.1)$$

onde o termo *dilatação* D é definido como

$$D = u_x + v_y .$$

Note-se que na formulação contínua, naturalmente, $D \equiv 0$, mas, devido às aproximações ou iteração incompleta da equação de Poisson, o erro acumula-se e $D_{ij} \neq 0$. Com a omissão de D em (5.1), o resultado não é unicamente inexato mas pode dar origem a uma instabilidade nas equações da quantidade de movimento. Entretanto, a inclusão de D pode eliminar a instabilidade [Ames, 1992; Roache, 1982; Ferziger e Perić, 1996].

Com relação à Fig. 3.1, as seguintes condições de contorno de Neumann, para a pressão, são obtidas aplicando as equações da quantidade de movimento (3.1) e (3.2) nas fronteiras sólidas:

$$-p_x = u_t + u u_x + v u_y + \nu (v_{xy} - u_{yy}) \quad \text{em} \quad x = 0, A \quad (5.2)$$

$$-p_y = v_t + u v_x + v v_y - \nu (v_{xx} - u_{xy}) \quad \text{em} \quad y = 0, B . \quad (5.3)$$

Uma vez que o campo de pressão, nas equações de Navier–Stokes incompressíveis, é determinado somente até uma constante aditiva, faz-se necessário condicionar a pressão para determiná-la unicamente. Isto pode ser realizado, ou por uma relação integral da forma

$$c(x, y) = \int \int_{\Omega} p(x, y) dx dy$$

ou por uma condição pontual

$$p(x_0, y_0) = 0 .$$

Logo, se p_{ij} é uma solução, então $(p_{ij} + c)$, onde c é uma constante, é também uma solução. A solução particular é escolhida especificando p em um ponto.

A equação de Poisson para a pressão, (5.1), e as condições de contorno, (5.2)–(5.3), são aproximadas sobre uma grade *alternada* com incrementos espaciais $\Delta x = \Delta y = h$ em ambas as direções x e y . Todas as derivadas espaciais nas equações (5.1), (5.2) e (5.3) serão aproximadas, a seguir, usando fórmulas de diferença central de segunda ordem.

5.2 Celas Interiores da grade

Seja a equação de Poisson para a pressão

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - D_t$$

ou, equivalentemente,

$$p_{xx} + p_{yy} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - D_t . \quad (5.4)$$

O termo não estacionário D_t na equação (5.1) é aproximado por [Harlow e Welsh, 1965; Roache, 1982]:

$$D_t \simeq \frac{D^{k+1} - D^k}{\Delta t} \quad (5.5)$$

onde os superíndices k e $k + 1$ referem-se aos níveis de tempo t e $t + \Delta t$, respectivamente.

Para tentar satisfazer à equação da continuidade (3.3), D^{k+1} é feito igual a zero. D^k é mantido na equação (5.5) para superar instabilidades não lineares na solução das equações da quantidade de movimento (3.1) e (3.2) [Harlow e Welsh, 1965; Roache, 1982].

Dada uma cela (i, j) , como mostra a Fig. 3.2. Supondo que (i, j) corresponde a uma *cela interior*, isto é, sem lados comuns com a fronteira, e segundo a Fig. 3.4, a equação de Poisson para a pressão (5.4) será aproximada como segue:

$$\begin{aligned} \left(p_{xx} + p_{yy} \right)_{i,j} &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{i,j} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{i,j} - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{i,j} - \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{i,j} + \frac{1}{\Delta t} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1 ; \quad j = 2, 3, \dots, m - 1 .$$

Os termos p_{xx} e p_{yy} , da equação (5.6), serão aproximados pelas seguintes fórmulas

$$p_{xx} \Big|_{i,j} \approx \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h^2} \quad (5.7)$$

$$p_{yy} \Big|_{i,j} \approx \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h^2} \quad (5.8)$$

Segundo a Fig. 3.4 os termos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{i,j} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{i,j}$$

na equação (5.6) serão aproximados como segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{i,j} &\approx \frac{1}{h} \left[\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[u_{i+1/2,j} \left(\frac{u_{i+3/2,j} - u_{i-1/2,j}}{2h} \right) - \right. \\ &\quad \left. u_{i-1/2,j} \left(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-3/2,j}}{2h} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da mesma forma tem-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{i,j} &\approx \frac{1}{h} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1/2,j} \right] \\ &\approx \frac{1}{h} \left[\bar{v}_{i+1/2,j} \left(\frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}}{2h} \right) - \right. \\ &\quad \left. \bar{v}_{i-1/2,j} \left(\frac{u_{i-1/2,j+1} - u_{i-1/2,j-1}}{2h} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Expressões similares obtêm-se, segundo a Fig. 3.4, para os outros termos da equação (5.6). Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{i,j} &\approx \frac{1}{h} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j+1/2} - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i,j-1/2} \right] \\
&\approx \frac{1}{h} \left[\bar{u}_{i,j+1/2} \left(\frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}}{2h} \right) - \right. \\
&\quad \left. \bar{u}_{i,j-1/2} \left(\frac{v_{i+1,j-1/2} - v_{i-1,j-1/2}}{2h} \right) \right] \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_{p_{i,j}} &\approx \frac{1}{h} \left[\left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{v_{i,j+1/2}} - \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{v_{i,j-1/2}} \right] \\
&\approx \frac{1}{h} \left[v_{i,j+1/2} \left(\frac{v_{i,j+3/2} - v_{i,j-1/2}}{2h} \right) - \right. \\
&\quad \left. v_{i,j-1/2} \left(\frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-3/2}}{2h} \right) \right] \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{h} \quad , \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{h} \quad . \tag{5.13}$$

Substituindo as expressões (5.7)–(5.13) na equação (5.6) obtém-se

$$\begin{aligned}
p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 4p_{i,j} &= -\frac{1}{2}u_{i+1/2,j} (u_{i+3/2,j} - u_{i-1/2,j}) \\
&+ \frac{1}{2}u_{i-1/2,j} (u_{i+1/2,j} - u_{i-3/2,j}) - \frac{1}{2}\bar{v}_{i+1/2,j} (u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{v}_{i-1/2,j} (u_{i-1/2,j+1} - u_{i-1/2,j-1}) - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,j+1/2} (v_{i+1,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{u}_{i,j-1/2} (v_{i+1,j-1/2} - v_{i-1,j-1/2}) - \frac{1}{2}v_{i,j+1/2} (v_{i,j+3/2} - v_{i,j-1/2}) \\
&+ \frac{1}{2}v_{i,j-1/2} (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-3/2}) + \frac{h}{\Delta t} (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j} + v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1, \quad j = 2, 3, \dots, m - 1.$$

5.3 Celas adjacentes à fronteira da grade

Para o caso das celas adjacentes à fronteira esquerda, e que não correspondem às esquinas da grade, a equação (5.2) será aproximada, segundo a Fig. 3.4, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
p_x \Big|_{3/2,j} &= -u_t \Big|_{3/2,j} - \left(uu_x \right)_{3/2,j} - \left(vu_y \right)_{3/2,j} - \nu \left(v_{xy} - u_{yy} \right)_{3/2,j} \\
\frac{p_{2,j} - p_{1,j}}{h} &= -\frac{u_{3/2,j}^{k+1} - u_{3/2,j}^k}{\Delta t} \\
&- u_{3/2,j} \left(\frac{u_{5/2,j} - u_{1/2,j}}{2h} \right) - \bar{v}_{3/2,j} \left(\frac{u_{3/2,j+1} - u_{3/2,j-1}}{2h} \right) \\
&- \nu \left(\frac{-v_{1,j+1/2} + v_{2,j+1/2} + v_{1,j-1/2} - v_{2,j-1/2}}{h^2} - \right. \\
&\left. \frac{u_{3/2,j+1} - 2u_{3/2,j} + u_{3/2,j-1}}{h^2} \right).
\end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
p_{2,j} - p_{1,j} &= -\frac{h}{\Delta t} (u_{3/2,j}^{k+1} - u_{3/2,j}^k) \\
&\quad -\frac{1}{2}u_{3/2,j}(u_{5/2,j} - u_{1/2,j}) - \frac{1}{2}\bar{v}_{3/2,j}(u_{3/2,j+1} - u_{3/2,j-1}) \\
&\quad -\frac{\nu}{h}(-v_{1,j+1/2} + v_{2,j+1/2} + v_{1,j-1/2} - v_{2,j-1/2} \\
&\quad -u_{3/2,j+1} + 2u_{3/2,j} - u_{3/2,j-1}) , \tag{5.15}
\end{aligned}$$

$$j = 2, 3, \dots, m-1 .$$

Similarmente, para o caso das celas adjacentes à fronteira direita, a equação (5.2) será discretizada como segue:

$$\begin{aligned}
-p_x \Big|_{n-1/2,j} &= u_t \Big|_{n-1/2,j} + \left(uu_x \right)_{n-1/2,j} + \left(vv_y \right)_{n-1/2,j} + \nu \left(v_{xy} - u_{yy} \right)_{n-1/2,j} \\
-\left(\frac{p_{n,j} - p_{n-1,j}}{h} \right) &= \frac{u_{n-1/2,j}^{k+1} - u_{n-1/2,j}^k}{\Delta t} + \\
&\quad u_{n-1/2,j} \left(\frac{u_{n+1/2,j} - u_{n-3/2,j}}{2h} \right) + \bar{v}_{n-1/2,j} \left(\frac{u_{n-1/2,j+1} - u_{n-1/2,j-1}}{2h} \right) \\
&\quad + \nu \left(\frac{-v_{n-1,j+1/2} + v_{n,j+1/2} + v_{n-1,j-1/2} - v_{n,j-1/2}}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{u_{n-1/2,j+1} - 2u_{n-1/2,j} + u_{n-1/2,j-1}}{h^2} \right) .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-p_{n,j} + p_{n-1,j} &= \frac{h}{\Delta t} (u_{n-1/2,j}^{k+1} - u_{n-1/2,j}^k) + \\
&\frac{1}{2}u_{n-1/2,j}(u_{n+1/2,j} - u_{n-3/2,j}) + \frac{1}{2}\bar{v}_{n-1/2,j}(u_{n-1/2,j+1} - u_{n-1/2,j-1}) \\
&+ \frac{\nu}{h}(-v_{n-1,j+1/2} + v_{n,j+1/2} + v_{n-1,j-1/2} - v_{n,j-1/2} \\
&- u_{n-1/2,j+1} + 2u_{n-1/2,j} - u_{n-1/2,j-1}) , \tag{5.16}
\end{aligned}$$

$$j = 2, 3, \dots, m - 1 .$$

Analogamente, no caso das celas adjacentes à fronteira inferior, e que não correspondem às esquinas da grade, a equação (5.3) será aproximada por

$$\begin{aligned}
p_y \Big|_{i,3/2} &= -v_t \Big|_{i,3/2} - \left(uv_x \right)_{i,3/2} - \left(vv_y \right)_{i,3/2} + \nu \left(v_{xx} - u_{xy} \right)_{i,3/2} \\
\frac{p_{i,2} - p_{i,1}}{h} &= - \frac{v_{i,3/2}^{k+1} - v_{i,3/2}^k}{\Delta t} \\
&- \bar{u}_{i,3/2} \left(\frac{v_{i+1,3/2} - v_{i-1,3/2}}{2h} \right) - v_{i,3/2} \left(\frac{v_{i,5/2} - v_{i,1/2}}{2h} \right) \\
&+ \nu \left(\frac{v_{i+1,3/2} - 2v_{i,3/2} + v_{i-1,3/2}}{h^2} \right. \\
&\left. - \frac{-u_{i-1/2,2} + u_{i+1/2,2} + u_{i-1/2,1} - u_{i+1/2,1}}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
p_{i,2} - p_{i,1} &= -\frac{h}{\Delta t} (v_{i,3/2}^{k+1} - v_{i,3/2}^k) \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{u}_{i,3/2}(v_{i+1,3/2} - v_{i-1,3/2}) - \frac{1}{2}v_{i,3/2}(v_{i,5/2} - v_{i,1/2}) \\
&\quad +\frac{\nu}{h} (v_{i+1,3/2} - 2v_{i,3/2} + v_{i-1,3/2} \\
&\quad +u_{i-1/2,2} - u_{i+1/2,2} - u_{i-1/2,1} + u_{i+1/2,1}) , \tag{5.17}
\end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1 .$$

e similarmemente

$$\begin{aligned}
-p_y \Big|_{i,m-1/2} &= v_t \Big|_{i,m-1/2} + \left(uv_x \right)_{i,m-1/2} + \left(v v_y \right)_{i,m-1/2} - \nu \left(v_{xx} - u_{xy} \right)_{i,m-1/2} \\
-\left(\frac{p_{i,m} - p_{i,m-1}}{h} \right) &= \frac{v_{i,m-1/2}^{k+1} - v_{i,m-1/2}^k}{\Delta t} + \\
&\quad \bar{u}_{i,m-1/2} \left(\frac{v_{i+1,m-1/2} - v_{i-1,m-1/2}}{2h} \right) + v_{i,m-1/2} \left(\frac{v_{i,m+1/2} - v_{i,m-3/2}}{2h} \right) \\
&\quad - \nu \left(\frac{v_{i+1,m-1/2} - 2v_{i,m-1/2} + v_{i-1,m-1/2}}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-u_{i-1/2,m} + u_{i+1/2,m} + u_{i-1/2,m-1} - u_{i+1/2,m-1}}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
-p_{i,m} + p_{i,m-1} &= \frac{h}{\Delta t} (v_{i,m-1/2}^{k+1} - v_{i,m-1/2}^k) + \\
&\frac{1}{2} \bar{u}_{i,m-1/2} (v_{i+1,m-1/2} - v_{i-1,m-1/2}) \\
&+ \frac{1}{2} v_{i,m-1/2} (v_{i,m+1/2} - v_{i,m-3/2}) \\
&- \frac{\nu}{h} (v_{i+1,m-1/2} - 2v_{i,m-1/2} + v_{i-1,m-1/2} \\
&+ u_{i-1/2,m} - u_{i+1/2,m} - u_{i-1/2,m-1} + u_{i+1/2,m-1}) , \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1 .$$

para o caso das celas adjacentes à fronteira superior.

Os termos $\bar{v}_{i+1/2,j}$ e $\bar{u}_{i,j+1/2}$, nas equações (5.14)–(5.18) , são definidos por (3.15) e (3.21), respectivamente.

O somatório dos termos do lado esquerdo (TLE) e do lado direito (TLD) das equações (5.14)–(5.18) pode ser interpretado como o teorema da divergência em forma discreta [Alfrink, 1981], que neste caso obtém-se:

$$\text{TLE} = 0$$

$$\text{TLD} = 0 .$$

Isto prova que a condição de compatibilidade (2.23) é *exatamente* satisfeita em forma discreta numa grade alternada.

É importante mencionar aqui que os termos viscosos das equações da quantidade de movimento (3.1) e (3.2) não aparecem no termo fonte da equação de

Poisson para a pressão (5.1); porém, eles estão presentes nas condições de contorno de Neumann (5.2) e (5.3). Para satisfazer a condição de compatibilidade (2.23), a integral dos termos viscosos sobre o contorno da fronteira deve cancelar-se. Isto pode ser alcançado escrevendo os termos viscosos de forma conveniente. Mais precisamente, usando a equação da continuidade (3.3), pode-se escrever, $u_{xx} + u_{yy} = -v_{xy} + u_{yy}$ na equação (5.2) e $v_{xx} + v_{yy} = v_{xx} - u_{xy}$ na equação (5.3). O termo adicional não causa problema na condição de compatibilidade visto que a integral da dilatação sobre o domínio de solução se anula (devido à continuidade global).

6 ALGORITMO VELOCIDADE–PRESSÃO

Neste capítulo, apresenta-se um algoritmo *velocidade–pressão modificado*, o qual é usado para integrar as equações de Navier–Stokes. Inicializa-se a pressão através do método dos *mínimos quadrados*, usando a *pseudo–inversa* da matriz singular, que resulta da discretização da equação de Poisson para a pressão, (5.1), com as condições de contorno de Neumann, (5.2)–(5.3). As equações da quantidade de movimento, (3.1)–(3.2), transientes, são resolvidas para o campo de velocidades em cada passo de tempo. A pressão é atualizada com as equações (5.1)–(5.3), dando um tratamento especial tanto aos pontos interiores, correspondentes às celas interiores da grade, quanto aos pontos interiores, correspondentes às celas adjacentes à fronteira da grade, cuidando que a condição de compatibilidade seja verificada. Deve-se salientar que, embora o método seja direto, utiliza-se uma atualização do campo de pressão tipo “Gauss–Seidel” para calcular os pontos interiores, correspondentes às celas interiores da grade.

A equação de Poisson para a pressão, com condições de contorno de Neumann, é singular, visto que a matriz tem filas, cuja soma de todos os seus termos é igual a zero. Desde que a soma dos termos, nas colunas, é também igual a zero, não existem soluções, a menos que a soma de todos os termos do lado direito das equações (5.14)–(5.18) seja igual a zero. Neste caso, existe uma infinidade de soluções. Isto está relacionado com a condição de compatibilidade para as equações de Navier–Stokes incompressíveis. Se a pressão é fixada num ponto, ali existe uma solução única. Esta solução satisfará a equação da continuidade, somente se, a soma de todos os termos do lado esquerdo e do lado direito das equações (5.14)–(5.18) for igual a zero [Sivaloganathan e Shaw, 1988].

De outro lado, a inclusão do termo de dilatação D , permite extrair um sistema singular não identicamente nulo para inicializar a pressão. Este valor inicial

pode ser considerado como uma perturbação inicial ótima de um estado arbitrário constante.

6.1 Inicialização da Pressão

Discretizando a equação de Poisson para a pressão (5.1) e calculando estes valores no nível de tempo $k = 0$, obtém-se, a partir de (5.14), o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
p_{i+1,j}^0 + p_{i-1,j}^0 + p_{i,j+1}^0 + p_{i,j-1}^0 - 4p_{i,j}^0 &= -\frac{1}{2}u_{i+1/2,j}^0 (u_{i+3/2,j}^0 - u_{i-1/2,j}^0) \\
&+ \frac{1}{2}u_{i-1/2,j}^0 (u_{i+1/2,j}^0 - u_{i-3/2,j}^0) - \frac{1}{2}\bar{v}_{i+1/2,j}^0 (u_{i+1/2,j+1}^0 - u_{i+1/2,j-1}^0) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{v}_{i-1/2,j}^0 (u_{i-1/2,j+1}^0 - u_{i-1/2,j-1}^0) - \frac{1}{2}\bar{u}_{i,j+1/2}^0 (v_{i+1,j+1/2}^0 - v_{i-1,j+1/2}^0) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{u}_{i,j-1/2}^0 (v_{i+1,j-1/2}^0 - v_{i-1,j-1/2}^0) - \frac{1}{2}v_{i,j+1/2}^0 (v_{i,j+3/2}^0 - v_{i,j-1/2}^0) \\
&+ \frac{1}{2}v_{i,j-1/2}^0 (v_{i,j+1/2}^0 - v_{i,j-3/2}^0) + \frac{h}{\Delta t} (u_{i+1/2,j}^0 - u_{i-1/2,j}^0 + v_{i,j+1/2}^0 - v_{i,j-1/2}^0)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Similarmente, discretiza-se as condições de contorno de Neumann para a pressão, (5.2)–(5.3), e calcula-se estes valores no nível de tempo $k = 0$, nas diferentes fronteiras da grade, como se mostra a seguir.

Usando-se fórmulas de diferença central de segunda ordem, a condição de contorno (5.2) é avaliada em $x = 0$, por

$$\begin{aligned}
p_x \Big|_{1/2,j} &= -u_t \Big|_{1/2,j} - \left(uu_x \right)_{1/2,j} - \left(vu_y \right)_{1/2,j} - \nu \left(v_{xy} - u_{yy} \right)_{1/2,j} \\
\frac{p_{1,j}^0 - p_{0,j}^0}{h} &= -\frac{u_{1/2,j}^1 - u_{1/2,j}^0}{\Delta t} \\
&\quad - u_{1/2,j}^0 \left(\frac{u_{3/2,j}^0 - u_{-1/2,j}^0}{2h} \right) - \bar{v}_{1/2,j}^0 \left(\frac{u_{1/2,j+1}^0 - u_{1/2,j-1}^0}{2h} \right) \\
&\quad - \nu \left(\frac{-v_{0,j+1/2}^0 + v_{1,j+1/2}^0 + v_{0,j-1/2}^0 - v_{1,j-1/2}^0}{h^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{u_{1/2,j+1}^0 - 2u_{1/2,j}^0 + u_{1/2,j-1}^0}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

a partir da qual, obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_{0,j}^0 &= p_{1,j}^0 + \frac{h}{\Delta t} (u_{1/2,j}^1 - u_{1/2,j}^0) + \\
&\quad \frac{1}{2} u_{1/2,j}^0 (u_{3/2,j}^0 - u_{-1/2,j}^0) + \frac{1}{2} \bar{v}_{1/2,j}^0 (u_{1/2,j+1}^0 - u_{1/2,j-1}^0) \\
&\quad + \frac{\nu}{h} (-v_{0,j+1/2}^0 + v_{1,j+1/2}^0 + v_{0,j-1/2}^0 - v_{1,j-1/2}^0 \\
&\quad - u_{1/2,j+1}^0 + 2u_{1/2,j}^0 - u_{1/2,j-1}^0) , \tag{6.2}
\end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, m .$$

Expressões similares são derivadas usando a equação (5.2) em $x = A$ e avaliando a condição de contorno (5.3) em $y = 0$ e $y = B$, as quais são dadas, a

seguir, pelas equações (6.3)–(6.5), respectivamente.

$$\begin{aligned}
p_{n+1,j}^0 &= p_{n,j}^0 - \frac{h}{\Delta t} (u_{n+1/2,j}^1 - u_{n+1/2,j}^0) - \\
&\frac{1}{2} u_{n+1/2,j}^0 (u_{n+3/2,j}^0 - u_{n-1/2,j}^0) - \frac{1}{2} \bar{v}_{n+1/2,j}^0 (u_{n+1/2,j+1}^0 - u_{n+1/2,j-1}^0) \\
&- \frac{\nu}{h} (-v_{n,j+1/2}^0 + v_{n+1,j+1/2}^0 + v_{n,j-1/2}^0 - v_{n+1,j-1/2}^0 \\
&- u_{n+1/2,j+1}^0 + 2u_{n+1/2,j}^0 - u_{n+1/2,j-1}^0) , \tag{6.3}
\end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, m .$$

$$\begin{aligned}
p_{i,0}^0 &= p_{i,1}^0 + \frac{h}{\Delta t} (v_{i,1/2}^1 - v_{i,1/2}^0) + \\
&\frac{1}{2} \bar{u}_{i,1/2}^0 (v_{i+1,1/2}^0 - v_{i-1,1/2}^0) + \frac{1}{2} v_{i,1/2}^0 (v_{i,3/2}^0 - v_{i,-1/2}^0) \\
&- \frac{\nu}{h} (v_{i+1,1/2}^0 - 2v_{i,1/2}^0 + v_{i-1,1/2}^0 \\
&+ u_{i-1/2,1}^0 - u_{i+1/2,1}^0 - u_{i-1/2,0}^0 + u_{i+1/2,0}^0) , \tag{6.4}
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n .$$

$$\begin{aligned}
p_{i,m+1}^0 &= p_{i,m}^0 - \frac{h}{\Delta t} (v_{i,m+1/2}^1 - v_{i,m+1/2}^0) - \\
&\quad \frac{1}{2} \bar{u}_{i,m+1/2}^0 (v_{i+1,m+1/2}^0 - v_{i-1,m+1/2}^0) \\
&\quad - \frac{1}{2} v_{i,m+1/2}^0 (v_{i,m+3/2}^0 - v_{i,m-1/2}^0) \\
&\quad + \frac{\nu}{h} (v_{i+1,m+1/2}^0 - 2v_{i,m+1/2}^0 + v_{i-1,m+1/2}^0 \\
&\quad + u_{i-1/2,m+1}^0 - u_{i+1/2,m+1}^0 - u_{i-1/2,m}^0 + u_{i+1/2,m}^0) , \quad (6.5)
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n .$$

A expressão matricial do sistema (6.1), juntamente com as condições de contorno (6.2)–(6.5), pode ser escrita como

$$A p_0 = b \quad (6.6)$$

onde A é uma matriz *singular* da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} S_1 & & & & & \\ & S_2 & & & & \\ & & S_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & S_2 & \\ & & & & & S_1 \end{bmatrix}_{(m \times n) \times (m \times n)}$$

com

$$S_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -3 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -3 \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

A matriz A contém m submatrizes bloco de ordem n . O vetor p_0 contém todas as variáveis associadas à pressão nos pontos interiores, no tempo $k = 0$, isto é,

$$p_0 = [p_{1,1}^0 \quad p_{2,1}^0 \quad \cdots \quad p_{n,1}^0 \quad p_{1,2}^0 \quad p_{2,2}^0 \quad \cdots \quad p_{n,2}^0 \quad \cdots \quad p_{1,m}^0 \quad p_{2,m}^0 \quad \cdots \quad p_{n,m}^0]^T .$$

O vetor b , de ordem $m \times n$, contém todos os valores $u_{i+1/2,j}^0$, $v_{i,j+1/2}^0$ do lado direito das equações (6.1)–(6.5), os quais representam os valores iniciais e de contorno, para u e v , dadas como hipóteses do problema.

O sistema singular (6.6) é resolvido através do método dos *mínimos quadrados*, usando a *pseudo-inversa* ou *inversa generalizada de Moore–Penrose* da matriz A [Rao e Mitra, 1971; Datta, 1995], a qual é obtida por meio de subrotinas do software LAPACK [Anderson et al., 1995].

Observações

1. Analiticamente, a pressão deveria ser inicializada com qualquer constante (usualmente, zero, nos métodos iterativos).
2. Do ponto de vista numérico, a discretização de termos nulos (como o termo de dilatação) permite obter uma pressão “ótima” de inicialização, isto é, uma perturbação do estado constante (pressão constante

analítica), que reflete a característica singular física do problema (picos da pressão).

3. Para o caso particular, onde as condições de contorno para o campo de velocidades, são dadas por $u = 1$ e $v = 0$ em $y = B$ e $u = v = 0$ nos outros lados da cavidade (Fig. 3.1), e as velocidades iniciais do fluido são dadas por $u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0$, o vetor b é da forma

$$b = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_{mn-n+1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad b_{mn}]_{m \times n}^T$$

onde

$$b_{mn-n+1} = \frac{2\nu}{h} \quad \text{e} \quad b_{mn} = -\frac{2\nu}{h}$$

e portanto b , é um vetor diferente de zero.

6.2 Equações da Pressão

Uma vez inicializado o campo de pressão (ver seção anterior), o cálculo dos valores da pressão nos pontos interiores da grade, $p_{i,j}$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, no nível de tempo $t + \Delta t$, será feito usando-se o seguinte critério (ver Fig. 6.2):

Os pontos interiores, correspondentes às celas adjacentes à fronteira da grade, são calculados através das fórmulas (6.7)–(6.10), as quais são obtidas a partir

das equações (5.15)–(5.18), respectivamente:

$$\begin{aligned}
p_{1,j}^{k+1} &= p_{2,j}^k + \frac{h}{\Delta t} (u_{3/2,j}^{k+1} - u_{3/2,j}^k) + \\
&\frac{1}{2} u_{3/2,j}^{k+1} (u_{5/2,j}^{k+1} - u_{1/2,j}^{k+1}) + \frac{1}{2} v_{3/2,j}^{k+1} (u_{3/2,j+1}^{k+1} - u_{3/2,j-1}^{k+1}) \\
&+ \frac{\nu}{h} (-v_{1,j+1/2}^{k+1} + v_{2,j+1/2}^{k+1} + v_{1,j-1/2}^{k+1} - v_{2,j-1/2}^{k+1} \\
&- u_{3/2,j+1}^{k+1} + 2u_{3/2,j}^{k+1} - u_{3/2,j-1}^{k+1}) , \tag{6.7}
\end{aligned}$$

$j = 2, 3, \dots, m-1 .$

$$\begin{aligned}
p_{n,j}^{k+1} &= p_{n-1,j}^k - \frac{h}{\Delta t} (u_{n-1/2,j}^{k+1} - u_{n-1/2,j}^k) - \\
&\frac{1}{2} u_{n-1/2,j}^{k+1} (u_{n+1/2,j}^{k+1} - u_{n-3/2,j}^{k+1}) - \frac{1}{2} v_{n-1/2,j}^{k+1} (u_{n-1/2,j+1}^{k+1} - u_{n-1/2,j-1}^{k+1}) \\
&- \frac{\nu}{h} (-v_{n-1,j+1/2}^{k+1} + v_{n,j+1/2}^{k+1} + v_{n-1,j-1/2}^{k+1} - v_{n,j-1/2}^{k+1} \\
&- u_{n-1/2,j+1}^{k+1} + 2u_{n-1/2,j}^{k+1} - u_{n-1/2,j-1}^{k+1}) , \tag{6.8}
\end{aligned}$$

$j = 2, 3, \dots, m-1 .$

$$\begin{aligned}
p_{i,1}^{k+1} &= p_{i,2}^k + \frac{h}{\Delta t} (v_{i,3/2}^{k+1} - v_{i,3/2}^k) + \\
&\frac{1}{2} \bar{u}_{i,3/2}^{k+1} (v_{i+1,3/2}^{k+1} - v_{i-1,3/2}^{k+1}) + \frac{1}{2} v_{i,3/2}^{k+1} (v_{i,5/2}^{k+1} - v_{i,1/2}^{k+1}) \\
&- \frac{\nu}{h} (v_{i+1,3/2}^{k+1} - 2v_{i,3/2}^{k+1} + v_{i-1,3/2}^{k+1} \\
&+ u_{i-1/2,2}^{k+1} - u_{i+1/2,2}^{k+1} - u_{i-1/2,1}^{k+1} + u_{i+1/2,1}^{k+1}) , \tag{6.9}
\end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1 .$$

$$\begin{aligned}
p_{i,m}^{k+1} &= p_{i,m-1}^k - \frac{h}{\Delta t} (v_{i,m-1/2}^{k+1} - v_{i,m-1/2}^k) \\
&- \frac{1}{2} \bar{u}_{i,m-1/2}^{k+1} (v_{i+1,m-1/2}^{k+1} - v_{i-1,m-1/2}^{k+1}) \\
&- \frac{1}{2} v_{i,m-1/2}^{k+1} (v_{i,m+1/2}^{k+1} - v_{i,m-3/2}^{k+1}) \\
&+ \frac{\nu}{h} (v_{i+1,m-1/2}^{k+1} - 2v_{i,m-1/2}^{k+1} + v_{i-1,m-1/2}^{k+1} \\
&+ u_{i-1/2,m}^{k+1} - u_{i+1/2,m}^{k+1} - u_{i-1/2,m-1}^{k+1} + u_{i+1/2,m-1}^{k+1}) , \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1 .$$

Nos pontos interiores, correspondentes às celas interiores da grade, o campo da pressão é calculado com a incorporação, na fórmula (5.14), dos valores da pressão já obtidos (ver Fig. 6.1). Mais precisamente, a partir da equação (5.14) obtém-se

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{4}(p_{i+1,j}^k + p_{i-1,j}^{k+1} + p_{i,j+1}^k + p_{i,j-1}^{k+1}) + \frac{1}{8}u_{i+1/2,j}^{k+1} (u_{i+3/2,j}^{k+1} - u_{i-1/2,j}^{k+1}) \\
&- \frac{1}{8}u_{i-1/2,j}^{k+1} (u_{i+1/2,j}^{k+1} - u_{i-3/2,j}^{k+1}) + \frac{1}{8}\bar{v}_{i+1/2,j}^{k+1} (u_{i+1/2,j+1}^{k+1} - u_{i+1/2,j-1}^{k+1}) \\
&- \frac{1}{8}\bar{v}_{i-1/2,j}^{k+1} (u_{i-1/2,j+1}^{k+1} - u_{i-1/2,j-1}^{k+1}) + \frac{1}{8}\bar{u}_{i,j+1/2}^{k+1} (v_{i+1,j+1/2}^{k+1} - v_{i-1,j+1/2}^{k+1}) \\
&- \frac{1}{8}\bar{u}_{i,j-1/2}^{k+1} (v_{i+1,j-1/2}^{k+1} - v_{i-1,j-1/2}^{k+1}) + \frac{1}{8}v_{i,j+1/2}^{k+1} (v_{i,j+3/2}^{k+1} - v_{i,j-1/2}^{k+1}) \\
&- \frac{1}{8}v_{i,j-1/2}^{k+1} (v_{i,j+1/2}^{k+1} - v_{i,j-3/2}^{k+1}) - \frac{h}{4\Delta t} (u_{i+1/2,j}^{k+1} - u_{i-1/2,j}^{k+1} + v_{i,j+1/2}^{k+1} - v_{i,j-1/2}^{k+1}) \\
&i = 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, \dots, m-1.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

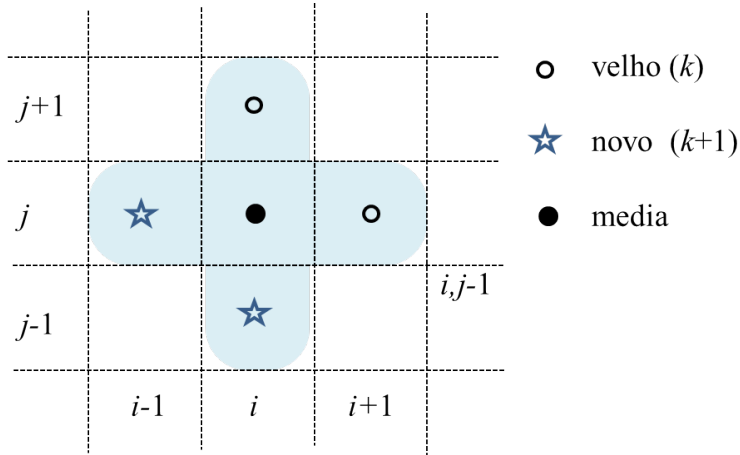


Figura 6.1 Molécula para a pressão

Agora, uma expressão matricial para (6.11) pode ser descrita por

$$R p_{t+\Delta t} = -G \mathbb{N}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) \quad (6.12)$$

onde R é uma matriz *não singular* da forma

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & & & \\ R_2 & R_1 & R_2 & & \\ & R_2 & R_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & R_2 \\ & & & R_2 & R_1 \end{bmatrix}_{((m-2) \times (n-2)) \times ((m-2) \times (n-2))}$$

com

$$R_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \quad \text{e} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} .$$

A expressão $G \mathbb{N}(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$, em (6.12), contém todos os valores $u_{i+1/2,j}^{k+1}$, $v_{i,j+1/2}^{k+1}$ do lado direito da equação (6.11).

Assim, o cálculo da pressão, nos pontos interiores da grade, pode ser expresso através do seguinte esquema

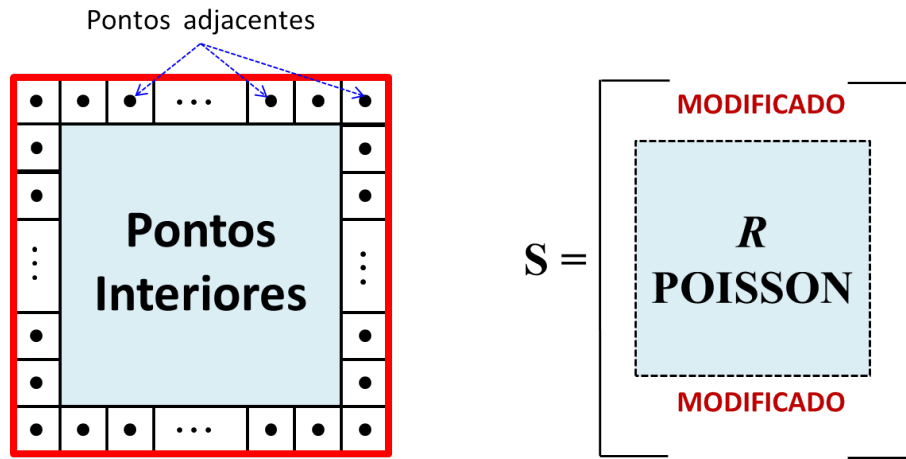


Figura 6.2 Esquema para o cálculo da pressão nos pontos interiores

6.3 Algoritmo Computacional Velocidade–Pressão

Um algoritmo proposto, para resolver o problema do escoamento de um fluido viscoso, incompressível, utilizando qualquer um dos métodos de discretização para o campo de velocidades (Diferença Central, Upwind, Euler–Lagrange, etc.) é dado pelos seguintes passos:

1. No tempo inicial $t_0 = 0$, para $k = 0$, introduzir as velocidades iniciais do fluido $u_{i+1/2,j}^0$ e $v_{i,j+1/2}^0$ a partir das condições iniciais dadas (3.4)–(3.5).
2. Introduzir as condições de contorno da velocidade, através das equações (3.6)–(3.9).
3. Calcular a pressão inicial p_0 através das equações (6.1)–(6.5), que dão origem ao sistema *singular*

$$A p_0 = b .$$

Para determinar p_0 , utiliza-se a *pseudo-inversa* ou a *inversa generalizada de Moore–Penrose* da matriz A , a qual é obtida com subrotinas do software LAPACK [Anderson et al., 1995].

4. Determinar, explicitamente, o campo de velocidades

$$u_{i+1/2,j}^{k+1} \quad \text{e} \quad v_{i,j+1/2}^{k+1}$$

usando as equações (3.13)–(3.15) e (3.19)–(3.21), respectivamente, para o método de diferença central. No caso do método de diferença Upwind, usar as equações (3.28)–(3.29) e (3.36)–(3.37) e, para o método de Euler–Lagrange, usar as equações (3.49)–(3.50) e (3.53)–(3.54).

5. Calcular a pressão p no tempo $k + 1$ usando as fórmulas (6.7)–(6.11).
6. Atualizar a pressão e o campo de velocidades colocando $p_{t+\Delta t}$ em vez de p_0 e $\bar{u}_{t+\Delta t}$ em vez de \bar{u}_0 .
7. Repetir os passos (4)–(6), para $k = 1, 2, \dots$
8. Terminar o cálculo quando atingir K máx.

7 SIMULAÇÕES COM O PROBLEMA DA CAVIDADE

O escoamento incompressível laminar, em uma cavidade quadrada, cuja parede superior movimenta-se com uma velocidade uniforme em seu próprio plano, tem sido amplamente usado como um problema modelo para testar e avaliar técnicas numéricas como procedimento de solução para as equações de Navier–Stokes, a despeito das singularidades em dois de seus cantos. Também tem sido objeto de visualização de experimentos do escoamento físico [Pan e Acrivos, 1967 e Koseff e Street, 1984]. Para tal problema, com valores moderadamente altos de número de Reynolds, Re , existem resultados publicados [Ghia et al., 1977; Rubin e Khosla, 1977; Smith e Kidd, 1975], que utilizam uma variedade de procedimentos de solução, incluindo uma tentativa de extrair analiticamente as singularidades nos cantos a partir das variáveis dependentes do problema [Ghia et al., 1979]. Para Re alto, também há resultados [Nallasamy e Prasad, 1977], mas a exatidão da maior parte destas soluções tem sido, geralmente, vista com algum ceticismo, devido ao tamanho da grade computacional empregada e às dificuldades experimentadas com a convergência dos métodos numéricos iterativos convencionais. Exceções, possíveis a estes casos, podem ser os resultados obtidos por Benjamin e Denny, 1979, para $Re = 10000$, usando uma grade não uniforme de 151×151 pontos, tal que $\Delta x = \Delta y \simeq 1/400$ junto às paredes, e os de Agarwal, 1981, para $Re = 7500$, usando uma grade uniforme de 121×121 pontos, junto com um esquema upwind de alta ordem. Resultados similares são obtidos por Schreiber e Keller, 1983, para $Re = 10000$, usando uma grade uniforme de 180×180 pontos, os quais concordam muito bem com aqueles obtidos por Ghia et al., 1982, para $Re = 10000$, usando uma grade uniforme tão grande como 257×257 pontos.

O problema da cavidade, além de ser considerado como um “benchmark” para diversos algoritmos numéricos, apresenta-se em vários problemas de

modelagem, por exemplo, fornos injetados por gás inerte, máquinas de combustão interna, incineradores e reatores químicos para a fabricação de microprocessadores [Chakraborty e Sahai, 1991; Nigro et al., 1992; Park e Cho, 1996].

Neste trabalho considera-se o problema do escoamento de um fluido viscoso, incompressível e isotérmico dentro de uma cavidade quadrada cuja seção transversal é dada por ABCD (ver Fig. 7.1) e cujos lados têm comprimento unitário. Deseja-se determinar o escoamento induzido pelo movimento de cisalhamento da parede superior.

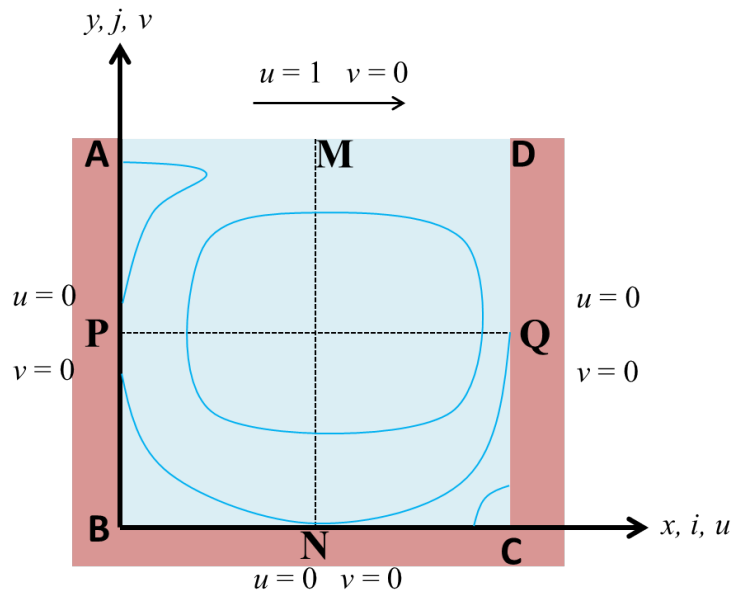


Figura 7.1 Estrutura do escoamento e condições de contorno para o problema da cavidade

Para tanto, assume-se que, no tempo inicial $t_0 = 0$, as velocidades iniciais do fluido são

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0 .$$

Além disso, supõe-se que o fluido, na fronteira, tem velocidade igual à da própria fronteira. Considera-se, também, que as fronteiras inferior e laterais

são fixas, enquanto que a fronteira superior se desloca com velocidade horizontal uniforme $u_T = 1$. Assim, as condições de contorno da velocidade tangencial são

$$u(x, 0, t) = v(0, y, t) = v(1, y, t) = 0 \quad , \quad u(x, 1, t) = u_T = 1$$

enquanto que as condições de contorno da velocidade normal são

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0 \quad .$$

A discretização é realizada sobre uma grade alternada, uniforme e de 100×100 pontos. O arranjo alternado, introduzido por Harlow e Welsh, 1965, foi usado neste trabalho para conseguir um forte acoplamento entre as velocidades e o gradiente de pressão.

O número de Reynolds (Re) para este problema pode ser definido como

$$Re = \frac{\mathcal{U} \mathcal{L}}{\nu}$$

onde \mathcal{U} é a velocidade característica ($\mathcal{U} = 1$), \mathcal{L} é o comprimento de escala característico ($\mathcal{L} = 1$), e ν a viscosidade cinemática do fluido.

Simulações numéricas foram realizadas, para este problema, numa ampla faixa de números de Reynolds: $Re = 100, 400, 1000, 5000, e 10000$, numa grade com passos de tempo $\Delta t = 0.001, 0.002$, e incremento espacial $\Delta x = \Delta y = h = 0.01$. O critério de estabilidade é dado por $\Delta t/h < 1$ e $\Delta t \leq h^2/4\nu$ conforme descrito por diversos autores [Roache, 1982; Casulli, 1988].

Inicialmente, o algoritmo *velocidade–pressão*, apresentado na seção 6.3, foi implementado utilizando o software MATLAB versão 4.1, uma vez que permite realizar uma série de testes, em nível de laboratório computacional, necessários ao projeto de algoritmos de integração com o método de diferença central. Estes testes foram executados num microcomputador padrão IBM/PC, processador PENTIUM

90 MHz, 16 MBytes de memória RAM. Foi possível refinar localmente a malha, particularmente nos cantos da cavidade, a fim de poder observar a bifurcação do escoamento.

Posteriormente, o algoritmo foi inteiramente implementado em FORTRAN77 e executado em estação de trabalho DEC Alfa 3000. No equipamento DEC Alfa, por ser o mais potente disponível, foram realizadas grande parte das simulações, sobretudo aquelas que, pelo tamanho da malha de discretização, projetavam a resolução de mais de 10000 variáveis, uma vez que tais simulações se mostravam excessivamente lentas no PC.

Em todas as figuras, os vetores de velocidade têm sido normalizados para prover uma melhor visualização do escoamento.

A Fig. 7.2 mostra o campo de velocidades para $Re = 100, 400, 1000$ e 5000 em $t = 100$.

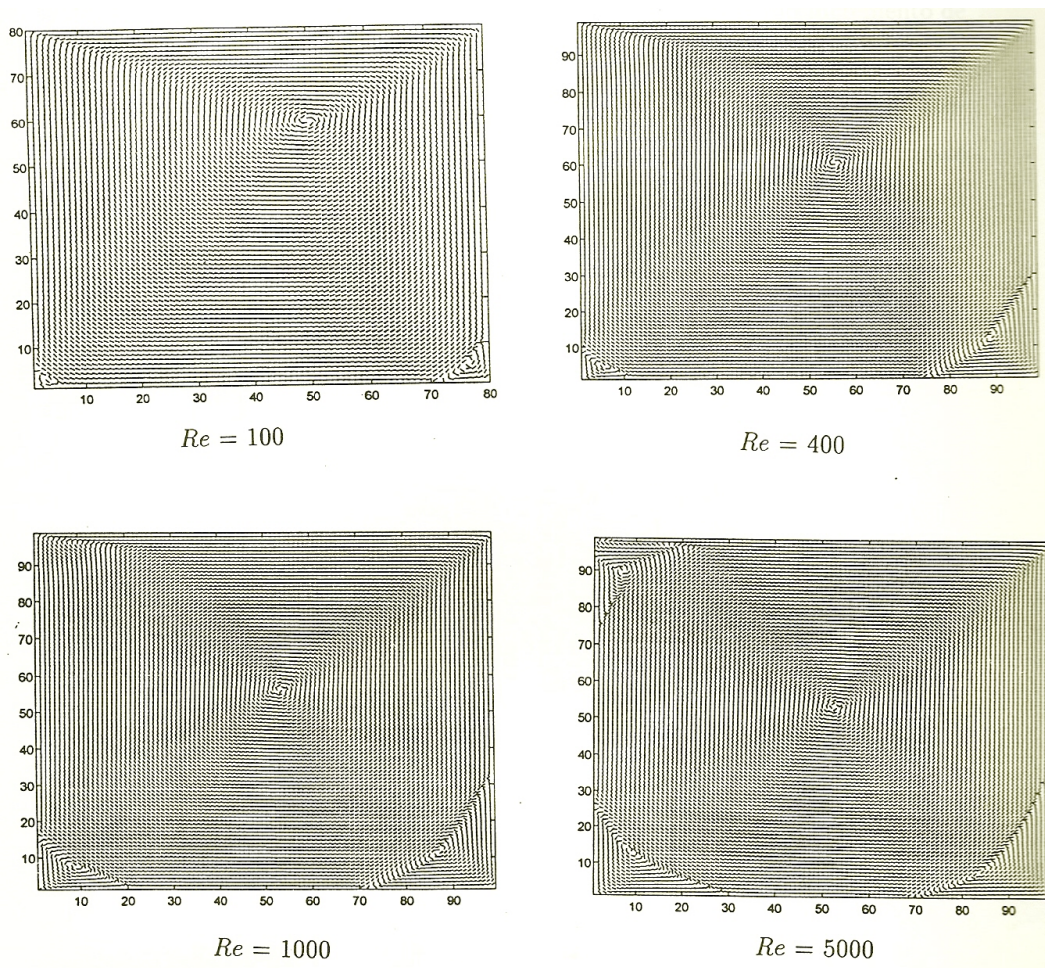


Figura 7.2 Campo de velocidades em $t = 100$

Os gráficos dos campos de velocidades exibem o desenvolvimento de um vórtice primário, central, e vórtices secundários, nos cantos da cavidade, com o incremento do número de Reynolds (Re), demonstrando assim o efeito do gradiente de pressão na formação dos vórtices. Exibe-se, também, o efeito do incremento de Re na localização dos centros destes vórtices. Como a inércia do fluido torna-se considerável, o escoamento já não é mais simétrico em relação às condições de contorno. O centro do vórtice principal, para baixos números de Reynolds, é deslocado na direção do movimento da fronteira. Em números de Reynolds altos, os efeitos de inércia tornam-se dominantes e o centro do vórtice principal se desloca em direção ao centro geométrico da cavidade.

A Fig. 7.3 exibe o campo de velocidades e de pressão para $Re = 10000$ em $t = 100$.

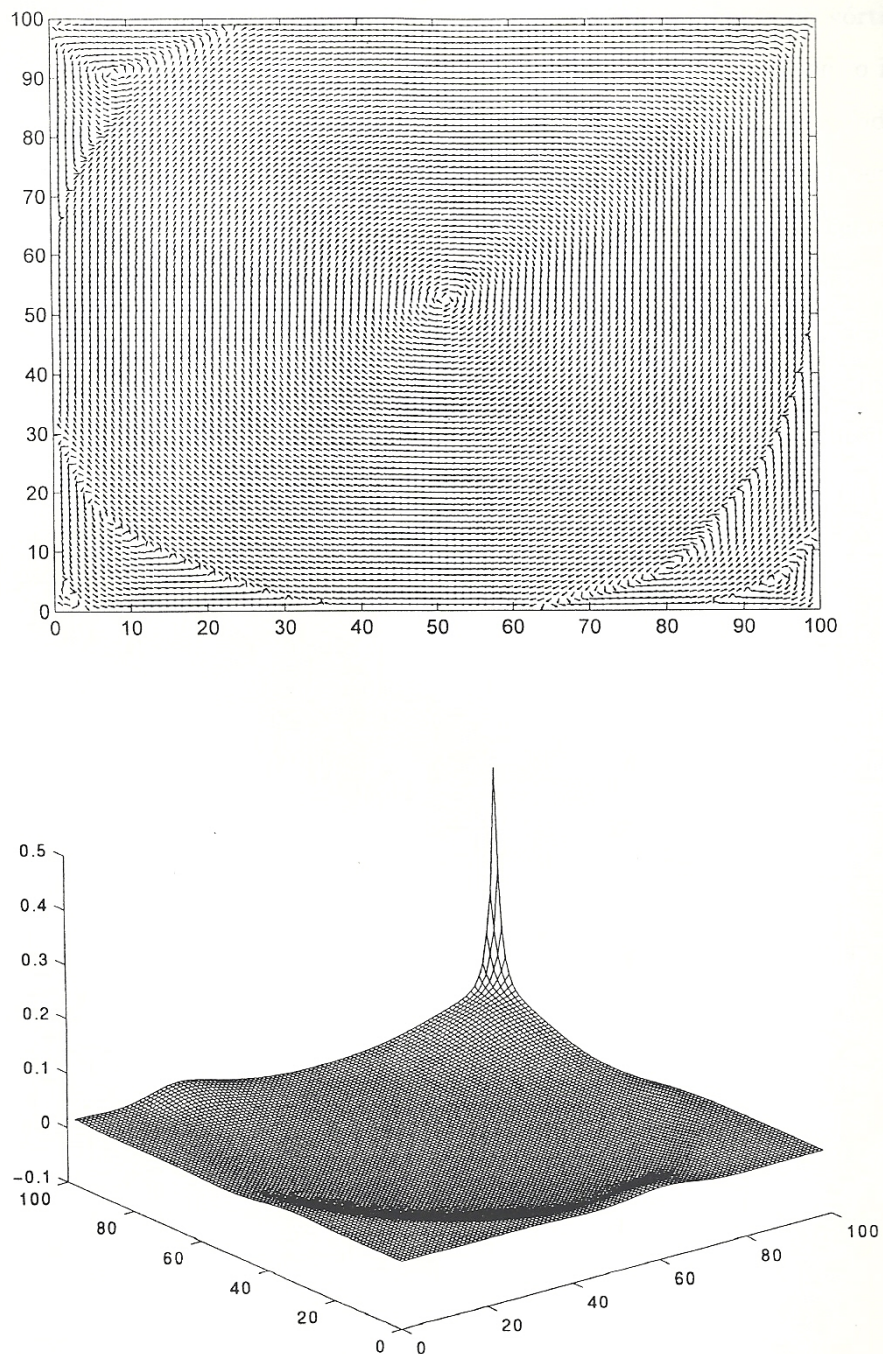


Figura 7.3 Campo de velocidades e de pressão para $Re = 10000$ em $t = 100$

Das Figs. 7.2 e 7.3 observa-se que, para $Re = 100$, o centro do vórtice primário é deslocado em direção ao canto direito superior da cavidade. Com o incremento em Re , este move-se em direção ao centro geométrico da cavidade. Todos os vórtices secundários aparecem, inicialmente, muito perto dos cantos (ou perto da parede, como no caso do vórtice secundário superior esquerdo) e seus centros também se movem, ainda que vagarosamente, em direção ao centro geométrico da cavidade com o incremento de Re . Para valores altos de Re , a convecção destes vórtices secundários é evidenciada pela direção do movimento dos centros dos mesmos, conforme resultados previstos por Burggraf, 1966; Ghia et al., 1982; Schreiber e Keller, 1983; Sivaloganathan e Shaw, 1988; etc.

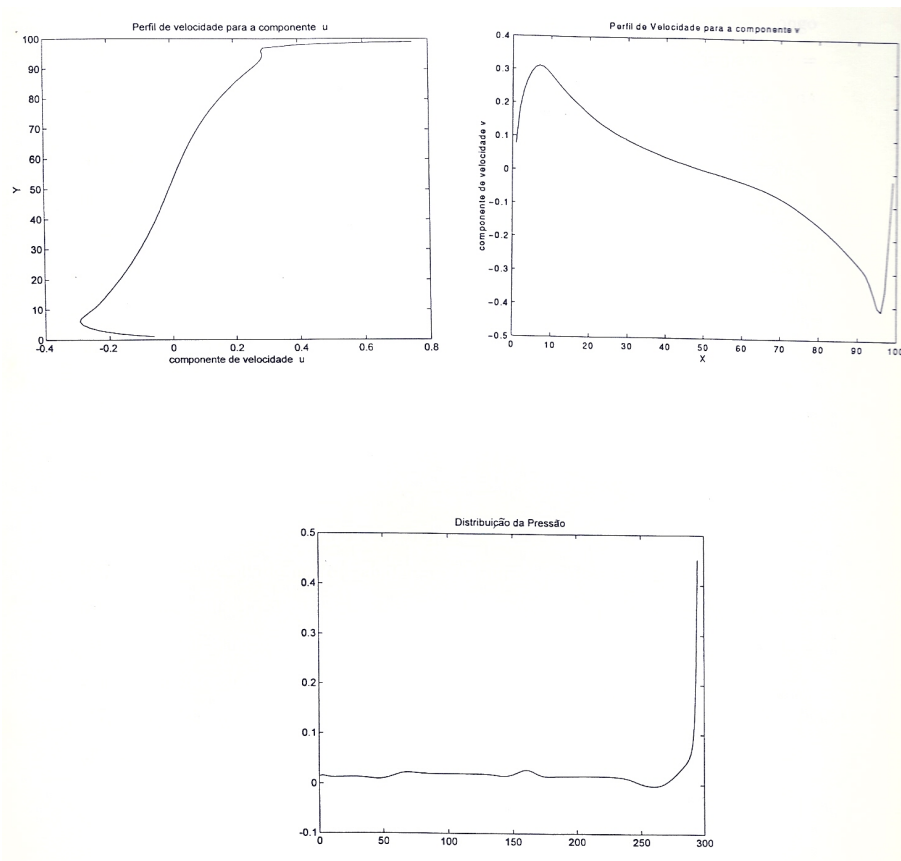


Figura 7.4 Perfis de velocidade, para as componentes u e v , no meio da cavidade e distribuição da pressão nos lados AB, BC e CD da cavidade para $Re = 10000$ em $t = 100$

A Fig. 7.4 mostra o perfil de velocidade para a componente u , ao longo da linha vertical, e o perfil de velocidade para a componente v , ao longo da linha horizontal, passando através do centro geométrico da cavidade para $Re = 10000$ em $t = 100$. A partir destes perfis, observa-se o crescimento da espessura da camada limite na parede, embora a taxa deste crescimento seja baixa para $Re = 10000$. A quase-linearidade destes perfis, na região central da cavidade, é indicativo da região de vorticidade uniforme, a qual se desenvolve para Re altos. O perfil de velocidade, para a componente u , exibe uma dobra perto de $y = 1$, enquanto que um comportamento semelhante é observado no perfil de velocidade, para a componente v , perto de $x = 1$. Tal comportamento foi observado por alguns pesquisadores [Ghia, et al., 1982] e parece persistir nas presentes simulações.

A distribuição da pressão nos lados AB, BC e CD da cavidade (Fig. 7.1) pode ser observada na Fig. 7.4. A pressão na parede CD (a jusante) é mais alta, comparada com a pressão nas paredes AB (a montante) e BC da cavidade.

Para dar uma informação quantitativa, referente ao comportamento do algoritmo desenvolvido neste trabalho, é feita uma comparação entre os resultados obtidos por Ghia et al., 1982, e os resultados obtidos com este algoritmo (ver Tabelas 7.1 e 7.2) para $Re = 10000$, numa grade de 129×129 pontos. Os gráficos correspondentes aos valores listados nas Tabelas 7.1 e 7.2 são exibidos nas Figs. 7.5 e 7.6, os quais mostram uma boa concordância com os resultados obtidos por Ghia et al., 1982.

Tabela 7.1 Comparação dos resultados, para a componente de velocidade u , ao longo da linha vertical através do centro geométrico da cavidade para $Re = 10000$

Grade 129×129 Ponto No.	Ghia et al.	Este trabalho
129	1.00000	1.0000
126	0.47221	0.4520
125	0.47783	0.4571
124	0.48070	0.4622
123	0.47804	0.4551
110	0.34635	0.3492
95	0.20673	0.2005
80	0.08344	0.0851
65	0.03111	0.0318
59	- 0.07540	- 0.0787
37	- 0.23186	- 0.2331
23	- 0.32709	- 0.3324
14	- 0.38000	- 0.3653
10	- 0.41657	- 0.3967
9	- 0.42537	- 0.4060
8	- 0.42735	- 0.4064
1	0.00000	0.0000

Tabela 7.2 Comparação dos resultados, para a componente de velocidade v , ao longo da linha horizontal através do centro geométrico da cavidade para $Re = 10000$

Grade 129×129 Ponto No.	Ghia et al.	Este trabalho
129	0.00000	- 0.0000
125	- 0.54302	- 0.5232
124	- 0.52987	- 0.5098
123	- 0.49099	- 0.4780
122	- 0.45863	- 0.4334
117	- 0.41496	- 0.3994
111	- 0.36737	- 0.3434
104	- 0.30719	- 0.2992
65	0.00831	0.0083
31	0.27224	0.2703
30	0.28003	0.2830
21	0.35070	0.3362
13	0.41487	0.3943
11	0.43124	0.4130
10	0.43733	0.4169
9	0.43983	0.4191
1	0.00000	0.0000

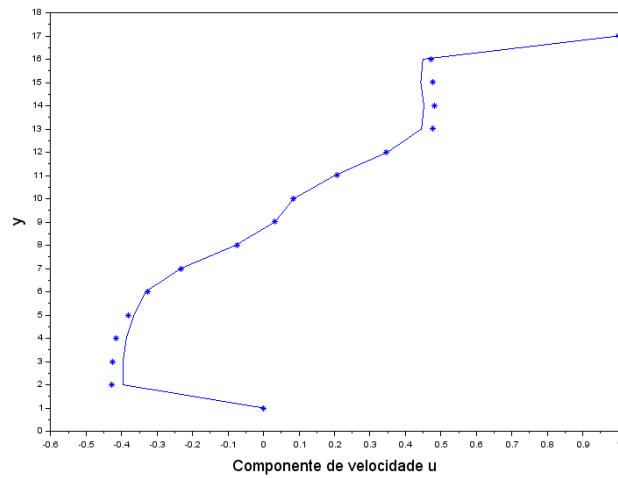


Figura 7.5 Comparação entre o perfil de velocidade, para a componente u , obtido por Ghia et al. (*), e o deste trabalho (-) para $Re = 10000$ numa grade 129×129

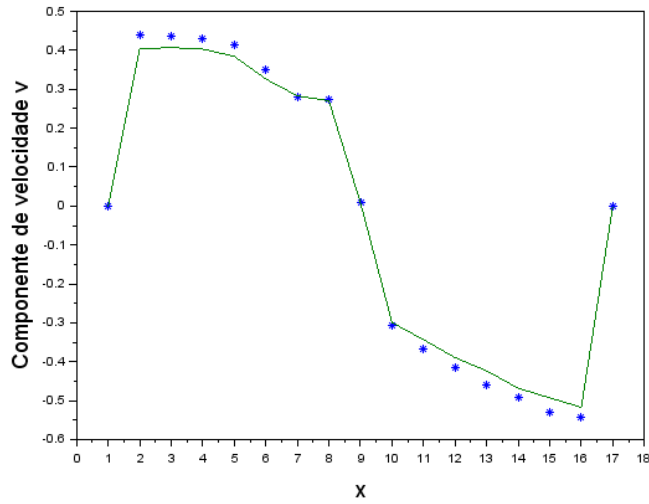


Figura 7.6 Comparação entre o perfil de velocidade, para a componente v , obtido por Ghia et al. (*), e o deste trabalho (-) para $Re = 10000$ numa grade 129×129

Benjamin e Denny, 1979, observaram que o uso de equações laminares, para números de Reynolds até $Re = 10000$, é atribuído ao fato de que não existe evidência experimental conclusiva disponível, para escoamento recirculando numa cavidade quadrada bidimensional, que indique a ocorrência da transição para turbulência, em um número de Reynolds menor.

No intuito de testar a eficiência e robustez do algoritmo desenvolvido neste trabalho, foram também realizadas simulações numéricas para altos números de Reynolds: $Re = 20000$, 50000 e 100000 .

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se um novo método em diferenças finitas, para a solução numérica de escoamentos incompressíveis, através da incorporação da condição de contorno de Neumann para o campo da pressão.

Este método, em variáveis primitivas, consiste de dois passos. No primeiro passo, inclui-se um campo de pressão inicial obtido da resolução de uma equação de Poisson com condição de contorno de Neumann, utilizando mínimos quadrados. O gradiente desta pressão inicial é utilizado para determinar o campo de velocidades no tempo Δt . O segundo passo consiste em atualizar de maneira explícita o campo de pressão no tempo Δt , utilizando o campo de velocidades já calculado e incorporando, sucessivamente, valores da pressão já determinados para o tempo Δt .

A concepção deste método têm duas fontes. A primeira, é a do acompanhamento das condições de contorno dos campos da pressão e da velocidade, durante a formulação matricial, que decorre da discretização espacial das equações de Navier–Stokes. A segunda, é uma modificação do algoritmo velocidade–pressão com a obtenção direta, ou explícita, do campo de pressão.

O método tem sido satisfatoriamente aplicado no problema da cavidade, para números de Reynolds entre 100 e 100.000. Para $Re = 10.000$, foram obtidos vórtices secundários e terciários. Para número de Reynolds muito altos (Re entre 10.000 e 100.000), Deng et al., 1996 e Shem, 1991, inferem que o escoamento torna-se oscilatório na aparição dos vórtices. Tal fato é observado nas simulações realizadas para testar a robustez do algoritmo proposto.

Por outro lado, Bozeman, 1973, discute o fato que o algoritmo com diferença central de Greenspan, 1982, não exhibe vórtices secundários. Com o método

aqui proposto, em diferenças centrais, este fenômeno é exibido através das simulações.

Observa-se, também que, com o incremento do número de Reynolds, ocorre o deslocamento do centro do vórtice principal para o centro geométrico da cavidade, conforme resultados previstos por Burggraf, 1966; Ghia et al., 1982; Schreiber e Keller, 1983, etc..

A formulação, em variáveis primitivas, do método aqui proposto, deverá permitir a abordagem de outros tipos de escoamentos. Em particular, uma imediata extensão para o problema da cavidade em 3D, cavidades profundas e rasas, entre outros.

A comparação, do método desenvolvido neste trabalho, com outros já existentes [Ghia et al., 1982], apresentou bons resultados.

Por outro lado, esta formulação matricial pode ser implementada numericamente, com o uso de rotinas para o tratamento de sistemas diferenciais-algébricos, a qual será motivo de um futuro estudo. Da mesma forma, sugere-se a inclusão do termo difusivo na equação de Poisson para a pressão (Eq. 2.14), pois do mesmo modo que da dilatação, ele influencia fortemente na estabilidade e na exatidão da solução numérica.

Referências Bibliográficas

- Abdallah, S., 1987a. “Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-staggered Grid, I”, **Journal of Computational Physics**, vol. 70, pp. 182–192.
- Abdallah, S., 1987b. “Numerical Solutions for the Incompressible Navier–Stokes Equations in Primitive Variables Using a Non-staggered Grid, II”, **Journal of Computational Physics**, vol. 70, pp. 193–202.
- Abdallah, S., Dreyer, J., 1988. “Dirichlet and Neumann Boundary Conditions for the Pressure Poisson Equation of Incompressible Flow”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 8, pp. 1029–1036.
- Agarwal, R.K., 1981. “A Third–Order–Accurate Upwind Scheme for Navier–Stokes Solutions at High Reynolds Numbers”, **AIAA**, Paper No. 81–0112.
- Alfrink, B.J., 1981. “On the Neumann Problem for the Pressure in a Navier–Stokes Model”, in **Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow**, Venice, pp. 389–399.
- Ames, W.F., 1992. “**Numerical Methods for Partial Differential Equations**”, 3rd ed., Academic Press, Inc., San Diego, USA.
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., Mckenney, A., Ostrouchov, S., Sorensen, D., 1995. “**LAPACK: User Guide**”, 2nd. ed., Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Batchelor, G.K., 1970. “**An Introduction to Fluid Dynamics**”, Cambridge University Press.
- Benjamin, A.S., Denny, V.E., 1979. “On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re ”, **Journal of Computational Physics**, vol. 33, pp. 340–358.
- Bozeman, J.D., 1973. “Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity”. **Journal of Computational Physics**, vol. 12, pp. 348–363.
- Bravo, E., 1990. “**Métodos Numéricos em Diferenças Centrais, Upwind e Euler–Lagrange para as Equações de Navier–Stokes**”, Tese de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Bravo, E., 1994. “Um Esquema Numérico Unificado para o escoamento de um fluido incompressível numa cavidade”, anais do **XVII Congresso Nacional De Matemática Aplicada e Computacional**, Vol. I, pp. 207-211, Vitória, Espírito Santo, Brasil.
- Bravo, E., 1995. “Boundary Conditions in the Non-Linear Discrete Convective Matrix for Incompressible Flow”. **Proceedings ICIAM 95 International Congress on Industrial and Applied Mathematics**, Hamburg, Germany.
- Bravo, E., Claeysen, J.R., 1995a. “Matrix Integration of Incompressible Flow and Pressure Boundary Conditions”, **SIAM Annual Meeting**, Charlotte, NC, USA.
- Bravo, E., Claeysen, J.R., 1995b. “Métodos Matriciais e Condições de contorno na integração de um escoamento incompressível”, In: **Anais XVI CILAMCE 95 Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**, Curitiba, PR, Brasil.

- Bravo, E., Claeysen, J.R., 1996. “Simulação Central para Escoamento Incompressível em Variáveis Primitivas e Condições de Neumann para a Pressão”, **XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC**, Goiânia, Brasil.
- Brenam, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R., 1989. “**Numerical Solution of Initial–Value Problems in Differential–Algebraic Equations**”, Elsevier Science Publishing Co., New York.
- Burggraf, O.R., 1966. “Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows”, **Journal Fluid Mechanics**, vol. 24, part. 1, pp. 113–151.
- Campbell, S.L., Meyer, C.D. Jr., 1979 “**Generalized Inverses of Linear Transformations**”, Pitman Publishing Co. Ltd.
- Campos Velho, H.F., 1992. “**Matriz Não–Modal em Integração e Inicialização num Modelo Barotrópico e um Estudo Numérico da Dispersão Vertical Turbulenta**”, Tese de Doutorado, PROMEC–UFRGS, Porto Alegre, Brasil.
- Castro, A., Bravo, E., 1996. “Upwind Simulation of an Incompressible Flow with Natural Pressure Boundary Condition on a Staggered Grid”, **SIAM Annual Meeting**, Kansas City, USA.
- Casulli, V., Greenspan, D., 1984. “Pressure Method for the Numerical Solution of Transient, Compressible Fluid Flows”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, New York, vol. 4, pp. 1001-1012.
- Casulli, V., 1987. “Eulerian–Lagrangian Methods for Hyperbolic and Convection Dominated Parabolic Problems”, **Computational Methods for Non-Linear Problems**, C. Taylor, D.R.J. Owen and E. Hinton (Pineridge Press, Swansea), pp. 239–269.

- Casulli, V., 1988. "Eulerian–Lagrangian Methods for the Navier–Stokes Equations at High Reynolds Number". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, New York, vol.8, pp. 1349–1360.
- Chakraborty, S., Sahai, Y., 1991. "Effect of varying ladle stream temperature on the melt flow and heat transfer in continuous casting tundishes", **ISIJ International**, vol. 31, pp. 960–967.
- Claeyssen, J.R., Campos Velho, H.F., 1994. "Initialization using Non-Modal Matrix for a Limited Area Model", **Boletim SBMAC**, vol.4, No.2.
- Datta, B.N., 1995. "**Numerical Linear Algebra and Applications**", Brooks/Cole Publishing Company, USA.
- Deng, G.B., Piquet, J., Queutey, P., Visonneau, M., 1996. "Navier–Stokes Equations for Incompressible Flows: Finite–Difference and Finite–Volume Methods", **Handbook of Computational Fluid Mechanics**, Roger Peyret, Academic Press, pp. 25–98.
- Ferziger, J.H., Perić, M., 1996. "**Computational Methods for Fluid Dynamics**", Springer–Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T. , 1982. "High–Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method", **Journal of Computational Physics**, vol. 48, pp. 387–411.
- Ghia, K.N., Hankey, W.L., Hodge, J.K., 1977. "Study of Incompressible Navier–Stokes Equations in Primitive Variables Using Implicit Numerical Technique" **AIAA** Paper No. 77–648 .

- Ghia, K.N., Shin, C.T., Ghia, U., 1979. "Use of Spline Approximations for Higher-Order Accurate Solutions of Navier-Stokes Equations in Primitive Variables", **AIAA Paper No. 79-1467**.
- Greenspan, D., Casulli, V., 1988. "**Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science, and Engineering**", Addison-Wesley, New York.
- Gresho, P.M., Sani, R.L., 1987. "On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, New York, vol.7, pp. 1111-1145.
- Han, H., Bao, W., 1996. "An Artificial Boundary Condition for Two-Dimensional Incompressible Viscous Flows Using the Method of Lines" **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 22, pp. 483-493.
- Harlow, F.H., Welsh, J.E., 1965. "Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", **Phys. Fluids**, vol. 8, pp. 2182-2189.
- Henshaw, W.D., Kreiss, H., Reyna, L.G., 1995. "Estimates of the Local Minimum Scala for the Incompressible Navier-Stokes Equations", **Numer. Funct. Anal. and Optimiz.**, 16(3 & 4), pp. 315-344.
- Heywood, J., 1980. "The Navier - Stokes Equations: On the existence, regularity, and decay of solutions", **Indiana University Mathematics Journal**, vol. 29, pp. 639-681.
- Heywood, J.G., Rannacher, R., 1982. "Finite Element Approximation of the non-stationary Navier-Stokes problem. I. Regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization", **SIAM J. Numer. Anal.**, vol. 19, pp. 275-311.

- Heywood, J., Rannacher, R., Turek, S., 1996. "Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier–Stokes Equations", **International journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 22, pp. 325–352.
- Huang, H., Seymour, B.R., 1996. "The No–Slip Boundary Condition in Finite Difference Approximations", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 22, pp. 713–729.
- Kawaguti, M., 1961. "Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations for the Flow in a Two–Dimensional Cavity", **Journal of the Physical Society of Japan**, vol. 16, pp. 2307–2315.
- Koseff, J.R., Street, R.L., 1984. "Visualisation Studies of a Shear Driven Three–Dimensional Recirculating Flow", **ASME J. Fluids Eng.**, **106**, 21–29, pp. 385–398.
- Liao, S., Zhu, J., 1996. "A Short Note on High–Order Stream Function–Vorticity Formulations of 2D Steady State Navier–Stokes Equations", **International journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 22, pp. 1–9.
- Liskovets, O.A., 1965. "Methods of lines", **J. Diff. Eqts.**, vol. 1, pp. 1308–1317.
- Ma, HONG, 1993. "A Spectral Element Basin Model for the Shallow Water Equations". **Journal of Computational Physics**, vol.109, pp. 133–149.
- Mansell, G., Walter, J., Marschal, E., 1994. "Liquid–Liquid Driven Cavity Flow", **Journal of Computational Physics**, vol. 110, pp. 274–284.

- Marx, Y.P., 1994. "Time Integration Schemes for the Unsteady Incompressible Navier–Stokes Equations", **Journal of Computational Physics**, 112, pp. 182–209.
- Mcgrattan, K.B., Rehn, R.G., Baum, H.R., 1994. "Fire–Driven Flows in Enclosures", **Journal of Computational Physics**, Vol. 110, pp. 285–291.
- Nigro, N., Storti, M., Idelsohn, S., 1992. "Resolución Numérica de las Ecuaciones de Navier–Stokes", In: **Anais XIII CILAMCE Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**, Porto Alegre, RS, Brasil, vol. 2, pp. 288–297.
- Nallasamy, M., Prasad, K.K., 1977. "On Cavity Flow at High Reynolds Numbers", **J. Fluid Mech.**, Vol. 79, part. 2, pp. 391–414.
- Pan, F., Acrivos, A., 1967. "Steady Flows in Rectangular Cavities", **J. Fluid Mech.**, vol. 28, part. 4, pp. 643–655.
- Park, H.M., Cho, D.H., 1996. "Low dimensional modelling of flow reactors" **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 19, pp. 3311–3323.
- Rao, C.R., Mitra, S.K., 1971. "**Generalized Inverse of Matrices and Its Applications**", John Wiley, New York.
- Ribbens, C.J., Watson, L.T., 1994. "Steady Viscous Flow in a Triangular Cavity", **Journal of Computational Physics**, vol. 112, pp. 173–181.
- Roache, P.J., 1982. "**Computational Fluid Dynamic**", Hermosa Pub., Albuquerque, N.M.

- Rubin, S.G., Khosla, P.K., 1977. “Polynomial Interpolation Methods for Viscous Flow Calculations” **Journal of Computational Physics**, Vol. 24, No. 3, pp. 217–244.
- Schiesser, W.E., 1991. “**The Numerical Method of Lines**”, Academic Press, Inc., San Diego, USA.
- Schreiber, R., Keller, H.B., 1983. “Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques”, **Journal of Computational Physics**, vol. 49, pp. 310–333.
- Shen, J., 1991. “Hopf Bifurcation of the Unsteady Regularized Driven Cavity Flow”, **Journal of Computational Physics**, Vol. 95, pp. 228–245.
- Shopov, P.J., Iordanov, Y.I., 1994. “Numerical Solution of Stokes Equations with Pressure and Filtration Boundary Conditions”, **Journal of Computational Physics**, Vol.112, pp. 12-23.
- Sivaloganathan S., Shaw, G.J., 1988. “A Multigrid Method for Recirculating Flows”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 8, pp. 417–440.
- Smith, R.E., Kidd, A., 1975. “Comparative Study of Two Numerical Techniques for the Solution of Viscous Flow in a Driven Cavity” **NASA SP-378**, pp. 61–82.
- Temam, R., 1985. “**Navier-Stokes Equations**”, 3rd. Edn, North-Holland, Amsterdam and New York.

Apêndice A-1 MÉTODO DE DIFERENÇA CENTRAL – MATRIZES

Neste apêndice são apresentadas as submatrizes de cada uma das matrizes do sistema (4.2), as quais foram obtidas usando o método de *diferença central* ao discretizar o sistema (4.1).

A-1.1 Submatrizes das matrizes \mathbb{L} e \mathbb{L}^F

As matrizes \mathbb{L} e \mathbb{L}^F (seção 4.2) são dadas por

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}^F = \begin{bmatrix} L_{11}^F & 0 & 0 \\ 0 & L_{22}^F & 0 \\ L_{31}^F & L_{32}^F & 0 \end{bmatrix}.$$

respectivamente, onde

$$L_{11} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \gamma_1 & \beta_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_1 \\ & & & \gamma_1 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(\Delta y)^2} & & & & \\ & \frac{\nu}{(\Delta y)^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\nu}{(\Delta y)^2} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \delta & \frac{\nu}{(\Delta x^2)} & & & \\ \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & & \\ & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \\ & & & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad \text{com } \delta = -\left(\frac{2\nu}{(\Delta x)^2} + \frac{2\nu}{(\Delta y)^2}\right),$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \gamma_2 & \beta_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_2 \\ & & & \gamma_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(\Delta y)^2} & & & & \\ & \frac{\nu}{(\Delta y)^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\nu}{(\Delta y)^2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} \delta & \frac{\nu}{(\Delta x^2)} & & & \\ \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & & \\ & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \\ & & & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & \delta \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$L_{11}^F = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \zeta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \zeta_1 & \\ & & & & \zeta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad L_{22}^F = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \zeta_2 & & & \\ & & \zeta_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \zeta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

com

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \end{bmatrix}_{(n-1) \times 2}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(\Delta x)^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{(\Delta x)^2} \end{bmatrix}_{n \times 2}.$$

A matriz L_{11} é de ordem $(m \times (n - 1)) \times (m \times (n - 1))$ enquanto que a matriz L_{22} é de ordem $((m - 1) \times n) \times ((m - 1) \times n)$. As matrizes fronteira L_{11}^F e L_{22}^F são de ordem $(m \times (n - 1)) \times (2(m + n - 1))$ e $(m - 1) \times n \times (2(m - 1 + n))$ respectivamente.

$$L_{31} = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & & & & \\ \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} \\ & & & & \frac{-1}{\Delta x} \end{bmatrix}_{n \times (n-1)},$$

$$L_{32} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta y} & & & & & \\ & \frac{1}{\Delta y} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{\Delta y} & & \\ -\frac{1}{\Delta y} & & & & & \\ & -\frac{1}{\Delta y} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & -\frac{1}{\Delta y} \end{bmatrix},$$

$$L_{31}^F = \begin{bmatrix} \underbrace{\quad}_{n-1} \zeta_3 & & & \\ & \zeta_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_3 \underbrace{\quad}_{n-1} \end{bmatrix} \text{ com } \zeta_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix}_{n \times 2},$$

$$L_{32}^F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta y} & & & & & \\ & \frac{-1}{\Delta y} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{-1}{\Delta y} & & \\ & & & & \frac{1}{\Delta y} & \\ & & & & & \frac{1}{\Delta y} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \frac{1}{\Delta y} \end{bmatrix}$$

As matrizes L_{31} e L_{32} são de ordem $(m \times n) \times (m \times (n - 1))$ e $(m \times n) \times ((m - 1) \times n)$ respectivamente, entretanto que as matrizes L_{31}^F e L_{32}^F são de ordem $(m \times n) \times (2(m + n - 1))$ e $(m \times n) \times (2(m - 1 + n))$ respectivamente. A matriz L_{32} tem um espaçamento vertical de n zeros entre cada diagonal e cada bloco na matriz L_{32}^F é de ordem n .

A-1.2 Submatrizes das matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$

As matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U})$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ (seção 4.2) são dadas por

$$\mathbb{N}(\mathbb{U}) = \begin{bmatrix} \text{diag}(u)A_1 + \text{diag}(Bv)C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(B^t u)A_2 + \text{diag}(v)C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \text{diag}(u)F_1 + \text{diag}(B^F v^F)F_2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(\mathcal{B}u^F)F_3 + \text{diag}(v)F_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente, onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ \frac{-1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & \\ & \frac{-1}{2\Delta x} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 0 & \frac{1}{2\Delta x} \\ & & & \frac{-1}{2\Delta x} & 0 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \frac{1}{2\Delta y} & & & \\ \vdots & & & \frac{1}{2\Delta y} & & \\ \vdots & & & & \frac{1}{2\Delta y} & \\ \frac{-1}{2\Delta y} & & & & & \frac{1}{2\Delta y} \\ & \frac{-1}{2\Delta y} & & & & \ddots \\ & & \frac{-1}{2\Delta y} & & & \frac{1}{2\Delta y} \\ & & & \frac{-1}{2\Delta y} & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \frac{-1}{2\Delta y} & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sigma_2 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ \frac{-1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & \\ & \frac{-1}{2\Delta x} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 0 & \frac{1}{2\Delta x} \\ & & & \frac{-1}{2\Delta x} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \frac{1}{2\Delta y} & & & & \\ \vdots & & & \frac{1}{2\Delta y} & & & \\ \vdots & & & & \frac{1}{2\Delta y} & & \\ \frac{-1}{2\Delta y} & & & & & \frac{1}{2\Delta y} & \\ & \frac{-1}{2\Delta y} & & & & \ddots & \\ & & \frac{-1}{2\Delta y} & & & & \frac{1}{2\Delta y} \\ & & & \frac{-1}{2\Delta y} & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \frac{-1}{2\Delta y} & \dots \end{bmatrix},$$

$$\text{diag}(u) = \begin{bmatrix} u_{3/2,1} & & & & & & \\ & u_{5/2,1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & u_{n-1/2,1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & u_{3/2,m} & \\ & & & & & & u_{5/2,m} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & u_{n-1/2,m} \end{bmatrix},$$

As matrizes A_1 , C_1 , $diag(u)$ e B são de ordem $(m \times (n - 1)) \times (m \times (n - 1))$ entretanto que as matrizes A_2 , C_2 e $diag(v)$ são de ordem $((m - 1) \times n) \times ((m - 1) \times n)$. As matrizes F_1 , F_2 e B^F são de ordem $(m \times (n - 1)) \times (2(m + n - 1))$ enquanto que as matrizes F_3 , F_4 e \mathcal{B} são de ordem $((m - 1) \times n) \times 2(m - 1 + n)$. Os blocos quadrados das matrizes F_2 e F_4 são de ordem $(n - 1)$ e (n) respectivamente. O espaçamento horizontal e vertical da matriz C_1 é de $(n - 1)$ zeros e da matriz C_2 de n zeros

A-1.3 Submatrizes das matrizes \mathbb{P} e $\mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$

As matrizes \mathbb{P} e $\mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ (seção 4.2) são dadas por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{13} \\ 0 & 0 & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{13}^F & p^F \\ 0 & 0 & P_{23}^F & p^F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente, onde

$$P_{13} = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & & & & \\ & \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e

$$P_{23} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta y} & \dots & \dots & \frac{1}{\Delta y} & & & \\ & \frac{-1}{\Delta y} & & & \frac{1}{\Delta y} & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & \frac{-1}{\Delta y} & & & \frac{1}{\Delta y} \\ & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

onde o espaçamento entre as diagonais na matriz P_{23} é de $(n - 1)$ zeros.

$$P_1 = \begin{bmatrix} \underbrace{\quad}_{n-1} \alpha_1 & & & & & & \\ & \alpha_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_1 & & & \\ & & & & \underbrace{\quad}_{n-1} & & \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \underbrace{\quad}_{n-1} (1/\Delta x)\alpha_1 & & & & & & \\ & (1/\Delta x)\alpha_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & (1/\Delta x)\alpha_1 & & & \\ & & & & \underbrace{\quad}_{n-1} & & \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & & & & & & \\ & \alpha_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_2 & & & \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/\Delta x \end{bmatrix}_{n \times (n-1)}$$

$$P_4 = 1/4 \begin{bmatrix} \alpha_3 & & & & & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \alpha_3 & \alpha_3 & \\ & & & & \alpha_3 & \\ & & & & & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} \overbrace{\phantom{\frac{-1}{\Delta y} \alpha_1}}^{n-1} & \frac{-1}{\Delta y} \alpha_1 & \frac{1}{\Delta y} \alpha_1 & & & & \\ & \frac{-1}{2\Delta y} \alpha_1 & & \frac{1}{2\Delta y} \alpha_1 & & & \\ & & \frac{-1}{2\Delta y} \alpha_1 & & \frac{1}{2\Delta y} \alpha_1 & & \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \frac{-1}{2\Delta y} \alpha_1 & & \frac{1}{2\Delta y} \alpha_1 \\ & & & & & \frac{-1}{\Delta y} \alpha_1 & \frac{1}{\Delta y} \alpha_1 & \underbrace{\phantom{\frac{-1}{\Delta y} \alpha_1}}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} \alpha_4 & \frac{1}{4} \alpha_1 & & & & \\ & \frac{1}{4} \alpha_1 & \frac{1}{4} \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{4} \alpha_1 & \frac{1}{4} \alpha_1 & \\ & & & & \frac{1}{4} \alpha_1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$P_7 = \frac{\nu}{\Delta x \Delta y} \begin{bmatrix} \alpha_3 & & & & & \\ -\alpha_3 & \alpha_3 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\alpha_3 & \alpha_3 & \\ & & & & -\alpha_3 & \end{bmatrix}$$

$$P_2^1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_6 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & & & & \\ \frac{-1}{2\Delta x} & & \frac{1}{2\Delta x} & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & \frac{-1}{2\Delta x} & & \frac{1}{2\Delta x} & \\ & & & \frac{-1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} & \\ & & & & & \frac{1}{\Delta x} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$P_3^1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & & \\ & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \end{bmatrix}_{n \times (n+1)}$$

$$P_4^1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$P_5^1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \frac{1}{\Delta y} \alpha_8 \end{bmatrix} \quad P_6^1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \frac{1}{\Delta y} \alpha_8 \end{bmatrix}$$

$$P_7^1 = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \alpha_9 \end{array} \right] \text{ com } \alpha_9 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{-2\nu}{\Delta x^2} & \frac{\nu}{\Delta x^2} & \\ & \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{-2\nu}{\Delta x^2} & \frac{\nu}{\Delta x^2} \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\nu}{\Delta x^2} & \frac{-2\nu}{\Delta x^2} & \frac{\nu}{\Delta x^2} \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(n-1) \times n}$$

$$P_8^1 = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \alpha_5^1 \end{array} \right] \text{ com } \alpha_5^1 = \frac{\nu}{\Delta x \Delta y} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{array} \right]_{n \times (n-1)}$$

$$P_9^1 = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \alpha_7^1 \end{array} \right] \text{ com } \alpha_7^1 = \frac{\nu}{\Delta x \Delta y} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & -1 \\ 0 & 1 & & & 1 & -1 \end{array} \right]_{n \times (n+1)}$$

As matrizes P_{13} e P_{23} são de ordem $(m \times n) \times (m \times n)$. As matrizes P_1 , P_2 , P_5 , P_6 , P_8 , P_9 , P_2^1 , P_3^1 , P_4^1 , P_5^1 , P_7^1 e P_9^1 são de ordem $(m \times n) \times (2(m + n - 1))$ enquanto que as matrizes P_3 , P_1^1 e P_8^1 são de ordem $(m \times n) \times (m \times (n - 1))$ e as matrizes P_4 , P_7 e P_6^1 são de ordem $(m \times n) \times ((m - 1) \times n)$.

Apêndice A-2 MÉTODO DE DIFERENÇA UPWIND – MATRIZES

Neste apêndice são apresentadas as submatrizes das matrizes $\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ e $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ do sistema (4.12), as quais foram obtidas usando o método de *diferença upwind* ao discretizar o sistema (4.1).

A-2.1 Submatrizes da matriz $\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$

A matriz $\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ é dada por (seção 4.3):

$$\mathbb{N}(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1(u) + \mathcal{B}_1(v, v^F) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2(u, u^F) + \mathcal{B}_2(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathcal{A}_1(u) = \begin{bmatrix} A1_1 & & & \\ & A1_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A1_m \end{bmatrix}_{[m \times (n-1)] \times [m \times (n-1)]}$$

com

$$A1_j = \begin{bmatrix} a1_{3/2,j} & a2_{3/2,j} & & & \\ a3_{5/2,j} & a1_{5/2,j} & a2_{5/2,j} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a3_{n-3/2,j} & a1_{n-3/2,j} & a2_{n-3/2,j} \\ & & & & & & a3_{n-1/2,j} & a1_{n-1/2,j} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

onde

$$a1_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta x} |u_{i+1/2,j}|$$

$$a2_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2\Delta x} (|u_{i+1/2,j}| - u_{i+1/2,j}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$a3_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2\Delta x} (|u_{i+1/2,j}| + u_{i+1/2,j}) .$$

$$\mathcal{B}_1(v, v^F) = \begin{bmatrix} B1_1 & B2_1 & & & \\ B3_2 & B1_2 & B2_2 & & \\ & B3_3 & B1_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B2_{m-1} \\ & & & B3_m & B1_m \end{bmatrix}_{[m \times (n-1)] \times [m \times (n-1)]}$$

com

$$B1_j = \begin{bmatrix} b1_{3/2,j} & & & \\ & b1_{5/2,j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b1_{n-1/2,j} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$B2_j = \begin{bmatrix} b2_{3/2,j} & & & \\ & b2_{5/2,j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b2_{n-1/2,j} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$B3_j = \begin{bmatrix} b3_{3/2,j} & & & \\ & b3_{5/2,j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b3_{n-1/2,j} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

onde

$$b1_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta y} |\bar{v}_{i+1/2,j}|$$

$$b2_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2\Delta y} (|\bar{v}_{i+1/2,j}| - \bar{v}_{i+1/2,j}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$b3_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2\Delta y} (|\bar{v}_{i+1/2,j}| + \bar{v}_{i+1/2,j}) .$$

$$\mathcal{A}_2(u, u^F) = \begin{bmatrix} A2_{3/2} & & & \\ & A2_{5/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A2_{m-1/2} \end{bmatrix}_{[(m-1) \times n] \times [(m-1) \times n]}$$

com

$$A2_{j+1/2} = \begin{bmatrix} a4_{1,j+1/2} & a5_{1,j+1/2} & & & \\ a6_{2,j+1/2} & a4_{2,j+1/2} & a5_{2,j+1/2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a6_{n-1,j+1/2} & a4_{n-1,j+1/2} & a5_{n-1,j+1/2} \\ & & & & a6_{n,j+1/2} & a4_{n,j+1/2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

para $j = 1, 2, \dots, m - 1$

onde

$$a4_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} |\bar{u}_{i,j+1/2}|$$

$$a5_{i,j+1/2} = -\frac{1}{2\Delta x} (|\bar{u}_{i,j+1/2}| - \bar{u}_{i,j+1/2}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$a6_{i,j+1/2} = -\frac{1}{2\Delta x} (|\bar{u}_{i,j+1/2}| + \bar{u}_{i,j+1/2}) .$$

$$\mathcal{B}_2(v) = \begin{bmatrix} B4_{3/2} & B5_{3/2} & & & \\ B6_{5/2} & B4_{5/2} & B5_{5/2} & & \\ & B6_{7/2} & B4_{7/2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B5_{m-3/2} \\ & & & B6_{m-1/2} & B4_{m-1/2} \end{bmatrix}_{[(m-1) \times n] \times [(m-1) \times n]}$$

com

$$B4_{j+1/2} = \begin{bmatrix} b4_{1,j+1/2} & & & & \\ & b4_{2,j+1/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b4_{n,j+1/2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B5_{j+1/2} = \begin{bmatrix} b5_{1,j+1/2} & & & & \\ & b5_{2,j+1/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b5_{n,j+1/2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B6_j = \begin{bmatrix} b6_{1,j+1/2} & & & & \\ & b6_{2,j+1/2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b6_{n,j+1/2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

para $j = 1, 2, \dots, m - 1$

onde

$$b4_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta y} |v_{i,j+1/2}|$$

$$b5_{i,j+1/2} = -\frac{1}{2\Delta y} (|v_{i,j+1/2}| - v_{i,j+1/2}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$b6_{i,j+1/2} = -\frac{1}{2\Delta y} (|v_{i,j+1/2}| + v_{i,j+1/2}) .$$

A-2.2 Submatrizes da matriz $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$

A matriz $\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F)$ é dada por (seção 4.3):

$$\mathbb{N}^F(\mathbb{U}, \mathbb{U}^F) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(u, v, v^F) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(u, u^F, v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathcal{F}_1(u, v, v^F) = \begin{bmatrix} B3_1 & F1_1 & & & \\ & & F1_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & F1_m & B2_m \end{bmatrix}_{[m \times (n-1)] \times [2(m+n-1)]}$$

com

$$F1_j = \begin{bmatrix} a3_{3/2,j} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & a2_{n-1/2,j} \end{bmatrix}_{(n-1) \times 2}$$

para $j = 1, 2, \dots, m$

$$\mathcal{F}_2(u, u^F, v) = \begin{bmatrix} B6_{3/2} & F2_{3/2} & & & & \\ & & F2_{5/2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & F2_{m-1/2} & B5_{m-1/2} \end{bmatrix}_{[(m-1) \times n] \times [2(m-1+n)]}$$

com

$$F2_{j+1/2} = \begin{bmatrix} a6_{1,j+1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & a5_{n,j+1/2} \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

para $j = 1, 2, \dots, m - 1$