

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO QUE DESCREVE O
DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE
CONVECTIVA: UMA APROXIMAÇÃO ISOTRÓPICA**

por

Carina da Silva Corrêa

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2007

**UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO QUE DESCREVE O
DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE
CONVECTIVA: UMA APROXIMAÇÃO ISOTRÓPICA**

por

Carina da Silva Corrêa

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Antônio Gledson Goulart de Oliveira

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Otávio da Costa Acevedo (UFSM/RS)

Prof^a. Dr^a. Débora Regina Roberti (UFSM/RS)

Prof^a. Dr^a. Cynthia Segatto (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Jonas da Costa Carvalho (UFPEL/RS)

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de Julho de 2007

À Deus, à meus pais e à meu noivo.

AGRADECIMENTOS

- À Deus por ter iluminado meu caminho durante a realização deste trabalho;
- Ao Prof. Dr. Marco Túlio de Vilhena pela orientação;
- Ao Prof. Dr. Antônio G. Goulart pela amizade, pelo conhecimento transmitido, assim como pela sua co-orientação durante este período;
- Ao Prof. Dr. Jorge Rodolfo Zabadal, pela amizade e pelas sugestões para a realização deste trabalho;
- Aos meus pais José e Dejanira que sempre me deram o apoio necessário para que pudesse estudar;
- Agradeço especialmente ao meu noivo Rodrigo Stölben Machado, pelo amor, carinho, dedicação e principalmente pelo apoio e ajuda na realização desse trabalho;
- À todos os meus amigos e familiares que sempre me apoiaram;
- A CAPES pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

20 de Julho de 2007

RESUMO

UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO QUE DESCREVE O DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA: UMA APROXIMAÇÃO ISOTRÓPICA

Nessa dissertação apresenta-se o desenvolvimento de um modelo espectral para o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (**CLC**). A equação dinâmica para o espectro de energia é obtida a partir das equações de Navier-Stokes [Hinze, 1975], na qual o termo de produção de energia por efeito mecânico foi desprezado. Durante o período de transição dia-noite foi considerado que o fluxo de calor da superfície é interrompido instantaneamente, o que permite desconsiderar o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico.

Para parametrizar o termo de transferência de energia cinética, para um fluxo turbulento e isotrópico, foi utilizado o *modelo de Heisenberg*, que descreve o decaimento da turbulência como um processo em que os turbilhões de um certo tamanho transferem energia por efeito de uma viscosidade cinemática turbulenta, aos turbilhões menores através de interações em cascata.

Para resolver a equação diferencial não linear, que descreve o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (**CLC**), fixa-se o parâmetro "z" e considera-se que o espectro de energia pode ser dividido como um produto de duas funções. Neste trabalho, foi utilizado o modelo de Kristensen [1989] para obter o espectro inicial tridimensional. Foi calculada a componente vertical do coeficiente de difusão, considerando o espectro vertical, que foi obtido usando-se uma função peso, a qual informa a contribuição de cada componente na formação do espectro tridimensional. Finalmente, os resultados obtidos no trabalho foram confrontados com os dados de LES – Large Eddy Simulation [Nieuwstadt e Brost, 1986] existentes na literatura.

ABSTRACT

AN ANALYTICAL SOLUTION FOR THE EQUATION DESCRIBING THE DECAY OF TURBULENCE IN THE CONVECTIVE BOUNDARY LAYER: AN ISOTROPIC APPROACH

This work presents the development of a spectral model for the decay of turbulence in the Convective Boundary Layer (**CBL**). The dynamic equation for the energy spectrum is obtained from the Navier-Stokes equations [Hinze, 1975], in which the term of energy production by mechanical effect was disregarded. During the period of transition from day to night it was considered that the flow of heat from the surface is instantaneously interrupted, which allowed the dismissal of the term of production or loss of energy instantaneously.

For the purpose of parameters for the kinetic energy term of transference in a turbulent isotropic flow, the *Heisenberg model* was used, which describes the decay of turbulence as a process in which certain sized eddy transfer energy to smaller eddy by means of turbulent kinetic viscosity through cascading interactions.

For the purpose of solving the non-linear differential equation describing the decay of turbulence in the Convective Boundary Layer (**CBL**), we established the "*z*" parameter and considered that the energy spectrum can be divided as a product of two functions. This paper uses the Kristensen model [1989] for obtaining the initial tridimensional spectrum. The vertical component of the diffusion coefficient was calculated considering the vertical spectrum, which in turn was obtained by means of a weight function, which informs the contribution of each component in the whole of the tridimensional spectrum. Finally, the results obtained were confronted with the LES – Large Eddy Simulation [Nieuwstadt e Brost, 1986] existing in literature, for validation.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	CAMADA LIMITE PLANETÁRIA (CLP).....	4
2.2	CAMADA LIMITE CONVECTIVA (CLC)	6
2.2.1	A Estrutura da Camada Limite Convectiva.....	6
2.2.2	Camada Limite Superficial (CLS)	6
2.2.3	Camada Limite de Mistura (CLM)	7
2.2.4	Camada Interfacial ou Zona de Entrenhamento (ZE)	8
2.2.5	A Estrutura da Turbulência na Camada Limite Convectiva (CLC) ...	8
2.3	O ESPECTRO DE ENERGIA PARA UMA TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA	8
2.4	MODELO DE HEISENBERG PARA O TERMO DE TRANSFERÊNCIA INERCIAL DE ENERGIA	10
2.5	DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA E O MODELO DE LES – LARGE EDDY SIMULATION	12
2.5.1	Decaimento da Turbulência	12
2.5.2	Modelo de LES – Large Eddy Simulation	12
2.6	MODELO DE KRISTENSEN PARA O ESPECTRO DE ENERGIA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA (CLC)	13
2.6.1	A Função Espectro de Energia	13
2.6.2	Espectros Unidimensionais.....	19
3	EMPREGO DA TEORIA DE HEISENBERG NA ANÁLISE DO DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA	

(CLC).....	23
3.1 EQUAÇÃO DINÂMICA PARA O ESPECTRO DE ENERGIA	23
4 CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA, DAS COMPONENTES UNIDIMENSIONAIS DO ESPECTRO E DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO	31
4.1 CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA	31
4.2 CÁLCULO DAS COMPONENTES UNIDIMENSIONAIS DO ESPECTRO ..	33
4.3 COMPARAÇÃO DAS VARIÂNCIAS DA VELOCIDADE COM O RESULTADO DE LES	34
4.4 COEFICIENTE DE DIFUSÃO	37
5 CONCLUSÃO	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43
APÊNDICES	46
I EQUAÇÃO DINÂMICA PARA A FUNÇÃO ESPECTRO DE ENERGIA EM UM FLUXO TURBULENTO HOMOGÊNEO	46

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

$a(k; z)$:	função arbitrária.
$b(t; z)$:	função arbitrária.
c :	concentração integrada ao longo do eixo y .
c_o :	constante de integração.
CLP :	Camada Limite Planetária.
CLC :	Camada Limite Convectiva.
CLS :	Camada Limite Superficial.
CLE :	Camada Limite Estável.
CLR :	Camada Limite Residual.
CLM :	Camada Limite de Mistura.
C_H :	constante de Heisenberg.
$E(k, t; z)$:	Espectro de Energia 3-D.
g :	aceleração da gravidade $[m/s^2]$.
$H(k, t; z)$:	termo de produção ou perda de energia por efeito térmico.
k :	número de onda $[1/m]$.
K :	coeficiente de difusão $[m^2/s]$.
K_z :	coeficiente de difusão vertical na direção z .
L :	coeficiente de Monin-Obukov $[m]$.
$M(k, t; z)$:	termo de produção de energia por efeito mecânico.
t :	tempo $[s]$.
t_* :	escala de tempo adimensional $[s]$.
u_* :	velocidade de fricção na superfície $[m/s]$.
u :	componente da velocidade turbulenta longitudinal na direção x .
$U(z)$:	componente longitudinal da velocidade média do vento.
v :	componente da velocidade turbulenta transversal na direção y .
$W(z)$:	componente vertical da velocidade média do vento.
$T(k, t; z)$:	termo de transferência de energia.

w :	componente da velocidade turbulenta vertical na direção z .
w_* :	escala de velocidade convectiva [m/s].
$(\overline{w\theta})_o$:	fluxo de energia na forma de calor na superfície.
z :	altura a partir da superfície [m].
z_i :	altura da Camada Limite Convectiva [m].
ZE :	Zona de Entranhamento.

1. Caracteres Gregos

β_i :	razão das escalas de tempo Lagrangeana e Euleriana.
κ :	constante de Von Kármán.
Θ :	temperatura potencial média.
ν :	coeficiente de viscosidade molecular.
ν_T :	coeficiente de viscosidade cinemático parametrizado por Heisenberg.
λ :	constante qualquer.
σ_i :	desvio padrão Euleriano da velocidade do vento turbulento.
σ_i^2 :	variância da velocidade.

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Forma do Espectro de Energia tridimensional $E(k, t; z)$ em função do número de onda k para uma turbulência bem desenvolvida. Extraído do livro <i>Turbulence (Hinze, 1975)</i>	9
3.1	$T(k, 0; z)$ calculado a partir da equação (3.3) com espectro $E_o(k; z)$ dado pela equação (3.24) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).	29
3.2	Espectro calculado a partir da equação (3.23) com espectro $E(k, 0; z)$ dado pela componente isotrópica da equação (3.24) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).	30
4.1	Decaimento da Energia Cinética na CLC (linha cheia), determinado a partir da equação (4.1) com espectro tridimensional $E(k, t; z)$ dado pela equação (3.23) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).	32
4.2	Evolução no tempo da componente longitudinal (u) da variância da velocidade.	35
4.3	Evolução no tempo da componente transversal (v) da variância da velocidade.	36
4.4	Evolução no tempo da componente vertical (w) da variância da velocidade.	37
4.5	Componente Vertical do Coeficiente de Difusão (K_z) durante o decaimento da turbulência convectiva (linha contínua) calculado a partir da equação (4.8) considerando a variância vertical dada pela equação (4.6) com o espectro unidimensional dado pela equação (3.26).	39

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O rápido crescimento industrial e tecnológico nas últimas décadas tem provocado um aumento nos níveis de poluição e, conseqüentemente, os danos causados por ela ao meio ambiente. No estudo de dispersão de poluentes, é necessário um conhecimento sobre a Camada Limite Planetária (**CLP**), região mais baixa da troposfera, onde se concentra a poluição. Embora existam muitos trabalhos sobre a Camada Limite Planetária (**CLP**), não existe um modelo que descreva completamente sua estrutura física.

Na literatura existem grandes números de trabalhos que descrevem a estrutura da **CLP** durante o dia – Camada Limite Convectiva (**CLC**) e durante a noite – Camada Limite Estável (**CLE**), porém não são muitos os trabalhos que descrevem a transição dia-noite (decaimento). Este período não só é importante do ponto de vista teórico mas também é fundamental na descrição da dispersão de contaminantes na atmosfera.

No presente trabalho obtém-se um modelo para a descrição do decaimento da energia cinética turbulenta em uma Camada Limite Convectiva (**CLC**), a partir de um modelo de fechamento de dois pontos ou modelo espectral que gera informações mais detalhadas sobre a micro estrutura da turbulência, possibilitando assim, obter uma parametrização dos termos desconhecidos na equação de balanço de energia. Este estudo é realizado durante o decaimento da turbulência convectiva na qual existem poucos dados experimentais, apesar de ser de extrema importância, pois ocorre na região da atmosfera mais diretamente influenciada pela presença da superfície. Apesar dessa importância existem poucos trabalhos na literatura que descrevem este período [Nieuwstadt e Brost, 1986; Degrazia et al., 2003; Goulart et al., 2003].

O objetivo desta dissertação é descrever o processo do decaimento da turbulência na **CLC** e calcular os coeficientes de difusão unidimensionais durante a transição dia-noite,

para que os modelos de dispersão possam usá-los no cálculo do campo de concentração de contaminantes durante este período de transição no caso de um escoamento onde se pode desprezar os efeitos mecânicos de cisalhamento do vento e da convecção térmica. O decaimento da turbulência é descrito com base no **Modelo de Heisenberg**, que considera o efeito do termo inercial na equação dinâmica para a função densidade espectral de energia e que descreve a transferência de energia em cascata dos turbilhões maiores para os menores, equivalente, ao efeito de uma viscosidade com origem na turbulência. Esta viscosidade, chamada de viscosidade cinemática turbulenta, incorpora o efeito dos turbilhões de todas as escalas menores do que certa escala sobre os turbilhões desta escala. Para validar os resultados obtidos utilizou-se os dados existentes na literatura do modelo de simulação direta dos grandes turbilhões denominado LES – Large Eddy Simulation [Nieuwstadt e Brost, 1986], no qual os turbilhões que contêm a principal energia cinética (grandes turbilhões) são computados diretamente e o efeito de pequena escala, que tem características mais gerais, são modelados e também com os dados do modelo de Pao [1965], para um fluxo turbulento isotrópico.

Esta dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos e está organizada da seguinte forma: no Capítulo dois apresenta-se uma revisão bibliográfica que consiste na descrição sobre: Camada Limite Planetária (**CLP**), Camada Limite Convectiva (**CLC**), o Espectro de Energia para uma Turbulência bem Desenvolvida, o Modelo de Heisenberg, o Decaimento da Turbulência, o Modelo de LES – Large Eddy Simulation e a apresentação do Modelo de Kristensen [1989], no qual é obtido o espectro inicial tridimensional homogêneo estacionário a partir de suas componentes unidimensionais. No Capítulo três apresenta-se a Equação Dinâmica para a Função Espectro de Energia na sua forma completa [Hinze, 1975], válida para uma turbulência não homogênea e não isotrópica, cuja dedução apresenta-se no Apêndice I e depois a equação numa forma reduzida, válida para uma turbulência homogênea e isotrópica. Após apresenta-se o desenvolvimento de como se obtém o espectro de energia tridimensional durante o decaimento da turbulência na **CLC** utilizando a parametrização de Heisenberg para o termo de transferência inercial de energia e o modelo de Kristensen et al. [1989] como condição inicial do espectro tridimensional com a componente inicial do espectro unidimensional dada por Degrazia e Anfossi [1998]. No Capítulo quatro faz-se uma análise do decaimento da Energia Cinética em um fluxo turbulento homogêneo e

isotrópico. Os resultados obtidos são confrontados com os dados de LES – Large Eddy Simulation [Nieuwstadt e Brost, 1986]. Em seguida, faz-se uma comparação das Variâncias unidimensionais e do Coeficiente de Difusão Vertical obtidos a partir do modelo proposto com os dados de LES [Nieuwstadt e Brost, 1986]. Finalmente no Capítulo cinco apresenta-se as conclusões.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CAMADA LIMITE PLANETÁRIA (CLP)

A *troposfera* é a região da atmosfera que vai desde o solo até uma altitude aproximadamente de 11 *km*. Esta região está dividida em duas partes: a **Camada Limite Planetária (CLP)** que é a região desde a superfície até aproximadamente 3 *km* e o restante da troposfera que é denominada **Atmosfera Livre** [Stull, 1988].

A **CLP** é definida por [Stull, 1988; Sorbjan, 1989], como a região da atmosfera que é influenciada diretamente pela superfície da terra e na qual se manifestam os efeitos da superfície em escalas de tempo menores do que o período diário e movimentos turbulentos mantêm fluxos significativos de momentum, energia e matéria. Esses efeitos são, basicamente, dinâmicos e térmicos.

Os efeitos dinâmicos vêm do atrito do vento com a superfície nos níveis mais baixos, causando uma grande variação de velocidade ao longo da vertical nos primeiros metros medidos a partir da superfície. Os efeitos térmicos vêm da troca de energia na forma de calor entre a superfície e a atmosfera. O balanço entre esses dois efeitos, as características da superfície terrestre local e a época do ano determinam a espessura da Camada Limite Planetária.

Nessa camada o transporte é dominado na horizontal pelo vento médio (advecção) e na vertical pela turbulência. A turbulência é constituída de vários turbilhões que se sobrepõem, cujos os tamanhos são variáveis (da ordem de 1 *mm* a 3000 *m* de diâmetro). A soma das contribuições de todos estes turbilhões constitui o espectro de energia turbulenta.

A **CLP** se subdivide, de acordo com os processos físicos que nela ocorrem (turbulência mecânica e/ou convectiva), em: **Camada Limite Convectiva (CLC)**, **Camada**

Limite Estável (CLE) e Camada Limite Residual (CLR).

- **Camada Limite Convectiva (CLC):** é a camada que começa a formar-se depois do nascer do sol. O aquecimento da superfície da terra forma massas de ar quente que se elevam modificando o topo da **CLP**. Essa estrutura convectiva dura o dia todo e cessa com o pôr do sol. A **CLC** pode ser considerada como uma estrutura de três camadas: **Camada Limite Superficial (CLS):** é a região da **CLP** que varia em torno de 10 a 200 m, e onde a variação vertical do fluxo turbulento, calor e momentum, é insignificante, variam menos 10% de sua magnitude. É nessa camada que a interação entre a atmosfera e a superfície terrestre é fortemente sentida e os fluxos de cinética, calor e umidade são independentemente da altura e do efeito *Coriolis*. **Camada Limite de Mistura (CLM):** esta camada compreende a maior parte da **CLC** e tem este nome devido a intensa mistura vertical que tende a conservar as variáveis como a temperatura potencial e a umidade aproximadamente constante com a altura. A velocidade do vento nesta região é aproximadamente constante. **Camada Interfacial ou Zona de Entrenhamento (ZE):** estende-se de aproximadamente $0,8z_i$ até $1,2z_i$ e pode ser muito espessa devido ao processo de entranhamento.
- **Camada Limite Estável (CLE):** comum à noite, pois ocorre quando a superfície terrestre se resfria. Esse resfriamento provoca um fluxo de calor negativo que extrai energia cinética dos grandes turbilhões permitindo somente que pequenos turbilhões sobrevivam. Portanto a turbulência na **CLE** é menos intensa que na **CLC**, e conseqüentemente, poluentes emitidos dentro da **CLE** se dispersam lentamente na vertical e mais rapidamente na horizontal (efeitos dos ventos). Desta forma a altura da **CLE** é aproximadamente um décimo da **CLC**. Esta camada é formada por pequenos turbilhões que agem localmente e os forçantes superficiais propagam-se lentamente ao longo da camada.
- **Camada Limite Residual (CLR):** é uma região acima da **CLE** cuja principal fonte de turbulência é mecânica.

Neste trabalho o modelo é aplicado **CLC**, pois os dados experimentais confrontados com o mesmo foram obtidos sob condições convectivas.

2.2 CAMADA LIMITE CONVECTIVA (CLC)

2.2.1 A Estrutura da Camada Limite Convectiva

A **CLC** é a camada que começa a formar-se depois do nascer do sol quando a irradiação solar começa a aquecer a superfície terrestre aquecendo a camada de ar adjacente (fluxo de calor positivo) iniciando, assim, a convecção térmica, e cessa com o pôr do sol quando o fluxo de calor torna-se negativo.

Define-se então **Camada Limite Convectiva (CLC)** como a região da baixa atmosfera que se estende do solo ($z = 0$) até a base de uma inversão térmica ($z = z_i$, onde z_i é altura da **CLC**, que geralmente varia de 1000 a 2000 m). É caracterizada por uma forte mistura vertical, gerada pelo fluxo de calor turbulento positivo, devido ao aquecimento solar da superfície.

Frequentemente, a turbulência na **CLC** está em equilíbrio local com os forçantes externos. Isto significa que o tempo de relaxação da turbulência associado aos grandes turbilhões é muito menor que a escala de tempo associada a mudanças externas, de modo que a estrutura da **CLC** não depende explicitamente do tempo [Driedonks e Tennekes, 1984].

Como a maioria das fontes poluidoras estão próximas da superfície, a concentração de poluentes tende a aumentar significativamente na **CLC** pois esses são transportados pelos turbilhões e pelas termas que durante o decorrer do dia vão alcançando alturas cada vez maiores.

A **CLC** pode ser considerada como uma estrutura de três camadas diferenciadas em função dos parâmetros predominantes (escalas de temperatura, de velocidade e de comprimento), considerados relevantes para a descrição da turbulência.

2.2.2 Camada Limite Superficial (CLS)

A *primeira* camada é denominada **Camada Limite Superficial (CLS)**, onde predomina a turbulência mecânica (cisalhamento do vento), e está restrita a alturas menores do que $z = |L|$, onde L é o comprimento de Monin-Obukhov (é a altura na qual a turbulência mecânica predomina na convectiva), expressa por:

$$L = -\frac{u_*^3}{\kappa \frac{g}{\Theta} (\overline{w\theta})_o} \quad (2.1)$$

na qual Θ é a temperatura potencial média, $\left(\overline{w\theta}\right)_o$ é o fluxo de energia na forma de calor na superfície, u_* é a velocidade de fricção na superfície, κ é a constante de Von Kármán e g é a aceleração da gravidade.

Quando $|L|$ apresentar valores típicos entre 10 e 100 m , de maneira que $z_i/|L| \geq 10$ [Panofsky e Dutton, 1984], tem-se uma **CLC** bem desenvolvida. A razão $z_i/|L|$ pode ser considerada um parâmetro de estabilidade, uma vez que expressa a importância da turbulência convectiva (fluxo de calor) em relação a turbulência mecânica (cisalhamento do vento). Na **CLS**, são observados grandes gradientes de temperatura e velocidade, e o fluxo de calor turbulento é aproximadamente constante.

2.2.3 Camada Limite de Mistura (CLM)

A *segunda* camada chamada de **Camada Limite de Mistura (CLM)** é assim denominada devido a intensa mistura vertical que tende a conservar as variáveis como a temperatura potencial e a umidade aproximadamente constante com a altura. A turbulência nesta região pode ser considerada quase homogênea e a velocidade do vento aproximadamente constante. A **CLM** compreende a região entre $|L| < z < z_i$, onde z_i é a altura da **CLC**. Nesta região predomina a turbulência convectiva.

Modelos numéricos [Deardorff, 1972], observações de campo [Kaimal e Wyngaard, 1976] e experimentos de laboratório [Willis e Deardorff, 1976], mostram que os parâmetros de escalas mais importantes na sua descrição são z_i e a escala de velocidade convectiva w_* , expressa por:

$$w_* = \left[\frac{g}{\Theta} \left(\overline{w\theta}\right)_o z_i \right]^{1/3} \quad (2.2)$$

As dimensões dos grandes turbilhões convectivos são expressas em função de z_i , e as velocidades turbulentas são proporcionais a w_* . Valores típicos de z_i e w_* são, respectivamente 1000 m à 2000 m e 2 m/s , [Weil e Brower, 1984].

A escala de tempo convectiva, z_i/w_* , é da ordem de 10 a 20 minutos em muitos casos. Este é um típico período de tempo para o ar circular entre a superfície e o topo da **CLM**. Então, mudanças no fluxo de calor superficial e outros forçantes superficiais podem se comunicar com o resto da **CLM** em um curto espaço de tempo (aproximadamente 15 minutos).

2.2.4 Camada Interfacial ou Zona de Entrenhamento (ZE)

A *terceira* camada chamada de **Camada Interfacial ou Zona de Entrenhamento (ZE)** localiza-se em regiões próximas ao topo, e é caracterizada por um fluxo de calor negativo. Acima dessa camada, tem-se a atmosfera livre.

2.2.5 A Estrutura da Turbulência na Camada Limite Convectiva (CLC)

Na **CLC** a intensa mistura vertical produzida pelo fluxo de calor turbulento provocado pelo aquecimento solar da superfície terrestre dá origem a uma estrutura de plumas térmicas — ar quente que se eleva até a base da inversão térmica, circundadas por ar mais frio que desce do topo das nuvens em direção ao solo. Em condições suficientemente estáveis, estas estruturas ocorrem simultaneamente e são aleatoriamente distribuídas apresentando assim longa vida funcional, com escalas de tempo da ordem de 15 minutos.

As observações na atmosfera indicam que 40% da área de uma **CLC** é ocupada por plumas térmicas (*updrafts* — ar subindo), enquanto que 60% é ocupada por ar mais frio que desce (*downdrafts* — ar descendo). Pela lei de conservação de massa, o ar quente subindo tem uma velocidade maior que o ar frio que desce. Modelos numéricos mostram que esta estrutura assimétrica da **CLC** é responsável por padrões de dispersão vertical que são distintos dos tradicionais padrões Gaussianos [Lamb, 1982]. Esta simetria na função densidade de probabilidade da velocidade vertical é apontada como o mecanismo responsável pelo rápido afundamento de contaminantes abandonados por altas chaminés na **CLC**.

A circulação convectiva, incluindo o (*downdraft*) e (*updraft*), tem escalas horizontais de $1.5 z_i$ [Cauchy e Palmer, 1979]. Velocidades verticais em termos podem alcançar 5 m/s ou mais, embora (*updraft*) de 1 a 2 m/s sejam mais comuns.

2.3 O ESPECTRO DE ENERGIA PARA UMA TURBULÊNCIA BEM DESENVOLVIDA

Como o campo turbulento é complexo, surge o efeito da não-linearidade do fenômeno que possui um intervalo de escalas de movimentos todas acopladas entre si, assim, necessita-se desenvolver uma parametrização que permita modelar este estado caracterizado por um enorme número de graus de liberdade. Portanto, uma parametrização significa

uma representação idealizada do fenômeno de transporte turbulento. Desse modo, quando parametrizam-se os processos de troca turbulenta, coloca-se nas equações que descrevem as leis de conservação (modelos físicos) as relações matemáticas aproximadas, que, no momento, são usadas para substituir os termos desconhecidos existentes no fenômeno natural.

A credibilidade de cada modelo depende em grande parte da maneira pela qual os parâmetros turbulentos são calculados e relacionados à compreensão da física na **CLP**. O ingrediente fundamental para a obtenção destes parâmetros turbulentos, que são formulados a partir de uma fenomenologia aplicada em uma turbulência bem desenvolvida, consiste na escolha de escalas típicas de velocidade e comprimento.

Portanto, observar o comportamento do espectro de energia turbulenta pode ajudar decisivamente na determinação destas escalas típicas. A forma geral do espectro de energia tridimensional (3-D) de uma turbulência bem desenvolvida é representado na **figura 2.1**, logo após, apresenta-se uma breve explicação de cada comprimento de onda (k) mencionado no gráfico abaixo.

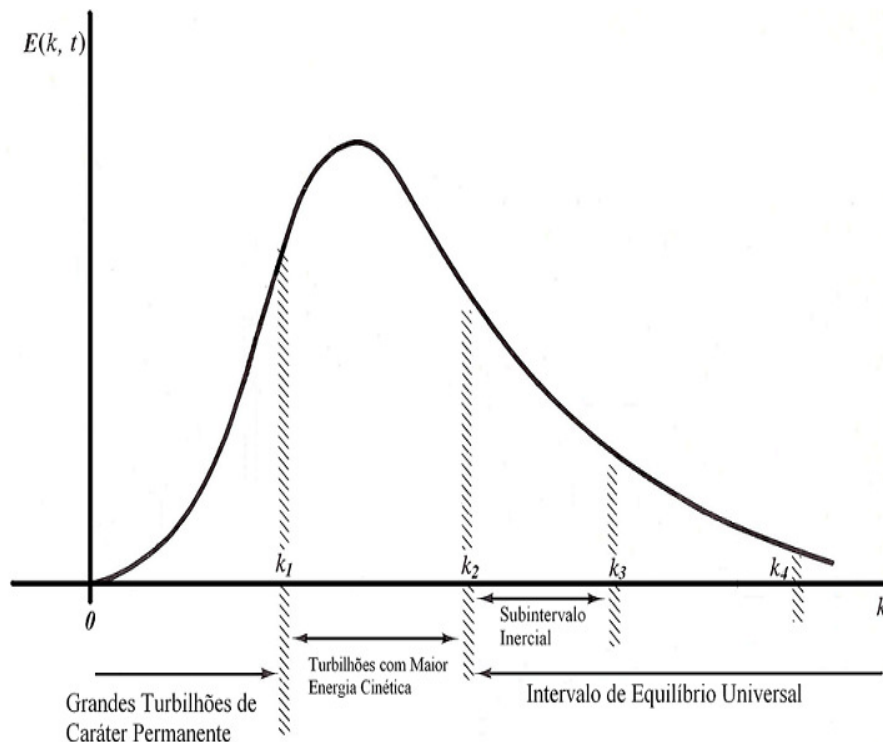


Figura 2.1 — Forma do Espectro de Energia tridimensional $E(k, t; z)$ em função do número de onda k para uma turbulência bem desenvolvida. Extraído do livro *Turbulence* (Hinze, 1975)

Grandes Turbilhões de Caráter Permanente: em termos de número de onda (k), o intervalo de 0 a k_1 representa os maiores turbilhões de carácter permanente que não possuem a maior parcela da energia cinética turbulenta total.

Turbilhões com Maior Energia Cinética: o intervalo de k_1 a k_2 corresponde aos turbilhões que possuem a maior parcela da energia cinética turbulenta total; influenciam fortemente o processo dispersivo e, como consequência, na parametrização dos fluxos turbulentos será importante obter uma escala de comprimento em termos das características destes turbilhões mais energéticos.

Subintervalo Inercial: o subintervalo inercial entre k_2 e k_3 corresponde aos turbilhões que não mudam a sua energia cinética, há apenas passagem de energia cinética dos maiores para os menores turbilhões, sem aumento ou diminuição da parcela da energia cinética turbulenta total a eles associada, porém a quantidade de energia transferida através dos turbilhões é grande. A dissipação é desprezível em confronto com o fluxo de energia cinética transferido por efeitos inerciais.

Intervalo de Equilíbrio Universal: é o intervalo entre k_2 e k_4 onde o carácter da turbulência, nestes números de onda, é inteiramente determinado pelo fluxo de energia cinética e pela razão de dissipação. O fluxo de energia cinética mais a dissipação é igual à energia cinética total fornecida para este intervalo. Pela forma do espectro, observa-se que a energia associada a este intervalo é proveniente dos turbilhões que possuem o maior conteúdo de energia cinética. Dessa forma, embora a dissipação seja provocada pela viscosidade, a ordem de magnitude da razão de dissipação pode ser determinada apenas por aquelas quantidades que caracterizam os turbilhões mais energéticos.

2.4 MODELO DE HEISENBERG PARA O TERMO DE TRANSFERÊNCIA INERCIAL DE ENERGIA

A partir do **Modelo de Heisenberg** obtém-se uma parametrização do termo $T(k, t; z)$ na equação dinâmica para a função espectro de energia que representa a transferência de energia dos maiores para os menores turbilhões, por efeito inercial. Um campo turbulento é constituído por turbilhões de diferentes tamanhos (números de onda) e o cisalhamento entre eles diminui a energia cinética dos grandes turbilhões e aumenta a energia

cinética dos pequenos turbilhões. Esse processo dinâmico em cascata cessa na micro escala de *Kolmogorov* onde, por causa da viscosidade molecular, a energia cinética turbulenta se transforma em energia interna da atmosfera. Essa transferência de energia em cascata é representada pelo termo $T(k, t; z)$.

A base do Modelo de Heisenberg [Hinze, 1975], é a hipótese de que os efeitos dos turbilhões com números de onda maiores do que certo número de onda k , que absorve a energia dos turbilhões com números de onda menores do que k , são equivalentes aos efeitos de uma viscosidade.

O termo de transferência inercial de energia $T(k, t; z)$ parametrizado por Heisenberg a partir da idéia da viscosidade molecular no subintervalo inercial – intervalo em que toda a energia que entra é transferida dos turbilhões maiores para os turbilhões menores em um processo de cascata, é expresso pela seguinte relação:

$$T(k, t; z) = -2\nu_T k^2 E(k, t; z) \quad (2.3)$$

Onde ν_T é o coeficiente de viscosidade cinemático que Heisenberg utilizou para substituir o coeficiente de viscosidade molecular (ν) e "z" é um parâmetro que indica em que altura está sendo analisado o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (CLC).

Este coeficiente foi parametrizado por Heisenberg a partir de análise dimensional dada pela equação (2.4):

$$\nu_T = C_H \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k', t; z)}{k'^3}} dk' \quad (2.4)$$

Onde C_H é a constante de *Heisenberg*.

Substituindo a equação (2.4) na equação (2.3) obtém-se a expressão para o termo de transferência inercial de energia $T(k, t; z)$ dada pela equação (2.5) :

$$T(k, t; z) = -2C_H k^2 E(k, t; z) \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k', t; z)}{k'^3}} dk' \quad (2.5)$$

2.5 DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA E O MODELO DE LES – LARGE EDDY SIMULATION

2.5.1 Decaimento da Turbulência

Segundo Hinze [1975], o decaimento da turbulência foi primeiramente estudado em laboratório onde a turbulência é gerada após o ar escoar através de uma grade. Esta turbulência é isotrópica (igual em todas as direções) e permanece isotrópica durante o decaimento. Alguns dos primeiros a fazer medidas de decaimento foram Batchelor e Townsend [Batchelor e Townsend, 1948], e daí por diante se sucederam muitas outras. O decaimento da turbulência atmosférica, entretanto, responde a forçantes naturais, sendo seu estudo mais complexo.

2.5.2 Modelo de LES – Large Eddy Simulation

Segundo Nieuwstadt e Brost [1986], "Na **CLP** o lapso de tempo para a troca de quantidades da turbulência é frequentemente menor que o tempo dos forçantes de produção e destruição de turbulência e conseqüentemente pode ser desconsiderado. Esta é a condição de quase-estacionaridade, e implica que a dinâmica da turbulência pode ser considerada como em equilíbrio local no tempo e no espaço". Esta quase-estacionaridade desaparece quando os forçantes externos tais como o fluxo de calor vertical da superfície ou o vento na **CLP** variam rapidamente. Isso ocorre no período do pôr-do-sol, quando o fluxo vertical de calor sensível varia rapidamente, e a **CLP** que era convectiva passa ser estável. No período em que ocorre o pôr-do-sol, o fluxo de calor cessa e conseqüentemente a turbulência decai, pois o equilíbrio entre os forçantes de produção e destruição de turbulência não existe mais. Então a dinâmica da turbulência deve ser levada em conta para uma boa descrição da evolução da **CLP** no período.

O decaimento da turbulência convectiva por meio de simulação numérica de grandes turbilhões (LES – Large Eddy Simulation) [Nieuwstadt e Brost, 1986] é inicialmente gerada através de um fluxo superficial de calor sensível positivo. Em um determinado momento ($t = 0$), esse fluxo é desligado. Isto mostra que a energia cinética turbulenta decai segundo a variável de escala adimensional, definida como $t_* = w_* t / h$ associada ao tempo, onde w_* representa a velocidade convectiva e h representa a altura da Camada Limite Convectiva (**CLC**) exatamente antes do pôr-do-sol. Sorjan [1997] também estudou o mesmo estágio por

meio de simulação numérica de grandes turbilhões considerando o fluxo de energia na forma de calor da superfície para a atmosfera como indo a zero gradualmente e concluiu que turbilhões associados a turbulência continuam a existir mesmo quando este fluxo se torna negativo, ou seja, quando a energia flui da atmosfera para superfície.

2.6 MODELO DE KRISTENSEN PARA O ESPECTRO DE ENERGIA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA (CLC)

Kristensen et al., 1989, desenvolveu um modelo para uma turbulência homogênea, que permite o cálculo do espectro tridimensional de energia, através das três componentes espectrais unidimensionais (u, v, w) da velocidade turbulenta. O modelo será mostrado nas subseções a seguir.

2.6.1 A Função Espectro de Energia

Seja um campo de velocidade turbulento homogêneo. Para este campo a média de *ensemble* da velocidade é constante no espaço e o tensor correlação é [Kristensen et al., 1989]:

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle (u_i(\vec{x}))(u_j(\vec{x} + \vec{r})) \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Assumindo que R_{ij} é simétrico:

$$R_{i,j}(-\vec{r}) = R_{j,i}(\vec{r}) = R_{i,j}(\vec{r}), \quad (2.7)$$

isto é, R_{ij} é invariante frente a reflexões e translações. Não é assumido que o campo de velocidade seja isotrópico, no sentido de que não tenha direção preferencial no espaço.

O tensor espectro é definido como:

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \oint R_{ij}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (2.8)$$

Considerando as condições citadas acima uma apropriada forma para o tensor espectral, definido pela identidade (2.8) é:

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \sum_{\ell=1}^3 A_{\ell}(k) \left\{ \delta_{\ell i} - \frac{k_{\ell} k_i}{k^2} \right\} \left\{ \delta_{\ell j} - \frac{k_{\ell} k_j}{k^2} \right\} \quad (2.9)$$

sendo $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ funções reais de módulo k do vetor número de onda \vec{k} . O espectro de energia é definido como:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{2} \int \int \Phi_{i,i}(\vec{k}) d\sigma \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituindo o tensor $\Phi_{ii}(\vec{k})$, dado pela equação (2.9) e resolvendo as integrais com relação a θ e ϕ , obtém-se:

$$E(k) = \frac{4\pi}{3} k^2 \left\{ A_1(k) + A_2(k) + A_3(k) \right\}. \quad (2.11)$$

Para determinar uma expressão para $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ será considerado, primeiramente, a relação entre uma componente unidimensional do espectro e o tensor espectral [Lumley e Panofsky, 1964]:

$$F_{ii}^1(k_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \Phi_{ii}(\vec{k}) \quad (2.12)$$

Considerando a equação (2.9), obtém-se:

$$\Phi_{11}(\vec{k}) = A_1(k) \left\{ \frac{k^2 - k_1^2}{k^2} \right\}^2 + A_2(k) \frac{k_2^2 k_1^2}{k^4} + A_3 \frac{k_3^2 k_1^2}{k^4}. \quad (2.13)$$

Usando coordenadas polares κ e Θ , definidas por:

$$\begin{aligned} k_2 &= \kappa \cos(\Theta) \\ k_3 &= \kappa \sin(\Theta), \end{aligned} \quad (2.14)$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(k) &= A_1(k) \frac{\kappa^4}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_2(k) \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \cos^2(\Theta) \\ &\quad + A_3(k) \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \sin^2(\Theta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.15) em (2.12) e integrando sobre Θ obtém-se para a componente longitudinal do espectro $F_u(k) \equiv F_{11}^1(k)$:

$$F_u(k) = 2\pi \int_k^\infty (K^2 - k^2) \left\{ (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} k^2 (A_2(K) + A_3(K)) \right\} \frac{dK}{K^3} \quad (2.16)$$

Da mesma forma podem ser obtidas as seguintes expressões para as componentes transversal $F_v(k) \equiv F_{22}^1(k)$ e vertical $F_w(k) \equiv F_{33}^1(k)$ do espectro:

$$F_v(k) = \pi \int_k^\infty \left\{ k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (3K^4 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_2(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3} \quad (2.17)$$

$$F_w(k) = \pi \int_k^\infty \left\{ k^2 (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_2(K) + \frac{1}{4} (3K^4 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3} \quad (2.18)$$

Se a turbulência for isotrópica, existem duas relações entre as componentes unidimensionais e a derivada primeira da componente longitudinal do espectro:

$F_v(k) = F_w(k)$ e $2F_v(k) = F_u(k) - k \frac{dF_u(k)}{dk}$ [Panofsky e Dutton, 1984]. Embora a análise não seja para um fluxo turbulento isotrópico, os seguintes resíduos serão definidos:

$$H(k) = F_v(k) - F_w(k) \quad (2.19)$$

$$J(k) = F_u(k) - k F_u'(k) - (F_v(k) + F_w(k)) \quad (2.20)$$

Substituindo as equações (2.16), (2.17) e (2.18) em (2.19) e (2.20), temos:

$$H(k) = \frac{\pi}{2} \int_k^\infty [A_2(K) - A_3(K)] (K^2 + k^2)^2 \frac{dK}{K^3} \quad (2.21)$$

$$J(k) = 2\pi \int_k^\infty \left(A_1(K) - \frac{A_2(K) + A_3(K)}{2} \right) (K^2 - k^2) (K^2 + 2k^2) \frac{dK}{K^3} \quad (2.22)$$

Introduzindo as novas variáveis:

$$s = k^{-2} \quad (2.23)$$

$$t = K^{-2} \quad (2.24)$$

$$f(s) = H\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2 \quad (2.25)$$

$$g(s) = J\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) s^2 \quad (2.26)$$

$$\alpha(t) = \pi\left(A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \quad (2.27)$$

$$\beta(t) = \pi\left[A_1\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{A_2\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) + A_3\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}\right] \quad (2.28)$$

as equações (2.21) e (2.22) tornam-se:

$$f(s) = \frac{1}{4} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2} \quad (2.29)$$

$$g(s) = \int_0^s \beta(t)(s-t)(s+2t) \frac{dt}{t^2} \quad (2.30)$$

Diferenciando as equações (2.29) e (2.30) três vezes em relação ao tempo, obtém-se:

$$\alpha''(s) + \frac{1}{s}\alpha'(s) - \frac{1}{2s^2}\alpha(s) = f'''(s) \quad (2.31)$$

$$\frac{3}{s}\beta'(s) - \frac{1}{s^2}\beta(s) = g'''(s) \quad (2.32)$$

Resolução da equação (2.31):

Supondo uma solução do tipo $\alpha(s) = s^r$, tem-se:

$$\alpha'(s) = r s^{r-1} \text{ e } \alpha''(s) = r(r-1)s^{r-2}$$

Substituindo estas funções na equação homogênea, obtém-se:

$$s^2[r(r-1)s^{r-2}] + s[r s^{r-1}] - \frac{1}{2}s^r = 0$$

ou

$$s^r\left[r(r-1) + r - \frac{1}{2}\right] = 0$$

Onde:

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad W(s) = -\frac{\sqrt{2}}{s} \quad (2.33)$$

Então: $\alpha(s) = C_1(s)s^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C_2(s)s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Seja:

$$\alpha_+ = s^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{e} \quad \alpha_- = s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$\alpha'(s) = C_1(s)\alpha'_+(s) + C_2(s)\alpha'_-(s) + C'_1(s)\alpha_+(s) + C'_2(s)\alpha_-(s)$, tal que

$$C'_1(s)\alpha_+(s) + C'_2(s)\alpha_-(s) = 0 \quad (2.34)$$

pela variação de parâmetros.

E ainda,

$$\alpha(0) = 0 \Rightarrow C_2(0) = 0$$

$$\alpha'(0) = 0 \Rightarrow C_1(0) = 0$$

$$\alpha''(s) = C_1(s)\alpha''_+(s) + C_2(s)\alpha''_-(s) + C'_1(s)\alpha'_+(s) + C'_2(s)\alpha'_-(s)$$

Substituindo na EDO, tem-se:

$$C'_1(s)\alpha'_+(s) + C'_2(s)\alpha'_-(s) = f'''(s) \quad (2.35)$$

Das equações (2.34) e (2.35), obtém-se:

$$C'_1(s) = -\frac{\alpha_-(s)f'''(s)}{W(s)} \quad \text{e} \quad C'_2(s) = \frac{\alpha_+(s)f'''(s)}{W(s)} \quad \text{e, conseqüentemente}$$

$$C_1(s) = C_1(0) - \int_0^s \frac{\alpha_-(t)f'''(t)}{W(t)} dt \quad \text{e} \quad C_2(s) = C_2(0) + \int_0^s \frac{\alpha_+(t)f'''(t)}{W(t)} dt$$

Assim:

$$\alpha(s) = \frac{s^{+\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \quad (2.36)$$

Resolução da equação (2.32):

Supondo uma solução do tipo $\beta(s) = s^r$, tem-se $\beta'(s) = r s^{r-1}$. Substituindo estas funções na equação homogênea, obtém-se:

$$3s[rs^{r-1}] - s^r = 0 \Rightarrow s^r [3r - 1] = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$\beta(s) = C_1(s)s^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Seja } \beta_+ = s^{\frac{1}{3}}, \beta'(s) = C'_1(s)\beta_+(s) + C_1(s)\beta'_+(s) \quad \text{e}$$

$$\beta(0) = 0 \quad \text{e}$$

$$\beta'(0) = 0 \Rightarrow C_1(0) = 0$$

Substituindo na EDO, tem-se:

$$C'_1(s) = \frac{1}{3}s^{1-\frac{1}{3}}g''' \quad \text{e, conseqüentemente}$$

$$C_1(s) = C_1(0) + \frac{1}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt$$

Assim:

$$\beta(s) = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \quad (2.37)$$

Os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 podem ser determinados a partir do sistema formado pelas equações (2.23), (2.24), (2.27), (2.28) e da relação:

$$A_2(k) + A_3(k) = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u}{dk} - \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{k^2}} \beta(s) ds, \quad (2.38)$$

obtida a partir das equações (2.16) e (2.28). A relação (2.38) foi obtida com o objetivo de tornar linear o sistema de equações. Após substituir a equação (2.37) na equação (2.38) e integrar por partes, obtém-se:

$$3A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + \frac{1}{\pi} s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt \quad (2.39)$$

Das equações (2.27) e (2.23), tem-se:

$$\alpha(s) = \pi (A_2(k) - A_3(k))$$

E ainda, usando a equação (2.36), obtém-se:

$$A_2(k) - A_3(k) = \frac{s^{+\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \quad (2.40)$$

Das equações (2.28) e (2.23), tem-se:

$$\beta(s) = \pi \left[A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} \right]$$

E ainda, usando a equação (2.37), obtém-se:

$$A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \quad (2.41)$$

Subtraindo (2.41) de (2.39), obtém-se:

$$A_1(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + \frac{1}{2\pi} \left\{ s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\} \quad (2.42)$$

Isolando A_3 em (2.40), substituindo A_1 e A_3 em (2.41), obtém-se:

$$\begin{aligned}
A_2(k) &= \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \right. \\
&\left. + s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - s^{\frac{1}{3}} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Substituindo A_2 em (2.40), obtém-se:

$$\begin{aligned}
A_3(k) &= \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\
&- \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \right. \\
&\left. - s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt + s^{\frac{1}{3}} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Substituindo $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ em (2.11), obtém-se a seguinte expressão para a função espectro de energia de um fluxo turbulento homogêneo não isotrópico,

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + 2k^4 \int_0^{\frac{1}{k^2}} s^2 g'''(s) ds - \frac{14}{9} k^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{1}{k^2}} s^{\frac{2}{3}} g'''(s) ds \tag{2.45}$$

2.6.2 Espectros Unidimensionais

Para que a função espectro de energia dada pela equação (2.45) possa ser escrita em termos das componentes unidimensionais, deve-se determinar uma expressão para $g'''(s)$. A partir da relação (2.20) pode-se escrever:

$$J(k) = 2F_u(k) - F_v(k) - F_w(k) \tag{2.46}$$

Considerando as mudanças de variáveis dadas por (2.23), (2.25) e (2.26), pode-se reescrever a expressão (2.46) como:

$$g(s) = 2f_u(s) - f_v(s) - f_w(s) \tag{2.47}$$

A derivada de ordem três de $g(s)$ será:

$$g'''(s) = 2f_u'''(s) - f_v'''(s) - f_w'''(s) \tag{2.48}$$

Serão considerados os espectros unidimensionais de Degrazia e Anfossi, [1998] para Camada Limite Convectiva.

$$F_i(k) = \frac{a_i}{(1 + b_i k)^{\frac{5}{3}}} \quad i = u, v, w \quad (2.49)$$

com $a_i = \frac{0.98}{2\pi} c_i \left(\frac{z}{z_i}\right)^{\frac{5}{3}} z_i \psi_\varepsilon^{\frac{2}{3}} w_*^2 [(f_m^*)_i]^{\frac{5}{3}}$ e $b_i = \frac{1.5}{2\pi} \frac{z}{z_i} z_i \frac{1}{(f_m^*)_i}$, sendo $c_i = \alpha_i (0.5 \pm 0.05) (2\pi\kappa)^{-\frac{2}{3}}$, $\alpha_i = 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}$ para u, v e w respectivamente [Champagne et al, 1977].

$w_* = (u_*)_o \left(-\frac{z_i}{\kappa L}\right)^{\frac{1}{3}}$ é a escala de velocidade convectiva;
 $(f_m)_i^c = \frac{z}{G_i z_i}$; $G_u = G_v = 1, 5$; $G_w = 1, 8 \left[1 - \exp\left(-\frac{4z}{z_i}\right) - 0, 0003 \exp\left(\frac{8z}{z_i}\right)\right]$ e
 $\psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon z_i}{w_*^3}$ é a função razão de dissipação molecular.

Substituindo $k = s^{-\frac{1}{2}}$ em (2.49) e considerando a equação (2.25) obtém-se:

$$f_i(s) = A_i \frac{s^{\frac{17}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{5}{3}}} \quad (2.50)$$

na qual:

$$A_i = a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^{\frac{5}{6}} \quad B_i = b_i^{-2} \quad (2.51)$$

A derivada terceira de $f_i(s)$ é:

$$f_i'''(s) = \sum_{n=0}^3 \frac{C_n A_i B_i^{\frac{3-n}{2}} s^{\frac{8-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} \quad (2.52)$$

sendo:

$$C_0 = -\frac{55}{27} \quad C_1 = \frac{70}{9} \quad C_2 = -\frac{725}{72} \quad C_3 = \frac{935}{216} \quad (2.53)$$

Em termos das componentes unidimensionais de Degrazia e Anfossi, [1998], a equação (2.48) será:

$$g'''(s) = m_i \tilde{f}_i'''(s) \quad (2.54)$$

com

$$m_u = 2 \qquad m_v = -1 \qquad m_w = -1 \quad (2.55)$$

Substituindo a equação (2.52) na equação (2.54) obtém-se:

$$g'''(s) = A_i m_i \sum_{n=0}^3 \frac{C_n B_i^{\frac{3-n}{2}} s^{\frac{8-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} \quad (2.56)$$

Inserindo a equação (2.56) na equação (2.45) obtém-se:

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + A_i m_i \sum_{n=0}^3 C_n B_i^{\frac{3-n}{2}} \left(2k^4 I_{1i} - \frac{14}{9} k^{\frac{4}{3}} I_{2i} \right) \quad (2.57)$$

sendo

$$I_{1i} = \int_0^{\frac{1}{k^2}} \frac{s^{\frac{20-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} ds \quad (2.58)$$

$$I_{2i} = \int_0^{\frac{1}{k^2}} \frac{s^{\frac{12-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} ds \quad (2.59)$$

Para que as integrais I_{1i} e I_{2i} possam ser escritas em uma forma algébrica, serão feitas as seguintes mudanças de variáveis: $\sqrt{B_i s} = (Z_i^3 - 1)^{-1}$ na integral I_{1i} , e $\sqrt{B_i s} = (Z_i^3 - 1)$ na integral I_{2i} . Com essas mudanças de variáveis, obtém-se:

$$I_{1i} = 6B_i^{\frac{26-3n}{6}} \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i \quad (2.60)$$

com $W_{1i} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{B_i s}}\right)^{\frac{1}{3}}$, e

$$I_{2i} = 6B_i^{-3-\frac{n}{2}} \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i \quad (2.61)$$

com $W_{2i} = (1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{1}{3}}$.

Substituindo (2.60) e (2.61) na equação (2.57), obtém-se a seguinte expressão para o espectro 3-D na Camada Limite Convectiva (**CLC**):

$$\begin{aligned} E_o(k; z) = & k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\ & + 12A_i m_i B_i^{-\frac{17}{6}} k^4 \sum_{n=0}^3 C_n \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i \\ & - \frac{84}{9} A_i m_i B_i^{-\frac{3}{2}} k^{\frac{4}{3}} \sum_{n=0}^3 C_n \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

Este espectro é a **condição inicial** do espectro de energia tridimensional (3-D).

CAPÍTULO 3

EMPREGO DA TEORIA DE HEISENBERG NA ANÁLISE DO DECAIMENTO DA TURBULÊNCIA NA CAMADA LIMITE CONVECTIVA (CLC)

Neste capítulo será apresentada a Equação Dinâmica para a Função Espectro de Energia [Hinze, 1975], onde será aplicado o *Modelo de Heisenberg* para parametrizar o termo de transferência inercial de energia $T(k, t; z)$, e em seguida, será obtido o espectro de energia durante o decaimento de um fluxo turbulento convectivo isotrópico. A solução desta equação descreve a evolução no tempo do espectro de energia de um fluxo turbulento homogêneo.

3.1 EQUAÇÃO DINÂMICA PARA O ESPECTRO DE ENERGIA

A equação dinâmica para o espectro de energia obtida a partir das equações de Navier-Stokes [Hinze, 1975], é dada por:

$$\frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} = M(k, t; z) + T(k, t; z) + \frac{g}{\theta_0} H(k, t; z) - 2\nu k^2 E(k, t; z) \quad (3.1)$$

Nesta equação $E(k, t; z)$ é a função espectro de energia ou simplesmente espectro de energia que representa a variação do espectro com o tempo, $M(k, t; z)$ é o termo de produção de energia por efeito mecânico. Este termo retira energia do escoamento e a transforma em energia cinética turbulenta, $T(k, t; z)$ descreve a transferência de energia cinética entre os turbilhões de diferentes números de onda por efeito inercial que se dá na direção dos maiores para os menores turbilhões, caracterizando o efeito cascata. Atua numa faixa de comprimentos de onda que vai desde a entrada de energia até a micro escala de *Komolgorov* onde as forças viscosas dominam, porém, no subintervalo inercial é o termo predominante. $H(k, t; z)$ é o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico, em condições

convectivas ele transforma energia potencial armazenada no fluido, devido a instabilidade térmica, em energia cinética turbulenta, de forma que nesta condições representa um termo de fonte. E o termo $\left(-2\nu k^2 E(k, t; z)\right)$ representa a dissipação de energia por viscosidade molecular e é sempre um termo de consumo de energia cinética turbulenta.

Neste trabalho por simplicidade, iremos desconsiderar a fonte de turbulência mecânica $(M(k, t; z))$ e o termo de dissipação de energia por efeito da viscosidade molecular $\left(-2\nu k^2 E(k, t; z)\right)$. Durante o período de decaimento da turbulência na **CLC** foi considerado que o fluxo de calor da superfície é interrompido instantaneamente, o que permite desconsiderar o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico $(H(k, t; z))$.

Neste caso a equação (3.1) torna-se:

$$\frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} = T(k, t; z) \quad (3.2)$$

Um fluxo turbulento é composto de turbilhões de diferentes tamanhos. Os pequenos turbilhões ficam expostos ao campo de tensão gerado pelos grandes turbilhões. Este campo de tensão aumenta a vorticidade dos pequenos turbilhões e, conseqüentemente, sua energia cinética. Desta forma há uma transferência de energia cinética dos grandes turbilhões para turbilhões cada vez menores, até que seja alcançada a micro escala de *Kolmogorov* e a energia seja dissipada em forma de calor. Este processo está representado pelo termo $T(k, t; z)$ na equação (3.2). Este termo foi parametrizado por *Heisenberg* [1975], para um fluxo turbulento isotrópico, a partir de análise dimensional, dada por:

$$T(k, t; z) = -2C_H k^2 E(k, t; z) \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k', t; z)}{k'^3}} dk' \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.2), obtém-se uma equação integro-diferencial:

$$\frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} + 2C_H k^2 E(k, t; z) \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k', t; z)}{k'^3}} dk' = 0 \quad (3.4)$$

Para transformar a equação (3.4) em uma equação diferencial deriva-se em relação

ao número de onda k , obtendo a equação (3.5):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E(k, t; z)}{\partial k \partial t} + 2C_H k^2 E(k, t; z) \sqrt{\frac{E(k, t; z)}{k^3}} + \\ & + 2C_H \left[\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k', t; z)}{k'^3}} dk' \left(2kE(k, t; z) + k^2 \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial k} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Isolando a integral na equação (3.4) e substituindo na equação (3.5), tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E(k, t; z)}{\partial k \partial t} + 2C_H k^2 E(k, t; z) \left(\frac{E(k, t; z)}{k^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{k} \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} - \\ & - \frac{1}{E(k, t; z)} \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial k} \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para simplificar a equação acima (3.6) multiplica-se por k , obtendo-se:

$$\begin{aligned} & k \frac{\partial^2 E(k, t; z)}{\partial k \partial t} - 2 \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} - \frac{k}{E(k, t; z)} \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial k} \frac{\partial E(k, t; z)}{\partial t} - \\ & - 2C_H \left(kE(k, t; z) \right)^{\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Em seguida resolve-se a equação (3.7) fixando o parâmetro "z" e supondo que o espectro de energia $E(k, t; z)$ pode ser escrito como um produto de duas funções, assim tem-se:

$$E(k, t; z) = a(k; z)b(t; z) \quad (3.8)$$

onde $a(k; z)$ é uma função apenas de k e $b(t; z)$ é uma função apenas de t .

Substituindo a expressão (3.8) na equação (3.7), tem-se:

$$\begin{aligned} & k \frac{\partial^2 [a(k; z)b(t; z)]}{\partial k \partial t} - 2 \frac{\partial [a(k; z)b(t; z)]}{\partial t} - \frac{k}{[a(k; z)b(t; z)]} \frac{\partial [a(k; z)b(t; z)]}{\partial k} \frac{\partial [a(k; z)b(t; z)]}{\partial t} + \\ & + 2C_H \left(k[a(k; z)b(t; z)] \right)^{\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Simplificando e reescrevendo a equação (3.9) tem-se:

$$-2ab' + 2C_H k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (3.10)$$

Isolando b' tem-se:

$$b' = C_H k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \quad (3.11)$$

Separando-se as variáveis a e b tem-se:

$$\frac{b'}{b^{\frac{3}{2}}} = C_H k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Percebe-se que o lado esquerdo da equação (3.12) depende apenas da variável t , pois b é uma função que depende apenas de t , e enquanto o lado direito depende apenas de k , pois a é uma função que depende apenas de k , a relação só é satisfeita se esses dois lados forem iguais a uma constante (λ), assim:

$$\frac{b'}{b^{\frac{3}{2}}} = C_H k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \lambda \quad (3.13)$$

Desse modo obtém-se duas novas equações:

$$\frac{b'}{b^{\frac{3}{2}}} = \lambda \quad (3.14)$$

e

$$C_H k^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \lambda \quad (3.15)$$

ou ainda:

$$b^{-\frac{3}{2}} \frac{db}{dt} = \lambda \quad (3.16)$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{C_H k^{\frac{3}{2}}} \quad (3.17)$$

Resolvendo as equações (3.16) e (3.17), obtém-se respectivamente:

$$b(t; z) = \left(\frac{2}{\lambda t + c_o} \right)^2 \quad (3.18)$$

$$a(k; z) = \left(\frac{\lambda}{C_H k^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \quad (3.19)$$

Substituindo as equações (3.18) e (3.19) na equação (3.8) obtém-se a solução para a equação (3.4) :

$$E(k, t; z) = \left[\frac{2\lambda}{C_H k^{\frac{3}{2}} (\lambda t + c_o)} \right]^2 \quad (3.20)$$

Sabe-se que em $t = 0$ temos $E(k, t; z) = E_o(k; z)$ (espectro inicial conhecido). Substituindo esta condição inicial na equação (3.20), obtém-se:

$$E_o(k; z) = \left(\frac{2\lambda}{C_H k^{\frac{3}{2}} c_o} \right)^2 \quad (3.21)$$

ou isolando c_o , tem-se:

$$c_o = \frac{2\lambda}{C_H k^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_o(k; z)}} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.20), obtém-se a equação para o espectro de energia tridimensional $E(k, t; z)$, durante o decaimento da turbulência na **CLC**:

$$E(k, t; z) = \frac{E_o(k; z)}{\left(\frac{1}{2} C_H k^{\frac{3}{2}} t \sqrt{E_o(k; z)} + 1 \right)^2} \quad (3.23)$$

A expressão (3.23), satisfaz a **condição inicial** ($t = 0 \rightarrow E(k, 0; z) = E_o(k; z)$) e as **condições de contorno**: se $k \rightarrow 0 \Rightarrow E(k, t; z) = 0$ e se $k \rightarrow \infty \Rightarrow E(k, t; z) = 0$, pois se sabe que $k \rightarrow 0 \Rightarrow E_o(k; z) = 0$ e se $k \rightarrow \infty \Rightarrow E_o(k; z) = 0$.

A equação dinâmica que descreve o fluxo turbulento é válida somente no espaço tridimensional (3-D). Conseqüentemente, o espectro $E_o(k; z)$ que representa a **condição inicial** da equação (3.23) é o espectro 3-D turbulento na **CLC** dado por Kristensen [1989], descrito na seção 2.6 pela seguinte expressão:

$$E_o(k; z) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + 12A_i m_i B_i^{-\frac{17}{6}} k^4 \sum_{n=0}^3 C_n \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i - \frac{84}{9} A_i m_i B_i^{-\frac{3}{2}} k^{\frac{4}{3}} \sum_{n=0}^3 C_n \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i, \quad (3.24)$$

com

$$\begin{aligned}
W_{1i} &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{B_i s}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
W_{2i} &= \left(1 + \sqrt{B_i s}\right)^{\frac{1}{3}}, \\
A_i &= a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^{\frac{5}{6}}, \\
m_u &= 2, \\
m_v &= m_w = -1, \\
C_o &= -\frac{55}{27}, \\
C_1 &= \frac{70}{9}, \\
C_2 &= -\frac{725}{72}, \\
C_3 &= \frac{935}{216}, \\
A_i &= a_i b_i^{\frac{5}{6}}, \\
B_i &= b_i^{-2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De acordo com Degrazia e Anfossi [1998] a **componente inicial do espectro unidimensional (1-D)** pode ser escrita como:

$$F_i(k, 0) = \frac{a_i}{(1 + b_i k)^{\frac{5}{3}}} \quad i = u, v, w \tag{3.26}$$

onde

$$a_i = \frac{0.98}{2\pi} c_i \left(\frac{z}{z_i}\right)^{\frac{5}{3}} z_i \psi \epsilon^{\frac{2}{3}} w_*^2 \left[(f_m^*)_i^c \right]^{\frac{-5}{3}}$$

e

$$b_i = \frac{1.5}{2\pi} \frac{z}{z_i} z_i \frac{1}{(f_m^*)_i^c}$$

com

$$c_i = \alpha(0.5 \pm 0.05)(2\pi k)^{\frac{-2}{3}}, \alpha_i = 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}$$

para u , v e w respectivamente [Champagne et al, 1977]

$$w_* = (u_*)_0 \left(\frac{-z_i}{kL} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (f_m)_i^c = \frac{z}{G_i z_i}, \quad G_u = 1.5, \quad G_v = 1.5$$

e

$$G_w = 1.8 \left[1 - \exp\left(\frac{-4z}{z_i}\right) - 0.0003 \exp\left(\frac{8z}{z_i}\right) \right]$$

Pode-se observar o comportamento do termo de transferência inercial de energia $T(k, t; z)$ a partir da **figura 3.1** abaixo:

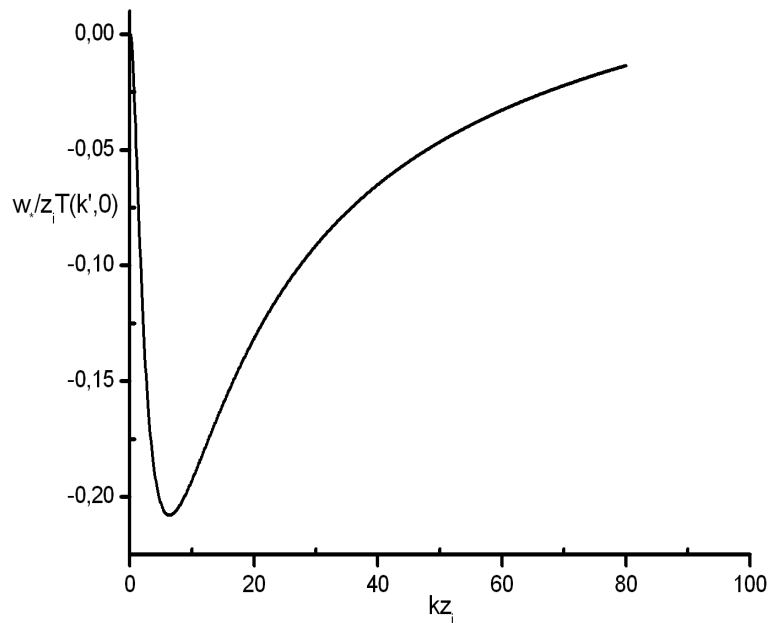


Figura 3.1 — $T(k, 0; z)$ calculado a partir da equação (3.3) com espectro $E_o(k; z)$ dado pela equação (3.24) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).

A **figura 3.1** mostra que a equação (3.3) pode descrever o termo de transferência de energia cinética, pois o máximo do módulo da função $T(k, 0; z)$ localiza-se em números de onda pequenos, representando uma perda de energia nessa região.

Assim substituindo a componente inicial do espectro de energia 3-D e a componente inicial do espectro de energia 1-D na equação (3.23), obtém-se os espectros do modelo durante o decaimento da turbulência na CLC, mostrado na **figura 3.2** abaixo:

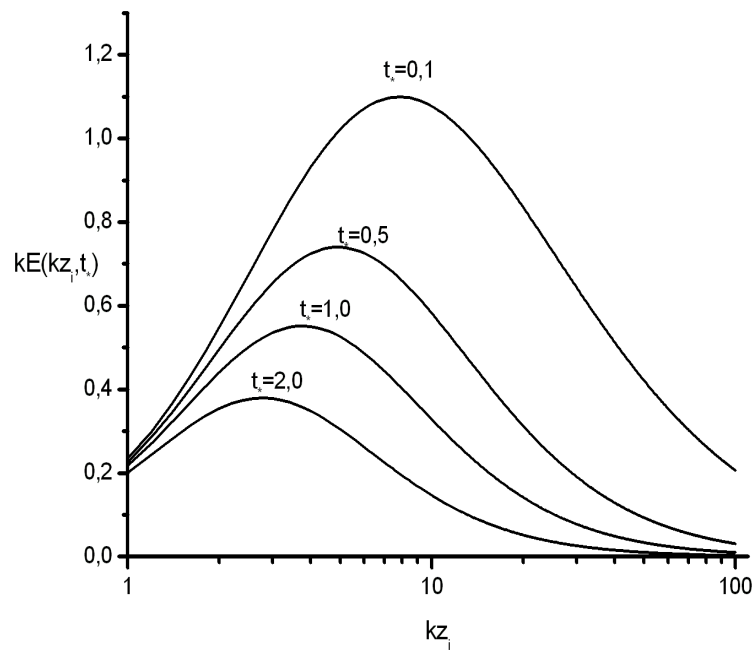


Figura 3.2 — Espectro calculado a partir da equação (3.23) com espectro $E(k, 0; z)$ dado pela componente isotrópica da equação (3.24) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).

A **figura 3.2** mostra a evolução no tempo do espectro de energia tridimensional durante o decaimento da turbulência convectiva. Pode-se observar que o pico espectral que representa os turbilhões com maior energia se desloca para números de onda menores, significando que os turbilhões mais energéticos estão decaindo mais rapidamente, sobrevivendo assim apenas os turbilhões de menor energia. Do ponto de vista físico este é o comportamento esperado durante o decaimento da turbulência na **CLC**.

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA, DAS COMPONENTES UNIDIMENSIONAIS DO ESPECTRO E DO COEFICIENTE DE DIFUSÃO

Neste capítulo será calculada a energia cinética durante o decaimento do fluxo turbulento convectivo isotrópico na **CLC** e o resultado será comparado com os dados de simulação numérica obtidos por LES [Nieuwstadt e Brost, 1986]. Ainda nesta secção serão calculadas as componentes unidimensionais do espectro, as variâncias das componentes da velocidade e os coeficientes de difusão e estes resultados serão comparados com os dados de LES [Nieuwstadt e Brost, 1986].

4.1 CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

A *energia cinética* de um campo turbulento pode ser calculada com a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \int_0^{\infty} E(k, t; z) dk \quad (4.1)$$

na qual $E(k, t; z)$ é dado pela equação (3.23). Esta integral representa a energia cinética total de um campo turbulento, a qual foi resolvida numericamente utilizando o software Mathematica versão 6.0 da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA.

Existem vários trabalhos que descrevem o decaimento da turbulência. Para um fluxo turbulento isotrópico, a partir de simulação numérica dos grandes turbilhões (LES), *Charllot e Lesieur* obtiveram que o decaimento da energia cinética é proporcional a $t^{-1,2}$.

A **figura 4.1** mostra o decaimento da energia cinética em um fluxo turbulento na **CLC** determinado a partir da equação (4.1), (linha cheia), considerando o espectro de

energia dado pela equação (3.23), obtida através do Modelo de Heisenberg. A **figura 4.1** mostra ainda o resultado obtido por LES [Nieuwstadt e Brost, 1986], (cruzes), e a solução da equação (3.2) usando o modelo de Pao [1965] para o termo de transferência inercial de energia $(T(k, t; z))$, (pontinhos).

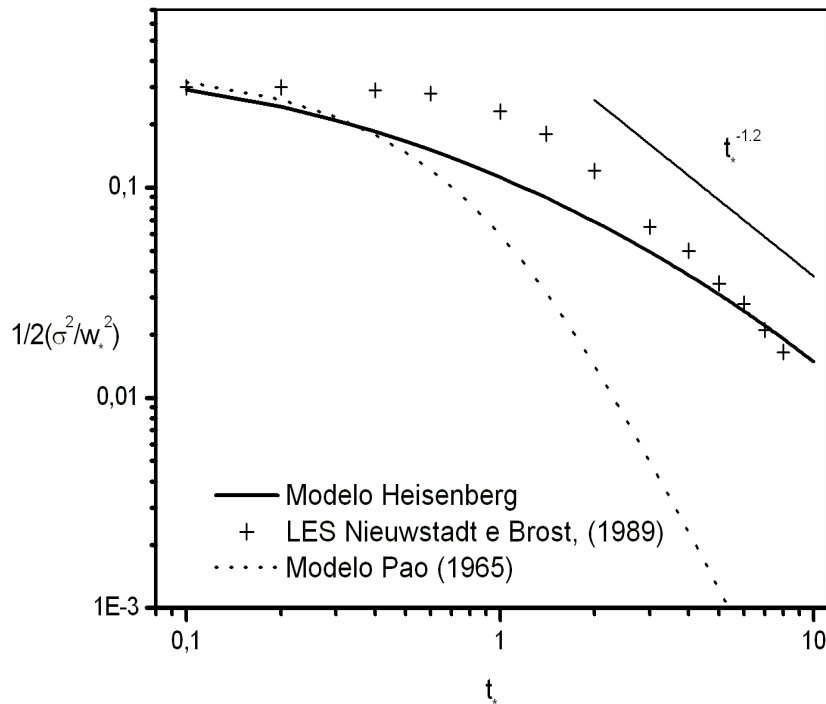


Figura 4.1 – Decaimento da Energia Cinética na **CLC** (linha cheia), determinado a partir da equação (4.1) com espectro tridimensional $E(k, t; z)$ dado pela equação (3.23) e as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.26).

Observa-se pela **figura 4.1** que o modelo de Heisenberg apresentado neste trabalho para descrever o experimento de LES (*Large Eddy Simulation*) mostra um resultado muito melhor para o decaimento da turbulência do que o modelo de Pao. Podemos atribuir o melhor resultado, em relação ao modelo de LES, do modelo de Heisenberg para o termo de transferência inercial de energia durante o decaimento da energia cinética turbulenta, devido as características das parametrizações propostas por Pao e por Heisenberg. A parametrização proposta por Pao para o termo de transferência inercial de energia torna a equação linear, por outro lado, a parametrização proposta por Heisenberg mantém a não linearidade da equação. Como o termo de transferência inercial de energia é essencialmente não linear a

parametrização de Heisenberg descreve mais adequadamente o fenômeno. O período total de decaimento da energia cinética turbulenta, no caso estudado, é de uma hora e meia.

Portanto, observa-se pela **figura 4.1** que o modelo apresentado neste trabalho para descrever o decaimento da energia cinética em um campo turbulento isotrópico na **CLC** determinado pela equação (4.1), considerando o espectro de energia dado pela equação (3.23), é mais adequado para descrever o experimento de LES (*Large Eddy Simulation*). Em uma primeira aproximação o modelo descreve bem o decaimento da turbulência na **CLC** em dias onde predomina a convecção em relação a fonte mecânica, isto ocorre em dias de vento fraco e ensolarado. A lei da potência $t^{-1.2}$ é característica de um fluxo turbulento isotrópico para grandes tempos de difusão [Lesieur, 1987]. Este resultado justifica terem sido desprezados os termos que representam os efeitos mecânicos e térmicos na equação (3.1).

4.2 CÁLCULO DAS COMPONENTES UNIDIMENSIONAIS DO ESPECTRO

Na estimativa do campo de concentração de contaminantes utilizando os modelos convencionais de dispersão necessita-se determinar o coeficiente de difusão que pode ser obtido a partir do espectro de energia unidimensional (1-D).

A **CLC** é não isotrópica somente na direção vertical, devido ao fluxo de calor na superfície. Por essa razão, para calcular a componente longitudinal (u) e a componente transversal (v) pode-se considerar a equação (3.23), que é válida para um campo turbulento isotrópico. Neste caso, o espectro inicial será descrito pelas componentes u e v da equação (3.26).

Para calcular a componente vertical (w) do espectro considera-se que para um instante particular de tempo (t) existe uma relação entre o espectro unidimensional (1-D) e o espectro tridimensional (3-D) dados pela seguinte expressão:

$$F_w(k, t; z) = \alpha(k) \frac{\frac{1}{T} \int_0^t F_w(k, t; z) dt}{\frac{1}{T} \int_0^t E(k, t; z) dt} E(k, t; z) \quad (4.2)$$

onde a razão entre as duas integrais é uma função peso que indica como a componente vertical (w) faz parte da construção do espectro tridimensional (3-D) e $\alpha(k)$ é a constante de proporcionalidade. Para resolver a expressão (4.2) deriva-se em relação ao número de onda k e obtém-se uma equação diferencial para o F_w , e em seguida, resolve-se essa equação

diferencial numericamente utilizando o software Mathematica versão 6.0 da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA.

A solução da equação (4.2) é a componente vertical do espectro tridimensional (3-D) dado por:

$$F_w(k, t; z) = F_w(k, 0; z) \exp \left[\int_0^t Q'(k, s) ds \right] \quad (4.3)$$

onde $F_w(k, 0; z)$ é dado pela equação (3.26),

$$Q'(k, s) = \alpha(k)Q(k, s) + \frac{1}{Q(k, s)} \frac{\partial Q(k, s)}{\partial s} \quad (4.4)$$

e $Q(k, s)$ é dado por:

$$Q(k, s) = \frac{E(k, s)}{\int_0^t E(k, s) ds} \quad (4.5)$$

4.3 COMPARAÇÃO DAS VARIÂNCIAS DA VELOCIDADE COM O RESULTADO DE LES

A *variância da velocidade* (σ_i^2) do escoamento turbulento é calculada pela seguinte equação:

$$\sigma_i^2(t; z) = \int_0^\infty F_i(k, t; z) dk \quad (4.6)$$

A variância da velocidade (σ_i^2) é um parâmetro importante, pois indica qual é a energia cinética por unidade de massa do fluxo turbulento em uma determinada direção. Do ponto de vista operacional podemos considerar a variância da velocidade como um parâmetro característico de um fluxo turbulento que pode ser determinado com relativa facilidade, pois as componentes do espectro de energia podem ser medidas experimentalmente ou calculadas por métodos numéricos.

As **figuras 4.2, 4.3 e 4.4** mostram a evolução temporal na longitudinal (u), transversal (v) e vertical (w) do decaimento das variâncias da velocidade na Camada Limite Convectiva (CLC) $\left(0.2 < \frac{z}{z_i} < 0.8\right)$, calculada pelas equações (3.23), (3.26), (4.3) e (4.6) e são adimensionalizadas por w_*^2 . As **figuras 4.2, 4.3 e 4.4** mostram que o nosso modelo

teórico (linha sólida) concorda muito bem com os resultados da simulação de LES (cruzes), [Nieuwstadt e Brost, 1986].

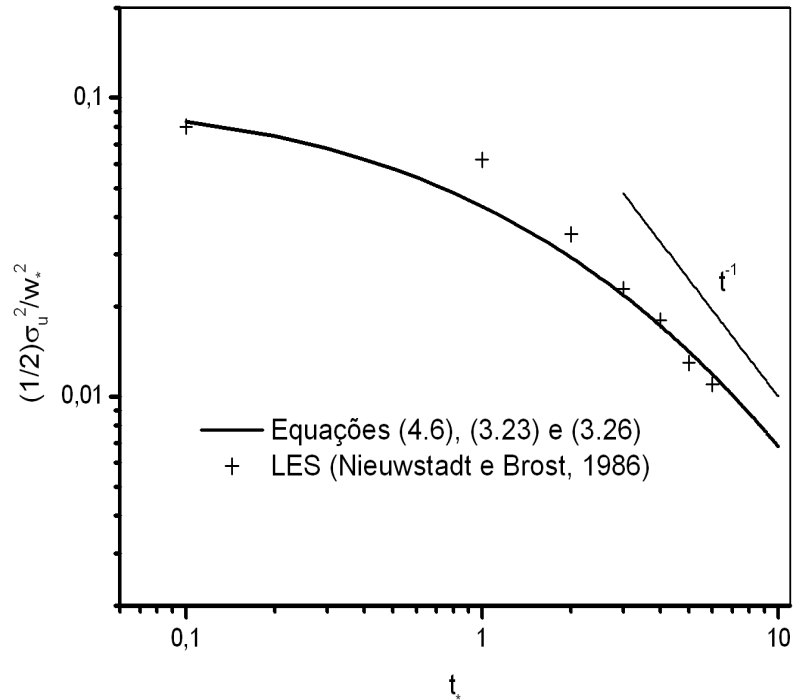


Figura 4.2 — Evolução no tempo da componente longitudinal (u) da variância da velocidade.

A **figura 4.2** representa a evolução no tempo da componente longitudinal (u) da variância da velocidade (linha contínua), obtida a partir da equação (4.6), considerando o espectro tridimensional (3-D) dado pela equação (3.23) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.26) comparada com os dados de LES (cruzes), [Nieuwstadt e Brost, 1986].

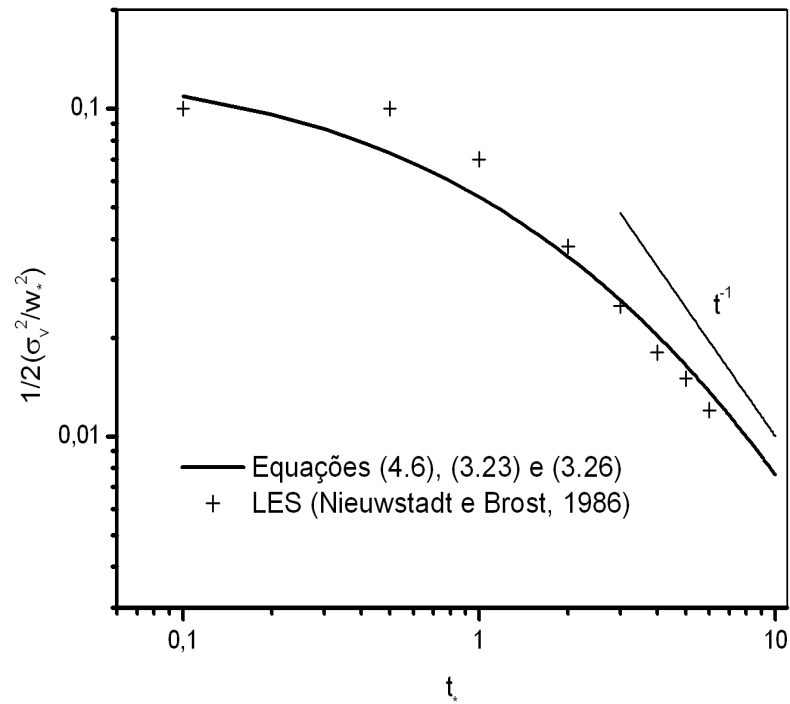


Figura 4.3 – Evolução no tempo da componente transversal (v) da variância da velocidade.

A **figura 4.3** representa a evolução no tempo da componente transversal (v) da variância da velocidade (linha contínua), obtida a partir da equação (4.6), considerando o espectro tridimensional (3-D) dado pela equação (3.23) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.26) comparada com os dados de LES (cruzes), [Nieuwstadt e Brost, 1986].

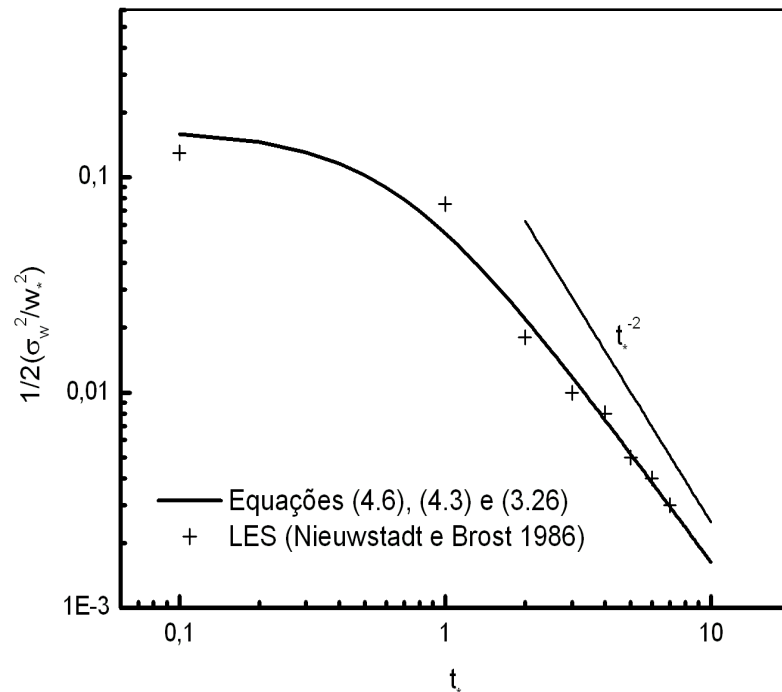


Figura 4.4 – Evolução no tempo da componente vertical (w) da variância da velocidade.

A **figura 4.4** representa a evolução no tempo da componente vertical (w) da variância da velocidade (linha contínua), obtida a partir da equação (4.6), considerando o espectro vertical dado pela equação (4.3) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.26) comparada com os dados de LES (cruzes), [Nieuwstadt e Brost, 1986].

Assim as **figuras 4.2, 4.3 e 4.4** mostram que as variâncias unidimensionais calculadas no presente trabalho estão de acordo com os dados de LES [Nieuwstadt e Brost, 1986], o que confirma a validade deste modelo para o cálculo do coeficiente de difusão unidimensional durante o decaimento da turbulência convectiva.

4.4 COEFICIENTE DE DIFUSÃO

Sabe-se que para calcular a concentração média de contaminantes na Camada Limite Convectiva (**CLC**) através de modelos operacionais de dispersão atmosférica usa-se a

equação de difusão-advecção que é expresso pela seguinte equação:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U(z) \frac{\partial c}{\partial x} + W(z) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(t) \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

onde c é a concentração integrada ao longo do eixo y , K_z é o coeficiente de difusão vertical, $U(z)$ e $W(z)$ são, respectivamente, as componentes médias longitudinal e vertical da velocidade do vento. Na equação (4.7) foi desprezado o termo de difusão na direção x devido a este termo ser desprezível em relação ao de advecção na mesma direção. Também foram desprezados os termos de fonte e sumedouro, isto é, está sendo considerado um contaminante passivo, ou seja, que não interage com o meio.

A expressão (4.7) mencionada acima calcula a concentração de contaminantes em um meio qualquer. O coeficiente de difusão descreve as propriedades físicas deste meio e, portanto, a precisão do cálculo da concentração de contaminantes a partir da equação (4.7) depende fundamentalmente da correta determinação do coeficiente de difusão.

Na atmosfera pode-se calcular o coeficiente de difusão a partir do espectro energia. Existem muitos trabalhos que calculam o coeficiente de difusão para o caso estacionário na Camada Limite Convectiva (**CLC**) e Camada Limite Estável (**CLE**), porém não existem muitos trabalhos que descrevem o coeficiente de difusão durante os períodos de transição, ou seja, no decaimento.

Para um campo não estacionário Goulart [2007], desenvolveu uma expressão para o coeficiente de difusão dado por:

$$K_\alpha(t) = \frac{\beta_i}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(k, t; z) \frac{\sin\left(\frac{kx}{\beta_i}\right)}{k} dk \quad (4.8)$$

onde

$$\beta_i = \frac{0,55U}{\sigma_i}$$

e β_i é a razão entre as escalas de tempo Lagrangeana T_L e Euleriana T_E . Uma escala de tempo é definida como o tempo em que existe uma correlação entre a velocidade de elemento de fluido em um instante e no instante posterior. Pode-se associar a escala de tempo com o tempo em que existe um efeito de memória do elemento de fluido. As escalas de tempo variam com o referencial adotado. Uma escala de tempo Lagrangeana existe quando o sistema de

referência é Lagrangeano, ou seja, o sistema de referência está localizado no elemento de fluido. Já uma escala de tempo Euleriana existe quando o referencial adotado é Euleriano, ou seja, quando o sistema de referência está fixo em um ponto e, a partir dele, acompanha-se o movimento do elemento de fluido.

A **figura 4.5** abaixo apresenta a componente vertical do coeficiente de difusão (K_z):

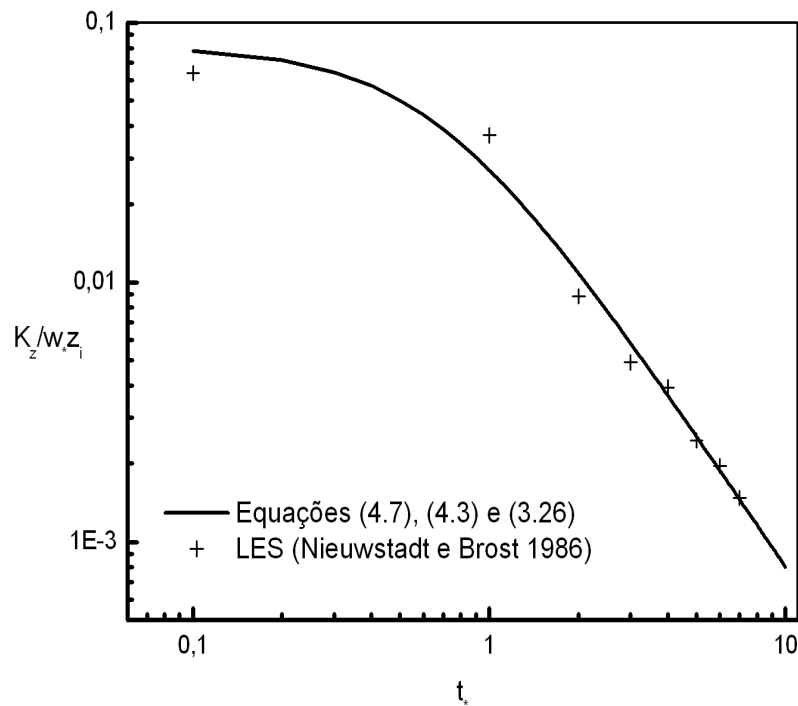


Figura 4.5 – Componente Vertical do Coeficiente de Difusão (K_z) durante o decaimento da turbulência convectiva (linha contínua) calculado a partir da equação (4.8) considerando a variância vertical dada pela equação (4.6) com o espectro unidimensional dado pela equação (3.26).

A partir da **figura 4.5** nota-se que o coeficiente de difusão vertical (K_z) calculado pelo modelo proposto descreve adequadamente os dados de LES [Nieuwstadt e Brost, 1986].

Este coeficiente de difusão vertical unidimensional pode ser utilizado em modelos de dispersão para determinar o campo de contaminantes durante o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (**CLC**).

É importante mencionar que o modelo desenvolvido neste trabalho para a energia cinética turbulenta é válido somente no caso de uma turbulência decaindo sem a presença de

fontes de origem mecânica ou convectiva. Esta é uma limitação do modelo. Porém deve-se ressaltar que, no caso de existirem fontes de natureza convectiva ou mecânica o método de resolver o problema continua válido. Porém, neste caso, tem-se que acrescentar os respectivos termos de fonte (convectivo e/ou mecânico) e resolver a equação diferencial obtida. Este é o próximo passo no sentido de se obter um modelo mais completo do ponto de vista físico e, conseqüentemente, mais realista.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

No presente trabalho foi apresentado um modelo para descrever o decaimento da energia cinética turbulenta em uma Camada Limite Convectiva (**CLC**), a partir de um modelo de fechamento de dois pontos ou modelo espectral. Para parametrizar o termo de transferência inercial de energia $T(k, t; z)$ foi empregado o **Modelo de Heisenberg** que considera que a transferência de energia dos grandes para os pequenos turbilhões ocorre de forma análoga à viscosidade molecular, definindo um coeficiente de viscosidade cinemático. Pela **Figura 3.1** observa-se que o máximo da função $T(k, 0; z)$ localiza-se em números de onda pequenos, representando uma perda de energia nessa região.

Para representar o campo de turbulência antes do decaimento usou-se o modelo de Kristensen [1989], que permite obter o espectro tridimensional de um fluxo turbulento homogêneo mas não isotrópico estacionário a partir de suas componentes unidimensionais. Neste trabalho foram consideradas as componentes unidimensionais de Degrazia e Anfossi [1998]. A equação integro-diferencial não linear (3.4), que descreve o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (**CLC**), foi resolvida analiticamente fixando o parâmetro "z" e considerando que o espectro de energia pode ser dividido como um produto de duas funções. A solução (3.23) é o espectro de energia cinética turbulenta 3-D em uma **CLC** decaindo.

A partir do espectro 3-D foi calculada a energia cinética durante o decaimento da turbulência na **CLC**. Pela **Figura 4.1** observa-se que existe uma boa concordância entre a energia obtida com a equação (3.23) e os dados de simulação numérica LES [Nieuwstadt e Brost, 1986].

O decaimento proporcional a $t^{-1,2}$ obtido pelo modelo e por LES [Nieuwstadt e Brost, 1986] é característico de um campo turbulento isotrópico [Lesieur, 1987]. Este resultado

indica que a equação (3.7) descreve bem um campo turbulento onde não existem fontes.

A partir do espectro 3-D dado pela equação (3.23) foram calculadas as componentes verticais do espectro de energia supondo que cada componente unidimensional (1-D) contribui para a formação do espectro tridimensional (3-D) com um determinado peso, que é calculado pela razão entre as médias no tempo da componente considerada e a média no tempo do espectro 3-D. As variâncias das componentes unidimensionais da velocidade e o coeficiente de difusão vertical foram calculados a partir dos espectros unidimensionais. As **Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5** mostram que as variâncias unidimensionais calculadas e o coeficiente de difusão vertical concordam com os resultados obtidos por LES [Nieuwstadt e Brost, 1986] a partir de simulação numérica.

Conclui-se que o modelo proposto neste trabalho pode ser utilizado para calcular a energia cinética turbulenta, a variância das componentes unidimensionais da velocidade e as componentes unidimensionais do coeficiente de difusão durante o período de transição dia-noite. O coeficiente de difusão calculado neste trabalho pode ser utilizados em modelos de dispersão para determinar o campo de concentração de contaminantes durante o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva (**CLC**).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batchelor, G.K., 1949. **"Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence"**, *Cambridge University Press*, 437–450.

Batchelor, G.K., Townsend, A. A., 1948. **"Decay of Isotropic Turbulence in the Initial Period"**, *Proc. Roy. Soc., London A* 193, 539–558.

Cauchey, S.J., and Palmer, S.G., 1979. **"Some Aspects of Turbulence Structure Through the Depth of the Convective Boundary Layer"**. *Qurt. J. Roy. Meteor. Soc.* 105, 811–827.

Champagne, F.H., Friehe, C.A., La Rue, J.C. and Wyngaard, J.C., 1977. **"Flux Measurements, Flux Estimation Techniques, and Fine-Scale Turbulence Measurements in the Unstable Surface Layer over Land"**, *J. Atmos. Sci.*, 34, 515–530.

Deardorff, J.W., 1972. **"Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary"**, *J. Atmos. Sci.*, 29, 91–115.

Degrazi, G., e Anfossi, D., 1998. **"Estimation of the Kolmogorov Constant C_0 from Classical Statistical Diffusion Theory"**, *Atmos. Env.*, 32 (20), 3611–3614.

Degrazi, G., Goulart, A., Anfossi, D., Campos Velho, H., Lukaszcyk, P., Palandi, J., 2003. **"A Model Based on Heisenberg's Theory for the Eddy Diffusivity in Decaying Turbulence Applied to the Residual Layer"**, *Atmos. Env.*, 26 (01), 39–51.

Driedonks, A. G., And Tennekes, H., 1984. **"Entrainment Effects in the well-mixed Atmospheric Boundary Layer"**, *Boundary-Layer Meteor.* 30, 75–105.

Goulart, A., Vilhena, M.T., Degrazia, G., Flores, D., 2007. **"Vertical, Lateral and Longitudinal Eddy Diffusivities for Decaying Turbulence in the Convective Boundary Layer"**. *Ecological Modelling*, 204, 516–522.

Goulart, A., Degrazia, G., Rizza, U., Anfossi, D., 2003. **"A Theoretical Model for the Study of the Convective Turbulence Decay and Comparison with LES data"**, *Boundary-Layer Meteor.*, 107(1), 143-155.

Hinze, J.O., 1975. **"Turbulence"**, Mc Graw Hill, 790 pp.

Lamb, R.G., 1982. **"Diffusion in the Convective Boundary Layer"**, *Atmospheric Turbulence and air Pollution Modelling*, F.T.M. Nieuwstadt and H. Van Dop, Eds., Reidel, 159–229 pp.

Kaimal, J.C., and Wyngaard, J.C., 1976. **"Turbulence Structure in the Convective Boundary Layer"**, *J. Atmos. Sci.* 33, 2152–2169.

Kristensen, L., Lenschow, D., Kirkegaard, P. and Courtney, M., 1989. **"The Spectral Velocity Tensor For Homogeneous Boundary-Layer Turbulence"**, *Boundary-Layer Meteor.* 47, 149–193.

Lesieur, M., 1987. **"Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling"**, *Martinus Nijhoff Publishers*, 288 pp.

Lumley, J.L., and Panofsky, H.A., 1964. **"The Structure of Atmospheric Turbulence"**, Interscience, New York, 239 pp.

Nieuwstadt, F.T.M. and Brost, R.A., 1986. **"The Decay of Convective Turbulence"**, *J. Atmos. Sci.*, 43, 532–546.

Pao, Y.H., 1965. **"Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers"**, *The Physics of Fluids*, 8, 1063–1075.

Panofsky, H.A., and Dutton, J.A., 1984. **"Atmospheric Turbulence"**, 397 ed. Wiley-Interscience, J. Wiley and Sons, 1984.

Sorbjan, Z., 1989. **"Structure of The Atmospheric Boundary Layer"**, Prentice Hall, New Jersey, pp. 317.

Sorbjan, Z., 1997. **"Decay of Convective Turbulence Revisited"**. *Boundary-Layer Meteor.*, v.82, p.501-515

Stull, R.B., 1988. **"An Introduction to Boundary Layer Meteorology"**, Kluwer Academic Publisher, Boston, 666 pp.

Wiley, J., 1997. **"Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems"**, Copyright, pp 10.

Weil, J.C., and Brower, R.P., 1984. **"An Update Gaussian Plume Model for Tall Stacks**, *JAPCA* 34, 818–827.

Willis, G.E., AND Deardorf, J.W., 1976. **"A Laboratory Model of the Unstable Planetary Boundary Layer**, *Quart. J. R. Met. Society* 102, 427–445 pp.

APÊNDICE I

EQUAÇÃO DINÂMICA PARA A FUNÇÃO ESPECTRO DE ENERGIA EM UM FLUXO TURBULENTO HOMOGENEO

Nesta seção apresenta-se o cálculo da equação dinâmica para a função espectro de energia.

Uma equação para a função correlação entre dois pontos distintos de um fluxo turbulento homogêneo pode ser obtida a partir das equações de Navier-Stokes [Hinze, 1975],

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_i U_k) = -\delta_{i3} \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right) g - 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j U_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (\text{I.1})$$

na qual $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ representa a variação com o tempo do momentum por unidade de massa, $\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i U_k)$ representa o gradiente do fluxo de momentum, $-\delta_{i3} \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right) g$ representa a contribuição para a variação de momentum dada pela aceleração da gravidade, feita a aproximação de *Boussinesq* que considera a contribuição do gradiente de temperatura, $-2\varepsilon_{ijk}\Omega_j U_k$ representa a aceleração de *Coriolis* e σ_{ij} é o tensor tensão, que para um fluido *Newtoniano* é dado por (Landau et al., 1989)

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \delta_{ij} \right], \quad (\text{I.2})$$

na qual $-P\delta_{ij}$ representa a contribuição da pressão exercida sobre o elemento de fluido, $\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ representa a contribuição da viscosidade e $-\mu \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \delta_{ij}$ representa a contribuição da dilatação do elemento de fluido.

Será considerado um fluido incompressível ($\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$, $\rho = cte$), e desprezadas as forças externas ($\delta_{i3}g + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j U_k = 0$), porém será mantido o termo de *Boussinesq*

$\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}g\delta_{i3} \neq 0\right)$. Com estas aproximações as equações de Navier-Stokes tornam-se

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = g \frac{\Theta}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}, \quad (\text{I.3})$$

sendo $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ a viscosidade cinemática.

Para obter uma equação para a variação com o tempo da correlação entre as componentes turbulentas da velocidade de dois elementos de fluido localizados em dois pontos A e B vamos escrever a velocidade, a pressão e a temperatura potencial como a soma de uma componente média e outra turbulenta [Stull, 1988],

$$(U_i = \bar{U}_i + u_i)_A \quad P = \bar{P} + p \quad (\text{I.4})$$

$$(U_j = \bar{U}_j + u_j)_B \quad \Theta = \bar{\Theta} + \theta \quad (\text{I.5})$$

Substituindo as relações dadas em (I.4) e (I.5) na equação (I.3), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ g \frac{\bar{\Theta}}{\theta_0} \delta_{i3} + g \frac{\theta}{\theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}, \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

e fazendo a média de *Reynolds* [Stull, 1988] na equação (I.6), tem-se

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = g \frac{\bar{\Theta}}{\theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}, \quad (\text{I.7})$$

pois a média de uma flutuação é zero.

Para trabalhar somente com a perturbação, subtrai-se a equação (I.7) da equação (I.6), obtendo assim a equação para o fluxo turbulento no ponto A

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} u_i + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \overline{u_i u_k}) = \right. \\ \left. g \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right]_A \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Escrevendo uma equação equivalente para o ponto B; multiplicando a equação (I.8) por $(u_j)_B$ e a equação para o ponto B por $(u_i)_A$, e somando as duas equações para obter a

correlação, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A (u_j)_B + (u_j)_B (u_k)_A \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + (u_i)_A (u_k)_B \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B \\
& + (\bar{U}_k)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B + (\bar{U}_k)_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B \\
& = - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (\overline{u_i u_k})_A + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (\overline{u_j u_k})_B \\
& - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A \right] \\
& + \frac{g}{\theta_0} \left[(u_i)_A \theta_B \delta_{j3} + (u_j)_B \theta_A \delta_{i3} \right] \\
& + \nu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_B \right] (u_i)_A (u_j)_B
\end{aligned} \tag{I.9}$$

Devido a não homogeneidade do fluxo turbulento, os valores dos produtos das velocidades na equação (I.9) são funções da distância entre os pontos A e B, e da localização destes pontos. Para diferenciar entre os efeitos causados pela distância e pela localização, introduz-se as seguintes variáveis:

$$r_k = (x_k)_B - (x_k)_A \quad (x_k)_{AB} = \frac{1}{2} [(x_k)_A + (x_k)_B] \tag{I.10}$$

Considerando os seguintes tensores correlação [Hinze, 1975],

$$\begin{aligned}
\overline{(u_i)_A (u_j)_B} &= R_{i,j}(\vec{r}, t) \\
\overline{p_A (u_j)_B} &= P_{p,j}(\vec{r}, t) \\
\overline{p_B (u_i)_A} &= P_{i,p}(\vec{r}, t) \\
\overline{(u_i)_A \theta_B} &= T_{i,\theta}(\vec{r}, t) \\
\overline{\theta_A (u_j)_B} &= T_{\theta,j}(\vec{r}, t) \\
\overline{(u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B} &= S_{i,kj}(\vec{r}, t) \\
\overline{(u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A} &= S_{ik,j}(\vec{r}, t),
\end{aligned} \tag{I.11}$$

fazendo a média e a mudança de variável indicadas na relação (I.10), pode-se escrever a

seguinte equação para os tensores correlação a partir da equação (I.9),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + R_{k,j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + R_{i,k} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B \\
& + \frac{1}{2} [(\bar{U}_k)_A + (\bar{U}_k)_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} R_{i,j} + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} (S_{i,kj} + S_{ik,j}) - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) \\
& - \frac{1}{2\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{AB} P_{p,j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} P_{i,p} \right] \\
& + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} - \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} \right] + \frac{g}{\theta_0} [\delta_{3j} T_{i,\theta} + \delta_{i3} T_{\theta,j}] \\
& + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_{AB} R_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j}
\end{aligned} \tag{I.12}$$

A relação (I.12) é a equação dinâmica completa para a correlação das velocidades entre dois elementos de fluido de um fluxo turbulento não homogêneo e não isotrópico, localizados em dois pontos distintos [Hinze, 1975].

Se a turbulência for homogênea, todas as derivadas em relação a $(x_k)_{AB}$ são nulas (devido a invariância frente a translação), e a equação (I.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + R_{k,j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + R_{i,k} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = \\
& - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} - \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} \right] + \frac{g}{\theta_0} [\delta_{3j} \top_{i,\theta} + \delta_{i3} \top_{\theta,j}] \\
& + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j}
\end{aligned} \tag{I.13}$$

Será considerado que a velocidade média do fluxo turbulento está na direção de um dos eixos do sistema de referência,

$$\begin{aligned}
& \bar{U}_1 = f(x_2) \\
& \bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0 \\
& \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = cte.
\end{aligned} \tag{I.14}$$

Como

$$R_{k,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = R_{1,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_1} + R_{2,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2} + R_{3,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_3},$$

tem-se pelas equações (I.14) que $R_{1,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_1}$ e $R_{3,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_3}$ são nulos, e $R_{2,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2}$ se $i \neq 1$, então

obtém-se

$$R_{k,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = R_{2,j} \delta_{i1} \frac{d\bar{U}_i}{dx_2}$$

Da mesma forma

$$R_{i,k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} = R_{i,2} \delta_{j1} \frac{d\bar{U}_j}{dx_2}$$

Por definição $r_2 = (x_2)_B - (x_2)_A$ e $\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \frac{(\bar{U}_1)_B}{(x_2)_B}$. Logo $(\bar{U}_1)_B - (\bar{U}_1)_A = r_2 \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$ e como $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0$, obtém-se

$$[(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,j} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$$

Nestas condições a equação (I.13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + \left(\delta_{i1} R_{2,j} + \delta_{j1} R_{i,2} + r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) \\ - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} - \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} \right] + \frac{g}{\theta_0} [\delta_{3j} \top_{i,\theta} + \delta_{i3} \top_{\theta,j}] + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Considerando a propriedade de invariância sob reflexão em um fluxo homogêneo ($S_{ik,j} = -S_{j,ik}$ e $P_{i,p} = -P_{p,i}$) [Hinze, 1975], e ainda devido a simetria do tensor correlação tripla da velocidade com respeito aos índices para um mesmo ponto ($S_{ik,j} = S_{ki,j}$ e $S_{i,jk} = S_{i,kj}$), pode-se definir

$$\begin{aligned} S_{i,j} &\equiv - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) = \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{jk,i} + S_{ik,j}) \\ P_{i,j} &\equiv \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} - \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} = \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} + \frac{\partial}{\partial r_i} P_{j,p} \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Considerando as definições feitas em (I.16), a equação da continuidade ($P_{i,i} = 0$) e contraindo os índices (i=j), obtém-se a seguinte expressão para a equação (I.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{i,i} + \left(2\delta_{i1} R_{i,2} + r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,i} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,i} + \frac{g}{\theta_0} [\top_{\theta,3} + \top_{3,\theta}] \\ + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,i} \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

A equação (I.17) descreve a variação com o tempo da correlação entre as componentes turbulentas da velocidade de dois pontos localizados em um fluxo turbulento homogê-

neo.

A equação dinâmica para o espectro de energia é obtida a partir da Transformada de Fourier da equação (I.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{i,i}(\vec{k}, t) + \left(2\Phi_{1,2}(\vec{k}, t) - k_1 \frac{\partial \Phi_{i,i}(\vec{k}, t)}{\partial k_2} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = T_{i,i}(\vec{k}, t) + \frac{g}{\theta_0} [H_{\theta,i} + H_{i,\theta}](\vec{k}, t) \\ - 2\nu k^2 \Phi_{i,i}(\vec{k}, t), \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

consideradas as seguintes Transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint R_{i,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \\ T_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint S_{i,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \\ H_{\theta,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint \Upsilon_{\theta,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \\ H_{i,\theta}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint \Upsilon_{i,\theta}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Integrando os termos da equação (I.19) sobre uma superfície esférica de raio k no espaço de Fourier, e definindo

$$M(k, t) \equiv - \left(2\Phi_{1,2}(k, t) - k_1 \frac{\partial \Phi_{i,i}(k, t)}{\partial k_2} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}, \quad (\text{I.20})$$

na qual $k = |\vec{k}|$, pode-se escrever a equação (I.18) da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t; z) = M(k, t; z) + T(k, t; z) + \frac{g}{\theta_0} H(k, t; z) - 2\nu k^2 E(k, t; z) \quad (\text{I.21})$$

Nesta equação $E(k, t; z)$ é a função espectro de energia ou simplesmente espectro de energia, $M(k, t; z)$ é o termo de produção de energia por efeito mecânico, $T(k, t; z)$ descreve a transferência de energia cinética entre os turbilhões de diferentes números de onda por efeito inercial, $H(k, t; z)$ é o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico, e $-2\nu k^2 E(k, t; z)$ representa a dissipação de energia por viscosidade molecular.