

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS NÃO-ISOTÉRMICOS, INCOMPRESSÍVEIS, UTILIZANDO  
SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS E O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

por

Elizaldo Domingues dos Santos

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Novembro de 2007

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS NÃO-ISOTÉRMICOS, INCOMPRESSÍVEIS, UTILIZANDO  
SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS E O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

por

Elizaldo Domingues dos Santos

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transportes

Orientador: Prof. Dr. Adriane Prisco Petry

Aprovada por:

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 22 de Novembro de 2007

“A Ciência sem a religião não é completa, a religião sem a ciência é cega”

Albert Einstein

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a “DEUS” por ter colocado sempre as pessoas corretas no momento certo da minha vida.

À minha esposa Janice, por suportar todos os momentos árdus na realização deste trabalho, pelo amor e felicidade que sempre me proporcionou e por sua fé inabalável.

A meus pais (Paulo e Elizabete) pelo apoio incondicional, carinho, amor e pela estrutura pessoal e moral que sempre me deram.

Ao meu sogro (Jair) e minha sogra (Loiracy) por terem sido meus segundos pais, me auxiliando e apoiando em todos os momentos deste trabalho e também por terem cuidado da minha esposa.

Ao meu irmão (Elizandro) “*in memoriam*” por ter me incentivado a entrar para a área da Engenharia e por ter sido sempre um exemplo de um ser humano caridoso, amigo e leal.

A minha sobrinha (Nataly) pelas vezes que não pude dar toda atenção e carinho que ela merecia.

À minha tia Suely pela amizade e auxílio, abrigando-me em sua casa com o intuito único de me ajudar.

À minha orientadora (Dr. Adriane Prisco Petry) pelo auxílio, compreensão, amizade e pelo bom caráter demonstrado durante todo o tempo em que convivemos.

Aos professores e funcionários do PROMEC pela estrutura oferecida para a realização deste trabalho, em especial aos professores: Dr. Francis Henrique Ramos França e Dr. Sérgio Luiz Frey, pela significativa contribuição na análise do texto.

Aos professores da FURG pelo apoio para ingressar no mestrado, em especial os professores: Dr. Jorge Alberto Almeida, Dr. Sônia Magalhães dos Santos e Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha, pelo incentivo e créditos de confiança através de suas cartas de recomendação.

Ao professor Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha pela orientação durante a graduação, pela amizade, pelas críticas construtivas realizadas a este trabalho e também por ser um grande exemplo como profissional e como pessoa.

A todos os colegas da FURG e do PROMEC, pelas críticas, sugestões e também por sempre terem proporcionado um convívio tranqüilo, ou seja, me aturaram.

A Capes pelo apoio Financeiro.

Ao GESTE e ao CESUP pelos recursos disponibilizados.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico sobre escoamentos incompressíveis, não isotérmicos, bi e tridimensionais nos regimes laminar e turbulento através da Simulação de Grandes Escalas e da utilização do Método de Elementos Finitos. Para tornar isso possível, é implementada a equação da energia e os termos de forças de campo (empuxo) em um algoritmo numérico desenvolvido em FORTRAN, já existente, que simula escoamentos incompressíveis, isotérmicos, tridimensionais, nos regimes laminar e turbulento.

O código desenvolvido abrange escoamentos onde as formas básicas de troca térmica ocorrem por difusão e advecção. No que tange a natureza da convecção térmica é possível analisar escoamentos com convecção forçada, mista ou natural.

O método numérico empregado é o de elementos finitos (FEM) e a discretização espacial das equações que governam o fenômeno (continuidade, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia) é realizada através do método de Galerkin. Para a análise dos termos temporais nos escoamentos transientes aplica-se o esquema temporal explícito de Taylor-Galerkin. O elemento finito utilizado é o hexaedro isoparamétrico de oito nós.

É empregado o método da pseudo-compressibilidade com o objetivo de manter os termos derivados da pressão na equação da continuidade, pois essa ausência gera uma dificuldade adicional na discretização das equações.

Para a abordagem da turbulência é empregada a simulação de grandes escalas (LES) com modelagem sub-malha clássica de Smagorinsky para a viscosidade e a difusividade turbulenta.

Visando a melhoria no tempo de processamento foi utilizada integração explícita das matrizes dos elementos e a técnica de processamento paralelo OpenMP.

São apresentados resultados para escoamentos com vários números de Reynolds, Prandtl e de Grashoff dos campos de velocidade, pressão e temperatura para escoamentos em cavidade bi-dimensional, nos regimes laminar e turbulento, e para o degrau tri-dimensional no regime laminar.

As simulações para escoamentos em cavidades nos regimes laminar e na região de transição são comparados com os resultados de outros autores, se mostrando bastante satisfatórios, tanto no regime transiente como no permanente. Além disso, a inserção das forças de campo no código melhorou os resultados obtidos com o mesmo. As outras simulações são apresentadas como novos casos e tiveram um comportamento qualitativamente satisfatório.

Palavras-Chave: Equação Energia, LES, FEM, Cavidade, Degrau

## ABSTRACT

### “ANALYSIS OF NON-ISOTHERMAL, INCOMPRESSIBLE FLOWS, USING LARGE EDDY SIMULATION AND FINITE ELEMENT METHOD”

A numerical study about non-isothermal, bi and three-dimensional, incompressible, laminar and turbulent flows is done in this work using Large Eddy Simulation and Finite Element Method. To become this possible, is implemented the energy equation and buoyance forces (in the Navier-Stokes equations) in a numerical algorithm, developed in FORTRAN, already existent, that simulate isothermal, three-dimensional, incompressible, laminar and turbulent flows.

The developed code includes flows where the basic forms of heat transfer are diffusion or advection. About the nature of thermal convection it is possible to analyze the forced, mixed or natural convection flows.

The numerical method used is the finite element method (FEM) and the spatial discretization of governing equations of phenomena (mass, conservation of momentum and conservation of energy) is done through Galerkin method. To analyze the time-dependent terms in transient flows is employed a time-explicit Taylor-Galerkin scheme. The finite element used is the isoparametric hexahedral with eight nodes.

It is used the pseudo-compressibility method to keep the pressure terms in continuity equation, because without these terms there are additional difficulties to obtain the discretized equations.

Regarding the turbulence approach, it is employed the large eddy simulation (LES) and for subgrid-scales is used the classical Smagorinsky model to turbulent viscosity and diffusivity.

To minimize the processing time is used explicit integration of element matrix and the multiprocessing technical OpenMP.

Results are presented to a wide range of Reynolds, Prandtl and Grashoff numbers for velocity, pressure and temperature fields to laminar and turbulent, bi-dimensional, lid-driven cavity flow and a laminar three-dimensional backward-facing step.

Simulations of lid-driven cavity flows in laminar and transitional regimes is compared with others authors results, presenting good agreement, in both transient and permanent regimes. Besides that, the implementation of buoyance forces in the present code improved the results obtained by it. The others simulations are presented like new cases and had qualitatively good behavior.

Keywords: Energy Equation, LES, FEM, Cavity, Backward-facing step

# ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Histórico.....	2
1.3. Metodologia e Organização do Trabalho.....	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
2.1. Equações Básicas para Análise de Escoamentos Não-Isotérmicos.....	7
2.2. Escoamentos Turbulentos com Transferência de Calor.....	10
2.3. Análise Numérica em Escoamentos Turbulentos.....	16
2.3.1. Simulação Numérica Direta.....	17
2.3.2. Modelagem Clássica da Turbulência.....	18
2.3.3. Simulação de Grandes Escalas.....	23
2.3.4 – Análise Numérica de Convecção Térmica.....	31
2.4. Método de Elementos Finitos.....	32
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	36
3.1. Equações que Governam o Escoamento.....	36
3.2. Modelagem Matemática dos Escoamentos Turbulentos Usando Simulação de Grandes Escalas.....	42
3.3. Modelos de Turbulência Submalha.....	47
3.3.1. Modelo de Smagorinsky.....	49
4. MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	51
4.1. O Método de Elementos Finitos.....	51
4.2. Formulação Variacional.....	52
4.3. Equações de Elementos Finitos do Problema.....	56
4.4. Discretização Temporal Através do Esquema de Taylor Galerkin.....	61
4.5. Forma Explícita das Matrizes de Elementos Usando Expressões Analíticas e Integração Reduzida.....	66
4.6. Técnica de Processamento Paralelo OpenMP.....	71
5. RESULTADOS.....	74
5.1. Escoamentos Incompressíveis em Cavidade.....	74
5.1.1. Escoamento em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H=100$ ) e ( $Pr=1$ ).....	75
5.1.2. Escoamento em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H=1000$ ) e ( $Pr=1$ ).....	81

5.1.3. Escoamentos em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H = 10000$ ) e ( $Pr = 1$ )...	86
5.1.4. Escoamento em Cavidades Bidimensionais com Convecção Mista ( $Re_H = 400$ ), ( $Pr = 6$ ) e ( $Gr = 16000$ ) .....	90
5.1.5. Escoamento em Cavidades Bidimensionais com Convecção Mista ( $Re_H = 4000$ ), $Pr = 6$ e ( $Gr = 7 \times 10^6$ ) e Análise de Escoamentos com Estratificação Estável e Instável.....	98
5.2. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico.....	107
5.2.1. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico ( $Re_H = 100$ ) e ( $Pr = 1$ ).....	108
5.2.2. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico ( $Re_H = 400$ ) e ( $Pr = 1$ ).....	113
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE FUTUROS TRABALHOS .....	115
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	117



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas

$A_j$	Matriz advectiva com funções de interpolação (quantidade de movimento)
$A_{jT}$	Matriz advectiva com funções de interpolação (energia)
$B_i$	Matriz com funções de interpolação referente aos termos de empuxo dependentes do campo de temperaturas
$C$	Velocidade de propagação do som no meio fluídico [m/s]
$C_S$	Constante de Smagorinsky [-]
$c_p$	Calor específico a pressão constante [J/kg.K]
$c_v$	Calor específico a volume constante [J/kg.K]
$C_{ij}$	Tensor cruzado [N/m <sup>2</sup> ]
$C_{\theta j}$	Fluxo turbulento cruzado [W/m <sup>2</sup> ]
$D_{ij}$	Matriz difusiva com funções de interpolação (quantidade de movimento)
$D_{jT}$	Matriz difusiva com funções de interpolação (energia)
$F_i$	Matriz das funções de interpolação referente aos termos de empuxo com a temperatura de referência e condições de contorno Naturais
$f_i$	Componentes das forças de campo por unidade de volume na direção $i$ [N/m <sup>3</sup> ]
$F_T$	Matriz das funções de interpolação referente aos termos de geração de energia e das condições de contorno Naturais (equação da energia)
$G(x - x')$	Função filtro
$G_i$	Matriz com funções de interpolação dos termos do campo de pressões
$g_i$	Aceleração gravitacional na direção $i$ [m/s <sup>2</sup> ]
$G_j^T$	Matriz com funções de interpolação dos termos da divergência da velocidade
$Gr_H$	Número de Grashoff $\left[ \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu^2} \right]$ [-] (com comprimento característico $H$ )
$J$	Matriz Jacobiana
$ J $	Determinante da matriz Jacobiana
$\bar{J}$	Matriz adjunta da Jacobiana

$K_{SM}$	Energia cinética turbulenta sub-malha [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$k$	Condutividade térmica do fluido [W/m.K]
$L_{ij}$	Tensor de Leonard [N/m <sup>2</sup> ]
$L_{\theta j}$	Fluxo turbulento de Leonard [W/m <sup>2</sup> ]
$Ma$	Número de Mach $\left[ \frac{v}{C} \right]$ [-]
$M_{DP}$	Matriz de massa da pressão discreta ou diagonalizada
$M_{DT}$	Matriz de massa da temperatura discreta ou diagonalizada
$M_{DV}$	Matriz de massa da velocidade discreta ou diagonalizada
$M_P$	Matriz de massa da pressão
$M_T$	Matriz de massa da temperatura
$M_V$	Matriz de massa da velocidade
$Nu$	Número de Nusselt $\left[ \frac{hD}{k} \right]$ [-] (onde $h$ é o coeficiente de troca térmica por convecção e $D$ o comprimento característico)
$P$	Pressão [N/m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{P}$	Espaço funcional do campo de pressão
$\mathbf{P}^h$	Subespaço funcional do campo de pressão
$Pe$	Número de Peclet [ Re.Pr ou $\frac{\rho c_p V h}{k}$ ] [-]
$Pr$	Número de Prandtl $\left[ \frac{v}{\alpha} \text{ ou } \frac{\mu C_p}{k} \right]$ [-]
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento $\left[ \frac{v_t}{\alpha_t} \right]$ [-]
$q_c$	Fluxo de calor por convecção [W/m <sup>2</sup> ]
$q_r$	Fluxo de calor por radiação [W/m <sup>2</sup> ]
$q_j''$	Fluxo de calor difusivo ou por condução na direção $j$ [W/m <sup>2</sup> ]
$q'''$	Razão de geração de energia [W/m <sup>3</sup> ]
$Ra_H$	Número de Rayleigh $\left[ \frac{g \beta \Delta T H^3}{\alpha v} \right]$ [-]
$Re_L$	Número de Reynolds $\left[ \frac{\rho U L}{\mu} \right]$ [-]
$S_{ij}$	Taxa de deformação do campo de velocidades [S <sup>-1</sup> ]

$ \bar{S} $	Tensor taxa de deformação do campo filtrado $\left[ (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \right]$
$T$	Temperatura [K ou °C]
$\mathbf{T}$	Espaço funcional do campo de temperatura
$\mathbf{T}^h$	Subespaço funcional do campo de temperatura
$t$	tempo [s]
$t_{adm}$	tempo adimensional $U_0 t / H$ [-]
$T_c$	Temperatura da superfície fria no domínio [K ou °C]
$T_h$	Temperatura da superfície quente no domínio [K ou °C]
$T_0$	Temperatura no estado de referência $\left[ (T_h - T_c) / 2 \right]$ [K ou °C]
$t_i$	Valores prescritos das forças de superfície no contorno [N/m <sup>2</sup> ]
$v_i$	Velocidade na direção $i$ [m/s]
$\mathbf{V}$	Espaço funcional da velocidade
$\mathbf{V}^h$	Subespaço funcional da velocidade
$x_i$	Coordenada na direção $i$ [m]

#### Letras gregas

$\alpha$	Difusividade térmica [m <sup>2</sup> /s]
$\alpha_t$	Difusividade térmica turbulenta [m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	Coefficiente de expansão volumétrica do fluido [K <sup>-1</sup> ]
$\gamma$	Razão entre os coeficientes de calor específico a pressão e volume constante
$\Gamma$	Contorno do domínio
$\Delta t$	Intervalo de tempo crítico
$\Delta x_i$	Variação da posição na direção $i$ [m]
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker ( $i = j \Rightarrow \delta = 1, i \neq j \Rightarrow \delta = 0$ )
$\zeta_i$	Coordenada normalizada ou computacional no nó $i$
$\eta_i$	Coordenada normalizada ou computacional no nó $i$
$n_j$	Cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção $j$
$\theta(x, y, z)$	Função de interpolação de temperatura

$\theta_j$	Fluxo turbulento sub-malha [W/m <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Viscosidade volumétrica do fluido [kg/m.s]
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido [kg/m.s]
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido [m <sup>2</sup> /s]
$\xi_i$	Coordenada normalizada ou computacional no nó i
$\rho$	Massa específica do fluido [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{ij}$	Forças de superfície normais ou tangenciais no volume de controle [N/m <sup>2</sup> ]
$\tau_{ij}$	Tensor de Reynolds sub-malha [N/m <sup>2</sup> ]
$\phi(x, y, z)$	Função de interpolação de velocidade
$\psi(x, y, z)$	Função de interpolação de pressão
$\Omega$	Domínio

### Índices

$( )^e$	Referente a um elemento do domínio
$( )^*$	Referente as funções peso para as variáveis de pressão, velocidade e temperatura
$\overline{(\ )}$	Termos médios (grandes escalas)
$( )'$	Termos de flutuação (pequenas escalas)
$( )^n$	Variável no passo de tempo n (t)
$( )^{n+1}$	Variável no passo de tempo n + 1 (t + Δt)
$( )_k$	Variável no passo iterativo k
$( )_{k+1}$	Variável no passo iterativo k+1
$( )_{\sim}$	Vetor de funções de interpolação para uma determinada variável
$( )_{\sim}^*$	Vetor de valores nodais da função peso da variável
$\overline{( )}_{\sim}$	Vetor de valores nodais da variável
$( \dot{\ } )_{\sim}$	Vetor das variáveis discretizado no tempo

$( )_{i_0}$  Condições iniciais do escoamento

$( \hat{ } )$  Variáveis primárias prescritas

$( )^T$  Matriz transposta

\* Observação: na determinação analítica das matrizes de elementos  $\alpha$  e  $\beta$  são utilizados para numerar os nós dos elementos.

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.1 – Movimento molecular aleatório gerador do mecanismo de transferência de calor por condução (retirado de [Incropera e DeWitt, 1998]).....	11
Figura 2.2 – Natureza de troca térmica por convecção – a) forçada (cavidade aberta) – b) natural (Rayleigh Bernard) – (retirado de [Brito, 2005]).....	13
Figura 2.3 – Ilustração das subdivisões dos modelos de turbulência.....	20
Figura 2.4 – Filtros utilizados em LES – a) tipo caixa – b) gaussiano – c) expansão truncada de Fourier.....	26
Figura 3.1 – Ilustração das condições de contorno sobre a superfície do domínio.....	38
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo para resolução de escoamentos não isotérmicos.....	65
Figura 4.2 – Ilustração dos elementos hexaédricos de oito nós no domínio físico e no espaço computacional.....	67
Figura 4.3 – Ilustração sobre o princípio de paralelização de um laço com o par-diretivo <code>!\$OMP PARALLEL DO</code> / <code>!\$OMP END PARALLEL DO</code> .....	72
Figura 5.1 – Domínio com dimensões e condições de contorno do escoamento em cavidade ( $Re_H = 100, 1000$ e $10000$ ).....	76
Figura 5.2 – Escoamento em cavidade ( $Re_H = 100$ ) e ( $Pr = 1$ ) no regime permanente – a) vorticidade – b) linha de corrente.....	77
Figura 5.3 – Escoamento em cavidade ( $Re_H = 100$ ) e ( $Pr = 1$ ) no regime permanente – a) campo de temperaturas – b) campo de pressões .....	78
Figura 5.4 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_1^*$ ) ao longo de uma linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	79
Figura 5.5 - Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo de uma linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	79
Figura 5.6 – Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	80
Figura 5.7 - Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	80
Figura 5.8 – Campo de velocidades média no escoamento a $Re_H = 1000$ e $Pr = 1$ no regime permanente – a) Presente trabalho – b) [Oliveira Jr., 2006].....	82
Figura 5.9 – Linhas de corrente no escoamento a $Re_H = 1000$ e $Pr = 1$ no regime permanente – a)	

presente trabalho – b) [Oliveira Jr., 2006].....	82
Figura 5.10 – Campo de temperaturas no escoamento a $Re_H=1000$ e $Pr=1$ no regime permanente – a) com dez isotermas – b) com um grande número de isotermas.....	83
Figura 5.11 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_I^*$ ) ao longo de uma linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H=1000$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	84
Figura 5.12 - Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo de uma linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H =1000$ e $Pr =1$ (regime permanente).....	84
Figura 5.13 - Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0.5$ ) no escoamento a $Re_H=1000$ e $Pr=1$ (regime permanente).....	85
Figura 5.14 - Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0.5$ ) no escoamento a $Re_H=1000$ e $Pr =1$ (regime permanente).....	85
Figura 5.15 – Comportamento do escoamento a $Re_H=10000$ e $Pr =1$ no regime permanente – a) campo de velocidade média e b) campo de pressões.....	87
Figura 5.16 – Comportamento do escoamento a $Re_H=10000$ e $Pr =1$ no regime permanente – a) linhas de corrente – b) campo de temperaturas.....	87
Figura 5.17 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_I^*$ ) ao longo de uma linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H=10000$ e $Pr = 1$ (regime permanente).....	88
Figura 5.18 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo de uma linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0,5$ ) no escoamento a $Re_H =10000$ e $Pr =1$ (regime permanente).....	88
Figura 5.19 - Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0.5$ ) no escoamento a $Re_H=10000$ e $Pr =1$ (regime permanente).....	89
Figura 5.20 - Perfil de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0.5$ ) no escoamento a $Re_H=10000$ e $Pr =1$ (regime permanente).....	89
Figura 5.21 – Domínio com as condições de contorno do escoamento a $Re_H =400$ , $Pr =6$ e $Gr = 16000$ .....	90
Figura 5.22 – Escoamento a $Re_H =400$ , $Pr =6$ e $Gr = 16000$ no regime permanente – a) campo de velocidades média – b) linhas de corrente.....	92
Figura 5.23 – Escoamento a $Re_H =400$ , $Pr =6$ e $Gr = 16000$ no regime permanente – a) campo de vorticidade – b) campo de pressões.....	92
Figura 5.24 – Campo de temperaturas para o escoamento a $Re_H =400$ , $Pr =6$ e $Gr = 16000$ em um tempo adimensional $t_{adm} = 1.4$ – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007].....	93

Figura 5.25 – Campo de temperaturas para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ em um tempo adimensional $t_{adm}=3.7$ – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007].....	93
Figura 5.26 – Campo de temperaturas para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ em um tempo adimensional $t_{adm}=5.0$ – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007].....	94
Figura 5.27 – Campo de temperaturas para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ em um tempo adimensional $t_{adm}\sim 100.0$ – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007].....	94
Figura 5.28 – Esquema indicativo das posições das sondas numéricas no domínio da cavidade.....	95
Figura 5.29 – Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 1 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.27$ ).....	96
Figura 5.30 – Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 2 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.48$ ).....	96
Figura 5.31 – Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 3 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.93$ ).....	96
Figura 5.32 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 1 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.27$ ).....	97
Figura 5.33 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 2 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.48$ ).....	98
Figura 5.34 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a $Re_H=400$ , $Pr=6$ e $Gr=16000$ para a sonda 3 (posição $X^*=0.5$ e $Z^*=0.93$ ).....	98
Figura 5.35 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.04s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	100
Figura 5.36 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.08s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	101
Figura 5.37 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.1995s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	101
Figura 5.38 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.2435s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	101
Figura 5.39 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.2684s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	102
Figura 5.40 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.3585s$ – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	102
Figura 5.41 – Topologia do escoamento a $Re_H=4000$ , $Pr=6$ e $Gr=7\times 10^6$ no tempo $t=0.4335s$	



– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	102
Figura 5.42 – Topologia do escoamento a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ no tempo $t = 0.4555s$	
– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	103
Figura 5.43 – Escoamento com estratificação instável a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ no tempo $t = 0.04s$	
– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	104
Figura 5.44 – Escoamento com estratificação instável a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ no tempo $t = 0.08s$	
– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente..	104
Figura 5.45 – Escoamento com estratificação instável a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ no tempo $t = 0.1995s$	
– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	104
Figura 5.46 – Escoamento com estratificação instável a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ no tempo $t = 0.2435s$	
– a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente.....	105
Figura 5.47 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ para a posição $X^* = 0.5$ e $Z^* = 0.28$ .....	106
Figura 5.48 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a $Re_H = 4000$ , $Pr = 6$ e $Gr = 7 \times 10^6$ para a posição $X^* = 0.5$ e $Z^* = 0.94$ .....	106
Figura 5.49 – Domínio para o escoamento não isotérmico sobre degrau.....	109
Figura 5.50 – Escoamento sobre degrau a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ para um tempo físico $t = 0.11s$ – a) velocidade em X – b) campo de pressões – c) linhas de corrente – d) campo de temperaturas..	110
Figura 5.51 – Superfícies isotérmicas do campo de temperaturas para um tempo físico $t = 0.11s$ .....	111
Figura 5.52 – Perfil de velocidades para um escoamento em $t = 0.11s$ a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ – a) $x = 1.2m$ – b) $x = 2.4m$ e c) $x = 3.6m$ .....	111
Figura 5.53 – Perfil de temperaturas para um escoamento em $t = 0.11s$ a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ – a) $x = 1.2m$ – b) $x = 2.4m$ e c) $x = 3.6m$ .....	111
Figura 5.54 – Perfil do campo de temperaturas nas posições $x = 0.84m$ , $x = 1.2m$ e $x = 1.44m$ .....	112
Figura 5.55 – Campo de temperaturas no escoamento a $Re_H = 100$ e $Pr = 1$ para um tempo físico $t = 0.165s$ – a) bidimensional – b) superfícies isotérmicas.....	113
Figura 5.56 – Escoamento sobre degrau a $Re_H = 400$ e $Pr = 1$ para um tempo físico $t = 1,32 \times 10^{-2}s$ – a) velocidade em X – b) campo de pressões.....	114

Figura 5.57 – Campo de vorticidade no escoamento sobre degrau a  $Re_H = 400$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 1,32 \times 10^{-2}$  s.....114

Figura 5.58 – Campo de temperaturas no escoamento sobre degrau a  $Re_H = 400$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 1,32 \times 10^{-2}$  s.....114

## ÍNDICE DE TABELAS

	Pág.
Tabela 4.1 – Dados sobre o Cluster SunFire X2200.....	73
Tabela 5.1 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não isotérmica a $Re_H = 100$ e $Pr=1$ .....	76
Tabela 5.2 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não isotérmica a $Re_H = 100$ e $Pr=1$ .....	86
Tabela 5.3 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não isotérmica com a presença de forças de campo a $Re_H = 400, Pr=6$ e $Gr = 16000$ .....	91
Tabela 5.4 – Dados referentes ao escoamento em degrau não isotérmico a $Re_H = 100$ e $Pr=1$ .....	109

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. Motivação

A mecânica dos fluidos e a transferência de calor apresentam-se de forma acoplada em vários fenômenos, tanto no campo da engenharia como nos fenômenos naturais. Entre os diversos exemplos no campo da engenharia estão: escoamentos em trocadores de calor (sem ou com mudança de fase), geradores de vapor, compressores, motores de combustão interna e no resfriamento de circuitos eletrônicos. Na natureza podem ser citados: a formação da pluma em uma chama de cigarro, a dispersão de poluentes na camada atmosférica e o transporte de vapor através da evaporação ocorrida em mares e rios.

Em trocadores de calor, a transferência de calor, a perda de carga, o dimensionamento e a avaliação de desempenho e os aspectos econômicos tem papéis importantes no projeto final. Na relação existente entre a perda de carga e a quantidade de calor trocado, o aumento no número de Reynolds do escoamento (principalmente quando há transição de regime laminar para turbulento) causa um aumento significativo no coeficiente de troca térmica (necessitando de uma menor área construída do trocador). Entretanto, também ocasiona um grande aumento na resistência a passagem do escoamento devido ao aumento da viscosidade aparente no mesmo (gerando a necessidade de dimensionar um sistema motriz mais potente). Este é um exemplo típico onde há um importante estudo destas duas áreas de forma acoplada.

A maior parte dos escoamentos encontrados na natureza e em aplicações práticas são turbulentos, sendo que este regime é predominante devido ao fato que pequenas perturbações injetadas nos escoamentos são naturalmente amplificadas, gerando-se instabilidades que conduzem à transição [Silveira Neto, 2002]. O controle de fenômenos termo-físicos em vários equipamentos e processos de produção é crucial para manter alta qualidade, confiabilidade e operações seguras dos produtos. A partir daí muitos esforços têm sido realizados para desenvolver metodologias para predição e controle de vários escoamentos turbulentos associados com o transporte de um escalar [Kasagi e Iida, 1999].

Esta abordagem possui alguns aspectos positivos e negativos quando comparada aos outros dois métodos de solução (analítico e de experimentação em laboratório). Quanto aos aspectos positivos o método numérico possui maior aplicabilidade que o analítico, visto que neste os problemas possíveis de serem resolvidos possuem hipóteses simplificativas que os desviam demasiadamente do fenômeno físico real. Já quando o método numérico é confrontado com o

experimental em laboratório nota-se que aquele apresenta menor custo e permite a determinação do fenômeno físico em locais de difícil acesso, inseguros ou com condições reais difíceis de reproduzir, como é o caso da transferência de calor no núcleo de reatores nucleares [Maliska, 1995]. Em contrapartida, é possível citar como aspecto negativo da análise numérica em relação à experimental a necessidade de validação do código, comparando a solução numérica obtida com alguma solução experimental existente. Sendo assim, a realização de experimentos em laboratório é indispensável. Portanto, é mais correto afirmar que as análises numérica e experimental (em laboratório) são complementares em diversos aspectos.

No campo industrial a simulação numérica tem sido a abordagem mais utilizada, na tentativa de desenvolvimento de equipamentos térmicos, produtos e processos, predizendo da melhor forma possível seu comportamento. Maliska (1995) apresenta um exemplo referente a esta situação que serve como uma motivação adicional para utilização desta técnica: “o projeto do Boeing 737-300 apresenta uma nova dimensão do reator e uma nova posição do mesmo em relação à asa. No 737-200, o reator era de menor dimensão e colocado sob a asa, enquanto que no 737-300 o mesmo é posicionado avançado em relação à asa. A atual configuração do 737-300 só foi possível porque inúmeros experimentos numéricos foram realizados. Diz-se hoje, entre os especialistas, que o 737-300 não estaria no mercado se não fosse a ajuda prestada pela simulação numérica”. Portanto, a modelagem computacional está hoje bem consolidada como uma alternativa para a análise de problemas de engenharia e, em princípio constitui uma ferramenta extremamente poderosa.

## 1.2. Histórico

Até o final do século XIX a mecânica dos fluidos possuía duas formas de abordagem: a teórica (que estava evoluída em relação às equações de Euler do movimento em escoamento sem viscosidade, mas que apresentava resultados contraditórios aos resultados experimentais em problemas importantes como a perda de carga em tubulações e canais, assim como o arrasto de um corpo imerso em um fluido) e a empírica (fortemente baseada em um grande número de dados experimentais) [Schlichting, 1968]. Prandtl através da Teoria da Camada Limite (1904) buscou unificar o trabalho destes dois ramos de pesquisa na mecânica dos fluidos (sendo, a partir de então, possível tratar matematicamente as equações que realmente descreviam o fenômeno físico de um escoamento laminar incompressível). Primeiramente, a Teoria da Camada Limite foi desenvolvida para o caso do escoamento laminar em um escoamento incompressível,

posteriormente a teoria foi estendida para a inclusão de camadas limite turbulentas, que são mais importantes do ponto de vista prático.

No início do século XX, um terceiro tipo de abordagem começou a surgir para a resolução de equações diferenciais parciais, a abordagem numérica [Lange, 1992]. A partir da década de 60 (aproximadamente) começou a ocorrer um enorme desenvolvimento na eficiência computacional dos equipamentos disponíveis, tornando a obtenção de soluções de equações diferenciais através de métodos numéricos uma realidade, consolidando uma nova abordagem para a mecânica dos fluidos e a transferência de calor, a mecânica dos fluidos e transferência de calor computacional, conhecida como CFD (do inglês – *Computational Fluid Dynamics*). Para se ter uma idéia do crescimento desta técnica nas últimas décadas [Maliska, 1995] diz que a solução de um escoamento turbulento supersônico sobre um aerofólio nos computadores do tipo IBM 704 (existentes na década de 60) consumiria um tempo de computação de aproximadamente 30 anos e com um custo de 10 milhões de dólares, já nos computadores atuais o mesmo problema requer alguns minutos de CPU com custo de centenas de dólares.

Quanto ao método numérico utilizado, o método das diferenças finitas sempre foi empregado pelos analistas da área de escoamento de fluidos, enquanto o método de elementos finitos o foi para a área estrutural, na solução de problemas de elasticidade [Maliska, 1995]. Do ponto de vista físico os problemas são bastante diferentes, sendo os de escoamento altamente não-lineares, enquanto, os elásticos aproximam-se de problemas puramente difusivos de transferência de calor. Até o início da década de 70, tinha-se, portanto, o FDM (Método de diferenças finitas, do inglês – *Finite Difference Method*) com grande experiência na área de fluidos, mas sem habilidades para tratar geometrias complexas, já o FEM (Método de Elementos Finitos, do inglês – *Finite Element Method*) era hábil no tratamento da geometria, mas sem ferramentas para tratar os termos advectivos presentes nas equações do movimento. O FEM não teve sucesso imediato na modelagem de problemas de fluidos, conseguindo avanços significativos nesta área quando passou a empregar metodologias adequadas (alteração de funções de interpolação, métodos estabilizados) que permitiram o tratamento dos termos advectivos não-lineares. O surgimento de outros métodos, paralelos ao avanço do método de elementos finitos, para a solução das equações governantes do problema como o Método de Volumes Finitos, FVM (do inglês: *Finite Volume Method*), e o uso de coordenadas generalizadas, tornou possível a obtenção de soluções qualificadas para problemas de escoamentos (com ou sem transferência de calor) em domínios bastante complexos.

No que tange a relação Escoamentos-Calor, há uma relação histórica entre a mecânica dos

fluidos e a transferência de calor em regiões de interface (superfícies) a qual chamamos convecção [Bejan, 1994]. Especialmente durante os últimos 100 anos, estas duas áreas têm desfrutado de uma relação mutuamente proveitosa no seu desenvolvimento paralelo, uma relação onde um campo é estimulado pela curiosidade sobre o outro campo. Existe uma riqueza de exemplos dessa relação na história da teoria da camada limite e da convecção natural.

### 1.3. Metodologia e Organização do Trabalho

Para uma melhor compreensão da estrutura textual, o presente trabalho foi dividido da seguinte forma:

- Capítulo 2:

É realizada uma revisão bibliográfica sobre a análise de escoamentos turbulentos não-isotérmicos e newtonianos, utilizando uma modelagem numérica através do método de elementos finitos.

São apresentadas as equações básicas que descrevem o fenômeno (conservação de massa, quantidade de movimento e energia) considerando-se o fluido como um meio contínuo e realizando uma análise *Euleriana* para descrição do escoamento. As formas básicas de transferência de calor envolvidas no presente trabalho (difusão e advecção) e a natureza da convecção presente (forçada, natural ou mista) são abordadas. Além disso, são discutidos aspectos físicos dos escoamentos turbulentos e sua influência no transporte de um escalar.

Também é elucidado no presente capítulo alguns tipos de abordagem numérica disponíveis para simulação de escoamentos turbulentos:

- simulação numérica direta, DNS (do inglês – *Direct Numerical Simulation*);
- modelagem clássica, RANS (do inglês – *Reynolds Averaged Navier Stokes*);
- Simulação de Grandes Escalas, LES (do inglês – *Large Eddy Simulation*);

Para concluir a revisão bibliográfica, é feita uma análise sobre o método de elementos finitos (FEM), mostrando características dos diferentes tipos de discretização em elementos finitos aplicados às equações governantes (métodos misto, penalidade e método de pseudo-compressibilidade), algumas características dos esquemas temporais utilizados e as alternativas existentes para estabilização de escoamentos advectivo-dominantes.

- Capítulo 3:

No capítulo 3 é apresentada a modelagem matemática das equações governantes do problema (escoamentos turbulentos, não-isotérmicos e transientes para fluidos newtonianos)

aplicando-se o método de pseudo-compressibilidade para a equação de conservação de massa e a modelagem sub-malha de Smagorinsky para as equações governantes do problema. Neste capítulo, também são inseridas as hipóteses simplificativas utilizadas na modelagem do fenômeno físico (por exemplo, negligência dos termos de dissipação viscosa e de trabalho mecânico reversível realizado por compressão em um volume de controle infinitesimal na equação da energia).

- Capítulo 4:

No Capítulo 4, é apresentada a modelagem numérica, baseada no método de elementos finitos [Hughes, 1987; Reddy e Gartling, 1994; Zienkiewicz e Taylor, 2000], seguindo-se os seguintes passos:

- apresentação da formulação fraca ou de resíduos ponderados das equações governantes;
- aproximação através do método de elementos finitos utilizando-se aproximação da formulação variacional pelo método padrão de Galerkin e utilizando elementos finitos hexaédricos trilineares de oito nós;
- apresentação do esquema temporal utilizado, Taylor-Galerkin, incluindo os termos de segunda ordem [Donea,1984; Azevedo,1999; Burbridge,1999; Rossa,2000; Petry,2002];
- são apresentadas algumas características da técnica utilizada para melhoria no tempo de processamento (OpenMP) e como a mesma foi implementada no código [Oliveira Jr., 2006].

- Capítulo 5:

No capítulo 5 são apresentados resultados obtidos com o código desenvolvido para os campos de velocidade, pressão e temperatura. Foram analisados os seguintes problemas:

- Escoamento forçado em cavidade não isotérmica, bidimensional (com um elemento de profundidade) no regime laminar sem presença de termos de empuxo. O objetivo do presente caso foi obter validação do campo de temperaturas em um escoamento laminar quando o mesmo atinge o regime permanente;
- Escoamento forçado em cavidade não isotérmica, bidimensional (com um elemento de profundidade) no regime turbulento sem presença de termos de empuxo. Foram apresentados novos resultados para o campo médio de temperaturas no escoamento turbulento, visto que os resultados existentes na bibliografia para este tipo de escoamento não apresentam independência de malha, não servindo como comparação;
- Escoamento em cavidade não isotérmica, bidimensional no regime laminar e com



instabilidades (próximo à transição) com presença de termos de empuxo. O objetivo de simular esse caso foi analisar o comportamento transiente e a presença dos termos de empuxo (dependentes do campo de temperaturas) no código, sendo obtido a validação para este tipo de escoamento. Além disso, verificou-se a influência das estratificações estável e instável em um escoamento em regime laminar com instabilidades próximo a transição;

- Escoamento não isotérmico sobre degrau tridimensional no regime laminar. O objetivo do presente caso é mostrar que o código desenvolvido apresenta um comportamento adequado para domínios tridimensionais.

- Capítulo 6:

No capítulo 6 são apresentadas conclusões a respeito do trabalho e sugestões para continuidade do mesmo em trabalhos futuros.

- Capítulo 7:

O capítulo 7 contém as referências bibliográficas citadas no mesmo.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Equações Básicas para Análise de Escoamentos Não-Isotérmicos

Uma das formas de realizar essa análise é através da abordagem clássica da mecânica dos fluidos onde estes são considerados como um meio contínuo, hipótese válida desde que a menor dimensão característica do problema não seja da mesma ordem de grandeza do livre caminho médio das moléculas do fluido. Através desta abordagem adotada podemos considerar todas as propriedades como funções contínuas da posição e do tempo. Sendo assim, é possível descrever o escoamento de uma forma Euleriana (analisando as propriedades em um determinado ponto no espaço como função do tempo).

Para a descrição do fenômeno físico correlacionado com o escoamento de fluidos não-isotérmicos, turbulentos e Newtonianos é necessário, primeiramente, utilizar as equações básicas de conservação de massa, quantidade de movimento e energia [Schlichting, 1968; Bejan, 1994; Fox e McDonald, 1995; Incropera e DeWitt, 1998].

Para a obtenção da equação da conservação de massa ou da continuidade (cujo nome advém de somente depender da hipótese do contínuo) é necessário realizar um balanço da quantidade de massa (entrada, saída e acumulada) em um volume de controle cujas dimensões são infinitesimais. A equação da conservação de massa, válida para bases ortonormais, pode ser expressa pela equação:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo da equação (2.1) é uma derivada material ou substancial,  $\rho$  é a massa específica no domínio e  $v_i$  é a velocidade na direção  $i$ .

Para a obtenção da equação da conservação da quantidade de movimento, aplica-se a segunda lei do movimento de Newton a um volume de controle infinitesimal, onde as forças externas atuantes são as de superfície (representadas por tensões sobre o volume de controle) e as forças de campo ou corpo. As tensões superficiais são obtidas através de equações constitutivas que são escritas em função das variáveis primárias (velocidade e pressão). A equação da conservação da quantidade de movimento pode ser expressa pela equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) - f_i = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.2)$$

onde  $P$  é a pressão termodinâmica local relacionada com a massa específica e a temperatura por uma equação de estado,  $\mu$  é a viscosidade absoluta,  $\lambda$  é a viscosidade volumétrica (existente somente em tensões normais) e  $f_i$  são as forças de campo por unidade de volume. No capítulo 3 estas forças serão reescritas em função da aceleração do campo gravitacional e em função da variação da temperatura para escoamentos onde ocorre a transferência de calor por convecção natural.

O significado físico de  $\lambda$ , segundo [Schlichting, 1968] está conectado com a dissipação de energia ocorrida quando um volume do fluido sofre uma alteração (compressão ou expansão) a uma razão finita, bem como participa da relação de equilíbrio entre a tensão normal e pressão termodinâmica.

Os dois princípios discutidos acima (conservação de massa e a quantidade de movimento linear) são, em muitos casos, suficientes para a resolução da parcela fluido-dinâmica dos problemas de transferência de calor por convecção. Entretanto, temos uma exceção quando o movimento imposto ao fluido é governado pela transferência de calor no meio, ou seja, em casos onde ocorra a convecção natural. Nesse caso o campo de velocidades estará acoplado ao campo de temperaturas e, para determinação do campo de velocidades, há a necessidade de determinarmos o campo de temperatura. Para isso, uma equação adicional é necessária: a equação da conservação da energia ou da Primeira Lei da Termodinâmica. Deve ser observado aqui que, mesmo nos casos onde o mecanismo de convecção é forçado, é necessário inserir a equação adicional da energia, entretanto, a dependência que o campo de velocidades sofre do campo de temperaturas é muito pequena (na maioria dos casos pode ser negligenciada).

Para obter a equação, realiza-se o balanço de energia em um volume de controle infinitesimal, considerando-se: a razão de energia acumulada no volume de controle, as taxas líquida de energia pelo transporte do fluido e de transferência de calor por condução, a razão da geração de calor no volume de controle (reação química, dissipação elétrica) e a taxa de energia dissipada na forma de calor pelo trabalho mecânico de deformação do fluido. O balanço de energia pode ser encontrado mais detalhadamente nas seguintes referências [Bejan, 1994; Schlichting, 1968 e DeWitt e Incropera, 1998]. A equação da energia em termos da energia interna fica descrita pela seguinte equação:

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + q''' - P \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \mu \Phi \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.3)$$

onde  $e$  é a energia interna específica,  $q_i''$  o fluxo de calor por condução,  $q'''$  a taxa de geração de energia por unidade de volume ou uma fonte (sumidouro) de energia e  $\Phi$  uma função de dissipação viscosa. O terceiro termo do lado direito da equação refere-se a um termo de conversão de trabalho mecânico em energia térmica.

O termo referente a função de dissipação viscosa pode ser dado pela equação (2.4):

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right)^2 \quad (2.4)$$

Para expressar a equação da conservação da energia em termos de entalpia, deve-se utilizar a relação termodinâmica entre entalpia e energia interna  $h = e + Pv = e + (1/\rho)P$ , a partir daí podemos expressar a equação:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.5)$$

Finalmente, para descrever a equação da energia em termos de temperatura é necessário expressar a entalpia específica em função da temperatura, através de relações termodinâmicas como: equação fundamental  $Tds$ , equação de estado e uma relação de Maxwell. A utilização dessas relações, assim como a apresentação destas relações são bem descritas nas seguintes referências [Bejan, 1994; Moran e Shapiro, 2002]. Conseqüentemente, a equação da energia para escoamentos incompressíveis pode ser descrita da seguinte forma:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + q''' + \mu \Phi \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.6)$$

onde  $c_p$  é o calor específico para escoamentos incompressíveis e a derivada da temperatura é a

derivada substancial ou material que possui os termos de aceleração local e advectiva. Finalmente, se substituirmos o fluxo de calor fornecido ao volume de controle por condução pela equação constitutiva de Fourier, ou seja, em termos dos gradientes locais de temperatura têm-se a equação da energia escrita da seguinte forma:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q''' + \mu \Phi \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.7)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do fluido. Deve ser observado que nestes tipos de escoamentos, o calor específico a pressão constante é igual ao calor específico a volume constante.

As Equações (2.1), (2.2) e (2.3), mesmo que no presente trabalho seja utilizada a equação (2.7), são as equações básicas que governam os escoamentos não-isotérmicos, Newtonianos e incompressíveis. Deve ser lembrado que a Equação (2.1), da conservação de massa, ainda será modificada através da inserção da hipótese de pseudo-compressibilidade para se adaptar melhor a solução numérica proposta para o problema.

Essa modelagem é válida para escoamentos com número de Mach inferiores a 15 ( $Ma < 15$ ), pois a partir daí as escalas de Kolmogorov começam a atingir as dimensões das escalas moleculares, não sendo mais válido o conceito de viscosidade molecular, nestes casos as equações do tipo Boltzman podem ajudar a modelar os escoamentos [Silveira Neto, 2002].

## 2.2. Escoamentos Turbulentos com Transferência de Calor

A mecânica dos fluidos é um dos mais antigos ramos da física, e está relacionada com o movimento de gases e líquidos e sua interação com as vizinhanças [Schlichting, 1968].

A transferência de calor é um ramo da engenharia que estuda a transferência de energia térmica de um ponto a outro em um meio ou de um meio para outro pela ocorrência da diferença de temperatura. Já do ponto de vista termodinâmico, a transferência de calor é um fenômeno de fronteira em um sistema termodinâmico por meio de uma diferença de temperatura existente entre o sistema e a vizinhança alterando o estado termodinâmico de equilíbrio. O enfoque do presente trabalho está na análise sob o ponto de vista da transferência de calor [Bejan, 1994; Kakaç e Yener, 1995].

Quanto aos mecanismos de transferência de calor básicos, temos:

- condução: processo de transferência de calor gerado pelo movimento molecular

(aleatório de translação, além de movimentos internos de rotação e vibração das moléculas), suplementado em alguns casos pelo movimento de elétrons livres, através do domínio (sólido, líquido ou gasoso) de uma região de alta temperatura para uma região de baixa temperatura [Kakaç e Yener, 1995]. A Figura 2.1 mostra que no processo de condução o movimento molecular é aleatório, mas a grande quantidade do movimento ocorre em uma direção preferencial, ou seja, da maior para a menor temperatura.

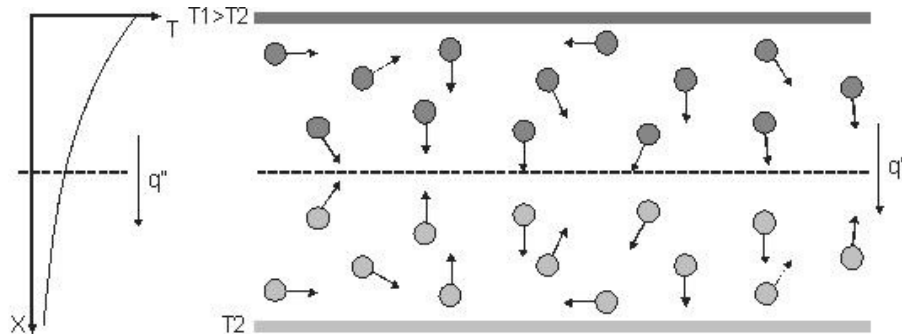


Figura 2.1 – Movimento molecular aleatório gerador do mecanismo de transferência de calor por condução (retirado de [Incropera e DeWitt, 1998])

- radiação: é definida como a energia radiante (eletromagnética) emitida por um meio sendo realizada somente pela temperatura do meio. A troca por energia radiante entre superfícies ou entre uma região e sua vizinhança é descrita pela lei de Stefan-Boltzmann, que afirma que a energia radiante transmitida é proporcional a diferença na quarta potência das temperaturas das superfícies. A constante de proporcionalidade presente na relação entre a energia radiante e a temperatura é conhecida como constante de Stefan-Boltzmann [Siegel e Howell, 2002]. Deve ser lembrado que o mecanismo de radiação não estará sendo analisado no presente trabalho.

- convecção: é o mecanismo de transferência de calor onde a energia transportada por condução ou radiação sofre a ação do movimento do fluido. Em um caso especial, quando o fluido está em repouso, o processo é equivalente a transferência de calor ocorrida em sólidos (condução). A transferência de calor por convecção entre dois pontos distintos é governada pela lei de resfriamento de Newton que afirma que o fluxo de calor é proporcional a diferença de temperatura dos dois pontos, onde a constante de proporcionalidade é chamada coeficiente de transferência de calor por convecção ou coeficiente de película [Bejan, 1994, Kakaç e Yener, 1995].

No que tange a natureza da convecção presente em um escoamento, podemos classificá-la em convecção forçada, natural e mista.

A convecção forçada é aquela onde os escoamentos são formados pela presença de um agente externo, como por exemplo: escoamentos propulsionados por bombas, ventiladores turbinas entre outros. A transferência de calor em trocadores de calor tipo feixe-tubulares, condensadores, geradores de vapor são alguns exemplos onde este tipo de mecanismo é, em geral, predominante. O coeficiente de transferência de calor, nestes casos, é dependente do número de Reynolds ( $Re$ ) e do número de Prandtl ( $Pr$ ), dados pelas seguintes expressões:

$$Re_L = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (2.8)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.9)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $V$  a velocidade do escoamento,  $L$  é um comprimento característico,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\alpha$  é a difusividade do fluido.

Já a convecção natural é aquela, onde o movimento do fluido é realizado inteiramente pela ação de uma força de campo (exemplo: campo gravitacional) onde esta, no presente caso, é originária das forças de empuxo impostas sobre o fluido quando a massa específica na proximidade da superfície aquecida diminui como um resultado do aquecimento do fluido. A rejeição de calor para a atmosfera, o aquecimento de um ambiente, projeto de fornos e coletores solares são alguns exemplos onde a convecção natural está presente. O número de Nusselt, no presente caso, será dependente do número de Rayleigh ( $Ra$ ). Bejan (1994) apresenta uma abordagem mais completa sobre o assunto, inclusive citando critérios para estabelecimento de quando há dominância de um tipo de convecção sobre a outra. A Figura 2.2 ilustra os dois mecanismos de troca térmica (convecção forçada (Figura 2.2.a) e convecção natural (Figura 2.2.b)).

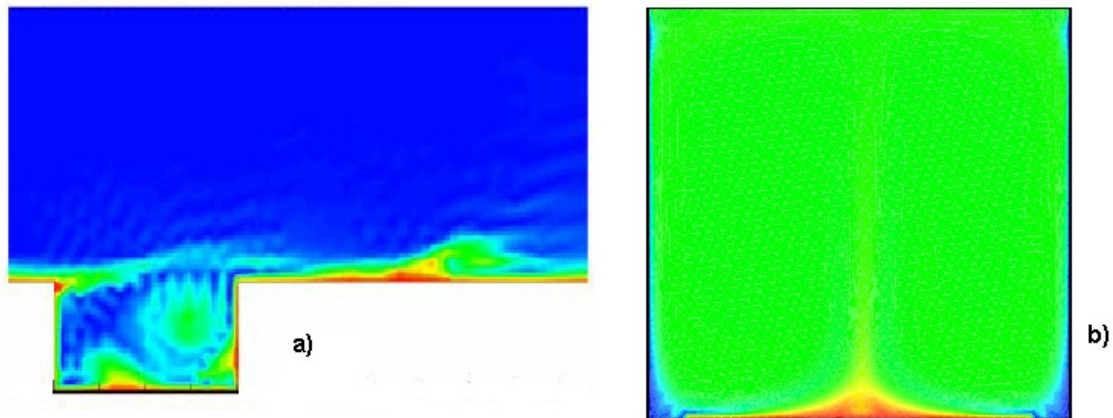


Figura 2.2 – Natureza de troca térmica por convecção a) forçada (cavidade aberta) – b) natural (Rayleigh-Bénard) - (retirado de [Brito, 2005])

Logicamente que o mecanismo de convecção mista (forçada mais natural) é o mais real, e pode, inclusive ser significativamente diferente dos dois tipos de convecção abordadas, pois o mecanismo de convecção natural pode ser associado ou contrário ao movimento imposto pela convecção forçada, ou vice-versa (Um exemplo típico está presente nos escoamentos em tubulações verticais, chaminés entre outros onde haverá uma espécie de incremento no número de Reynolds caso o escoamento esteja no mesmo sentido que atua a força gravitacional e um decremento caso contrário). Entretanto, em alguns casos o mecanismo de convecção natural pode ser desprezível, principalmente para elevados números de Reynolds e baixos números de Grashoff, o que conduz a um baixo número de Richardson ( $Gr/Re^2$ ). Em certas aplicações, entretanto, não é possível negligenciar as forças de campo como no resfriamento de partes rotativas assim como as pás de rotores de turbinas a gás, pois ocorrem devido a presença de grandes forças oriundas da convecção natural.

Além da natureza da convecção, outro parâmetro que influencia na transferência de calor é o tipo de regime do escoamento (laminar ou turbulento). O laminar ocorre a números de Reynolds (ou Rayleigh no caso de convecção natural) baixos e são escoamentos controlados pela difusão viscosa. O regime turbulento ocorre em elevados números de Reynolds quando as tensões viscosas são sobrepostas pela inércia do escoamento. Então o movimento laminar torna-se instável, havendo o surgimento das flutuações de velocidade e pressão que torna o movimento tridimensional e transiente [Wilcox, 2002].

Segundo [Möller e Silvestrini, 2004] não há um consenso na aceitação de uma definição para a turbulência, de forma que todas suas características sejam abrangidas. Foi proposto por [Tennekes e Lumley, 1972] que um escoamento turbulento possui as seguintes características:



irregularidade, difusividade, altos números de Reynolds, tridimensionalidade da vorticidade, dissipação, escoamentos contínuos e a turbulência é uma característica dos escoamentos e não dos fluidos. Uma abordagem bastante interessante sobre as características da turbulência é realizada pelos autores [Silveira Neto, 2002; Möller e Silvestrini, 2004]. Sob o âmbito da transferência de calor, a difusividade é uma das mais importantes características, pois o aumento significativo desta característica no regime turbulento, comparativamente ao regime laminar, ocasiona um aumento significativo da transferência de calor nos escoamentos. Segundo [Wilcox, 2002] as tensões aparentes e os fluxos turbulentos aparentes em escoamentos turbulentos são freqüentemente diversas ordens de magnitude maiores do que nos correspondentes escoamentos no regime laminar.

As equações que descrevem os escoamentos não-isotérmicos turbulentos são as mesmas para os escoamentos não-isotérmicos laminares (continuidade, conservação da quantidade de movimento e energia, que foram descritas no tópico anterior). Tendo em vista que a solução analítica destas é muito complexa, sendo possível sua implementação somente após várias hipóteses simplificativas e para casos pouco reais, são utilizadas ferramentas numéricas para a solução, principalmente em casos de interesse prático. A dificuldade aumenta ainda mais quando outros fenômenos que afetam a turbulência estão presentes, como em escoamentos com estratificação, empuxo, rotacionais, com reações químicas ou compressíveis [Ferziger, 1993].

Além disso, o processo físico é muito difícil de prever pelas interações entre as diferentes escalas, que variam de um máximo comparável à largura do domínio do escoamento a um mínimo fixado pela dissipação viscosa de energia. O processo físico principal que espalha o movimento sobre uma ampla faixa de escalas é o alongamento dos vórtices, transferindo energia do escoamento principal para as pequenas escalas e gerando uma interação significativa das pequenas escalas com o escoamento principal [Wilcox, 2002].

Um processo semelhante ocorre para os termos que envolvem a flutuação de um escalar por causa da associação do gradiente de temperatura com o movimento vortical do escoamento, este processo é mais notável para elevados números de Prandtl. Os componentes com números de onda mais baixos (grandes escalas) das flutuações de velocidade são a causa principal da cascata de flutuações de temperatura [Kasagi e Iida, 1999].

O processo de fluxo de energia cinética das grandes escalas para as menores, até a ocorrência da transformação dessa energia em calor pela dissipação viscosa, é conhecido como “cascata de energia” e foi estabelecido por Kolmogorov. As escalas dissipativas possuem uma escala de tempo muito menor que a das estruturas coerentes. Conseqüentemente, é possível

assumir que o movimento daquelas é estatisticamente independente dos movimentos de grande escala, permitindo (para altos números de Reynolds) assumir a isotropia das pequenas escalas. Sendo esta hipótese válida, o movimento de pequena escala depende somente da energia que recebe das grandes escalas e da viscosidade, sendo a taxa de energia recebida igual a taxa de energia dissipada (teoria do equilíbrio universal de Kolmogorov).

Através desta teoria, é possível perceber que a dissipação viscosa ( $\varepsilon$ ) pode ser expressa em função das grandezas independentes da viscosidade [Silveira Neto, 2002] e o comprimento das pequenas escalas e sua relação com as grandes escalas podem ser expressas pelas Eq. (2.10) e (2.11), respectivamente:

$$l_d = \left( \frac{v^3 L}{U^3} \right)^{1/4} \quad (2.10)$$

$$\frac{L}{l_d} = \text{Re}_L^{3/4} \quad (2.11)$$

Dessa forma, quanto menores os efeitos da viscosidade molecular, ou seja, quanto mais elevado o número de Reynolds, menores são os vórtices de dissipação de energia com relação às grandes escalas da turbulência. Essa característica do fenômeno físico da turbulência é determinante na limitação do emprego da Simulação Direta (DNS) da turbulência [Petry, 2002]. Outro agravante para o emprego desta abordagem em escoamentos turbulentos não isotérmicos é referente a escoamentos com elevados números de Prandtl, pois há um alargamento do espectro da turbulência térmica (usando-se termos de flutuação de temperatura para determinação da densidade espectral) [Kasagi e Iida, 1999].

Um efeito importante que deve ser lembrado é a transferência de energia cinética turbulenta inversa, ou seja, das menores escalas para as maiores escalas. Esse fenômeno é conhecido como *Backscatter* e aparece em regiões de camada limite [Silveira Neto, 2002]. Esse fenômeno pode ser detectado utilizando-se Simulação de Grandes Escalas com modelo sub-malha dinâmico.

Finalmente, deve ser entendido que pelas características dos escoamentos turbulentos, em muitos casos, é necessária a utilização de ferramentas estatísticas para compreensão e análise destes. No entanto, as médias estatísticas não permitem o acesso às mais importantes informações dos mecanismos físicos dos escoamentos, especialmente no que concerne às instabilidades [Silveira Neto, 2002].

### 2.3. Análise Numérica em escoamentos Turbulentos

As primeiras formas de descrever a transferência da quantidade de movimento e energia, principalmente em escoamentos turbulentos, consistiam em utilizar experimentos específicos para obtenção de correlações. Onde quantidades, como o número de Nusselt, eram obtidas para casos menos universais, limitadas a uma determinada geometria do problema e a uma faixa de parâmetros adimensionais para as quais foram ajustadas [Deschamps, 2002]. Atualmente, as metodologias de simulação numérica permitem uma maior universalidade de problemas a serem resolvidos.

Para a realização do experimento numérico da forma mais condizente possível com a experimentação em laboratórios, deve-se ter muito cuidado com alguns fatores como: a determinação das condições iniciais (além de serem muito difíceis de mensurar, possuem uma amplificação exponencial dos erros iniciais pelas interações não lineares, gerando instabilidades dependentes destes ruídos iniciais e determinando estados completamente diferentes nas previsões [Silveira Neto, 2002]); determinação das condições de contorno (principalmente em condições de entrada de escoamentos, em canais, previamente turbulentos, onde não se conhece o escoamento fora do domínio, e da mesma forma que para as condições iniciais terão erros de contorno amplificados). Além disso, nas regiões de camada limite os gradientes das variáveis nos escoamentos turbulentos são muito elevados e muito influentes nos campos destas variáveis sobre o restante do domínio, sendo necessárias uma grande resolução de malha para captar os efeitos dessa região. Como o aumento de malha é diretamente proporcional ao tempo computacional requerido, surgiram alternativas para minimizar a requisição de malha nesta região como a utilização de funções de amortecimento (por exemplo: função de van Driest). Uma abordagem mais específica a respeito das condições de contorno e iniciais que estão presentes nos escoamentos turbulentos e sua implicação nos resultados numéricos pode ser encontrada em [Rogallo e Moin, 1984; Ferziger, 1993].

As três principais abordagens utilizadas atualmente para solução numérica de escoamentos turbulentos são: Simulação Numérica Direta (resolvendo diretamente todas as escalas da turbulência), modelagem estatística clássica (simulação numérica do comportamento temporal médio) e modelagem sub-malha (simulação numérica direta das grandes escalas e modelagem das pequenas escalas). As mesmas serão abordadas nos próximos itens.

### 2.3.1. Simulação Numérica Direta

A simulação Numérica Direta consiste em resolver diretamente todas as escalas do escoamento turbulento. Uma grande vantagem na aplicação desta abordagem está no fato de obter solução generalizada de qualquer tipo de escoamento turbulento (dentro das restrições matemáticas impostas) sem a aplicação de constantes ajustáveis. Como desvantagem, somente é possível simular escoamentos em geometrias simples e a baixos números de Reynolds.

Além da generalidade de casos possíveis de serem resolvidos, a simulação numérica direta conduz a resultados comparáveis a dados experimentais de qualidade. Ainda com as vantagens de que são obtidos dados detalhados de todas as variáveis de interesse no campo de escoamento e as condições de contorno e iniciais são definidas de forma clara. Além disso, a simulação direta tem auxiliado na melhoria dos modelos de turbulência, visto que tem produzido uma grande quantidade de dados detalhados a respeito das variáveis presentes nos escoamentos [Ferziger, 1993]. O único erro introduzido é referente ao método numérico utilizado para resolver as equações diferenciais, devendo-se garantir que este erro não seja significativo.

Como discutido na seção 2.2 a razão da maior escala para a menor escala da turbulência é diretamente proporcional ao número de Reynolds ( $Re^{3/4}$ ) para cada direção em um escoamento turbulento isotérmico. Sendo a turbulência naturalmente tridimensional, o número de graus de liberdade assume uma proporção de  $Re^{9/4}$  e a malha requerida possui um número de nós (elementos finitos) ou volumes (volumes finitos) igual ao número de graus de liberdade. Quando há a presença da transferência de calor (assim como de massa) o número de graus de liberdade é ainda maior, devido ao alongamento do espectro envolvendo as flutuações do campo escalar, sendo a razão entre as maiores e menores escalas da variável térmica proporcionais ao número de Prandtl ( $Pr^{1/2} Re^{3/4}$ ) para cada dimensão do escoamento, isso significa que a relação entre o número de pontos necessário para obtenção do campo térmico e do campo de velocidades em um escoamento turbulento tridimensional é proporcional a  $(Pr^{3/2})$  [Kasagi e Iida, 1999]. Segundo [Wang et al., 2005] o problema é ainda mais crítico, pois o mesmo considera o número de graus de liberdade no escoamento tridimensional não isotérmico proporcional a  $Pr^3$ . Então, a simulação direta torna-se mais onerosa (em termos de tempo computacional) de forma proporcional ao crescimento do número de Prandtl.

As estruturas de pequenas escalas ainda influenciam, sob o ponto de vista numérico, o incremento de tempo no avanço da integração numérica deve ser tão menor quanto menor for o

tempo de vida dos vórtices de pequena escala (e o número de Courant também será suficientemente pequeno) [Kasagi e Iida, 1999]. Enquanto isso, o tempo total da integração deveria ser muito maior do que o tempo de vida dos vórtices de grandes escalas visando obter estatísticas da turbulência bem convergidas.

Outros autores também podem ser citados no estudo de escoamentos não isotérmicos turbulentos aplicando a Simulação Numérica Direta: simulação de escoamentos em domínios com aplicabilidade em dispositivos nucleares [Grötzbach e Wörmer, 1999]; simulação de escoamentos com transferência de calor ao redor de cilindros [Giacomello et al., 2006]; aplicação de DNS na simulação de escoamentos turbulentos em cavidades com convecção natural [Ma et al., 2007] e estudo do comportamento de escoamentos não isotérmicos em canais com obstáculo [Kawamura et al., 2007].

### 2.3.2. Modelagem Clássica da Turbulência

Este tipo de modelagem é o mais empregado no âmbito industrial em situações práticas de engenharia, pois o esforço computacional requerido é o menor dentre as abordagens numéricas existentes. Dessa forma é possível estimar satisfatoriamente alguns parâmetros de engenharia (perdas de carga, taxa de transferência de calor) utilizando-se somente a simulação dos campos médios dos escoamentos turbulentos.

Com a impossibilidade de resolução analítica das equações governantes para um escoamento turbulento, Reynolds no final do século XIX propôs analisar tais equações através da decomposição das variáveis em campos médios e flutuantes no tempo. Essa decomposição conduziu ao conhecido problema do fechamento, onde se tem um maior número de incógnitas do que equações.

Segundo essa hipótese, qualquer variável instantânea do escoamento pode ser expressa através de uma quantidade média e uma quantidade flutuante no tempo, conforme expresso por:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \quad (i= 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.12)$$

Sendo assim, é possível uma descrição somente do escoamento médio, pois as flutuações são removidas das variáveis dependentes, permitindo o uso de malhas bem menos refinadas e minimizando os recursos computacionais requeridos para estimativa do escoamento. A variável

média é obtida através de um processo de integração em um longo intervalo de tempo de tal forma que possamos desprezar as flutuações instantâneas do escoamento. A Eq. (2.13) expressa como é realizado esse processo para uma variável genérica  $f(t)$ :

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} f(t) dt \quad (2.13)$$

Já os termos de flutuação são obtidos através da diferença entre a variável instantânea e a variável média, conforme demonstrado na Eq. (2.12). O valor de  $T$  (intervalo de tempo) deve ser indefinidamente longo no caso limite do valor médio. Na prática, o valor médio pode ser estabelecido num intervalo de tempo pequeno que, dependendo do escoamento, pode representar uns poucos segundos [Deschamps, 2002].

Para obtenção das equações médias para o escoamento turbulento, aplica-se o operador média sobre as equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento e energia e segue-se as propriedades da média temporal, para as variáveis genéricas  $f$  e  $g$  [Wilcox, 2002; Silva Freire et al., 2002].

As equações obtidas através desta hipótese da média temporal são válidas para qualquer instante de tempo e são independentes da origem no tempo considerada. Aplicando-se, então, o processo de média as equações (2.1),(2.2) e (2.7) obtemos as equações médias de Reynolds (continuidade, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia, respectivamente) também conhecidas como RANS (do inglês – *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) para um escoamento turbulento e não isotérmico:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{v} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \overline{v'_i v'_j} \right] + \bar{f}_i \quad (i,j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{v'_j T'} \right] + \bar{q}''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.16)$$

Deve ser ressaltado que as tensões de Reynolds ( $\overline{v'_i v'_j}$ ), assim como os fluxos turbulentos

$(\overline{v_i' T'})$ , possuem uma natureza física semelhante à viscosidade e a difusividade molecular, respectivamente, embora sua origem esteja relacionada com os termos advectivos não lineares. Assim, tais termos aparecem no lado direito das equações (2.15) e (2.16) junto com os termos de difusão.

Com o intuito de realizar o fechamento das equações descritas acima surgiram modelos de turbulência, que são um conjunto de equações que modelam o comportamento dos termos adicionais nas equações médias de Reynolds. Segundo [Deschamps, 2002] algumas características desejáveis desses modelos são: simplicidade matemática, menor número possível de conceitos físicos envolvidos, previsão de uma grande variedade de escoamentos sem fixar constantes ajustáveis e é conveniente que o mesmo seja numericamente estável.

Os modelos podem ser classificados como dependentes ou independentes do conceito de viscosidade turbulenta, introduzido por Boussinesq (1877) [Hinze, 1975]. A Figura 2.3 ilustra como são sub-divididos os modelos clássicos de turbulência.

Dentro do grupo de viscosidade turbulenta existem outros grandes grupos de modelos como os algébricos, a uma equação e a duas equações, onde por definição, um modelo a  $n$ -equações significa que é um modelo que requer a solução de  $n$  equações diferenciais de transporte adicionais as de conservação do escoamento médio [Wilcox, 2002].

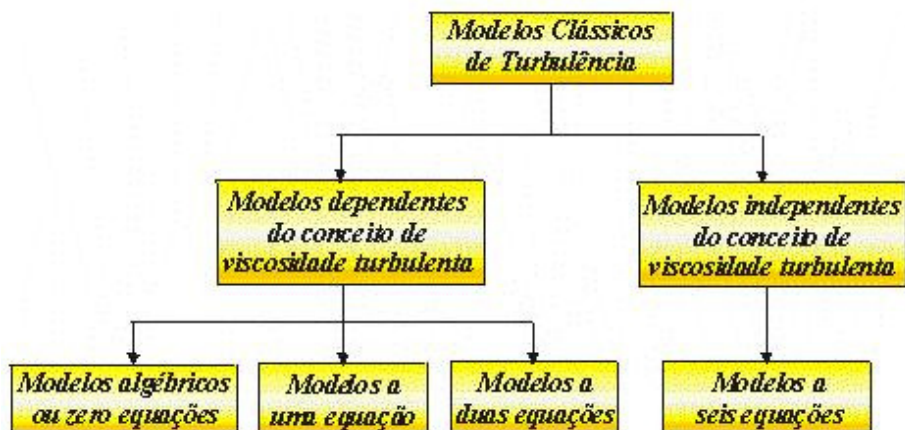


Figura 2.3 – Ilustração das subdivisões dos modelos de turbulência

Segundo [Wilcox, 2002] dentre os modelos dependentes do conceito de viscosidade turbulenta, os algébricos são os mais simples e fáceis de implementar. Eles raramente causam dificuldades numéricas inesperadas. Um dos grandes problemas destes modelos consiste na não universalidade dos mesmos, necessitando alteração de constantes ajustáveis para cada tipo de escoamento (por exemplo: o modelo do comprimento de mistura de Prandtl que relaciona os

termos de transporte turbulento com os valores locais das quantidades do escoamento médio através de uma constante) assim estes trabalham bem somente com escoamentos onde o modelo tenha sido bem ajustado.

Além disso, os modelos algébricos são pouco confiáveis para escoamentos com separação, devido aos pequenos gradientes de velocidade média nesta região e são incapazes de prever níveis elevados de turbulência verificados experimentalmente em regiões de estagnação do escoamento, pois o mesmo não inclui os mecanismos de transporte por advecção e difusão no cálculo de  $v_t$  [Deschamps, 2002]. O modelo algébrico mais conhecido é o do Comprimento de mistura de Prandtl. Entre outros modelos existentes podem ser citados os modelos de Johnson-King e Baldwin-Lomax [Wilcox, 2002].

Os modelos a uma equação são baseados na equação da energia cinética turbulenta, sendo incompletos devido à necessidade de se prescrever uma escala de comprimento da turbulência para cada nova aplicação. Essa prescrição é uma das principais deficiências do modelo, visto que essa tarefa é de difícil execução na grande maioria dos escoamentos, exceto para geometrias bastante simples. Outra deficiência apresentada está em escoamentos do tipo jato livre, onde a razão de espalhamento para os jatos planos, de perfil quadrado e redondo apresentam valores não condizentes com os experimentais de laboratório.

O modelo a uma equação mais conhecido é o de Spalart e Allmaras (1992) que apresenta predições bastante satisfatórias para muitas aplicações de engenharia, sendo especialmente atrativo em aplicações de escoamentos sobre aerofólios e asas, para o qual tem sido calibrado. Um outro modelo conhecido é o de Baldwin-Barth. Entretanto este modelo, segundo [Wilcox, 2002], apresenta resultados inferiores ao de Spalart e Allmaras, além de apresentar algumas dificuldades numéricas quando se usa o método de diferenças finitas.

Os modelos a duas equações são mais completos, visto que podem ser usados para prever as propriedades de um escoamento turbulento dado sem um conhecimento prévio da estrutura da turbulência. Um dos problemas nestes modelos é a utilização de uma série de constantes ajustáveis, que são obtidas através de testes e medições experimentais em condições específicas ideais como: escoamentos sobre placa plana e escoamentos através de uma tela (há uma certa distância da mesma onde é possível obter uma maior condição de isotropia no escoamento).

Os modelos a duas equações também são baseados na aproximação de Boussinesq e na equação da energia cinética turbulenta, devido ao pouco empirismo usado na sua obtenção. Entretanto, há uma arbitrariedade na forma de definir a escala de comprimento da turbulência,  $l$ , que será utilizada conjuntamente com a escala de velocidade,  $k^{1/2}$ . Kolmogorov (1942), por



exemplo, afirmou que a segunda equação de transporte necessária deveria computar a então chamada razão de dissipação específica,  $\omega$ , cuja dimensão é  $(\text{tempo})^{-1}$ , originando o modelo  $k - \omega$ . Este modelo mais tarde foi aprimorado por outros pesquisadores como Wilcox (1988). Outros estudos realizados, principalmente, por Launder e Spalding (1972) apontam para a utilização de outra equação de transporte da dissipação da energia cinética  $k$  ( $\varepsilon$ ), originando o modelo a duas equações conhecido como  $k - \varepsilon$ , sendo este o modelo a duas equações mais utilizado no mundo.

Estes modelos são falhos na previsão de escoamentos afastados da condição de equilíbrio local, sendo deficiências sérias o suficiente a ponto de exigir cautela na sua utilização em escoamentos complexos [Deschamps, 2002]. Algumas situações onde os mesmos apresentam deficiências são: escoamentos sobre superfícies côncavas ou convexas, presença de gradientes adversos de pressão, separação da camada limite ou com atuação significativa de forças de campo. Para tais situações muitas correções foram implementadas a fim de minimizar as deficiências presentes nestes tipos de escoamentos.

Já os modelos de transporte das tensões de Reynolds não passam pela hipótese de viscosidade turbulenta de Boussinesq. Esta modelagem está fundamentada na dedução de equações de transporte para cada componente das tensões de Reynolds.

As componentes do tensor de Reynolds são momentos de segunda ordem, então quando são obtidas as equações de transporte das tensões de Reynolds, são gerados momentos de terceira ordem e assim sucessivamente, necessitando um modelo de turbulência para fechamento destes novos momentos e conduzindo à utilização de relações complementares de proporcionalidade, que exigem a utilização de constantes ajustáveis. Considerando o tensor das tensões de Reynolds simétrico, são obtidas seis novas equações, uma para cada componente independente das tensões de Reynolds. Entretanto, vinte e duas novas incógnitas também foram geradas.

Segundo [Wilcox, 2002] estes modelos são mais universais que os modelos dependentes da viscosidade turbulenta, ou seja, utilizando-se um mesmo número de constantes ajustáveis, pode-se simular escoamentos mais diversificados, com boa confiabilidade. Estes apresentam resultados mais exatos, principalmente para escoamentos onde a anisotropia das tensões normais é importante. [Deschamps, 2002] afirma que esta modelagem ainda possibilita a interpretação física de efeitos de curvatura do escoamento. Entretanto, como todo modelo mais universal, do ponto de vista computacional estes são mais difíceis de resolver do que os modelos a duas equações, devido à inserção de mais seis equações de transporte.

Uma boa abordagem a respeito dos modelos clássicos de turbulência existentes, suas aplicações e limitações nos diversos tipos de escoamentos existentes (canais, placas e jatos) além

das deduções das equações para o transporte das tensões de Reynolds, energia cinética turbulenta, razão de dissipação específica  $\omega$  e da dissipação da energia cinética  $\varepsilon$  podem ser encontradas em [Wilcox, 2002] e [Silva Freire et al., 2002].

### 2.3.3. Simulação de Grandes Escalas

A Simulação de Grandes Escalas teve sua origem ligada aos trabalhos do meteorologista [Smagorinsky, 1963] com a motivação de simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos, visto ser impossível simular todo o espectro de escalas. No âmbito da engenharia as primeiras aplicações foram realizadas por [Deardorff, 1970].

Nesta abordagem, as grandes escalas, que são responsáveis pelo transporte de energia e quantidade de movimento, são resolvidas diretamente, enquanto as pequenas escalas são modeladas. Contando que as menores estruturas sejam estatisticamente independentes das grandes escalas, ou seja, mais homogêneas, isotrópicas e menos afetadas pelas condições de contorno, é esperada a obtenção de um comportamento mais universal e independente dos diferentes tipos de escoamentos. Uma dúvida que surge é referente à definição de uma grande escala. Nesse sentido, Ferziger (1993) tenta uniformizar o emprego de grande escala como sendo um conceito local, onde as grandes escalas dominam a dinâmica local do escoamento e são, então, determinantes principais de suas propriedades mais importantes. Essa categoria deve incluir os vórtices responsáveis pela maioria da produção da turbulência e pelo transporte de quantidade de movimento e energia. Em determinados escoamentos estes podem ter pequenas dimensões [Ferziger, 1993].

Conforme discutido anteriormente, no item 2.2, a base para a Simulação de Grandes Escalas, principalmente da modelagem das pequenas escalas, é a cascata de energia de Kolmogorov. Uma importante característica desse processo é que, independente da existência de direções predominantes no escoamento principal e no movimento de grandes escalas, a energia é perdida ao nível de pequenas escalas, obtendo-se uma isotropia local. Baseados nestas características universais da turbulência é possível implementar modelos sub-malha bastante simples [Petry, 2002].

Na Simulação de Grandes escalas são obtidos resultados tridimensionais e transientes das equações de Navier-Stokes, principalmente quando se deseja avaliar picos de velocidades e pressões [Petry, 2002]. Então, embora não haja mais a necessidade de simular todas as escalas da turbulência, ainda são requeridas malhas bastante refinadas exigindo um tempo de simulação

elevado. Levando em conta estes aspectos, é possível dizer que a Simulação de Grandes Escalas é uma abordagem intermediária entre a Simulação Numérica Direta e as abordagens clássicas [Silveira Neto, 2002].

A vantagem da Simulação de Grandes Escalas com relação a Simulação Numérica Direta, consiste em permitir a resolução de escoamentos a elevados números de Reynolds, permitindo um estudo detalhado do comportamento físico dos mesmos, graças ao processo de separação de escalas utilizado e a modelagem dos termos sub-malha adicionais oriundos deste processo.

A Simulação de Grandes Escalas é indicada para a análise de escoamentos complexos como camada de mistura, jatos, escoamentos com separação e recolamento de camada limite [Silveira Neto et al., 1993; Ortega e Azevedo, 1995; Petry, 2002], escoamento interagindo com corpos imersos [Jansen, 1999] e com circulação [Petry, 2002].

Devido a todas características citadas anteriormente a Simulação de Grandes Escalas tornou-se uma das mais promissoras metodologias para a solução de escoamentos turbulentos e possivelmente dentro de alguns anos, com os constantes avanços tecnológicos, esta seja uma metodologia utilizada em problemas práticos de engenharia. No presente trabalho utilizou-se essa metodologia para a simulação de escoamentos não isotérmicos e incompressíveis.

Alguns autores têm utilizado a Simulação de Grandes Escalas para a simulação de escoamentos não isotérmicos: [Peng e Davidson, 2001] realizaram a análise de escoamentos em cavidades com convecção natural; [Wang et al., 2005] simularam escoamentos em canais abertos com transferência de calor; [Brito et al., 2005] simularam escoamentos em cavidades bidimensionais com a presença de uma fonte de energia na parte inferior da cavidade e [Oliveira, 2005] simulou escoamentos não isotérmicos, bidimensionais em vários domínios com convecção natural, mista e forçada.

#### 2.3.3.1. Separação de Escalas e Filtragem

Para dedução das equações para Simulação de Grandes Escalas, os campos das variáveis presentes no problema (velocidade, temperatura e pressão) são definidos através de um processo de separação de escalas, conforme Eq. (2.17), e através de um processo de filtragem, gerando a partir daí, termos médios ou de grandes escalas e termos submalha, que necessitam de posterior modelagem. Deve ser lembrado, que o objetivo neste sub-item é somente realizar uma abordagem básica do processo de separação de escalas e conceitos sobre o processo de filtragem. No capítulo de modelagem matemática a dedução das equações para Simulação de Grandes

Escalas é realizada de forma mais detalhada.

$$f(x,t) = \bar{f}(x,t) + f'(x,t) \quad (2.17)$$

onde  $\bar{f}(x,t)$  é a função de grande escala e  $f'(x,t)$  é a função de pequena escala. Qualquer distribuição de uma função no tempo ou no espaço pode ser submetida a processos de filtragem, seja por meio de um filtro temporal, seja por meio de um filtro espacial, utilizado no presente contexto. O processo de filtragem consiste em realizar uma integral de convolução envolvendo a função a ser filtrada  $f(x',t)$  e a função filtro apropriada, conforme expresso por:

$$\bar{f}(x,t) = \int_V G(x-x')f(x',t)dx' \quad (2.18)$$

Onde  $\bar{f}(x,t)$  é a função filtrada,  $G(x-x')$  é a função filtro espacial e  $V$  é o volume de integração para a filtragem. Alguns exemplos de filtros são mostrados na Figura 2.4. O filtro tipo caixa (Figura 2.4.a) é definido pela Eq. (2.19), este possui um valor constante dentro do seu raio de atuação.

$$G(x-x') = \begin{cases} 1/\Delta & \text{se } |x-x'| \leq \bar{\Delta}/2 \\ 0 & \text{se } |x-x'| > \bar{\Delta}/2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Onde  $\bar{\Delta}$  é o comprimento característico do filtro que determina a frequência de corte, filtrando, mantendo as grandes escalas, com frequências inferiores a de corte, e eliminando as demais.

Existem outros tipos de filtros, como, por exemplo, os abordados em [Leonard, 1974]: gaussiano (Figura 2.4.b) expresso pela Eq. (2.20) e o filtro da expansão truncada de Fourier com  $|k_c| < \pi/\Delta$  mostrado na Figura 2.4.c e expresso pela Eq. (2.21).

$$G(x-x') = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\Delta} e^{\left(-6 \frac{(x-x')^2}{\bar{\Delta}^2}\right)} \quad (2.20)$$

$$G(x-x') = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi(x-x')}{\Delta}\right)}{\pi(x-x')} \quad (2.21)$$

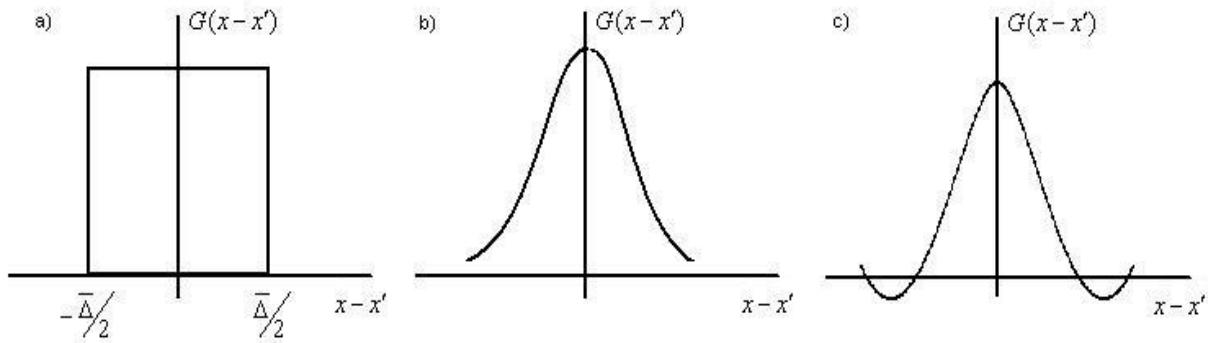


Figura 2.4 – Filtros utilizados em LES - a) tipo caixa – b) gaussiano – c) expansão truncada de Fourier

Assim, as equações filtradas da continuidade, conservação da quantidade de movimento e energia ficam:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{v}_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \bar{v}_k) \right) \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho \left( \overline{v_i v_j} + \overline{v_i v'_j} + \overline{v'_j v_i} + \overline{v'_j v'_j} \right) \right\} + \bar{f}_i = 0 \end{aligned} \quad (i,j,k=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \left( \overline{v_j T} + \overline{v'_j T'} + \overline{T v'_j} + \overline{T' v'_j} \right) \right] + \bar{q}'' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.24)$$

onde  $t$  e  $\Omega$  representam os domínios temporal e espacial das equações analisadas.

### 2.3.3.2. Modelagem Submalha

Serão discutidos neste sub-item somente alguns aspectos físicos referentes à modelagem submalha e uma breve abordagem do modelo dinâmico. A base matemática utilizada no modelo de Smagorinsky a mesma será apresentada no capítulo 3.

Na Simulação de Grandes Escalas o processo de média é escolhido de forma a resolver numericamente as características físicas de interesse e as estatísticas desejadas são medidas diretamente das escalas computadas. O papel do modelo não é fornecer essas estatísticas diretamente, mas prevenir a omissão dos efeitos das escalas eliminadas, na filtragem, que prejudicaria o cálculo das escalas das quais as estatísticas são adquiridas [Rogallo e Moin, 1984].

A contribuição mais importante do modelo é fornecer, ou pelo menos permitir, a transferência de energia entre as escalas resolvidas e submalha em uma magnitude aproximadamente correta [Rogallo e Moin, 1984].

Segundo [Silveira Neto, 2002] a maioria dos modelos submalha empregados é baseada na hipótese de Boussinesq (1877) que relaciona as componentes do tensor submalha ao tensor correspondente do campo de grandes escalas, sendo a constante de proporcionalidade conhecida como viscosidade turbulenta. Esta pode ser calculada através da utilização de diferentes modelos.

O modelo de Smagorinsky (1963) é o primeiro modelo submalha conhecido. Para obtenção deste utiliza-se como base a hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, onde a produção das tensões turbulentas submalha possa ser igual a dissipação. A produção é escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a dissipação pode ser escrita em função da escala de velocidade e do comprimento característicos submalha.

A viscosidade turbulenta obtida no modelo de Smagorinsky é dependente de uma constante ajustável (para escoamentos isotérmicos) conhecida como constante de Smagorinsky ( $C_s$ ) e de duas constantes ajustáveis (para escoamentos não isotérmicos) adicionando-se o número de Prandtl turbulento ( $Pr_t$ ) que é utilizada na determinação da difusividade turbulenta. Estas constantes têm sido amplamente discutidas e adaptadas conforme o tipo de escoamento que se deseja resolver, por exemplo: Lilly (1967) determinou analiticamente um valor de  $C_s = 0,18$  para a turbulência homogênea e isotrópica, já Deardorff (1970) na simulação de escoamentos turbulentos encontrou que o valor usado por Lilly causava excessivo amortecimento das intensidades submalha, mas que um valor de  $C_s = 0,1$  fornecia valores próximos dos determinados experimentalmente por Laufer (1951). Outros exemplos podem ser encontrados em [Rogallo e Moin, 1984]. Quanto ao número de  $Pr_t$ , [Silveira Neto et al., 1993] sugere para simulação de um escoamento não-isotérmico sobre degrau a utilização do valor  $Pr_t = 0.6$ . Já [Brito et al., 2005], na simulação de escoamentos em cavidades com convecção natural, sugere a

utilização de  $Pr_t = 0.4$ .

O modelo de Smagorinsky trabalha bem em escoamentos simples, entretanto um número de modificações nas constantes ajustáveis tem sido necessária em escoamentos mais complexos. Em regiões próximas às paredes a inserção de um fator de amortecimento (que é difícil de se justificar teoricamente) tem que ser aplicado a viscosidade turbulenta para obter um comportamento adequado da turbulência nesta região [Ferziger, 1993], visto que nesta região a condição de anisotropia causa um fluxo de energia reverso (“backscatter”). Como o modelo de Smagorinsky somente contabiliza o fluxo de energia das maiores para as menores escalas ele torna-se absolutamente dissipativo, superestimando as tensões de Reynolds nessa região [Piomelli et al., 1991].

O fenômeno “backscatter” também é um ingrediente essencial na reprodução do regime de transição ocorrida em escoamentos [Piomelli et al, 1991] sendo muito importante na predição adequada da transição entre regimes em escoamentos induzidos pela convecção natural [Peng e Davidson, 2001]. Portanto, o modelo de Smagorinsky também apresenta falhas na predição deste tipo de escoamento.

Outro problema encontrado está na abordagem dos termos de fluxo turbulento submalha, pois no modelo de Smagorinsky assume-se um número de Prandtl turbulento constante para determinação da difusividade turbulenta o que, em muitos escoamentos como em dutos, é inadequado, visto que o mesmo apresenta um crescimento no seu valor conforme se atinge regiões próximas aos cantos do duto [Hirota et al., 1997].

Com objetivo de superar a inabilidade dos modelos submalha, principalmente o de Smagorinsky, em representar diferentes tipos de escoamento através de uma única constante universal, foi criado o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta proposto por [Germano et al., 1991] e modificado posteriormente por [Lilly, 1992].

O objetivo principal deste modelo é a determinação dinâmica de uma função de proporcionalidade no cálculo da viscosidade turbulenta, ou seja, que se ajusta no tempo e no espaço [Silveira Neto, 2002]. Esse dinamismo na determinação da constante permite captar efeitos locais (espaciais e temporais) ocorridos no escoamento. Assim, a equação para determinação da viscosidade turbulenta é dada por :

$$v_t = C(x,t)\overline{\Delta}^2|\overline{S}| \quad (2.25)$$

E a difusividade turbulenta é definida por [Lilly,1992]:

$$\alpha_T = \frac{2C(x,t)}{Pr_t} |\bar{S}| \quad (2.26)$$

onde  $C(x,t)$  é o coeficiente dinâmico e  $Pr_t(x,t)$  é o número de Prandtl turbulento dinâmico, que estão escritos em função das condições locais do escoamento.

A base desta modelagem é o uso de dois filtros com comprimentos característicos diferentes (permitindo a utilização das informações do nível de energia nas menores escalas resolvidas, situadas nas regiões entre os dois filtros, para modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as não resolvidas). No primeiro, usam-se as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico (filtro a nível de malha) e no segundo usa-se um múltiplo das dimensões da malha para calcular o comprimento característico do filtro teste [Silveira Neto, 2002].

Sabendo disso, é possível escrever as expressões para o cálculo do coeficiente dinâmico e do número de Prandtl turbulento. Aquele é dado por:

$$C(x,t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.27)$$

onde os termos  $L_{ij}$ ,  $M_{ij}$  são definidos como:

$$L_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.28)$$

$$M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \bar{S} \bar{S}_{ij} \rangle \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.29)$$

Já os termos  $\langle \bar{S}_{ij} \rangle$  e  $\langle \bar{S} \rangle$  são definidos por:

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle \bar{v}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{v}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.30)$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \sqrt{2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle} \quad (i,j = 1,2,3) \quad (2.31)$$



O número de Prandtl passa a ser previsto também segundo o procedimento introduzido por [Lilly,1992] através da seguinte expressão:

$$\text{Pr}_t = 2C(x,t) \frac{M_{j\theta} M_{j\theta}}{L_{j\theta} M_{j\theta}} \quad (j = 1,2,3) \quad (2.32)$$

onde os termos  $M_{j\theta}$  e  $L_{j\theta}$  possuem uma configuração muito semelhante aos termos  $M_{ij}$  e  $L_{ij}$ , sendo expressos por:

$$L_{j\theta} = \langle \bar{T} \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{T} \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad (j = 1,2,3) \quad (2.33)$$

$$M_{j\theta} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right\rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \bar{S} \rangle \left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right\rangle \quad (j = 1,2,3) \quad (2.34)$$

Onde o termo  $\left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right\rangle$  é definido por:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle \bar{T} \rangle}{\partial x_j} \quad (j = 1,2,3) \quad (2.35)$$

Nas Eq. (2.28 – 2.35) a barra sobreposta indica o primeiro processo de filtragem e o símbolo  $\langle * \rangle$  refere-se ao segundo processo de filtragem, ou seja, o filtro teste. Então, o comprimento característico do segundo filtro é  $\langle \bar{\Delta} \rangle$  que é maior que o comprimento característico do filtro à nível de malha  $\bar{\Delta}$  ( $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$ ).

Estes dois filtros diferentes permitem que sejam utilizadas informações do nível de energia contido nas menores escalas resolvidas, situadas na região entre os dois filtros, para modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as não resolvidas.

Este modelo possui um comportamento próprio assintótico próximo às regiões de contorno sólido ou em escoamentos laminares sem a necessidade de inserirmos funções de amortecimento ou fatores ajustáveis para levar em consideração regiões parietais onde a anisotropia nas

pequenas escalas está presente.

Espera-se ainda a possibilidade de se simular o efeito da transferência inversa de energia cinética turbulenta das escalas sub-malha para as escalas resolvidas (“backscatter”), fenômeno este que aparece nas regiões de camada limite e em escoamentos em transição.

Para um melhor entendimento do modelo dinâmico é interessante consultar as seguintes referências [Germano et al., 1991; Piomelli et al., 1991; Lilly, 1992; Silveira Neto, 2002 e Petry, 2002].

Uma proposta bem sucedida para determinação do coeficiente dinâmico, usando segunda filtragem com técnicas comuns ao método de elementos finitos, como definição de elementos por conectividades, uso de dois sistemas de coordenadas (global e natural), transformação de coordenadas e uso de funções de interpolação, é realizada por [Petry, 2002].

Uma abordagem a respeito de outros modelos existentes pode ser encontrado nas seguintes referências [Piomelli et al., 1991; Germano et al., 1991; Silveira Neto et al., 1993; Nieckele e Sampaio, 2007].

#### 2.3.4 – Análise Numérica de Convecção Térmica

Uma das formas de abordagem da transferência de calor por convecção é a análise numérica. Muitos autores têm explorado extensivamente a análise dos escoamentos com convecção forçada, mista e natural, para escoamentos tanto no regime laminar como no regime turbulento. Principalmente para domínios simples como cavidades, canais e degraus.

É possível citar a existência de uma gama bastante diversificada de casos e ferramentas apresentados por diversos autores, desde a simulação de escoamentos com transferência de calor no regime laminar até a simulação de escoamentos turbulentos com as mais diversas formas de abordagem da turbulência (modelagem clássica, modelagem sub-malha e Simulação Direta), assim como, verifica-se a existência de estudos de diversas naturezas da transferência de calor por convecção e também se empregando os mais diversos métodos (Elementos Finitos, Volumes Finitos entre outros). Aqui, por brevidade, serão apresentados somente alguns casos a disposição na bibliografia que elucidam bem o que é afirmado anteriormente:

- investigação numérica de um escoamento transiente, no regime laminar e com transferência de calor por convecção mista em uma cavidade bidimensional utilizando o Método de Elementos Finitos [Khanafar et al., 2007];

- investigação numérica de um escoamento transiente, no regime laminar e com transferência de calor por convecção forçada em uma cavidade bidimensional utilizando o Método de Volumes Finitos [Shi e Khodadadi, 2005];
- investigação numérica de um escoamento permanente, no regime laminar e com transferência de calor por convecção mista em cavidade (aquecimento da cavidade através de duas superfícies laterais com diferentes temperaturas). A discretização das equações através é realizada através do método de volumes de controle [Oztop, H. F., Dagtekin, I., 2004];
- simulação de escoamentos transientes, no regime turbulento e com transferência de calor por convecção natural em cavidade utilizando Simulação de Grandes Escalas para abordagem da turbulência. As equações foram discretizadas espacialmente utilizando o método de volumes finitos [Brito et al., 2005];
- simulação de escoamentos turbulentos com transferência de calor por convecção forçada em cavidades abertas utilizando Simulação de Grandes Escalas para abordagem da turbulência. As equações foram discretizadas utilizando o Método de Volumes Finitos [Mattos et al., 1999];
- análise de escoamentos turbulentos sobre degrau com transferência de calor por convecção forçada utilizando modelagem clássica da turbulência (comparando modelos como tensor de Reynolds com modelos a duas equações,  $k - \epsilon$  e  $k - \omega$ ) [Jaramillo et al., 2007];
- análise de escoamentos turbulentos sobre degrau com transferência de calor por convecção forçada utilizando modelagem submalha (LES) (comparando o modelo apresentado pelo autor com modelos como o dinâmico e de Smagorinsky) [Guo et al., 2007]

#### 2.4. Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos (do inglês: *Finite Element Method*) tem sua origem nos métodos variacionais clássicos e de resíduos ponderados. Um dos problemas do método variacional consistia em atribuir funções de interpolação que atendessem todas as condições de contorno em todas as regiões do domínio. Com o advento do método de elementos finitos determinar funções de interpolação que atendessem as condições de contorno, a nível de cada elemento discretizado, tornou-se uma tarefa mais simples e sistemática [Reddy e Gartling; 1994].

No que tange a simulação de escoamentos o método de elementos finitos tem se mostrado um método bem sucedido, mostrando-se bastante adaptável para a análise tanto de escoamentos no regime permanente quanto no regime transiente [Kawahara e Hirano, 1983]. Entretanto, para escoamentos incompressíveis existem dificuldades na simulação, principalmente pelo fato da

inexistência de um termo de pressão derivada no tempo presente nas equações de conservação de massa, sendo assim, o sistema de equações algébricas gerado é único no tempo o que impede a utilização de esquemas temporais puramente explícitos.

Além do que foi descrito anteriormente, para utilizarmos métodos de solução direta é necessário realizar algum tipo de pivotamento, como utilização de interpoladores de Lagrange no método misto, enquanto o uso de soluções iterativas apresenta muita dificuldade de convergência principalmente pela forma das equações com restrições [Reddy e Gartling, 1994].

Citaremos a seguir os métodos mais conhecidos e descritos na bibliografia de referência [Hughes, 1987; Lange, 1992; Reddy e Gartling, 1994; Taylor e Zienkiewicz, 2000; Petry, 2002] entre outros:

- método misto: parte da forma variacional fraca das equações governantes do escoamento (conservação de massa, quantidade de movimento e energia). Este método mantém as variáveis de pressão e velocidade no mesmo conjunto de equações. Entretanto, a velocidade e a pressão possuem ordens diferentes dentro da equação da conservação da quantidade de movimento, conduzindo a uma dificuldade na compatibilização dos subespaços de elementos finitos para estas variáveis. Assim, para obtenção de soluções convergidas, as funções de interpolação devem atender a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) [Carey e Oden; 1984].

- método da penalidade: neste enfoque a inserção de um termo de penalidade impõe de forma aproximada a restrição de incompressibilidade, permitindo que o termo de pressão seja eliminado das equações de conservação da quantidade de movimento. Assim, utilizam-se as equações de conservação de quantidade de movimento sem a presença da pressão (que é substituída pelo produto da função de penalidade e de termos escritos em função da velocidade) para obtenção dos campos de velocidade. Posteriormente, obtém-se o campo de pressões a partir do campo de velocidades. Segundo [Petry, 2002] para resolução das equações matriciais originadas por este método é necessário utilizar um esquema de integração reduzida seletiva.

- utilização da equação de Poisson: são equações deduzidas das equações de conservação da quantidade de movimento, desenvolvidas com a finalidade de superar dificuldades apresentadas por algoritmos relacionados com a restrição de incompressibilidade [Azevedo, 1999];

- método da pseudo-compressibilidade: consiste em escrever a equação da conservação de massa com a pressão derivada em relação ao tempo presente na mesma, sendo que isso é feito através da consideração da equação na sua forma mais real, ou seja, assumindo que a velocidade de propagação do som em um meio fluido é finita. Para implementação desta nova equação parte-se das equações da continuidade e de uma equação de estado [Kawahara e Hirano, 1983].

Após a obtenção da nova equação da continuidade, realiza-se a forma variacional do conjunto de equações governantes do problema da mesma forma que a realizada no método misto. Deve ser lembrado que caso a velocidade do som tenda ao infinito, a equação da pseudo-compressibilidade torna-se igual a equação convencional da continuidade. Apresenta-se aqui somente a equação final da continuidade, Eq. (2.37), utilizando o método da pseudo-compressibilidade, visto que no capítulo referente a modelagem matemática a obtenção da mesma é vista mais detalhadamente.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (i = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (2.37)$$

No que se refere à estabilidade dos métodos para escoamentos advectivo-dominantes, com elevados números de Peclet de malha ( $Pe_{\Delta}$ ), a solução de Galerkin apresenta comportamento oscilatório. As oscilações devem ser reduzidas através da aplicação de esquemas de estabilização ou através de um maior refinamento da malha do domínio até que, a nível de malha, o escoamento seja difusivo. As primeiras idéias para estabilização do escoamento aplicaram diferentes ponderações as funções de interpolação considerando-se a direção do escoamento ou termos adicionais na forma fraca (visando inserir uma difusão adicional na direção da linha de corrente). Dentre as alternativas mais recentes na abordagem do problema de estabilização estão:

- esquema de Taylor-Galerkin: esta metodologia foi proposta por [Donea, 1984] onde os termos referentes a estabilização provém de uma expansão em série de Taylor de segunda ordem no tempo. Alguns autores como [Azevedo, 1999; Petry, 2002] utilizaram uma difusividade adicional, ao invés de alguns termos de segunda ordem na expansão. Este esquema é bastante aconselhado na utilização de esquemas explícitos, em problemas fortemente convectivos (fortes discontinuidades) [Brasil Junior; 2002];

- esquema SUPG (do inglês: *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*): consiste em aplicar funções peso descontínuas, adicionando-se uma perturbação que atua somente na direção principal do escoamento, na formulação de Petrov-Galerkin. Evoluções em torno do SUPG surgiram através de estratégias simples. Entre elas está a adição de termos dependentes de malha ao método clássico de Galerkin [ Franca et al., 1992];

- esquema GLS (do inglês: *Galerkin Least Square*): é uma abordagem que consiste em obter termos estabilizadores a partir da adição de mínimos quadrados dos resíduos das equações de Euler-Lagrange dos problemas analisados. Estes termos não comprometem a consistência do

método, já que a solução exata do problema satisfaz os resíduos de Euler-Lagrange. Uma descrição mais elaborada sobre este esquema é encontrada em [Franca et al., 1992; Franca e Frey, 1992 e Zinani, 2006].

Em problemas transientes é necessário aplicar-se um esquema de integração no tempo. Os esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis e permitem um maior passo de tempo com relação aos esquemas explícitos. Entretanto, domínios de grande dimensão fazem com que haja dificuldade no armazenamento na memória principal das matrizes completas do sistema, ocasionando um maior tempo de processamento para obtenção dos resultados da simulação. Quanto ao esquema explícito, o mesmo ocupa pouco espaço na memória central, pois permite manter apenas os dados de um elemento nesta, obtendo-se a solução elemento a elemento [Petry, 2002]. Além disso, em escoamentos turbulentos as pequenas escalas possuem elevadas frequências e esquemas temporais com passos de tempo da ordem da escala dos pequenos vórtices são necessários, limitando o tamanho deste passo. Conseqüentemente, há uma limitação na utilização dos esquemas temporais implícitos.

Existem na bibliografia trabalhos que utilizam o método de elementos finitos para a análise de escoamentos. Aqui citaremos alguns: [Lange, 1992] utilizou o método para simulação de escoamentos não isotérmicos (cavidade e cilindro) no regime laminar; [Azevedo, 1999] na análise de escoamentos no regime laminar com interação fluido-estrutura; [Rossa, 2000] na análise de escoamentos não isotérmicos com convecção natural em cavidades e sobre um cilindro aquecido; [Petry, 2002 e Oliveira Jr., 2006] realizaram a análise de escoamentos isotérmicos e turbulentos em cavidades e sobre degrau e [Brito, 2005] simulou escoamentos não isotérmicos, turbulentos e bidimensionais.

Outros métodos podem ser utilizados para a simulação de escoamentos, como o método de volumes finitos e o método de diferenças finitas. Citamos aqui alguns trabalhos realizados na simulação de escoamentos: [Nallasamy e Prasad, 1977] simularam escoamentos não isotérmicos em cavidades utilizando o método de diferenças finitas; [Guia et al., 1982] trabalharam com escoamentos isotérmicos e turbulentos utilizando um método conhecido como multi-malhas; [Silveira Neto et al., 1993] simularam escoamentos turbulentos, não isotérmicos, bi e tridimensionais sobre degrau utilizando o método de volumes finitos; [Peng e Davidson, 2001] simularam escoamentos turbulentos com convecção natural em cavidades utilizando o método de volumes finitos com diferenças centrais de segunda ordem e [Ho Ji et al., 2007] realizaram a simulação de escoamentos incompressíveis, não isotérmicos e no regime transiente através do método de volumes finitos, com um código baseado no algoritmo SIMPLER [Patankar, 1980].

### 3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

#### 3.1. Equações que Governam o Escoamento

As equações diferenciais responsáveis pela modelagem matemática de um escoamento newtoniano, incompressível, tri-dimensional, transiente e não-isotérmico são (Eq. 3.1 – 3.3) [Bejan, 1994]:

Equação de conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.1)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{\partial x_j} = f_i \quad (i,j,k = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.2)$$

Equação da conservação da energia

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_p v_j T)}{\partial x_j} = - \frac{\partial (q_j'')}{\partial x_j} + \mu \phi + q''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.3)$$

Para complementação da modelagem é necessária ainda à inserção das condições de contorno e iniciais, além das equações constitutivas referentes as forças de campo e de superfície para a equação da conservação da quantidade de movimento e a equação constitutiva referente ao fluxo de calor por condução (equação constitutiva de Fourier) na equação da energia.

As condições de contorno e iniciais podem ser expressas pelas Eq. (3.4 – 3.10):

Condições de contorno:

$$v_i = \hat{v}_i \quad (i = 1,2,3) \quad \text{em } \Gamma_D \quad (3.4)$$

$$(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})n_j = t_i \quad (i,j = 1,2,3) \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.5)$$

$$T = \hat{T} \quad \text{em } \Gamma_D \quad (3.6)$$

$$\left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j + q_c + q_r = q \quad (j = 1,2,3) \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.7)$$

Condições iniciais:

$$v_i = \hat{v}_{i0} \quad (i = 1,2,3) \quad \text{em } t=0, \Omega \quad (3.8)$$

$$p = \hat{p}_{i0} \quad \text{em } t=0, \Omega \quad (3.9)$$

$$T = \hat{T}_{i0} \quad \text{em } t=0, \Omega \quad (3.10)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno do domínio  $\Omega$ , o superíndice  $\hat{\phantom{x}}$  representa os valores prescritos para as variáveis primárias,  $t_i$  representa os valores prescritos das forças de superfície no contorno e o sub-índice  $i0$  as condições iniciais. Este contorno é subdividido em duas partes, a primeira onde são aplicados valores prescritos da variável primária (velocidade ou temperatura), e são conhecidas como condições de contorno de Dirichlet ou essenciais ( $\Gamma_D$ ). Já na outra, são aplicados termos derivados das variáveis primárias como forças de superfícies e fluxos de calor, essas são conhecidas como condições de contorno de Neumann ou de segunda espécie ( $\Gamma_N$ ). Não deve haver superposição entre as fronteiras, ou seja,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$ . A Figura 3.1 ilustra um exemplo do domínio com as condições de contorno impostas, sendo importante notar que em casos onde supostamente teríamos uma superposição de condições (arestas) e que deve-se escolher uma das duas condições de contorno prioriza-se a condição essencial.



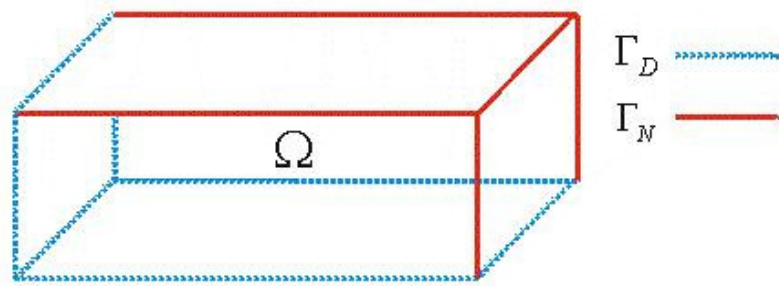


Figura 3.1 – Ilustração das condições de contorno sobre a superfície do domínio

O esquema temporal utilizado no presente trabalho induz a um passo de tempo bastante reduzido. Esse fato faz com que os escoamentos com convecção natural tornem-se muito demorados para simular. Conseqüentemente, o interesse principal será a análise de escoamentos com convecção forçada e mista.

Tendo em vista que a abordagem utilizada no presente trabalho consegue prever o comportamento real do escoamento é possível assumir algumas hipóteses simplificadoras sem a perda de qualidade na predição dos escoamentos. Dentre elas foi assumido que as propriedades termofísicas serão tratadas como constantes. Essa hipótese também foi utilizada por outros autores em escoamentos não isotérmicos aplicando LES e DNS [Silveira Neto et al., 1993; Brito, 2005; Oliveira, 2005; Kawamura et al., 2007].

Para complementar a modelagem matemática das equações de conservação da quantidade de movimento insere-se a equação constitutiva para os termos das forças de superfície na equação da conservação da quantidade de movimento, dado pela seguinte expressão, Eq. (3.11):

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,3) \quad (3.11)$$

Então, a equação do balanço da quantidade de movimento fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) - f_i = 0 \quad (i,j,k = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.12)$$

Também é possível verificarmos a existência de forças de campo em um escoamento induzido pelos termos de empuxo. Estes são decorrentes da variação dos valores da massa específica, que é influenciada pelo campo de temperaturas. A Eq. (3.12) pode ser reescrita com o

auxílio da forma estendida da aproximação de Boussinesq, que permite que as propriedades do fluido sejam funções do estado termodinâmico. As forças de campo serão reescritas conforme a Eq. (3.13):

$$f_i = (\rho - \rho_0) g_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.13)$$

Onde a aproximação realizada por Boussinesq pode ser escrita:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (3.14)$$

E substituindo (3.14) em (3.13) finalmente obtém-se os termos de força de campo:

$$f_i = -\rho_0 g_i \beta (T - T_0) \quad (i = 1,2,3) \quad (3.15)$$

Finalmente, substituindo as forças de campo, Eq. (3.15) na Eq. (3.12) teremos a equação do balanço da quantidade de movimento com os termos de empuxo inseridos:

$$\frac{\partial(\rho_0 v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 v_i v_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) \quad (i,j,k = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.16)$$

$$+ \rho_0 g_i \beta (T - T_0) = 0$$

No que tange a equação da energia, pode-se desprezar o termo referente a dissipação viscosa ( $\mu\Phi$ ) quando comparado aos demais (variação local, advecção e difusão de energia térmica). Na realidade, somente nos escoamentos sônicos ou no movimento envolvendo altas velocidades de óleos lubrificantes é necessária a inserção do termo da dissipação viscosa [Incropera e DeWitt, 1998]. Conseqüentemente, a equação da energia (3.3) fica resumida a:

$$\frac{\partial \rho_0 c_p T}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 c_p v_j T)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (q_j'') + q_j''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.17)$$

Para complementar a equação da energia é necessário inserir a equação constitutiva de Fourier para o fluxo de calor por condução, Eq. (3.18), na equação da energia, Eq. (3.17),

obtendo assim uma nova equação para a modelagem do transporte de energia térmica (ou temperatura):

$$q_j'' = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho_0 c_p T}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 c_p v_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_j''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.19)$$

Voltando a hipótese de incompressibilidade, é possível verificar que a massa específica pode ser extraída dos termos derivados, visto que a mesma possui uma variação muito pouco significativa e, portanto, considerada nula [Fox e McDonald, 1995]. Deve ser observado também que a hipótese de incompressibilidade é válida para escoamentos com baixos números de Mach ( $Ma \leq 0.3$ ), ou seja, velocidades nos escoamentos bem inferiores a velocidade do som no fluido. Sendo assim, é possível reescrever as equações da continuidade, Eq. (3.1), conservação da quantidade de movimento, Eq. (3.16), e energia, Eq. (3.19):

Equação da continuidade para um escoamento incompressível

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.20)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\rho_0 \frac{\partial (v_i)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) + \rho_0 g_i \beta (T - T_0) = 0 \quad (i,j,k = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.21)$$

Equação da conservação da energia

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p \frac{\partial (v_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_j''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.22)$$

Uma das alternativas para resolvermos as equações governantes pelo método de elementos finitos é o método da pseudo-compressibilidade [Kawahara e Hirano, 1983], que resulta em um sistema de equações onde a conservação de massa mantém um termo de derivada da pressão no tempo, evitando assim a ocorrência de zeros na diagonal da matriz de massa [Petry, 2002]. Esta ocorrência é uma dificuldade adicional da modelagem através do método de elementos finitos para discretização das Eq. (3.20 – 3.22) para um escoamento incompressível.

Esta metodologia é a aplicada no presente trabalho, onde atribuiremos um valor constante para a velocidade do som. Já na hipótese da incompressibilidade total deriva-se que a velocidade de propagação do som no escoamento é infinita. Esta é uma condição ideal, pois nos escoamentos reais, a propagação do som sempre ocorre com uma velocidade finita. Por esta razão, o esquema é também referido como incompressibilidade real [Petry, 2002].

Sendo a pressão escrita em função da massa específica, torna-se possível obter uma relação entre elas, tornando possível a inserção da pressão na equação da continuidade. Segundo [Schlichting, 1968]:

$$p = p(\rho, T) \quad (3.23)$$

A derivação da pressão em relação ao tempo, conseqüentemente, fica:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.24)$$

Da definição da velocidade do som:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = C^2 \quad (3.25)$$

Substituindo (3.25) em (3.24) tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.26)$$

Através da substituição da Eq. (3.26) na equação da continuidade, Eq. (3.1), e fazendo as operações devidas tem-se (considerando-se a massa específica na temperatura de referência):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_j) = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.27)$$

Já as equações da conservação da quantidade de movimento e da energia permanecem inalteradas.

São reescritas as condições de contorno para as forças de superfície na equação da conservação da quantidade de movimento. A condição de contorno referente ao fluxo de calor na equação da energia permanece inalterada.

$$\left\{ \left[ -p + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 v_k) \right] \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 v_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad (i,j,k = 1,2,3) \text{ em } \Gamma_N \quad (3.28)$$

As equações descritas acima poderiam ser utilizadas desta forma para análise tanto de escoamentos no regime laminar como no regime turbulento via DNS (Simulação Numérica Direta), entretanto, o elevado número de graus de liberdade existentes na resolução de um escoamento turbulento conduz a discretizações espaciais e temporais muito elevadas, o que acarretaria em elevadíssimos tempos de processamento em qualquer computador existente na atualidade.

A alternativa para a modelagem numérica da turbulência, não pertencente a modelagem clássica que será utilizada no presente trabalho, é o LES (Simulação de Grandes Escalas) que resolve de forma direta os vórtices de grande escala e usa um modelo de turbulência para as estruturas de pequenas escalas, sendo que esta modelagem preserva os transientes, picos e a tridimensionalidade dos escoamentos.

### 3.2. Modelagem Matemática dos Escoamentos Turbulentos Usando Simulação de Grandes Escalas

Na simulação de grandes escalas é necessário realizar-se um processo de filtragem e separação das escalas. Para isso, as variáveis presentes nas equações governantes são separadas em uma parte dita de grandes escalas e outra denominada sub-malha. Como mostra a Eq. (3.29):

$$f = \bar{f} + f' \quad (3.29)$$

Onde o termo sobreposto com uma barra é referente às estruturas de grandes escalas e o termo sobreposto com linha às estruturas de pequenas escalas. Deve ser lembrado que, apesar da semelhança na notação, o processo de filtragem realizado na simulação de grandes escalas é diferente da filtragem realizada na hipótese da média temporal de Reynolds. As variáveis de interesse ficam filtradas da seguinte forma:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (3.30)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (3.31)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (3.32)$$

$$T = \bar{T} + T' \quad (3.33)$$

Através da hipótese das propriedades constantes, como por exemplo:  $\rho, c_p$  e  $k$ , suas flutuações são nulas e seus valores são iguais aos estabelecidos para o campo médio:

$$\rho = \bar{\rho} \quad (3.34)$$

$$c_p = \bar{c}_p \quad (3.35)$$

$$k = \bar{k} \quad (3.36)$$

Segundo [Leonard, 1974] o campo das grandes escalas é definido com o auxílio de uma função filtro  $G(x)$ :

$$\bar{f}(x) = \int_V G(x-x') f(x') dx' \quad (3.37)$$

Onde  $V$  é o domínio de controle na integração e  $G$  é a clássica região do filtro usada por [Deardorff; 1970] e por [Clark, Ferziger e Reynolds; 1979]:

$$G(x-x') = \begin{cases} (1/\Delta)^3, & |x-x'| \leq (\Delta/2) \\ 0, & |x-x'| > (\Delta/2) \end{cases} \quad (3.38)$$

Quando um filtro uniforme é empregado, as operações matemáticas de filtro e derivadas parciais são comutativas. Algumas propriedades da operação de filtragem espacial são:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (3.39)$$

$$\overline{gf} \neq \bar{g}\bar{f} \quad (3.40)$$

$$\overline{gf'} \neq \bar{g}\bar{f}' \quad (3.41)$$

$$\overline{gf'} \neq 0 \quad (3.42)$$

Aplicando-se o processo de filtragem nas Eq. (3.27, 3.21 e 3.22) para continuidade, momentum e energia, respectivamente. E posteriormente, considerando-se as propriedades acima descritas e realizando o processo de filtragem teremos as seguintes equações governantes:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{v}_j) = 0 \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.43)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_0 \bar{v}_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho_0} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_0 \bar{v}_k) \right) \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho_0 (L_{ij} + C_{ij} + \bar{v}_i \bar{v}'_j) \right\} + \rho_0 g_i \beta (\bar{T} - T_0) = 0 \end{aligned} \quad (i,j,k=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.44)$$

## Equação da energia

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - (\theta_j + C_{\theta_j} + L_{\theta_j}) \right] + \bar{q}''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.45)$$

Onde procuramos escrever as equações em função do produto das variáveis filtradas e de alguns tensores e fluxos adicionais, identificados a seguir:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \overline{v_i v_j} && \Rightarrow \text{Tensor de Reynolds sub-malha} \\ C_{ij} &= \overline{v_i v_j} + \overline{v_i' v_j'} && \Rightarrow \text{Tensor cruzado} \\ L_{ij} &= \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i v_j} && \Rightarrow \text{Tensor de Leonard} \quad (i,j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.46) \\ \theta_j &= \overline{v_j T'} && \Rightarrow \text{Fluxo turbulento sub-malha} \\ C_{\theta_j} &= \overline{\overline{v_j T'}} + \overline{v_j' T'} && \Rightarrow \text{Fluxo turbulento cruzado} \\ L_{\theta_j} &= \overline{\overline{v_j T}} + \overline{v_j T} && \Rightarrow \text{Fluxo turbulento de Leonard} \end{aligned}$$

Deve ser notado que, originalmente, no processo de filtragem, os termos não lineares apresentavam-se na forma de dois produtos filtrados, impossibilitando a resolução do sistema de equações. Estes dois produtos filtrados, tanto para a equação da conservação da quantidade de movimento quanto para a equação da energia estão descritos nas Eq. (3.47 e 3.48), sendo que esse produto de duas variáveis filtradas foi a origem dos termos presentes na Eq. (3.46).

$$\overline{v_i v_j} = \overline{\overline{v_i v_j}} + \overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i' v_j'} + L_{ij} \quad (i,j = 1,2,3) \quad (3.47)$$

$$\overline{v_j T} = \overline{\overline{v_j T}} + \overline{v_j' T'} + \overline{v_j' T'} + \overline{v_j' T'} + L_{\theta_j} \quad (j = 1,2,3) \quad (3.48)$$

Os tensores cruzado e de Leonard podem ser modelados seguindo a idéia de [Clark et al., 1979] que sugerem expressar a soma destes tensores como uma expansão em série de Taylor do campo de velocidade filtrado. Com base nisso [Findikakis e Street, 1979] demonstraram que:



$$C_{ij} + L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \quad (3.49)$$

Onde  $\gamma$  é uma constante, que segundo [Petry e Awruch, 1997; Petry, 2002] assume o valor  $\gamma = 6$ .

Foi verificado por [Silveira Neto et. al., 1993] através da simulação de um escoamento sobre um degrau que os termos  $L_{ij}$  e  $C_{ij}$  são desprezíveis comparados com o termo  $\tau_{ij}$  para esquemas de transporte convectivo de até 3ª ordem de precisão. Neste caso  $\tau_{ij}$  foi aproximadamente cem vezes superior aos termos cruzados e de Leonard. Segundo [Brito, 2005] é realizado o mesmo procedimento para os termos de fluxo turbulento cruzado  $C_{\theta j}$  e fluxo turbulento de Leonard  $L_{\theta j}$  em relação ao fluxo turbulento sub-malha  $\theta_j$ .

Sendo o esquema de transporte advectivo do presente trabalho de segunda ordem e levando-se em consideração as hipóteses descritas acima, podemos desprezar os termos cruzados e de Leonard em ambas equações, ficando com as seguintes equações para a conservação da quantidade de movimento e de energia:

Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 \bar{v}_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho_0} \left( \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \bar{v}_k) \right) \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho_0 \overline{v'_i v'_j} \} + \rho_0 g_i \beta (\bar{T} - T_0) = 0 \end{aligned} \quad (i,j,k=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.50)$$

Equação da conservação da energia

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - (\theta_j) \right] + q''' \quad (j = 1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (3.51)$$

Com as seguintes condições de contorno para ambas as Eq. (3.50 e 3.51):

$$\left\{ \left[ -p + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.52)$$

$$\left( (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) n_j + q_c + q_r = q \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.53)$$

As equações (3.43), (3.50) e (3.51) conjuntamente com as condições de contorno de Neumann (3.52),(3.53), as essenciais ou de Dirichlet (3.4) e (3.6) e as condições iniciais (3.8 - 3.10) governam o escoamento turbulento, não-isotérmico, quase-incompressível e newtoniano.

Para a determinação dos fenômenos correlacionados com as estruturas de pequenas escalas é necessária a modelagem dos termos sub-malha, visto que somente as grandes escalas são resolvidas diretamente.

### 3.3. Modelos de Turbulência Submalha

Em LES a dissipação da energia cinética turbulenta está em parte nas escalas não resolvidas, assim como a produção está nas escalas resolvidas. Os modelos submalha tornam-se mais importantes com o aumento do número de Reynolds ou aumento do tamanho de malha, tendo que modelar mais da dissipação total. Por conseqüência, muitos dos modelos submalha são formados a partir da dedução de modelos estatísticos. A escala de comprimento utilizada neste caso não é uma escala como a estabelecida para os modelos RANS mas uma representação do comprimento local da malha, por que essa é a escala para a transferência de calor e quantidade de movimento a ser estimada [Grötzbach e Wörner, 1999].

Os modelos de turbulência podem ser classificados em dois grupos: aqueles que dependem da viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) e aqueles baseados nas equações algébricas, os quais não dependem da viscosidade turbulenta [Silveira Neto, 2002].

A modelagem utilizada em LES é análoga à modelagem utilizada em outros modelos de turbulência (RANS). Entretanto, há algumas vantagens na modelagem somente das pequenas escalas ao invés de todo o campo de escoamento (como é feito pelos modelos clássicos) que são:

a) as menores estruturas tendem a ser mais homogêneas e isotrópicas e menos afetadas pelas condições de contorno;

b) os modelos tendem a ser mais universais e independentes dos diferentes tipos de escoamento, não dependendo da geometria onde o escoamento ocorre;

Os dois modelos utilizados no presente trabalho são dependentes da viscosidade turbulenta. Boussinesq propôs expressar o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de

deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue:

$$-\overline{v'_i v'_j} = 2\nu_T \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} K_{SM} \delta_{ij} \quad (3.54)$$

Sendo que  $\bar{S}_{ij}$  depende das escalas resolvidas diretamente, ou seja, das grandes escalas:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) em (3.54) teremos:

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K_{SM} \delta_{ij} \quad (3.56)$$

onde a energia cinética turbulenta sub-malha é dada pela seguinte expressão:

$$K_{SM} = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (3.57)$$

O último termo das equações (3.54) e (3.56) que contém a energia cinética turbulenta sub-malha é uma generalização realizada por Kolmogorov para escoamentos completamente incompressíveis, devido ao fato de a hipótese inicial de Boussinesq não ter este termo, o que gerava (para escoamentos completamente incompressíveis) valores das tensões normais no escoamento nulas (o que é inconsistente do ponto de vista físico).

Entretanto, no presente trabalho o escoamento não é completamente incompressível pois utiliza-se a hipótese de pseudo-compressibilidade, ou seja, resolve-se escoamentos quase incompressíveis. Neste caso poderemos utilizar o modelo original de Boussinesq dada pela seguinte expressão:

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.58)$$

Para o estudo da simulação de grandes escalas de um escalar turbulento, geralmente é feita uma analogia entre a modelagem do fluxo do escalar sub-malha e a modelagem do campo de velocidade sub-malha. Esse é o caminho mais fácil para a modelagem do coeficiente de difusividade turbilhonar a partir do coeficiente de viscosidade turbilhonar e de um número de Prandtl turbulento considerado [Guo et al., 2007].

A mesma hipótese de Boussinesq pode ser realizada de forma análoga para o fluxo de calor turbilhonar sendo expresso por:

$$-\overline{v'_j T'} = \alpha_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (3.59)$$

onde a difusividade turbilhonar possui uma relação com a viscosidade turbilhonar através do número de Prandtl turbulento, conforme expresso:

$$\alpha_T = \frac{\nu_T}{Pr_T} \quad (3.60)$$

Conforme será visto a seguir, a difusividade turbilhonar no modelo de Smagorinsky será dependente da viscosidade turbilhonar.

### 3.3.1. Modelo de Smagorinsky

O modelo de Smagorinsky [Smagorinsky,1963] é o primeiro modelo sub-malha introduzido para determinação dos fluxos turbulentos de momentum e ainda é bastante utilizado para representação dos efeitos sub-malha, em simulação de grandes escalas. As tensões de Reynolds sub-malha, segundo este modelo, são definidas como:

$$\tau_T = C_s^2 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (3.61)$$

onde cada termo da equação (3.61) significa:

$C_s$  - constante de Smagorinsky;

$\bar{\Delta}$  - escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas e pode ser

definida pela expressão (3.62);

$|\bar{S}|$  - definida pela expressão (3.63);

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (3.62)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3.63)$$

Já os valores da difusividade turbilhonar sub-malha são definidos indiretamente através da utilização da substituição da expressão (3.61) em (3.60), ou seja:

$$\alpha_T = \frac{C_s^2}{Pr_T} \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (3.64)$$

## 4. MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Foi utilizado o método de elementos finitos para obtenção da solução do sistema de equações governantes apresentados no capítulo anterior. Para a solução através deste método é necessário obter a formulação fraca das equações e realizar a discretização do domínio total a ser estudado. No que tange a discretização espacial foi aplicado o método de Galerkin clássico [Reddy e Gartling, 1994]. Já no que se refere a discretização temporal foi realizada uma expansão das derivadas temporais em série de Taylor, incluindo os termos de segunda ordem (auxiliando a estabilização do escoamento). Este esquema é conhecido como de Taylor-Galerkin [Donea,1984] e foi utilizado por [Azevedo, 1999] para a simulação de escoamentos laminares tridimensionais com interação fluido-estrutura, por [Rossa, 2000] para a simulação de escoamentos não-isotérmicos laminares e por [Petry, 2002] para a simulação de escoamentos tridimensionais, isotérmicos e turbulentos. Para a redução do tempo de processamento adotou-se a integração reduzida das matrizes de elementos, utilizando expressões analíticas das funções de interpolação do elemento hexaédrico trilinear [Burbridge, 1999; Gresho et al.,1984]. Ainda foi utilizada a técnica de processamento paralelo OpenMP, utilizada no cálculo das matrizes dos elementos a cada passo de iteração. Esta técnica foi implementada anteriormente no programa desenvolvido por [Oliveira Jr., 2006] para simulação de escoamentos turbulentos e isotérmicos.

### 4.1. O Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos é uma generalização dos métodos variacional clássico (Rayleigh-Ritz) e de resíduos ponderados (Galerkin, mínimos quadrados entre outros) que são baseados na idéia de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como a combinação linear de parâmetros  $C_j$  e de funções  $\phi_j$  selecionadas apropriadamente em todo o domínio do problema. As funções  $\phi_j$  são conhecidas como funções de interpolação ou base e são selecionadas de forma a satisfazer as condições de contorno do problema [Reddy e Gartling, 1994].

Entretanto, para que este método possa ser aplicado e as condições de contorno possam ser satisfeitas o domínio é representado através de uma coleção de sub-domínios de geometria simples que permitem a geração de forma sistemática de funções de aproximação necessárias para a solução do problema por um método variacional ou de resíduos ponderados. A habilidade para representar domínios com geometrias irregulares faz deste método uma valiosa ferramenta

prática para a solução de problemas de contorno e iniciais crescentes em vários campos da engenharia.

Segundo [Reddy e Gartling, 1994] os principais passos na análise de elementos finitos são:

- 1 – pré-processamento: discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos, geração da malha de elementos finitos (definir as coordenadas dos nós que compõe a malha e as conectividades que definem os elementos, sem sobreposição dos domínios dos elementos);
- 2 – formulação de resíduos ponderados ou forma fraca das equações diferenciais a serem analisadas;
- 3 – desenvolvimento das equações de elementos finitos do problema a partir da formulação de resíduos ponderados ou forma fraca do problema;
- 4 – montagem (assembly) das equações à nível de elemento para obter o sistema global de equações algébricas (sobre todo o domínio);
- 5 – imposição das condições de contorno;
- 6 – solução das equações;
- 7 – pós-processamento dos resultados.

O pré-processamento foi realizado através do desenvolvimento de um código em FORTRAN 90. Entretanto, o mesmo é limitado a domínios simples, permitindo a análise de escoamentos em cavidades, sobre placas planas e em canais.

Nas próximas secções nos deteremos na realização dos passos 2 e 3, ou seja, a formulação de resíduos ponderados do problema e a dedução do modelo de elementos finitos, partindo das equações governantes (3.43), (3.50) e (3.51) da continuidade, balanço da quantidade de movimento e da energia, respectivamente, e das condições de contorno (3.4),(3.6),(3.52) e (3.53) e iniciais (3.8), (3.9) e (3.10).

Também será mostrada a estrutura do algoritmo desenvolvido para solução das equações de elementos finitos apresentadas nas próximas secções.

## 4.2. Formulação Variacional

A forma fraca de uma equação diferencial é uma expressão, na forma integro-diferencial, equivalente as equações diferenciais governantes e as condições de contorno do problema na forma forte. A origem da expressão forma fraca, advêm do enfraquecimento das exigências de continuidade das variáveis primárias: velocidade, pressão e temperatura [Lange, 1992].

Para obtenção da forma variacional, seguem-se três passos fundamentais para o seu desenvolvimento:

- o primeiro passo consiste em colocar todos os termos das equações governantes no mesmo lado da igualdade na equação, multiplicar essa equação por uma função peso  $e$ , por último, integrar a equação sobre todo o domínio  $\Omega$ . As equações governantes do problema ficam com a seguinte configuração:

- equação da continuidade

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} p^* C^2 \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_j} d\Omega = 0, \quad \forall (p^*, v_i^*, T^*) \in \mathbf{P}^h \times \mathbf{V}^h \times \mathbf{T}^h \quad (4.1)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + u_i) \left( \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right) \right\} \\ - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_k)}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \rho_0 g_i \beta \bar{T} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \rho_0 g_i \beta T_0 d\Omega = 0 \\ \forall (p^*, v_i^*, T^*) \in \mathbf{P}^h \times \mathbf{V}^h \times \mathbf{T}^h \quad (4.2) \end{aligned}$$

- equação da conservação da energia

$$\int_{\Omega} T^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} T^* \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} T^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} T^* q'' d\Omega = 0, \quad \forall (p^*, v_i^*, T^*) \in \mathbf{P}^h \times \mathbf{V}^h \times \mathbf{T}^h \quad (4.3)$$

onde:

$p^*$  - função peso para a pressão, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

$v_i^*$  - função peso para a velocidade, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

$T^*$  - função peso para a temperatura, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no



contorno;

$\mathbf{P}^h$  – subespaço funcional do campo de pressão;

$\mathbf{V}^h$  - subespaço funcional do campo de velocidade;

$\mathbf{T}^h$  - subespaço funcional do campo de temperatura;

$\Omega$  - domínio do elemento;

Para cada escolha de uma função peso em uma determinada equação (por exemplo, a função peso  $T^*$  na equação da conservação da energia) obtém-se uma equação algébrica para a equação diferencial (no exemplo citado, Eq. (4.3)) entre os valores nodais da variável em questão (no exemplo citado,  $T$  em cada nó  $T_j$ ). Para  $n$  valores independentes da função peso, obtém-se  $n$  equações algébricas linearmente independentes.

- o segundo passo para obtenção da formulação de resíduos ponderados das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia consiste em distribuir a diferenciação igualmente entre a função peso e a variável em cada equação de conservação (neste caso somente as equações de conservação da quantidade de movimento e de energia, pois apresentam termos de segunda ordem) para que tanto a função peso quanto a variável sejam diferenciáveis uma vez com respeito às coordenadas;

- o terceiro passo consiste em substituir as equações com as condições de contorno de segunda espécie (3.52) e (3.53). Para tal, primeiramente utiliza-se uma integração por partes (ou teorema da divergência de Green-Gauss) dos termos de dissipação e pressão na equação da conservação da quantidade de movimento e da energia, conforme visto a seguir:

- equação da conservação da quantidade de movimento:

Primeiramente, realizamos o tratamento dos termos difusivos:

$$\begin{aligned}
 -\int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v+v_i) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v+v_i) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
 -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i^* (v+v_i) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega &
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicando o teorema de Green-Gauss ao segundo termo do lado direito da Eq. (4.4)

transforma-se a integral do domínio em uma integral de superfície  $\Gamma$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i^* (v + v_t) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} v_i^* (v + v_t) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Gamma \quad (4.5)$$

Substituindo a Equação (4.5) na Eq. (4.4), realizando o mesmo processo para os termos de viscosidade volumétrica ( $\lambda$ ) e de pressão e substituindo a equação com a condição de contorno natural (3.52), têm-se a equação final de resíduos ponderados para a equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] d\Omega \\ & + \frac{\lambda}{\rho_0} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_k)}{\partial x_k} \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \bar{p} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \rho_0 g_i \beta \bar{T} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \rho_0 g_i \beta T_0 d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} v_i^* \left\{ -p \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_k)}{\partial x_k} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma \\ & \forall (p^*, v_i^*, T^*) \in \mathbf{P}^h \times \mathbf{V}^h \times \mathbf{T}^h \quad (4.6) \end{aligned}$$

- equação da conservação da energia:

Realizando o tratamento dos termos difusivos:

$$-\int_{\Omega} T^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T^* (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] d\Omega \quad (4.7)$$

Aplicando o teorema de Green-Gauss ao segundo termo do lado direito da equação (4.6) transforma-se a integral no domínio em uma integral de superfície  $\Gamma$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T^* (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} T^* (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\Gamma \quad (4.8)$$

Substituindo a equação (4.8) na equação (4.7) e substituindo a equação (3.53) com a

condição de contorno de fluxo de calor, têm-se a equação final de resíduos ponderados para a equação da conservação da energia:

$$\int_{\Omega} T^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} T^* \bar{v}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \left[ (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} T^* q'' d\Omega = \int_{\Gamma} T^* \left[ (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma$$

$$\forall (p^*, v_i^*, T^*) \in \mathbf{P}^h \times \mathbf{V}^h \times \mathbf{T}^h \quad (4.9)$$

#### 4.3. Equações de Elementos Finitos do Problema

Com a formulação de resíduos ponderados do problema através das equações (4.1), (4.6) e (4.9) obtidas, segue-se para a formulação de elementos finitos do problema. Foi utilizada a técnica clássica de Galerkin [Reddy e Gartling, 1994]. O método de Galerkin consiste em utilizar as mesmas funções de aproximação para a função peso e para as variáveis do problema.

As funções peso e as variáveis do problema, dentro do domínio analisado, são substituídas por aproximações, onde estas são a combinação linear das funções de interpolação do elemento multiplicadas pelas variáveis a serem aproximadas nos nós do elemento. As funções aproximadas ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(x, y, z) &= \underline{\phi}(x, y, z) \bar{v}_i \\ v_i^*(x, y, z) &= \underline{\phi}(x, y, z) v_i^* \\ \bar{P}(x, y, z) &= \underline{\psi}(x, y, z) \bar{P} \\ P^*(x, y, z) &= \underline{\psi}(x, y, z) P^* \\ \bar{T}(x, y, z) &= \underline{\theta}(x, y, z) \bar{T} \\ T^*(x, y, z) &= \underline{\theta}(x, y, z) T^* \end{aligned} \quad \text{em } t \times \Omega \quad (4.10)$$

Onde:

$\underline{\phi}$  - vetor de funções de interpolação para a velocidade;

$\bar{v}_i$  - vetor de valores nodais da componente i da velocidade;

$v_i^*$  - vetor de valores nodais da função peso de velocidade;

$\underline{\psi}$  - vetor de funções de interpolação para a pressão;

$\bar{p}$  - vetor de valores nodais para a pressão;

$\tilde{p}^*$  - vetor de valores nodais da função peso de pressão;

$\theta$  - vetor de funções de interpolação para a temperatura;

$\bar{T}$  - vetor de valores nodais para a temperatura;

$\tilde{T}^*$  - vetor de valores nodais da função peso de temperatura;

Então, através da substituição das aproximações dadas pela equação (4.10) nas equações de resíduos ponderados (4.1), (4.6) e (4.9) da continuidade, conservação da quantidade de movimento e energia, respectivamente, é possível obter as equações a nível de elemento:

- equação da continuidade:

$$\int_{\Omega} \tilde{\psi}^T \tilde{p}^* \frac{\partial(\tilde{\psi} \bar{p})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\psi}^T \tilde{p}^* C^2 \frac{\partial(\tilde{\rho}_0 \tilde{v}_j)}{\partial x_j} d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^* \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_i)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^* \tilde{\phi} \bar{v}_j \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi}^T \bar{v}_i)}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^*)}{\partial x_j} (v + v_t) \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_i)}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial(\tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^*)}{\partial x_j} (v + v_t) \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_j)}{\partial x_i} d\Omega + \frac{\lambda}{\rho_0} \int_{\Omega} \frac{\partial(\tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^*)}{\partial x_j} \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_k)}{\partial x_k} \delta_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial(\tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^*)}{\partial x_j} \tilde{\psi} \bar{P} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^* \rho_0 g_i \beta \theta \bar{T} d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{\phi}^T \tilde{v}_i^* \rho_0 g_i \beta T_0 d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\phi} \tilde{v}_i^* S_i d\Gamma \end{aligned} \quad (4.12)$$

Onde:

$$\int_{\Gamma} \tilde{\phi} \tilde{v}_i^* S_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{\phi} \tilde{v}_i^* \left\{ -\tilde{\psi} \bar{P} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_k)}{\partial x_k} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_0 \tilde{\phi} \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma$$

- equação da conservação da energia:

$$\int_{\Omega} \underline{\theta}^T \underline{T}^* \frac{\partial(\underline{\theta} \bar{T})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\theta}^T \underline{T}^* \underline{\phi} \bar{v}_j \frac{\partial(\underline{\theta}^T \bar{T})}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\underline{\theta}^T \underline{T}^*)}{\partial x_j} \left[ (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial(\underline{\theta} \bar{T})}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\theta}^T \underline{T}^* q'' d\Omega = \int_{\Gamma^c} \underline{\theta}^T \underline{T}^* q d\Gamma \quad (4.13)$$

Onde:

$$\int_{\Gamma} \underline{\theta}^T \underline{T}^* q d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{\theta}^T \underline{T}^* \left[ (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial(\underline{\theta} \bar{T})}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma$$

Isolando-se as funções de aproximação, têm-se:

- equação da continuidade:

$$\int_{\Omega} (\underline{\psi}^T \underline{\psi}) d\Omega \dot{\bar{P}} + \int_{\Omega} \rho_0 C^2 \underline{\psi}^T \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_j} d\Omega \bar{v}_j = 0 \quad (4.14)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento

$$\int_{\Omega} \rho_0 (\underline{\phi}^T \underline{\phi}) d\Omega \dot{\bar{v}}_i + \int_{\Omega} \rho_0 (\underline{\phi}^T \underline{\phi}) \bar{v}_j \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} d\Omega \bar{v}_i + (v + v_i) \left[ \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_j} d\Omega \bar{v}_i + \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_i} d\Omega \bar{v}_j \right] + \frac{\lambda}{\rho_0} \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_k} d\Omega \bar{v}_k \delta_{ij} - \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} \underline{\psi} d\Omega \bar{P} + \int_{\Omega} \rho_0 g_i \beta (\underline{\phi}^T \underline{\theta}) d\Omega \bar{T} = \int_{\Omega} \rho_0 g_i \beta T_0 \underline{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\phi} S_i d\Gamma \quad (4.15)$$

- equação da conservação da energia:

$$\int_{\Omega} (\underline{\theta}^T \underline{\theta}) d\Omega \dot{\bar{T}} + \int_{\Omega} \underline{\theta}^T \underline{\phi} \bar{v}_j \frac{\partial \underline{\theta}^T}{\partial x_j} d\Omega \bar{T} + (\alpha + \alpha_i) \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\theta}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x_j} d\Omega \bar{T} = \int_{\Omega} \underline{\theta} q'' d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\theta} q d\Gamma \quad (4.16)$$

Usando as aproximações dadas em (4.10), obtém-se a expressão para o cálculo de  $|\bar{S}|$  utilizado na determinação da viscosidade turbulenta e da difusividade turbulenta, em termos de variáveis nodais:

$$\begin{aligned}
|\bar{S}| = & \left\{ 2 \left[ \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}(\rho_0 \bar{v}_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}(\rho_0 \bar{v}_2) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}(\rho_0 \bar{v}_3) \right]^2 \right] + 2 \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}(\rho_0 \bar{v}_1) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}(\rho_0 \bar{v}_2) \right] + \right. \\
& + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}(\rho_0 \bar{v}_1) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}(\rho_0 \bar{v}_3) \right] + \left. \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}(\rho_0 \bar{v}_3) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}(\rho_0 \bar{v}_2) \right] \right\} + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}(\rho_0 \bar{v}_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}(\rho_0 \bar{v}_2) \right]^2 \\
& + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}(\rho_0 \bar{v}_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1}(\rho_0 \bar{v}_3) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3}(\rho_0 \bar{v}_2) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2}(\rho_0 \bar{v}_3) \right]^2 \left. \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

As três equações governantes do escoamento incompressível, não-isotérmico na forma de elementos finitos (4.14 - 4.16) podem ser escritas em uma forma matricial mais compacta:

- equação da continuidade:

$$M_p \dot{\bar{P}} + G_j^T \bar{v}_j = 0 \quad (4.18)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento:

$$M_v \dot{\bar{v}}_i + A_j \bar{v}_i + D_{ij} \bar{v}_j - G_i \bar{P} + B_i \bar{T} = F_i \quad (4.19)$$

- equação da conservação de energia:

$$M_T \dot{\bar{T}} + A_{jT} \bar{T} + D_{jT} \bar{T} = F_T \quad (4.20)$$

Onde as matrizes presentes nas equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento e energia são expressas na equação (4.21):

$$\begin{aligned}
M_p &= \int_{\Omega} \underline{\psi}^T \underline{\psi} d\Omega; G_j^T = \int_{\Omega} \rho_0 C^2 \underline{\psi}^T \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_j} d\Omega; M_v = \int_{\Omega} \rho_0 \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega; A_j = \int_{\Omega} \rho_0 (\underline{\phi}^T \underline{\phi}) \bar{v}_j \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} d\Omega \\
D_{ij} &= \begin{cases} \rightarrow i=1, k=2,3; \rightarrow i=2, k=3,1; \rightarrow i=3, k=1,2 \\ \int_{\Omega} \rho_0 \left[ 2(v+v_i) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 (v+v_i) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_k} \right) d\Omega \\ \rightarrow i \neq j \\ \int_{\Omega} \rho_0 (v+v_i) \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{cases} \quad (4.21) \\
G_i &= \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x_i} \underline{\psi} d\Omega; B_i = \int_{\Omega} \rho_0 g_i \beta (\underline{\phi}^T \underline{\theta}) d\Omega; F_i = \int_{\Omega} \underline{\phi} \rho_0 g_i \beta T_0 d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\phi} S_i d\Gamma; M_T = \int_{\Omega} \underline{\theta}^T \underline{\theta} d\Omega; \\
A_{jT} &= \int_{\Omega} (\underline{\theta}^T \underline{\phi}) \bar{v}_j \frac{\partial \underline{\theta}^T}{\partial x_j} d\Omega; D_{jT} = \int_{\Omega} (\alpha + \alpha_i) \frac{\partial \underline{\theta}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial x_j} d\Omega; F_T = \int_{\Omega} \underline{\theta} q'' d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\theta} q d\Gamma
\end{aligned}$$

Escrevendo o sistema de equações em sua forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} M_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{u}}_1 \\ \dot{\underline{u}}_2 \\ \dot{\underline{u}}_3 \\ \dot{\underline{u}}_4 \\ \dot{\underline{T}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1(u) + \hat{D}_{11} & D_{21} & D_{31} & G_1 & B_1 \\ D_{12} & A_2(u) + \hat{D}_{22} & D_{32} & G_2 & B_2 \\ D_{13} & D_{23} & A_3(u) + \hat{D}_{33} & G_3 & B_3 \\ G_1^T & G_2^T & G_3^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{jT} + \hat{D}_{jT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{p} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ F_T \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{11} &= 2D_{11} + D_{22} + D_{33} \\
\hat{D}_{22} &= D_{11} + 2D_{22} + D_{33} \\
\hat{D}_{33} &= D_{11} + D_{22} + 2D_{33}
\end{aligned} \quad (4.23)$$

Deve ser observado que as funções de interpolação para velocidade  $\underline{\phi}$  e pressão  $\underline{\psi}$  devem ser, usualmente, para atendimento da condição de Babuška-Brezzi de convergência [Carey e Oden, 1984], de ordem dos polinômios diferentes, ou seja, que a base do espaço de funções de velocidade deve ser superior à dos polinômios do espaço de funções da pressão. No caso dos hexaedros trilineares  $\underline{\phi}$  são funções lineares e  $\underline{\psi}$  são constantes no domínio do elemento. No que se refere as funções de interpolação para temperatura  $\underline{\theta}$  estas apresentarão o mesmo

comportamento das funções de velocidade  $\phi$ , ou seja, também serão funções lineares.

#### 4.4. Discretização Temporal Através do Esquema de Taylor Galerkin

Para a obtenção das equações discretizadas no tempo, é necessário realizarmos uma expansão em série de Taylor dos termos derivados com relação ao tempo nas equações de elementos finitos (4.18),(4.19) e (4.20), respectivamente. Este esquema foi empregado por [Donea,1984; Azevedo, 1999; Burbridge, 1999; Rossa, 2000 e Petry,2002]. Maiores detalhes da discretização temporal podem ser vistos em [Yoon et al., 1998; Azevedo, 1999; Burbridge, 1999].

Para a equação da continuidade, deve-se expandir o termo de pressão  $\bar{P}$  em séries de Taylor, tendo-se:

$$\Delta \bar{P} = \bar{P}^{n+1} - \bar{P}^n = \Delta t \left[ \frac{\partial \bar{P}^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial (\Delta \bar{P})^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \bar{P}^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2 (\Delta \bar{P})^{n+1}}{\partial t^2} \right] \quad (4.24)$$

Considerando as equações (4.18) e (4.22) temos a equação da continuidade discretizada, os valores de  $S_1=S_2= 1/2$  são recomendados e utilizados nos trabalhos de [Azevedo,1999; Burbridge, 1999 e Petry; 2002]:

$$M_{DP} \Delta \bar{P}_{k+1}^{n+1} = -\Delta t \left\{ \left[ G_j^T (\bar{v}_j)^n \right] + \frac{1}{2} \left[ G_j^T (\Delta \bar{v}_j)_k^{n+1} \right] \right\} - (M_P - M_{DP}) \Delta \bar{P}_k^{n+1} \quad (4.25)$$

Onde  $M_{DP}$  é a matriz de massa da pressão discreta, ou diagonalizada, empregada para evitar a inversão de uma matriz consistente. Como  $\psi$  é constante no elemento, conseqüentemente as matrizes de massa de pressão consistente e discreta são idênticas e sua diferença é nula (anulando o último termo da equação (4.25)).

Para a equação da conservação da quantidade de movimento, deve-se expandir a velocidade  $\bar{v}_i$  em séries de Taylor, tendo-se:



$$\Delta(\bar{v}_i)^{n+1} = \bar{v}_i^{n+1} - \bar{v}_i^n = \Delta t \left[ \frac{\partial(\bar{v}_i)^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial(\Delta\bar{v}_i)^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2(\bar{v}_i)^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2(\Delta\bar{v}_i)^{n+1}}{\partial t^2} \right] \quad (4.26)$$

Neste caso, segundo [Azevedo, 1999; Burbridge, 1999] também utiliza-se  $S_1=S_2=1/2$ . Conseqüentemente, utilizando as equações (4.19) e (4.26) e considerando o mesmo tratamento para os termos  $B_i\bar{T}$  e  $F_i$  (visto que o termo dependente da temperatura é uma força de campo):

$$\begin{aligned} M_{DV} \Delta(\bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = & -\Delta t \left\{ \left[ A_j(\bar{v}_i) + D_{ij}(\bar{v}_j) - G_i\bar{P} \right]^n - \frac{1}{2} \left( (F_i - B_i\bar{T})^n + (\Delta F_i - B_i\Delta\bar{T})_k^{n+1} \right) \right\} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left\{ A_j(\Delta\bar{v}_i) + D_{ij}(\Delta\bar{v}_j) - G_i\Delta\bar{P} + \frac{2}{\Delta t} (M_V - M_{DV}) \Delta\bar{v}_i \right\}_k^{n+1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Onde  $M_{DV}$  é a matriz de massa diagonalizada (também conhecida como matriz discreta ou “lumped matrix”).

Para a equação da conservação da energia, deve-se expandir a temperatura  $\bar{T}$  em série de Taylor, realizando-se o mesmo tratamento que para as equações anteriores, continuidade e conservação da quantidade de movimento, assim:

$$(\Delta\bar{T})^{n+1} = \bar{T}^{n+1} - \bar{T}^n = \Delta t \left[ \frac{\partial(\bar{T})^n}{\partial t} + S_1 \frac{\partial(\Delta\bar{T})^{n+1}}{\partial t} \right] + \frac{\Delta t^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2(\bar{T})^n}{\partial t^2} + S_2 \frac{\partial^2(\Delta\bar{T})^{n+1}}{\partial t^2} \right] \quad (4.28)$$

Onde, segundo [Rossa, 2000], para a equação da energia também é possível considerar os termos  $S_1=S_2=1/2$ , pois o comportamento da equação da energia é análogo ao das equações do balanço da quantidade de movimento. E a equação da energia fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_{DT} \Delta(\bar{T})_{k+1}^{n+1} = & -\Delta t \left\{ \left[ A_{jT}(\bar{T}) + D_{jT}(\bar{T}) \right]^n - \frac{1}{2} \left( F_T^n + (\Delta F_T)_k^{n+1} \right) \right\} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left\{ A_j(\Delta\bar{T}) + D_{ij}(\Delta\bar{T}) + \frac{2}{\Delta t} (M_T - M_{DT}) \Delta\bar{T} \right\}_k^{n+1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Onde a matriz  $M_{DT}$  é a matriz diagonalizada ou discreta de energia.

Com as equações matriciais desenvolvidas, é necessário determinar os passos

computacionais para elaboração do algoritmo de um escoamento não isotérmico e turbulento (é estabelecido um procedimento análogo ao apresentado por [Azevedo, 1999]). A descrição de todos os passos do algoritmo modificado pode ser visto no fluxograma exposto na Fig. 4.1:

1 – início do ciclo de tempo:  $t = t + \Delta t$ ;

2 – formação das matrizes  $M_P, M_V, M_T$  a nível de elemento e calculo das matrizes discretas  $M_{DP}, M_{DV}, M_{DT}$  somando as linhas e colocando o resultado da soma na diagonal principal;

3 – montar  $M_{DP}, M_{DV}, M_{DT}$  para obter os vetores discretos globais  $M_{DP}^G, M_{DV}^G, M_{DT}^G$ ;

4 – formar o vetor  $S_i$  a nível de elemento; onde:

$$S_i = -\Delta t \left\{ \left[ A_j(\bar{v}_i) + D_{ij}(\bar{v}_j) - G_i \bar{P} \right]^n - \frac{1}{2} \left( (F_i - B_i \bar{T})^n \right) \right\} \quad (i,j = 1,2,3)$$

5 – formar o vetor  $T_C$  (referente aos termos de divergência de velocidade independente da iteração) a nível de elemento; onde:

$$T_C = -\Delta t G_j^T \left( \bar{v}_j \right) \quad (j=1,2,3)$$

6 – formar o vetor  $S_T$  a nível de elemento; onde:

$$S_T = -\Delta t \left\{ \left[ A_{jT}(\bar{T}) + D_{jT}(\bar{T}) \right]^n - \frac{1}{2} (F_T^n) \right\} \quad (j=1,2,3)$$

7 – montar os vetores  $T_C, S_i, S_T$  para obter os vetores globais  $T_C^G, S_i^G, S_T^G$ ;

8 – início do ciclo de iterações:  $k = k+1$ ;

9 – formar o vetor  $R_i$  a nível de elemento; onde:

$$R_i = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \left[ A_j(\Delta \bar{v}_i) + D_{ij}(\Delta \bar{v}_j) - G_i(\Delta \bar{P}) \right]_k^{n+1} - \frac{1}{2} (\Delta F_i - B_i \Delta \bar{T})_k^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} (M_V - M_{DV})(\Delta \bar{v}_i)_k^{n+1} \right\} \quad (i,j=1,2,3)$$

10 – formar o vetor  $Q$  a nível de elemento; onde:

$$Q = -\frac{\Delta t}{2} G_j^T (\Delta \bar{v}_j)_k^{n+1} - (M_P - M_{DP})(\Delta \bar{P})_k^{n+1} \quad (j = 1,2,3)$$

11 – formar o vetor  $R_T$  a nível de elemento; onde:

$$R_T = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ A_{jT}(\bar{T})_k^{n+1} + D_{jT}(\bar{T})_k^{n+1} - \frac{1}{2} (\Delta F_T)_k^{n+1} + \frac{2}{\Delta t} (M_T - M_{DT})(\Delta \bar{v}_i)_k^{n+1} \right\} \quad (j = 1,2,3)$$

12 – montar os vetores  $R_i, Q, R_T$  para obter os vetores globais  $R_i^G, Q^G, R_T^G$ ;

13 – efetuar o cálculo da variação temporal das variáveis através das seguintes expressões:

$$(\Delta \bar{P})_{k+1}^{n+1} = (M_{DP}^G)^{-1} \left[ (T^G)^n + (Q^G)_k^{n+1} \right] \quad (4.30)$$

$$(\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = (M_{DV}^G)^{-1} \left[ (S_i^G)^n + (R_i^G)_k^{n+1} \right] \quad (4.31)$$

$$(\Delta \bar{T})_{k+1}^{n+1} = (M_{DT}^G)^{-1} \left[ (S_T^G)^n + (R_T^G)_k^{n+1} \right] \quad (4.32)$$

14 – aplicar as condições de contorno nas equações acima (4.30),(4.31) e (4.32);

15 – verificar se a variação das variáveis primárias, em módulo e a cada passo iterativo, está dentro da tolerância especificada, ou seja:

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{P})_{k+1}^{n+1} &\cong (\Delta \bar{P})_k^{n+1} \\ (\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} &\cong (\Delta \bar{v}_i)_k^{n+1} \\ (\Delta \bar{T})_{k+1}^{n+1} &\cong (\Delta \bar{T})_k^{n+1} \end{aligned}$$

16 – caso o passo 15 seja verificado, conclui-se o processo iterativo e passa-se ao próximo passo, em caso contrário, volta-se ao passo 8;

17 – calcular o valor das variáveis primárias a cada passo de tempo; através das expressões:

$$(\bar{P})_{k+1}^{n+1} = (\bar{P})_k^n + (\Delta \bar{P})_{k+1}^{n+1} \quad (4.33)$$

$$(\bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} = (\bar{v}_i)_k^n + (\Delta \bar{v}_i)_{k+1}^{n+1} \quad (i=1,2,3) \text{ em } t \times \Omega \quad (4.34)$$

$$(\bar{T})_{k+1}^{n+1} = (\bar{T})_k^n + (\Delta \bar{T})_{k+1}^{n+1} \quad \text{em } t \times \Omega \quad (4.35)$$

18 – se o limite de tempo for atingido, concluir o processo, caso contrário voltar ao passo 1.

Como o esquema temporal é explícito, há um intervalo de tempo crítico para que haja estabilidade na solução da equação que é a condição de estabilidade, também conhecida como condição de Courant. Conforme pode ser visto em [Petry, 2002] a restrição é expressa por:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i (\text{min})}{C + V} \quad (4.36)$$

Onde  $\Delta x_i (\text{min})$  é a menor dimensão de um elemento na malha, C é a velocidade de propagação do som no meio e V é uma velocidade média de referência.

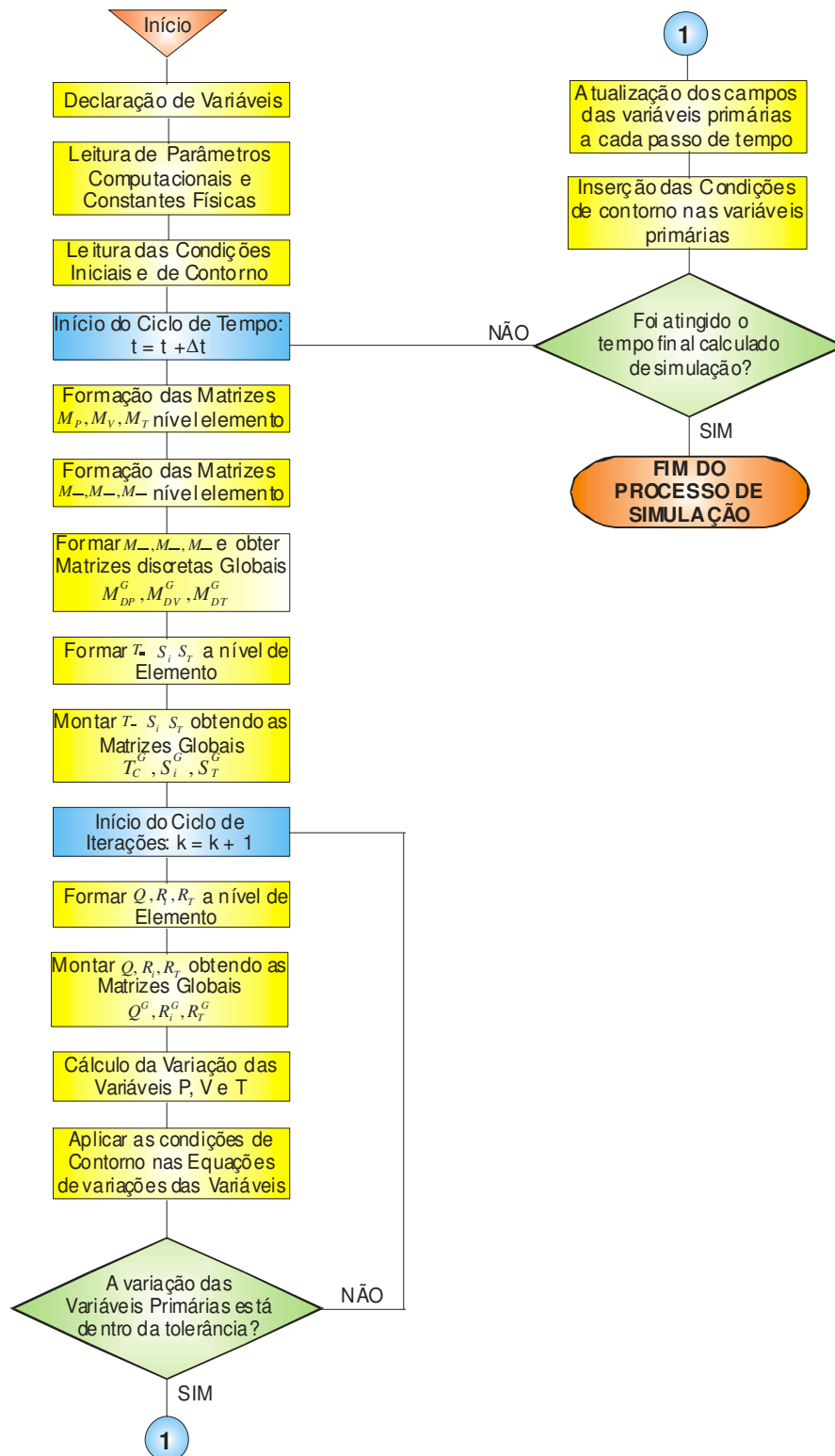


Figura 4.1 - Fluxograma do algoritmo para resolução de escoamentos não-isotérmicos

#### 4.5. Forma Explícita das Matrizes de Elementos Usando Expressões Analíticas e Integração Reduzida

Será utilizado no presente trabalho o elemento hexaédrico isoparamétrico, empregando as funções de interpolação lineares para as variáveis velocidade ( $\phi$ ) e temperatura ( $\theta$ ) e uma função constante para a pressão ( $\psi$ ), em função das coordenadas normalizadas ( $\xi, \eta, \zeta$ ):

$$\phi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i=1, \dots, 8) \quad (4.37)$$

$$\psi_i(\xi, \eta, \zeta) = cte = 1 \quad (i=1, \dots, 8) \quad (4.38)$$

$$\theta_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i=1, \dots, 8) \quad (4.39)$$

Os vetores  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  podem ser agrupados conforme as seguintes expressões, que são melhor entendidas através da visualização da Fig. 4.2, onde cada posição do vetor é referente a cada nó do elemento:

$$\xi^T = \{-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1\} \quad (4.40)$$

$$\eta^T = \{-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1\} \quad (4.41)$$

$$\zeta^T = \{-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1\} \quad (4.42)$$

No que tange as coordenadas globais, também é possível agrupá-las em vetores  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

Entretanto, para montagem dos elementos é necessário a transformação do domínio físico em um domínio computacional (conforme mostra a Fig. 4.2) pois a integração em termos das coordenadas globais, para geometrias complexas, tornam-se muito complicadas.

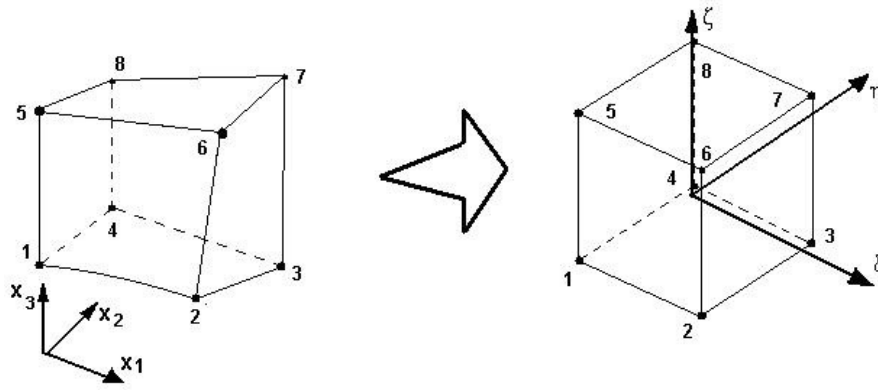


Figura 4.2 – ilustração dos elementos hexaédricos de oito nós no domínio físico e no espaço computacional

O esquema de integração utilizado no presente trabalho é o explícito ou analítico, que requer que a integral seja avaliada, a nível de elemento, em um domínio específico com respeito ao sistema de coordenadas naturais de  $-1 \leq (\xi, \eta, \zeta) \leq 1$  (quadratura de Gauss). Por isso, os valores dos vetores referentes as equações (4.40– 4.42) variam entre valores  $-1$  e  $+1$ .

O que é feito no presente trabalho, então, é a inserção dos termos referentes as funções de interpolação na integral de volume e a realização da integração analítica destas. Entretanto é necessária a transformação das coordenadas do domínio físico para o domínio computacional, que são regidas pelas seguintes expressões:

$$x_i = \sum_{\lambda=1}^8 (x_i)_\lambda \phi_\lambda(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.43)$$

$$\bar{v}_i = \sum_{\lambda=1}^8 (\bar{v}_i)_\lambda \phi_\lambda(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.44)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Onde:

$x_i$  - coordenada na direção  $i$  em qualquer ponto na malha ( $i=1,2,3$ );

$(x_i)_\lambda$  - coordenada na direção  $i$  ( $i= 1,2,3$ ) do nó que define o elemento ( $\lambda = 1,2,3,4,5,6,7,8$ );

$\phi_\lambda(\xi, \eta, \zeta)$  - função de interpolação no nó  $\lambda$ , avaliado com as coordenadas naturais;

$J$  – matriz jacobiana, referente a transformação das derivações das funções de interpolação com relação as coordenadas globais para uma derivação das funções com relação as coordenadas naturais (Eq. 4.46).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} x_1 & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} x_2 & \frac{\partial \phi}{\partial \xi} x_3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} x_1 & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} x_2 & \frac{\partial \phi}{\partial \eta} x_3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} x_1 & \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} x_2 & \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} x_3 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Estas expressões de integração analítica são exatas para hexaedros com faces paralelas e constituem uma boa aproximação para hexaedros pouco distorcidos [Azevedo, 1999].

Para poder definir as equações que caracterizam as matrizes é necessário calcular, para cada elemento, a matriz Jacobiana no centro do elemento (nas coordenadas  $\xi = \eta = \zeta = 0$ ). Maiores detalhes podem ser vistos em [Azevedo, 1999] e [Petry, 2002].

Levando em consideração a matriz jacobiana no centro do elemento, sua matriz adjunta, as expressões (4.21), (4.37),(4.38),(4.39) e integrando analiticamente pode-se obter expressões para as matrizes a nível de elemento. Obtendo-se as seguintes expressões:

$$M_p = \Omega^e \quad (4.47)$$

$$G_i^T(\alpha) = \rho_0 C^2 (\bar{J}_{i1} \xi_\alpha + \bar{J}_{i2} \eta_\alpha + \bar{J}_{i3} \zeta_\alpha) \quad (i = 1,2,3) \quad (\alpha=1,\dots,8) \quad (4.48)$$

$$M_v(\alpha, \beta) = \rho_0 \left[ \frac{\Omega^e}{64} \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (4.49)$$

$$A_i(\alpha, \beta) = \rho_0 \left[ \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \bar{v}_i(k) \right] \frac{1}{8} \left[ \bar{J}_{i1} \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \\ \left. + \bar{J}_{i2} \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \bar{J}_{i3} \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \quad (i=1,2,3) \quad (\alpha, \beta=1,\dots,8) \quad (4.50)$$

$$E_{ii}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Omega^e} \left[ (\bar{J}_{i1})^2 \xi_\alpha \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2})^2 \eta_\alpha \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\ \left. + (\bar{J}_{i3})^2 \zeta_\alpha \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{i2}) (\xi_\alpha \eta_\beta + \eta_\alpha \xi_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \\ \left. + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{i3}) (\xi_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \xi_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{i3}) (\eta_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \eta_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \right] \\ (i=1,2,3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (4.51)$$

A expressão (4.51) é inserida em  $D_{ij}$  na equação (4.21) na situação onde  $i=1, k=2,3; i=1, k=3,1$  e  $i=3, k=1,2$ . Então teremos:

$$D_{11} = \rho_0 \left[ 2(v + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{11} + \rho_0 (v + v_t) (E_{22} + E_{33}) \quad (4.52)$$

$$D_{22} = \rho_0 \left[ 2(v + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{22} + \rho_0 (v + v_t) (E_{11} + E_{33}) \quad (4.53)$$

$$D_{33} = \rho_0 \left[ 2(v + v_t) + \frac{\lambda}{\rho_0} \right] E_{33} + \rho_0 (v + v_t) (E_{11} + E_{22}) \quad (4.54)$$

$$E_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Omega^e} \left[ (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j1}) \xi_\alpha \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j2}) \eta_\alpha \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \right. \\ \left. + (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j3}) \zeta_\alpha \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j2}) \xi_\alpha \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i1} \bar{J}_{j3}) \xi_\alpha \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + \right. \\ \left. + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j1}) \eta_\alpha \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{i2} \bar{J}_{j3}) \eta_\alpha \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j1}) \zeta_\alpha \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + \right. \\ \left. + (\bar{J}_{i3} \bar{J}_{j2}) \zeta_\alpha \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \right]$$

$$(i,j = 1,2,3) \quad i \neq j \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (4.55)$$



A expressão (4.56) é inserida em  $D_{ij}$  na equação (4.21) na situação onde  $i \neq j$ . Então teremos:

$$D_{12} = \rho_0 (v + v_i) E_{12} + \lambda E_{21} \quad (4.56)$$

$$D_{13} = \rho_0 (v + v_i) E_{13} + \lambda E_{31} \quad (4.57)$$

$$D_{23} = \rho_0 (v + v_i) E_{23} + \lambda E_{32} \quad (4.58)$$

$$D_{ij} = D_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.59)$$

$$G_i(\alpha) = \bar{J}_{i1} \xi_\alpha + \bar{J}_{i2} \eta_\alpha + \bar{J}_{i3} \zeta_\alpha \quad (\alpha=1, \dots, 8) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.60)$$

$$B_i(\alpha, \beta) = \rho_0 g_i \beta \left[ \frac{\Omega^e}{64} \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \right] \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4.61)$$

$$F_i(\alpha) = \frac{\Omega^e}{8} \rho_0 g_i \beta T_0 + \frac{\Gamma^e}{4} S_i \quad (\alpha=1, \dots, 8) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.62)$$

$$M_T(\alpha, \beta) = \frac{\Omega^e}{64} \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (4.63)$$

$$(A_T)_j(\alpha, \beta) = \left[ \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \bar{v}_j(k) \right] \frac{1}{8} \left[ \bar{J}_{i1} \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \bar{J}_{i2} \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \bar{J}_{i3} \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \right] \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
D_{jT}(\alpha, \beta) = & \frac{(\alpha + \alpha_i)}{\Omega^e} \left[ (\bar{J}_{j1})^2 \xi_\alpha \xi_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + (\bar{J}_{j2})^2 \eta_\alpha \eta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) + \right. \\
& + (\bar{J}_{j3})^2 \zeta_\alpha \zeta_\beta \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{j1} \bar{J}_{j2}) (\xi_\alpha \eta_\beta + \eta_\alpha \xi_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \zeta_\alpha \zeta_\beta \right) + \\
& \left. + (\bar{J}_{j1} \bar{J}_{j3}) (\xi_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \xi_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \eta_\alpha \eta_\beta \right) + (\bar{J}_{j2} \bar{J}_{j3}) (\eta_\alpha \zeta_\beta + \zeta_\alpha \eta_\beta) \left( 1 + \frac{1}{3} \xi_\alpha \xi_\beta \right) \right] \\
& (\alpha, \beta = 1, \dots, 8) \quad (j=1,2,3) \quad (4.65)
\end{aligned}$$

$$F_T = \frac{\Omega^e}{8} q''' + \frac{\Gamma^e}{4} q_i \quad (i=1,2,3) \quad (4.66)$$

Onde  $\bar{J}$  é a matriz adjunta da matriz  $J$  e pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\bar{J} = J^{-1} |J| \quad (4.67)$$

Onde  $|J|$  é o determinante da matriz  $J$ .

Para a diagonalização das matrizes de massa de velocidade e temperatura aplicamos o mesmo método utilizado por [Azevedo, 1999] e [Petry, 2002] que consiste no somatório dos termos de cada linha e substituir esse valor na diagonal principal, posteriormente converte-se essa matriz em um vetor com componentes dados pelos elementos da diagonal daquela matriz.

#### 4.6. Técnica de Processamento Paralelo OpenMP

Atualmente, muitos fenômenos físicos são resolvidos através da modelagem computacional. Alguns desses fenômenos, entretanto, demandam um enorme esforço computacional. Entre estes está a simulação numérica de escoamentos turbulentos, devido ao alto número de graus de liberdade envolvidos.

Para melhoria do tempo de processamento, foi utilizada, no presente trabalho, a técnica de processamento paralelo OpenMP (já utilizada anteriormente por [Oliveira Jr., 2006]) que consiste em distribuir determinadas tarefas de um programa para diversos processadores, desde que estes compartilhem da mesma memória. Algumas das vantagens na utilização desta técnica que podem ser citadas são: a possibilidade de manter um programa serial intacto (visto que as diretivas utilizadas possuem uma sintaxe capaz de permitir a compilação do programa em

compiladores sem suporte a OpenMP), a facilidade de programação e a verificação automática de processadores e distribuição dinâmica das tarefas. Entretanto, segundo [Hoeflinger, 2006] uma desvantagem de técnicas que utilizam processamento com memória compartilhada (entre elas OpenMP) é que os programas que usam essas linguagens tem sido confinados a executar em máquinas multiprocessadoras, conseqüentemente, se um grande número de processadores é desejado o custo da máquina torna-se muito elevado.

Para máquinas com memória distribuída ou memória compartilhada distribuída, onde cada processador ou nó de processadores possui sua memória local, a troca de dados deve ser feita através de troca de mensagens. Sendo assim, o ambiente é formado por bibliotecas com rotinas para a passagem de mensagens (MPI, PVM) que são ligadas a programas escritos em C, C++ ou FORTRAN, em que o problema é dividido em um número de tarefas e estas se comunicam entre si [Pitanga, 2004].

Segundo [Oliveira Jr., 2006] no cálculo das matrizes dos elementos (que é o trecho que demanda maior esforço computacional no presente trabalho) cada processador fica responsável pelo cálculo em uma determinada faixa de elementos, e o resultado de cada matriz de elemento é passada para um sistema global, melhorando a eficiência do método. Na Figura 4.3, pode ser visto como é feita a distribuição das tarefas entre as diferentes linhas de processamento de um laço de 1 a 1000, para isso basta usar o seguinte par diretivo (que faz o laço ser executado em paralelo):

```
!$OMP PARALLEL DO
  do i = 1, 1000
  bloco
  enddo
!$OMP END PARALLEL DO
```

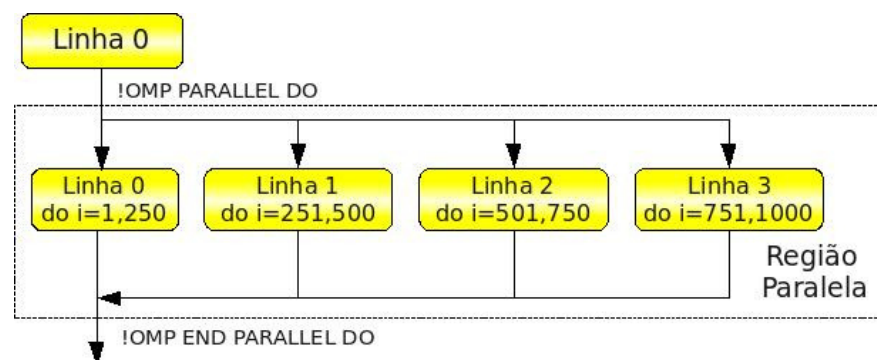
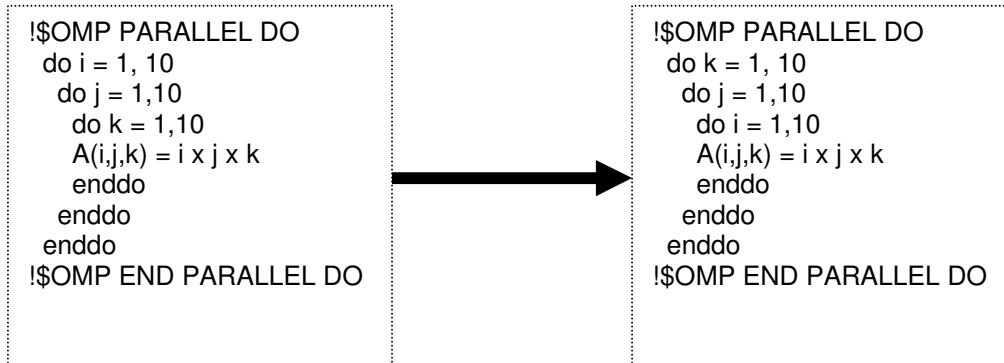


Figura 4.3 – Ilustração sobre o princípio de paralelização de um laço com o par-diretivo !\$OMP PARALLEL DO!\$OMP END PARALLEL DO

Segundo [Hermanns, 2002] ainda é possível melhorar a eficiência do código através da alteração da ordem dos laços da seguinte forma:



O que representaria, no presente caso, alocar os coeficientes de um determinado nó em todos os elementos para depois passar para o próximo nó, ao invés de alocar para cada elemento o coeficiente de todos os nós e depois passar para o próximo elemento. Este último caso é mais adequado para utilização de computadores que tenham como característica forte vetorização.

Quando se realiza um código com processamento paralelo, a utilização deste novo laço induz a um melhor manuseio da memória cache de cada processador, a partir daí mais rápidas alterações dos laços agem nas localizações consecutivas de memória, conduzindo a um código mais rápido.

O processamento dos dados foi realizado no cluster SunFire X2200 e o sistema operacional utilizado foi LINUX RED HAT Server) do Centro Nacional de Supercomputação do Rio Grande do Sul (CESUP-RS) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Maiores detalhes podem ser vistos na Tab. 4.1 e na página ([www.cesup.ufrgs.br](http://www.cesup.ufrgs.br)).

Tabela 4.1 – Dados sobre o Cluster SunFire X2200

Quantidade de nós	5
Número de processadores por nó	4
Processadores	AMD Opteron 2210 – “clock”= 1.8GHz
Memória total	48 GB

## 5. RESULTADOS

### 5.1. Escoamentos Incompressíveis em Cavidade

Os primeiros casos que serão estudados no presente trabalho são os casos de escoamentos incompressíveis e bidimensionais em cavidades não-isotérmicas, visto que este tipo de problema possui um domínio bastante simples, mas do ponto de vista físico apresenta grande complexidade, com a presença de fenômenos como recirculações e descolamento de camada limite, que são difíceis de serem preditos por alguns modelos numéricos. Segundo [Lange, 1992] este tipo de escoamento ainda possui aspectos em comum com o escoamento da entrada em dutos.

Diversos autores já obtiveram solução numérica para casos de escoamentos em cavidades isotérmicas e não-isotérmicas, citam-se alguns casos que servem como referência ao presente trabalho:

- [Nallasamy e Prasad, 1977] simulou escoamentos incompressíveis e bidimensionais em cavidades não-isotérmicas, obtendo o campo de velocidades e de temperaturas para números de  $Re_H = 0, 100, 1000$  e  $10000$  e número de  $Pr = 1$ , onde  $H$  é o comprimento característico dado pela altura da cavidade. O autor resolveu as equações em termos de função de corrente e vorticidade utilizando o método de diferenças finitas;

- [Guia et al., 1982] simulou escoamentos incompressíveis e bidimensionais em cavidades isotérmicas, utilizando o método multi-malha (do inglês: *multigrid method*) com o objetivo de simular escoamentos com elevados números de Reynolds com malhas bastante refinadas. O mesmo realizou comparativos com outros autores e verificou que conforme havia o aumento do número de Reynolds os resultados do campo de velocidades de [Nallasamy e Prasad, 1977] apresentavam inadequações;

- [Lange, 1992] simulou os mesmos casos de escoamentos incompressíveis e bidimensionais em cavidades não-isotérmicas que [Nallasamy e Prasad, 1977]. Entretanto, aquele resolveu as equações em termos das variáveis primárias utilizando o método de elementos finitos com função de penalidade. Quanto a solução do campo de temperaturas, a equação da energia foi resolvida separadamente após a obtenção do campo de velocidades. O esquema temporal utilizado foi o de Cranck-Nicolson e o método de solução foi o de Gradientes conjugados;

- [Petry, 2002] simulou escoamentos bi e tridimensionais, turbulentos em cavidades

isotérmicas utilizando o método de elementos finitos, com elemento hexaédrico trilineares de oito nós e esquema temporal de Taylor-Galerkin. Para a simulação dos escoamentos turbulentos foi utilizada a Simulação de Grandes Escalas (LES);

- [Brito, 2005] simulou escoamentos incompressíveis, bidimensionais em cavidades não-isotérmicas para a validação do código, onde a natureza dominante da convecção era a natural. O mesmo utilizou o método de elementos finitos e Simulação de Grandes Escalas;

- [Oliveira Jr., 2006] simulou escoamentos incompressíveis, isotérmicos e turbulentos em cavidades bi e tridimensionais, utilizando o método de elementos finitos e esquema de avanço no tempo implícito e explícito. O mesmo ainda utilizou técnicas de alto desempenho como o processamento paralelo OpenMP.

- [Ho Ji et al., 2007] realizou a simulação de escoamentos incompressíveis, não-isotérmicos no regime transiente, onde a natureza da convecção era mista. Os perfis transientes da convecção mista foram obtidos dentro da seguinte faixa:  $400 \leq Re_H \leq 4000$ ,  $1.6 \times 10^5 \leq Gr \leq 1.6 \times 10^7$  e  $Pr = 6$ . A solução numérica foi obtida através do método de Volumes Finitos com um código baseado no algoritmo SIMPLER [Patankar, 1980] e usando o esquema de advecção Quick. O autor também realizou experimentos em laboratório utilizando para visualização dos escoamentos através de um processo de velocimetria de partículas (do inglês: *Particle Image Velocimetry*) e medições com termopares.

O objetivo dos casos de escoamento em cavidade, que foram simulados aqui, é validar e testar o código desenvolvido para o maior número de características do escoamento não isotérmico possíveis.

#### 5.1.1. Escoamento em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H=100$ ) e ( $Pr=1$ )

O domínio deste caso consiste de uma cavidade quadrada com dimensões unitárias nas direções adimensionais  $X^*$  e  $Z^*$ , respectivamente iguais a  $L^* = H^* = 1$ . Como o elemento finito é hexaédrico utilizamos apenas um elemento de profundidade na direção  $Y^*$ . O movimento do fluido na cavidade é gerado pelo deslocamento de uma placa infinita na superfície superior (plano  $XY$  da Fig. 5.1) a uma velocidade de  $V_1^* = 1$ . As condições de contorno para a velocidade nessa superfície são de não-deslizamento e de impermeabilidade. O aquecimento do fluido ocorre através desta mesma placa, com temperatura prescrita  $T^* = 1$ . As superfícies laterais (plano  $YZ$ ) e inferior (plano  $XY$ ), conforme Fig. 5.1, são mantidas a temperatura nula  $T^*=0$  e velocidades também nulas ( $V_1^* = V_3^* = 0$ ). Já nas superfícies pertencentes ao plano  $XZ$  temos

condição de deslizamento livre para as velocidades nas direções  $X^*$  e  $Z^*$  ( $V_1^*$  e  $V_3^*$ ), velocidade nula na direção  $Y^*$  ( $V_2^* = 0$ ) e fluxo de calor nulo em relação a  $Y^*$  para a temperatura. A Figura 5.1 auxilia na descrição do caso simulado e a Eq. 5.1 mostra as equações na sua forma adimensional.

$$x^* = \frac{x}{H}; y^* = \frac{y}{H}; z^* = \frac{z}{H}; v_i^* = \frac{v_i}{v_1}; T^* = \frac{T - T_{INF}}{T_{SUP} - T_{INF}} \quad (i=1,2,3) \quad (5.1)$$

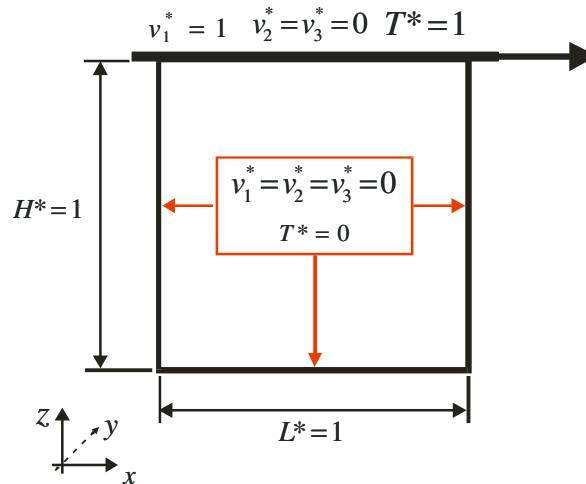


Figura 5.1. Domínio com dimensões e condições de contorno do escoamento em cavidade ( $Re_H = 100, 1000$  e  $10000$ ) e  $Pr = 1$

O restante dos dados como: número de Reynolds, número de Prandtl, dimensões do domínio, malha utilizada, condições iniciais, velocidade do som considerada e passo de tempo crítico utilizados são apresentados na Tabela 5.1. O comprimento característico para determinação do número de Reynolds é dado por  $H^*$ .

Tabela 5.1 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não-isotérmica  $Re_H = 100, 1000$  e  $Pr=1$

Número de Reynolds - $Re_H$	100 – 1000
Número de Prandtl – Pr	1
Dimensões do domínio ( L,W, H)	1m x 0,1m x 1m
Número de Elementos do domínio (x, y, z)	20x1x20 / 40x1x40 / 80x1x80
Condições Iniciais ( $V_1, V_2, V_3, P, T$ )	Zero
Velocidade do Som no meio	340m/s
$\Delta t_{crítico}$	$2 \times 10^{-5}$ s / $2 \times 10^{-5}$ s / $4 \times 10^{-6}$ s

Antes de apresentar e comentar os resultados faz-se necessário observar que o código utilizado, neste caso, ainda não possuía em sua formulação (equações da conservação da quantidade de movimento) os termos relacionados ao empuxo. Quanto a malha utilizada, esta possui um maior refinamento, uniforme, nas regiões próximas as superfícies. Isso ocorre devido aos maiores gradientes de velocidade e temperatura nas regiões parietais. Os resultados dos perfis de velocidade e temperatura com várias malhas são mostrados nas Fig. 5.4 a 5.7, mostrando o procedimento utilizado para verificar a independência de malha (Desvio médio entre os perfis ~ 0,1%)

Os resultados do campo de temperaturas, apresentados a seguir, foram comparados com os resultados obtidos por [Nallasamy e Prasad, 1977] e [Lange, 1992] que utilizaram os mesmos parâmetros físicos que o estabelecido aqui. O campo de velocidades também foi comparado com [Guia et al., 1982].

Na Figura 5.2.a são ilustradas as linhas de iso-vorticidade do escoamento. Os maiores valores para a vorticidade situam-se em uma região acima da posição central da cavidade e em direção à superfície do lado direito da mesma (1° quadrante da figura). Na Figura 5.2.b visualizam-se as linhas de corrente do escoamento, podendo ser visto que o centro do vórtice primário coincide com a região onde os maiores valores de vorticidade são obtidos. Os resultados apresentados aqui são bastante condizentes com os resultados expostos na bibliografia, vide [Guia et al., 1982]. Isso mostra que a inserção da equação da energia no código não apresenta influência negativa nos resultados dos campos hidrodinâmicos.

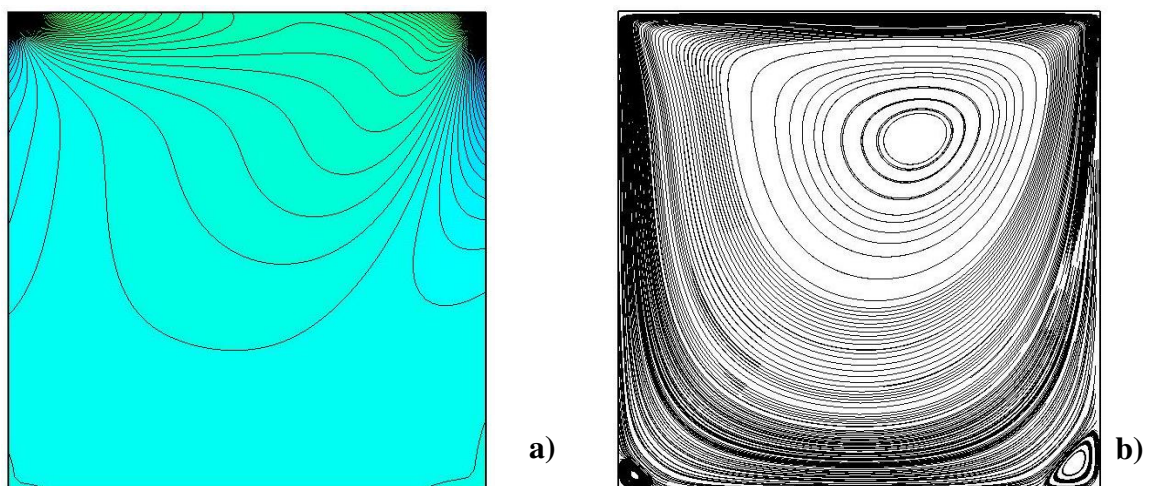


Figura 5.2 – Escoamento em cavidade ( $Re_H=100$ ) e ( $Pr=1$ ) no regime permanente - a)

Vorticidade – b) Linhas de corrente



Na Figura 5.3.a é possível visualizar a topologia referente ao campo de temperaturas para o escoamento, a mesma apresenta um comportamento muito próximo ao campo apresentado por [Lange, 1992]. A topologia deste só não foi apresentada aqui devido à baixa definição da ilustração apresentada pelo autor. As isothermas indicam que os maiores gradientes de temperatura estão presentes nas regiões superiores, visto que o contorno aquecido situa-se nessa região. Além disso, nos cantos superiores a recirculação do fluido intensifica mais ainda este gradiente. A região mais aquecida está na região próxima ao canto superior direito que recebe a incidência de uma quantidade de fluido aquecido, enquanto o canto superior esquerdo é um pouco menor, visto que esta região é resfriada pela quantidade de fluido fria das camadas inferiores, que é movimentado em direção a placa superior. Nos cantos inferiores o gradiente de temperatura presente nessa região é praticamente nulo, visto que o escoamento não é advectivo o suficiente para misturar o fluido aquecido nas regiões mais distantes da placa aquecida, ou seja, o transporte de energia para as regiões distantes da placa aquecida ocorre predominantemente por difusão.

A curvatura presente nas linhas isotérmicas deve-se à quantidade de movimento que recircula, devido à influência da superfície direita da cavidade. Outro aspecto que deve ser levado em consideração é a baixa quantidade de movimento transferida para as camadas inferiores da cavidade, gerando uma estratificação bastante estável.

Na Figura 5.3.b é ilustrado o campo de pressões no escoamento para  $Re_H=100$ , apresentando uma implementação estável.

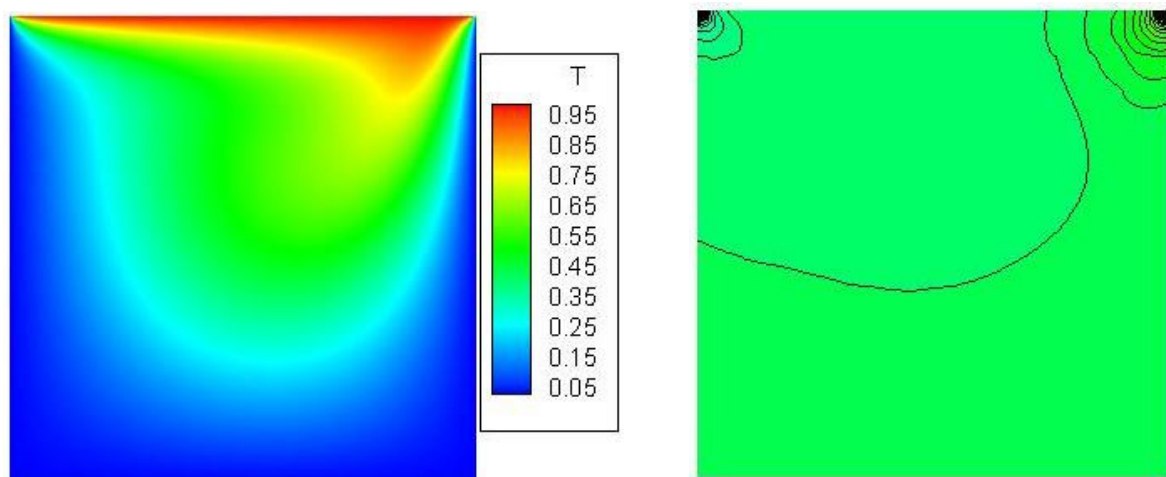


Figura 5.3- Escoamento em cavidade ( $Re_H=100$ ) e ( $Pr=1$ ) no regime permanente - a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões

Nas Figuras 5.4 e 5.5 são exibidos os comportamentos dos campos de velocidades

adimensionais pela posição adimensionalizada (conforme Eq. 5.1) quando o escoamento atinge o regime permanente. Na Figura 5.4 temos o gráfico da velocidade adimensionalizada na direção  $X$  ( $V_1^*$ ) e sua variação na posição  $Z^*$ , para um valor fixo de ( $X^*=0,5$ ). Já na Figura 5.5 temos o gráfico da velocidade adimensionalizada na direção  $Z$  ( $V_3^*$ ) e sua variação na posição  $X^*$ , para um valor fixo ( $Z^*=0,5$ ).

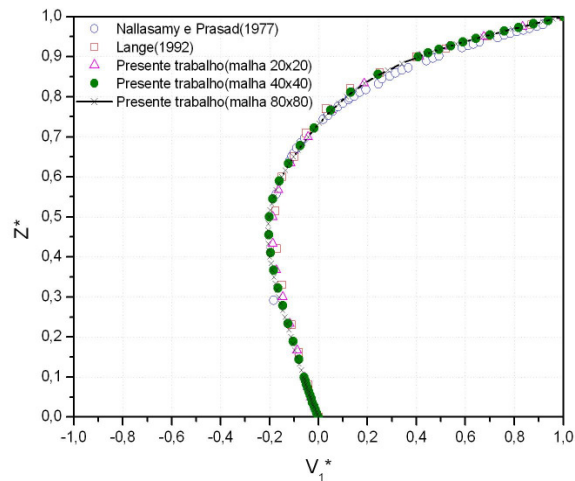


Figura 5.4 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_1^*$ ) ao longo da linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^* = 0,5$ ) para escoamento a  $Re_H = 100$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

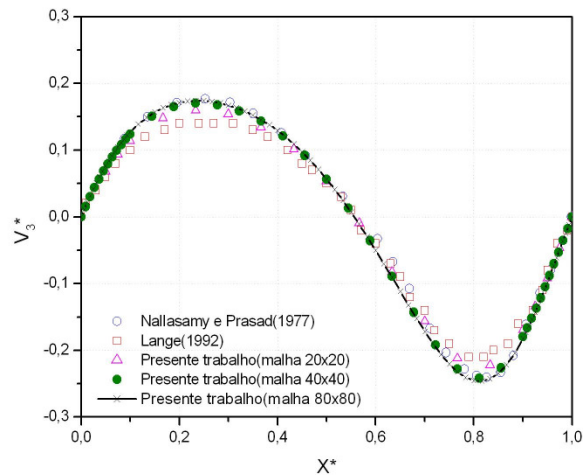


Figura 5.5 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo da linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^* = 0,5$ ) em escoamento a  $Re_H = 100$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

Nota-se a boa concordância entre os resultados apresentados para o perfil de velocidade nas duas direções em análise, exceto para pequenas faixas das dimensões adimensionais  $X^*$  e  $Z^*$ , por

exemplo, na Fig. 5.5 o campo de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) do presente trabalho e os resultados de [Nallasamy e Prasad, 1977] apresentam um maior gradiente de velocidade do que os resultados expostos por [Lange, 1992]. Através destes resultados comprova-se a afirmação anterior de que a inserção da equação da energia no código isotérmico não altera o comportamento dos campos de velocidade e pressão. Deve ser lembrado que os termos de empuxo ainda não foram inseridos nestes resultados.

Na Figura 5.6 é possível visualizar o perfil de temperatura adimensional na linha horizontal adimensional ( $X^*$ ) para uma posição fixa ( $Z^*=0.5$ ) e na Fig. 5.7 mostra-se a variação do escalar na linha vertical adimensional ( $Z^*$ ) para uma posição fixa ( $X^*=0.5$ ).

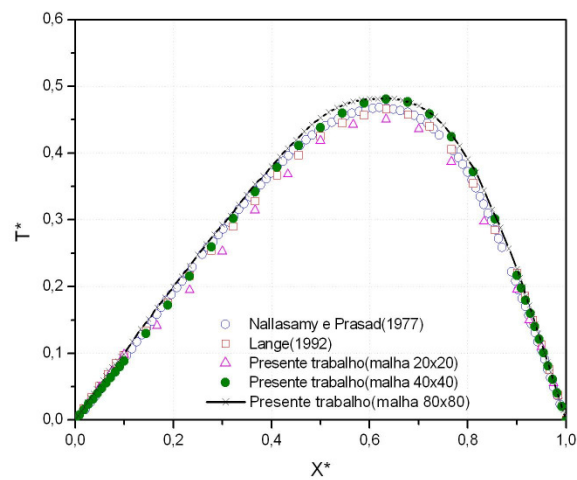


Figura 5.6 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  (regime permanente)

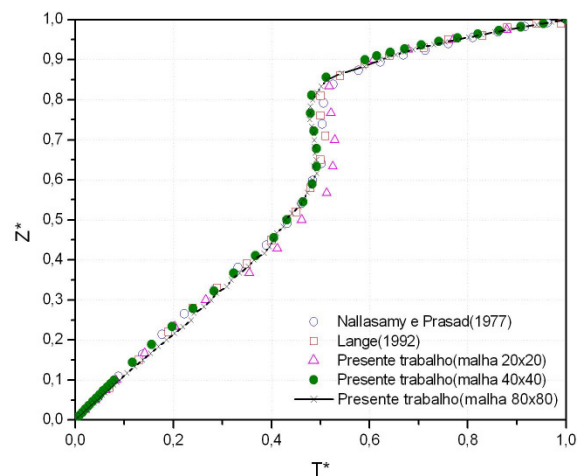


Figura 5.7 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha vertical ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  (regime permanente)

Os resultados para o campo de temperaturas apresentaram boa concordância com os resultados apresentados por [Nallasamy e Prasad, 1977] e [Lange, 1992] quando este utiliza o método de Galerkin. A temperatura adimensional ( $T^*$ ) não apresenta resultados exatamente iguais nas faixas ( $0.6 \leq X^* \leq 0.75$  e  $0.65 \leq Z^* \leq 0.85$ ), entretanto, a diferença entre os resultados não é significativa, ou seja, o presente código consegue prever adequadamente o comportamento de escoamentos laminares não isotérmicos quando estes atingem o regime permanente.

Como o método MSU de [Lange, 1992] apresenta resultados bem mais difusivos que o restante dos resultados comparados e visto que o próprio autor cita a deficiência desse método para os escoamentos em cavidade não-isotérmica os resultados desse método não serão inseridos nas próximas comparações para casos com números de Reynolds maiores.

#### 5.1.2. Escoamento em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H=1000$ ) e ( $Pr=1$ )

As dimensões do domínio no escoamento em cavidade bidimensional não-isotérmica para  $Re_H=1000$  foram mantidos iguais ao caso  $Re_H=100$ , vide Tab. 5.1. As condições de contorno também serão as mesmas que as utilizadas no caso anterior (Fig. 5.1). Como condição inicial para este caso parte-se do regime permanente para  $Re_H=100$ . O procedimento para verificação da independência de malha da solução é realizado da mesma forma que no caso anterior.

Na Figura 5.8.a é apresentado o campo médio de velocidades obtido com o presente código para o escoamento a  $Re_H=1000$  (topologia) quando o mesmo atinge o regime permanente, comparando-o com o campo médio de velocidades apresentado por [Oliveira Jr., 2006], conforme ilustrado na Figura 5.8.b. É possível verificar a boa concordância nas topologias apresentadas.

Na Figura 5.9.a é apresentado o comportamento das linhas de corrente obtidas com o presente código, as mesmas também apresentam bastante coerência com os resultados apresentados por [Oliveira Jr., 2006] (Fig. 5.9.b).

Na Figura 5.10, plotamos duas vezes o mesmo campo de temperaturas, na Fig. 5.10.a são plotadas somente dez isotermas, permitindo a visualização da influência das primeiras oscilações do campo de velocidade no campo de temperaturas, já na Fig. 5.10.b é plotado o campo de temperaturas de forma contínua, com grande número de isotermas.

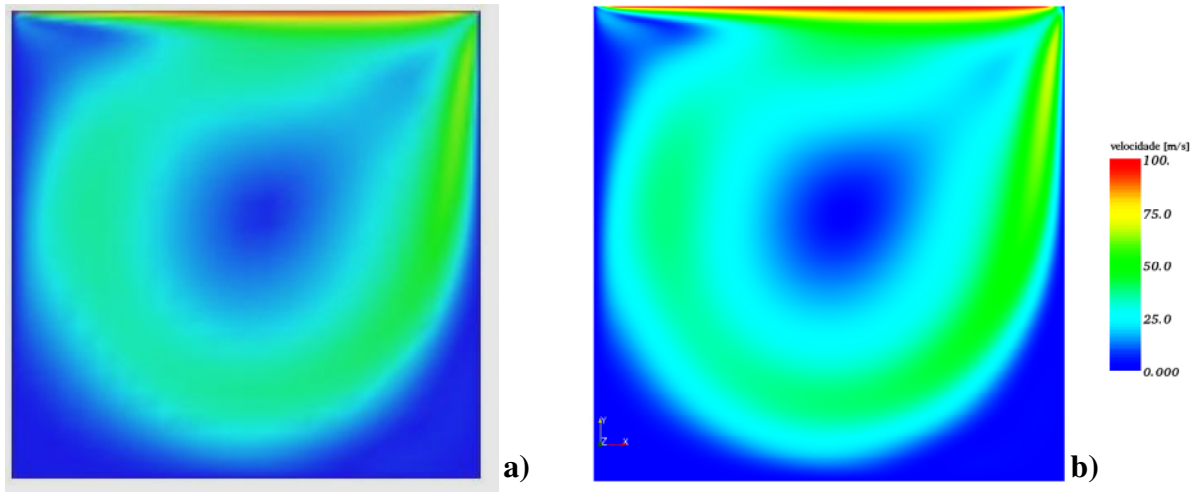


Figura 5.8 – Campo de velocidades média no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr=1$  no regime permanente – a) Presente trabalho – b) [Oliveira Jr., 2006]

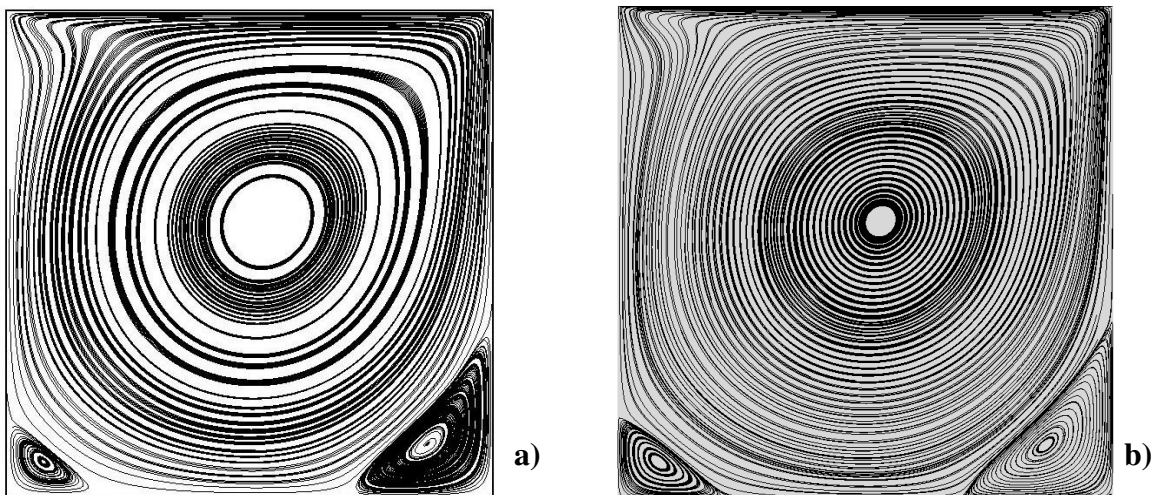


Figura 5.9 – Linhas de corrente no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr=1$  no regime permanente – a) presente trabalho – b) [Oliveira Jr., 2006]

A análise do campo isotérmico junto com o campo hidrodinâmico leva a conclusão de que há uma maior mistura do fluido aquecido nas porções mais baixas e centrais da cavidade, ou seja, a maior advecção do escoamento faz com que o fluido quente seja transportado com mais eficiência para estas regiões da cavidade. Também pode ser observado que o gradiente de temperaturas próximo ao canto superior direito também aumenta, ou seja, há um acúmulo de linhas isotérmicas próximas às mesmas.

Se realizarmos uma análise das linhas de corrente do escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Re_H=100$  (Fig. 5.9 e 5.2.b, respectivamente) pode ser visto que o centro do vórtice primário, localiza-se em uma região mais central da cavidade conforme ocorre o aumento do número de Reynolds. Esse

deslocamento para as regiões mais baixas, assim como a intensificação do campo de velocidades nestas regiões, é sentida no campo de temperaturas, principalmente pela mudança no comportamento das linhas isotérmicas próximo ao canto superior esquerdo e pela mudança do centro do raio destas linhas (assumindo a mesma configuração do vórtice principal).

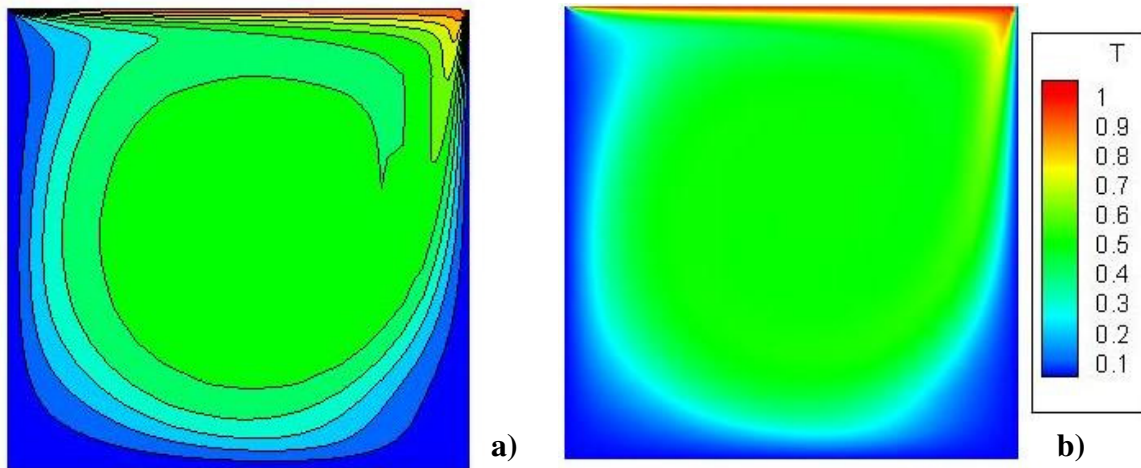


Figura 5.10 – Campo de temperaturas no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr = 1$  no regime permanente – a) com dez isotermas – b) com um grande número de isotermas

A seguir são plotados nas Figuras 5.11 e 5.12 os campos de velocidade adimensionais pela posição adimensionalizada, quando o escoamento atinge o regime permanente. Na Figura 5.11 tem-se o gráfico da velocidade adimensionalizada na direção  $X$  ( $V_1^*$ ) e sua variação na posição  $Z^*$ , para um valor fixo de ( $X^*=0.5$ ) para o escoamento com número de Reynolds  $Re_H = 1000$ . Já na Figura 5.12 temos o gráfico da velocidade adimensionalizada na direção  $Z$  ( $V_3^*$ ) e sua variação na posição  $X^*$ , para um valor fixo ( $Z^*=0,5$ ) para o mesmo escoamento.

Pode ser visto que os resultados dos campos de velocidades obtidos com o presente código são bastante próximos dos resultados propostos por [Guia et al., 1982]. Este autor comparou seus resultados com os apresentados por [Nallasamy e Prasad, 1977] e mostrou que estes últimos não são independentes de malha, conseqüentemente, os resultados do campo de temperaturas obtidos no presente trabalho apresentarão um comportamento um pouco diferente dos resultados utilizados como comparação [Nallasamy e Prasad, 1977]. Como os resultados do campo de velocidades obtidos por [Lange, 1992] foram muito próximos aos de [Nallasamy e Prasad, 1977] e a malha utilizada por [Lange, 1992] foi de 16x16 elementos, supõe-se que estes resultados também não sejam independentes de malha.

O campo de velocidades  $V_1^*$  do presente trabalho apresenta um gradiente bem maior do que os comparados [Nallasamy e Prasad, 1977; Lange, 1992] nas regiões próximas a  $Z^*= 0$ , já

nas regiões próximas de  $Z^*= 1$  o gradiente é menor aos comparados. No campo de velocidades  $V_3^*$  o gradiente de velocidades é maior em  $X^*$  nas regiões extremas da cavidade, principalmente nas regiões próximas a  $X^* = 0$ .

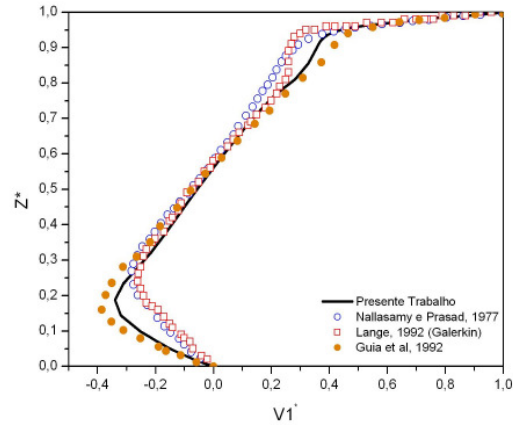


Figura 5.11 - Perfil de velocidade adimensional ( $V_1^*$ ) ao longo da linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^*= 0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

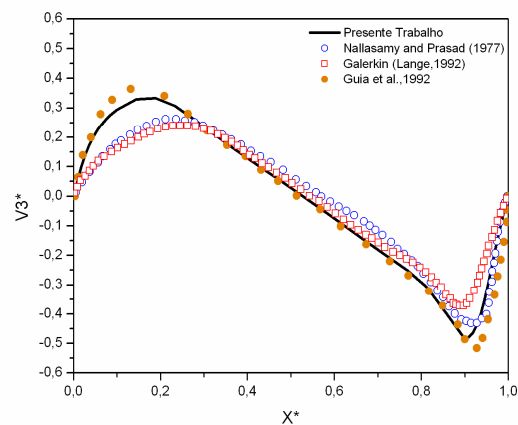


Figura 5.12 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo da linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^*= 0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

Na Figura 5.13 visualiza-se o perfil de temperatura adimensional na linha horizontal adimensional ( $X^*$ ) para uma posição fixa ( $Z^*=0.5$ ) para o escoamento a  $Re_H=1000$ , já na Fig. 5.7 visualiza-se a variação deste mesmo escalar na linha vertical adimensional ( $Z^*$ ) para uma posição fixa ( $X^*=0.5$ ).

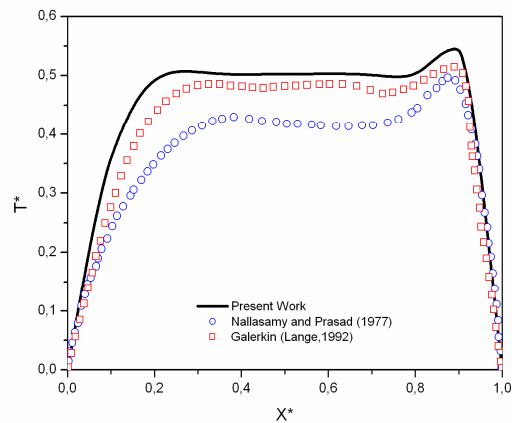


Figura 5.13 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

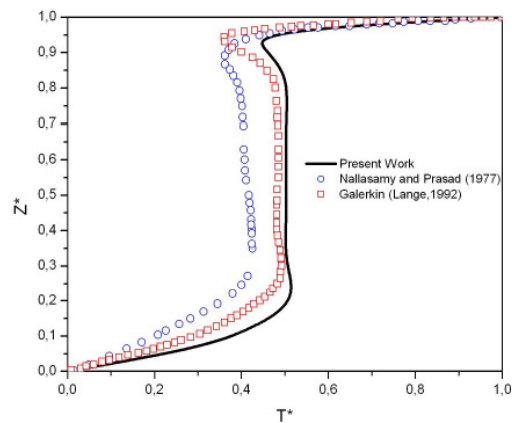


Figura 5.14 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha vertical ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H=1000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

O campo de temperaturas adimensional obtidos com o presente código apresentam o mesmo comportamento qualitativo que os campos obtidos pelos autores aos quais o código foi comparado, ou seja, possuem o mesmo formato. Entretanto, em ambos casos apresentados (Figuras 5.13 e 5.14) o valor do campo de temperaturas é maior do que os resultados de [Nallasamy e Prasad, 1977; Lange, 1992]. Uma análise mais minuciosa nos gráficos expostos acima dos perfis de velocidade e temperatura mostra que o comportamento do campo de temperaturas está diretamente influenciado pelo comportamento do campo de velocidades, por exemplo: o campo de temperaturas adimensional ( $T^*$ ) plotado na linha horizontal ( $X^*$ ) (Conforme Fig. 5.13) apresenta gradientes de temperatura mais intensos nas regiões próximas às paredes, da mesma forma que o campo de velocidades ( $V3^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ). Já no



campo de temperaturas ( $T^*$ ) plotado na linha vertical ( $Z^*$ ) o gradiente de temperatura na região próxima a parede inferior é maior do que o dos resultados de outros autores e na região na parede superior o gradiente de temperatura é menor. O mesmo comportamento ocorre para o perfil de velocidade ( $VI^*$ ) com relação a linha vertical ( $Z^*$ ) com um maior gradiente de velocidade na parede inferior e menor na parede superior. Se compararmos o caso  $Re_H = 100$  e  $Re_H = 1000$  nota-se um aumento no processo de mistura do escalar, processo evidenciado no aumento de temperatura ocorrido em uma maior faixa da cavidade e também pela intensificação do gradiente de temperaturas nas regiões parietais.

### 5.1.3. Escoamentos em Cavidades Não Isotérmicas e Forçadas ( $Re_H = 10000$ ) e ( $Pr = 1$ )

O presente caso tem por objetivo simular o escoamento no regime turbulento. Entretanto, não se tem um comparativo adequado para o campo de temperaturas, visto que a única referência que havia para este caso não é independente de malha [Nallasamy e Prasad, 1977] e os resultados para os campos de velocidade e temperatura são inadequados. Além disso, sabe-se que uma das características da turbulência é a tridimensionalidade e foi utilizada a hipótese de escoamento bi-dimensional (para redução do tempo computacional exigido). Sendo assim, serão apresentados somente os resultados para os campos médios de velocidades e temperaturas, sem a realização de uma análise estatística das flutuações.

São utilizadas as mesmas condições de contorno dos casos anteriores com número de Reynolds ( $Re_H = 100$  e  $1000$ ), as condições iniciais são os campos em regime permanente para  $Re_H = 1000$ . A Tabela 5.2 apresenta os dados utilizados para a simulação do presente caso.

Tabela 5.2 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não isotérmica a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$

Números de Reynolds e Prandtl - $Re_H$ - $Pr$	10000 – 1
Coef. Smagorinsky - Prandtl turb. ( $C_s$ , $Pr_t$ )	0,23 – 0,6
Dimensões do domínio (L, W, H)	1m x 0,01m x 1m
Número de Elementos do domínio (x, y, z)	128 x 1 x 128
Condições Iniciais ( $V_1$ , $V_2$ , $V_3$ , P, T)	$Re_H = 1000$
$\Delta t_{\text{crítico}}$	$1 \times 10^{-6}$ s

Na Figura 5.15.a é ilustrada a topologia do campo de velocidades médio e na Figura 5.15.b é mostrado o campo de pressões, também concordantes aos apresentados por [Oliveira Jr., 2006].

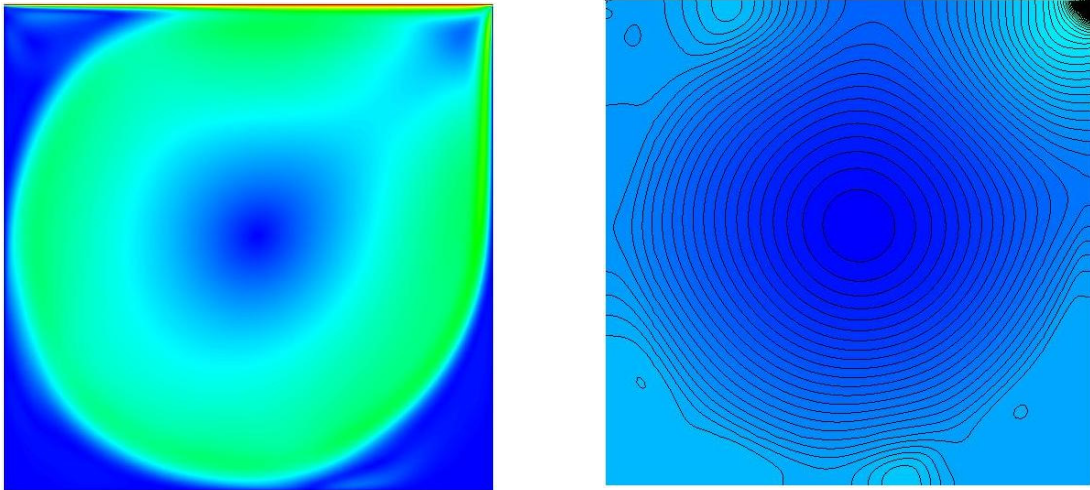


Figura 5.15 – Comportamento do escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  no regime permanente – a) Campo de velocidade média e b) Campo de pressões

A seguir são plotados as linhas de corrente (Figura 5.16.a) e o campo de temperaturas (Figura 5.16.b) quando o escoamento atinge o regime permanente. As linhas de corrente apresentam-se muito coerentes aos resultados plotados por [Guia et al., 1982]. Quanto ao campo de temperaturas não há possibilidade de comparação, visto não ter encontrado nenhum resultado para comparação do escoamento com transferência de calor. Entretanto, é possível verificar um comportamento, sob o ponto de vista qualitativo, coerente, pois o gradiente de temperaturas nas regiões parietais foi incrementado e houve uma maior mistura do campo de temperaturas.

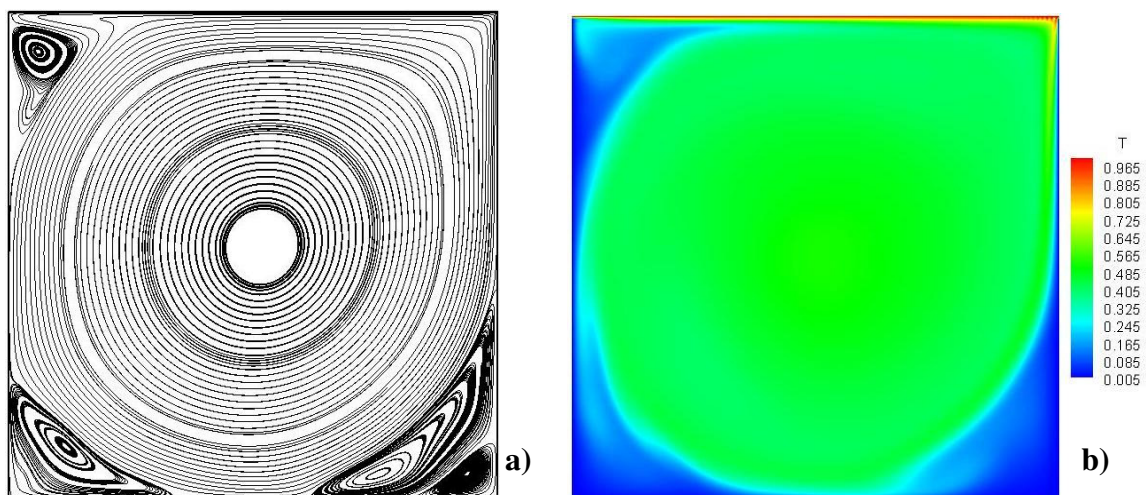


Figura 5.16 – Comportamento do escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  no regime permanente - a) linhas de corrente e b) campo de temperaturas

A comparação entre o comportamento das linhas de corrente para os três casos

considerados ( $Re_H = 100$ ,  $Re_H = 1000$  e  $Re_H = 10000$ ) apontam para uma tendência quanto ao posicionamento do centro do vórtice principal, onde este se desloca para uma posição central da cavidade conforme há o aumento no número de Reynolds, ou seja, há um atendimento do critério de invariância assintótica.

Na Figura 5.17 é ilustrado o perfil de velocidades adimensional na direção  $X$  ( $V_1^*$ ) e sua variação na posição  $Z^*$ , para um valor fixo de ( $X^*=0.5$ ) para o escoamento com número de Reynolds  $Re_H = 10000$ . Já na Figura 5.18 tem-se o gráfico da velocidade adimensionalizada na direção  $Z$  ( $V_3^*$ ) e sua variação na posição  $X^*$ , para um valor fixo ( $Z^*=0.5$ ) para o mesmo escoamento. É possível ilustrar que os resultados obtidos a partir do presente código são bastante coerentes com os resultados apresentados por [Guia et al., 1982].

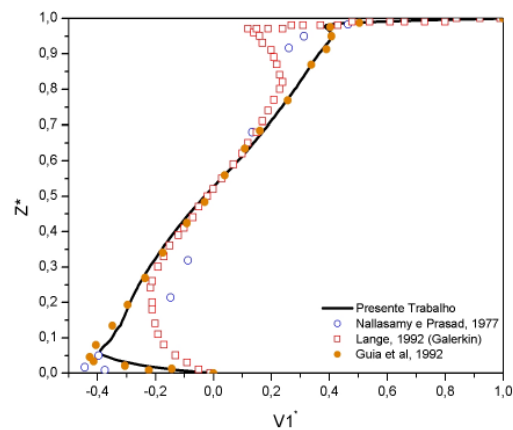


Figura 5.17 - Perfil de velocidade adimensional ( $V_1^*$ ) ao longo da linha vertical da cavidade ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^*= 0.5$ ) no escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

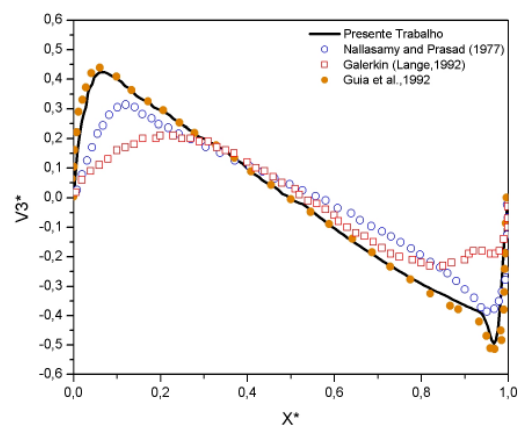


Figura 5.18 – Perfil de velocidade adimensional ( $V_3^*$ ) ao longo da linha horizontal da cavidade ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^*= 0.5$ ) no escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

Na Figura 5.19 visualiza-se o perfil de temperatura adimensional na linha horizontal adimensional ( $X^*$ ) para uma posição fixa ( $Z^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H = 10000$ , enquanto que na Fig. 5.20 visualiza-se a variação deste mesmo escalar na linha vertical adimensional ( $Z^*$ ) para uma posição fixa ( $X^*=0.5$ ). Aqui são apresentados somente os resultados obtidos com o presente código, visto que o único comparativo existente, infelizmente, apresenta resultados não exatos.

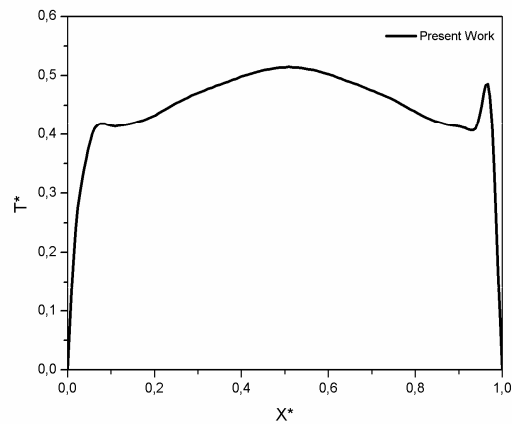


Figura 5.19 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha horizontal ( $X^*$ ) para a posição ( $Z^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

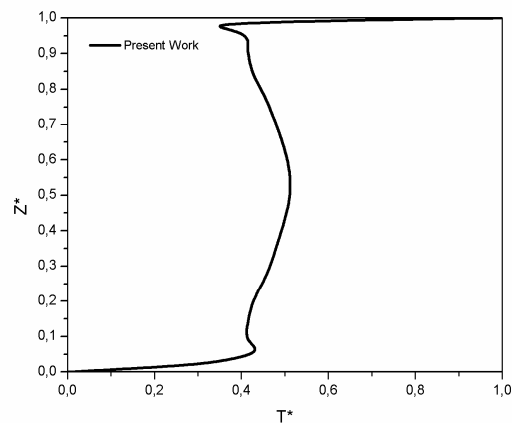


Figura 5.20 – Perfil de temperatura adimensional ( $T^*$ ) na linha vertical ( $Z^*$ ) para a posição ( $X^*=0.5$ ) no escoamento a  $Re_H = 10000$  e  $Pr = 1$  (regime permanente)

É possível verificar nestas figuras que o comportamento, qualitativamente, é semelhante ao caso com escoamento a  $Re_H = 1000$ . Entretanto, há um maior gradiente de temperatura nas regiões parietais e uma mistura mais eficiente do campo de temperaturas na cavidade.

#### 5.1.4. Escoamento em Cavidades Bidimensionais com Convecção Mista ( $Re_H=400$ ), ( $Pr=6$ ) e ( $Gr=16000$ )

Neste caso, tem-se como objetivo testar e validar o presente código para escoamentos não isotérmicos, no regime transiente e com os termos de forças de campo inseridos na equação da conservação da quantidade de movimento, comparando os resultados obtidos com os de [Ho Ji et al., 2007].

O domínio utilizado neste caso é o mesmo que o apresentado anteriormente, com  $W=0.01\text{m}$ . As condições de contorno do campo de velocidades também se mantêm, entretanto as do campo de temperaturas são diferentes. A superfície superior possui uma temperatura prescrita  $T^*=1$  e a inferior  $T^*=0$ , conforme Eq. 5.1, e as condições de contorno das paredes laterais são de fluxo prescrito nulo (condição natural), conforme pode ser visto na Fig. 5.21.

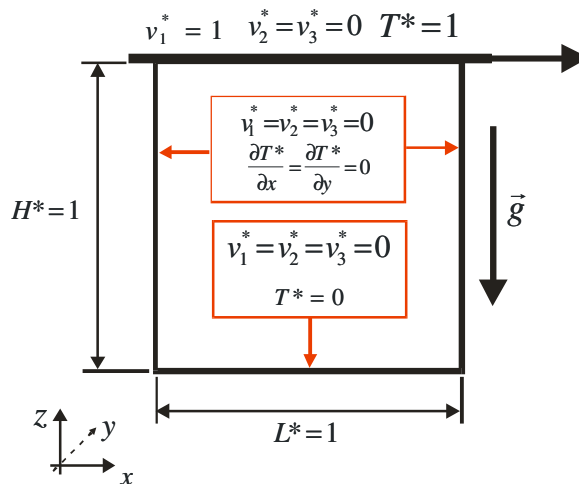


Figura 5.21 – Domínio com as condições de contorno do escoamento a  $Re_H=400$ ,  $Pr=6$  e  $Gr=16000$

Quanto às condições iniciais, utilizamos as mesmas que as sugeridas por [Ho Ji et al., 2007] com velocidade inicial nula em todas as componentes e com temperatura inicial conforme expresso pela Eq. 5.2:

$$T^*(x, y, z, t = 0) = Z^* \quad (5.2)$$

onde  $Z^*$  é o valor adimensional da coordenada  $Z$ . Como  $Z^*$  varia linearmente de 0 a 1,  $T^*$  também apresentará a mesma variação.

Para melhor visualização dos dados utilizados neste caso, vide Tab. 5.3.

Tabela 5.3 – Dados referentes ao escoamento em cavidade não-isotérmica com a presença de empuxo para  $Re_H=400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr= 16000$

Número de Reynolds - $Re_H$	400
Número de Prandtl – Pr	6
Número de Grashoff	16000
Dimensões do domínio (L, W, H)	1m x 0,01m x 1m
Número de Elementos do domínio (x, y, z)	100 x 1 x 100
Condições Iniciais ( $V_1, V_2, V_3, P, T$ )	$V_1= V_2= V_3= P= 0$ e T conforme Eq.5.2
Velocidade do Som no meio	340m/s
$\Delta t_{\text{crítico}}$	$1,75 \times 10^{-6}$ s

Antes de iniciar os comentários sobre os resultados é interessante lembrar que para este caso foram comparados os resultados do presente código com o utilizado por [Ho Ji et al., 2007] que é baseado no algoritmo SIMPLER [Patankar, 1980]. O código utilizado por [Ho Ji et al., 2007] foi comparado e validado com resultados experimentais realizados pelo próprio autor, cujas incertezas de medição são de aproximadamente: 4,7% para os campos de velocidade e 7,1% para os de temperatura. Como os resultados são transientes escreve-se o tempo na sua forma adimensional:

$$t_{adm} = \frac{tV_{MAX}}{H} \quad (5.3)$$

onde  $V_{MAX}$  é a velocidade na placa superior da cavidade,  $t$  o tempo e  $H$  é a altura da cavidade.

Primeiramente, apresenta-se a topologia referente ao campo de velocidade média e das linhas de corrente para um escoamento quando o mesmo atinge o regime permanente, conforme ilustrado nas Fig. 5.22.a e 5.22.b, respectivamente. Já nas Figuras 5.23.a e 5.23.b temos o campo de vorticidade e pressão, respectivamente.

As linhas de corrente apresentadas na Figura 5.22.b são muito coerentes às apresentadas por [Ho Ji et al., 2007]. Quanto ao campo de pressões o mesmo aparece sem instabilidades, mesmo nas regiões onde ocorrem os picos de pressão positiva (canto superior direito) e negativa (canto superior esquerdo).

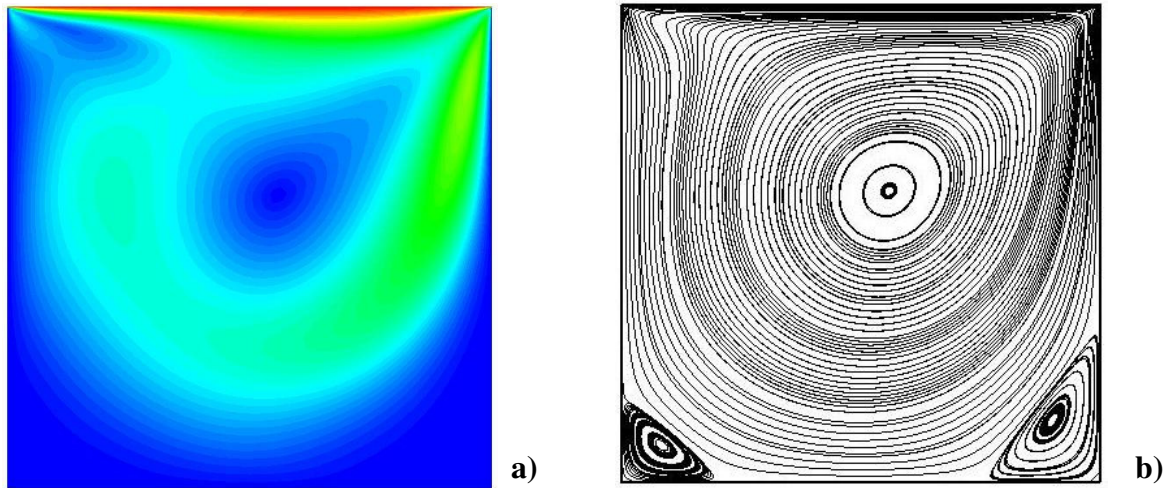


Figura 5.22 – Escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  no regime permanente - a) Campo de velocidades média – b) linhas de corrente

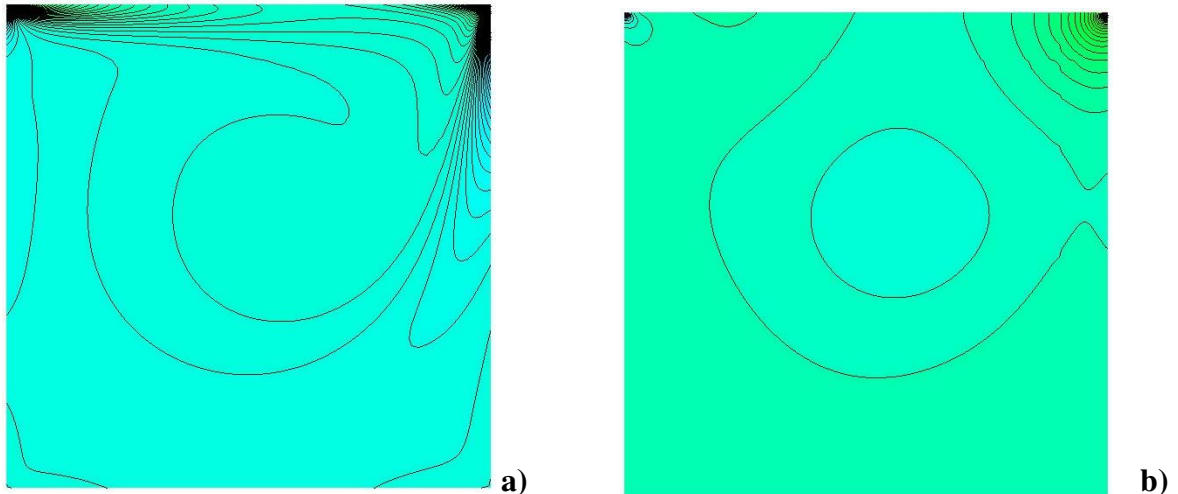


Figura 5.23 – Escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  no regime permanente - a) Campo de vorticidade – b) campo de pressões

Quanto ao campo térmico, conforme dito anteriormente, os resultados do presente código foram comparados com os resultados de [Ho Ji et al., 2007] e a primeira comparação realizada é referente à topologia do campo térmico para um mesmo tempo adimensional. Na Figura 5.24.a são plotadas as linhas isotérmicas do campo de temperaturas, foram plotadas 10 linhas isotérmicas com cada linha equivalendo a um  $\Delta T^* = 0.1$ , em um tempo adimensional,  $t_{adm} = 1.4$ , utilizando o presente código e na Fig. 5.24.b é apresentado o campo obtido por [Ho Ji et al., 2007]. As Figuras 5.25.a e 5.25.b referem-se a  $t_{adm} = 3.7$ , as Fig. 5.26.a e 5.26.b referem-se a  $t_{adm} = 5.0$  e as Fig. 5.27.a e Fig. 5.27.b ao regime permanente do escoamento ( $t_{adm} \sim 100.0$ ).

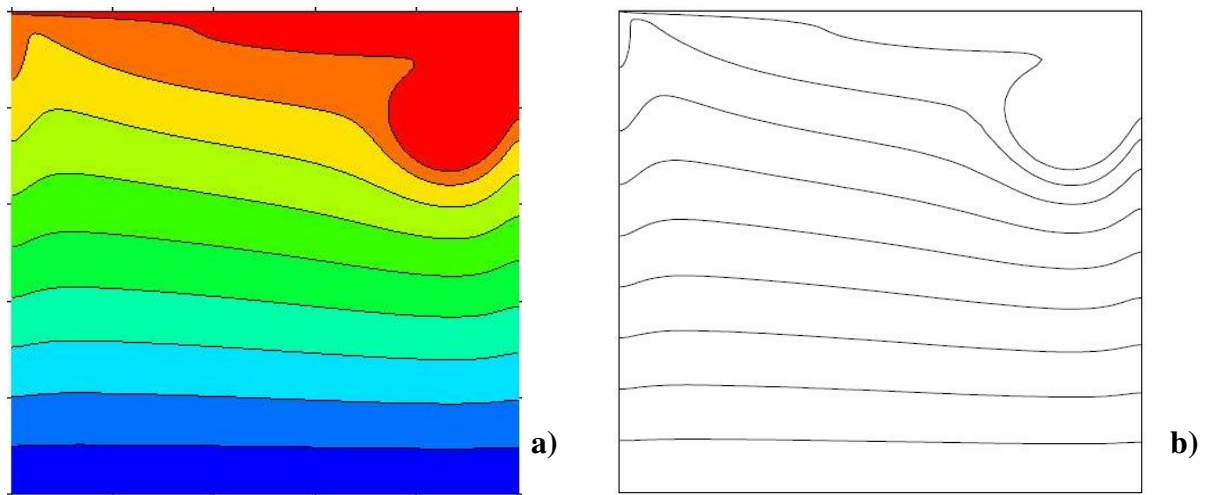


Figura 5.24 – Campo de temperaturas para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  em um tempo adimensional  $t_{adm} = 1.4$  – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007]

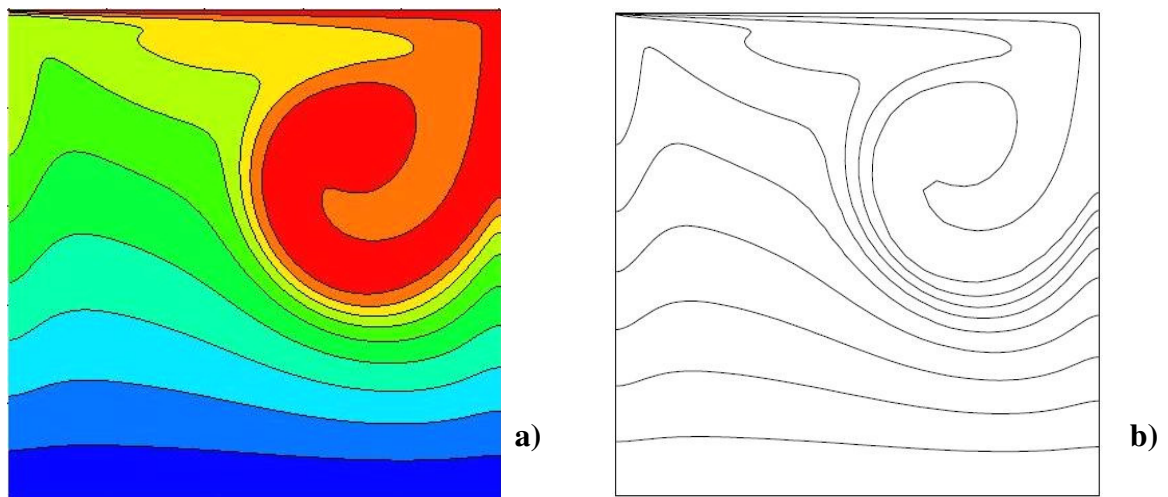


Figura 5.25 – Campo de temperaturas para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  em um tempo adimensional  $t_{adm} = 3.7$  – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007]



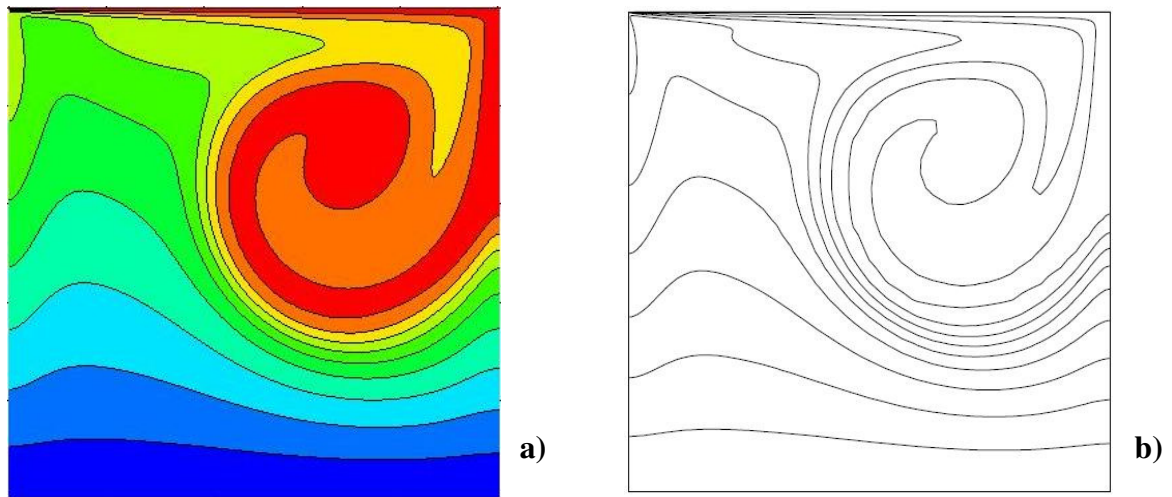


Figura 5.26 - Campo de temperaturas para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  em um tempo adimensional  $t_{adm} = 5.0$  – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007]

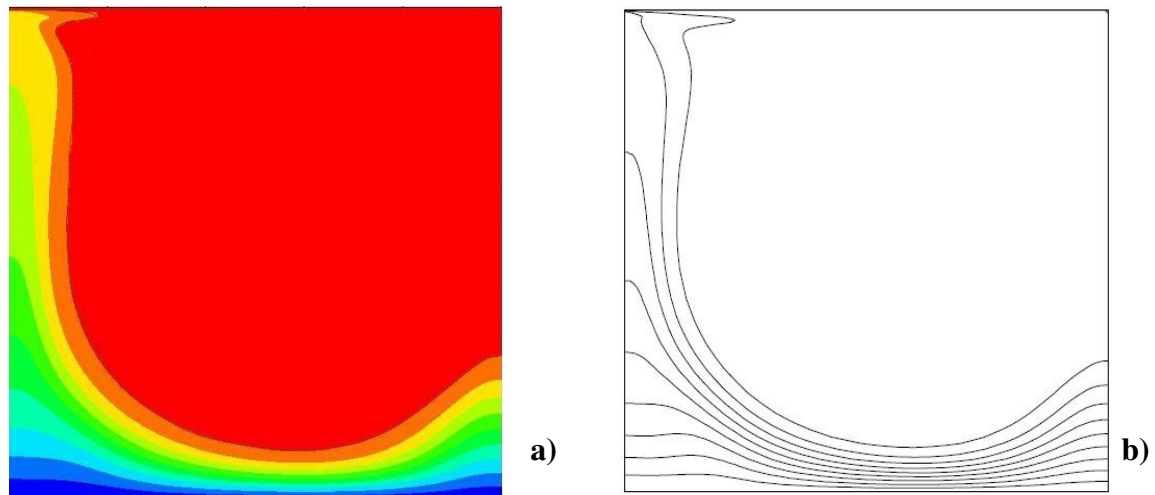


Figura 5.27 - Campo de temperaturas para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  em regime permanente  $t_{adm} \sim 100.0$  – a) presente trabalho – b) [Ho Ji et al., 2007]

A comparação entre os campos térmicos obtidos a cada passo de tempo com o presente código (Fig. 5.24.a, 5.25.a, 5.26.a e 5.27.a) com os campos obtidos por [Ho Ji et al., 2007] (Fig. 5.24.b, 5.25.b, 5.26.b e 5.27.b) mostraram um comportamento topológico muito semelhante.

Quanto ao comportamento das estruturas do escoamento no tempo, verifica-se que para o tempo adimensional  $t_{adm} = 1.4$ , já é possível identificar as primeiras instabilidades de Kelvin-Helmholtz, que com o avanço no tempo se intensificam e se transformam em turbilhões de Kelvin-Helmholtz, onde o centro deste turbilhão desloca-se para o centro da cavidade até atingir o regime permanente, este crescimento do vórtice em direção ao centro da cavidade é oriundo da presença da superfície direita que impede que o desenvolvimento espacial da camada de mistura

continue na direção  $X$ . Como os turbilhões transportam muita quantidade de movimento no seu sentido descendente e pouca quantidade de movimento no sentido ascendente, isso faz com que haja uma mistura entre as camadas superiores e inferiores do fluido, o que pode ser visualizado nas Fig. 5.25 e 5.26. Esse fenômeno é interessante do ponto de vista da transferência de calor, visto que há uma minimização do tempo necessário para a realização da troca térmica.

Para obter uma análise quantitativa dos resultados, realizou-se a avaliação da variação da velocidade e da temperatura no tempo, em determinados pontos específicos da cavidade, através da inserção uma sonda numérica no escoamento. Com o objetivo de analisar o comportamento em diferentes alturas do domínio, foram fixadas três sondas numéricas, a primeira (sonda 1) situada na posição  $X^*= 0.5$  e  $Z^*= 0.27$ , a segunda (sonda 2) situada em  $X^*= 0.5$  e  $Z^*= 0.48$  e a última (sonda 3) situada em  $X^*= 0.5$  e  $Z^*= 0.93$ , conforme é ilustrado na Fig. 5.28.

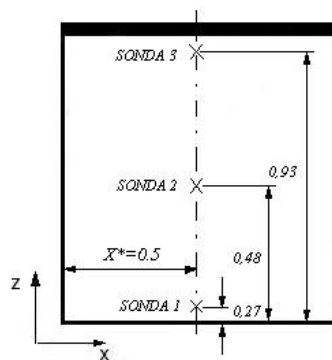


Figura 5.28 – Esquema indicativo das posições das sondas numéricas no domínio da cavidade

Nas Figuras 5.29, 5.30 e 5.31 é possível visualizar o comportamento do campo de velocidades variando no tempo utilizando o presente código com e sem os termos de empuxo inseridos, além dos resultados apresentados por [Ho Ji et al., 2007]. Como pode ser visto, a inserção dos termos de empuxo no código, indicados como convecção mista nas Fig. 5.29, 5.30 e 5.31, melhoraram os resultados quando confrontados com o presente código sem a inserção dos termos de empuxo. As oscilações iniciais presentes nos resultados obtidos com o presente código em ambas as situações parecem normais, devido ao escoamento partir de um campo inicial nulo e ser abruptamente inserida uma variação no campo de velocidades. Além disso, a abordagem LES permite a detecção de pequenas oscilações no escoamento real. Num âmbito geral, os resultados dos campos de velocidade obtidos com o presente código se mostraram muito adequados quando comparados com os resultados de [Ho Ji et al., 2007].

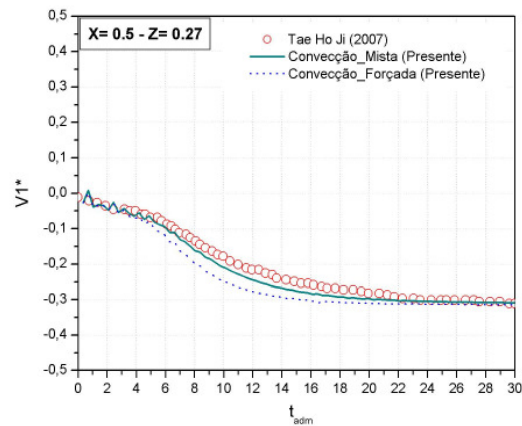


Figura 5.29 – Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 1 (posição  $X^* = 0.5$  e  $Z^* = 0.27$ )

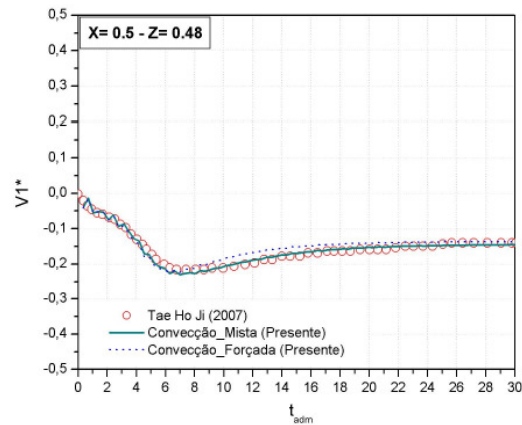


Figura 5.30 – Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 2 (posição  $X^* = 0.5$  e  $Z^* = 0.48$ )

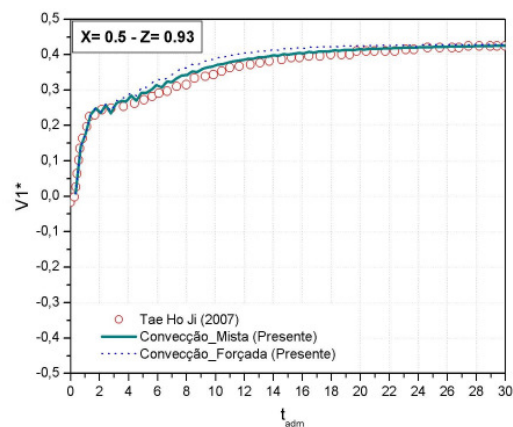


Figura 5.31 - Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 3 (posição  $X^* = 0.5$  e  $Z^* = 0.93$ )

Quanto ao campo de temperaturas, na Fig. 5.32 são apresentados os resultados para a sonda 1, na posição  $Z^*=0.27$ , que, assim como no campo de velocidades, são os menos concordantes com os resultados de [Ho Ji et al., 2007]. O erro médio estatístico percentual foi de aproximadamente  $\varepsilon \sim 5,56\%$ , que é menor do que a incerteza do resultado experimental. Os resultados com os termos de empuxo inseridos no presente código tornam o comportamento do campo de temperaturas mais difusivo. Entretanto o campo de temperatura obtido por [Ho Ji et al., 2007] apresenta-se ainda mais difusivo. Em uma analogia a um sistema de controle poderia ser dito que os resultados deste autor são mais amortecidos que os obtidos com o presente código.

Nas outras posições do escoamento ( $Z^* = 0.48$  e  $Z^* = 0.93$ ), Fig. 5.33 e Fig. 5.34, os resultados apresentam uma diferença menor, com destaque para os resultados em  $Z^* = 0.48$ , que para ambos os campos (temperatura e velocidade), apresentaram resultados muito concordantes. Nestas posições também observa-se a otimização dos resultados, quando comparados aos de [Ho Ji et al., 2007], após a inserção dos termos de empuxo nas equações da conservação da quantidade de movimento.

De uma forma geral é possível dizer que o novo código desenvolvido consegue simular confiavelmente escoamentos transientes com convecção mista.

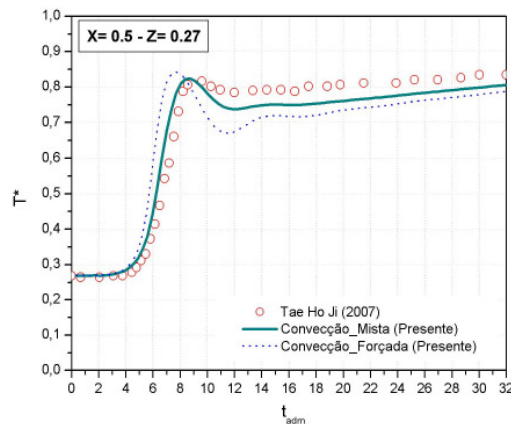


Figura 5.32 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a  $Re_H=400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 1 (posição  $X^*=0.5$  e  $Z^*=0.27$ )

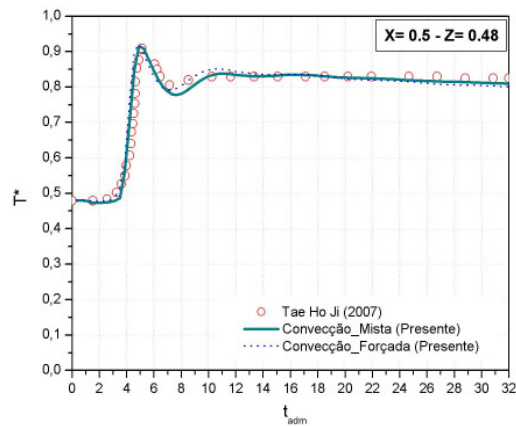


Figura 5.33 – Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 2 (posição  $X^* = 0.5$  e  $Z^* = 0.48$ )

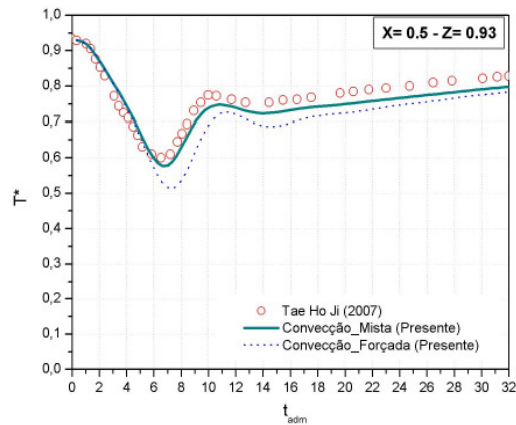


Figura 5.34 - Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a  $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$  para a sonda 3 (posição  $X^* = 0.5$  e  $Z^* = 0.93$ )

### 5.1.5. Escoamento em Cavidades Bidimensionais com Convecção Mista ( $Re_H = 4000$ ), $Pr = 6$ e ( $Gr = 7 \times 10^6$ ) e Análise de Escoamentos com Estratificação Estável e Instável

Para este escoamento não foram realizadas simulações até atingir o regime permanente, devido ao grande tempo necessário para a simulação. Entretanto, realizou-se uma análise temporal, da mesma forma que a descrita para o caso anterior, ou seja, inserindo uma sonda numérica em dois pontos ( $Z^* = 0.28$  e  $Z^* = 0.94$  para um valor fixo de  $X^* = 0.5$ ) da cavidade e verificando o comportamento nestes até o tempo adimensional  $t_{adm} = 50.0$  ou tempo físico = 0.5s. Os resultados foram comparados aos apresentados por [Ho Ji et al., 2007]. A malha utilizada para a obtenção dos resultados neste caso é a mesma que a utilizada no caso anterior, assim como

as condições iniciais e de contorno. Como o escoamento a  $Re_H = 4000$  pode apresentar instabilidades, mesmo para escoamentos sem a presença das forças de campo, houve uma preocupação com uma possível transição deste escoamento (lembrando que o escoamento é bi-dimensional). Com isso, utilizou-se o modelo de Smagorinsky em caso de transição. As constantes ad hoc impostas foram ( $C_s = 0,1$  [Brito, 2005] e  $Pr_t = 0,4$  [Brito, 2005; Peng e Davidson, 2001] para escoamentos em cavidade com presença de convecção natural).

Da Figura 5.35 até a Figura 5.42 é ilustrado o comportamento topológico do escoamento em função do tempo para as seguintes variáveis (da esquerda para a direita): a) campo de temperaturas, b) campo de pressões e c) linhas de corrente do escoamento.

Segundo diversos autores como [Bejan, 1994; Kasagi et al., 1999 e Ho Ji et al., 2007] a presença dos termos de empuxo no escoamento causa uma estratificação que pode ser estável ou instável. Os resultados obtidos por [Ho Ji et al., 2007] são referentes à estratificação estável, ou seja, a superfície aquecida é posicionada na região superior da cavidade e a aceleração do campo gravitacional tem sentido contrário ao do eixo Z (para baixo), sendo assim há uma menor interação entre o fluido aquecido que seria movimentado pela diferença na massa específica e o fluido aquecido movimentado pela placa superior que causa a convecção forçada.

Na Figura 5.35 ilustra-se a formação do vórtice primário gerado pelo movimento da placa superior no tempo  $t = 0.04s$ , sendo também possível verificar que há uma movimentação desprezível de fluido nas camadas inferiores da cavidade, tanto que as linhas isotérmicas apresentam um perfil linear nessa região. As linhas de corrente também ilustram o movimento do fluido com baixa quantidade de movimento da região superior direita para as regiões central e superior esquerda da cavidade.

Na Figura 5.36 é possível visualizar o escoamento no tempo  $t = 0.08s$ , onde há um aumento espacial do vórtice primário (ou turbilhão de Kelvin-Helmholtz) em direção ao centro da cavidade, devido à predominância dos termos inerciais sobre os termos de empuxo. As linhas de corrente permitem identificar um deslocamento de fluido da região próxima ao vórtice primário em direção ao canto superior esquerdo e em direção a parte inferior da cavidade, com uma separação na região central da cavidade. Embora a quantidade de movimento transferida para essas regiões ainda sejam muito baixas.

Na Figura 5.37 visualiza-se a topologia do escoamento para um tempo  $t = 0.1995s$ . O vórtice principal gerado chega a um limite espacial devido à estratificação de fluido frio situado na parte inferior da cavidade. Nota-se também a presença de um segundo vórtice que gira no sentido anti-horário e que tem sua origem associada à transferência da quantidade de movimento

da região do vórtice principal para a região próxima ao canto superior esquerdo. Esse segundo vórtice inicia um processo de mistura de uma parcela do fluido aquecido.

Com o avanço no tempo, a presença de um par vortical (o primário e o secundário descrito acima) se intensifica gerando outros vórtices, como ilustrado a partir da Figura 5.38. Nessa figura, também é verificado o início do processo de deformação do vórtice principal, oriundo do movimento de outros vórtices periféricos. Há também uma obstrução do crescimento espacial do vórtice principal devido à massa de fluido frio que se deposita na parte inferior do escoamento. Além disso, inicia-se uma injeção de fluido menos aquecido no vórtice principal (mais quente). Na Figura 5.39 é mostrada a intensificação da deformação do vórtice principal, a mistura de fluido menos aquecido neste e o desprendimento de um vórtice de fluido aquecido pela parte superior do vórtice primário.

A partir da Figura 5.40 verifica-se um comportamento mais aleatório do processo de mistura, através do desprendimento de porções de fluido quente do vórtice principal e mistura de fluido frio das regiões mais abaixo da cavidade, que são succionadas pelo movimento dos pares de vórtices contra-rotativos. Mesmo com as deformações sofridas o vórtice principal apresenta um crescimento no seu tamanho, principalmente, devido a remoção da massa de fluido frio, oriunda da injeção causada pelos vórtices contra-rotativos, que ficava depositada na parte inferior da cavidade.

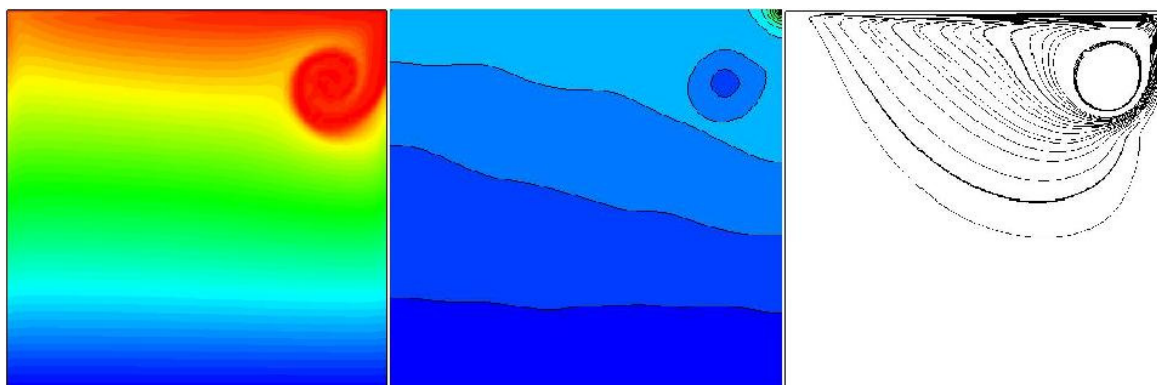


Figura 5.35 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.04s$  –  
a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

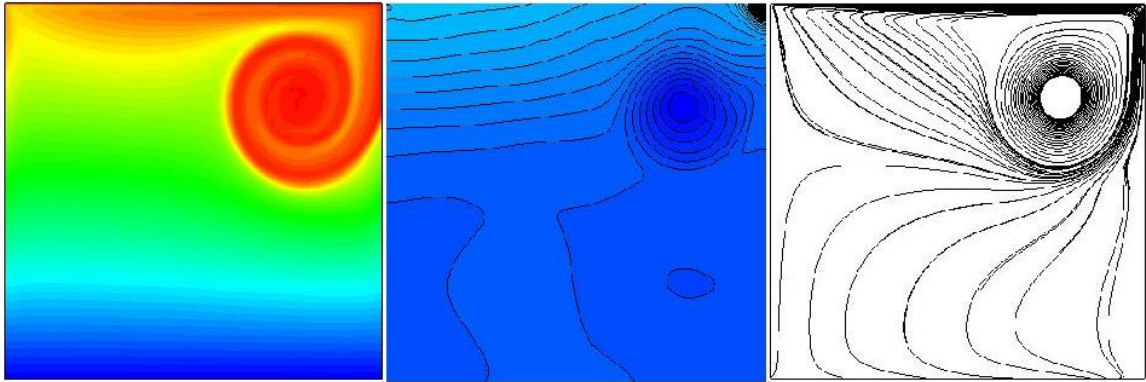


Figura 5.36 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.08s$  –  
 a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

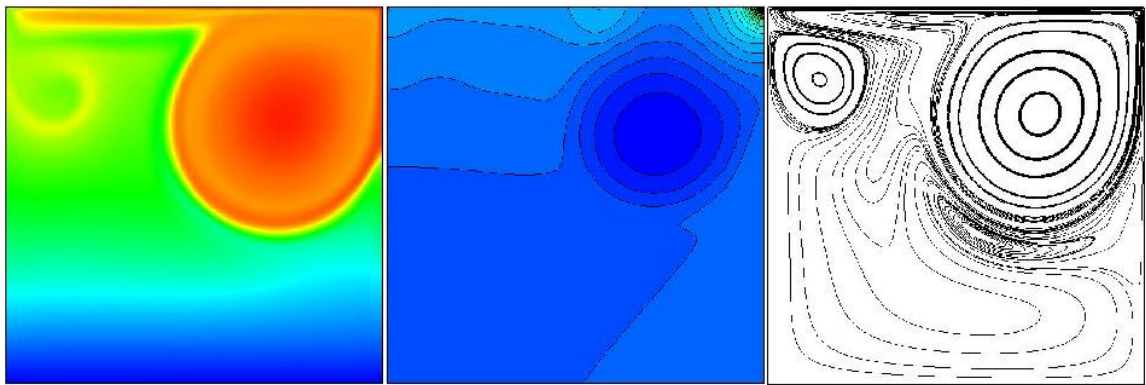


Figura 5.37 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.1995s$  –  
 a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

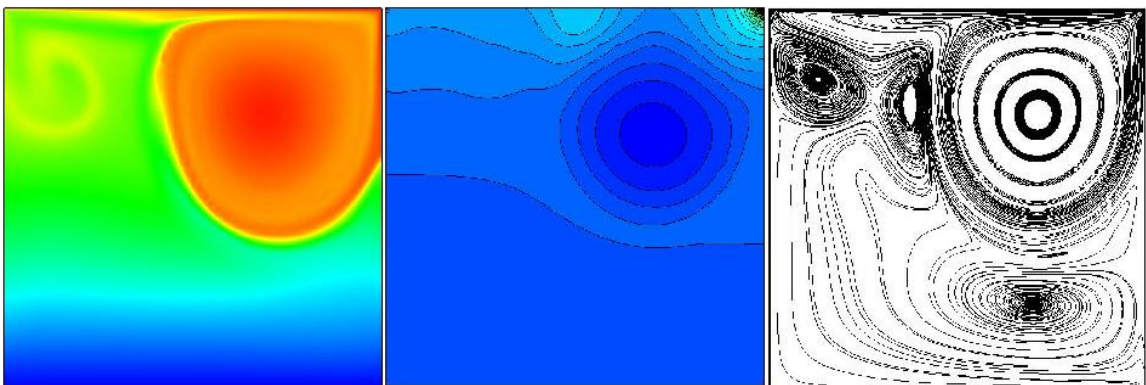


Figura 5.38 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.2435s$  –  
 a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente



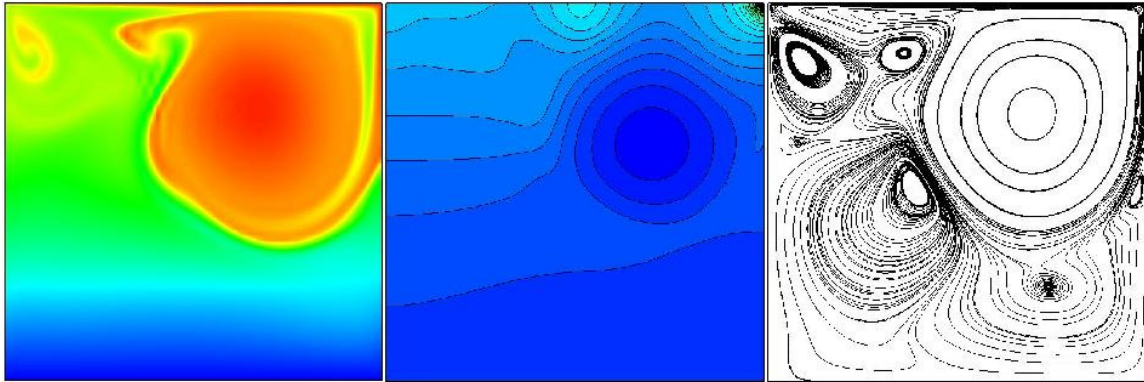


Figura 5.39 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.2684s$   
 – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

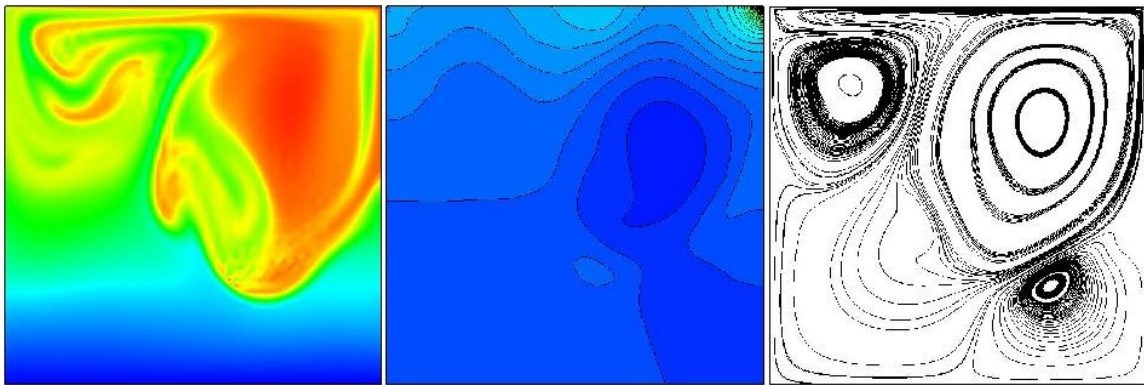


Figura 5.40 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.3585s$   
 – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

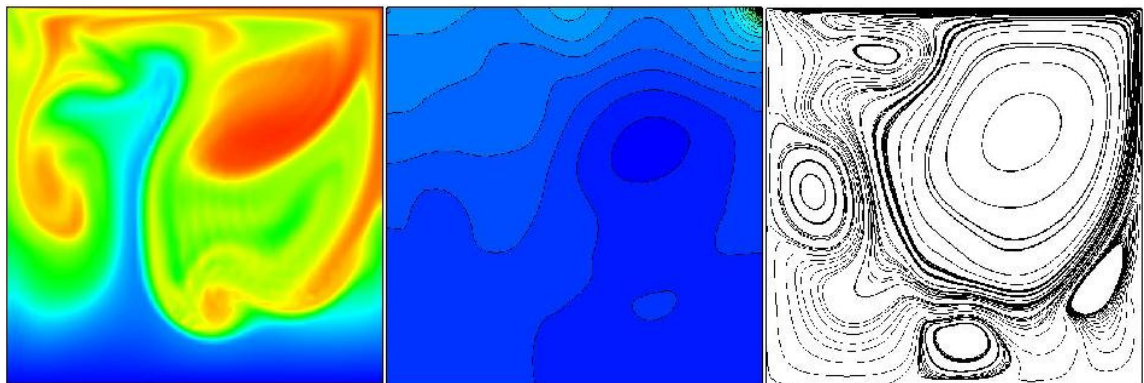


Figura 5.41 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.4335s$   
 – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

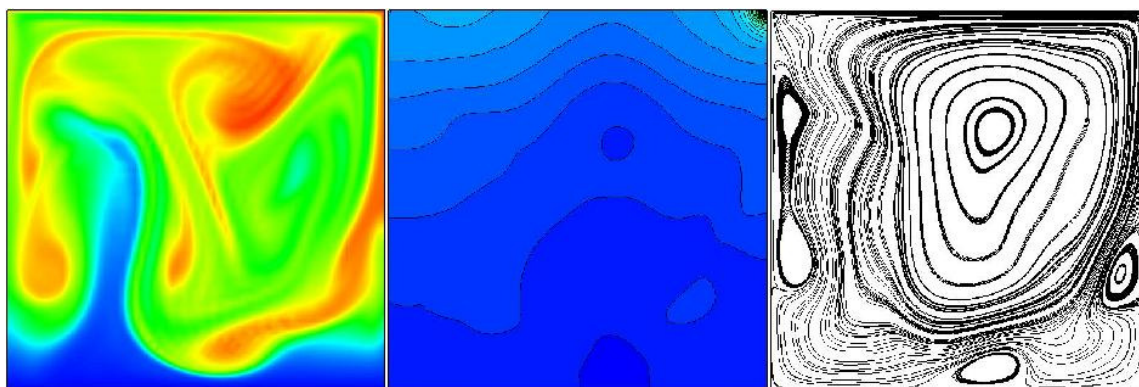


Figura 5.42 – Topologia do escoamento a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.4555s$   
 – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

Para efeito de comparação foi realizada uma simulação com a força do campo gravitacional atuando no sentido oposto ao ilustrado na Figura 5.21, ou seja, o vetor aceleração da gravidade neste caso comparativo possui o mesmo sentido que o eixo de coordenadas em Z.

A topologia do escoamento é visualizada da Figura 5.43 a Figura 5.46, para os tempos  $t = 0.04s$ ,  $t = 0.08s$ ,  $t = 0.1995s$  e  $t = 0.2435s$ , igualmente aos quatro primeiros intervalos ilustrados para o caso com estratificação estável (conforme Figuras 5.35 – 5.38) permitindo uma melhor comparação entre as estratificações. É possível verificar, nas Figuras 5.43 e 5.44 que o centro do vórtice principal já se situa numa posição bem mais abaixo da cavidade, sendo mais visível em  $t = 0.08s$ . Esse processo ocorre pelo fato que a massa de fluido quente desloca-se naturalmente das camadas superiores da cavidade para as inferiores auxiliando a mistura realizada pela convecção forçada, pois a força do campo gravitacional é para cima e o fluido aquecido desce.

Nas Figuras 5.45 e 5.46 pode ser visto que o processo de mistura ocorre muito antecipadamente para esta nova configuração do que para a configuração anterior, mostrando que a presença de uma estratificação instável é capaz de implementar o efeito de transição de escoamentos laminares com instabilidades ou apenas localmente turbulentos para escoamentos turbulentos. Deve ser lembrado que como o caso simulado é bi-dimensional, com um elemento de profundidade, não temos, devido às características da turbulência, um escoamento turbulento. Segundo [Oliveira, M., 2005] para escoamentos com número de Grashoff maiores que  $Gr = 1,6 \times 10^6$  o escoamento já é moderadamente turbulento, assim, certamente o caso de convecção com estratificação instável, apresentado aqui, será “turbulento”.

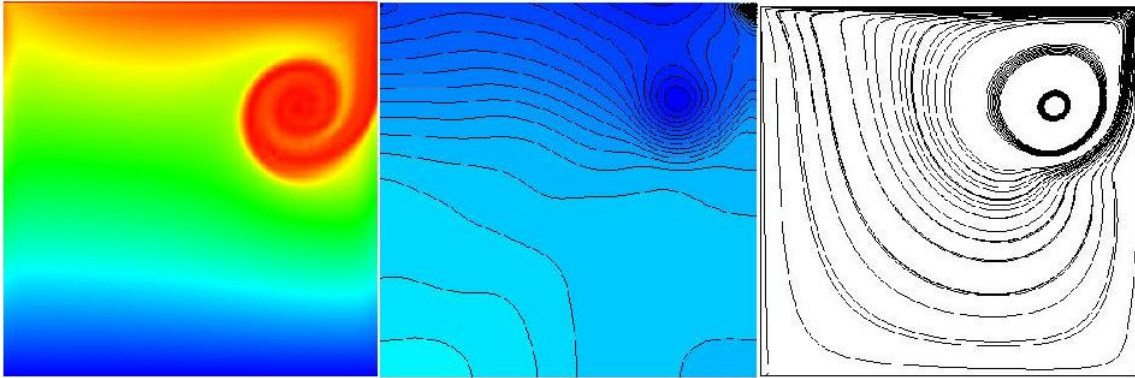


Figura 5.43 – Escoamento com estratificação instável a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.04s$  – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

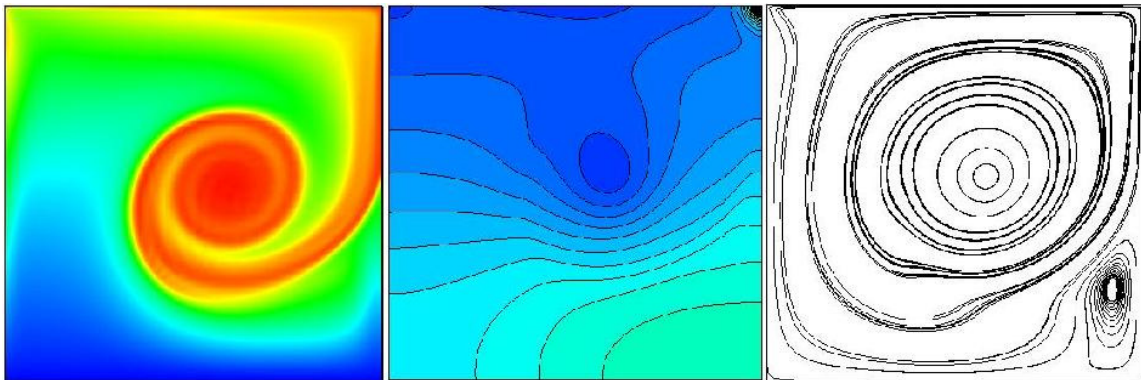


Figura 5.44 – Escoamento com estratificação instável a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.08s$  – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

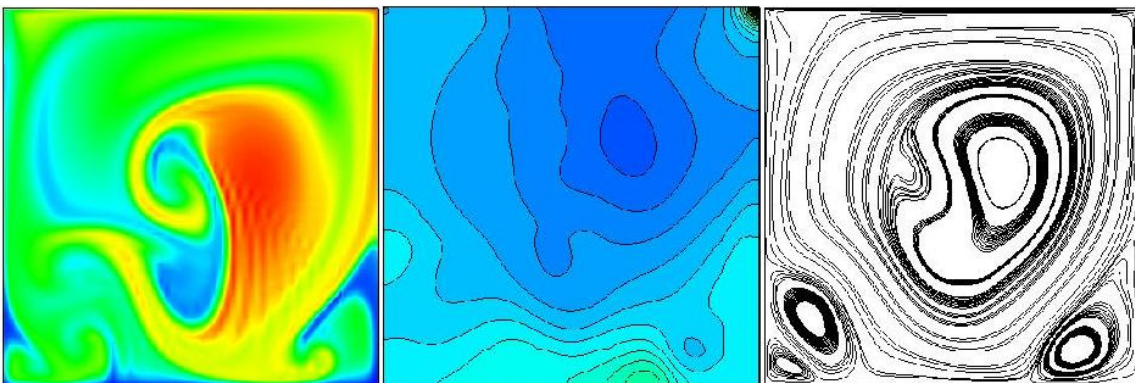


Figura 5.45 – Escoamento com estratificação instável a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.1995s$  – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

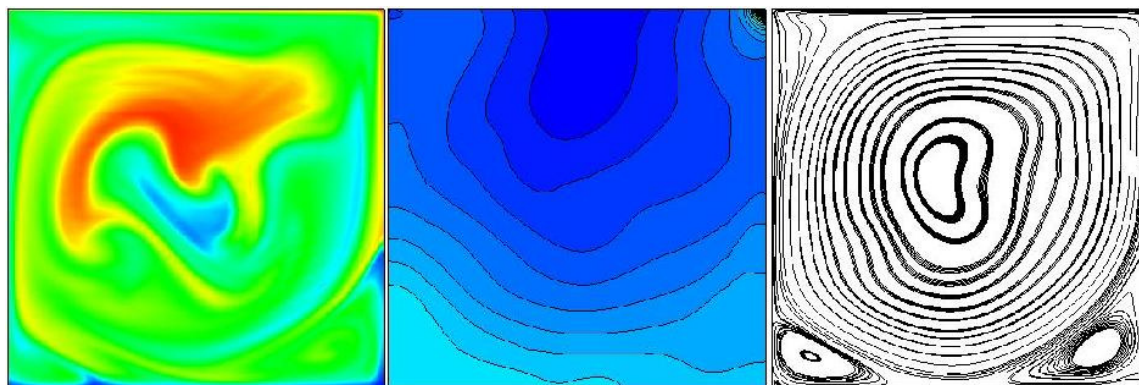


Figura 5.46 – Escoamento com estratificação instável a  $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  no tempo  $t = 0.2435s$  – a) Campo de temperaturas – b) Campo de pressões – c) linhas de corrente

Resultados quantitativos para as posições  $Z^* = 0.28$  e  $Z^* = 0.93$  em  $X^* = 0.5$  podem ser visualizados nas Figuras 5.47 e 5.48, através da utilização de uma sonda numérica localizada nas posições acima referidas. O código utilizado por [Ho Ji et al., 2007] apresenta um comportamento mais difusivo que o do presente código, assim como ocorrido para o caso ( $Re_H = 400$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 16000$ ).

Na Figura 5.47 analisa-se o comportamento temporal do campo de temperaturas para  $Z^* = 0.28$ . Na faixa de tempo  $t_{adm} \sim 20$  o campo de temperaturas na parte inferior da cavidade começa a aumentar, devido à mistura das primeiras massas de fluido mais aquecido que incidem sobre essa região da cavidade, até a ocorrência de um máximo local em  $t_{adm} \sim 40$ , desse máximo local até  $t_{adm} \sim 50$  ocorre uma diminuição da temperatura na região, provavelmente devido a incidência sobre essa região de outras massas de fluido que já haviam sido misturadas, portanto menos aquecidas. Esse comportamento foi detectado pelo presente código, embora, em média, o campo de temperaturas pareça um pouco maior do que o obtido experimentalmente. Deve ser lembrado também que as condições iniciais não são as mesmas que as utilizadas no experimento em laboratório, sendo utilizadas as mesmas utilizadas no experimento numérico de [Ho Ji et al., 2007].

O presente código também obtém resultados bastante aproximados para cada ponto mensurado pelo experimento realizado no laboratório, entretanto, o grande espaçamento entre cada medição não permite a afirmação de que o comportamento com instabilidades entre cada medição, detectado pelo presente código, seja de fato, representativo.

Na Figura 5.48 tem-se o comportamento temporal na posição  $Z^* = 0.93$ , onde pode ser visto que, na média, o presente código predisse temperaturas um pouco mais abaixo do que os resultados apresentados pelos experimentos em laboratório e numérico de [Ho Ji et al., 2007],

embora nas posições de medição dos resultados experimentais tenham sido obtidos resultados bastante aproximados, exceto para  $t_{adm} \sim 10$  e  $t_{adm} \sim 40$ .

Para as duas Figuras 5.47 e 5.48 é possível observar que o escoamento com estratificação instável apresenta um comportamento bem mais randômico e instável do que o escoamento com estratificação estável.

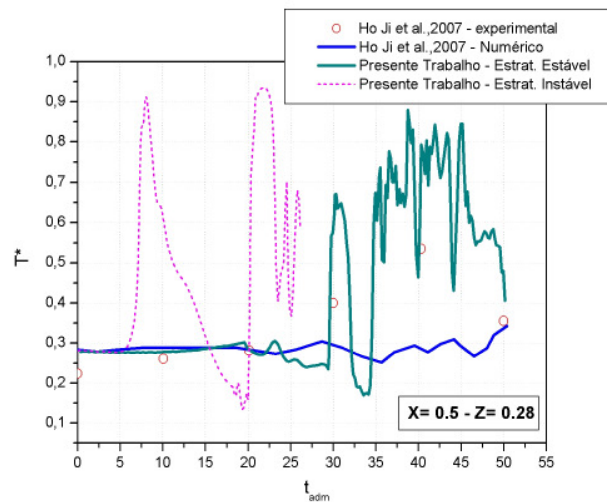


Figura 5.47- Variação do campo de temperaturas no tempo para o escoamento a  $Re_H=4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  para a posição  $X^*=0.5$  e  $Z^*=0.28$

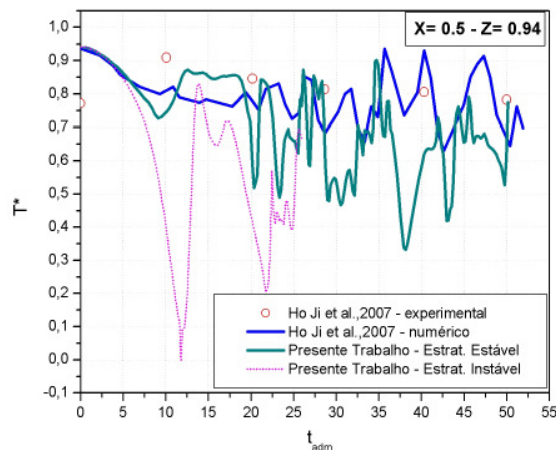


Figura 5.48 - Variação do campo de velocidades no tempo para o escoamento a  $Re_H=4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$  para a posição  $X^*=0.5$  e  $Z^*=0.94$

## 5.2. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico

O estudo de escoamentos através de um degrau é bastante interessante visto que a geometria do domínio permanece sendo muito simples e há a presença de fenômenos como: separação e recolamento da camada limite e efeitos de recirculação. É muito importante para o código computacional desenvolvido conseguir detectar esses fenômenos.

Do ponto de vista físico, a análise do escoamento sobre degrau auxilia-nos a compreender o comportamento do escoamento através das chicanas de trocadores de calor feixe tubulares, sobre placas de circuitos eletrônicos com a presença de componentes com geração de energia entre outros.

Alguns autores já obtiveram solução numérica para casos de escoamentos em cavidades isotérmicas e não-isotérmicas, citam-se alguns casos que servem como referência ao presente trabalho:

- [Petry, 2002] realizou a análise numérica de escoamentos isotérmicos sobre degrau bi-dimensional para os números de Reynolds 100, 400, 1000 e 10000 empregando LES e aplicando os modelos de Smagorinsky e dinâmico, comparando seus resultados com os obtidos através de experimentos em laboratório por [Armaly et al., 1983]. A autora também realizou a simulação de escoamentos sobre degrau tridimensional para os números de Reynolds 100 e 1000;

- [Silveira Neto et al., 1993] realizou o estudo de escoamentos não isotérmicos, utilizando o campo de temperaturas como um passivo escalar, sobre degrau bidimensional e tridimensional para valores de Reynolds 6000 e 38000 e número de Prandtl igual a 1. Para obtenção da solução das equações governantes o mesmo utilizou o método de Volumes Finitos, resolvendo-as através da Simulação de Grandes Escalas (LES) com modelagem submalha de Smagorinsky e a Função Estrutura proposta por [Métais e Lesieur, 1992].

Para problemas advectivo-dominantes, como são, por exemplo, os casos de escoamento sobre degrau, a aplicação do método de elementos finitos com aproximação dimensional de Galerkin para a formulação variacional acarreta a geração de oscilações não físicas, que podem comprometer a solução em todo o domínio. A única forma de resolver este problema sem alterar a formulação adotada, ou seja, sem adotar um esquema de estabilização é refinando drasticamente a malha, fazendo com que, em nível de elemento, o transporte difusivo predomine sobre o transporte advectivo. O parâmetro adimensional que estabelece a relação entre estes dois tipos de transporte é dado pelo número de Peclet local, conforme equação 5.4:

$$Pe_h = \frac{\rho C_p V_{\max} h}{k} \quad (5.4)$$

onde  $h$  é a dimensão da malha, e  $|Pe_h| > 1$  caracteriza predominância do transporte convectivo sobre o difusivo.

No presente caso, mesmo com a inserção do esquema temporal de Taylor-Galerkin, que já atua como esquema de estabilização, há o surgimento de algumas oscilações não físicas para números de  $Pe_h > 100$ , exigindo um maior refinamento de malha.

Entretanto, é sabido que um refinamento de malha induz a um aumento no tempo computacional da simulação, o que na presente abordagem (LES, escoamento não isotérmico, tridimensional e transiente) é bastante significativo. Para o caso do escoamento sobre degrau apresentado no item 5.2.1, que possui uma malha composta de 144000 elementos até o tempo físico de aproximadamente  $t = 0,11s$ , o tempo computacional é  $t_{comp.} \sim 360$  horas ou 15 dias. Assim, para a resolução de casos com números de  $Re_H > 1000$  seria necessária uma malha bem mais refinada, aumentando o tempo computacional significativamente, o que no presente momento inviabiliza a simulação destes casos, ou as torna uma tarefa muito árdua (que levaria meses). Para tais simulações é necessário, primeiramente, buscar alternativas para reduzir ainda mais o tempo computacional (melhorias dos recursos computacionais ou ainda uma otimização nas técnicas de processamento paralelo). Com isso, nos limitaremos, neste trabalho, a verificar o comportamento tridimensional do código, ainda que no regime laminar.

### 5.2.1. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico ( $Re_H=100$ ) e ( $Pr=1$ )

O domínio neste caso pode ser ilustrado através da Figura 5.49. As dimensões e as propriedades do escoamento são dadas na Tab. 5.4. Foram impostas as seguintes condições de contorno: 1) superfície de entrada: perfil de velocidades parabólico com velocidade máxima  $V_{max} = 100$  m/s e campo de temperaturas dividido em dois valores constantes, o primeiro ( $T_{sup} = 1^\circ C$ ) ocupa 85% da superfície de entrada e o segundo ( $T_{inf} = 0^\circ C$ ) ocupa o restante; 2) superfície de saída: os gradientes de velocidade longitudinal são considerados nulos e é assumido uma pressão hidrostática nula, o campo de temperaturas é considerado localmente parabólico; 3) superfícies superior e inferior: foi aplicada a condição de não deslizamento para velocidade e fluxo de calor nulo para a temperatura; 4) superfícies laterais: foi aplicada a condição de deslizamento livre e imposta a condição de impermeabilidade de forma que  $\partial u/\partial y = 0$ ,  $\partial w/\partial y = 0$  e  $v = 0$ , para a

temperatura temos uma condição de fluxo nulo. No que tange as condições iniciais, foi assumido ( $V_1, V_2, V_3, P, T(t=0s) = 0$ ). O domínio, condições iniciais e de contorno foram as mesmas que as estabelecidas por [Silveira Neto et al., 1993].

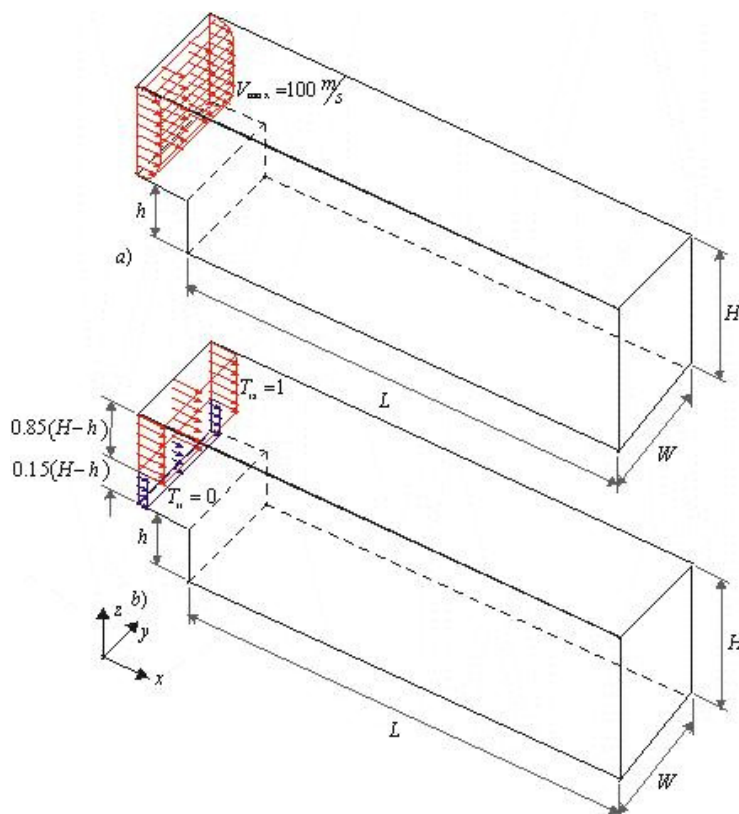


Figura 5.49 – Domínio para o escoamento não isotérmico sobre degrau

Tabela 5.4 – Dados referentes ao escoamento em degrau não isotérmico a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$

Número de Reynolds - $Re_H$	100
Número de Prandtl - $Pr$	1
Dimensões do domínio (L, W, H, h)	3,6m x 0,3m x 0,3m x 0,12m
Número de Elementos do domínio (x, y, z)	240 x 10 x 60
Condições Iniciais ( $V_1, V_2, V_3, P, T$ )	$V_1 = V_2 = V_3 = P = T = 0$
Velocidade do Som no meio	340m/s
$\Delta t_{\text{crítico}}$	$6,6 \times 10^{-6}$ s

É destacado que o número de Reynolds utilizado no presente caso (dado pela Eq. 5.5) é diferente do definido em [Armaly et al., 1983; Petry, 2002] (Eq. 5.6), portanto, mesmo que o domínio fosse o mesmo não haveria como realizar um comparativo exato entre parâmetros como o comprimento de recolamento ( $X_{\text{rec}}$ ).



$$Re_h = \frac{\rho V_{\max} h}{\mu} \quad (5.5)$$

$$Re_h = \frac{\rho \left( \frac{2V_{\max}}{3} \right) 2h}{\mu} \quad (5.6)$$

A seguir são ilustrados, vide Figura 5.50, alguns resultados qualitativos do campo de velocidade na direção X, de pressões, linhas de corrente e campo de temperaturas para um escoamento no tempo  $t = 0,11s$ .

Na Figura 5.51, são apresentadas as superfícies isotérmicas, mostrando o comportamento tridimensional do escoamento e a disponibilidade do presente código para a simulação de escoamentos tri-dimensionais.

Nas Figuras 5.52.a, b e c, são ilustrados os perfis de velocidades para as posições  $x = 1.2m$ ,  $2.4m$  e  $3.6m$ , respectivamente. Já nas Figuras 5.53.a,b e c temos os perfis de temperatura para as mesmas posições especificadas anteriormente.

O ponto de recolamento para o escoamento a  $Re_H = 100$  obtido foi de aproximadamente  $X_{rec}/H = 4,2$ .

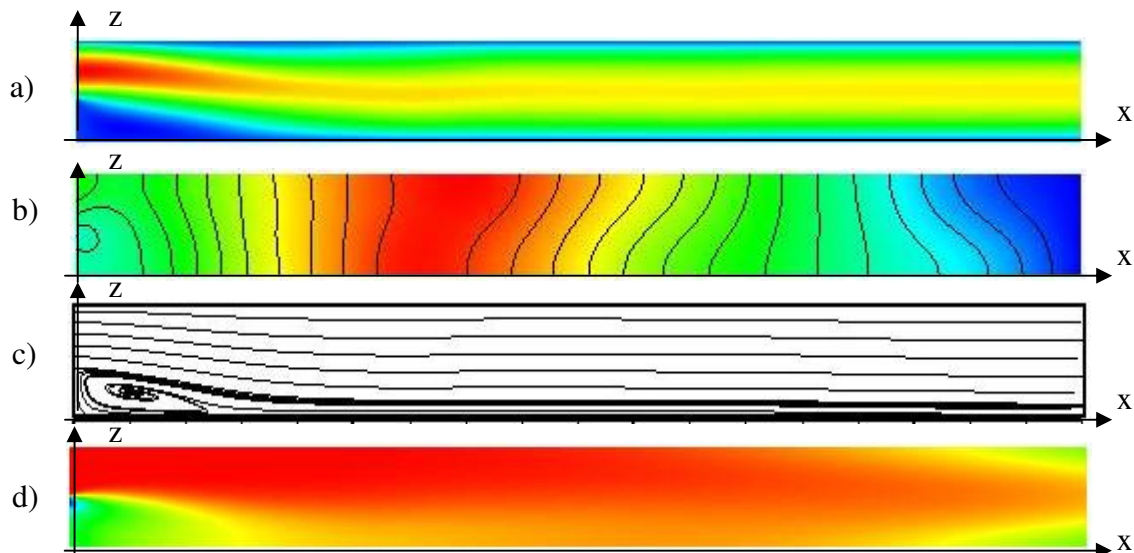


Figura 5.50 – Escoamento sobre degrau a  $Re_H = 100$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 0,11s$  – a) velocidade em X – b) campo de pressões – c) linhas de corrente – d) campo de temperaturas

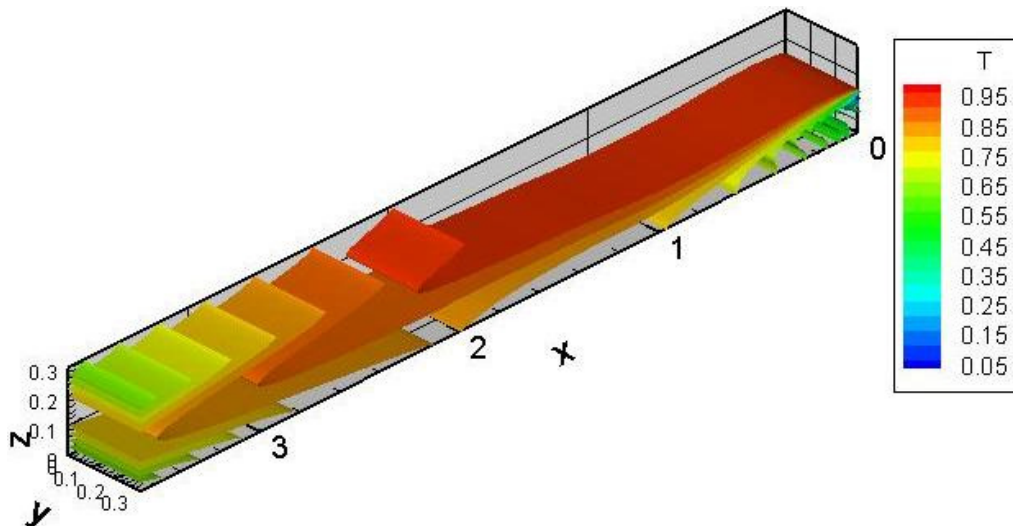


Figura 5.51 – Superfícies isotérmicas do campo de temperaturas para um tempo físico  $t = 0,11$ s

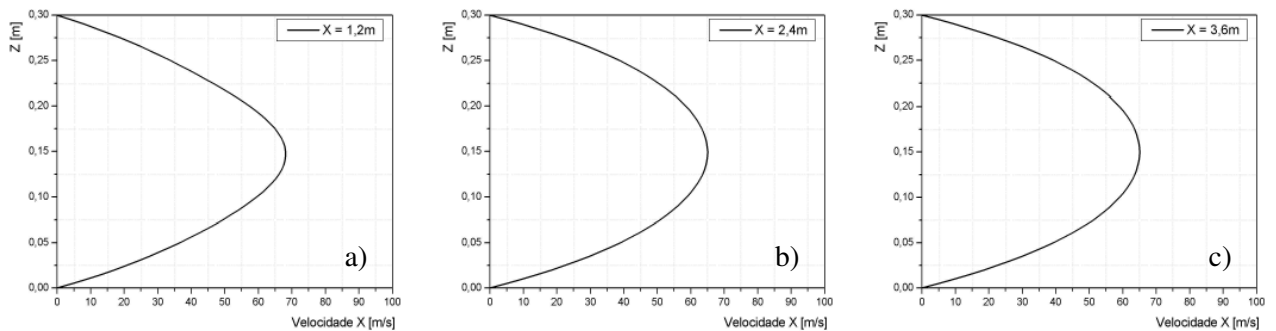


Figura 5.52 – Perfil de velocidades para um escoamento em  $t = 0,11$ s a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  – a)  $x = 1,2$ m – b)  $x = 2,4$ m e c)  $x = 3,6$ m

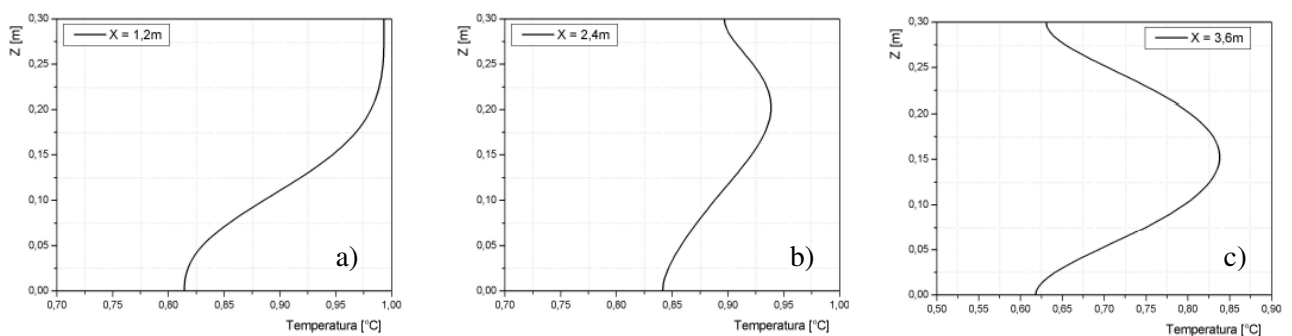


Figura 5.53 – Perfil de temperaturas para um escoamento em  $t = 0,11$ s a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  – a)  $x = 1,2$ m – b)  $x = 2,4$ m e c)  $x = 3,6$ m

Na Figura 5.52.a verifica-se que o perfil de velocidades para  $x = 1,2$ m é menos achatado com uma maior velocidade na linha central do degrau (aproximadamente em  $Z = 0,15$ m). Este comportamento ocorre devido a influência do degrau a montante, que força um aumento de

velocidade na linha central nesta posição. Já nas Figuras 5.52.b e c não é possível notar uma diferença entre o perfil nas posições indicadas, mostrando que o desenvolvimento hidrodinâmico do escoamento foi atingido.

Na Figura 5.53 a variação entre os perfis mostra que o campo de temperaturas ainda não está plenamente desenvolvido, mas é possível visualizar na Figura 5.3.c que o escalar que foi injetado na entrada do domínio já o percorreu e que o perfil neste apresenta um comportamento parabólico, oriundo da injeção inicial do escalar no domínio. Isso mostra que embora o escalar tenha percorrido todo o domínio, não implica necessariamente no completo desenvolvimento térmico. Outra observação a ser feita é a verificação de fluxo nulo nas superfícies inferior ( $Z = 0$ ) e superior ( $Z = 0,3$ ).

Caso seja feita uma seleção dos perfis de temperatura em uma posição anterior a região onde o perfil ainda apresenta-se parabólico, por exemplo perfis nas posições  $x = 0,96\text{m}$ ,  $x = 1,2\text{m}$  e  $x = 1,44\text{m}$ , conforme ilustrado na Figura 5.54, é possível verificar uma diminuição da variação de temperatura no perfil mostrando uma tendência ao desenvolvimento térmico. Esse comportamento indica que quando o escalar situado nesta posição estiver atingido a superfície de saída o escoamento certamente estará termicamente desenvolvido. As Figuras 5.55.a e b, mostram a topologia do campo de temperaturas no tempo físico em  $t = 0,165\text{s}$  no plano X-Z e tridimensional, respectivamente, que confirmam a afirmação disponibilizada pela Figura 5.54.

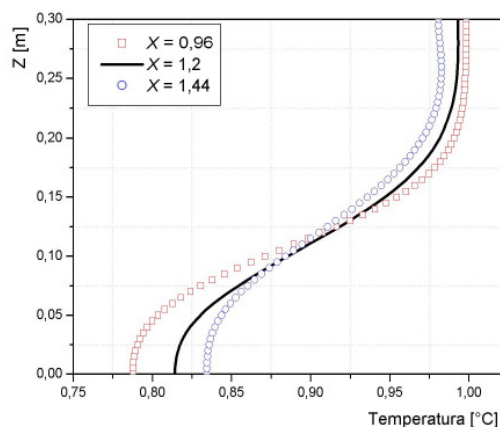


Figura 5.54 – Perfis do campo de temperaturas nas posições  $x = 0,84$ ;  $x = 1,2$  e  $x = 1,44$  para um escoamento a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  em  $t = 0,11\text{s}$

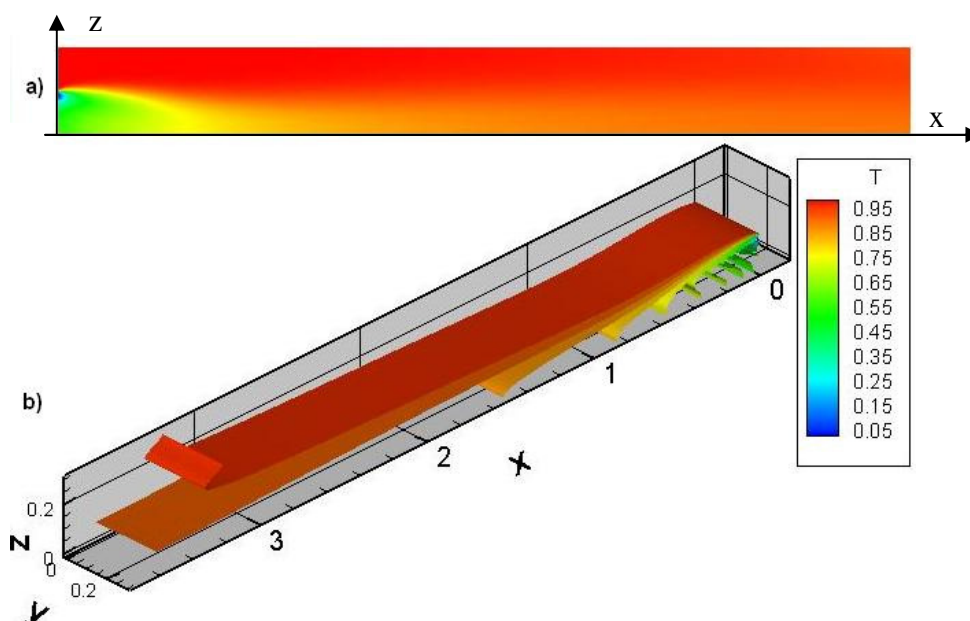


Figura 5.55 – Campo de temperaturas no escoamento a  $Re_H=100$  e  $Pr=1$  para um tempo físico  $t = 0,165s$  – a) bidimensional – b) superfícies isotérmicas

### 5.2.2. Escoamento Sobre Degrau Não Isotérmico ( $Re_H=400$ ) e ( $Pr=1$ )

O domínio para este caso, assim como as condições de contorno, mantém-se os mesmos que o utilizado nas simulações para  $Re_H=100$ , vide Figura 5.49. Quanto as condições iniciais do problema, partiu-se dos campos de velocidade e pressão do escoamento com  $Re_H=100$  no tempo físico  $t = 0,11s$ . Para o campo de temperaturas a condição inicial é nula em todo domínio, ou seja,  $T(t=0s) = 0^\circ C$ . O passo de tempo mínimo utilizado foi de  $\Delta t_{crítico} = 1,4 \times 10^{-6}s$

Aqui será mostrado somente o comportamento topológico do escoamento, visto que o tempo físico da simulação é de  $t=1,32 \times 10^{-2}s$ , o que representa um escoamento distante do desenvolvimento hidrodinâmico e térmico. Na Figura 5.56, é ilustrado o campo de velocidades e pressões no tempo considerado, mostrando que não há presença de oscilações numéricas nestes campos e que os mesmos apresentam um comportamento qualitativo bastante coerente. Na Figura 5.57 é ilustrado a vorticidade em y ( $\omega_y$ ) que também apresentou resultados qualitativamente coerentes. Na Figura 5.58, é ilustrado o campo de temperaturas, primeiramente é possível verificar que a solução não apresenta oscilações devido ao número de Peclet de malha ( $Pe_h = 50$ , no presente caso), posteriormente é possível verificar que o campo de temperaturas apresenta uma topologia bastante semelhante a topologia dos campos de velocidade e vorticidade apresentados. Como o transporte do escalar (convecção forçada) é realizado pelo campo de

velocidades, o comportamento do campo de temperaturas deve ser igual ao do campo de velocidades, assim o comportamento obtido com o presente código parece adequado.

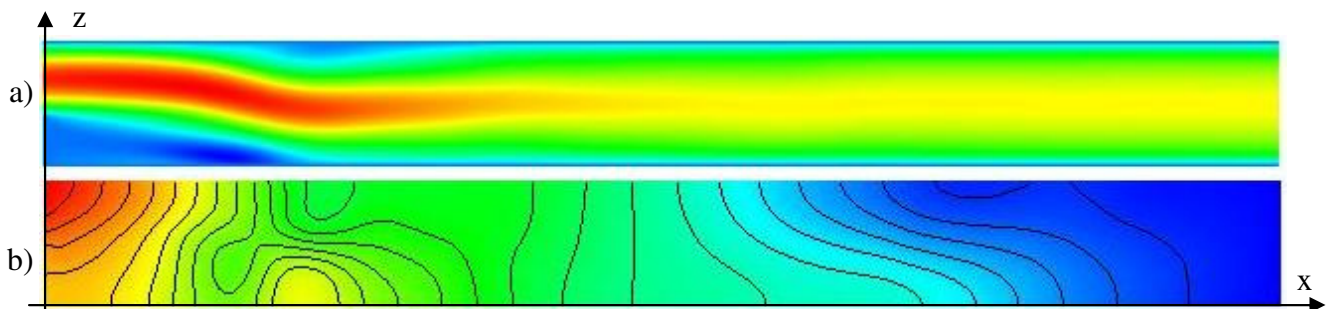


Figura 5.56 – escoamento sobre degrau a  $Re_H = 400$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 1,32 \times 10^{-2}$ s  
– a) velocidade em X – b) campo de pressões

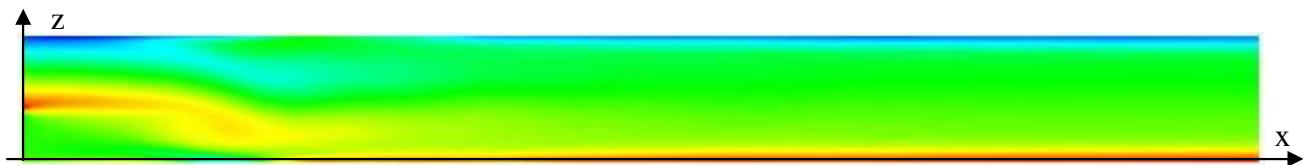


Figura 5.57 – Campo de vorticidade no escoamento sobre degrau a  $Re_H = 400$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 1,32 \times 10^{-2}$ s

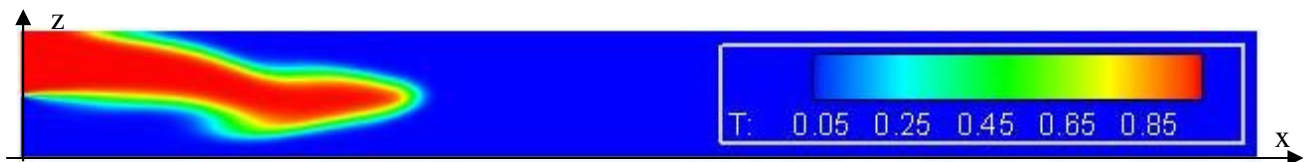


Figura 5.58 - Campo de temperaturas no escoamento sobre degrau a  $Re_H = 400$  e  $Pr = 1$  para um tempo físico  $t = 1,32 \times 10^{-2}$ s

Os resultados para os escoamentos sobre degrau obtidos com o presente código mostraram um comportamento bastante razoável, mesmo quando o domínio é tridimensional. Além disso, o escoamento a  $Re_H = 400$  não apresentou qualquer espécie de oscilação, o que mostra que a utilização do esquema temporal de Taylor-Galerkin atuou bem na estabilização do escoamento.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho apresentou um código para a simulação de escoamentos incompressíveis, nos regimes laminar e turbulento, bi e tridimensionais, transientes e não isotérmicos, empregando o Método de Elementos Finitos e a Simulação de Grandes Escalas, com modelo submalha de Smagorinsky.

O Método de Galerkin clássico para aproximação dimensional da formulação variacional das equações governantes do problema e o esquema de discretização temporal de Taylor-Galerkin foram utilizados. O elemento finito utilizado foi o hexaédrico de oito nós, com funções de interpolação lineares para as componentes de velocidade e para a temperatura, e funções constantes no elemento de pressão. Para redução do tempo computacional foi utilizado o esquema de integração reduzida com funções analíticas e foi aplicada a técnica de processamento paralelo OpenMP.

O principal objetivo do presente trabalho foi obter um código capaz de proporcionar a análise de escoamentos não isotérmicos, utilizando-se a abordagem da Simulação de Grandes Escalas e o Método de Elementos Finitos.

Entretanto, o código apresentou algumas limitações como: oscilações para o campo de temperaturas a números de Peclet de malha ( $Pe_h > 100$ ) e o tempo de simulação para escoamentos não isotérmicos, tridimensionais e turbulentos continuou bastante elevado, mesmo com a aplicação da técnica de processamento paralelo OpenMP. Além disso, o presente código simula escoamentos não isotérmicos com as condições de contorno de temperatura prescrita (1ª espécie) e de fluxo prescrito nulo (natural).

Assim, ficam como sugestões para futuros trabalhos:

- validação do presente código para escoamentos não isotérmicos, bi e tridimensionais no regime turbulento para outros casos disponíveis na bibliografia;
- implementações de melhorias na técnica de processamento paralelo permitindo uma otimização maior no tempo de processamento (inversão da alocação das matrizes de elementos finitos, extensão da técnica OpenMP para máquinas de memória distribuída através de ferramentas para criação de máquinas paralelas com memória compartilhada virtual ou utilização de técnicas de processamento paralelo para máquinas com memória distribuída com bibliotecas de passagem de mensagem (MPI,PVM));
- implementação da condição de contorno de fluxo prescrito não nulo para a equação da energia (permitindo a simulação de problemas onde esse tipo de condição é imposta);

- implementação da condição de contorno periódica para as equações de Navier-Stokes e da energia, permitindo a diminuição do domínio em análise, principalmente para escoamentos em canais, e da requisição de malha;

- exploração de parâmetros de engenharia relacionados a resistência ao escoamento (perda de carga) e a transferência de calor (número de Nusselt);

Destaca-se que o código desenvolvido apresentou resultados satisfatórios (válidos) para os seguintes casos:

- Em escoamentos não isotérmicos, bidimensionais, laminares e sem a presença de forças de campo quando o escoamento atinge o regime permanente para os campos de velocidade, pressão e temperatura, apresentando bastante coerência quando comparados aos resultados válidos de [Nalassamy e Prasad, 1977; Guia et al., 1982 e Lange, 1992];

- Em escoamentos não isotérmicos, bidimensionais, laminares, com forças de campo impostas e no regime transiente para os campos de velocidade, pressão e temperatura, apresentando resultados coerentes com os apresentados por [Ho Ji et al., 2007]. Além disso, em escoamentos na região próxima a transição ( $Re_H = 4000$ ,  $Pr = 6$  e  $Gr = 7 \times 10^6$ ) o presente código conseguiu estimar satisfatoriamente o comportamento do escoamento;

Além disso, o código foi testado em novas simulações de escoamentos não isotérmicos: cavidade bidimensional no regime turbulento, apresentando aparentemente um comportamento bastante adequado. E também para escoamentos tridimensionais no escoamento sobre degrau, mostrando que o código também está apto a simular este tipo de caso.

Vale ressaltar que o código é capaz de prever adequadamente o comportamento de escoamentos não isotérmicos e transientes com ou sem a presença das forças de campo.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B., 1983. “Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow”, **Journal of Fluid Mechanics**, v. 127, pp. 473-496.

Azevedo, L.R., 1999. “**Análise de Problemas de interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Bejan, A., 1994. “**Convection Heat Transfer**”, John Wiley & Sons, Durham, USA.

Brasil Junior, A.C.P., 2002. “**Turbulência**”, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Brito, R.F., 2005. “**Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos Não-Isotérmicos Usando o Método de Elementos Finitos**”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.

Brito, R.F., Guimarães, P.M., Silveira Neto, A., Menon, G.J., 2005, “Large-Eddy Simulation of Air Flow Within a Square Enclosure with a Partially Heated Bottom Surface and Cooled Walls”, **Proceedings of COBEM 2005**, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Ouro Preto, MG.

Burbridge, H.P., 1999. “**O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de Escoamentos Compressíveis Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Carey, G.F., Oden, J.T., 1984. “Finite Elements: Fluid Mechanics”, **In: Becker, E. B., Carey, G.F., Oden, J.T. Finite Elements**, V.6 Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.



Clark, R.A., Ferziger, J.H., Reynolds, W.C., 1979. "Evaluation of Sub-Grid Scale Turbulence Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 91, pp. 1-16.

Deardorff, J.M., 1970. "A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Number", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 41, pp. 453-480.

Deschamps, C.J., 2002. "**Turbulência**", Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Donea, J., 1984. "A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 20, pp. 101-119, 1984.

Ferziger, J., 1993. "Simulation of Complex Turbulent Flows: Recent Advances and Prospects in Wind Engineering", **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 46 & 47, pp. 195-212.

Findikakis, A.N., Street, R.L., 1982. "Mathematical Description of Turbulent Flows", **Journal of Hydraulics Division**, ASCE, vol. 108, No.HY8, paper 17265, pp. 887-903.

Fox, R.W.; McDonald, A.T., 1995. "**Introdução à Mecânica dos Fluidos**", LTC Editora, Rio de Janeiro.

Franca, L.P., Frey, S., 1992. "Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations", **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 99, 209-233

Franca, L.P., Frey, S., Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilizes Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Difusive Model", **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 95, 253-276

Germano, M. Piomelli, U., Moin, P. Cabot, W.H., 1991. "A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model", **Physics of Fluids**, A3 (7), 1760-1765.

Giacomello, M.V., Rocha, L.A.O., Schettini, E.B.C., Silvestrini, J.H., 2006. “Simulação Numérica de escoamentos ao redor de cilindros com transferência de calor”, **Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, Rio de Janeiro, Brasil.

Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., 1982. “High-*Re* Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid”. **Journal of Computational Physics**, v. 48, pp. 387-411.

Grötzbach, G., Wörmer, 1999. “Direct Numerical and Large Eddy Simulation in Nuclear Applications”, **International Journal of Heat and Fluid Flow**. Vol. 20, pp. 222-240.

Guo, Y., Xu,C., Cui,G., Zhang,Z., Shao,L., 2007. “Large eddy Simulation of scalar turbulence using a new subgrid eddy diffusivity model”, **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Vol. 28, pp. 268-274.

Hermanns, M., 2002. “Parallel Programming in Fortran 95 using OpenMP”, **School of Aeronautical Engineering**, Madrid, Spain

Hinze, J.O., 1975. “**Turbulence**”, McGraw-Hill, New York, USA.

Ho Ji, T., Kim, S. Y., Hyun, J.M., 2007. “Transient Mixed Convection in an Enclosure Driven by Sliding Lid”, **Heat and Mass Transfer**, vol. 43, pp. 629-638.

Hughes, T. J. R., 1987. “**The Finite Element Method**”, Prentice-Hall, New Jersey, USA.

Incropera, F.P.; DeWitt, D.P., 1998. “**Fundamentos da Transferência de Calor e Massa**”, Editora LTC, Rio de Janeiro, Brasil.

Jansen, K.E., 1999. “A Stabilized Finite Element Method for Computing Turbulence”. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 174, pp. 299-317.

Jaramillo, J.E., Pérez-Segarra, C.D., Oliva, A., Claramunt, K., 2007. “Analysis of Different RANS Models Applied to Turbulent Forced Convection”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 50, pp. 3749 – 3766.

Khanafer, K.M., Al-Almiri, A., Pop, I., 2007. “ Numerical Simulation of Unsteady Mixed Convection in a Driven Cavity Using an Externally Excited Sliding Lid”, **International Journal of Mechanical Fluids**, Vol. 26, pp. 669-687.

Kakaç,S., Yener,Y., 1995. “**Convective Heat Transfer**”,CRC Press, Boca Raton, USA.

Kasagi, N.; Iida, O., 1999. “Progress in Direct Numerical Simulation of Turbulent Heat Transfer”, **Proceedings of the 5th ASME/JSME Joint Thermal Engineering Conference**, pp. 1 – 17, San Diego, USA.

Kawahara, M.; Hirano, H., 1983. “A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme”, **International Journal For Numerical Methods in Fluids**, vol. 3, pp. 137-163.

Kawamura, F.; Seki, Y.; Iwamoto, K.; Kawamura, H., 2007. “DNS of heat transfer in turbulent and transitional channel flow obstructed by rectangular prisms”, **International Journal of Heat and Fluid Flow**, doi: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.07.009

Lange, C.F., 1992. “**Simulação de escoamentos incompressíveis não-isotérmicos pelo método de elementos finitos com função de penalidade**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.

Leonard, A., 1974. “Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Tubulent Fluid Flows”, **Advances in Geophysics**, vol. 18A, pp. 237-248.

Lesieur, M., Comte, P. ; Métais, O., 1995. “Numerical Simulations of Coherent Vortices in Turbulence”, **Applied Mechanics Reviews**, vol. 48(3), pp. 121-149.

Lilly, D.K., 1992. "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", **Physics of Fluids**, A4 (3), 633-635.

Ma, L.D., Li, Z.Y., Tao, W.Q., 2007. "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow and Heat Transfer in a Square Duct with Natural Convection", **Heat and Mass Transfer**, Vol. 44, pp. 229-250

Maliska, R.C., 1995. "**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**", Editora LTC.

Mattos, A., Pinho, F.A.A., Silveira-Neto, A., 1999. "Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow Over a Two-Dimensional Cavity With Temperature Fluctuations", **International of Heat and Mass Transfer**, Vol. 42, pp. 49-59.

Möller, S.V. e Silvestrini, J.H., 2004. "**Turbulência**", Volume 4, Editores: Möller, S.V. e Silvestrini, J.H., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Moran, M.J. e Shapiro, H.N., 2002. "**Princípios da Termodinâmica para a Engenharia**", Editora LTC

Nallasamy, M. e Prasad, K.K., 1977. "On cavity flow at high Reynolds numbers", **Journal of Fluid Mechanics**, v. 79 (2), pp. 391-414.

Nieckele, A.O., Sampaio, L.E.B, 2007. "An Alternative Subgrid for Large-Eddy Simulations of a Homogeneous Turbulence", **19<sup>th</sup> Congress of Mechanical Engineering**, Brasília, Brazil.

Oliveira Jr., J.A.A., 2006. "**Desenvolvimento de um Sistema de Dinâmica dos Fluidos Computacional Empregando o Método de Elementos Finitos e Técnicas de Alto Desempenho**", Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Oliveira, M., 2005. “**Estudo da Convecção Forçada, Natural e Mista em escoamentos Laminares e Turbulentos Utilizando o Método de Volumes Finitos**”, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.

Ortega, M.A., Azevedo, J.L.F., 1995. “Large Eddy Simulation of na Open Flow Along a Backward-Facing Step”, **Fourth Pan American Congresso of App. Mech. – PACAM IV**, Buenos Aires, Argentina.

Oztop, H.F., Dagtekin, I., 2004. “Mixed Convection in Two-Sided Lid-Driven Differentially Heated Square Cavity”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 47, pp. 1761-1769.

Patankar, S.V., 1980. “**Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**”, McGraw-Hill, New York, USA.

Peng, S.H, Davidson, L., 2001. “Large eddy simulation for turbulent buoyant flow in a confined cavity”, **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Vol. 22, pp. 323-331.

Petry, A.P., 2002. “**Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Petry, A.P., Awruch, A.M., 1997. “Simulação de Escoamentos Turbulentos pelo Método de Elementos Finitos Através da Simulação de Grandes Vórtices”, **ENIEF 97**, Anais, San Carlos de Bariloche, Argentina.

Piomelli, U., Cabot, W.H., Moin, P. ; Lee, S., 1991. “Subgrid-scale Backscatter in Turbulent and Transitional flows”, **Physics of Fluids A**, vol. 3(7), pp. 1766-1771.

Pitanga, M., 2004. “**Construindo Supercomputadores com Linux**”, Editora Brasport, Rio de Janeiro, Brasil.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. “**The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**”, CRC, Boca Raton, Florida, USA.

Rogallo, R.S., Moin, P., 1984. “Numerical Simulation of Turbulent Flows”, **Ann. Rev. Fluid Mechanics**, vol. 16, pp. 99-137.

Rossa, A.L., 2000. “**Um Esquema Semi-Implícito para a Simulação Numérica de escoamentos Incompressíveis e Não-Isotérmicos pelo Método de Elementos Finitos Usando a Técnica de Taylor-Galerkin**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Schlichting, H., 1968. “**Boundary-layer Theory**”, McGraw-Hill, New York.

Shi, X., Khodadadi, J.M., 2005. “Periodic State of Fluid and Heat Transfer in a Lid-Driven Cavity due to an Oscillating Thin Fin”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 5323 – 5337.

Siegel, R., Howell, J., 2002. “**Thermal Radiation Heat Transfer**”, Taylor & Francis, New York.

Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M.; Su, J. 2002. “**Turbulência**”, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M.; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Silveira Neto, A., 2002. “**Turbulência**”, Volume I, Editores: Silva Freire, A.P.; Menut, P.P.M.; Su, J., Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Silveira Neto, A., Grand, D., Métais, O. e Lesieur, M., 1993. “A Numerical Investigation of the Coherent Vortices in Turbulence Behind a Backward-Facing Step”, **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 256, pp. 1-25.

Smagorinsky, J., 1963. “General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment”, **Monthly Weather Reviews**, v. 91, pp. 99-164.

Tennekes, H.; Lumley, J.L., 1972. “**A First Course in Turbulence**”, MIT Press.

Vázquez, M.S.; Métais, O., 2002. “Large Eddy Simulation of the Turbulent Flow through a Heated Square Duct”, **Journal of Fluid Mechanics**, Vol. 453, pp. 201-238.

Wang, L., Dong, Y., Lu, X., 2005. “An Investigation of Turbulent Open Channel Flow With Heat Transfer by Large Eddy Simulation”, **Computers & Fluids**, Vol. 34, pp. 23-47.

Wilcox, D.C., 2002. “**Turbulence Modeling for CFD**”, DCW Industries, La Canada, USA

Yoon, K.T., Moon, S.Y., Garcia, S.A., Heard, G.W., Chung, T.J., 1998. “Flowfield-Dependent Mixed Explicit-Implicit (FDMEI) Methods for High and Low Speed and Compressible and Incompressible Flows”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 151, pp. 75-104.

Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., 2000. “**The Finite Element Method - Volume 3: Fluid Dynamics**”, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Zinani, F.S.F., 2006. “**Desenvolvimento e Implementação Computacional de Formulações Galerkin Mínimos-Quadrados para Escoamentos Não Newtonianos Sensíveis à Cinemática**”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.