

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação de Transporte
Multigrupo de Nêutrons em Reatores
Nucleares com Fontes Pulsadas**

por

Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Tullio Menna B. de Vilhena
Orientador

Prof. Dr. Piero Ravetto
Coorientador

Porto Alegre, Junho de 2015.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Lombaldo Fernandes, Julio Cesar

Solução da Equação de Transporte Multigrupo de Nêutrons em Reatores Nucleares com Fontes Pulsadas / Julio Cesar Lombaldo Fernandes.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2015.

102 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2015.

Orientador: Menna B. de Vilhena, Marco Tullio; Coorientador: Ravetto, Piero

Tese: Matemática Aplicada

Fenômenos de transporte, Equação de transporte, Transformadas Integrais, Polinômios de Legendre

Solução da Equação de Transporte Multigrupo de Nêutrons em Reatores Nucleares com Fontes Pulsadas

por

Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte e Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna B. de Vilhena

Coorientador: Prof. Dr. Piero Ravetto

Banca examinadora:

Dr. Antonio Carlos Marques Alvim
COPPE - UFRJ

Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann
ProMec - UFRGS

Dr. Fabio Souto de Azevedo
PPGMAp - UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
28/05/2015.

Prof^a Dr Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Equação do Transporte: Abordagem Geral	3
1.2 Representação Geral do Problema	7
2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA EM REATORES NUCLEARES COM FONTES PULSADAS	12
2.1 Introdução	12
2.2 Caso Isotrópico	13
2.3 Modelos de Aproximação para $\Gamma(B_n, s)$	23
2.4 Caso Anisotrópico	32
3 TEORIA GERAL DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE MULTI- GRUPO COM FONTES PULSADAS	37
3.1 Introdução	37
3.2 Formulação do Problema	37
3.3 Caso Isotrópico	38
3.4 Análise do Problema com $G = 2$	42

3.5	Análise do Problema com $G > 2$	59
3.6	Modelos de aproximação de $\Gamma_{gg'}(B_n, s)$ para teoria Multi-grupo	67
3.7	Caso Anisotrópico	74
3.8	Análise Geral do Erro no Caso Isotrópico	77
4	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	90
5	APÊNDICE	92
5.1	Validação da Equação do Transporte Multi-grupo	92
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma solução analítica para equações de transporte multigrupo de nêutrons unidimensional em reatores nucleares com fontes pulsadas, como por exemplo, reatores ADS (Accelerate Driven Systems). Este trabalho foi desenvolvido em geometria cartesiana para casos de espalhamento isotrópico e anisotrópico utilizando técnicas de transformações integrais e analisando o espaço transformado via aproximações por frequências B_n em uma placa homogênea. A solução final do problema consiste na decomposição do fluxo usando as soluções de casos monoenergéticos como base, formando assim uma solução hierárquica para casos multi-grupos através de soluções de ordem menores e de menos complexidade. A formulação do problema de anisotropia consiste em aproximar o núcleo do termo integral da equação do transporte via polinômios de Legendre. Foram obtidas soluções via inversão numérica da transformada de Laplace no tempo para o caso monoenergético e obtida uma solução analítica para o caso multigrupo dependente da solução monoenergética.

ABSTRACT

In this work we present an analytical solution for transport equations in one-dimensional neutron in nuclear reactors using pulsed sources, for example, in ADS reactors (Accelerate or Driven Systems). This work was developed in cartesian geometry for cases of isotropic and anisotropic scattering, using integral transformation techniques and analyzing the transformed space via approximated frequencies by B_n in a homogeneous slab. The final solution of the proposed problem consists in a flux decomposition using the solutions of the one-group case as basis, forming this way a hierarchical solution for the multi-group cases through lower order solutions and with less complexity. The problem formulation for anisotropy is made by approximating the kernel of the integral term of the transport equation via Legendre polynomials. Solutions were obtained via numerical inversion of the Laplace transform in time in the one-group case and we obtained an analytical solution for the multi-group case that depends on the one-group solution.

AGRADECIMENTOS

À minha Família.

Aos meus orientadores, Marco Tullio Vilhena e Piero Ravetto.

À matemática, nada mais nada menos, do que a honra do espírito humano.

1 INTRODUÇÃO

Reatores nucleares com fontes pulsadas são um caso comum no estudo de reatores do tipo ADS ("Accelerator-Driven Systems") que é um novo tipo de reator de potência, mesmo quando permanece em estado sub-crítico ao longo de sua vida. Todos os reatores que operam, em todo o mundo, são reatores críticos, o que significa que o número de nêutrons produzido por fissão é exatamente equilibrado pelo número perdido por fugas e absorção por vários materiais no reator. Esse equilíbrio é responsável pela manutenção da potência de um reator a qualquer nível desejado. Reatores sub-críticos produzem menos nêutrons por fissão do que os que são perdidos pela absorção e vazamento, e requerem um fornecimento externo de nêutrons para manter uma potência constante. Esta fonte de nêutrons externo vem do interação de um feixe de prótons de alta energia (10^2 Mev) com um núcleo de átomo pesado. O nível de potência em um reator do tipo ADS é maior para fortes fontes externas e para reatores próximos do estado crítico.

Esses reatores foram concebidos pelo físico ganhador do Nobel, Carlo Rubbia (Relatório CERN / AT 95-53 [1]) e sua equipe do CERN, entre outros, para geração de energia, mas chamou a atenção do mundo para um papel igualmente importante, a queima de resíduos nucleares. É sabido que os reatores nucleares geram rejeitos radioativos que mantém a sua rádio toxicidade por milhões de anos e a eliminação desses resíduos tem sido uma grande fonte de preocupação pública. Esse novo tipo de reator foi projetado para transmutar com segurança os dejetos radioativos em elementos estáveis, ou naqueles cuja radioatividade é relativamente curta, enquanto produz energia.

Em reatores do tipo ADS é possível aumentar queima, ou seja, extrair mais energia a partir de uma dada massa de combustível. Este efeito é bastante grande para o combustível a base de tório. Sendo um novo tipo de reator, os sis-

temas ADS requerem o desenvolvimento de várias tecnologias relacionadas com os aceleradores de alta potência, a remoção do intenso calor gerado pela interação de alta potência do feixe de prótons com o alvo, e materiais associados ao desenvolvimento.

Simulações de computador desempenham um papel muito importante na determinação do desempenho de reatores com fontes pulsadas. Os estudos são orientados a desenvolverem códigos de simulações precisos para compilar os dados nucleares necessários para este fim, realizando testes experimentais e numéricos sobre a adequação das mesmas e, finalmente, utilizando estas simulações para avaliar o desempenho deste tipo de reator. A medição do grau de sub-criticalidade é um experimento muito importante, monitorar estes parâmetros para reatores ADS será uma requisito importante de segurança. Isto pode ser feito por meio dos pulsos do acelerador ou por estudando pequenas flutuações na potência do reator, chamadas de "ruídos". Uma nova teoria dos ruídos em reatores ADS está sendo desenvolvida e vem ganhando aceitação internacional. O estudo da solução da equação do transporte utilizando fontes pulsadas é um primeiro passo nesse sentido.

A apresentação matemática das equações governantes para problemas relacionados a reatores nucleares com fontes pulsadas é abordada de maneira diversificada, desde trabalhos mais básicos e ilustrativos como, por exemplo, Nifenecker et al [2] cujo trabalho ilustra conceitos básicos em reatores ADS, até trabalhos como o de Dulla et al [3] que usa análise de espaço assintótico definido por frequências e utilizando uma fonte externa com pulsos de neutrons.

A ideia inicial é solucionar esse tipo de problema representando a solução analítica para casos multi-grupos de energia usando a representação da solução feita por Dulla et al [3] para o problema monoenergético. Desta maneira, formaremos uma solução hierárquica para essa tipo de problema, onde poderemos representar a solução por uma ordem anterior, isto é, uma combinação de soluções da forma já encontrada para o caso monoenergético. A formação dessa representação analítica

hierárquica consiste em uma decomposição da suposta solução do fluxo de nêutrons para o caso multi-grupo de energia expressando tal fluxo como soluções de ordem anteriores até, de maneira que teremos uma recursão até a solução monoenergética.

1.1 Equação do Transporte: Abordagem Geral

A equação do transporte integro-diferencial fornece uma descrição quantitativa da distribuição espacial, direcional, energética e temporal de partículas em meios materiais. Introduzida no fim do século XIX por Ludwig Boltzmann, a equação do transporte foi inicialmente a teoria de cinética dos gases, alguns anos mais tarde foi utilizada na Astrofísica em uma versão linear. No começo do século XX surge a aproximação P_N , para aproximar a dependência angular no núcleo do termo integral, e um pouco mais tarde o método de ordenadas discretas, que consiste em aproximarmos o termo integral via quadratura para soluções de transporte de nêutrons. O método de Case desenvolvido com mais rigor matemático nos anos 60 marcou os estudos de teoria de transporte por ser uma solução analítica, porém em casos extremamente específicos. A dedução da equação do transporte integro-diferencial pode ser feita a partir de um balanço de partículas realizados no espaço de fase do problema. A interação de nêutrons pode ocorrer com os núcleos dos elementos que compõe o meio material de várias maneiras, entre elas absorção, espalhamento e fissão. A quantificação destes processos utiliza o conceito de *seção de choque macroscópica* que é a probabilidade de interação de nêutron por unidade de comprimento na sua trajetória e o inverso da seção de choque macroscópica é o chamado *livre caminho médio* (mfp). As seções de choque macroscópicas são representadas por σ e dependem da energia, sendo que para casos de meio heterogêneos também dependem da posição. Logo, temos $\sigma_a(r, E)$ como sendo a seção de choque macroscópica de absorção e $\sigma_s(r, E)$ a seção de choque macroscópica de espalhamento para nêutrons com energia E e posição r . Estas seções de choque são decompostas como

$$\begin{aligned}\sigma_a(r, E) &= \sigma_\gamma(r, E) + \sigma_f(r, E) \\ \sigma_s(r, E) &= \sigma_n(r, E) + \sigma_{n'}(r, E)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma &= \text{Seção de choque de captura radioativa} \\ \sigma_f &= \text{Seção de choque de fissão} \\ \sigma_n &= \text{Seção de choque de espalhamento elástico} \\ \sigma_{n'} &= \text{Seção de choque de espalhamento inelástico}\end{aligned}$$

e definimos a seção de choque total como

$$\sigma(r, E) = \sigma_a(r, E) + \sigma_s(r, E) \quad (1.1)$$

Definiremos também a seção de choque diferencial, que fornece a distribuição em energia e direção dos nêutrons emitidos, por

$$\sigma_x(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) = \sigma_x(r, E') f_x(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) \quad (1.2)$$

onde $f_x(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) d\Omega dE$ é a probabilidade de que um nêutron com direção Ω' e energia E' ao sofrer uma reação com um núcleo, cause a emissão de um ou mais nêutrons no intervalo de energias dE em torno de E . Assim,

$$\int_E \int_\Omega f_x(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) d\Omega dE = 1 \quad (1.3)$$

A dedução da equação do transporte de nêutrons pode ser efetuada a partir de um balanço neutrônico no espaço de fase. Começamos definindo

$$N(r, \Omega, E, t)dVd\Omega dE \quad (1.4)$$

como sendo o número de nêutrons presentes no instante t em um volume dV na posição r dentro de todas direções $d\Omega$ em torno de Ω e que possuem energias no intervalo elementar dE em torno de E . Assim

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{de Nêutrons em } dV \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de Produção} \\ \text{de Nêutrons em } dV \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de Perda} \\ \text{de Nêutrons em } dV \end{array} \right) \quad (1.5)$$

A taxa de Produção é representada por

$$\left[\int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(r, E') f(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) v' N(r, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + S(r, \Omega, E, t) \right] dV d\Omega dE \quad (1.6)$$

A taxa de perda representada por

$$[\sigma(r, E)vN(r, \Omega, E, t) + v\Omega \cdot \nabla N(r, \Omega, E, t)] dV d\Omega dE \quad (1.7)$$

e a taxa de variação por

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} N(r, \Omega, E, t) \right] dV d\Omega dE \quad (1.8)$$

e considerando que $\varphi(r, \Omega, E, t) = vN(r, \Omega, E, t)$ é o fluxo angular de nêutrons, resultando no balanço neutrônico

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r, \Omega, E, t) + \Omega \cdot \nabla \varphi(r, \Omega, E, t) + \sigma(r, E) \varphi(r, \Omega, E, t) = \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(r, E') f(r, \Omega' \rightarrow \Omega, E' \rightarrow E) \varphi(r, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + S(r, \Omega, E, t) \quad (1.9)$$

esta é a equação integro-diferencial de transporte de nêutrons linear na sua forma mais geral.

A aproximação multi-grupo de teoria de transporte é comumente empregada discretizando os grupos de energia e tornando a equação anterior em um sistema de G equações da forma

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_g(r, E, t) + \Omega \cdot \nabla \varphi_g(r, \Omega, t) + \sigma_g(r) \varphi_g(r, \Omega, t) = \sum_{g'=1}^G \int_{\Omega'} \sigma_{g'g'}(r) c_{gg'}(r, \Omega' \rightarrow \Omega, t) \varphi_{g'}(r, \Omega', t) d\Omega' dE' + S_g(r, \Omega, t) \quad (1.10)$$

com $g \in \Lambda_G = \{1, 2, \dots, G\}$

onde

$$\varphi_g(r, \Omega) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(r, \Omega, E) dE, \quad (1.11)$$

$$\sigma_g(r) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(r, E) \varphi(r, \Omega, E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \varphi(r, \Omega, E) dE}, \quad (1.12)$$

$$c_{gg'}(r, \Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(r, E') \varphi(r, \Omega', E') \int_{E_g}^{E_{g-1}} f(r, \Omega' \rightarrow \Omega) dE dE'}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(r, E') \varphi(r, \Omega', E') dE'} \quad (1.13)$$

e também

$$S_g(r, \Omega) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} S(r, \Omega, E) dE \quad (1.14)$$

nesta representação mais geral de teoria multi-grupo, é importante salientar que os valores de $\sigma_g(r)$ e $c_{gg'}(r, \Omega' \rightarrow \Omega)$ dependem inicialmente da posição e são definidos em função do fluxo angular $\varphi(r, \Omega, E)$ que é uma quantidade não conhecida. Estes valores supracitados são necessários para resolver a equação (1.10) com $g \in \Lambda_G = \{1, 2, \dots, G\}$. Em geral, são usadas diversas aproximações para este fluxo angular, uma delas, por exemplo, é obter o fluxo angular a partir do método B_N .

1.2 Representação Geral do Problema

No passado, várias abordagens foram propostas para obtenção de soluções precisas para problemas de transporte de nêutrons dependente do tempo, por exemplo, Ganapol [4]. Uma das mais entusiásticas é a teoria assintótica que é adotada em Weinberg e Wigner [5]. Esta abordagem para a equação de transporte produz soluções exatas para o problema considerado e fornece informações úteis sobre os fenômenos de transporte. O modelo é deduzido ao estudarmos a equação do transporte em um domínio de frequência, após uma Transformação de Fourier no espaço. A superposição espacial de ondas, no valor de uma série envolvendo as autofunções de Helmholtz nos limites de fuga do sistema físico, constitui um conjunto completo, que pode ser usado para a representação da solução do problema de transporte dependente do tempo.

A apresentação seguinte não considera a contribuição de nêutrons atrasados. Quando se analisa a curto prazo transientes em experimentos pulsados, podemos considerar o papel das emissões de nêutrons atrasados irrelevante. Nesta seção faremos uma apresentação geral do problema de transporte de nêutrons em reatores

com fontes pulsadas, apresentando o contexto matemático do fenômeno físico em questão.

Inicialmente, considerando um espaço de Banach X como o conjunto de todas funções $\varphi = \varphi(x, \mu, t)$ integráveis sobre o retângulo $|x| \leq h/2$, $\cos(\theta) = |\mu| \leq 1$, com $0 < v_m \leq v \leq v_M < \infty$ e com norma em $L_1(X)$ dada por

$$\|\varphi\| = \int_{v_m}^{v_M} \int_{-1}^1 \int_{-h/2}^{h/2} |\varphi| d\mu dv dx \quad (1.15)$$

Pela derivação de equação de transporte multigrupo homogênea, temos como definição que, sua forma mais geral é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = (T - B + JH)\varphi \quad (1.16)$$

para $t > 0$, $\varphi \in D(T) \subset X$ com condição inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\varphi(t) - \varphi_0\| = 0, \quad \varphi_0 \in D(T) \quad (1.17)$$

com operadores T, B, H e J definidos por

$$Tf = -\mu v \frac{\partial}{\partial x} f \quad (1.18)$$

$$Bf = v\sigma(v)f \quad (1.19)$$

$$Jf = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x, \mu', v) d\mu' \quad (1.20)$$

$$Hf = \int_{v_m}^{v_M} H(v, v') f(x, \mu, v') dv' \quad (1.21)$$

Aqui $H(v, v')$ é o núcleo de espalhamento, $\sigma(v)$ é a seção de choque total. Por definição $D(T)$ é o conjunto de todas $f \in X$ tais que:

$$\begin{aligned}
Tf &\in X \\
f(-h/2, \mu, v) &= 0 \text{ se } \mu \in (0, 1] \\
f(h/2, \mu, v) &= 0 \text{ se } \mu \in [-1, 0)
\end{aligned}$$

com $D(T)$ denso em X . Esta equação tem aproximação validada, como mostra Belleni-Morante et al [6], e verificada para o caso a ser resolvido como mostrado no Apêndice, considerando um caso com fonte S_g para o grupo g , será dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_g + v_g \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi_g + v_g \sigma_g \varphi_g = \frac{1}{2} v_g \sigma_g \sum_{g=1}^G \int_{-1}^1 c_{gg'}(x, \mu') \varphi_g(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} S_g(x, t) \quad (1.22)$$

Aqui, temos φ_g como sendo o fluxo de nêutrons no grupo de energia g , v_g a velocidade do nêutron para o grupo de energia g , μ representa a variável direcional, dada por $\mu = \cos \theta$ e portanto $|\mu| \leq 1$ e $c_{gg'}$ o nucleo de espalhamento do grupo g para o g' . Usaremos a notação $c_{gg'}$ ao invés de $H(v, v')$ tendo em vista a discretização das velocidades. Para este caso, temos as condições de contorno

$$\begin{aligned}
\varphi_g(h/2, \mu, t) &= 0 \text{ para } \mu > 0 \\
\varphi_g(-h/2, \mu, t) &= 0 \text{ para } \mu < 0
\end{aligned}$$

e condição inicial

$$\varphi_g(x, \mu, 0) = \varphi_g^0(x, \mu)$$

Podemos também representar o problema matricialmente para a equação do transporte multi-grupo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = (\mathbf{T} + \mathbf{B} + \mathbf{J})\Phi + \frac{1}{2}\mathbf{S} \quad (1.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{T}f &= -\mu\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial x}f \\ \mathbf{B}f &= -V\Sigma(x,t)f \\ \mathbf{J}f &= \frac{1}{2}V\int_{-1}^1\mathbf{C}(x,\mu')fd\mu' \end{aligned} \quad (1.24)$$

e onde $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_G]^T$, $\mathbf{S} = [S_1, \dots, S_G]^T$. Neste caso, temos \mathbf{V} e $\Sigma(x, t)$ como sendo matrizes diagonais com elementos v_g e $\sigma_g(x, t)$, respectivamente. $\mathbf{C}(x, \mu)$ é uma matriz quadrada da mesma ordem do numero de grupos de energia com elementos $c_{gg'}(x, t)$. Assumimos $\sigma_g(x, t)$ e $c_{gg'}(x, t)$ funções contínuas e não-negativas. De maneira que, podemos escrever de forma mais geral as condições de contorno e inicial, como sendo

$$\begin{aligned} \Phi(\pm h/2, \mu, t) &= \mathbf{0}, \text{ para } \mu \lesseqgtr 0 \\ \Phi(x, \mu, 0) &= \Phi^0(x\mu), \text{ para } (x\mu) \in [-h/2, h/2] \times [-1, 1] \end{aligned}$$

Cabe salientar que para o caso de fontes pulsadas, consideraremos $S_g(x, t)$ como

$$S_g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{g,n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x) \cdot s_n(t) \quad (1.25)$$

ou seja, a fonte projetada no espaço das autofunções de Helmholtz de ordem n . Aqui, teremos que $s_n(x)$ é solução de

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}s_n(x) + B_n^2s_n(x) &= 0 \\ s_n(-h/2) = s_n(h/2) &= 0\end{aligned}$$

o que resulta em

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos(B_n x), \quad \text{com } B_n = \frac{(2n-1)\pi}{h} \quad (1.26)$$

e portanto, podemos escrever

$$S(x, t) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(B_n x) s_n(t) \quad (1.27)$$

O conjunto de equações (1.22) juntamente com as fontes (1.27) representam o problema geral a ser resolvido.

2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS MONOENERGÉTICA EM REATORES NUCLEARES COM FONTES PULSADAS

2.1 Introdução

Primeiramente, no caso de problemas monoenergéticos, vamos considerar a divisão entre os casos: isotrópico e anisotrópico. Consideraremos a equação de transporte em um meio homogêneo nos espaços $T = [0, \infty)$ e $D = \{(x, \mu); (x, \mu) \in (\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}) \times (-1, 1)\}$. Considerando também φ sendo o fluxo angular dependendo de (x, μ, t) , isto é, $\varphi(x, \mu, t)$. Como vimos, a aproximação multigrupo é validada e descrita por

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_g + v_g \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi_g + v_g \sigma_g \varphi_g = \frac{1}{2} v_g \sigma_g \sum_{g=1}^G \int_{-1}^1 c_{gg'}(x, \mu') \varphi_g(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} S_g(x, t) \quad (2.1)$$

Para o caso monoenergético, teremos uma forma ainda mais simplificada então que

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \sigma \varphi = \frac{1}{2} \sigma \int_{-1}^1 c(x, \mu') \varphi(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} S(x, t) \quad (2.2)$$

onde, evidentemente não temos a dependência em g .

2.2 Caso Isotrópico

O caso isotrópico, isto é, desconsiderando a dependência de x e μ em $c(x, \mu)$, tornamos o termo integral da equação do transporte como sendo apenas a integração do fluxo em todas direções com σ constante, isto é, temos agora

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \sigma \varphi = \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} S(x, t) \quad (2.3)$$

é importante salientar que para este tipo de problema, vamos considerar as condições iniciais, tanto para fluxo quanto para fonte, como sendo nulas.

O método a ser empregado na obtenção da solução, consiste em usarmos transformações integrais nas variáveis espacial e temporal. Denotando uma função $f \in D \times T$ e sua transformada de Laplace por \bar{f} e sua transformada de Fourier no espaço por \tilde{f} , definidas por

$$\bar{f} = \mathcal{L}\{f(x, \mu, t); t \rightarrow s\} = \int_0^\infty f(x, \mu, t) e^{-st} ds \quad (2.4)$$

$$\tilde{f} = \mathcal{F}\{f(x, \mu, t); x \rightarrow B_n\} = \int_{-\infty}^\infty f(x, \mu, t) e^{iB_n x} dx \quad (2.5)$$

De maneira que \tilde{f} indica a função transformada nas variáveis espacial e temporal, isto é, \tilde{f} depende de μ, s, B_n . Aqui, B_n são as frequências relacionadas ao "Buckling" geométrico, $B_n = \frac{(2n-1)\pi}{h}$, introduzido para parametrizar o termo fonte. Então, ao aplicarmos a transformada de Laplace em φ na equação (2.3), teremos que

$$\begin{aligned} \frac{s}{v} \bar{\varphi}(x, \mu, s) + \mu \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x, \mu, s) + \sigma \bar{\varphi}(x, \mu, s) \\ = \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \bar{\varphi}(x, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} \bar{S}(x, s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Logo após, ao aplicarmos a transformada de Fourier no espaço, temos então que

$$\begin{aligned} & \frac{s}{v} \tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) - iB_n \mu \tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) + \sigma \tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) \\ &= \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} \tilde{S}(B_n, s) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ou ainda que

$$\tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) \left[\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu \right] = \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} \tilde{S}(B_n, s) \quad (2.8)$$

Dividindo ambos lados por $\left[\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu \right]$, chegamos em

$$\tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) = \frac{1}{\left[\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu \right]} \cdot \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{\left[\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu \right]} \cdot \frac{1}{2} \tilde{S}(B_n, s) \quad (2.9)$$

Vamos definir $A_{lk}(B, s)$ como sendo

$$A_{lk}(B, s) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB\mu} d\mu \quad (2.10)$$

onde $P_l(\mu)$ denota o polinômio de Legendre de ordem l . Assim, ao integrarmos a equação (2.9) em μ de -1 à 1 , teremos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu, s) d\mu &= \frac{c\sigma}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu} d\mu \cdot \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu', s) d\mu' \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB_n \mu} d\mu \cdot \tilde{S}(B_n, s) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Denotando agora, $\tilde{\Phi}$ como o fluxo total transformado, que é representado por

$$\tilde{\Phi}(B_n, s) = \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B_n, \mu', s) d\mu' \quad (2.12)$$

ao reescrever a equação (2.11), utilizando o conceito de fluxo total e a definição de A_{lk} , temos que

$$\tilde{\Phi}(B_n, s) = c\sigma A_{00}(B_n, s) \cdot \tilde{\Phi}(B_n, s) + A_{00}(B_n, s) \tilde{S}(B_n, s) \quad (2.13)$$

ou ainda que

$$\tilde{\Phi}(B_n, s) = \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \tilde{S}(B_n, s) \quad (2.14)$$

Aqui, aparecem apenas os índices $l = k = 0$ (caso isotrópico), que pela definição de (2.10) é descrito como

$$A_{00}(B_n, s) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sigma + \frac{s}{v}\right) - iB\mu} d\mu' \quad (2.15)$$

Assumindo que podemos representar a fonte de nêutrons pulsados, como $S_n(x, t) = s_n(x)s_n(t)$ projetada no espaço das autofunções de Helmholtz de ordem n , ou seja, $S_n(x, t) = s_n(t)\sqrt{2/\hbar} \cos B_n x$ de maneira que $S(B_n, s)$ fica

$$\tilde{S}(B, s) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}_n(s) \left\{ \frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right\} \quad (2.16)$$

Utilizando as propriedades da inversão de Fourier para encontrar o fluxo, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(x, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(B, s) e^{2\pi i B x} dB \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_{00}(B, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B, s)} \tilde{S}(B, s) \right] e^{2\pi i B x} dB \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_{00}(B, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B, s)} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}_n(s) \left\{ \frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right\} \right] e^{2\pi i B x} dB
\end{aligned}$$

Assumindo que

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{00}(B, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B, s)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}_n(s) \left\{ \frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right\} = \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \bar{s}_n(s) \left\{ \frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right\} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(x, s) &= \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \bar{s}_n(s) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right\} e^{2\pi i B x} dB \\
&= \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \bar{s}_n(s) \cos(B_n x) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Assim, tornamos o foco do problema a inversão dessa equação no que diz respeito a variável temporal, que deve ser cuidadosamente calculada, pois $A_{00}(B_n, s)$ é diferente para cada n . Vamos utilizar a integral de Mellin-Fourier para inversão de Laplace, isto é,

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\bar{\varphi}(x, s); s \rightarrow t\} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\varphi}(x, s) e^{st} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \bar{s}_n(s) \cos(B_n x) \right\} e^{st} ds \\
&= \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} e^{st} \bar{s}_n(s) ds \right\} \cos(B_n x) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Deve-se calcular a integral realizando o cálculo ao longo da curva

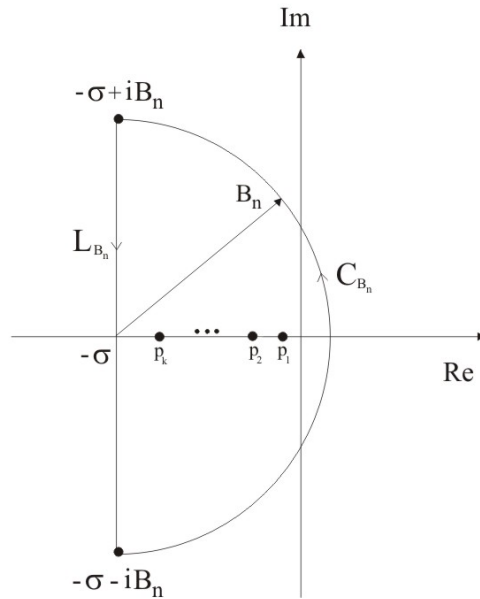


Figura 2.1: Semi-círculo no Plano complexo.

onde as singularidades estão dentro do semi-círculo e são todas reais e negativas, e onde

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} e^{s(t-t')} s_n(t') dt' \right] dt' \right\} \cos(B_n x) \quad (2.20)$$

Se aumentarmos o raio do semi-círculo em questão, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $B_n \rightarrow \infty$ e logo cobriríamos todas singularidades, desde que $|\sigma| > p_k, \forall k$. Supondo que podemos representar cada singularidade p_k como

$$p_k = -\sigma + R_k e^{i\theta} \quad \text{com} \quad \theta \leq \left| \frac{\pi}{2} \right| \quad (2.21)$$

como temos para este caso singularidades puramente reais, implicando que $\theta = 0 \forall k$.

Sabemos então que

$$\int_{L_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds + \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds = 2\pi i \sum_i \text{Res}_{p=p_i} [\Gamma(B_n, s)] \quad (2.22)$$

ou ainda que

$$\int_{L_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds = 2\pi i \sum_i \text{Res}_{p=p_i} [\Gamma(B_n, s)] - \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds \quad (2.23)$$

Agora, supondo que para todos pontos sobre C_{B_n} existe uma constante positiva M_{B_n} tal que $|\Gamma(B_n, s)| \leq M_{B_n}$ e na qual $M_{B_n} \rightarrow 0$ ao $B_n \rightarrow \infty$. Podemos representar parametricamente a integral ao longo de C_{B_n} usando que $s = -\sigma + Re^{i\theta}$ e teremos que a integral ao longo de C_{B_n} será

$$\begin{aligned} \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Gamma(B_n, -\sigma + Re^{i\theta}) e^{(-\sigma + Re^{i\theta})(t-t')} Rie^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Gamma(B_n, -\sigma + Re^{i\theta}) e^{\sigma(t-t')} e^{(Re^{i\theta})(t-t')} Rie^{i\theta} d\theta \\ &\leq e^{\sigma(t-t')} M_{B_n} R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou ainda que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{B_n}} e^{s(t-t')} \Gamma(B_n, s) ds \right| &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta}| d\theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{como } |e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta}| \leq |e^{Re^{i\theta}(t-t')}| |i| |e^{i\theta}| \leq |e^{Re^{i\theta}(t-t')}| \leq |e^{R \cos \theta(t-t')}|.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{B_n}} e^{s(t-t')} \Gamma(B_n, s) ds \right| &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{Re^{i\theta}(t-t')} i e^{i\theta}| d\theta \\ &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{R \cos \theta(t-t')} d\theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

Agora, realizando uma mudança de variável, isto é, fazendo $\phi = \theta - \pi/2$, temos que $\cos \theta = -\sin \phi$ e assim, podemos concluir que

$$\left| \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds \right| \leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \int_{-\pi}^0 e^{-R \sin \phi(t-t')} d\phi \quad (2.27)$$

Como em $[-\pi, 0]$ temos que $e^{-R(t-t') \sin \phi} \leq e^{-R(t-t') \phi}$, implica que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 e^{-R(t-t') \sin \phi} d\phi &\leq \int_{-\pi}^0 e^{-R(t-t') \phi} d\phi \\ &= \frac{e^{R(t-t')\pi} - 1}{R(t-t')} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Assim, por fim temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds \right| &\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \int_{-\pi}^0 e^{-R(t-t') \sin \phi} d\phi \\
&\leq e^{\sigma(t'-t)} M_{B_n} R \frac{e^{R(t-t')\pi} - 1}{R(t-t')} \\
&= \frac{e^{(-\sigma+R\pi)(t-t')}}{(t-t')} M_{B_n} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

mas por hipótese temos que $M_{B_n} \rightarrow 0$ ao $B_n \rightarrow \infty$, implicando que

$$\lim_{B_n \rightarrow \infty} \int_{C_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds = 0 \tag{2.30}$$

Assim, ao fazermos $B_n \rightarrow \infty$, teremos que

$$\begin{aligned}
\int_{L_{B_n}} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds &= 2\pi i \sum_i \text{Res}_{p=p_i} [\Gamma(B_n, s)] \\
\lim_{B_n \rightarrow \infty} \int_{-\sigma-iB_n}^{-\sigma+iB_n} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds &= 2\pi i \sum_i \text{Res}_{p=p_i} [\Gamma(B_n, s)] \\
\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} ds &= 2\pi i \sum_i \text{Res}_{p=p_i} [\Gamma(B_n, s)] \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Sendo assim, devemos calcular cuidadosamente as singularidades de $\Gamma(B_n, s)$ que dependem do termo integral $A_{00}(B_n, s)$. Portanto, vamos analisar este termo definindo para quais valores de n teremos estas singularidades. Considerando a definição de $A_{00}(B_n, s)$, temos que

$$\begin{aligned}
A_{00}(B, s) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\sigma + \frac{s}{v}\right) - iB\mu} d\mu' \\
&= \frac{1}{B} \arctan \left(\frac{B}{\sigma + \frac{s}{v}} \right) \tag{2.32}
\end{aligned}$$

e como

$$\arctan\left(\frac{B}{\sigma + \frac{s}{v}}\right) = \frac{1}{2i} \log \left[\frac{\sigma + \frac{s}{v} + iB}{\sigma + \frac{s}{v} - iB} \right] \quad (2.33)$$

Observamos facilmente, que pela definição, B_n é uma sequência crescente, de maneira que a extensão do corte no plano complexo aumenta proporcionalmente. A equação característica para determinação dos polos é $1 - c\sigma A_{00}(B_n, s) = 0$ e utilizando (2.32), temos que

$$1 - c \frac{\sigma}{B_n} \arctan\left(\frac{B_n}{\sigma + \frac{s}{v}}\right) = 0 \quad (2.34)$$

Fazendo $\tau_n = \frac{B_n}{\sigma}$ e $p = [1 + \frac{s}{v\sigma}]^{-1}$ temos que

$$\begin{aligned} 1 &= c \frac{\sigma}{B_n} \arctan\left(\frac{B_n}{\sigma + \frac{s}{v}}\right) \\ 1 &= c \frac{\sigma}{B_n} \arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{s}{v\sigma}} \frac{B_n}{\sigma}\right) \\ 1 &= \frac{c}{\tau_n} \arctan(p\tau_n) \\ \frac{\tau_n}{c} &= \arctan(p\tau_n) \end{aligned} \quad (2.35)$$

que representa agora, a equação característica para encontrar as singularidades de $\Gamma(B_n, s)$ e esta equação só as admite se $\frac{\tau_n}{c} \leq \frac{\pi}{2}$. Desta forma, ao utilizarmos a definição de τ_n , teremos ocorrência de singularidades se

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n}{c} &\leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{B_n}{c\sigma} &\leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{(2n-1)\pi}{h} \frac{1}{c\sigma} &\leq \frac{\pi}{2} \\ n &\leq \frac{hc\sigma + 2}{4} \end{aligned}$$

Assim, para todo $n \leq n_{lim}$, teremos singularidades no sistema, onde aqui definimos

$$n_{lim} := \left\lceil \frac{hc\sigma + 2}{4} \right\rceil \quad (2.36)$$

Ao definirmos a propagação de pulsos localizados, a solução geral expressa pela equação (2.37) para $\Phi(x, t)$ é exata para valores de t menores que o tempo que os nêutrons levam para alcançar a fronteira.

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} e^{s(t-t')} \right] s_n(t') dt' \right\} \cos(B_n x) \quad (2.37)$$

Podemos, por exemplo, reescrever a expressão geral para a solução como

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Gamma(B_n, s) e^{s(t-t')} \right] s_n(t') dt' \right\} \cos(B_n x) \quad (2.38)$$

onde

$$\Gamma(B_n, s) = \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \quad (2.39)$$

Assim, fica evidente que as singularidades referentes a (2.38) são as singularidades referentes a $\Gamma(B_n, s)$ e portanto ocorrem ao fazermos

$$1 - c\sigma A_{00}(B_n, s) = 0 \quad (2.40)$$

Porém, ocorre aqui que $A_{00}(B_n, s)$ é multivariada, isto é, muda para cada valor de n . Vamos trabalhar agora com uma aproximação adequada para $A_{00}(B_n, s)$ e conseqüentemente para $\Gamma(B_n, s)$.

2.3 Modelos de Aproximação para $\Gamma(B_n, s)$

A ideia principal desta seção é discutir a existência de uma aproximação consistente do ponto de vista físico e matemático para o núcleo $\Gamma(B_n, s)$, isto é, obter uma aproximação de fácil avaliação, porém consistente fisicamente. Como por definição, temos

$$\Gamma(B_n, s) = \frac{A_{00}(B_n, s)}{1 - c\sigma A_{00}(B_n, s)} \quad (2.41)$$

Vamos aproximar $A_{00}(B_n, s)$, fazendo

$$\begin{aligned} A_{00}(B_n, s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{(\sigma + sv^{-1}) - iB_n\mu} \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{w_m}{(\sigma + sv^{-1}) - iB_n\mu_m} \\ &= \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma + sv^{-1})w_m}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde w_m representam os pesos da quadratura Gausse-Legendre e μ_m são as direções discretizadas, $m \in \{1, 2, \dots, M\}$. Voltando a atenção para o cálculo das singularidades que ocorrem ao fazermos $1 - c\sigma A_{00}(B_n, s) = 0$, vamos utilizar (2.42) tendo então que

$$1 - c\sigma \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma + sv^{-1})w_m}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2} = 0 \quad (2.43)$$

Podemos avaliar cada caso dependendo do M escolhido. Por exemplo, em Dulla et al [3] foi usado $M = 4$, isto é, tendo que

$$\begin{aligned}
1 - c\sigma \sum_{m=1}^2 \frac{(\sigma + sv^{-1})w_m}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2} &= 0 \\
1 - c\sigma \left\{ \frac{(\sigma + sv^{-1})w_1}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_1)^2} + \frac{(\sigma + sv^{-1})w_2}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_2)^2} \right\} &= 0 \\
\frac{(\sigma + sv^{-1})w_1}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_1)^2} + \frac{(\sigma + sv^{-1})w_2}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (B_n\mu_2)^2} &= \frac{1}{c\sigma} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

com $w_1 = w_2 = 1$ e $\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c\sigma} &= \frac{(\sigma + sv^{-1})}{(\sigma + sv^{-1})^2 + \frac{B_n^2}{3}} + \frac{(\sigma + sv^{-1})}{(\sigma + sv^{-1})^2 + \frac{B_n^2}{3}} \\
\frac{1}{c\sigma} &= 2 \frac{(\sigma + sv^{-1})}{(\sigma + sv^{-1})^2 + \frac{B_n^2}{3}} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

substituindo em $\Gamma(B_n, s)$, teremos a seguinte equação do segundo grau como equação característica do problema

$$(\sigma + sv^{-1})^2 - c\sigma(\sigma + sv^{-1}) + \frac{B_n^2}{3} = 0 \quad (2.46)$$

Analisando esta equação detalhadamente, conclui-se que para obtenção de polos reais, teremos que ter

$$(c\sigma)^2 \geq \left(\frac{2B_n}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad (2.47)$$

ou ainda que

$$\begin{aligned}
c\sigma &\geq \frac{2B_n}{\sqrt{3}} \\
\frac{\sqrt{3}}{2}c\sigma &\geq B_n \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Logo, para que tenhamos este tipo de situação, a exigência é

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)\pi}{h} &\leq \sqrt{3}c\sigma \\ 2n-1 &\leq \sqrt{3}\frac{c\sigma h}{\pi} \\ n &\leq \frac{\sqrt{3}c\sigma h + \pi}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como vimos anteriormente que para simplesmente termos singularidades, teríamos a exigência de um valor limite dado por $n_{lim} = \lceil \frac{c\sigma h + 2}{4} \rceil$, então se

$$\frac{c\sigma h + 2}{4} \leq \frac{\sqrt{3}c\sigma h + \pi}{2\pi} \quad (2.50)$$

sempre teremos polos reais. Isto pode ser facilmente verificado, pois

$$\begin{aligned} \frac{c\sigma h + 2}{4} &\leq \frac{\sqrt{3}c\sigma h + \pi}{2\pi} \\ \frac{c\sigma h}{4} + \frac{1}{2} &\leq \frac{\sqrt{3}c\sigma h}{2\pi} + \frac{1}{2} \\ \frac{c\sigma h}{4} &\leq \frac{\sqrt{3}c\sigma h}{2\pi} \\ (c\sigma h) \left[\frac{\pi - 2\sqrt{3}}{4\pi} \right] &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Como $(c\sigma h) > 0$ implica que a inequação acima é sempre satisfeita, e temos somente singularidades reais para este caso específico ($M = 4$). Considerando está aproximação, temos por definição que

$$\Gamma(B_n, s) = \frac{1}{2} \frac{(\sigma + sv^{-1})}{(\sigma + sv^{-1})^2 - c\sigma(\sigma + sv^{-1}) + \frac{B_n^2}{3}} \quad (2.52)$$

onde as singularidades são obtidas ao analisarmos

$$(\sigma + sv^{-1})^2 - c\sigma(\sigma + sv^{-1}) + B_n^2/3 = 0 \quad (2.53)$$

Cabe salientar que, para esta aproximação em Dulla et al [3] foi assumida uma situação de velocidade inifita, isto é, foi suprimido o termo $(sv^{-1})^2$ do denominador de (2.52). Além do mais, no mesmo trabalho foi considerado $c \sim 1$ tornando o termo $(2 - c) \sim 1$ e nos levando a

$$\Gamma(B_n, s) = \frac{1}{sv^{-1} + (1 - c)\sigma + B_n^2/3} \quad (2.54)$$

Aqui foi considerado também que

$$(1 - c)\sigma = \sigma_a, \quad D = \frac{1}{3\sigma}, \quad L^2 = \frac{D}{\sigma_a} \quad (2.55)$$

que correspondem a aproximações referentes ao modelo difusivo. Levando em conta as ultimas equações e igualando o denominador de (2.54) à zero para obtermos as singularidades, temos que

$$s = -v\sigma_a(1 + L^2B_n^2) \quad (2.56)$$

Usamos a velocidade $v = 1$ e a seção de choque total $\sigma = 1$, pois queremos h medido em livres caminhos médios. Tendo como resultado a configuração de singularidades como mostra a Tabela 1 com $c = 0.9$.

Para uma melhor compreensão, exemplificamos a distribuição dos polos no plano complexo para os valores de $h = 20$ e $h = 50$ nos seguintes gráficos:

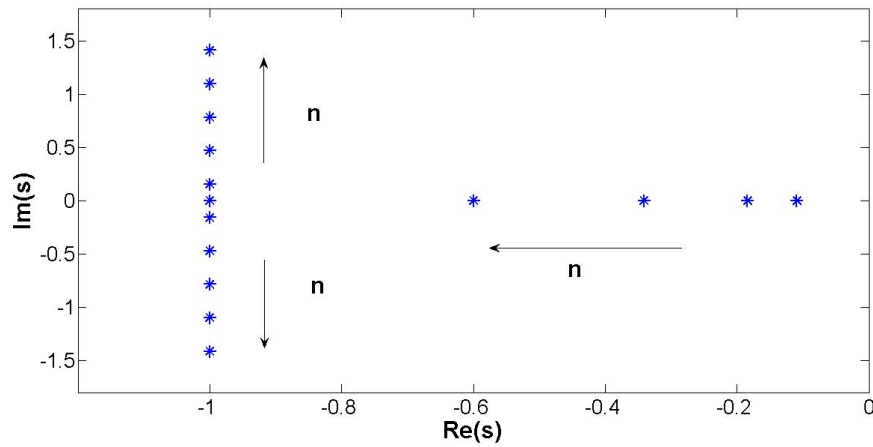


Figura 2.2: Distribuição dos polos com $h = 20$.

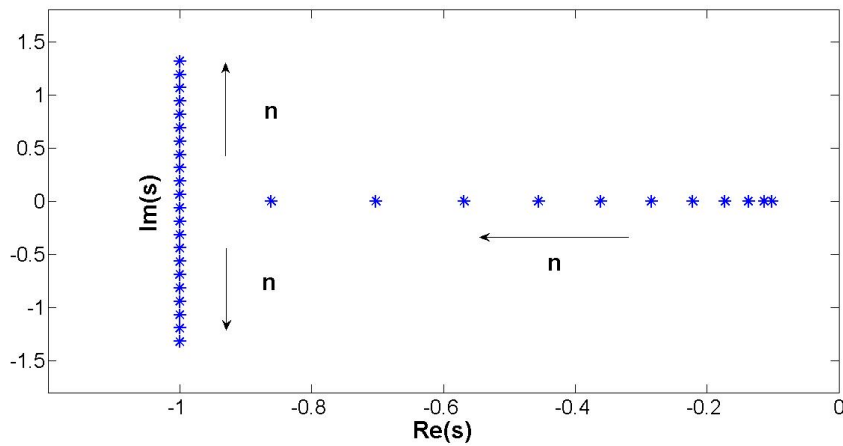


Figura 2.3: Distribuição dos polos com $h = 50$.

Porém, podemos também tentar usar uma ordem de aproximação razoavelmente melhor para $\Gamma(B_n, s)$, isto é, podemos tomar $M = 6$ por exemplo. Usando $\mu_{1,3} = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\mu_2 = 0$, $\omega_{1,3} = \frac{5}{9}$ e $\omega_2 = \frac{8}{9}$ tornamos desta maneira

$$A_{00}(B_n, s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\sigma + sv^{-1})(5/9)}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (3/5)B_n^2} + \frac{8/9}{(\sigma + sv^{-1})} + \frac{(\sigma + sv^{-1})(5/9)}{(\sigma + sv^{-1})^2 + (3/5)B_n^2} \right\} \quad (2.57)$$

$$\Gamma(B_n, s) = \frac{\left\{ \frac{25}{9} \frac{(\sigma + sv^{-1})}{5(\sigma + sv^{-1})^2 + 3B_n^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{(\sigma + sv^{-1})} \right\}}{1 - c\sigma \left\{ \frac{25}{9} \frac{(\sigma + sv^{-1})}{5(\sigma + sv^{-1})^2 + 3B_n^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{(\sigma + sv^{-1})} \right\}} \quad (2.58)$$

onde usando as mesmas hipóteses de Dulla et al [3], temos como singularidades

$$s = -\sigma v \left\{ \frac{45\sigma^2 + 27B_n^2 - 5c\sigma^2 + 12cB_n^2}{135\sigma^2 - 10c\sigma^2 + 27B_n^2} \right\} \quad (2.59)$$

e obtemos como resultados a seguinte tabela de singularidades, também com $c = 0.9$

Para uma melhor compreensão, exemplificamos a distribuição dos polos no plano complexo para os valores de $h = 20$ e $h = 50$ nos seguintes gráficos:

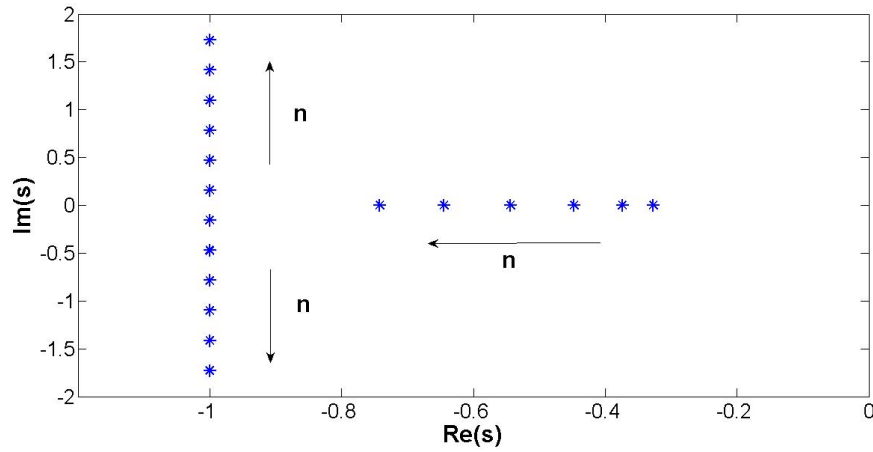


Figura 2.4: Distribuição dos polos com $h = 20$.

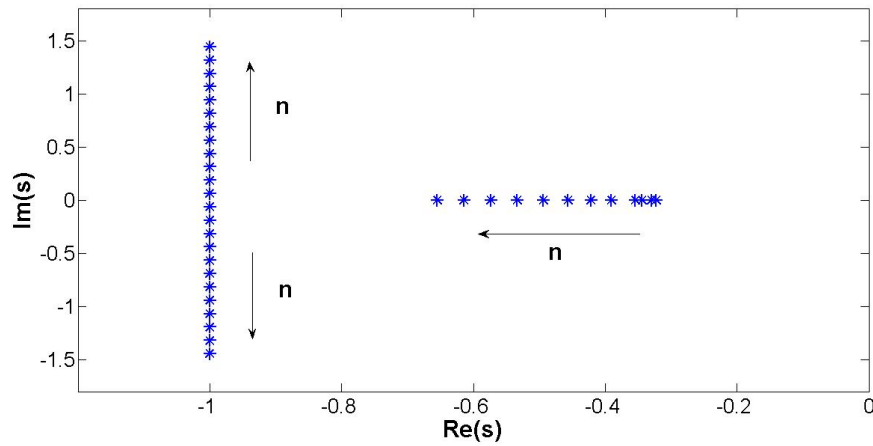


Figura 2.5: Distribuição dos polos com $h = 50$.

As figuras 2.2-2.5 mostram as distribuições dos polos no plano complexo, validando o fato já analisado de que os mesmos eram números reais e pertencentes ao intervalo $[-\sigma_g v_g, 0)$ para cada grupo g . Até o presente momento analisamos apenas o caso monoenergético, porém o padrão segue inalterado em relação ao intervalo supracitado que depende de g .

2.4 Caso Anisotrópico

É importante a consideração dos efeitos de anisotropia para casos de pulsos de nêutrons de alta energia, comum em sistemas ADS. Para o estudo deste caso, vamos considerar a equação do transporte anisotrópica, que em relação à (2.1) sofre uma modificação no núcleo de espalhamento, tornando-se

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu, t) + \sigma \varphi(x, \mu, t) = \oint \sigma_c(\Omega' \cdot \Omega) \varphi(x, \Omega \rightarrow \Omega', t) d\Omega' + \frac{1}{2} S(x, t) \quad (2.60)$$

Vamos utilizar a formulação B_L , para aproximar o núcleo de espalhamento através de uma série de polinômios de Legendre truncado em L . Representaremos esse núcleo por

$$\sigma_c(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\Omega' \cdot \Omega) \quad (2.61)$$

Considerando apenas o primeiro termo do lado direito da equação (2.60), temos que

$$\begin{aligned} \oint \sigma_c(\Omega' \cdot \Omega) \varphi(x, \Omega \rightarrow \Omega', t) d\Omega' &= \oint \left\{ \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\Omega' \cdot \Omega) \right\} \varphi(x, \Omega \rightarrow \Omega', t) d\Omega' \\ &= \oint \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\Omega' \cdot \Omega) \varphi_l(x, \Omega \rightarrow \Omega', t) d\Omega' \\ &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \left\{ \oint \sigma_l P_l(\Omega' \cdot \Omega) \varphi_l(x, \Omega \rightarrow \Omega', t) d\Omega' \right\} \\ &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \left\{ \int_{-1}^1 \sigma_l P_l(\mu) \varphi_l(x, \mu', t) d\mu' \right\} \quad (2.62) \end{aligned}$$

Agora aplicando a transformada de Laplace em t e a transformada de Fourier em x na equação (2.60), teremos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(B, \mu, s) \left\{ \left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB\mu \right\} &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \left\{ \int_{-1}^1 \sigma_l P_l(\mu) \tilde{\varphi}_l(B, \mu', s) d\mu' \right\} + \frac{1}{2} \tilde{S}(B, s) \\
&= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_l(B, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} \tilde{S}(B, s) \\
&= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\mu) \tilde{\varphi}_l(B, s) + \frac{1}{2} \tilde{S}(B, s) \quad (2.63)
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\varphi}_l(B, s) = \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_l(B, \mu', s) d\mu' \quad (2.64)$$

Agora, dividindo ambos lados de (2.63) por $\left\{ \left(\sigma + \frac{s}{v} \right) - iB\mu \right\}$, multiplicando por $P_k(\mu)$ e integrando em μ , temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B, \mu, s) P_k(\mu) d\mu &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l P_l(\mu) \tilde{\varphi}_l(B, s) \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{\left(\sigma + s/v \right) - iB\mu} d\mu \\
&+ \frac{1}{2} \tilde{S}(B, s) \int_{-1}^1 \frac{P_k(\mu)}{\left(\sigma + s/v \right) - iB\mu} d\mu \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Se considerarmos

$$\tilde{\varphi}_l(B, s) = \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_l(B, \mu', s) d\mu' = \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(B, \mu', s) P_l(\mu') d\mu' \quad (2.66)$$

e além disso, usarmos a definição de $A_{lk}(B, s)$, teremos então que

$$\tilde{\varphi}_k(B, s) = \sum_{l=0}^L (2l+1) \sigma_l \tilde{\varphi}_l(B, s) A_{lk}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{0k}(B, s) \quad (2.67)$$

Ao assumirmos L como a ordem de anisotropia. Temos $L + 1$ equações contendo $L + 1$ momentos do fluxo, que são desconhecidos, por isso podemos resolver o sistema independentemente. Após, todos outros momentos podem ser resolvidos simplesmente por uma combinação dos $L + 1$ momentos que foram determinados. Chamamos este procedimento de aproximação B_L .

Pela definição de $A_{lk}(B, s)$ é evidente que $A_{lk}(B, s) = A_{kl}(B, s)$ e usando isto juntamente com a seguinte relação de recorrência descrita em ([4]), dada por

$$\begin{aligned} (k + 1)A_{l,k+1}(B, s) &= i\frac{\delta_{lk}}{B} - i\frac{(\sigma + sv^{-1})}{B}(2k + 1)A_{lk}(B, s) \\ &- kA_{l,k-1}(B, s) \end{aligned} \quad (2.68)$$

de maneira que a partir de $A_{00}(B, s)$ podemos avaliar as demais funções para $l, k \geq 1$. Por exemplo, neste caso $A_{10}(B, s) = A_{01}(B, s)$ fica

$$\begin{aligned} (0 + 1)A_{0,0+1}(B, s) &= i\frac{\delta_{00}}{B} - i\frac{(\sigma + sv^{-1})}{B}(2 \cdot 0 + 1)A_{00}(B, s) \\ &- 0 \cdot A_{0,0-1}(B, s) \end{aligned} \quad (2.69)$$

ou simplesmente,

$$\begin{aligned} A_{01}(B, s) &= i\frac{1}{B} - i\frac{(\sigma + sv^{-1})}{B}A_{00}(B, s) \\ &= i\frac{1 - (\sigma + sv^{-1})}{B}A_{00}(B, s) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Fica evidente também que a aproximação B_0 corresponde ao caso isotrópico, isto é, em $L = 0$ teremos uma equação

$$\tilde{\varphi}_k(B, s) = \sigma_0 \tilde{\varphi}_0 A_{0k}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{0k}(B, s) \quad (2.71)$$

Se $k = 0$ temos o caso isotrópico, isto é, teremos $\tilde{\varphi}_0(B, s) = \tilde{\varphi}(B, s)$. Vamos ilustrar agora, o caso B_1 que é a menor aproximação possível de um caso anisotrópico. Considerando então $L = 1$, temos

$$\tilde{\varphi}_k(B, s) = \sigma_0 \tilde{\varphi}_0 A_{0k}(B, s) + 3\sigma_1 \tilde{\varphi}_1(B, s) A_{1k}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{0k}(B, s) \quad \text{com } k = \{0, 1\} \quad (2.72)$$

então

$$\tilde{\varphi}_0(B, s) = \sigma_0 \tilde{\varphi}_0 A_{00}(B, s) + 3\sigma_1 \tilde{\varphi}_1(B, s) A_{10}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{00}(B, s) \quad (2.73)$$

$$\tilde{\varphi}_1(B, s) = \sigma_0 \tilde{\varphi}_0 A_{01}(B, s) + 3\sigma_1 \tilde{\varphi}_1(B, s) A_{11}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{01}(B, s) \quad (2.74)$$

Como $\tilde{\varphi}_0(B, s) = \tilde{\varphi}(B, s)$ podemos descobrir $\tilde{\varphi}_1(B, s)$ através de (2.73) ou de (2.74). Assim, por exemplo, teremos que

$$\tilde{\varphi}_1(B, s)[1 - 3\sigma_1 A_{11}(B, s)] = \sigma_0 \tilde{\varphi}_0(B, s) A_{01}(B, s) + \tilde{S}(B, s) A_{01}(B, s) \quad (2.75)$$

e portanto

$$\tilde{\varphi}_1(B, s) = \left\{ \frac{\sigma_0 \tilde{\varphi}_0(B, s) + \tilde{S}(B, s)}{1 - 3\sigma_1 A_{11}(B, s)} \right\} A_{01}(B, s) \quad (2.76)$$

Evidentemente aqui para este caso a equação característica a ser resolvida para a obtenção das singularidades é outra, a saber

$$1 - 3\sigma_1 A_{11}(B, s) = 0 \quad (2.77)$$

O procedimento para a obtenção dos polos, segue analogamente ao caso isotrópico, isto é, fazendo uma análise na mesma região do plano complexo. Seguindo o padrão e resolvendo assim independentemente para as demais ordens de anisotropia até $L + 1$, podemos combina-las todas juntas na equação (2.67) afim de obter a resposta final para o fluxo.

3 TEORIA GERAL DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE MULTI-GRUPO COM FONTES PULSADAS

3.1 Introdução

Neste capítulo, pretendemos estabelecer uma metodologia para resolução da equação do transporte multi-grupo em reatores com fontes pulsadas analiticamente. Novamente, a utilização das transformadas de Laplace e Fourier para solucionar este problema será aplicada aqui. O procedimento é muito similar ao caso monoenergético e o capítulo separa-se em casos isotrópico e anisotrópico, bem como a teoria monoenergética abordada nos capítulos anteriores.

3.2 Formulação do Problema

Considerando o problema de maneira geral, temos uma espaço de Banach X e um conjunto de funções $f = f(x, \mu, v)$ as quais são integráveis em todo retângulo $|x| < h/2$, $|\mu| \leq 1$, com $0 < v_m \leq v \leq v_M < \infty$ com norma definida por

$$\| f \| = \int_{v_m}^{v_M} \int_{-1}^1 \int_{-h/2}^{h/2} |f| dx d\mu dv \quad (3.1)$$

Em um abordagem mais geral e abstrata podemos expressar a equação do transporte homogênea como

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = T\varphi - B\varphi + JH\varphi, \quad t > 0, u \in D(T) \subset X \quad (3.2)$$

e a condição inicial pode ser representada por

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\varphi(t) - \varphi_0\| = 0, \quad \varphi_0 \in D(T) \quad (3.3)$$

Aqui, consideramos $\varphi = \varphi(x, \mu, v, t)$ a densidade de nêutrons, φ_0 um elemento em $D(T)$. E definiremos como operadores lineares T, B, J e H em X como seguem abaixo

$$Tf = -\mu v \frac{\partial}{\partial x} f \quad (3.4)$$

$$Bf = v \Sigma(v) f \quad (3.5)$$

$$Jf = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x, \mu', v) d\mu' \quad (3.6)$$

$$Hf = \int_{v_m}^{v_M} H(v, v') f(x, \mu, v') dv' \quad (3.7)$$

Aqui $\Sigma(v)$ é a seção de choque total. Por definição $D(T)$ é o conjunto dos elementos $f \in X$ tais que:

$$Tf \in X$$

$$f(-h/2, \mu, v) = 0 \text{ se } \mu > 0$$

$$f(h/2, \mu, v) = 0 \text{ se } \mu < 0$$

O foco da resolução aqui, segue similar ao caso monoenergético, a equação (3.2) tem aproximação validada e descrita por 3.8.

3.3 Caso Isotrópico

Para casos de problema em teoria multi-grupo, considerando primeiramente, o caso isotrópico, assumindo também condições iniciais nulas. A equação

do transporte dependente em geometria cartesiana para um meio homogêneo $x \in [-h/2, h/2]$ é escrita para o fluxo angular $\varphi_g(x, \mu, t)$ como:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \sigma_g \varphi_g = \frac{\sigma_g}{2} \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \int_{-1}^1 c_{gg'} \varphi_{g'} d\mu' + \frac{1}{2} S_g(x, t), \quad g \in \Lambda_G \quad (3.8)$$

onde $\Lambda_G = \{1, 2, \dots, G\}$ considerando um número máximo de grupos de energia, a saber G , e usando a mesma metodologia que em Dulla et al [3], porém para equações multi-grupo, e aplicando as transformadas de Laplace e Fourier no tempo e no espaço respectivamente, temos

$$sv_g^{-1} \tilde{\varphi}_g - iB\mu \tilde{\varphi}_g + \sigma_g \tilde{\varphi}_g = \frac{\sigma_g}{2} \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \int_{-1}^1 c_{gg'}(B_n, \mu') \tilde{\varphi}_{g'} d\mu' + \frac{1}{2} \tilde{S}_g(B, s) \quad (3.9)$$

com $\tilde{\varphi} = \varphi_g(B, \mu, s)$ e $\tilde{S} = S_g(B, s)$. Utilizaremos a partir de agora a notação com apenas φ_g com o intuito de termos um redação mais clara, bem como $\sum_{g' \neq g}^G$ ao invés de $\sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G$. Agora, considerando uma aproximação do espaço assintótico usamos as frequências B_n ao invés de usarmos um espaço contínuo. Logo,

$$[(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB_n\mu] \varphi_g = \frac{1}{2} \sigma_g \sum_{g' \neq g}^G \int_{-1}^1 c_{gg'}(B_n, \mu') \varphi_{g'}(B_n, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} S_g(B_n, s) \quad (3.10)$$

como $\Phi_g(B_n, s) = \int_{-1}^1 \varphi_g(B_n, \mu', s) d\mu'$ e como estamos considerando primeiro o caso isotrópico, $c_{gg'}$ é constante em meio homogêneo, tornando (3.10) em

$$[(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB_n\mu] \varphi_g = \frac{1}{2} \sigma_g \sum_{g' \neq g}^G c_{gg'} \int_{-1}^1 \varphi_{g'}(B_n, \mu', s) d\mu' + \frac{1}{2} S_g(B_n, s) \quad (3.11)$$

Agora, isolando o fluxo e integrando na variável direcional μ , teremos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_g(B, \mu, s) d\mu' &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2} \sigma_g \frac{1}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} \sum_{g' \neq g}^G c_{gg'} \Phi_{g'}(B, s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} S_g(B, s) \right\} d\mu' \end{aligned} \quad (3.12)$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \Phi_g(B, s) &= \sigma_g \sum_{g' \neq g}^G c_{gg'} \Phi_{g'}(B, s) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} d\mu' \\ &\quad + S_g(B, s) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} d\mu' \end{aligned} \quad (3.13)$$

e definindo

$$A_{l,k}^g(B, s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu') P_k(\mu')}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} d\mu' \quad (3.14)$$

e agora, a equação (3.13), fica

$$\Phi_g(B, s) = A_{0,0}^g(B, s) \sigma_g \sum_{g' \neq g}^G c_{gg'} \Phi_{g'}(B, s) + A_{0,0}^g(B, s) S_g(B, s) \quad (3.15)$$

Assumindo que para cada grupo de energia, podemos representar $\Phi_g(B, s)$ como

$$\Phi_g(B, s) := \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_g^{(i)}(B, s) \quad (3.16)$$

onde os primeiro termo da série ($\Phi_g^{(0)}$) representa a solução para o caso monoenergético e os demais termos representam o acoplamento do sistema, isto é, a influência dos demais grupos de energia.

3.4 Análise do Problema com $G = 2$

Começaremos a análise com a teoria de dois grupos de energia afim de posteriormente extendê-la para um caso mais geral. Desta maneira, podemos expressar (3.15) por duas equações:

$$\begin{aligned}\Phi_1(B, s) &= A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{11}\Phi_1(B, s) + A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{12}\Phi_2(B, s) + A_{0,0}^1S_1(B, s) \\ \Phi_2(B, s) &= A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{22}\Phi_2(B, s) + A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{21}\Phi_1(B, s) + A_{0,0}^2S_2(B, s)\end{aligned}$$

e para $\Phi_g^{(0)}$ ($g = 1, 2$) vamos considerar o termo $\Phi_{g'}$ de acordo com a ideia de que o primeiro termo representa a solução monoenergética. Logo as primeiras equações ficam

$$\Phi_1^{(0)}(B, s) = A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{11}\Phi_1^{(0)}(B, s) + A_{0,0}^1S_1(B, s) \quad (3.17)$$

$$\Phi_2^{(0)}(B, s) = A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{22}\Phi_2^{(0)}(B, s) + A_{0,0}^2S_2(B, s) \quad (3.18)$$

ou ainda, de outra maneira temos

$$\Phi_1^{(0)}(B, s) = \frac{A_{0,0}^1(B, s)}{1 - \sigma_1c_{11}A_{0,0}^1(B, s)}S_1(B, s) \quad (3.19)$$

$$\Phi_2^{(0)}(B, s) = \frac{A_{0,0}^2(B, s)}{1 - \sigma_2c_{22}A_{0,0}^2(B, s)}S_2(B, s) \quad (3.20)$$

De acordo com a teoria monoenergética, isso representa a solução para um sistema não acoplado de dois grupos de energia. Agora, para realizar o acoplamento em questão, podemos corrigir o próximo termo, fazendo com que $\Phi_1^{(1)}$ e $\Phi_2^{(1)}$ sejam

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(B, s) &= A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{11}\Phi_1^{(1)}(B, s) + A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{12}\Phi_2^{(0)}(B, s) + A_{0,0}^1S_1(B, s) \\ \Phi_2^{(1)}(B, s) &= A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{21}\Phi_1^{(0)}(B, s) + A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{22}\Phi_2^{(1)}(B, s) + A_{0,0}^2S_2(B, s)\end{aligned}$$

e da mesma maneira, teremos que

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(i)}(B, s) &= A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{11}\Phi_1^{(i)}(B, s) + A_{0,0}^1(B, s)\sigma_1c_{12}\Phi_2^{(i-1)}(B, s) + A_{0,0}^1S_1(B, s) \\ \Phi_2^{(i)}(B, s) &= A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{21}\Phi_1^{(i-1)}(B, s) + A_{0,0}^2(B, s)\sigma_2c_{22}\Phi_2^{(i)}(B, s) + A_{0,0}^2S_2(B, s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(i)}(B, s) &= \frac{A_{0,0}^1(B, s)}{1 - \sigma_1c_{11}A_{0,0}^1(B, s)}\sigma_1c_{12}\Phi_2^{(i-1)}(B, s) + \frac{A_{0,0}^1(B, s)}{1 - \sigma_1c_{11}A_{0,0}^1(B, s)}S_1(B, s) \\ \Phi_2^{(i)}(B, s) &= \frac{A_{0,0}^2(B, s)}{1 - \sigma_2c_{22}A_{0,0}^2(B, s)}\sigma_2c_{21}\Phi_1^{(i-1)}(B, s) + \frac{A_{0,0}^2(B, s)}{1 - \sigma_2c_{22}A_{0,0}^2(B, s)}S_2(B, s)\end{aligned}$$

O procedimento para encontrar a solução monoenergética no capítulo anterior define que

$$\Gamma(B, s) := \frac{A_{0,0}(B, s)}{1 - \sigma c A_{0,0}(B, s)} \quad (3.21)$$

podemos representar essas funções para casos multi-grupo por

$$\Gamma_{gg'}(B, s) := \frac{A_{0,0}^g(B, s)}{1 - \sigma_g c_{gg'} A_{0,0}^g(B, s)} \quad (3.22)$$

Usando este argumento, temos

$$\Phi_1^{(i)}(B, s) = \Gamma_{11}(B, s)\sigma_1c_{12}\Phi_2^{(i-1)}(B, s) + \Gamma_{11}(B, s)S_1(B, s) \quad (3.23)$$

$$\Phi_2^{(i)}(B, s) = \Gamma_{22}(B, s)\sigma_2c_{21}\Phi_1^{(i-1)}(B, s) + \Gamma_{22}(B, s)S_2(B, s) \quad (3.24)$$

$$\Phi_1^{(i)}(B, s) = \Gamma_{11}(B, s)[\sigma_1 c_{12} \Phi_2^{(i-1)}(B, s) + S_1(B, s)] \quad (3.25)$$

$$\Phi_2^{(i)}(B, s) = \Gamma_{22}(B, s)[\sigma_2 c_{21} \Phi_1^{(i-1)}(B, s) + S_2(B, s)] \quad (3.26)$$

Vamos calcular a série (3.16) para cada grupo de energia com um número finito de termos, usando a aproximação truncada em N termos, assim temos que

$$\Phi_g(B, s) \approx \Phi_g^{(N)}(B, s) := \sum_{i=0}^N \Phi_g^{(i)}(B, s) \quad (3.27)$$

e usando as definições de $\Gamma_{gg'}$, teremos

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(N)}(B, s) &:= \Phi_g^{(0)}(B, s) + \Phi_g^{(1)}(B, s) + \dots + \Phi_g^{(N)}(B, s) \quad \text{para } g \in \Lambda_2; N \geq 0 \\ &= \Gamma_{gg}(B, s)S_g(B, s) + \Phi_g^{(1)}(B, s) + \dots + \Phi_g^{(N)}(B, s) \\ &= \Gamma_{gg}(B, s)S_g(B, s) + \sum_{i=1}^N \Phi_g^{(i)}(B, s) \quad \text{para } g = 1, 2; N \geq 1 \\ &= \Gamma_{gg}(B, s)S_g(B, s) + \sum_{i=1}^N \Gamma_{gg}(B, s)[\sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) + S_g(B, s)] \\ &= \Gamma_{gg}(B, s) \left[S_g(B, s) + \sum_{i=1}^N \sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) + \sum_{i=1}^N S_g(B, s) \right] \\ &= \Gamma_{gg}(B, s) \left[S_g(B, s) + \sum_{i=1}^N \sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) + N S_g(B, s) \right] \\ &= \underbrace{\Gamma_{gg'}(B, s)(N+1)S_g(B, s)}_{\text{teoria monoenergética}=\hat{\Phi}_g(B,s)} + \underbrace{\Gamma_{gg}(B, s) \sum_{i=1}^N \sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s)}_{\text{influência multi-grupo}=\check{\Phi}_g^{(N)}(B,s)} \quad \text{para } g \in \Lambda_2; N \geq 1 \\ &:= \hat{\Phi}_g(B, s) + \check{\Phi}_g^{(N)}(B, s) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Introduzindo uma fonte similar com ao caso monoenergético, porém para cada grupo de energia especificadamente, teremos

$$S_g(B, s) = \frac{1}{(N+1)} \sqrt{\frac{2}{\hbar}} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^g(s) \left[\frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right] \quad (3.29)$$

Levando em conta esta última formulação, observamos que ao tomar $N = 0$ temos exatamente a formulação monoenergética, mas tomando $N \geq 1$ começamos a introduzir a influência dos demais grupos de energia dentro de cada solução para o grupo g .

Precisamos calcular a inversão usando o procedimento exatamente igual ao anterior, porém agora usando (3.28), que por definição é

$$\begin{aligned} \check{\Phi}_g^{(N)}(x, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \Gamma_{gg'}(B, s) \sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) \cdot e^{iBx} dB \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg'}(B, s) \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) \cdot e^{iBx} dB \end{aligned}$$

Por exemplo, se aplicarmos o método para $N = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\check{\Phi}_g^{(2)}(x, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \Gamma_{gg'}(B, s) \sigma_g c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) . e^{iBx} dB \\
&= \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) \Phi_{g'}^{(0)}(B, s) . e^{iBx} dB + \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg'}(B, s) \Phi_{g'}^{(1)}(B, s) . e^{iBx} dB \\
&= \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) \Phi_{g'}^{(0)}(B, s) . e^{iBx} dB \\
&+ \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) [\Gamma_{g'g'}(\sigma_{g'} c_{g'g} \Phi_g^{(0)}(B, s) + S_{g'}(B, s))] . e^{iBx} dB \\
&= \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) [\Gamma_{g'g'}(B, s) S_{g'}(B, s)] . e^{iBx} dB \\
&+ \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) [\Gamma_{g'g'}(\sigma_{g'} c_{g'g} [\Gamma_{gg}(B, s) S_g(B, s)] + S_{g'}(B, s))] . e^{iBx} dB \\
&= \sigma_g c_{gg'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) \Gamma_{g'g'}(B, s) S_{g'}(B, s) . e^{iBx} dB \\
&+ \sigma_g c_{gg'} \sigma_{g'} c_{g'g} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}^2(B, s) \Gamma_{g'g'}(B, s) S_g(B, s) . e^{iBx} dB \\
&+ \sigma_g c_{gg'} \sigma_{g'} c_{g'g} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}(B, s) \Gamma_{g'g'}(B, s) S_{g'}(B, s) . e^{iBx} dB \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Resumidamente, teremos uma combinação de produtos destas funções "Gamma" e das especificadas fontes para cada grupo de energia, como solução do problema. Como, para cada i -ésimo termo $\Phi_g^{(i)}(B, s)$ depende de $\Phi_g^{(0)}(B, s)$ que por sua vez, depende de $\Gamma_{gg}(B, s)$ ou $\Gamma_{g'g'}(B, s)$ e $S_g(B, s)$ ou $S_{g'}(B, s)$. Definimos então

$$I_{m,n}^{p,q}(x, s) := \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}^m(B, s) \Gamma_{g'g'}^n(B, s) S_g^p(B, s) S_{g'}^q(B, s) e^{iBx} dB \tag{3.31}$$

mas como sempre com p, q sendo 0 ou 1 e $p \neq q, m, n \geq 0$, mas nunca $m = n = 0$. Deste modo, a expressão final para $\Phi_g^{(N)}(B, s)$ é uma combinação de das funções $I_{m,n}^{p,q}(x, s)$. Assim, trocando a notação para

$$I_{m,n}^{S_g}(x, s) := \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{gg}^m(B, s) \Gamma_{g'g'}^n(B, s) S_g(B, s) e^{iBx} dB \tag{3.32}$$

Usando essa definição , podemos ver que por outro lado $\hat{\Phi}_g^{(0)}$, é neste caso

$$\hat{\Phi}_g^{(0)}(x, s) = (N + 1)I_{1,0}^{S_g}(x, s) \quad (3.33)$$

que é igual a solução expressa no capítulo anterior, isto é,

$$I_{1,0}^{S_g}(x, s) = \frac{1}{N + 1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{gg}(B_n, s) s_n^g(s) \cos(B_n x) \quad (3.34)$$

com $N = 0$ evidentemente, e por similaridade podemos encontrar outras combinações, como

$$\begin{aligned} I_{1,0}^{S_{g'}}(x, s) &= \frac{1}{N + 1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{gg'}(B_n, s) s_n^{g'}(s) \cos(B_n x) \\ I_{0,1}^{S_g}(x, s) &= \frac{1}{N + 1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{g'g'}(B_n, s) s_n^g(s) \cos(B_n x) \\ I_{0,1}^{S_{g'}}(x, s) &= \frac{1}{N + 1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{g'g'}(B_n, s) s_n^{g'}(s) \cos(B_n x) \end{aligned}$$

Logo, a solução final depende das combinações de $I_{m,n}^{S_g}(x, t)$, e usando a expressão do caso monoenergético

$$\begin{aligned}
I_{1,0}^{S_1}(x,t) &= \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_g - i\infty}^{-\sigma_g + i\infty} \Gamma_{gg}(B_k, s) e^{s(t-t')} ds \right] \times s_k^1(t') dt' \right\} \cos(B_k x) \\
I_{1,0}^{S_2}(x,t) &= \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_g - i\infty}^{-\sigma_g + i\infty} \Gamma_{gg}(B_k, s) e^{s(t-t')} ds \right] \times s_k^2(t') dt' \right\} \cos(B_k x) \\
I_{0,1}^{S_1}(x,t) &= \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_{g'} - i\infty}^{-\sigma_{g'} + i\infty} \Gamma_{g'g_1}(B_k, s) e^{s(t-t')} ds \right] \times s_k^1(t') dt' \right\} \cos(B_k x) \\
I_{0,1}^{S_2}(x,t) &= \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_{g'} - i\infty}^{-\sigma_{g'} + i\infty} \Gamma_{g'g_1}(B_k, s) e^{s(t-t')} ds \right] \times s_k^2(t') dt' \right\} \cos(B_k x)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde para calcular essa última expressão, precisamos analisar cuidadosamente as singularidades destas funções "Gamma", assim a expressão geral para $I_{m,n}^{S_g}(x,t)$ é representada por

$$I_{m,n}^{S_g}(x,t) = \frac{1}{N+1} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_g - i\infty}^{\sigma_g + i\infty} \Gamma_{gg}^m(B_k, s) \Gamma_{g'g'}^n(B_k, s) e^{s(t-t')} ds \right] \times s_k^g(t') dt' \right\} \cos(B_k x) \tag{3.36}$$

e para essas duas últimas equações, precisamos calcular as singularidades de $\Gamma_{gg}^m(B_k, s) \Gamma_{g'g'}^n(B_k, s)$.

Como intuito de obter uma generalização para N qualquer, consideramos alguns valores para N e verificamos o resultado da expressão. Os seguintes termos são construídos de acordo como o procedimento apresentado previamente, isto é, podemos expressar as primeiras três equações para $\Phi^{(N)}$ ($N = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(1)}(x,t) &= I_{1,0}^{S_1}(x,t) + \frac{1}{2} \sigma_1 c_{12} I_{1,1}^{S_2}(x,t), \\
\Phi_2^{(1)}(x,t) &= I_{0,1}^{S_2}(x,t) + \frac{1}{2} \sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_1}(x,t);
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(2)}(x, t) &= I_{1,0}^{S_1}(x, t) + \frac{2}{3}\sigma_1 c_{12} I_{1,1}^{S_2}(x, t) + \frac{1}{3}\sigma_1 c_{12} \sigma_2 c_{21} I_{2,1}^{S_1}(x, t), \\
\Phi_2^{(2)}(x, t) &= I_{0,1}^{S_2}(x, t) + \frac{2}{3}\sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_1}(x, t) + \frac{1}{3}\sigma_1 c_{12} \sigma_2 c_{21} I_{1,2}^{S_2}(x, t); \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(3)}(x, t) &= I_{1,0}^{S_1}(x, t) + \frac{3}{4}\sigma_1 c_{12} I_{1,1}^{S_2}(x, t) + \frac{2}{4}\sigma_1 c_{12} \sigma_2 c_{21} I_{2,1}^{S_1}(x, t) + \frac{1}{4}(\sigma_1 c_{12})^2 (\sigma_2 c_{21}) I_{2,2}^{S_2}(x, t), \\
\Phi_2^{(3)}(x, t) &= I_{0,1}^{S_2}(x, t) + \frac{3}{4}\sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_1}(x, t) + \frac{2}{4}\sigma_1 c_{12} \sigma_2 c_{21} I_{1,2}^{S_2}(x, t) + \frac{1}{4}(\sigma_2 c_{21}) (\sigma_2 c_{21})^2 I_{2,2}^{S_1}(x, t). \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Verificando para valores maiores de N , podemos estabelecer um padrão para as equações supracitadas em termos exatos de N . Sendo assim, a expressão final para o valor genérico de N será dada por:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(N)}(x, t) &= I_{1,0}^{S_1}(x, t) + \frac{1}{N+1} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j < N/2}} (N-2j) (\sigma_1 c_{12})^{j+1} (\sigma_2 c_{21})^j I_{j+1, j+1}^{S_2}(x, t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j < (N-1)/2}} (N-2j+1) (\sigma_1 c_{12})^j (\sigma_2 c_{21})^j I_{j, j-1}^{S_1}(x, t) \right) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{(N)}(x, t) &= I_{0,1}^{S_2}(x, t) + \frac{1}{N+1} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j < N/2}} (N-2j) (\sigma_1 c_{12})^j (\sigma_2 c_{21})^{j+1} I_{j+1, j+1}^{S_1}(x, t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j < (N-1)/2}} (N-2j+1) (\sigma_1 c_{12})^j (\sigma_2 c_{21})^j I_{j-1, j}^{S_2}(x, t) \right). \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Fica claro que independente da grandesa de N , a inversão é possível e viável para obtenção da solução bem como no problema monoenergético através da definição de $I_{m,n}^{S_g}$.

Aqui podemos ver claramente que em problemas de não reentrância de nêutrons ("no up-scattering" em inglês), nos quais independente do número de grupos a matriz de espalhamento formada pelos coeficientes $c_{gg'}$ com $g, g' \in \Lambda_G$ será sempre diagonal inferior, isto é, $c_{gg'} = 0 \forall g < g'$ com $g, g' \in \Lambda_G$. No caso específico mostrado até aqui, teremos que $c_{12} = 0$. E analisando novamente (3.40) e (3.41) teremos que ao avaliar os primeiros termos do somatório em j , teremos que

$$\Phi_1^{(N)}(x, t) = I_{1,0}^{S_1}(x, t) \quad (3.42)$$

$$\Phi_2^{(N)}(x, t) = I_{0,1}^{S_2}(x, t) + \frac{N}{N+1} \sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_2}(x, t) \quad (3.43)$$

E evidentemente ao fazer $N \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_1^{(N)}(x, t) = I_{1,0}^{S_1}(x, t) = \hat{\Phi}_1(x, t) \quad (3.44)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_2^{(N)}(x, t) = I_{0,1}^{S_2}(x, t) + \sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_1}(x, t) = \hat{\Phi}_2(x, t) + \sigma_2 c_{21} I_{1,1}^{S_1}(x, t) \quad (3.45)$$

o que mostra que nesses casos, o primeiro grupo possui sempre a solução igual ao caso monoenergético.

Com a idéia de avaliar o perfil do fluxo de nêutrons para o caso de dois grupos de energia, vamos estabelecer alguns parâmetros e definições para facilitar a análise. Assumimos a tabela (3.1) que possui valores para seção de choque total (σ_g), velocidades (v_g), coeficientes de espalhamento ($c_{gg'}$), espessura da placa (h) e posições iniciais de pulso ($x_{0,g}$). Para os conjuntos 1 e 2 consideramos o caso de não reentrância de nêutrons, de maneira que a evolução do primeiro grupo de energia é independente do segundo.

Tabela 3.1: Conjunto de parâmetros usados para simulações. Assumimos aqui quantidades adimensionais.

	σ_1	σ_2	v_1	v_2	c_{11}	c_{12}	c_{22}	c_{21}	h	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$
conjunto 1	1.00	1.00	1.00	0.50	0.90	0.00	0.90	0.05	10.00	0.50	0.00
conjunto 2	1.00	1.00	1.00	0.50	0.90	0.00	0.50	0.45	10.00	0.50	0.00
conjunto 3	1.00	1.00	1.00	0.50	0.90	0.45	0.50	0.05	10.00	0.50	0.25
conjunto 4	1.00	1.00	1.00	0.50	0.50	0.05	0.90	0.45	10.00	0.50	0.25

Para análise da convergência dos resultados, é interessante comparar os fluxos a medida que N cresce. A variação do fluxo de nêutrons com a variável espacial fixando o tempo é apresentado nos gráficos de 3.1 até 3.8. Observamos que o fluxo dependente da variável espacial decresce com o aumento do tempo.

Agora analisando a variação do fluxo de nêutrons variando com o tempo e fixando a variável espacial, mostrado nas figuras numeradas de 3.9 até 3.16. As discontinuidades nas derivadas temporais são claramente apreciadas nos gráficos. Esse efeito é obviamente determinado pela propagação da descontinuidade inicial na distribuição do fluxo, afetando ambos grupos de energia devido as influências de um sobre o outro.

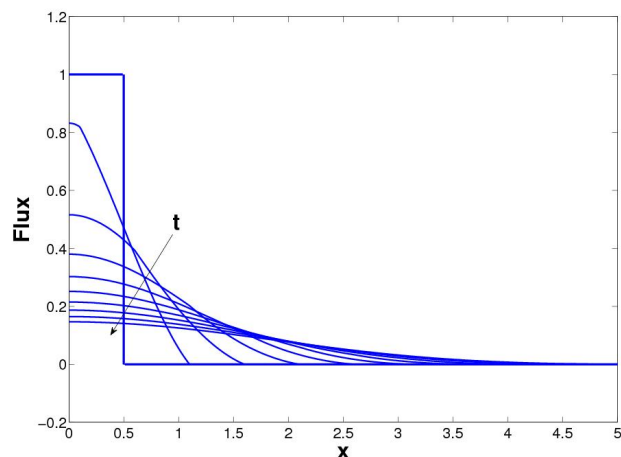


Figura 3.1: Fluxo ($N = 1$) para grupo 1 com conjunto de parâmetros 1, usando 300 harmônicas.

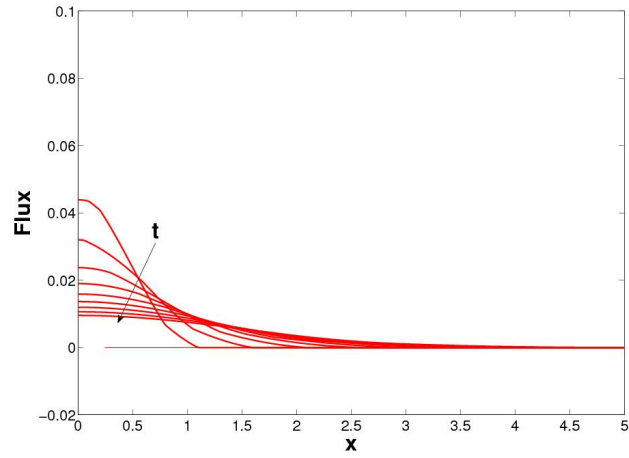


Figura 3.2: Fluxo ($N = 1$) para grupo 2 com conjunto de parâmetros 1, usando 300 harmônicas.

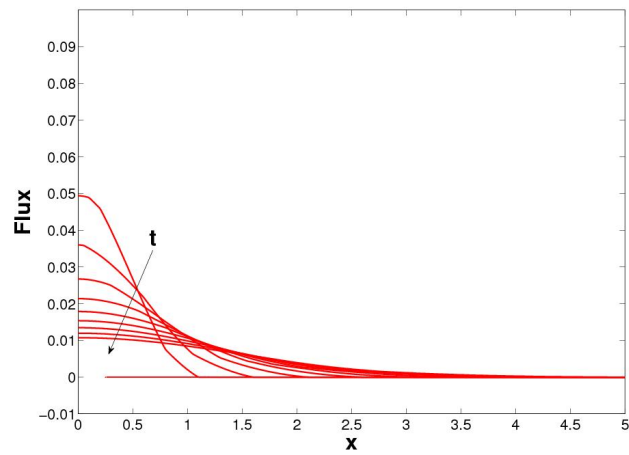


Figura 3.3: Mesmo caso de 3.1, para $g = 2$, com $N = 2$.

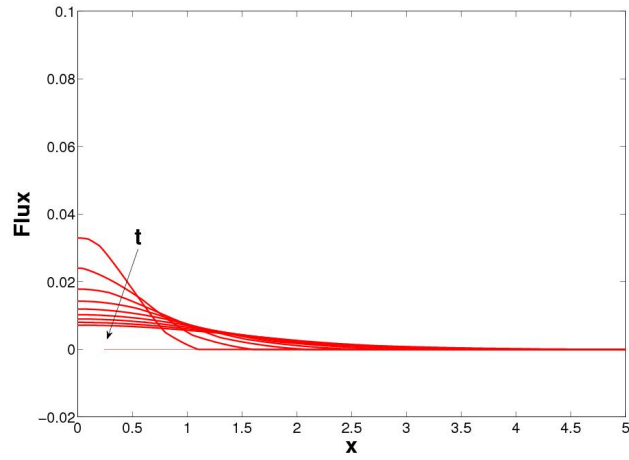


Figura 3.4: Mesmo caso de 3.1, para $g = 2$, com $N = 10$.

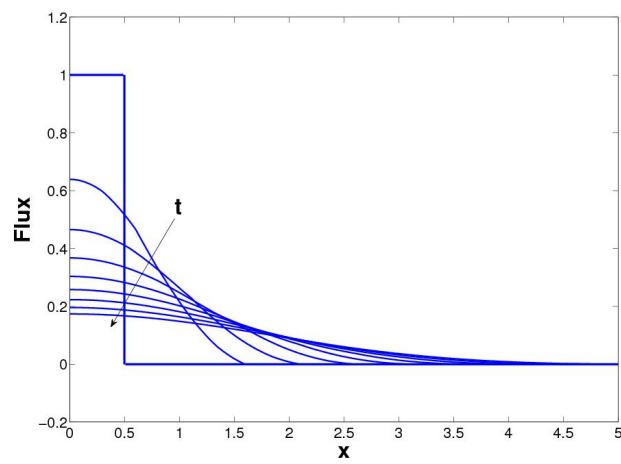


Figura 3.5: Fluxo ($N = 1$) para grupo 1 com conjunto de parâmetros 3, usando 300 harmônicas.

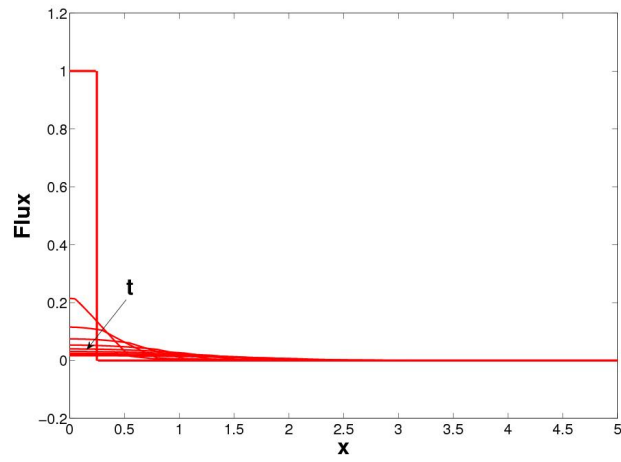


Figura 3.6: Fluxo ($N = 1$) para grupo 2 com conjunto de parâmetros 3, usando 300 harmônicas.

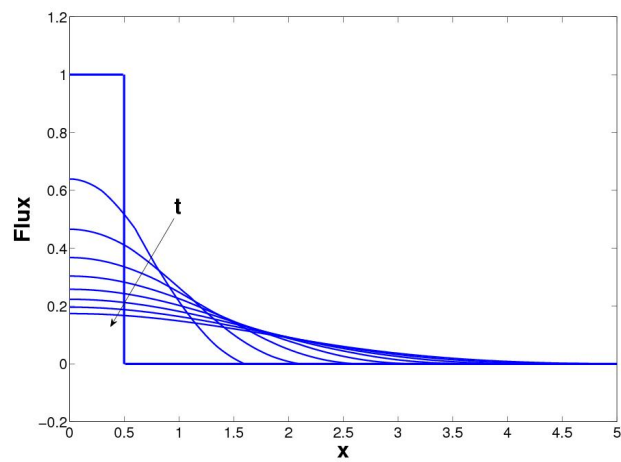


Figura 3.7: Fluxo ($N = 10$) para grupo 1 com conjunto de parâmetros 3, usando 300 harmônicas.

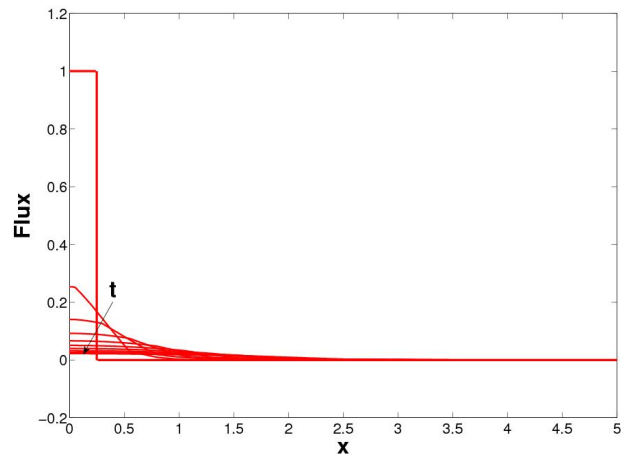


Figura 3.8: Fluxo ($N = 10$) para grupo 2 com conjunto de parâmetros 3, usando 300 harmônicas.

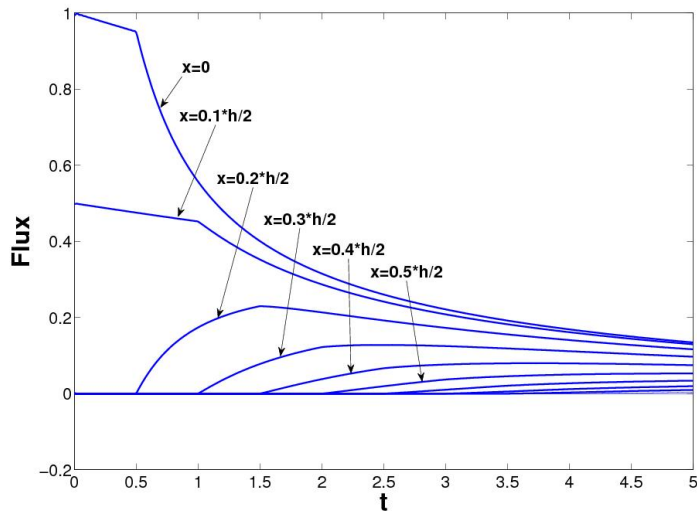


Figura 3.9: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 1 usando conjunto de parâmetros 1; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

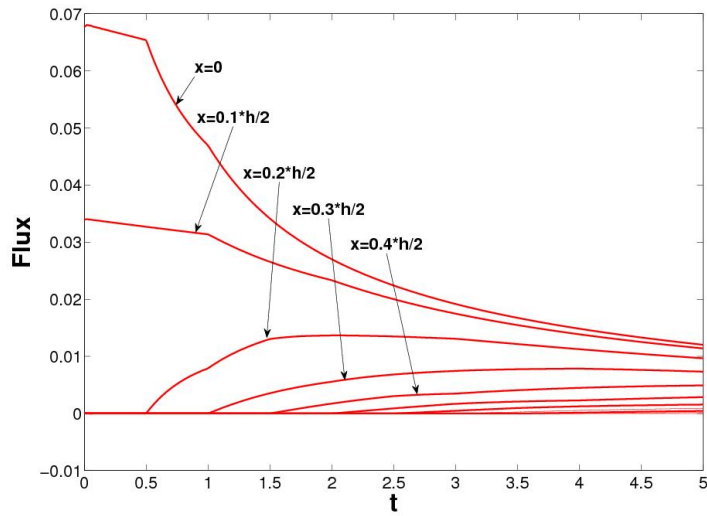


Figura 3.10: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 2 usando conjunto de parâmetros 1; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

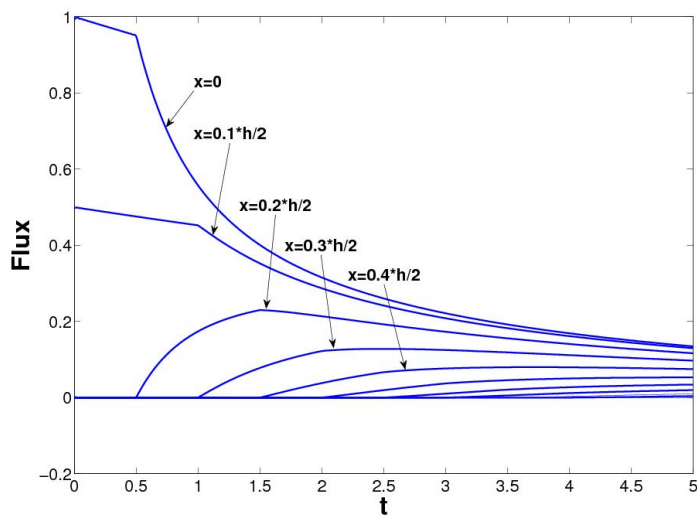


Figura 3.11: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 1 usando conjunto de parâmetros 2; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

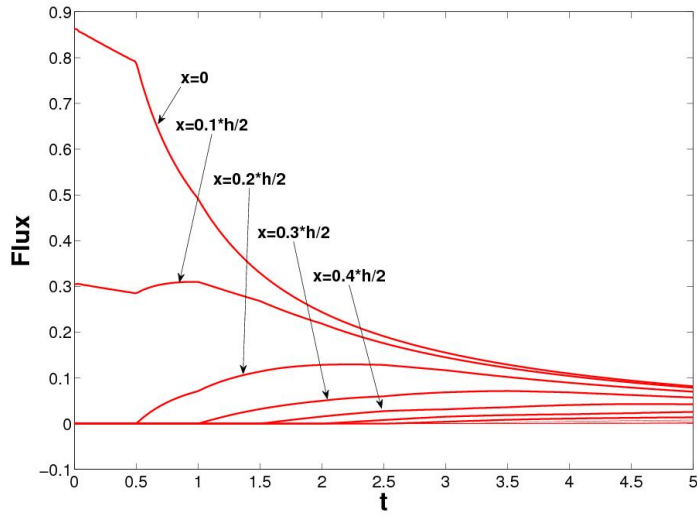


Figura 3.12: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 2 usando conjunto de parâmetros 2; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

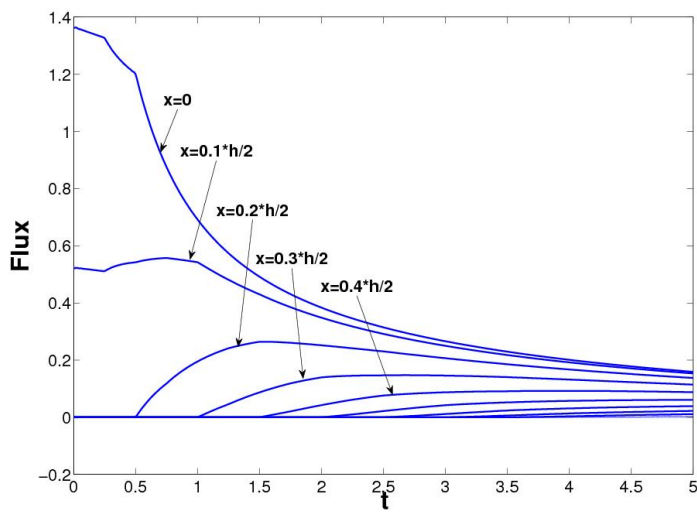


Figura 3.13: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 1 usando conjunto de parâmetros 3; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

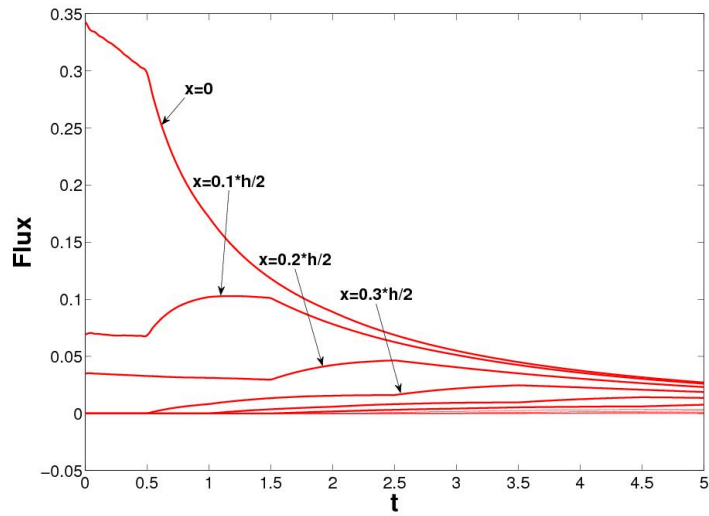


Figura 3.14: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 2 usando conjunto de parâmetros 3; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

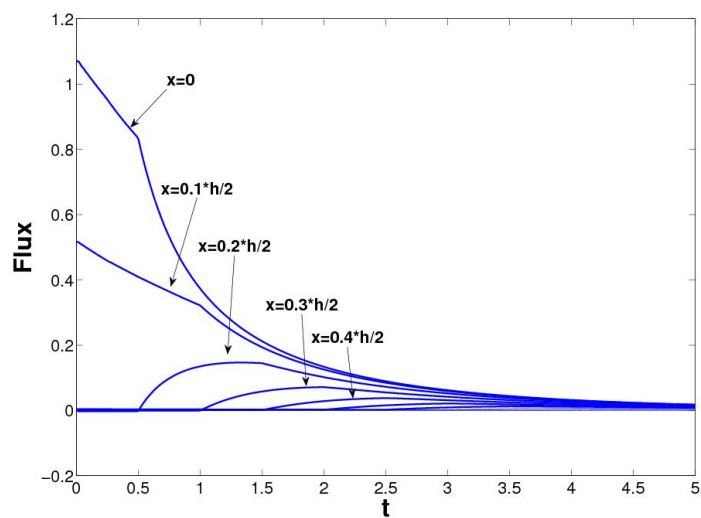


Figura 3.15: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 1 usando conjunto de parâmetros 4; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

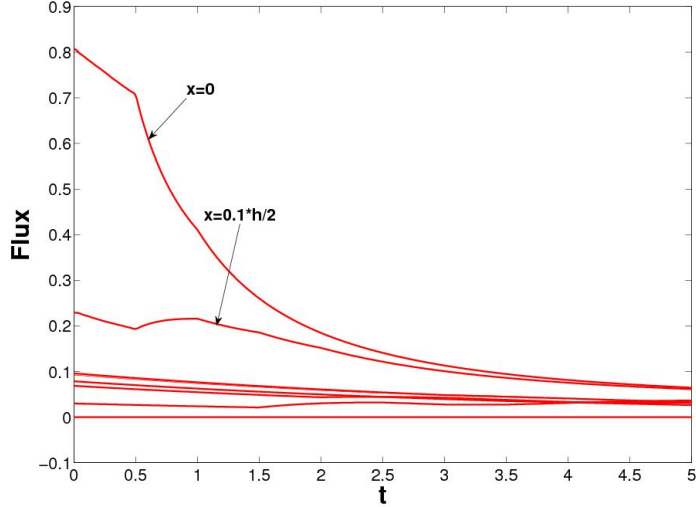


Figura 3.16: Distribuição do Fluxo no tempo para o grupos 2 usando conjunto de parâmetros 4; diferentes pontos foram considerados, de $x = 0$ a $x = h/2$ em intervalos de $0.1 \times h/2$.

3.5 Análise do Problema com $G > 2$

Tentando estender para um numero geral de grupos de energia, consideraremos o fluxo escalar dado em (3.16) onde truncamos em N . Escrevendo de forma explícita e mais geral a expressão truncada para Φ_g^N , teremos que:

$$\begin{aligned}
 \Phi_g^{(N)}(B, s) &= \Phi_g^{(0)}(B, s) + \Phi_g^{(1)}(B, s) + \dots + \Phi_g^{(N)}(B, s) \quad \text{for } N \geq 1 \\
 &= \Gamma_{gg}(B, s)S_g(B, s) + \sum_{i=1}^N \Phi_g^{(i)}(B, s) \\
 &= \underbrace{(N+1)\Gamma_{gg}(B, s)S_g(B, s)}_{\text{solução monoenergética}=\hat{\Phi}_g(B, s)} + \underbrace{\Gamma_{gg}(B, s) \sum_{i=1}^N \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'} c_{gg'} \Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s)}_{\text{influência multi-grupo}=\check{\Phi}_g^{(N)}(B, s)} \\
 &:= \hat{\Phi}_g(B, s) + \check{\Phi}_g^{(N)}(B, s) \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Procurando obter uma solução no espaço tempo, usaremos a inversão de Laplace e Fourier (3.46). Primeiramente Fourier, chegando a integral

$$\begin{aligned}
I_{m_1, m_2, \dots, m_G}^{S_g}(x, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma_{11})^{m_1} (\Gamma_{22})^{m_2} \dots (\Gamma_{GG})^{m_G} (B, s) S_g(B, s) e^{-iBx} dB \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\gamma=1}^G (\Gamma_{\gamma\gamma})^{m_\gamma} (B, s) S_g(B, s) e^{-iBx} dB. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

A expressão (3.47) é obtida através de (3.46) e fazendo todos termos explicitamente dependendo diretamente de cada fonte S_g . Esse processo resulta em uma aplicação sucessiva do núcleo Γ_{gg} , feito de maneira explicita em (3.47) através da representação dos expoentes $\{m_1 \dots m_G\}$.

Agora, aplicando a inversão da transformada de Fourier e assumindo a simetria da fonte no domínio $[-h/2; h/2]$ e representada pelas auto-funções de Helmholtz como:

$$S_g(B, s) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^g(s) \left[\frac{\delta(B - B_n) + \delta(B + B_n)}{2} \right]. \tag{3.48}$$

Assumindo também que a solução satisfaz as condições de contorno adotadas. Essa condição não é correta ao aplicarmos diretamente ao fluxo escalar, mas é ainda fisicamente significativa na análise de pulsos com tempos pequenos, isto é, quando os neutrons ainda não alcançaram os limites do domínio. Uma vez introduzidas (3.48) dentro (3.47) é obtida a inversão da transformada de Fourier e podemos focar na inversão da transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
I_{m_1, m_2, \dots, m_G}^{S_g}(x, t) &= \\
&\sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_g - i\infty}^{-\sigma_g + i\infty} \prod_{\gamma=1}^G \Gamma_{\gamma\gamma}^{m_\gamma} (B, s) e^{s(t-t')} ds \right] s_k^g(t') dt' \right\} \cos(B_k x)
\end{aligned}$$

Usando as definições das integrais acima podemos expressar a solução diretamente em (x, t) . Para $N = 0$ teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1^{(0)}(B, s) = \Gamma_{11}S_1(B, s) \\ \Phi_2^{(0)}(B, s) = \Gamma_{22}S_2(B, s) \\ \vdots \\ \Phi_G^{(0)}(B, s) = \Gamma_{GG}S_G(B, s) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1^{(0)}(x, t) = I_1^{S_1}(x, t) \\ \Phi_2^{(0)}(x, t) = I_{0,1}^{S_2}(x, t) \\ \vdots \\ \Phi_G^{(0)}(x, t) = I_{\underbrace{0,0,\dots,1}_{\times G}}^{S_G}(x, t). \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Os termos de alta ordem serão conhecidos ao aumentarmos o valor de truncamento. Tomando agora o caso $N = 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi_1^1 &= 2\Gamma_{11}S_1 + \Gamma_{11} \sum_{i=1}^1 \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{1g'}\Phi_{g'}^{(i-1)} \\ &= 2\Gamma_{11}S_1 + \Gamma_{11}(\sigma_2c_{12}\Phi_2^{(0)} + \sigma_3c_{13}\Phi_3^{(0)} + \dots + \sigma_Gc_{1G}\Phi_G^{(0)}) \\ &= 2\Gamma_{11}S_1 + \sigma_2c_{12}\Gamma_{11}\Gamma_{22}S_2 + \sigma_3c_{13}\Gamma_{11}\Gamma_{33}S_3 + \dots + \sigma_Gc_{1G}\Gamma_{11}\Gamma_{GG}S_G \end{aligned} \quad (3.50)$$

e para $g \in \Lambda_G$ ainda no espaço transformado, teremos que:

$$\begin{aligned} \Phi_g^1(B, s) &= 2\Gamma_{gg}S_g + \Gamma_{gg} \sum_{i=1}^1 \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) \\ &= 2\Gamma_{gg}S_g + \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Gamma_{gg}\Gamma_{g'g'}S_{g'}(B, s) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Já para ordem $N = 2$ podemos escrever que:

$$\begin{aligned} \Phi_g^2 &= 3\Gamma_{gg}S_g + \Gamma_{gg} \sum_{i=1}^2 \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Phi_{g'}^{(i-1)}(B, s) \\ &= 3\Gamma_{gg}S_g + \Gamma_{gg} \left(\sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Phi_{g'}^{(0)}(B, s) + \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Phi_{g'}^{(1)}(B, s) \right) \\ &= 3\Gamma_{gg}S_g + 2 \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\Gamma_{gg}\Gamma_{g'g'}S_{g'}(B, s) \\ &\quad + \sum_{g' \neq g}^G \sum_{g'' \neq g'}^G \sigma_{g'}c_{gg'}\sigma_{g''}c_{g'g''}\Gamma_{gg}\Gamma_{g'g'}\Gamma_{g''g''}S_{g''}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Em uma forma mais compacta de (3.52) seguimos obtendo as expressões para cada caso. Como $N = 3$ temos:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(3)} = & 4\Gamma_{gg}S_g + 3 \sum_{g' \neq g}^G \sigma_{g'} c_{gg'} \Gamma_{gg} \Gamma_{g'g'} S_{g'} \\
& + 2 \sum_{g' \neq g} \sum_{g'' \neq g'} \sigma_{g'} c_{gg'} \sigma_{g''} c_{g'g''} \Gamma_{gg} \Gamma_{g'g'} \Gamma_{g''g''} S_{g''} \\
& + \sum_{g' \neq g} \sum_{g'' \neq g'} \sum_{g''' \neq g''} \sigma_{g'} c_{gg'} \sigma_{g''} c_{g'g''} \sigma_{g'''} c_{g''g'''} \Gamma_{gg} \Gamma_{g'g'} \Gamma_{g''g''} \Gamma_{g'''g'''} S_{g'''},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

até conseguirmos expressar de maneira mais geral e usando que $g' \rightarrow k_1$ teremos para todas as demais ordens:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(N)} = & (N+1)\Gamma_{gg}S_g \\
& + N \sum_{g' \neq k_1} \sigma_{k_1} c_{gk_1} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1k_1} S_{k_1} \\
& + (N-1) \sum_{g \neq k_1} \sum_{k_2 \neq k_1} \sigma_{k_1} c_{gk_1} \sigma_{k_2} c_{k_1k_2} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1k_1} \Gamma_{k_2k_2} S_{k_2} \\
& \vdots \\
& + \underbrace{\sum_{k_1 \neq g} \sum_{k_2 \neq k_1} \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}}_{\times N} \sigma_{k_1} c_{gk_1} \cdots \sigma_{k_N} c_{k_{N-1}k_N} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1k_1} \cdots \Gamma_{k_Nk_N} S_{k_N}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

No intuito de obter uma expressão mais clara e elegante para o fluxo no grupo g ainda no espaço transformado e conseqüentemente no espaço direto, vamos introduzir as constantes $\Xi_{g,\ell_{max}}$ e os operadores $\mathbb{T}_{g,j_{max}}[\cdot]$ como sendo:

$$\begin{aligned}
\Xi_{g,\ell_{max}} &= \left\{ \prod_{\ell=1}^{\ell_{max}} \sigma_{k_\ell} c_{k_{\ell-1}k_\ell} \right\}, \quad \ell_{max} \in \Lambda_{G-1} \\
\mathbb{T}_{g,j_{max}}[\cdot] &= \left\{ \prod_{j=1}^{j_{max}} \Gamma_{k_jk_j} \right\} \Gamma_{gg}(\cdot), \quad j_{max} \in \Lambda_G.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde $k_0 = g$ e $\mathbb{T}_{g,0}[\cdot] = \Gamma_{gg}[\cdot]$. Desta maneira podemos reescrever a expressão (3.54) como

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(N)} &= (N+1)\mathbb{T}_{g,0}[S_g] \\
&+ N \sum_{g' \neq k_1} \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,1}[S_{k_1}] \\
&+ (N-1) \sum_{g \neq k_1} \sum_{k_2 \neq k_1} \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
&\vdots \\
&+ \underbrace{\sum_{k_1 \neq g} \sum_{k_2 \neq k_1} \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}}_{\times N} \Xi_{g,N-1} \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}].
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\Phi_g^{(N)} = (N+1)\mathbb{T}_{g,0}[S_g] + \sum_{\omega=1}^N (N-\omega+1) \left\{ \underbrace{\sum \cdots \sum}_{\times \omega} \Xi_{g,\omega-1} \mathbb{T}_{g,\omega}[S_{k_\omega}] \right\}. \tag{3.57}$$

Finalmente, podemos concluir que a inversão de (3.57) representada no espaço original (x, t) usando $\mathbb{T}_{g,j_{max}}(x, t)(\cdot)$, que é

$$\mathbb{T}_{g,j_{max}}[S_g](x, t) = I_{m_1, \dots, m_{k_{j_{max}}}}^{S_g}(x, t) \tag{3.58}$$

assume a forma

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(N)}(x, t) &= (N+1)I_{0,0, \dots, m_g}^{S_g}(x, t) \\
&+ \sum_{\omega=1}^N (N-\omega+1) \left\{ \underbrace{\sum \cdots \sum}_{\times \omega} \Xi_{g,\omega-1} I_{m_1, \dots, m_g, m_{k_1}, \dots, m_{k_\omega}}^{S_{k_\omega}}(x, t) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

que representa a solução final de ordem N para o grupo g .

Considerando para estas simulações uma nova tabela de conjuntos de parâmetros (Tabela 3.2). Nos dois primeiros conjunto consideramos o caso sem reentrância de nêutrons. É imediato a percepção do fato de que o número de singularidades cresce ao aumentarmos a espessura da placa h .

Tabela 3.2: Conjunto de parâmetros usados nas simulações. Quantidades adimensionais assumidas.

	σ_1	σ_2	σ_3	v_1	v_2	v_3	h	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	$x_{0,3}$
conjunto 5	1.00	1.00	2.00	1.00	0.50	0.10	10.00	0.50	0.35	0.30
conjunto 6	1.00	1.00	2.00	1.00	0.50	0.10	10.00	0.50	0.00	0.15
conjunto 7	1.00	1.00	2.00	1.00	0.50	0.10	10.00	0.50	0.25	0.25
conjunto 8	1.00	1.00	2.00	1.00	0.50	0.10	10.00	0.50	0.25	0.15

onde usaremos para o caso com 3 grupos de energia a matriz de espalhamento dada por

$$M_{scat} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.05 & 0.40 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.25 & 0.35 & 1.00 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Analisando os resultados para o caso de 3 grupos de energia, usamos a tabela 3.2. Apresentamos alguns transientes dos fluxos, das figuras 3.17 até 3.19.

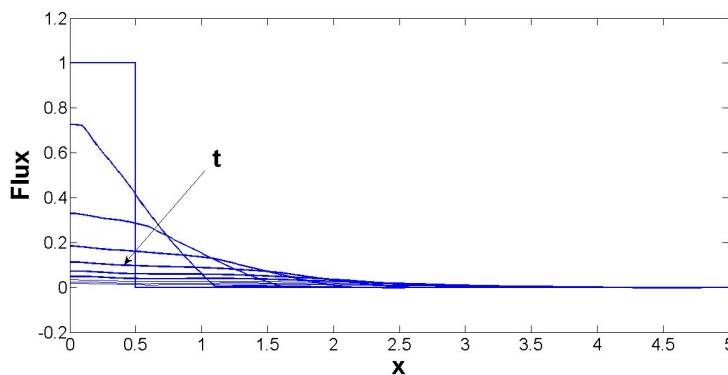


Figura 3.17: Fluxo $g = 1$ usando o conjunto de parâmetros 4, $N = 10$ e valores de tempo de 0 até 10 segundos.

Analisando os padrões dos fluxos de nêutrons em comparação com a variável espacial também podemos ver claramente na representação em relação a

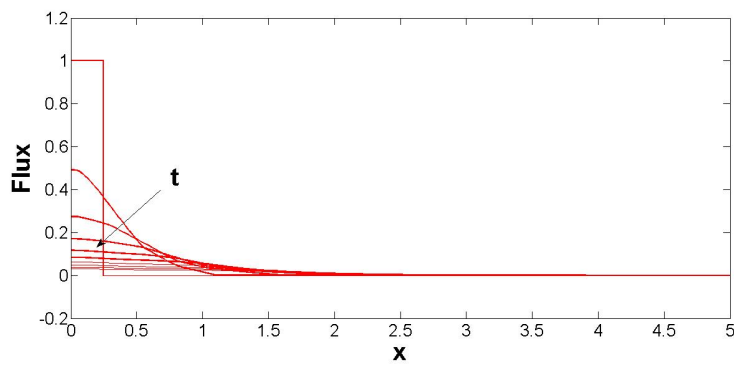


Figura 3.18: Fluxo $g = 2$ usando o conjunto de parâmetros 4, $N = 10$ e valores de tempo de 0 até 10 segundos.

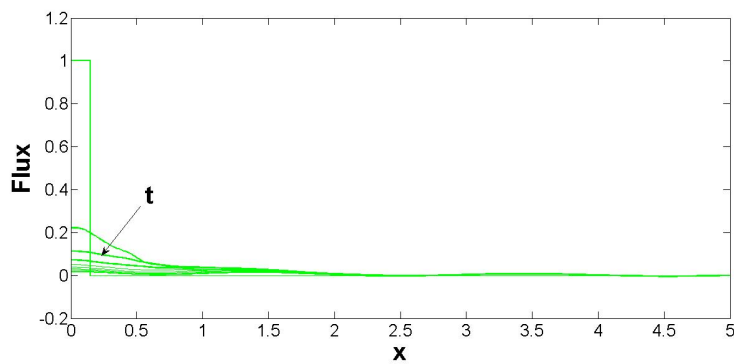


Figura 3.19: Fluxo $g = 3$ usando o conjunto de parâmetros 4, $N = 10$ e valores de tempo de 0 até 10 segundos.

este caso que o ponto espacial no qual a fonte é posicionada é claramente visto e impulsiona um fluxo de nêutrons inicial constante até aquela posição. Fica claro também que a medida que a variável temporal cresce notamos o decaimento do fluxo para cada grupo de energia. Julgamos os resultados extremamente satisfatórios em comparação visual com a literatura e também uma vez que podemos expressar a solução como sendo analítica e através de uma combinação das mesmas em ordens anteriores.

3.6 Modelos de aproximação de $\Gamma_{gg'}(B_n, s)$ para teoria Multi-grupo

Definimos a função $\Gamma_{gg'}(B_n, s)$ como

$$\Gamma_{gg'}(B_n, s) := \frac{A_{0,0}^g(B_n, s)}{1 - \sigma_g c_{gg'} A_{0,0}^g(B_n, s)} \quad (3.61)$$

estabelendo como equação característica, isto é, teremos as singularidades ao fazermos

$$1 - \sigma_g c_{gg'} A_{0,0}^g(B_n, s) = 0 \quad (3.62)$$

por definição, temos

$$\begin{aligned} A_{l,k}^g(B_n, s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu') P_k(\mu')}{(\sigma_g + s v_g^{-1}) - i B_n \mu'} d\mu' \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{P_l(\mu') P_k(\mu') \omega_m}{(\sigma_g + s v_g^{-1}) - i B_n \mu_m} \\ &= \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_g + s v_g^{-1}) P_l(\mu') P_k(\mu') \omega_m}{(\sigma_g + s v_g^{-1})^2 + (B_n \mu_m)^2} \end{aligned}$$

Assim

$$A_{0,1}^g(B, s) = A_{1,0}^g(B, s) \approx \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_g + s v_g^{-1}) \mu_m \omega_m}{(\sigma_g + s v_g^{-1})^2 + (B_n \mu_m)^2} \quad (3.63)$$

$$A_{1,1}^g(B, s) \approx \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_g + s v_g^{-1}) \mu_m^2 \omega_m}{(\sigma_g + s v_g^{-1})^2 + (B_n \mu_m)^2} \quad (3.64)$$

e usando este fato, temos

$$\begin{aligned}
A_{0,0}^g(B_n, s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB_n\mu'} \\
&\approx \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB_n\mu_m} \\
&= \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_g + sv_g^{-1})\omega_m}{(\sigma_g + sv_g^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2}
\end{aligned}$$

pela definição de modelo contínuo, teríamos

$$A_{0,0}^g(B, s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu'} = \frac{1}{B} \arctan \frac{B}{\sigma_g + sv_g^{-1}} \quad (3.65)$$

por (3.62) temos

$$1 - \sigma_g c_{gg'} \frac{1}{B_n} \arctan \frac{B_n}{\sigma_g + sv_g^{-1}} = 0 \quad (3.66)$$

Assim, usando a mesma metodologia do capítulo anterior, definimos

$\tau_n^g = B_n/\sigma_g$ e $p_g = (s(v_g\sigma_g) + 1)^{-1}$. Logo,

$$1 - \frac{c_{gg'}}{\tau_n^g} \arctan \tau_n^g p_g = 0 \Rightarrow \arctan \tau_n^g p_g = \frac{\tau_n^g}{c_{gg'}} \quad (3.67)$$

nesse caso, teremos singularidade somente se $\frac{\tau_n^g}{c_{gg'}} \leq \frac{\pi}{2}$ e não teríamos se $\frac{\tau_n^g}{c_{gg'}} > \frac{\pi}{2}$, mas

$$\frac{B_n}{\sigma_g c_{gg'}} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B_n > \frac{\sigma_g c_{gg'} \pi}{2} \Rightarrow \frac{(2n-1)\pi}{h} > \frac{\sigma_g c_{gg'} \pi}{2} \Rightarrow n > \frac{h\sigma_g c_{gg'} + 2}{4} \quad (3.68)$$

Assim, definimos um valor limite para n , como segue

$$n_{lim} = \left\lceil \frac{h\sigma_g c_{gg'} + 2}{4} \right\rceil \quad (3.69)$$

isto é, teremos singularidades se $n \leq n_{lim}$. Podemos encontrar estas singularidades resolvendo a equação

$$1 - \sigma_g c_{gg'} \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_g + sv_g^{-1})\omega_m}{(\sigma_g + sv_g^{-1})^2 + (B_n \mu_m)^2} = 0 \quad (3.70)$$

onde cada ω_m e μ_m são definidos como no capítulo anterior. Vamos novamente utilizar $M = 6$, tratando-se de uma aproximação de melhor qualidade ao problema. Logo, por analogia, teremos que as se dão em

$$s = -\sigma_g v_g \left\{ \frac{45\sigma_g^2 + 27B_n^2 - 5c_{gg}\sigma_g^2 + 12c_{gg}B_n^2}{135\sigma^2 - 10c_{gg}\sigma_g^2 + 27B_n^2} \right\} \quad (3.71)$$

A distribuição dos polos no plano complexo calculada usando como exemplo dois diferentes conjuntos de parâmetros, incluindo o caso com reentrância de nêutrons, é abordada nos gráficos numerados de 3.20 até 3.25. Em conclusão, a transformação inversa será constituída pela soma de uma parte integral ao longo do ramo e um termo exponencial introduzido pelo resíduo referente a cada singularidade, sempre que esta existir, como anteriormente. A seguir, mostramos os resultados para distribuição dos polos relativos aos grupos 1,2 e 3.

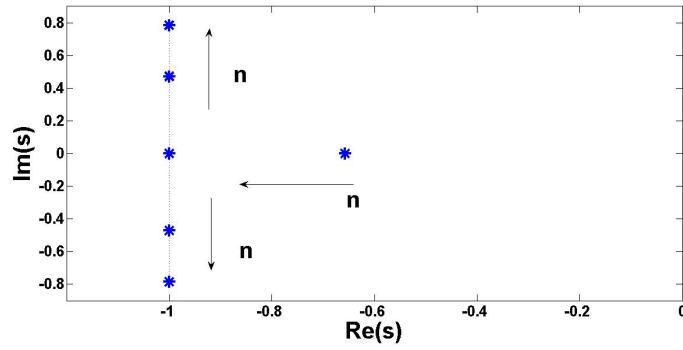


Figura 3.20: Polos para $g = 1$ and $h = 20$.

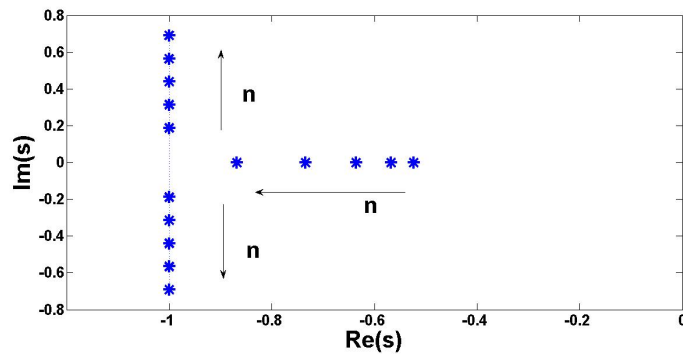


Figura 3.21: Polos para $g = 1$ and $h = 50$.

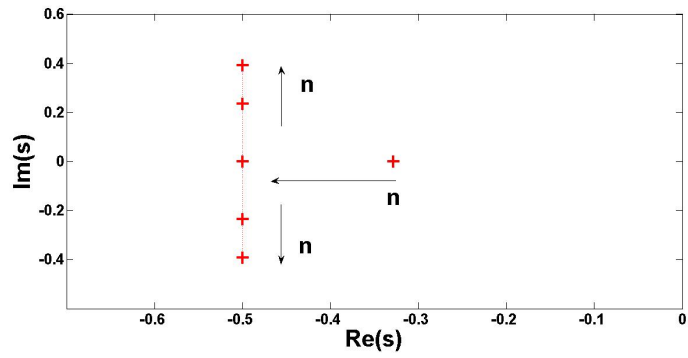


Figura 3.22: Polos para $g = 2$ and $h = 20$.

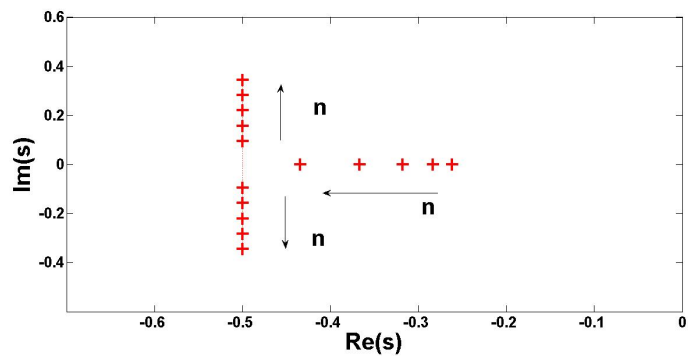


Figura 3.23: Polos para $g = 2$ and $h = 50$.

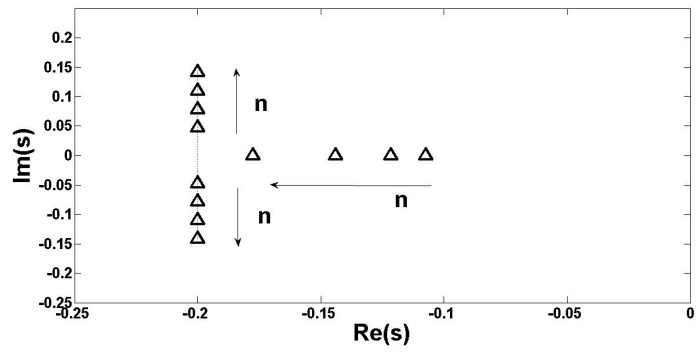


Figura 3.24: Polos para $g = 3$ and $h = 20$.

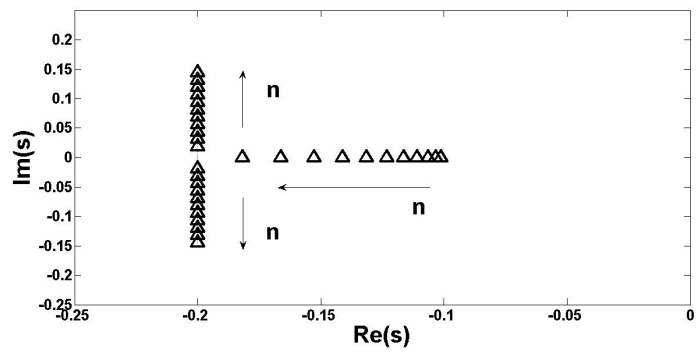
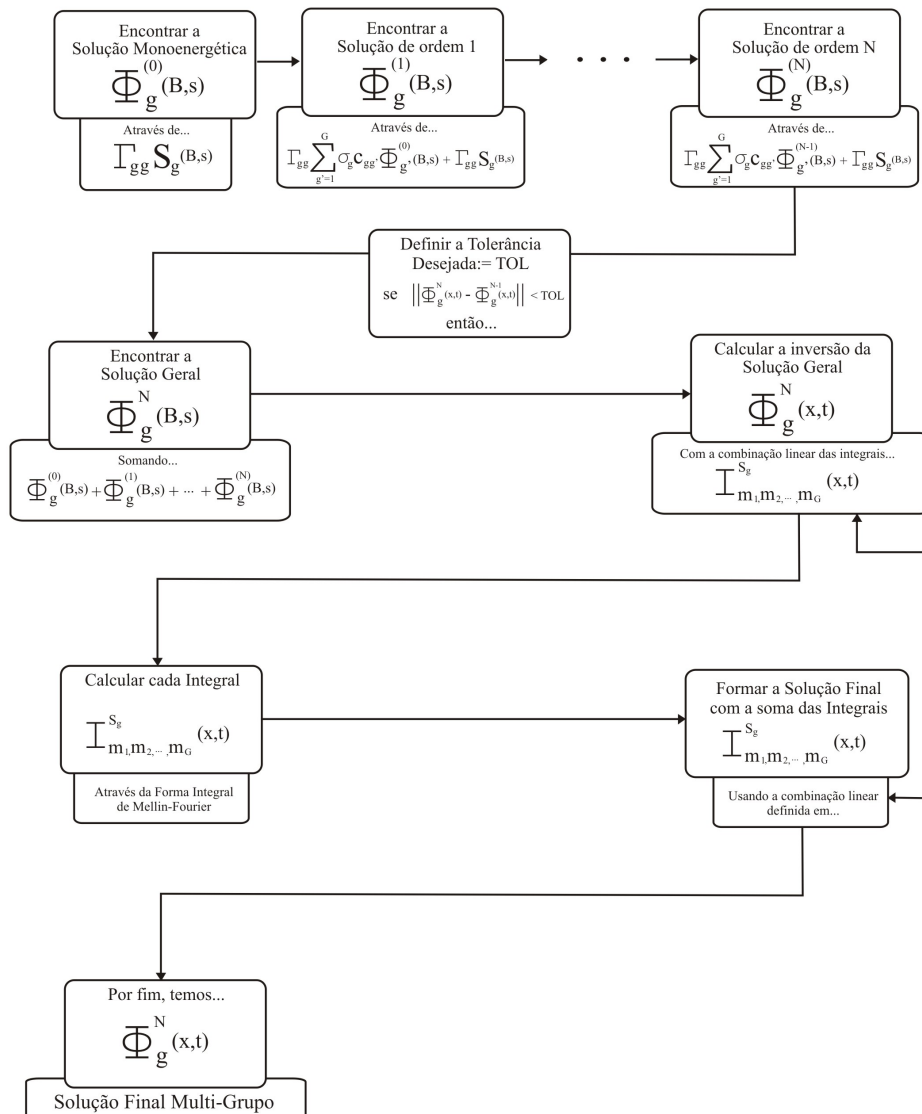


Figura 3.25: Polos para $g = 3$ and $h = 50$.

Fluxograma do Processo Geral para obtenção da Solução Multi-Grupo com Fontes pulsadas

Dados de Entrada: $h, T, c_{gg'}, \sigma_g, v_g, N, G, N_{\text{harm}}, g, g' \in \{1, 2, \dots, G\}$

Saída: $\bar{\Phi}_g^N(x, t)$



3.7 Caso Anisotrópico

Bem como para o caso monoenergético, aqui para espalhamento anisotrópico usaremos a formulação B_N . Escrevendo a equação do transporte multi-grupo considerando um núcleo de espalhamento anisotrópico, temos então

$$v_g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_g(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi_g(x, \mu, t) + \sigma_g \varphi_g(x, \mu, t) = \sum_{g'=1}^G \oint c_{gg'} \sigma_{g'}(\Omega' \cdot \Omega) \varphi_{g'}(x, \Omega, t) d\Omega' + \frac{1}{2} S_g(x, t) \quad (3.72)$$

definindo

$$\sigma_g(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_{l,g} P_l(\Omega' \cdot \Omega) \quad (3.73)$$

Usando a mesma estratégia tomada no caso isotrópico, aplicamos as transformadas de Laplace e Fourier, tornando (3.72) em

$$\varphi_g(B, \mu, s) [(\sigma_g + s v_g^{-1}) - i B \mu] = \sum_{g'=1}^G c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_{l,g'} \varphi_{l,g'}(B, s) P_l(\mu) \right\} + \frac{1}{2} S_g(B, s) \quad (3.74)$$

Assumindo que

$$\varphi_{k,g}(B, s) = \int_{-1}^1 \varphi_g(B, \mu, s) P_k(\mu) d\mu \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \varphi_g(B, \mu, s) &= \frac{1}{(\sigma_g + s v_g^{-1}) - i B \mu} \sum_{g'=1}^G c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_{l,g'} \varphi_{l,g'}(B, s) P_l(\mu) \right\} \\ &+ \frac{1}{(\sigma_g + s v_g^{-1}) - i B \mu} \frac{1}{2} S_g(B, s) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Podemos multiplicar ambos lados de (3.76) por $P_k(\mu)$ e integrando sobre a variável angular μ , temos

$$\begin{aligned} \varphi_{k,g}(B, s) &= \sum_{g'=1}^G c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^L \sigma_{l,g'} \frac{2l+1}{2} \varphi_{l,g'}(B, s) \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu)P_k(\mu)}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu} d\mu \right\} \\ &+ \frac{1}{2} S_g(B, s) \int_{-1}^1 \frac{P_k(\mu)}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu} d\mu \end{aligned} \quad (3.77)$$

como por definição temos

$$A_{l,k}^g(B, s) = \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu)P_k(\mu)}{(\sigma_g + sv_g^{-1}) - iB\mu} d\mu \quad (3.78)$$

Então

$$\varphi_{k,g}(B, s) = \sum_{g'=1}^G c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^L \sigma_{l,g'} (2l+1) \varphi_{l,g'}(B, s) A_{l,k}^g(B, s) \right\} + S_g(B, s) A_{0,k}^g(B, s)$$

Também usando que $A_{l,k}^g(B, s) = A_{k,l}^g(B, s)$ e tendo em mente que

$$(k+1)A_{l,k+1}^g(B, s) = i \frac{\delta_{l,k}}{B} - i \frac{\sigma_g + sv_g^{-1}}{B} (2k+1)A_{l,k}^g(B, s) - kA_{l,k-1}^g(B, s) \quad (3.79)$$

dessa maneira para $k, l \geq 2$, podemos usar a formula recursivamente para calcular $A_{l,k}^g(B, s)$ a partir de $A_{0,0}^g(B, s)$.

Por exemplo, supondo a aproximação B_0 , temos exatamente o caso isotrópico monoenergético. Agora, ilustrando o caso da aproximação B_1 . Por exemplo, tomando 2 grupos de energia, $k = 0, 1$ e $L = 1$, podemos escrever $\varphi_{0,g}(B, s)$ e $\varphi_{1,g}(B, s)$

$$\varphi_{0,g}(B, s) = \sum_{g'=1}^2 c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^1 (2l+1) \sigma_{l,g'} \varphi_{l,g'}(B, s) A_{l,0}^g(B, s) \right\} + S_g(B, s) A_{0,0}^g(B, s) \quad (3.80)$$

$$\varphi_{1,g}(B, s) = \sum_{g'=1}^2 c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^1 (2l+1) \sigma_{l,g'} \varphi_{l,g'}(B, s) A_{l,1}^g(B, s) \right\} + S_g(B, s) A_{0,1}^g(B, s) \quad (3.81)$$

Assim, de maneira geral para $g \in \Lambda_G$, teremos

$$\varphi_{1,g}(B, s) = \sum_{g'=1}^G c_{gg'} \left\{ \sum_{l=0}^1 (2l+1) \sigma_{l,g'} \varphi_{l,g'}(B, s) A_{l,1}^g(B, s) \right\} + S_g(B, s) A_{0,1}^g(B, s) \quad (3.82)$$

Aqui, de maneira similar ao caso monoenergético, a solução é dada independentemente para cada ordem de anisotropia para cada grupo g e assim por diante até a ordem de anisotropia $L + 1$. Novamente ao final, devemos combiná-las todas juntas nas equação acima (3.82) afim de obter a resposta final para o fluxo.

3.8 Análise Geral do Erro no Caso Isotrópico

Temos como expressão geral para o fluxo truncada em N

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(N)} = & \Gamma_{gg} S_g + \frac{N}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sigma_{k_1} c_{gk_1} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1 k_1} S_{k_1} \\
& + \frac{N-1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \sigma_{k_1} c_{gk_1} \sigma_{k_2} c_{k_1 k_2} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1 k_1} \Gamma_{k_2 k_2} S_{k_2} \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \sigma_{k_1} c_{gk_1} \cdots \sigma_{k_N} c_{k_{N-1} k_N} \Gamma_{gg} \Gamma_{k_1 k_1} \cdots \Gamma_{k_N k_N} S_{k_N}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Relembrando as definições de $\Xi_{g, \ell_{max}}$ e $T_{g, \ell_{max}}(\cdot)$ dadas por

$$\Xi_{g, \ell_{max}} := \prod_{\ell=1}^{\ell_{max}} \sigma_{k_\ell} c_{k_{\ell-1} k_\ell}, \quad j_{max} \in \Lambda_{G-1} \tag{3.84}$$

$$\mathbb{T}_{g, \ell_{max}}[\cdot] := \left\{ \prod_{j=1}^{j_{max}} \Gamma_{k_j k_j} \right\} \Gamma_{gg}[\cdot], \quad j_{max} \in \Lambda_G \tag{3.85}$$

Assim, teremos que

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(N)} = & \mathbb{T}_{g,0}[S_g] + \frac{N}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_1}] \\
& + \frac{N-1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \Xi_{g, N-1} \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}]
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Ao analisar o erro, queremos que $\|\Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)}\| \rightarrow 0 \forall g \in \Lambda_G$ ao $N \rightarrow 0$, para tal, fazendo essa diferença teremos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)}\| &= \|\mathbb{T}_{g,0}[S_g] + \frac{N+1}{N+2} \sum_{g' \neq k_1}^G \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,1}[S_{k_1}] \\
&+ \frac{N}{N+2} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{N+2} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \sum_{k_{N+1} \neq k_N}^G \Xi_{g,N} \mathbb{T}_{g,N+1}[S_{k_{N+1}}] \\
&- \mathbb{T}_{g,0}[S_g] - \frac{N}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_1}] \\
&- \frac{N-1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
&\vdots \\
&- \frac{1}{N+1} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \Xi_{g,N-1} \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}] \|\tag{3.87}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\| \Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)} \| = & \left\| \left(\frac{N+1}{N+2} - \frac{N}{N+1} \right) \sum_{g' \neq k_1}^G \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,1}[S_{k_1}] \right. \\
& + \left(\frac{N}{N+2} - \frac{N-1}{N+1} \right) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
& \vdots \\
& + \left(\frac{2}{N+2} - \frac{1}{N+1} \right) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \Xi_{g,N-1} \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}] \\
& \left. + \frac{1}{N+2} \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \sum_{k_{N+1} \neq k_N}^G \Xi_{g,N} \mathbb{T}_{g,N+1}[S_{k_{N+1}}] \right\|
\end{aligned} \tag{3.88}$$

O padrão de cada multiplicador é definido como

$$\gamma(\kappa) := \left(\frac{\kappa+1}{N+2} - \frac{\kappa}{N+1} \right) = \frac{N-\kappa+1}{(N+2)(N+1)} \tag{3.89}$$

Logo, teremos que

$$\begin{aligned}
\| \Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)} \| = & \left\| \gamma(N) \sum_{g' \neq k_1}^G \Xi_{g,0} \mathbb{T}_{g,1}[S_{k_1}] \right. \\
& + \gamma(N-1) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \Xi_{g,1} \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \\
& \vdots \\
& + \gamma(1) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \Xi_{g,N-1} \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}] \\
& \left. + \gamma(0) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \sum_{k_{N+1} \neq k_N}^G \Xi_{g,N} \mathbb{T}_{g,N+1}[S_{k_{N+1}}] \right\|
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Agora, por definição temos que $\Xi_{g,\ell_{max}} \geq 0$ e também que

$$\Xi_{g,N} < \Xi_{g,N-1} \quad \forall g \in \Lambda_G \quad (3.91)$$

pois $0 \leq \sigma_g c_{gg'} < 1 \quad \forall g, g' \in \Lambda_G$. Analisando cuidadosamente (3.90) vemos que cada somatório tem exatamente $(G - 1)$ termos. Concluimos assim que na n -ésima linha teremos $(G - 1)^n$ termos. Isto é, na n -ésima linha teremos que

$$\begin{aligned} & \gamma(N - n + 1) \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_n \neq k_{n-1}}^G \Xi_{g,n-1} \mathbb{T}_{g,n}[S_{k_n}] \leq \\ & \gamma(N - n + 1) \sup_{g \in \Lambda_n} \Xi_{g,n-1} (G - 1)^n \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_n \neq k_{n-1}}^G \mathbb{T}_{g,n}[S_{k_n}] \end{aligned} \quad (3.92)$$

Usando (3.92) teremos que

$$\begin{aligned} \|\Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)}\| & \leq \gamma(N) \sup_{g \in \Lambda_1} \Xi_{g,0} (G - 1) \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \mathbb{T}_{g,1}[S_{k_1}] \right\| \\ & + \gamma(N - 1) \sup_{g \in \Lambda_2} \Xi_{g,1} (G - 1)^2 \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \mathbb{T}_{g,2}[S_{k_2}] \right\| \\ & \vdots \\ & + \gamma(1) \sup_{g \in \Lambda_N} \Xi_{g,N-1} (G - 1)^N \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \mathbb{T}_{g,N}[S_{k_N}] \right\| \\ & + \gamma(0) \sup_{g \in \Lambda_{N+1}} \Xi_{g,N} (G - 1)^{N+1} \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \sum_{k_{N+1} \neq k_N}^G \mathbb{T}_{g,N+1}[S_{k_{N+1}}] \right\| \end{aligned} \quad (3.93)$$

Definimos

$$C(\kappa) := \gamma(\kappa) (G - 1)^{N-\kappa+1} = \frac{n - \kappa + 1}{(N + 2)(N + 1)} (G - 1)^{N-\kappa+1} \quad (3.94)$$

e sabemos também que a sequência dos supremos é decrescente, usando (3.91). Assim temos que

$$\sup_{g \in \Lambda_G} \Xi_{g, N-1} > \sup_{g \in \Lambda_G} \Xi_{g, N} \quad (3.95)$$

Fica evidente que no caso em que $G = 2$, teremos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C(\kappa) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N - \kappa + 1}{(N + 2)(N + 1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0 \quad (3.96)$$

e conseqüentemente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Phi_g^{N+1} - \Phi_g^N\| = 0 \quad \forall g \in \Lambda_G \quad (3.97)$$

Ao tomarmos que para valores fixo de x e t , teremos

$$\underbrace{\left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \mathbb{T}_{g, N}[S_{k_N}] \right\|}_{m_g(N)} \leq f_g(N) \quad (3.98)$$

Podemos reescrever que

$$\begin{aligned} m_g(N) &= \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \left(\prod_{j=1}^N \Gamma_{k_j k_j} \Gamma_{gg}[S_{k_N}] \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G (\Gamma_{k_N k_N} \dots \Gamma_{k_1 k_1} \Gamma_{gg}[S_{k_N}]) \right\| \\ &= \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \dots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \left(\frac{A_{00}^{k_N}}{1 - \sigma_{k_N} c_{k_N k_N} A_{00}^{k_N}} \dots \frac{A_{00}^g}{1 - \sigma_g c_{gg} A_{00}^g} S_{k_N} \right) \right\| \end{aligned} \quad (3.99)$$

Pensando que este produto dentro dos somatórios pode ser escrito por

$$\frac{A_{00}^{k_N}}{1 - \sigma_{k_N} c_{k_N k_N} A_{00}^{k_N}} \cdots \frac{A_{00}^{k_1}}{1 - \sigma_{k_1} c_{k_1 k_1} A_{00}^{k_1}} \frac{A_{00}^g}{1 - \sigma_g c_{gg} A_{00}^g} = \left(\prod_{j=1}^N A_{00}^{k_j} \right) \left(\frac{1}{1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} A_{00}^{k_j}} \right)$$

recordando que a definição de $A_{00}^{k_j}(B, s)$

$$\begin{aligned} A_{00}^{k_j} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1}) - iB\mu'} \\ &\approx \sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})\omega_m}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2 + (B\mu_m)^2} \end{aligned} \quad (3.100)$$

A ideia aqui é simplesmente majorar a ultima expressão. Como temos que $(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2 > (\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2$, pois $(B_n\mu_m)^2 > 0 \forall n, m \in \mathbb{N}$. Teremos então

$$\frac{1}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2} < \frac{1}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2} \quad (3.101)$$

Logo,

$$\sum_{m=1}^{M/2} \frac{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})\omega_m}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})^2 + (B_n\mu_m)^2} \leq \sum_{m=1}^{M/2} \frac{\omega_m}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})} \quad (3.102)$$

Agora considerando que temos um somatório em m , podemos dizer que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M/2} \frac{\omega_m}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})} &= \frac{1}{(\sigma_{k_j} + sv_{k_j}^{-1})} \underbrace{\sum_{m=1}^{M/2} \omega_m}_{W_M < \infty} \\ &= \underbrace{(v_{k_j}\sigma_{k_j} + s)^{-1}}_{f(s)} \cdot v_{k_j} W_M \end{aligned} \quad (3.103)$$

Tomando agora o segundo produtório, isto é, o termo

$$1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} A_{00}^{k_j} = 1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} \left(\sum_{m=1}^{M/2} \frac{\omega_m}{(\sigma_{k_j} + s v_{k_j}^{-1})} \right) > 1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} f(s) v_{k_j} W_M \quad (3.104)$$

Implica que

$$\frac{1}{1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} A_{00}^{k_j}} < \frac{1}{1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} f(s) v_{k_j} W_M} \quad (3.105)$$

ou ainda que

$$\frac{1}{1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} A_{00}^{k_j}} < \frac{1/f(s)}{1/f(s) - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} v_{k_j} W_M} \quad (3.106)$$

Assim, por fim teremos que

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^N A_{00}^{k_j} \right) \left(\prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} A_{00}^{k_j}} \right) &< \left(\prod_{j=1}^N v_{k_j} W_M f(s) \cdot \frac{1/f(s)}{1/f(s) - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} v_{k_j} W_M} \right) \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{v_{k_j} W_M}{1/f(s) - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} v_{k_j} W_M} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{v_{k_j} W_M}{v_{k_j} \sigma_{k_j} + s - \sigma_{k_j} c_{k_j k_j} v_{k_j} W_M} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{v_{k_j} W_M}{s + v_{k_j} \sigma_{k_j} (1 - c_{k_j k_j} W_M)} \end{aligned}$$

Olhando novamente para as funções $m_g(N)$ a sabendo que $W_M = 2$, pois representam simplesmente os pesos da quadratura gaussiana, teremos então

$$\begin{aligned}
m_g(N) &= \left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \left(\prod_{j=1}^N \Gamma_{k_j k_j} \Gamma_{gg} \right) S_{k_N} \right\| \\
&< \underbrace{\left\| \sum_{g' \neq k_1}^G \sum_{k_2 \neq k_1}^G \cdots \sum_{k_N \neq k_{N-1}}^G \left(\prod_{j=1}^N \frac{2v_{k_j}}{s + v_{k_j} \sigma_{k_j} (1 - 2c_{k_j k_j})} \right) S_{k_N} \right\|}_{f_{g,N}(B,s)} \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Aqui teremos uma função a ser invertida para poder expressar finalmente uma maximização da diferença $\|\Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)}\|$. Talvez observando separadamente a expressão final e usando o teorema da convolução, podemos chegar a um valor final. Separando o problema em

$$F(s) = \prod_{j=1}^N \frac{2v_{k_j}}{s + a_{k_j}} \quad \text{e} \quad S(s) = S_{k_N} \quad (3.108)$$

onde $a_{k_j} = v_{k_j} \sigma_{k_j} (1 - 2c_{k_j k_j})$. Assim

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\prod_{j=1}^N \frac{2v_{k_j}}{s + a_{k_j}}\right\} \quad (3.109)$$

mas

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^N \frac{2v_{k_j}}{s + a_{k_j}} &= 2 \prod_{j=1}^N \frac{v_{k_j}}{s + a_{k_j}} = 2 \left(\frac{v_{k_1}}{s + a_{k_1}} \frac{v_{k_2}}{s + a_{k_2}} \cdots \frac{v_{k_N}}{s + a_{k_N}} \right) \\
&= 2v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_N} \frac{1}{(s + a_{k_1})(s + a_{k_2}) \cdots (s + a_{k_N})} \\
&= 2 \underbrace{\left(\prod_{j=1}^N v_{k_j} \right)}_{V_N} \left(\frac{K_1}{(s + a_{k_1})} + \frac{K_2}{(s + a_{k_2})} + \cdots + \frac{K_N}{(s + a_{k_N})} \right)
\end{aligned}$$

Assim podemos dizer que

$$\frac{1}{(s + a_{k_1})(s + a_{k_2})\dots(s + a_{k_N})} = \frac{K_1}{(s + a_{k_1})} + \frac{K_2}{(s + a_{k_2})} + \dots + \frac{K_N}{(s + a_{k_N})} \quad (3.110)$$

ou ainda que

$$K_1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N (s + a_{k_j}) \right) + K_2 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N (s + a_{k_j}) \right) + \dots + K_N \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N (s + a_{k_j}) \right) = 1$$

desde que tenhamos sempre que $a_{k_j} \neq a_{k_{j+1}} \forall \in \{1, 2, \dots, N\}$. Assim, tomando para o primeiro indice que $s = -a_{k_1}$, teremos

$$K_1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N (a_{k_j} - a_{k_1}) \right) = 1 \quad (3.111)$$

ou ainda que

$$K_1 = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N (a_{k_j} - a_{k_1}) \right)^{-1} \quad (3.112)$$

Seguindo assim, assumindo $s = -a_{k_j}$ para cada índice j , teremos que consequencia que

$$K_j = \left(\prod_{\substack{\delta=1 \\ \delta \neq j}}^N (a_{k_\delta} - a_{k_j}) \right)^{-1} \quad (3.113)$$

Por fim podemos escrever um expressão para $F(s)$ da seguinte maneira

$$F(s) = 2V_N \sum_{j=1}^N \frac{K_j}{s + a_{k_j}} \quad (3.114)$$

Pensando então na inversão, teremos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ 2V_N \sum_{j=1}^N \frac{K_j}{s + a_{k_j}} \right\} = 2V_N \sum_{j=1}^N K_j e^{-a_{k_j} t} =: f(t) \quad (3.115)$$

Assim, ao final usando o teorema da convolução, teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \int_0^t 2V_N \sum_{j=1}^N K_j e^{-a_{k_j}(t-u)} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(B_n x) S(u) du \\ &= 2V_N \sum_{j=1}^N K_j e^{-a_{k_j} t} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(B_n x) S_{0,t} \int_0^t e^{a_{k_j} u} du \\ &= 2V_N \sum_{j=1}^N K_j e^{-a_{k_j} t} \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(B_n x) S_{0,t} \frac{1}{a_{k_j}} (e^{a_{k_j}} - 1) \end{aligned} \quad (3.116)$$

onde vimos que V_N , K_j e $S_{0,t}$ são constantes, sendo que última consideramos um valor inicial para fonte do grupo g em questão. Por fim, podemos expressar que

$$\begin{aligned} f_{g,N}(x, t) &= 2S_{0,t} V_N \sqrt{\frac{2}{h}} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} K_j \frac{e^{-a_{k_j} t}}{a_{k_j}} \cos(B_n x) (e^{a_{k_j}} - 1) \\ &= S_{0,t} V_N \sqrt{\frac{8}{h}} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_j}{a_{k_j}} \cos(B_n x) (1 - e^{-a_{k_j}}) \end{aligned} \quad (3.117)$$

Assim, para cada termo de ordem N em $\| \Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)} \|$, teremos que

$$\begin{aligned}
\| \Phi_g^{(N+1)} - \Phi_g^{(N)} \| &\leq C(N) \sup_{g \in \Lambda_G} \Xi_{g,0} f_g(1) \\
&+ C(N-1) \sup_{g \in \Lambda_G} \Xi_{g,1} f_g(2) \\
&\vdots \\
&+ C(0) \sup_{g \in \Lambda_G} \Xi_{g,N} f_g(N+1)
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Sendo assim, para as simulações, tomaremos que

$$f_{g,N}(x, t) = S_{0,t} V_N \sqrt{\frac{8}{h}} \sum_{j=1}^N \frac{K_j}{a_{k_j}} (1 - e^{-a_{k_j}}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos(B_n x) \right) \tag{3.119}$$

Algumas simulações foram feitas com intuito de expressar mais claramente a convergência do método com relação ao número de truncamento. Analisamos com várias hipóteses mantendo um número fixo de três grupos de energia. As tabelas representam as diferenças entre duas aproximações para um fixo grupo de energia e com diferentes matrizes de expalhamento definidas por

$$M_{scat,1} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.05 & 0.40 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.25 & 0.35 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad M_{scat,3} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.10 & 0.80 \\ 0.30 & 1.00 & 0.50 \\ 0.25 & 0.35 & 0.80 \end{bmatrix}, \quad M_{scat,3} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.05 & 0.75 \\ 0.30 & 0.60 & 0.30 \\ 0.25 & 0.45 & 0.70 \end{bmatrix}.$$

Na terceira tabela, focamos na análise de convergência do fluxo com relação ao número de funções harmonicas utilizadas em cada simulação. Facilmente se nota a convergência através da análise dos numeros.

Após a análise destes resultados, temos como concluir que a convergência do método é assegurada inclusive para ordens não muito grandes. Os valores do fluxo podem ser assegurados com ao menos 4 dígitos significativos apenas com

Tabela 3.3: Padrão da diferença $\|\Phi_1^{N+1} - \Phi_1^N\|$ para diferentes valores de N e valor fixo x e t .

N	com $M_{scat,1}$	com $M_{scat,2}$	com $M_{scat,3}$
1	7.447830(-1)	7.332352(-1)	1.167473(0)
2	2.951100(-2)	4.775629(-2)	1.908838(-1)
5	2.986117(-3)	4.889153(-3)	2.108829(-2)
10	8.142365(-4)	1.332161(-3)	5.639281(-3)
50	3.512392(-5)	5.746578(-5)	2.432561(-4)
100	9.047072(-6)	1.480179(-5)	6.265689(-5)

Tabela 3.4: Padrão da diferença $\|\Phi_2^{N+1} - \Phi_2^N\|$ para diferentes valores de N e valor fixo x e t .

N	com $M_{scat,1}$	com $M_{scat,2}$	com $M_{scat,3}$
1	6.347432(-1)	7.012899(-1)	1.083828(0)
2	2.632132(-2)	4.402930(-2)	1.727772(-1)
5	2.441818(-3)	4.672849(-3)	1.972922(-2)
10	7.883525(-4)	1.112196(-3)	5.423521(-3)
50	3.425619(-5)	5.002012(-5)	2.298465(-4)
100	8.783301(-6)	1.332028(-5)	5.789234(-5)

$N = 10$ por exemplo. Isso mostra que temos muito ganho computacional ao usar valores não tão expressivos para N , o que otimizam as simulações e tornam acessíveis obter resultados para aproximações com maiores grupos de energia.

A diferença entre os valores de fluxo a medida que o número de harmônicas cresce, fica claramente menor e o decrescimento também ocorre ao aumentarmos os valores de t , os resultados podem ser considerados satisfatórios inclusive um número relativamente pequeno de harmônicas. Assim validando o método como uma ferramenta extremamente útil nos cálculos multi-grupos de fluxos de nêutrons para casos com fontes pulsadas.

Tabela 3.5: Padrão da diferença $\|\Phi_3^{N+1} - \Phi_3^N\|$ para diferentes valores de N e valor fixo x e t .

N	com $M_{scat,1}$	com $M_{scat,2}$	com $M_{scat,3}$
1	6.224211(-1)	6.923499(-1)	1.736782(0)
2	3.241242(-2)	4.413730(-2)	1.823276(-1)
5	2.113289(-3)	4.692009(-3)	1.433924(-2)
10	6.234815(-4)	1.198786(-3)	6.224422(-3)
50	4.284929(-5)	4.231412(-5)	3.191162(-4)
100	8.722201(-6)	1.883578(-6)	4.785431(-5)

Tabela 3.6: Padrão da diferença ($\Delta\Phi_1(N_{harm}) = \|\Phi_1(N_{harm}) - \Phi_1(N_{harm} - 1)\|$) com respeito ao número de harmônicas (N_{harm}) utilizados para um caso "no up-scattering" com x fixo e t discretizado em $t = T/8, t = T/4$ and $t = T/2$.

N_{harm}	$\Delta\Phi_1(N_{harm})$	$\Delta\Phi_2(N_{harm})$	$\Delta\Phi_1(N_{harm})$	$\Delta\Phi_2(N_{harm})$	$\Delta\Phi_1(N_{harm})$	$\Delta\Phi_2(N_{harm})$
2	2.853474(-1)	4.627542(-2)	1.380345(-2)	2.592340(-3)	4.893225(-3)	7.773282(-4)
5	9.346632(-2)	3.138333(-2)	2.209636(-3)	2.693522(-3)	8.514772(-5)	4.325699(-4)
10	6.423422(-2)	2.001742(-2)	2.933424(-3)	2.003284(-4)	2.162022(-4)	9.225523(-5)
20	8.773891(-3)	3.655340(-3)	4.637899(-4)	1.483882(-4)	6.923656(-5)	4.751164(-5)
50	3.000876(-3)	8.839408(-4)	3.016727(-5)	2.024833(-5)	6.983379(-6)	5.011880(-6)
100	1.342465(-3)	5.122100(-4)	1.006356(-5)	2.534399(-7)	2.513201(-6)	1.627042(-6)
300	4.896682(-4)	1.553928(-4)	7.125123(-7)	3.342333(-9)	1.427922(-7)	1.001298(-7)

4 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Analisando os resultados obtidos, observamos que encontramos a solução da equação integral de transporte de nêutrons multi-grupo a partir do conhecimento da representação analítica da solução para este tipo de problema considerando espalhamento isotrópico de nêutrons obtida por Dulla et al [3]. A metodologia proposta foi aplicada para modelo de dois e três grupos de energia e as simulações numéricas comparadas com resultados da literatura, observando uma boa concordância dos resultados obtidos, reforçado pela análise da convergência do método proposto.

Tratando-se do problema multi-grupo, a derivação da solução é imposta mediante uma composição de funções partindo da já conhecida solução do modelo monoenergético, isto é, construímos uma solução hierárquica baseada na solução já existente e validada por Dulla et al [3], de maneira que agindo recursivamente, conseguimos expressar analiticamente a solução da equação do transporte de nêutrons para este tipo de fontes pulsadas como uma combinação de integrais similares a solução monoenergética. Impomos condições de contorno específicas ao problema, tal que a solução é aplicada em problemas homogêneos e em especificados subdomínios, mas não necessariamente com o mesmo conjunto de parâmetros. Os resultados forma obtidos e relatam um comportamento já esperado para o fluxo de nêutrons neste tipo de reatores.

Neste trabalho, expressamos de maneira geral a solução do problema, tratando-se fontes específicas e domínios finitos para os casos isotrópico e anisotrópico, sendo que demonstramos os resultados multi-grupos para casos $G = 2$ e $G = 3$ e resolvemos teóricamente o problema para casos de um número de grupos finito $G > 1$, bem como para o segundo caso. Os resultados não só refletem as expectativas do problema de transporte, como também o uso da redução $G = 1$ e $N = 0$ confere

exatamente com o método de Dulla et al [3] para o caso monoenergético, validando definitivamente o método em questão.

Tratamos detalhadamente do critério de parada do método usado, especificando seu domínio de funcionalidade, bem como mostramos sua validação através da análise da diferença $\| \Phi_g^{N+1} - \Phi_g^N \|$ e vendo que $\| \Phi_g^{N+1} - \Phi_g^N \| \rightarrow 0$ ao $N \rightarrow \infty$ para diversos valores fixos de x e de t . Fica claro que este fato evidencia a convergência a medida que N cresce.

Pretendemos estender para um caso de mais regiões aplicando condições de continuidade na interface. Estes resultados apresentados são um primeiro passo para uma futura implementação de cálculo do fluxo em células equivalentes em geometrias mais gerais.

Este trabalho, de modo geral, foi construído e desenvolvido utilizando a técnica de transformadas integrais, neste caso, através da Transformada de Laplace no tempo e Fourier no espaço, mostrando como esse tipo de técnica pode ser útil em cálculos de fluxo em reatores nucleares. Acreditamos também, que este é um método promissor para solucionar diferentes classes de problemas relacionadas à Teoria Geral de Transporte de Nêutrons em Reatores Nucleares. Usando esta solução podemos calcular o fluxo dependente da variável espacial e temporal na placa $[-h/2, h/2]$. Apresentamos resultados multi-grupo em reatores nucleares, bem como generalizamos para um número finito de grupos $G > 1$, o que o torna uma ferramenta bastante efetiva na área de teoria de transporte, por ser um método com representação analítica.

5 APÊNDICE

5.1 Validação da Equação do Transporte Multi-grupo

Considerando o problema de maneira geral, temos uma espaço de Banach X e um conjunto de funções $f = f(x, \mu, v)$ as quais são integráveis em todo retângulo $|x| < h/2$, $|\mu| \leq 1$, com $0 < v_m \leq v \leq v_M < \infty$ com norma definida por

$$\|f\| = \int_{v_m}^{v_M} \int_{-1}^1 \int_{-h/2}^{h/2} |f| dx d\mu dv \quad (5.1)$$

Em um abordagem mais geral e abstrata podemos expressar a equação do transporte como

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = T\varphi - B\varphi + JH\varphi, \quad t > 0, \varphi \in D(T) \subset X \quad (5.2)$$

e a condição inicial pode ser representada por

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\varphi(t) - \varphi_0\| = 0, \quad \varphi_0 \in D(T) \quad (5.3)$$

Aqui, consideramos $\varphi = \varphi(x, \mu, v, t)$ a densidade de nêutrons, φ_0 um elemento em $D(T)$. E definiremos como operadores lineares T, B, J e H em X como seguem abaixo

$$Tf = -\mu v \frac{\partial}{\partial x} f \quad (5.4)$$

$$Bf = v \Sigma(v) f \quad (5.5)$$

$$Jf = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x, \mu', v) d\mu' \quad (5.6)$$

$$Hf = \int_{v_m}^{v_M} H(v, v') f(x, \mu, v') dv' \quad (5.7)$$

Neste caso, $H(v, v')$ é o núcleo de espalhamento, $\Sigma(v)$ é a seção de choque total. Por definição $D(T)$ é o conjunto dos elementos $f \in X$ tais que:

$$\begin{aligned} Tf &\in X \\ f(-h/2, \mu, v) &= 0 \text{ se } \mu > 0 \\ f(h/2, \mu, v) &= 0 \text{ se } \mu < 0 \end{aligned}$$

É possível mostrar que $D(T)$ é denso em X . Definimos como resolvente $R(\lambda, T)$ com a seguinte forma

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= \frac{1}{v\mu} \int_{-h/2}^x e^{-\frac{\lambda}{v\mu}(x-x')} g(x', \mu, v) dx' \\ &= -\frac{1}{v\mu} \int_x^{h/2} e^{-\frac{\lambda}{v\mu}(x-x')} g(x', \mu, v) dx' \end{aligned} \quad (5.8)$$

Desde que $Re\lambda > 0$, $g \in X$ e, além disso $R(\lambda, T)$ é tal que

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \quad (5.9)$$

assim $T \in \mathcal{G}(1, 0)$.

Definimos que $\mathcal{G}(M, \beta)$, isto é, a classe dos operadores tais que $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ e para $\xi > \beta$ ao longo do conjunto resolvente de T e o resolvente $(T + \xi)^{-1}$ satisfaz que $\| (T + \xi)^{-k} \| \leq M(\xi - \beta)^{-k}$ para $k \in \mathbf{N}$.

Primeiramente, definimos velocidades máxima e mínima, de maneira que o conjunto das possíveis velocidades dos nêutrons é definido por $V \equiv [v_m, v_M]$ e seccionalmente para cada grupo temos $V_g \equiv [v_{g-1}, v_g]$, para $g = 1, 2, \dots, n$, correspondentemente, o espaço de Banach X_n é composto por todos os vetores de forma que

$$\varphi = \varphi(x, \mu) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x, \mu) \\ \vdots \\ \varphi_n(x, \mu) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

tais que

$$\| \varphi \|_n = \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-h/2}^{h/2} |\varphi_j(x, \mu)| dx d\mu < \infty \quad (5.11)$$

Logo, a versão abstrata da equação do transporte em X_n dos problemas de valor inicial para casos multi-grupo é definida por

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega^{(n)} = T_n \omega^{(n)} - B_n \omega^{(n)} + J_n H_n \omega^{(n)}, \quad t > 0, \quad \omega^{(n)} \in D(T_n) \subset X_n \quad (5.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| \omega^{(n)}(t) - \omega_0^{(n)} \| = 0, \quad \omega_0^{(n)} \in D(T_n) \quad (5.13)$$

onde $\omega^{(n)} = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$ é a densidade de nêutrons em cada grupo de energia, $\omega_0^{(n)}$ é um dado elemento do domínio de T_n o qual é denso em X_n . Aqui,

os operadores T_n, B_n, J_n e H_n são definidos como operadores matriciais, como segue abaixo

$$T_n = -\{v_j \delta_{i,j}\} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.14)$$

$$B_n = \{b_j \delta_{i,j}\}, \quad (5.15)$$

$$J_n = \{\delta_{i,j}\} J \quad (5.16)$$

$$H_n = \{K_{i,j}\} \quad (5.17)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$. Onde $\delta_{i,j}$ é o Delta de Kronecher e as constantes b_j e $K_{i,j}$ são tais que

$$\inf_{v \in V_j} [v \Sigma(v)] \leq b_j \leq \sup_{v \in V_j} [v \Sigma(v)] \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \inf_{v' \in V_j} \left[\int_{v_{j-1}}^{v_j} H(v, v') dv \right] \leq K_{i,j} &\leq \sup_{v' \in V_j} \left[\int_{v_{j-1}}^{v_j} H(v, v') dv \right] \\ &\leq (v_i - v_{i-1}) \sup_{v' \in V_j} [H(v, v')] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Aqui, assumimos que $\Sigma(v)$ e $\int_{v_{j-1}}^{v_j} H(v, v') dv$ são funções limitadas e seccionalmente contínuas. De maneira que (5.12) pode ser explicitado como

$$\frac{d}{dt} \omega^{(n)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \frac{\partial}{\partial x} \omega_1 & & & \\ & v_2 \frac{\partial}{\partial x} \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n \frac{\partial}{\partial x} \omega_n \end{bmatrix}}_{T_n \omega^{(n)}}$$

$$\begin{aligned}
& - \underbrace{\begin{bmatrix} b_1\omega_1 & & & \\ & b_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n\omega_n \end{bmatrix}}_{B_n\omega^{(n)}} \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \int_{v_m}^{v_1} \int_{-1}^1 H(v, v') \omega_1 d\mu dv & & & \\ & \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{-1}^1 H(v, v') \omega_2 d\mu dv & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \int_{v_{n-1}}^{v_M} \int_{-1}^1 H(v, v') \omega_n d\mu dv \end{bmatrix}}_{J_n H_n \omega^{(n)}}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

O operador resolvente $R(\lambda, T_n)$ é tal que a j -ésima componente do vetor $R(\lambda, T_n)\varphi$ tem a forma

$$\{R(\lambda, T_n)\varphi\}_j = \begin{cases} \frac{1}{\mu v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{\frac{-\lambda}{\mu v_j}(x-y)} \varphi_j(y, \mu) dy, & \mu > 0 \\ -\frac{1}{\mu v_j} \int_x^{\frac{h}{2}} e^{\frac{-\lambda}{\mu v_j}(x-y)} \varphi_j(y, \mu) dy, & \mu < 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

com $Re\lambda > 0$ e também $\|R(\lambda, T_n)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$ de maneira que $T_n \in G(1, 0)$ em X_n . A ideia básica neste momento, consiste em demonstrarmos que de fato $R(\lambda, T_n) \rightarrow R(\lambda, T)$ ao $n \rightarrow \infty$. Definindo que P_n é uma aplicação linear de X_n em X tal que:

$$P_n f = \varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T \tag{5.22}$$

e que

$$\varphi_j = \varphi_j(x, \mu) = \int_{v_{j-1}}^{v_j} f(x, \mu, v') dv', \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.23)$$

pela definição de $P_n f$ temos que

$$\begin{aligned} \| P_n f \|_n = \| \varphi \|_n &= \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |\varphi(x, \mu)| dx d\mu \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left| \int_{v_{j-1}}^{v_j} f(x, \mu, v') dv' \right| dx d\mu \\ &= \int_{v_m}^{v_M} \int_{-1}^1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f(x, \mu, v')| dv' dx d\mu \\ &= \| f \| \end{aligned} \quad (5.24)$$

o que implica que $\| P_n f \|_n = \| f \|$. Agora seja Ω o conjunto de todos polinômios definidos sobre o conjunto $\bar{\Omega} = \{(x, \mu, v); |x| \leq \frac{h}{2}, |\mu| \leq 1, v \in [v_m, v_M]\}$. Agora, seja $p = p(x, \mu, v)$ um polinômio de grau m para x e μ fixados. Sendo assim, teremos que p troca de sinal m vezes. Logo, como $\left| \int_{v_{j-1}}^{v_j} p dv' \right| \leq \int_{v_{j-1}}^{v_j} |p| dv'$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{v_{j-1}}^{v_j} |p| dv' - \left| \int_{v_{j-1}}^{v_j} p dv' \right| \right\} \\ &= \sum' \left\{ \int_{v_{j-1}}^{v_j} |p| dv' - \left| \int_{v_{j-1}}^{v_j} p dv' \right| \right\} \\ &\leq 2m \bar{p} h^{(n)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde definimos \bar{p} como $\bar{p} = \{\max_{\bar{\Omega}} |p(x, \mu, v)|\}$ e $h^{(n)}$ é o tamanho do intervalo máximo $v_j - v_{j-1}$ em n subdivisões, isto é, $h^{(n)} = \max_{j=1, \dots, n} |v_j - v_{j-1}|$. A soma denotada por \sum' é a soma estendida sobre os m subintervalos em que p troca de sinal. Assim, para n suficientemente grande, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)} = 0$.

Assim, $\{X_n\}$ é uma sequência de espaços de Banach aproximando X , desde que seja satisfeito que Ω é denso em X . Logo, dada qualquer $g \in X$ e assumindo que $\lambda > 0$

$$\{P_n R(\lambda, T)g\}_j = \begin{cases} \frac{1}{\mu v} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{-\frac{\alpha}{v}} g(y, \mu, v) dy dv, & \mu > 0 \\ -\frac{1}{\mu v} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_x^{\frac{h}{2}} e^{-\frac{\alpha}{v}} g(y, \mu, v) dy dv, & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\{R(\lambda, T_n)P_n g\}_j = \begin{cases} \frac{1}{\mu v_{j-1}} \int_{-\frac{h}{2}}^x \int_{v_{j-1}}^{v_j} e^{-\frac{\alpha}{v_{j-1}}} g(y, \mu, v) dy dv, & \mu > 0 \\ -\frac{1}{\mu v_{j-1}} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_x^{\frac{h}{2}} e^{-\frac{\alpha}{v_{j-1}}} g(y, \mu, v) dy dv, & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

onde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}(x - y)$. A ideia é comparar estas quantidades, para isso definiremos

$$\Delta_j = |\{P_n R(\lambda, T)g - R(\lambda, T_n)P_n g\}_j| \quad (5.28)$$

Assim, para $\mu > 0$, teremos que

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \left| \frac{1}{\mu v} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{-\frac{\alpha}{v}} g(y, \mu, v) dy dv - \frac{1}{\mu v_{j-1}} \int_{-\frac{h}{2}}^x \int_{v_{j-1}}^{v_j} e^{-\frac{\alpha}{v_{j-1}}} g(y, \mu, v) dv dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{\mu v} \left\{ \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{-\frac{\alpha}{v}} g(y, \mu, v) dy dv - \frac{v}{v_{j-1}} \int_{-\frac{h}{2}}^x \int_{v_{j-1}}^{v_j} e^{-\frac{\alpha}{v_{j-1}}} g(y, \mu, v) dv dy \right\} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\mu v} \left\{ \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x \left(1 - \frac{v}{v_{j-1}}\right) e^{-\alpha\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_{j-1}}\right)} e^{-\frac{\alpha}{v}} g(y, \mu, v) dy dv \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu v} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x \left|1 - \frac{v}{v_{j-1}}\right| e^{-\frac{\alpha}{v}} e^{-\alpha\left(\frac{1}{v_{j-1}} - \frac{1}{v}\right)} |g(y, \mu, v)| dy dv \quad (5.29) \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\left|1 - \frac{v}{v_{j-1}} e^{-\alpha\left(\frac{1}{v_{j-1}} - \frac{1}{v}\right)}\right| \leq \frac{v_j - v_{j-1}}{v_{j-1}} + \frac{v}{v_{j-1}} \left(1 - e^{-\alpha\left(\frac{1}{v_{j-1}} - \frac{1}{v}\right)}\right) \quad (5.30)$$

Agora, se $\alpha > 0$ e $v \in V_j$, teremos que

$$\Delta_j \leq \frac{v_j - v_{j-1}}{\mu v_{j-1}} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{-\frac{\alpha}{v}} |g(y, \mu, v)| dy dv + \frac{1}{\mu v_{j-1}} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^x e^{-\alpha \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_{j-1}} \right)} |g(y, \mu, v)| dy dv \quad (5.31)$$

Integrando com respeito a x a seguinte desigualdade

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta_j dx \leq \frac{2h^{(n)}}{\lambda v_m} \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |g(y, \mu, v)| dy dv \quad (5.32)$$

Assim, por definição temos que

$$\| P_n R(\lambda, T)g - R(\lambda, T_n)P_n g \|_n \leq \frac{2h^{(n)}}{\lambda v_m} \| g \| \quad (5.33)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)} = 0$ temos que

$$\| P_n R(\lambda, T)g - R(\lambda, T_n)P_n g \| \rightarrow 0 \quad (5.34)$$

Uma vez que podemos assegurar (5.34), podemos representar o problema inicial (5.2) usando a aproximação multi-grupo.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Rubbia, Report CERN/AT/95-44 (ET), 1995.
- [2] H. Nifenecker, Basics of accelerator driven subcritical reactors, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, pp. 428-467, 2001.
- [3] S. Dulla, P. Ravetto, B. Ganapol, Space Asymptotic Method for the study of neutron propagation, *Annals of Nuclear Energy* **33**, pp. 932-940, 2006.
- [4] B. Ganapol, Solution of the one-group time dependent neutron transport equation in an infinite medium by polynomial reconstruction , *Journal of Nuclear Science and Engineering.*, vol. 92, 272-279, 1986.
- [5] A. Weinberg, The Physical Theory of Neutron Chain reactors, *University Chicago Press.*, Chicago.
- [6] A. Belloni, Multigroup Neutron Transport, *J. Math. Phys.*, Vol 13, No 8, 1972.
- [7] P. K.C. Wang. A Maximum Property of Cauchy's Problem for The Multigroup Neutron Transport Equation, *SIAM Applied Math.* **C 33**, Vol 17, No 2, 1969.
- [8] I. A. Sneddon, The use of integral transforms, *McGraw-Hill company.*, New York, 1972.
- [9] G. A. Goncalves, S. B. Leite, M. T. Vilhena, Solution of the neutron transport equation problem with anysotropic scattering, *Annals of Nuclear Energy* **36**, pp. 98-102, 2009.
- [10] S. Dulla, P. Ravetto, Propagation Phenomena in neutron transport for nuclear reactor physics problems, *19th International Conference on Transport Theory* Budapest, 2005.

- [11] M. T. Vilhena, C. Segatto, H. Velho, G. A. Goncalves, Analytical Solution of the one-dimensional discrete ordinates equation by the Laplace and Hankel integral Transform, *Integral Methods in Science and Engineering.*, pp. 267-272, 2004.
- [12] S. Dulla, P. Ravetto, Analytical Solutions to some neutron transport problems in the spirit of Silvio E. Corno, *CLUT.*, Torino, pp. 255-270, 2005.
- [13] S. Dulla, P. Ravetto, Analytical Solutions to discrete ordinate time-dependent transport problems, *Transactions of the American Nuclear Society.* 90, pp. 278-280, 2004.
- [14] J. Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory , *McGraw-Hill company.*, New York, 1966.
- [15] B. Ganapol, A consistent theory of neutral particle transport in a infinite medium, *Journal of Transport Theory in Statistical Physics.*, vol. 29, 43-68, 2000.
- [16] B. Ganapol, A semi-analytical benchmark for time dependent neutron transport in multidimensions, *International Conference on Transport Theory.*, Rio de Janeiro, 2003.
- [17] B. Montagnini, Existence of complex eigenvalues for the monoenergetic neutron transport equation, *Journal of Transport Theory in Statistical Physics.*, vol. 5, 127-167, 1976.
- [18] C. F. Segatto, M.T. Vilhena, T.G. Gonçalves, An Analytical Integral Formulation for time-dependent S_N transport equation in a slab by double Laplace Transform Technique, *Kerntechnik*, v. 73, pp. 176-178, 2008.
- [19] G. I. Bell and S. Glasstone, Nuclear Reactor Theory , *Van Nostrand Reinhold.*, New York, 1970.

- [20] R. D. Lawrence, Progress in Nodal Methods for The Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations , *Progress in Nuclear Energy.*, vol. 17(3), pp. 271-301, 1986.
- [21] B. Montagnini, A Well-Balance Coarse-Mesh Flux Expansion Method , *Annals of Nuclear Energy.*,vol. 21(1), pp. 45-53, 1994.
- [22] R. A. Shober, Two Nodal Methods for solving Time-Dependent Group Diffusion Equation , *Nuclear Science and Engineering.*,vol. 64, pp. 582-592, 1977.
- [23] G. J. Mitsis, Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems , PhD Tesis, Argonne, Illinois, USA, 1963.