

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA METALÚRGICA
E DOS MATERIAIS

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS PARA A ANÁLISE
NUMÉRICA DE TENSÕES MECÂNICAS EM PEÇAS COM GEOMETRIA
AXISSIMÉTRICA

Por

GILNEI GONÇALVES FURTADO

Engenheiro Mecânico

Trabalho realizado no Departamento de Metalurgia da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e dos Materiais - PPGEMM.

Porto Alegre
1995

i

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS PARA A ANÁLISE
NUMÉRICA DE TENSÕES MECÂNICAS EM PEÇAS COM GEOMETRIA
AXISSIMÉTRICA

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e dos Materiais -
PPGEMM, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de:

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Ciência dos Materiais

por

GILNEI GONÇALVES FURTADO
Engenheiro Mecânico

1995

ii

Esta DISSERTAÇÃO foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, Área de Concentração Ciência dos Materiais e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Orientador: Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker, PPGEMM/UFRGS

Banca Examinadora:

Profa. Dra Maria Ângela Vaz dos Santos, FURG

Prof. Dr. Waldir Terra Pinto, FURG

Prof. Dr. Marco Tullio Vilhena, PPGEMM/UFRGS

Prof. Dr. Renato Barbieri, UDESC/SC

Coordenador do PPGEMM
Prof. Dr. Telmo Roberto Strohaecker

Agradecimentos:

ao professor Telmo R. Strohaecker, orientador deste trabalho.

aos professores do PPGEMM, em especial ao professor Marco Tullio de Vilhena.

aos engenheiros Ney Francisco Ferreira, Rosa Irene Terra Pinto e Gabriel Pardo Migliaro, pela colaboração direta no trabalho.

ao engenheiro José Antônio Araújo.

aos engenheiros Luis Cássio Sarate, Fernando Bauer e Cícero por todo apoio prestado.

aos companheiros do LAMEF.

aos funcionários do Departamento de Metalurgia, da Biblioteca e do Prédio de Engenharia.

ao pessoal do CESUP.

a CAPES, pela bolsa de Mestrado.

Índice

Conteúdo.	v
Lista de Figuras.	vii
Lista de Tabelas.	ix
Lista de Símbolos.	x
Resumo.	xii
Abstract.	xiii
1 Introdução.	1
2 Equações Diferenciais Parciais que Relacionam Deslocamentos e Carregamentos.	4
3 Princípio Variacional aplicado ao Cálculo de Deslocamentos em Uma Geometria Axissimétrica.	11
3.1 Formulação pela minimização da energia total do sistema.	12
4 Discretização pelos Métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos.	20
4.1 Discretização pelo Método de Diferenças Finitas.	20
4.1.1 Comentários sobre o Método de Diferenças Finitas.	27
4.2 Discretização pelo Método de Elementos Finitos.	29
5 Geração de Malha para Elementos Finitos.	33
6 Estrutura do Sistema Computacional.	52
6.1 Modelo para desenvolvimento do sistema.	52
6.2 Considerações sobre a implementação dos módulos.	56
6.3 Comentários Finais.	61

7	Análise experimental de tensões e comparação com os resultados numéricos.	63
7.1	Montagem experimental.	65
8	Discussões.	77
9	Conclusões.	80
A	Equações Básicas da Teoria da Elasticidade.	82
A.1	Equações Diferenciais Parciais para o Equilíbrio Estático.	82
A.1.1	Equilíbrio no interior do sólido.	82
A.1.2	Equilíbrio na fronteira do domínio.	90
A.2	Equações Diferenciais Parciais que relacionam Deformações e Deslocamentos. . .	92
A.3	Relações entre tensões e deformações.	92
A.4	Relações entre deslocamentos e tensões.	97
A.5	Equações Diferenciais Parciais que regem os deslocamentos.	98
A.6	Energia de Deformação do Sistema.	99
B	Comparação com resultados obtidos por um programa comercial.	100

Lista de Figuras

4.1	Malha irregular de diferenças finitas gerada sobre um dado domínio com representação da vizinhança de um dado nó.	21
4.2	Malhas de diferenças finitas com disposições regulares e irregulares dos nós. . . .	28
4.3	Malha de elementos finitos destacando seus nós vizinhos e elementos adjacentes.	31
4.4	Função integrante da base de funções usada na discretização por elementos finitos.	32
5.1	Domínio Planar Conecto.	34
5.2	Nós gerados sobre a fronteira.	34
5.3	Segmentos horizontais gerados no interior do domínio.	35
5.4	Nós interiores gerados sobre os segmentos horizontais.	35
5.5	Lados de elementos gerados a partir dos nós de fronteira.	36
5.6	Elemento número 6 gerado com um nó interior.	39
5.7	Elemento número 195 gerado com um nó interior.	40
5.8	Elemento número 245 gerado com um nó interior.	41
5.9	Elemento número 326 gerado com um nó interior.	42
5.10	Elemento número 337 gerado com um nó interior.	43
5.11	Elemento número 86 gerado com um nó da FL.	44
5.12	Elemento número 166 gerado com um nó da FL.	45
5.13	Elemento número 216 gerado com um nó da FL.	46
5.14	Elemento número 226 gerado com um nó da FL.	47
5.15	Elemento número 336 gerado com um nó da FL.	48
5.16	Malha resultante do processo de geração de elementos.	49
5.17	Malha com posição dos nós recalculada após primeira iteração.	49
5.18	Malha com posição dos nós recalculada após segunda iteração.	50
5.19	Malha com posição dos nós recalculada após terceira iteração.	50
6.1	Estrutura funcional do código.	57
7.1	Vista esquemática do carregamento.	66
7.2	Vista radial da peça.	68
7.3	Malha de elementos finitos empregada na obtenção dos resultados numéricos. . .	69
7.4	Vista axial da peça com indicação da posição de colagem dos extensômetros. . .	70
7.5	Vista radial da peça com indicação da posição de colagem dos extensômetros. . .	71

7.6	Vistas axiais da peça indicando o ângulo da mesma com a força aplicada para as diversas medições.	72
A.1	Elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	83
A.2	Vistas em "z", "θ" e "r" de um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	84
A.3	Tensões agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	85
A.4	Vista do plano "θr" das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	86
A.5	Vista do plano "rz" das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	87
A.6	Vista do plano "θz" das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	88
A.7	Elemento infinitesimal de fronteira de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.	91
A.8	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação ϵ_r	93
A.9	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação ϵ_θ	93
A.10	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação ϵ_z	94
A.11	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação $\epsilon_{r\theta}$	94
A.12	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação $\epsilon_{\theta z}$	95
A.13	Esquematisação dos deslocamentos que influem na deformação ϵ_{rz}	96

Lista de Tabelas

2.1	Relação entre os índices "0", "s, i " e "c, i " e o índice "j".	10
7.1	Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 1.	71
7.2	Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 2.	73
7.3	Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 3.	73
7.4	Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 4.	74
7.5	Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 1.	74
7.6	Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 2.	75
7.7	Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 3.	75
7.8	Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 4.	76

Lista de Símbolos

x, y	Coordenadas retangulares.
r, θ, z	Coordenadas cilíndricas.
G	Módulo de rigidez.
ν	Coefficiente de "Poisson".
λ	Constante de "Lamé".
H, D	Coefficientes que depende das propriedades dos materiais.
T	Temperatura.
$T_0, T_{s,i}, T_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" da função T na variável independente θ .
u	Componente do deslocamento ou grandeza em (x, y) .
$u, v, w; u_i; \{u\}$	Componentes cilíndricas do deslocamento.
$U_0, U_{s,i}, U_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" das funções u, v, w na variável independente θ .
$V_0, V_{s,i}, V_{c,i}$	
$W_0, W_{s,i}, W_{c,i}$	
p_r, p_θ, p_z	Forças volumétricas.
$p_{r0}, p_{rs,i}, p_{rc,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" das funções p_r, p_θ, p_z na variável independente θ .
$p_{\theta0}, p_{\theta s,i}, p_{\theta c,i}$	
$p_{z0}, p_{zs,i}, p_{zc,i}$	
f_r, f_θ, f_z	Tensões de contato.
$f_{r0}, f_{rs,i}, f_{rc,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" das funções f_r, f_θ, f_z na variável independente θ .
$f_{\theta0}, f_{\theta s,i}, f_{\theta c,i}$	
$f_{z0}, f_{zs,i}, f_{zc,i}$	
l, m, n	Cossenos diretores da normal à superfície.
Γ, δ	Funções de u, v, w e das propriedades dos materiais.
$\Gamma_0, \Gamma_{s,i}, \Gamma_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" da função Γ na variável independente θ .
$\delta_0, \delta_{s,i}, \delta_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" da função δ na variável independente θ .
∇^2, \square	Operadores diferenciais em r, θ, z .
$\nabla^2_0, \nabla^2_{s,i}, \nabla^2_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" do operador ∇^2 na variável independente θ .
$\square_0, \square_{s,i}, \square_{c,i}$	Coefficientes da expansão em série de "Fourier" do operador \square na variável independente θ .

En	Energia total do sistema elástico.
\underline{E}, E_{ij}	Matriz que relaciona tensões e deformações.
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	Tensões normais em coordenadas cilíndricas.
$\tau_r, \tau_\theta, \tau_z$	Tensões cizalhantes em coordenadas cilíndricas.
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	Deformações normais em coordenadas cilíndricas.
$\gamma_r, \gamma_\theta, \gamma_z$	Deformações cizalhantes em coordenadas cilíndricas.
$\{\epsilon\}, \epsilon_i$	Vetor das deformações.
V	Volume, domínio tridimensional.
S	Superfície.
$\{F\}, F_i$	Força externa.
$\int^V dV$	Integral sobre um volume.
$\int^S dS$	Integral de superfície.
D_{ij}	Operador que relaciona deformações e deslocamentos.
ψ_i, ϕ_i	Base de funções.
c_{ij}, \underline{c}	Coefficientes da base de funções.
\underline{A}	Matriz do sistema.
\underline{b}	Vetor de termos independentes do sistema.
h, i, j, k, p, q	Índices.
N	Número de membros de uma base de funções.
n, n_i	Nó e vizinho do nó.
$L(), H()$	Operadores diferenciais.
$f(), g$	Funções.
$p(x, y), p_i(x, y)$	Polinômios em x e y .
$a, b, c, d, e; a_k$	Coefficientes de um polinômio.
x_n, y_n	Coordenadas no nó n .
x', y'	Coordenadas relativas.
q_j, k	Coefficientes de uma expressão algébrica.
ϵ	Erro.
nv	Número de vizinhos.
FN	Fila de nós.
FNC	Fila de nós de contorno.
FL	Fila de lados.
FE	Fila de elementos.
PA	Parâmetro.
A, B, C, D	Nós de uma malha.

Resumo.

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento e a implementação de algoritmos para a análise de tensões em corpos com geometria axissimétrica e submetidos a carregamentos não axissimétricos, admitindo-se comportamento linear elástico do material e pequenas deformações. Os algoritmos são baseados nos métodos de diferenças finitas e elementos finitos empregando a expansão em série de "Fourier" na variável independente θ das funções que descrevem os carregamentos e deslocamentos. Também propomos a criação de um sistema computacional com a finalidade de facilitar a implementação de algoritmos relacionados à análise numérica de tensões, bem como a de outros algoritmos com características de implementação semelhantes. Finalmente, é apresentada uma comparação entre os resultados teóricos e experimentais para um dado problema de análise de tensões com o fim de avaliar a eficácia dos algoritmos propostos.

Abstract.

This work presents the development and implementation of algorithms for numerical analysis of stresses applied to axisymmetric bodies submitted to non axisymmetric loading assuming linear elastic behaviour and small strain. The algorithms proposed here are based on Finite Difference and Finite Element methods, using Fourier series expansion on the independent variable θ of the functions that describe loading and displacement. It is also proposed the creation of a new computational system which facilitates the development and implementation of algorithms related to numerical analysis of stress as well as other algorithms with similar implementation characteristics. Finally, it is presented a comparison between theoretical and experimental results for an specific problem of stress analysis to evaluate the accuracy of the proposed algorithms.

Capítulo 1

Introdução.

O objetivo deste trabalho é o estudo de métodos numéricos de análise de tensões em corpos que apresentam geometria axissimétrica, comportamento linear elástico do material e pequenas deformações, juntamente com o estudo da maneira de como implementar computacionalmente tais métodos e verificar a sua eficácia na solução de problemas de engenharia. Isto foi motivado por uma necessidade de melhor conhecimento sobre tais métodos devido a sua importância no estudo de projetos de rodas ferroviárias.

A solução do problema de análise teórica de tensões e deformações pode ser alcançada por diversos métodos, sendo que os mais comuns levam à formulação de algoritmos que produzem soluções aproximadas. Os métodos mais empregados na solução de problemas da elasticidade linear partem de uma formulação matemática exata do problema, que pode ser na forma de equações diferenciais parciais ou de um funcional, e aplicam um método numérico para a obtenção de soluções aproximadas para o problema expresso por tais formulações. Ao longo desta busca de soluções, dois caminhos têm sido mais explorados: o primeiro parte das equações diferenciais parciais da elasticidade linear e emprega o método de diferenças finitas na obtenção de uma solução aproximada; o segundo parte de um funcional que expressa a energia total acumulada no sistema elástico e emprega o método de elementos finitos na obtenção de sua solução aproximada. Existem outros métodos empregados na obtenção da solução de um problema linear elástico, como os métodos baseados na teoria dos elementos de contorno, na ideia dos mínimos quadrados, e outros métodos que partem da busca de soluções analíticas das equações diferenciais parciais da elasticidade. Porém, todos estes métodos não atingiram a mesma popularidade que os métodos de diferenças finitas e elementos finitos.

O método de diferenças finitas é um dos mais difundidos métodos empregados na solução de equações diferenciais. Esta popularidade deve-se ao fato de que este método tem uma aplicação imediata em qualquer tipo de problema que possa ser colocado na forma de equações diferenciais lineares ou não lineares, sejam estas ordinárias ou parciais, seja um sistema ou uma única equação. Porém, o método de diferenças finitas apresenta limitações em problemas que envolvam a obtenção de soluções em domínios não retangulares, que são comuns em problemas da elasticidade linear, e também em situações que envolvam condições de contorno complexas.

São encontrados na literatura alguns esforços no sentido de que sejam superadas estas limitações, embora este método ainda não tenha se tornado tão usual neste tipo de problema como o método de elementos finitos.

O método de elementos finitos é o mais usual método empregado na solução de problemas da elasticidade. Este método também é bastante difundido em outros problemas como elastoplasticidade, condução de calor, problemas de contato mecânico entre corpos elásticos, etc... . A causa da popularidade deste método reside no fato de apresentar, relativamente, poucas limitações no que diz respeito ao tipo de domínio associado às funções incógnitas do problema, o que significa que soluções razoáveis podem ser obtidas para peças de qualquer geometria em um problema da elasticidade linear, o que possibilita a este método apresentar grande flexibilidade e grande campo de aplicações.

Os dois métodos referidos acima, diferenças finitas e elementos finitos, tem como característica importante, quando empregados em problemas da elasticidade linear, envolverem a solução de sistemas de equações algébricas lineares nos algoritmos de obtenção da solução aproximada do problema. Este problema numérico determinou que estes métodos tivessem uma grande aplicabilidade justamente com o desenvolvimento dos computadores digitais a partir de meados da década de 50, embora a maior parte das idéias utilizadas por estes métodos já viessem sendo desenvolvidas muitas décadas antes. O contínuo desenvolvimento de computadores digitais e os seus contínuos aumento de poder de processamento e redução de custo possibilitaram a popularização destes métodos, com mais ênfase para o método de elementos finitos que permite uma grande automatização computacional e possui emprego para a maioria das situações de projeto de peças mecânicas.

O presente trabalho apresenta soluções para o problema da elasticidade linear envolvendo peças com geometria axissimétrica que seguem as linhas dos métodos de diferenças finitas e elementos finitos, bem como de problemas gerados por necessidade destes métodos, como o problema da geração de malha, apresentando uma discussão sobre as questões gerais que envolvem a implementação computacional dos algoritmos relacionados a estes métodos e sobre a usabilidade destes métodos. Também é apresentada uma tentativa de verificação de uma solução numérica frente a resultados obtidos por uma medição experimental de deformações.

Os Capítulos 2, 3, 4 e 5 são dedicados ao estudo, formulações e algoritmos relacionados à métodos numéricos destinados à análise de tensões em geometria axissimétrica. O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento das equações diferenciais parciais que relacionam o carregamento com os deslocamentos para o caso de um corpo com geometria axissimétrica submetido à carga não axissimétrica, admitindo-se comportamento linear elástico do material e pequenas deformações. Este desenvolvimento é baseado na expansão em série de Fourier das funções que descrevem os carregamentos e os deslocamentos, resultando em um conjunto de equações diferenciais parciais associado a cada termo da expansão. No Capítulo 3, são apresentadas as formulações baseadas na minimização da energia total do sistema para o mesmo problema de análise de tensões referido acima, que também utilizam a expansão em série de Fourier para cargas e deslocamentos. No Capítulo 4 são apresentadas as formulações relativas ao emprego dos métodos de discretização de diferenças finitas e elementos finitos baseados nos resultados

apresentados nos dois primeiros Capítulos. No Capítulo 5, é desenvolvido o problema da geração de malhas para o método de elementos finitos, o que também abrange as questões da geração de malha para o método de diferenças finitas.

O Capítulo 6 apresenta uma proposta para a implementação de um sistema computacional para análise numérica de tensões, mas que também pode ser estendida a outros tipos de análises numéricas. Esta proposta, baseada na experiência obtida na implementação dos métodos e algoritmos desenvolvidos neste trabalho, parte de um modelo funcional para este sistema computacional e procura apresentar caminhos a serem seguidos na elaboração de cada parte do mesmo, indicando as ferramentas e dispositivos adequados ao seu desenvolvimento.

O Capítulo 7 apresenta uma tentativa de verificação da eficácia do método de elementos finitos na solução de um problema de engenharia baseada na comparação entre os resultados numéricos e experimentais obtidos para este problema. Nos Capítulos 8 e 9, são apresentadas as conclusões e sugestões para desenvolvimento futuro em cima do exposto no presente trabalho e as conclusões finais do trabalho.

O Apêndice A exibe as equações básicas da teoria da elasticidade empregadas ao longo deste trabalho, bem como o seu desenvolvimento. No Apêndice B é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos pelo sistema desenvolvido neste trabalho e um sistema comercial para o problema de análise de tensões apresentado no Capítulo 7.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais que Relacionam Deslocamentos e Carregamentos.

As equações diferenciais parciais que relacionam o carregamento com o campo de deslocamentos em um meio sólido contínuo, admitindo-se comportamento linear elástico do material e pequenas deformações, para um sistema de coordenadas cilíndricas, conforme Apêndice A, são dadas em (2.1) (2.2) (2.3), para um domínio contínuo contido no espaço " $0 < r < +\infty$ ", " $-\infty < z < +\infty$ " e " $0 \leq \theta < 2\pi$ ".

$$-p_r = H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma + G \nabla^2 u - \frac{G}{r^2} \left(u + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} v \right) - D \frac{\partial}{\partial r} T \quad (2.1)$$

$$-p_\theta = \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma + G \nabla^2 v + \frac{G}{r^2} \left(2 \frac{\partial}{\partial \theta} u \right) - \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T \quad (2.2)$$

$$-p_z = H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma + G \nabla^2 w - D \frac{\partial}{\partial z} T \quad (2.3)$$

Onde:

p_r, p_θ, p_z são as componentes das forças que atuam no interior do domínio e dependem da posição (" r ", " θ " e " z ");

u, v, w são as componentes dos deslocamentos e dependem da posição;

G, H, D dependem das propriedades do material;

T é a temperatura e depende da posição.

Nas equações (2.1) (2.2) (2.3) os valores de Γ e a definição do operador ∇^2 estão dadas a seguir:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + \frac{\partial}{\partial z} w \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

As condições de contorno para as equações (2.1) a (2.3), válidas para a fronteira do domínio, admitindo-se serem conhecidas as tensões de contato ao longo da fronteira, são dadas em (2.6) a (2.8) .

$$f_r = G \square u + l \lambda \Gamma + G \frac{\partial}{\partial r} \delta - m G \frac{v}{r} - l D T \quad (2.6)$$

$$f_\theta = G \square v + m \lambda \Gamma + \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta + \frac{G}{r} (2 m u - l v) - m D T \quad (2.7)$$

$$f_z = G \square w + n \lambda \Gamma + G \frac{\partial}{\partial z} \delta - n D T \quad (2.8)$$

Onde:

f_r , f_θ e f_z são as tensões de contato ao longo da fronteira do domínio e dependem da posição;

l, m e n são os cossenos diretores da normal à superfície e dependem da posição

λ , G e D dependem das propriedades do material.

Nas equações (2.6), (2.7) e (2.8) os valores de δ e a definição do operador \square estão dadas a seguir:

$$\delta = l u + m v + n w \quad (2.9)$$

$$\square = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

Uma vez que o objetivo é o estudo em peças com geometria axissimétrica, procura-se desenvolver a formulação expandindo-se em série de Fourier todas as expressões. Esta reformulação permitirá uma simplificação do problema a ser aproximado por métodos numéricos (diferenças finitas, por exemplo) justamente no que diz respeito ao domínio a ser discretizado, que passará a ser contido em um espaço bidimensional, ao invés do domínio tridimensional da formulação atual.

Expandindo-se as grandezas que na formulação acima são funções da posição (u , v , w , T , p_r , p_θ , p_z , f_r , f_θ , f_z) em séries de Fourier na variável independente θ , temos:

$$u(r, \theta, z) = U_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (U_{s,i}(r, z) \sin(i \theta) + U_{c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.11)$$

$$v(r, \theta, z) = V_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (V_{s,i}(r, z) \sin(i \theta) + V_{c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.12)$$

$$w(r, \theta, z) = W_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (W_{s,i}(r, z) \sin(i \theta) + W_{c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.13)$$

$$T(r, \theta, z) = T_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (T_{s,i}(r, z) \sin(i \theta) + T_{c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.14)$$

$$p_r(r, \theta, z) = p_{r0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (p_{r,s,i}(r, z) \sin(i \theta) + p_{r,c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.15)$$

$$p_\theta(r, \theta, z) = p_{\theta0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (p_{\theta,s,i}(r, z) \sin(i \theta) + p_{\theta,c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.16)$$

$$p_z(r, \theta, z) = p_{z0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (p_{zs,i}(r, z) \sin(i \theta) + p_{zc,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.17)$$

$$f_r(r, \theta, z) = f_{r0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{rs,i}(r, z) \sin(i \theta) + f_{rc,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.18)$$

$$f_{\theta}(r, \theta, z) = f_{\theta0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{\theta s,i}(r, z) \sin(i \theta) + f_{\theta c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.19)$$

$$f_z(r, \theta, z) = f_{z0}(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{zs,i}(r, z) \sin(i \theta) + f_{zc,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.20)$$

Onde:

— " U_0 ", " $U_{s,i}$ ", " $U_{c,i}$ ", " V_0 ", " $V_{s,i}$ ", " $V_{c,i}$ ", " W_0 ", " $W_{s,i}$ ", " $W_{c,i}$ ", " T_0 ", " $T_{s,i}$ ", " $T_{c,i}$ ", " p_{r0} ", " $p_{rs,i}$ ", " $p_{rc,i}$ ", " $p_{\theta0}$ ", " $p_{\theta s,i}$ ", " $p_{\theta c,i}$ " e " p_{z0} ", " $p_{zs,i}$ ", " $p_{zc,i}$ " são funções definidas em um domínio contínuo contido no espaço $0 < r < \infty$ e $-\infty < z < \infty$;
— " f_{r0} ", " $f_{rs,i}$ ", " $f_{rc,i}$ ", " $f_{\theta0}$ ", " $f_{\theta s,i}$ ", " $f_{\theta c,i}$ " e " f_{z0} ", " $f_{zs,i}$ ", " $f_{zc,i}$ " são funções definidas sobre a fronteira deste mesmo domínio.

Substituindo-se as grandezas expandidas em séries de Fourier na expressão (2.4), obtém-se:

$$\Gamma(r, \theta, z) = \Gamma_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_{s,i}(r, z) \sin(i \theta) + \Gamma_{c,i}(r, z) \cos(i \theta)) \quad (2.21)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{\partial}{\partial r} U_0 + \frac{U_0}{r} + \frac{\partial}{\partial z} W_0 \\ \Gamma_{s,i} &= \frac{\partial}{\partial r} U_{s,i} + \frac{U_{s,i}}{r} - i \frac{V_{c,i}}{r} + \frac{\partial}{\partial z} W_{s,i} \\ \Gamma_{c,i} &= \frac{\partial}{\partial r} U_{c,i} + \frac{U_{c,i}}{r} + i \frac{V_{s,i}}{r} + \frac{\partial}{\partial z} W_{c,i} \end{aligned}$$

Da mesma forma, para a expressão (2.5), obtém-se:

$$\nabla^2 = \nabla^2_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla^2_{s,i} \sin(i \theta) + \nabla^2_{c,i} \cos(i \theta)) \quad (2.22)$$

Onde:

$$\nabla^2_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\nabla^2_{s,i} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.24)$$

$$\nabla^2_{c,i} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.25)$$

$$\nabla^2_i = \nabla^2_{c,i} = \nabla^2_{s,i} \quad (2.26)$$

Substituindo-se as expressões (2.21) e (2.22), juntamente com (2.11) a (2.20), na equação (2.1), obtemos, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ p_{r_0} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_0 + G \nabla_0^2 U_0 - \frac{G}{r^2} U_0 + D \frac{\partial}{\partial r} T_0 \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{\infty} & \left\{ p_{r_{s,i}} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{s,i} + G \nabla_i^2 U_{s,i} - \frac{G}{r^2} [U_{s,i} - 2i V_{c,i}] + D \frac{\partial}{\partial r} T_{s,i} \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{\infty} & \left\{ p_{r_{c,i}} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{c,i} + G \nabla_i^2 U_{c,i} - \frac{G}{r^2} [U_{c,i} + 2i V_{s,i}] + D \frac{\partial}{\partial r} T_{c,i} \right\}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Para que a equação (2.27) seja satisfeita, todos os termos entre colchetes devem anularem-se, pois o conjunto $[1, \sin(i\theta), \cos(i\theta)]$, para $i = 1, \dots, \infty$ forma um conjunto de funções linearmente independentes no intervalo $(0, 2\pi)$. Desta forma, a equação (2.27) equivale às seguintes equações:

$$0 = p_{r_0} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_0 + G \nabla_0^2 U_0 - \frac{G}{r^2} U_0 + D \frac{\partial}{\partial r} T_0 \tag{2.28}$$

$$0 = p_{r_{s,i}} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{s,i} + G \nabla_i^2 U_{s,i} - \frac{G}{r^2} [U_{s,i} - 2i V_{c,i}] + D \frac{\partial}{\partial r} T_{s,i} \tag{2.29}$$

$$0 = p_{r_{c,i}} + H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{c,i} + G \nabla_i^2 U_{c,i} - \frac{G}{r^2} [U_{c,i} + 2i V_{s,i}] + D \frac{\partial}{\partial r} T_{c,i} \tag{2.30}$$

O mesmo procedimento pode ser adotado com relação às equações (2.2) e (2.3). Para a equação (2.2), obtém-se:

$$0 = p_{\theta_0} + G \nabla_0^2 V_0 - \frac{G}{r^2} V_0 \tag{2.31}$$

$$0 = p_{\theta_{s,i}} - i \frac{H}{r} \Gamma_{c,i} + G \nabla_i^2 V_{s,i} - \frac{G}{r^2} [2i U_{c,i} + V_{s,i}] + i \frac{D}{r} T_{c,i} \tag{2.32}$$

$$0 = p_{\theta_{c,i}} + i \frac{H}{r} \Gamma_{s,i} + G \nabla_i^2 V_{c,i} + \frac{G}{r^2} [2i U_{s,i} - V_{c,i}] - i \frac{D}{r} T_{s,i} \tag{2.33}$$

Para a equação (2.3), obtém-se:

$$0 = p_{z_0} + H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_0 + G \nabla_0^2 W_0 - D \frac{\partial}{\partial z} T_0 \tag{2.34}$$

$$0 = p_{z_{s,i}} + H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{s,i} + G \nabla_i^2 W_{s,i} - D \frac{\partial}{\partial z} T_{s,i} \tag{2.35}$$

$$0 = p_{z_{c,i}} + H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{c,i} + G \nabla_i^2 W_{c,i} - D \frac{\partial}{\partial z} T_{c,i} \tag{2.36}$$

As condições de contorno (2.6) a (2.8) também podem ser transformadas e expandidas em série de Fourier. Primeiro substitui-se as grandezas expandidas em série de Fourier (2.11) a (2.20) em (2.9) e (2.10), obtendo-se:

$$\delta(r, \theta, z) = \delta_0(r, z) + \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{s,i}(r, z) \sin(i\theta) + \delta_{c,i}(r, z) \cos(i\theta)) \tag{2.37}$$

onde:

$$\delta_0 = l U_0 + n W_0 \quad (2.38)$$

$$\delta_{s,i} = l U_{s,i} + n W_{s,i} \quad (2.39)$$

$$\delta_{c,i} = l U_{c,i} + n W_{c,i} \quad (2.40)$$

e

$$\square = \square_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\square_{s,i} \sin(i \theta) + \square_{c,i} \cos(i \theta)) \quad (2.41)$$

onde:

$$\square_o = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.42)$$

$$\square_{s,i} = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.43)$$

$$\square_{c,i} = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.44)$$

$$\square_o = \square_{s,i} = \square_{c,i} \quad (2.45)$$

Substituindo-se as equações (2.41) e (2.37), juntamente com (2.11) a (2.20), nas expressões (2.6) e reagrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ -f_{r0} + G \square_0 U_0 + l \lambda \Gamma_0 + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_0 - \frac{m}{r} G V_0 - l D T_0 \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -f_{rs,i} + G \square_0 U_{s,i} + l \lambda \Gamma_{s,i} + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_{s,i} - \frac{m}{r} G V_{s,i} - l D T_{s,i} \right\} \sin(i \theta) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -f_{rc,i} + G \square_0 U_{c,i} + l \lambda \Gamma_{c,i} + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_{c,i} - \frac{m}{r} G V_{c,i} - l D T_{c,i} \right\} \cos(i \theta) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dado que o conjunto de funções $1, \sin(i\theta), \cos(i\theta), i = 0, \dots, \infty$ é linearmente independente, a única forma para que a expressão (2.46) seja satisfeita é que os termos entre colchetes sejam nulos. Sabendo-se que para uma geometria axissimétrica, $m = 0$, temos:

$$f_{r0} = G \square_0 U_0 + l \lambda \Gamma_0 + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_0 - \frac{m}{r} G V_0 - l D T_0 \quad (2.47)$$

$$f_{rs,i} = G \square_0 U_{s,i} + l \lambda \Gamma_{s,i} + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_{s,i} - \frac{m}{r} G V_{s,i} - l D T_{s,i} \quad (2.48)$$

$$f_{rc,i} = G \square_0 U_{c,i} + l \lambda \Gamma_{c,i} + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_{c,i} - \frac{m}{r} G V_{c,i} - l D T_{c,i} \quad (2.49)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado com relação às equações (2.7) e (2.8). Para a equação (2.7) obtemos:

$$f_{\theta 0} = G \square_0 V_0 - l \frac{G}{r} V_0 - D T_0 \quad (2.50)$$

$$f_{\theta s,i} = G \square_0 V_{s,i} - i \frac{G}{r} \delta_{c,i} - l \frac{G}{r} V_{s,i} \quad (2.51)$$

$$f_{\theta c,i} = G \square_0 V_{c,i} - i \frac{G}{r} \delta_{s,i} - l \frac{G}{r} V_{c,i} \quad (2.52)$$

Para a equação (2.8) temos:

$$f_z 0 = G \square_0 W_0 + n \lambda \Gamma_0 + G \frac{\partial}{\partial z} \delta_0 - n D T_0 \quad (2.53)$$

$$f_z s,i = G \square_0 W_{s,i} + n \lambda \Gamma_{s,i} + G \frac{\partial}{\partial z} \delta_{s,i} - n D T_{s,i} \quad (2.54)$$

$$f_z c,i = G \square_0 W_{c,i} + n \lambda \Gamma_{c,i} + G \frac{\partial}{\partial z} \delta_{c,i} - n D T_{c,i} \quad (2.55)$$

Os conjuntos de equações (2.28) a (2.36) e (2.47) a (2.55) podem ser colocados na seguinte forma genérica:

$$H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_j + G \nabla_j^2 U_j - \frac{G}{r^2} [U_j + 2j V_j] - D \frac{\partial}{\partial r} T_j + p_{rj} = 0 \quad (2.56)$$

$$-j \frac{H}{r} \Gamma_j + G \nabla_j^2 V_j - \frac{G}{r^2} [V_j + 2j U_j] + j \frac{D}{r} T_j + p_{\theta j} = 0 \quad (2.57)$$

$$H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_j + G \nabla_j^2 W_j - D \frac{\partial}{\partial z} T_j + p_{zj} = 0 \quad (2.58)$$

onde:

$$\Gamma_j = \frac{\partial}{\partial r} U_j + \frac{U_j}{r} + j \frac{V_j}{r} + \frac{\partial}{\partial z} W_j \quad (2.59)$$

$$\nabla_j^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (2.60)$$

$$j = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty \quad (2.61)$$

Com condições de contorno:

$$f_{rj} = G \square_0 U_j + l \lambda \Gamma_j + G \frac{\partial}{\partial r} \delta_j - l D T_j \quad (2.62)$$

$$f_{\theta j} = G \square_0 V_j - j \frac{G}{r} \delta_j - l \frac{G}{r} V_j \quad (2.63)$$

$$f_{zj} = G \square_0 W_j + n \lambda \Gamma_j + G \frac{\partial}{\partial z} \delta_j - n D T_j \quad (2.64)$$

onde:

$$\delta_j = l U_j + n W_j \quad (2.65)$$

$$\square_0 = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.66)$$

Nas equações (2.56)-(2.58) e (2.62)-(2.64) os índices "0", "s, i" e "c, i" são substituídos pelo índice "j" obedecendo às regras apresentadas na tabela 2.1.

	$j < 0$	$j = 0$	$j > 0$
U_j	$U_{s,i}$	U_0	$U_{c,i}$
V_j	$V_{c,i}$	V_0	$V_{s,i}$
W_j	$W_{s,i}$	U_0	$W_{c,i}$
p_{rj}	$p_{rs,i}$	p_{r0}	$p_{rc,i}$
$p_{\theta j}$	$p_{\theta c,i}$	$p_{\theta 0}$	$p_{\theta s,i}$
p_{zj}	$p_{zs,i}$	p_{z0}	$p_{zc,i}$
T_j	$T_{s,i}$	T_0	$T_{c,i}$
f_{rj}	$f_{rs,i}$	f_{r0}	$f_{rc,i}$
$f_{\theta j}$	$f_{\theta c,i}$	$f_{\theta 0}$	$f_{\theta s,i}$
f_{zj}	$f_{zs,i}$	f_{z0}	$f_{zc,i}$

Tabela 2.1: Relação entre os índices "0", "s, i" e "c, i" e o índice "j".

Capítulo 3

Princípio Variacional aplicado ao Cálculo de Deslocamentos em Uma Geometria Axissimétrica.

A idéia do emprego do cálculo variacional ao estudo da deformação em regime linear elástico, em um corpo com geometria qualquer, parte da formulação de um funcional a partir dos princípios físicos que regem a deformação elástica. Toda esta formulação parte da idéia de que o corpo esteja em equilíbrio, ou seja, as forças internas equilibram as forças externas e que as forças e reações externas estejam em equilíbrio entre si.

Uma formulação baseada diretamente no equilíbrio de forças foi mostrada no capítulo 2 e conduziu às equações diferenciais parciais que condicionam a solução do problema (2.1) a (2.3). O equilíbrio estático de forças pela mecânica clássica implica também no estado de menor energia do sistema, o que serve igualmente como condição para a busca da solução do problema. Pode-se imaginar que a solução aproximada do problema venha a ser dada pelas funções $u(p)$, $v(p)$ e $w(p)$ pertencentes a um dado espaço de busca de soluções, onde "p" indica a posição no interior do domínio de existência destas funções, que é a geometria da peça. A busca da solução neste espaço deve ser pautada por expressões obtidas a partir da formulação matemática do equilíbrio estático. Procura-se a função que melhor atenda à estas expressões.

As expressões de busca de soluções podem ser obtidas, dentre outras maneiras, por dois métodos:

A) Cada função implica em um erro ao ser substituída nas equações diferenciais parciais e nas respectivas condições de contorno cujo valor é uma função da posição "p". A integração do quadrado deste erro sobre todo o domínio nos dá o erro total. Este erro total pode servir como critério de busca da melhor solução justamente achando-se a função que produz o menor erro. Esta é a idéia do método dos mínimos quadrados, que pode ser aplicada a qualquer problema expresso por equações diferenciais.

B) Cada função implica em um certo valor de energia acumulada no sistema. Baseado na idéia de que o estado de menor energia do sistema implica no estado de equilíbrio estático,

busca-se a função, no espaço de busca de soluções, que produz o menor valor de energia total do sistema. Esta idéia pode ser aplicada a qualquer problema expresso por equações diferenciais que constituam-se em operadores simétricos e positivos definidos, sendo que esta energia pode ser definida a partir do operador.

As soluções obtidas por estes dois métodos constituem-se em aproximações da solução exata do problema. Portanto, necessita-se demonstrar o quão próximas da solução exata estão estas soluções e se é possível obter uma solução tão próxima da exata quanto se queira por estes dois métodos.

A fundamentação matemática dos métodos descritos acima podem ser encontradas nos textos [1], [2], [3], [4], [5]. Em [3] são apresentados os fundamentos dos métodos varacionais e da teoria da representação e são tratadas de uma maneira genérica questões relativas a existência de soluções, ocorrência de uma solução única e "distância" da solução aproximada para a solução exata do problema, sendo que em [1] e [2], estas questões estão desenvolvidas para problemas estruturais, entre outros. O método dos mínimos quadrados, conforme dito anteriormente, apesar de poder ser aplicado a qualquer problema expresso por equações diferenciais, ele apresenta limitações, em relação à idéia baseada na minimização da energia total do sistema, no que diz respeito a uma maior restrição de continuidade da base de funções usada na representação da solução aproximada. Isto implica em uma maior complexidade na elaboração de tal base de funções e nos subseqüentes problemas numéricos gerados. Este problema é abordado em [5], onde é apresentada uma forma de reduzir as restrições de continuidade à base de funções no método dos mínimos quadrados. Apesar destes aperfeiçoamentos nos mínimos quadrados, formulação baseada na minimização da energia total do sistema é a que apresenta maior simplicidade entre os métodos Variacionais empregados na solução de problemas da elasticidade linear, a qual será desenvolvida a seguir para o problema de um corpo com geometria axisimétrica, submetido à carga não axissimétrica e comportamento linear elástico do material.

3.1 Formulação pela minimização da energia total do sistema.

A expressão da energia total acumulada em um corpo elástico submetido a um carregamento mecânico é dada pela equação (A.53), reescrita em (3.1).

$$En = \frac{1}{2} \int^V \{\varepsilon\}^T \underline{E} \{\varepsilon\} dV + \int^S \{u\}^T \{F\} dS \quad (3.1)$$

onde:

"E" é a matriz que relaciona o estado de tensões com o de deformações. É a chamada lei constitutiva do material e está apresentada em maiores detalhes no Apêndice (A), equação (A.29).

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} B & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & B & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

" λ ", " B " e " G " são propriedades do material e estão apresentadas no Apêndice (A), equações (A.31), (A.30), (A.28).

" $\{\epsilon\}$ " é o vetor de deformação:

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{r\theta} \\ \epsilon_{\theta z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

" $\{u\}$ " é o vetor dos deslocamentos:

$$\{u\} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

" $\{F\}$ " é o vetor dos carregamentos na fronteira (superfície) do corpo:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Os conceitos ligados " $\{u\}$ ", " $\{F\}$ " e " $\{\epsilon\}$ " estão igualmente apresentados no Apêndice (A).

A integral " $\int^V dV$ " representa a operação de integração sobre todo o domínio, que no assunto em questão significa todo o volume da peça, enquanto a integral " $\int^S dS$ " representa a integração sobre a fronteira do domínio, ou seja, a superfície da peça.

A equação (3.1) pode ser colocada, por motivos de facilidade de notação, na forma tensorial, resultando em (3.6)

$$En = \frac{1}{2} \int^V \epsilon_i E_{ij} \epsilon_j dV + \int^S u_i F_i dS \quad (3.6)$$

Para " u " e " F " o índice "1" está relacionado à direção " r ", o índice "2", à direção " θ " e o índice "3", à direção " z ".

Conforme desenvolvido no Apêndice (A), equações (A.16)-(A.21), podemos relacionar as deformações com os deslocamentos pela relação (3.7).

$$\varepsilon_i = D_{ij} u_j \quad (3.7)$$

onde:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.6) temos a equação (3.9).

$$En = \frac{1}{2} \int^V (D_{ik} u_k) E_{ij} (D_{jl} u_l) dV + \int^S u_i F_i dS \quad (3.9)$$

Escolhe-se uma base de funções "ψ_i", que é constituída de um conjunto de funções linearmente independentes, em termos da qual expressaremos a funções "u_i" como relacionado em (3.10), onde "c_{ki}" não dependem da posição.

$$u_k = c_{ki} \psi_i \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9), obtemos (3.11).

$$En = \frac{1}{2} \int^V c_{kn} (D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jl} \psi_m) c_{lm} dV + \int^S c_{kn} \psi_n F_i dS \quad (3.11)$$

O estado de equilíbrio do sistema corresponde àquele no qual sua energia total é mínima. Isto é obtido se for possível satisfazer às equações (3.12).

$$\frac{\partial}{\partial c_{kn}} En = 0 \quad (3.12)$$

A expressão (3.12) pode ser desenvolvida conforme apresentado na expressão (3.13).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_{k'n'}} [c_{kn} (D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jl} \psi_m) c_{lm}] = \\ (D_{ik'} \psi_{n'}) E_{ij} (D_{jl} \psi_m) c_{lm} \\ + c_{kn} (D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jk'} \psi_{n'}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

No segundo termo do segundo membro da equação (3.13), pode-se substituir os índices "k" e "n" por "l" e "m" respectivamente, e, em seguida, substituir, em toda equação, os índices "k'" e "n'" por "k" e "n". Obtemos, então, o sistema de equações (3.14).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_{kn}} En = \frac{1}{2} \int^V [(D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jl} \psi_m) + (D_{il} \psi_m) E_{ij} (D_{jk} \psi_n)] c_{lm} dV + \\ \int^S \psi_n F_i dS = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dado que $E_{ij} = E_{ji}$, obtemos (3.15)

$$\frac{\partial}{\partial c_{kn}} E_n = \int^V [(D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jl} \psi_m)] c_{lm} dV + \int^S \psi_n F_i dS = 0 \quad (3.15)$$

Colocando (3.15) na forma matricial, obtemos (3.16).

$$\underline{A} \underline{c} = \underline{b} \quad (3.16)$$

Onde:

$$\underline{A} = A_{n*3+k \ m*3+l} \left[\int^V [(D_{ik} \psi_n) E_{ij} (D_{jl} \psi_m)] dV \right] \quad (3.17)$$

$$\underline{b} = b_{n*3+k} = \left\{ \int^S \psi_n F_i dS \right\} \quad (3.18)$$

$$\underline{c} = c_{lm} \quad (3.19)$$

Vamos expressar a base de funções " ψ_i " como o produto de cartesiano de duas outras bases: " ϕ_q " no domínio das coordenadas " r " e " z " e as funções em séries de senos e cossenos no domínio da coordenada " θ " no intervalo de 0 a 2π , conforme apresentado em (3.20)

$$\psi_n(r, \theta, z) = \phi_q(r, z) \text{sen} \left(p\theta + h \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.20)$$

A relação entre os índices apresentados em (3.20) estão apresentados em (3.21).

$$\begin{aligned} n &= 2(pN + q) + h \\ p &= 0, \dots, \infty \\ q &= 1, \dots, N \\ h &= 0, 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando o operador " D_{ik} ", expresso em (3.8), em " ψ_n " obtemos (3.22).

$$(D_{ik} \psi_n) = \left(D_{ik} \phi_q \text{sen} \left(p\theta + h \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (3.22)$$

O desenvolvimento da equação (3.22), lembrando que $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\text{sen} \left(p\theta + h \frac{\pi}{2} \right) \right] = (-1)^h p \text{sen} \left(p\theta + (1-h) \frac{\pi}{2} \right)$, resulta na equação (3.23).

$$\begin{aligned} (D_{ik} \psi_n) &= \left(D'_{ik} \phi_q \right) \text{sen} \left(p\theta + h' \frac{\pi}{2} \right) \\ n &= 2(pN + q) + h', \quad k = 1, 3 \\ n &= 2(pN + q) + (1 - h'), \quad k = 2 \\ h' &= 0, 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Onde:

$$D'_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{J}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ -\frac{J}{r} & \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{J}{r} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

E "J" é dado por (3.25).

$$J = p (-1)^{h'+1} \quad (3.25)$$

A obtenção da equação (3.23) ocorre pelo reagrupamento de termos da expressão (3.22) nos mesmos termos da série de senos e cossenos, de forma que aqueles termos relacionados ao deslocamento "v" (índice 3) e as funções do tipo "sen(pθ)" ficassem associados aos termos relacionados aos deslocamentos "u", "w" e funções "cos(pθ)", e vice-versa. Isto faz-se necessário para o desenvolvimento em seguida. Deste processo resultou a necessidade de criação de um índice do tipo "h'" para expressar este reagrupamento de termos.

Usando a base de funções de senos e cossenos para expressar o carregamento na fronteira, obtemos (3.26).

$$F_k(r, \theta, z) = F_{kph}(r, z) \text{sen} \left(p\theta + h \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.26)$$

Substituindo (3.22), (3.26) em (3.15), obtemos (3.27).

$$\left[\int^V (D'_{ik} \phi_q) \text{sen} \left(p\theta + h' \frac{\pi}{2} \right) E_{ij} (D'_{jl} \phi_r) \text{sen} \left(s\theta + g' \frac{\pi}{2} \right) dV \right] c_{lm} = \int^S (\phi_q \text{sen} \left(p\theta + h' \frac{\pi}{2} \right)) (F_{ktc} \text{sen} \left(t\theta + e \frac{\pi}{2} \right)) dS \quad (3.27)$$

Os índices acima apresentam as seguintes ligações mostradas em (3.28).

$$\begin{aligned} n &= 2(pN + q) + h' & k &= 1 \text{ ou } 3 \\ n &= 2(pN + q) + (1 - h') & k &= 2 \\ m &= 2(sN + r) + g' & k &= 1 \text{ ou } 3 \\ m &= 2(sN + r) + (1 - g') & k &= 2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sabendo-se que o domínio é axissimétrico, podemos reagrupar os termos em (3.27) obtendo-se (3.29).

$$\left[\left\{ \int_0^{2\pi} \text{sen} \left(p\theta + h' \frac{\pi i}{2} \right) \text{sen} \left(s\theta + g' \frac{\pi i}{2} \right) d\theta \right\} \left\{ \int^{V'} \left(D'_{ik} \phi_q \right) E_{ij} \left(D'_{jl} \phi_r \right) dV' \right\} \right] \\ c_{lsrg} = \left\{ \int_0^{2\pi} \text{sen} \left(p\theta + h \frac{\pi}{2} \right) \text{sen} \left(t\theta + e \frac{\pi}{2} \right) d\theta \right\} \left\{ \int^{S'} \phi_q F_{kte} dS' \right\} \quad (3.29)$$

Em (3.29) temos que:

V' é definido de tal forma que $V = V' \otimes \Theta$;

S' é definido de tal forma que $S = S' \otimes \Theta$;

V' e $S' \in r \otimes z$.

Na equação (3.29) podemos ver que, no primeiro membro, o primeiro termo entre chaves assume:

”0 (zero)” para $p \neq s$ ou $h' \neq g'$;

” π ” para $p = s$ e $h = g$.

O mesmo vale para o segundo membro, que assume:

”0 (zero)” para $p \neq t$ ou $h \neq e$;

” π ” para $p = t$ e $h = e$.

O sistema de equações expresso por (3.29) pode ser reagrupado nos sistemas independentes expressos em (3.30).

$$\left[\int^{V'} \left(D'_{ik} \phi_q \right) E_{ij} \left(D'_{jl} \phi_r \right) dV' \right] c_{lprh'} = \int^{S'} \phi_q F_{kph} dS' \quad (3.30)$$

Em (3.30) temos as seguintes ligações entre os índices:

$h' = h$ para $k=1$ ou 3 ;

$h' = (1 - h)$ para $k=2$.

Podemos expressar os sistemas de equações apresentados em (3.30) na forma (3.31).

$$A_{(3q+k)(3r+l)}^{(2p+h')} c_{(3r+l)}^{(2p+h')} = b_{(3q+k)}^{(2p+h')} \quad (3.31)$$

Onde a matriz do sistema é dada por (3.32).

$$A_{(3q+k)(3r+l)}^{(2p+h')} = \int^{V'} \left(D'_{ik} \phi_q \right) E_{ij} \left(D'_{jl} \phi_r \right) dV' \quad (3.32)$$

E o vetor de termos independentes é dado por (3.33).

$$b_{(3q+k)}^{(2p+h')} = \int^{S'} \phi_q F_{kph} dS' \quad (3.33)$$

A equação (3.32) pode ser desenvolvida para os índices "k" e "l" resultando em (3.34) a (3.42).

$$A_{(3i+0)(3j+0)}^J = \int^{V'} \left[B \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \phi_j + \frac{\lambda}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j + \frac{B + GJ^2}{r^2} \phi_i \phi_j + G \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j \right] dV' \quad (3.34)$$

$$A_{(3i+0)(3j+1)}^J = \int^{V'} \left[J \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \phi_j + J \frac{B + G}{r^2} \phi_i \phi_j - J \frac{G}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j \right] dV' \quad (3.35)$$

$$A_{(3i+0)(3j+2)}^J = \int^{V'} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j + \frac{\lambda}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j + G \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j \right] dV' \quad (3.36)$$

$$A_{(3i+1)(3j+0)}^J = \int^{V'} \left[J \frac{B + G}{r^2} \phi_i \phi_j + J \frac{\lambda}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j - J \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \phi_j \right] dV' \quad (3.37)$$

$$A_{(3i+1)(3j+1)}^J = \int^{V'} \left[J^2 \frac{B + G}{r^2} \phi_i \phi_j - G \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \phi_j - \frac{G}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j + \frac{G}{r^2} \phi_i \phi_j + G \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j \right] dV' \quad (3.38)$$

$$A_{(3i+1)(3j+2)}^J = \int^{V'} \left[J \frac{\lambda}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j - J \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \phi_j \right] dV' \quad (3.39)$$

$$A_{(3i+2)(3j+0)}^J = \int^{V'} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \phi_j + G \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j \right] dV' \quad (3.40)$$

$$A_{(3i+2)(3j+1)}^J = \int^{V'} \left[J \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \phi_j - J \frac{G}{r} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j \right] dV' \quad (3.41)$$

$$A_{(3i+2)(3j+2)}^J = \int^{V'} \left[J^2 \frac{G}{r^2} \phi_i \phi_j + G \frac{\partial}{\partial r} \phi_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_j + B \frac{\partial}{\partial z} \phi_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j \right] dV' \quad (3.42)$$

Lembramos que nestas equações, o significado de dV' é dado por (3.43)

$$dV' = r dr dz \quad (3.43)$$

A equação (3.33) pode ser desenvolvida para os índices "k" e "l" resultando em (3.44) a (3.46).

$$b_{3*i+0}^J = \int^{S'} \phi_i F r(J) dS' \quad (3.44)$$

$$b_{3*i+1}^J = \int^{S'} \phi_i F \theta(J) dS' \quad (3.45)$$

$$b_{3*i+1}^J = \int^{S'} \phi_i F z(J) dS' \quad (3.46)$$

Nas equações (3.44) a (3.46) temos os seguintes significados:

” $F_r(J)$ ” é a componente na direção ”r” de ” $F(J)$ ”;

” $F_\theta(J)$ ” é a componente na direção ” θ ” de ” $F(J)$ ”;

” $F_z(J)$ ” é a componente na direção ”z” de ” $F(J)$ ”;

” $F(J)$ ” é a componente do termo ”J” da decomposição ”F” em série de Fourier.

A solução do sistema linear de equações algébricas cujos elementos da matriz são dados por (3.34)-(3.42) e os elementos do vetor de termos independentes são dados por (3.44)-(3.46) nos fornece os valores dos coeficientes c_{ki} da expressão (3.10) que, juntamente com a base de funções ψ_i escolhida, nos dá a solução aproximada do problema obtida pela aplicação do método Variacional.

Capítulo 4

Discretização pelos Métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos.

4.1 Discretização pelo Método de Diferenças Finitas.

O método de diferenças finitas pode ser empregado para obter a solução aproximada de equações diferenciais parciais (ou sistemas de equações diferenciais parciais) associadas a qualquer domínio de solução. O emprego deste método em domínios que possam ser discretizados por malhas regulares está desenvolvido em [6]. Nos domínios que não possam ser devidamente discretizados por malhas regulares, surge a necessidade do emprego de malhas irregulares sendo que detalhes sobre como pode ser feita esta discretização podem ser encontrados em [7] e [8].

O método desenvolvido neste trabalho, que é uma extensão do método apresentado em [8], parte da geração de uma malha sobre um dado domínio e que consiste de nós sobre a fronteira do domínio e nós no interior do domínio, conforme visto na figura 4.1. A cada nó desta malha é associado um conjunto de nós da malha chamado de vizinhança do nó considerado escolhidos por um dado critério envolvendo tanto a distância àquele nó como a posição relativa entre vizinhos. A este conjunto formado pelo nó juntamente com seus vizinhos nos referiremos por estrela associada a tal nó. Na figura 4.1 vemos a estrela associada ao nó "n" que contém os nós " n_1 " a " n_7 ".

O processo de discretização de uma dada equação diferencial parcial consiste em aproximá-la por uma equação algébrica para cada nó da malha. Esta equação algébrica sempre deve relacionar o valor das grandezas incógnitas da equação diferencial parcial para um dado nó com os respectivos valores destas grandezas para seus vizinhos. Aplicando o processo de discretização para cada equação diferencial parcial e para cada nó da malha, obteremos um sistema de equações algébricas cuja solução consiste em uma aproximação da solução do problema nas posições dos nós da malha.

A forma de obter a aproximação de equações diferenciais parciais por equações algébricas pode ser reduzida ao problema de aproximar uma derivada parcial de uma dada grandeza por uma equação algébrica envolvendo o valor desta grandeza em um dado nó e em sua vizinhança

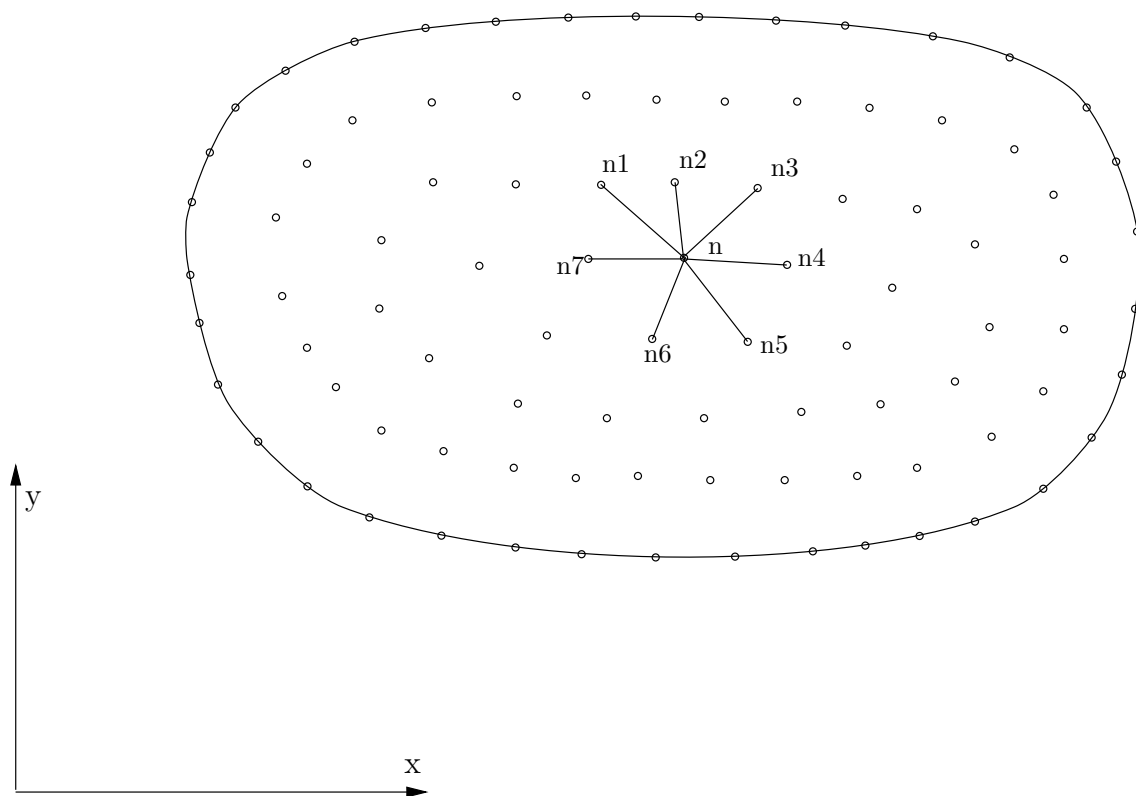


Figura 4.1: Malha irregular de diferenças finitas gerada sobre um dado domínio com representação da vizinhança de um dado nó.

na malha. Para isto, podemos procurar obter um polinômio completo de grau igual à ordem da derivada parcial de maior ordem que deve ser aproximada, e, que em certo sentido, constitua-se em uma aproximação da solução do problema em certos pontos da estrela e cujos coeficientes sejam determinados inteiramente pelos valores das grandezas dos nós da estrela. Uma vez obtido este polinômio, pode-se, facilmente, a partir de seus coeficientes, obter o valor das derivadas parciais procuradas na posição de um dado nó da malha em função do valor das grandezas incógnitas neste nó e em sua vizinhança.

Como forma de obter este polinômio, propomos o uso do método dos mínimos quadrados que tanto permite a obtenção de um polinômio que aproxime a solução nos nós da estrela como a própria solução das equações diferenciais parciais em qualquer ponto da estrela ou fora dela. Para exemplificar o emprego desta técnica, vamos partir de um exemplo que seja suficientemente simples e que contenha todos os elementos envolvidos no sistema de equações diferenciais parciais em coordenadas cilíndricas que condicionam o campo de deslocamentos de um corpo de geometria axissimétrica submetido a um carregamento mecânico qualquer em regime linear elástico de resposta do material e pequenas deformações (equações 2.56-2.58).

Vamos partir do problema expresso pela equação diferencial parcial de segunda ordem (4.1), com condição de contorno (4.2). Nestas equações, "L" e "H" são operadores diferenciais parciais sobre a variável "u", sendo que "f" e "g" dependem somente de "x" e "y".

$$L(u) = f \tag{4.1}$$

$$H(u) = g \tag{4.2}$$

A partir de uma estrela, como a apresentada na figura 4.1, vamos procurar um polinômio de segundo grau que interpole o valor da grandeza "u" na posição do nó "n" e melhor aproxime, segundo o critério dos mínimos quadrados, a grandeza "u" nos nós da vizinhança. Este polinômio poderia ser como aquele apresentado em (4.3).

$$p(x', y') = a x'^2 + b x' y' + c y'^2 + d x' + e y' + u_n \tag{4.3}$$

Onde, na equação (4.3), temos:

$$x' = x - x_n;$$

$$y' = y - y_n;$$

" x_n " e " y_n ": coordenadas "x" e "y" do nó "n";

" u_n ": valor da grandeza "u" na posição do nó "n";

"a", "b", "c", "d" e "e" são os coeficientes do polinômio.

O polinômio (4.3) pode ser colocado em uma forma mais adequada para o posterior tratamento matemático, como apresentado em (4.4).

$$p(x', y') = \sum_{i=1}^5 a_i p_i(x', y') - u_n \quad (4.4)$$

$$p_1(x', y') = x'^2 \quad (4.5)$$

$$p_2(x', y') = x'y' \quad (4.6)$$

$$p_3(x', y') = y'^2 \quad (4.7)$$

$$p_4(x', y') = x' \quad (4.8)$$

$$p_5(x', y') = y' \quad (4.9)$$

Onde, na equação (4.4), "a₁" a "a₅" são os coeficientes do polinômio e "p₁" a "p₅" são dados por (4.5)-(4.9).

Podemos ver na equação (4.3), que, quando $x' = 0$ e $y' = 0$, o polinômio assume o valor de u_n interpolando "u" sobre o nó "n". O emprego do método dos mínimos quadrados parte da definição de um erro que expressa o quanto a função aproximada se distancia da grandeza a ser aproximada em um conjunto de pontos onde deseja-se avaliar esta aproximação. Este erro, para o polinômio (4.3), é apresentado em (4.10).

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(\sum_{i=1}^5 a_i p_i(x'_j, y'_j) - u_n - u_{n_j} \right)^2 \quad (4.10)$$

Na equação (4.10), "nv" é o número de vizinhos.

A idéia, em seguida, é obter o valor dos coeficientes "a_i" que minimizem o valor de "ε" em (4.10). Tendo em vista que podemos ver "ε" como uma função de (a₁, ..., a₅), os mínimos correspondem aos pontos que anulam todas as derivadas parciais de primeira ordem que produzem valores positivos em todas as derivadas parciais de segunda ordem. As condições para que um conjunto de valores (a₁, ..., a₅) minimize "ε" é dado pelas equações (4.11) e (4.12).

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(\sum_{i=1}^5 a_i p_i(x', y') + u_n - u_{n_j} \right)^2 = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_k^2} \varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(\sum_{i=1}^5 a_i p_i(x', y') + u_n - u_{n_j} \right)^2 > 0 \quad (4.12)$$

A equação (4.11) resulta no sistema (4.13).

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j{}^2 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j (u_{n_j} - u_n) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

A inversão do sistema (4.13) nos permite colocar os coeficientes a_1, \dots, a_5 em função dos valores das grandezas nos nós da estrela e da posição, como pode ser visto em (4.14).

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j{}^2 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j (u_{n_j} - u_n) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Os valores das derivadas parciais podem ser obtidos a partir dos coeficientes a_1, \dots, a_5 e da posição (x', y') pelas relações (4.15)-4.18.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 2 a_1 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = a_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 2 a_3 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u = 2 a_1 x' + a_2 y' + a_4 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u = 2 a_3 x' + a_2 y' + a_5 \quad (4.19)$$

Com o conjunto de expressões (4.15)-(4.19) é possível obter uma aproximação dos operadores "L" e "H", apresentados na equações (4.1) e (4.2), para uma expressão algébrica. Esta expressão, após as devidas substituições e simplificações algébricas assume uma forma do tipo apresentado em (4.20).

$$q_0 u_n + \sum_{j=1}^{nv} q_j u_{v_j} = k \quad (4.20)$$

onde:

" u_n " é o valor da grandeza "u" no nó "n";
" u_{v_j} " são os valores da grandeza "u" nos nós vizinhos a "n";
" k " e os " q_j " são os coeficientes resultantes das sucessivas operações algébricas.

O método descrito acima impõe ao polinômio (4.3) apenas as condições de minimizar o total do quadrado do erro em todos os pontos da vizinhança e interpolar exatamente a grandeza no nó central. A substituição das expressões aproximadas para as derivadas parciais apresentadas em (4.15)-(4.19) na equação (4.1) impõe adicionalmente a este polinômio a condição de satisfazer a equação diferencial parcial no nó central da estrela. Uma melhora na solução do problema pode ser obtida fazendo aquele polinômio também aproximar por mínimos quadrados a equação diferencial parcial nos nós da vizinhança.

A obtenção de um polinômio (4.3) que satisfaça aproximadamente uma equação diferencial parcial nos nós da vizinhança, como em (4.1) e (4.2), parte da redefinição de " ε ", definido anteriormente na equação (4.10), como apresentado na equação (4.21) estabelecendo o erro ao aproximar (4.1).

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(L(p(x'_j, y'_j)) - f(x'_j, y'_j) \right)^2 \quad (4.21)$$

Admitindo-se que o operador "L" seja linear, podemos, a partir de (4.4)-(4.9) e (4.21) obter (4.22).

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(\sum_{i=1}^5 \left(L(p_i(x'_j, y'_j)) \right) - f(x'_j, y'_j) \right)^2 \quad (4.22)$$

A obtenção da condição de mínimo erro é apresentada na equação (4.23), seguindo a mesma idéia exposta anteriormente.

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \varepsilon = \sum_{j=1}^{nv} \left(\sum_{i=1}^5 \left(L(p_i(x'_j, y'_j)) \right) - f(x'_j, y'_j) \right) L(p_k(x'_j, y'_j)) = 0 \quad (4.23)$$

A equação (4.23) conduz ao sistema (4.24).

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_5) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{nv} L(p_1) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_2) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_3) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_4) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_5) f(x_j, y_j) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

A obtenção de uma expressão por mínimos quadrados que simultaneamente aproxime o valor da grandeza e minimize o erro ao satisfazer a equação diferencial parcial nos nós da vizinhança pode ser realizada a partir dos sistemas de equações (4.13) e (4.24) utilizando a idéia de sobreposição de condições do método de mínimos quadrados, o que resulta no sistema (4.25).

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_5) \end{bmatrix} \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 \end{bmatrix} \right) \\
& \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} x'_j (u_{n_j} - u_n) \\ \sum_{j=1}^{nv} y'_j (u_{n_j} - u_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{nv} L(p_1) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_2) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_3) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_4) f(x_j, y_j) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_5) f(x_j, y_j) \end{pmatrix} \right) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Os coeficientes a_1, \dots, a_5 podem ser obtidos a partir da inversão do sistema (4.25), obtendo-se a expressão (4.26).

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\
& \left(\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_1)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_2)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_3)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_4)L(p_5) \\ \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_1) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_2) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_3) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_4) & \sum_{j=1}^{nv} L(p_5)L(p_5) \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

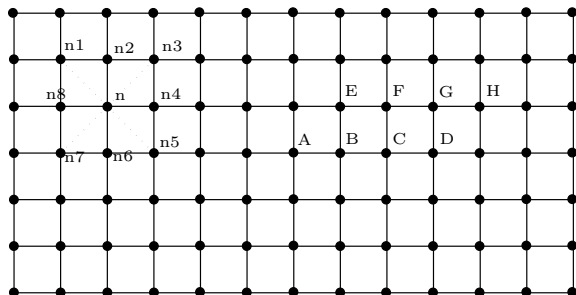
$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{array}{ccccc}
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^4 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 y'_j & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^3 & \sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j & \sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2
\end{array} \right]^{-1} \\
& \left(\left(\begin{array}{c}
\sum_{j=1}^{nv} x'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j y'_j (u_{n_j} - u_n) \\
\sum_{j=1}^{nv} y'_j{}^2 (u_{n_j} - u_n) \\
\sum_{j=1}^{nv} x'_j (u_{n_j} - u_n) \\
\sum_{j=1}^{nv} y'_j (u_{n_j} - u_n)
\end{array} \right) + \left(\begin{array}{c}
\sum_{j=1}^{nv} L(p_1) f(x_j, y_j) \\
\sum_{j=1}^{nv} L(p_2) f(x_j, y_j) \\
\sum_{j=1}^{nv} L(p_3) f(x_j, y_j) \\
\sum_{j=1}^{nv} L(p_4) f(x_j, y_j) \\
\sum_{j=1}^{nv} L(p_5) f(x_j, y_j)
\end{array} \right) \right) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

A aproximação da equação diferencial parcial para uma equação algébrica do tipo apresentado em (4.20) para cada nó da malha resulta em um sistema de equações algébricas de ordem igual ao número de nós da malha (isto neste exemplo especificamente), cuja inversão nos fornece uma solução aproximada do problema segundo o método apresentado acima.

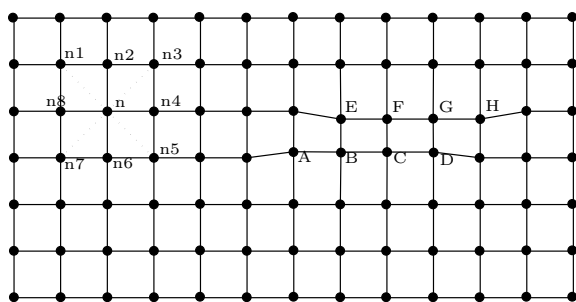
4.1.1 Comentários sobre o Método de Diferenças Finitas.

O método de discretização apresentado acima, até o ponto em que foi desenvolvido, não se mostrou adequado quando aplicado na obtenção de soluções aproximadas do problema expresso pelas equações 2.56-2.58, 2.62-2.64 em um domínio contínuo com contorno qualquer, justamente o objeto do presente trabalho. O principal problema encontrado foi justamente quando a malha de diferenças finitas apresenta os seus nós em uma disposição não regular. Nestas condições, a solução do problema apresenta erros, mesmo para malhas muito refinadas (grande densidade de nós), que podiam ser verificados numa simples inspeção ou visualização gráfica dos resultados. Porém, quando os nós da malha apresentam uma disposição regular, a solução obtida mostrava-se satisfatória tanto qualitativamente como quantitativamente. Observa-se que os resultados começavam a piorar a medida que os nós passavam a assumir uma disposição irregular na malha.

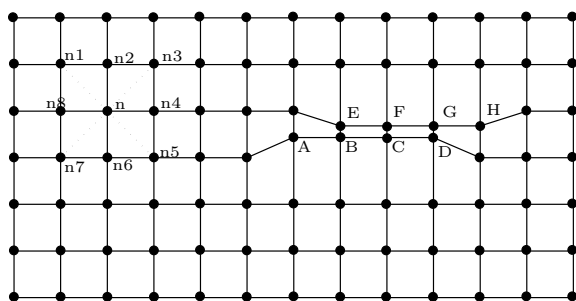
Os problemas envolvendo o método de diferenças finitas podem ser ilustrados tendo-se em conta as malhas de diferenças finitas observadas na figura 4.2, onde os nós estão representados pela intersecção entre linhas e suas vizinhanças são escolhidas da mesma forma que a do nó "n" formada por seus oito vizinhos "n1,...,n8". Nesta figura, podemos ver: em "a)" é apresentada uma malha com distribuição regular de seus nós; em "b)" as posições dos nós "A-H" são alteradas de maneira a introduzir uma certa irregularidade na malha; e em "c)" as posições destes mesmos nós são bastante alteradas de forma a produzir uma forte irregularidade na malha. As soluções produzidas a partir do emprego de malhas regulares como a apresentada na figura 4.2-a normalmente tendem a uma boa aproximação da solução do problema, sendo melhor a medida que a distância entre os nós da malha diminui, sendo que, embora neste trabalho não conste um estudo matemático a respeito da convergência do esquema proposto, pode-se afirmar pela observação que o esquema proposto conduz a bons resultados do ponto de vista da



a) Malha com disposição regular dos nós.



b) Malha com disposição levemente irregular dos nós.



c) Malha com disposição fortemente irregular dos nós.

Figura 4.2: Malhas de diferenças finitas com disposições regulares e irregulares dos nós.

engenharia neste caso. Quando a malha empregada no problema passa a apresentar um certo nível de irregularidade na disposição dos seus nós, como na malha apresentada na figura 4.2-b, a solução produzida começava a se distanciar da solução problema a ponto de que mesmo um refinamento da malha não produzisse uma boa aproximação com resultados ruins no que diz respeito a distribuição dos deslocamentos tanto em módulo como em direção. Nas situações em que a malha apresenta uma forte irregularidade na disposição de seus nós (figura 4.2-c), a solução produzida mostra-se muito ruim, ficando, tanto quantitativamente como qualitativamente, muito distante da solução do problema, isto ao mesmo tempo em que se observa grandes variações na solução para mudanças nas posições de uns poucos nós da malha.

O esquema de diferenças finitas proposto neste trabalho, em virtude do que foi exposto acima, deve ser complementado por um estudo de convergência e estabilidade para que este método possa ficar adequado à solução de problemas práticos. Uma vez que, no caso do emprego de malhas irregulares, a solução obtida sofre grande influência da disposição dos nós na malha, no estudo da convergência torna-se necessário alcançar uma forma de poder-se avaliar a malha a ser empregada obtendo-se previamente o quanto a solução aproximada tenderá a convergir.

A obtenção de uma maneira de avaliar a malha de diferenças finitas pode tornar este método de aproximação adequado para a solução de problemas envolvendo domínios não retangulares, onde fica difícil estabelecer uma disposição dos nós em uma grade retangular do tipo da apresentada na figura 4.2-a. Uma possibilidade seria, com base nesta forma de avaliação, desenvolver-se algoritmos capazes de gerar malhas que conduzam a obtenção de soluções com bom grau de convergência. Tais algoritmos de geração poderiam tornar este esquema de diferenças finitas adequado à obtenção de soluções aproximadas razoáveis para o tipo problema objeto deste trabalho em muitas aplicações de engenharia.

4.2 Discretização pelo Método de Elementos Finitos.

A discretização pelo método de elementos finitos já foi, na verdade, praticamente descrita no Capítulo (3), faltando escolher quais seriam as funções " ϕ_n " que compõem a base de funções, indicadas nas equações (3.34)-(3.42).

A escolha da base de funções, a ser empregada nas equações (3.34)-(3.42), deve recair em um conjunto de funções linearmente independente e deriváveis até a ordem de derivação empregada nas equações (3.34)-(3.42). Isto implica em que devem existir, ao longo de todo domínio, as derivadas de primeira ordem das funções escolhidas, uma vez que nas equações (3.34)-(3.42) constam derivações de no máximo de primeira ordem nas funções da base de função. Portanto, as funções escolhidas devem apresentar continuidade C^0 .

Existem diversos critérios para a escolha da base de funções. Muitas bases de funções já se tornaram comuns no método de elementos finitos e estão muito bem desenvolvidas na literatura ([1], [2] e [3]). A escolha para este trabalho teve como principal critério a simplicidade na implementação e a facilidade para a inversão numérica do sistema resultante da discretização.

As bases de funções normalmente empregadas em elementos finitos parte da divisão do

domínio em polígonos chamados elementos. Nesta divisão, por simplicidade, aproxima-se a fronteira do domínio para uma poligonal. No interior de cada elemento, aproxima-se a solução para um polinômio que deve satisfazer certos requisitos de continuidade nas fronteiras entre elementos. A base de funções deve corresponder a este quadro.

Neste trabalho escolheu-se empregar, por simplicidade, elementos de forma triangular em cujo interior a solução é aproximada por uma função linear em "x" e em "y", apresentando continuidade de valor ao cruzar a fronteira entre elementos, o que satisfaz a exigência de continuidade C^0 requerida. As funções da base de funções que produzem este quadro podem ser definidas da seguinte maneira:

1. A cada nó está associada uma função.
2. O valor da função é "1" no nó ao qual está associada e "0" nos demais nós da malha.
3. O valor da função é "0" no interior de todos os elementos que não sejam adjacentes ao nó ao qual esteja associada.
4. A função tem a forma algébrica conforme apresentado em (4.27), no interior de cada elemento adjacente ao nó ao qual está associada.

$$\phi_n(x, y) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)}$$

para $(x, y) \in \text{elemento "e" adjacente ao nó "n"}$.

(4.27)

Na equação (4.27), temos:

- x_0 e y_0 : coordenadas do nó associado à ϕ_n ;
- x_1 e y_1 : coordenadas de um dos dois restantes nós do elemento "e";
- x_2 e y_2 : coordenadas do outro dos dois restantes nós do elemento "e".

Na figura 4.3 é apresentada uma malha de elementos finitos na qual está destacado um nó, seus nós vizinhos e seus elementos adjacentes. Na figura 4.4 é mostrada uma função integrante da base de funções associada ao nó destacado na figura 4.3.

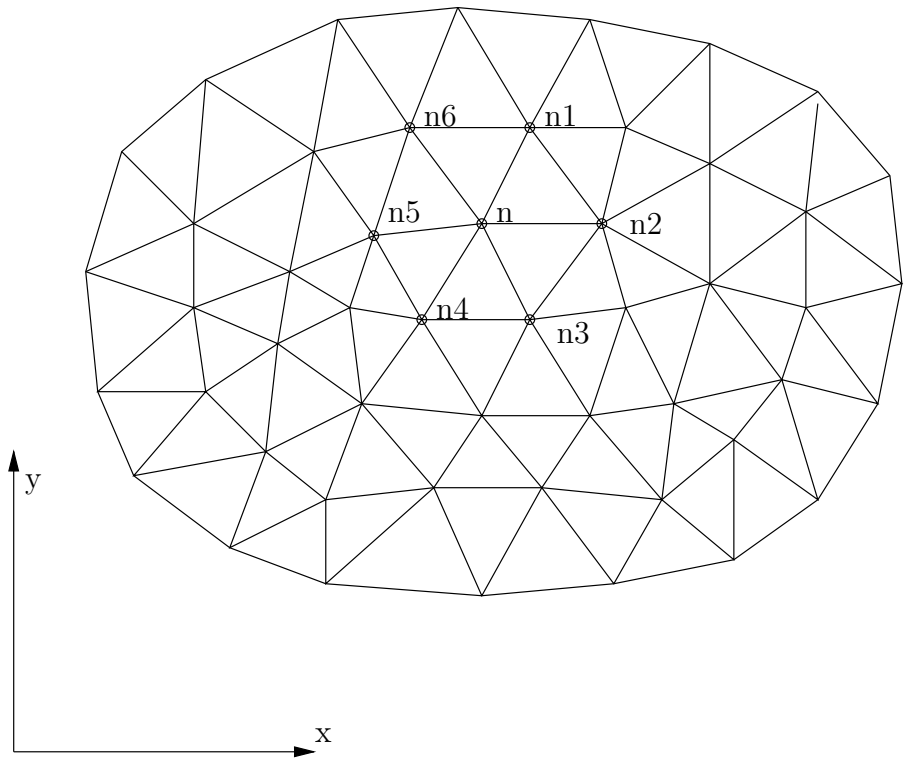


Figura 4.3: Malha de elementos finitos destacando seus nós vizinhos e elementos adjacentes.

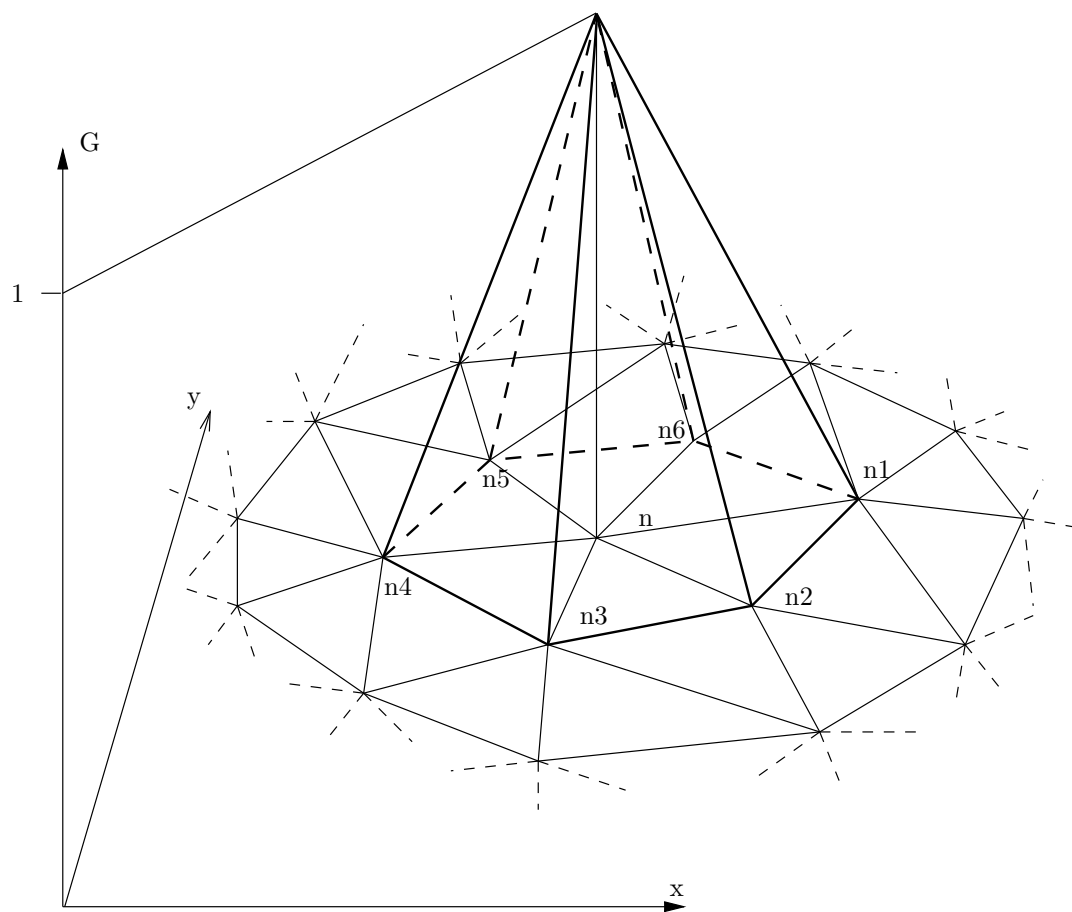


Figura 4.4: Função integrante da base de funções usada na discretização por elementos finitos.

Capítulo 5

Geração de Malha para Elementos Finitos.

O método utilizado neste trabalho para a geração de malhas para elementos finitos é desenvolvido em [9]. Neste capítulo faremos uma descrição do método, procurando mostrar detalhes do algoritmo empregado.

O método parte de um domínio plano, podendo ou não ter fronteiras contínuas, conforme exemplo apresentado na figura 5.1.

Sobre a fronteira do domínio são gerados os nós de contorno da malha. Na fronteira externa, os nós são gerados no sentido anti-horário e nas fronteiras internas, são gerados no sentido horário. A distância entre os nós é determinada pelo tamanho desejado da malha (tamanho médio dos lados dos elementos) na vizinhança de cada posição. O algoritmo que gera estes nós deve variar conforme a maneira com que cada fronteira é expressa matematicamente, porém sempre deve registrar a informação sobre a fronteira a que pertence cada nó e a ordem deles ao longo do caminho da fronteira a qual pertence. A geração destes nós é mostrada na figura 5.2.

Em seguida, são geradas linhas horizontais que cortam o domínio produzindo segmentos de reta produto da intersecção das mesmas com o domínio. A distância entre cada par de linhas vizinhas deve ser igual ao tamanho médio desejado para a malha na região entre duas linhas. Os segmentos obtidos por este processo são mostrados na figura 5.3.

Sobre estes segmentos são gerados os nós interiores ao domínio. Da mesma forma que para a geração dos nós de fronteira, a distância entre estes nós de ser aproximadamente igual ao tamanho desejado para a malha em cada posição e devem respeitar a mesma distância em relação aos nós de fronteira. Os nós gerados desta forma podem ser vistos na figura 5.4

Uma vez gerados os nós de fronteira e interiores, passa-se, então, a geração dos elementos. Os nós de fronteira são relacionados numa estrutura de dados do tipo fila chamada FNC e, da mesma forma, os nós interiores são relacionados na fila FN. Para cada par nós de FNC que sejam vizinhos em relação ao caminho de uma dada fronteira, são gerados segmentos de reta chamados de lados que serão realmente os lados dos elementos futuramente gerados. Entenda-se por vizinhos dois nós que, pertencentes a uma mesma fronteira, determinem um

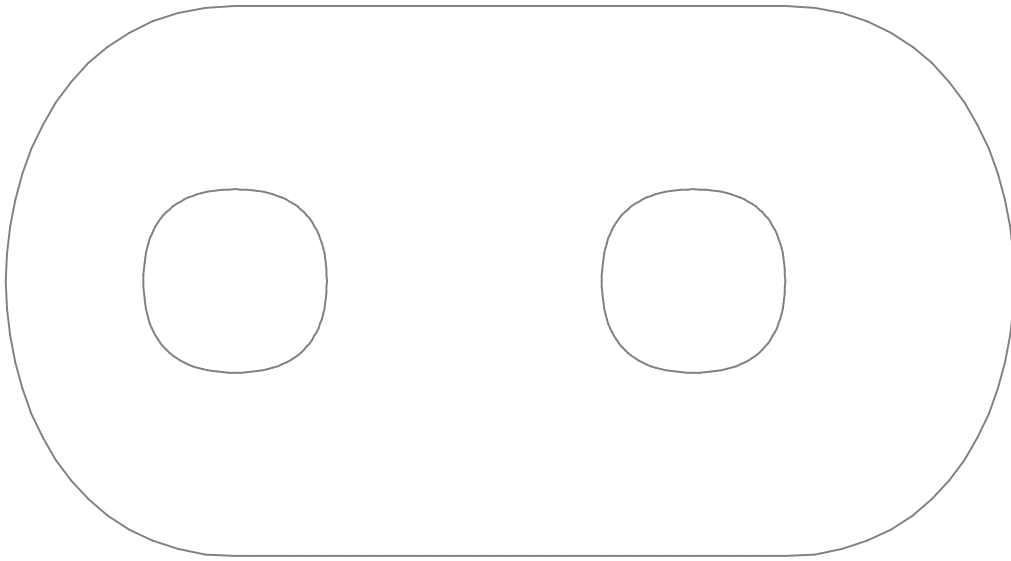


Figura 5.1: Domínio Planar Conecto.

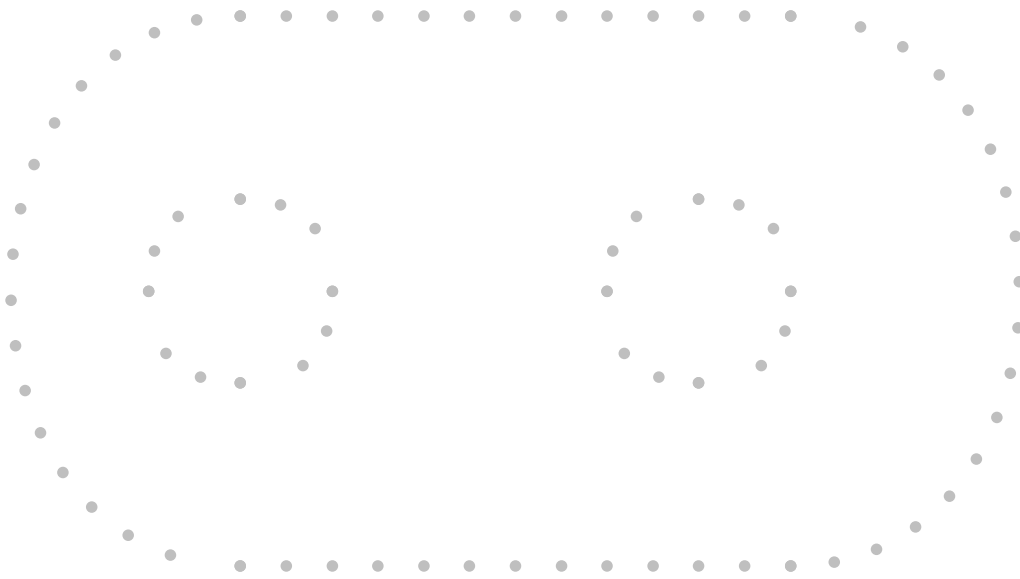


Figura 5.2: Nós gerados sobre a fronteira.

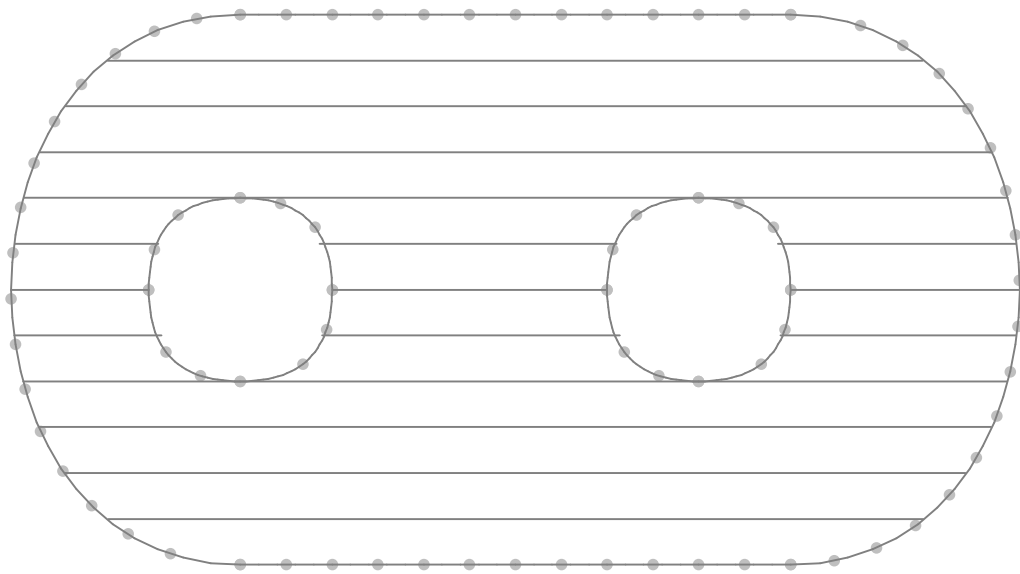


Figura 5.3: Segmentos horizontais gerados no interior do domínio.

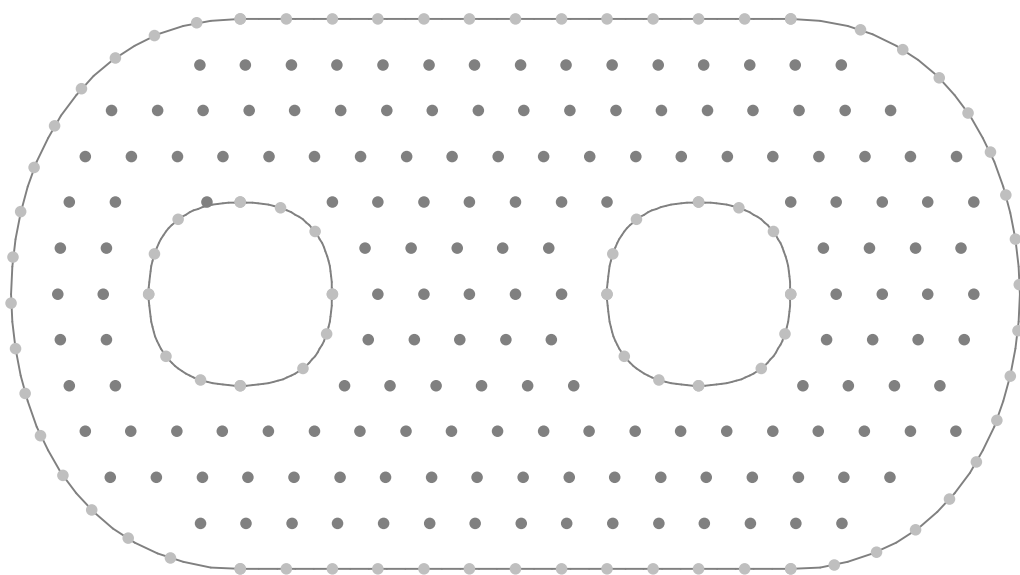
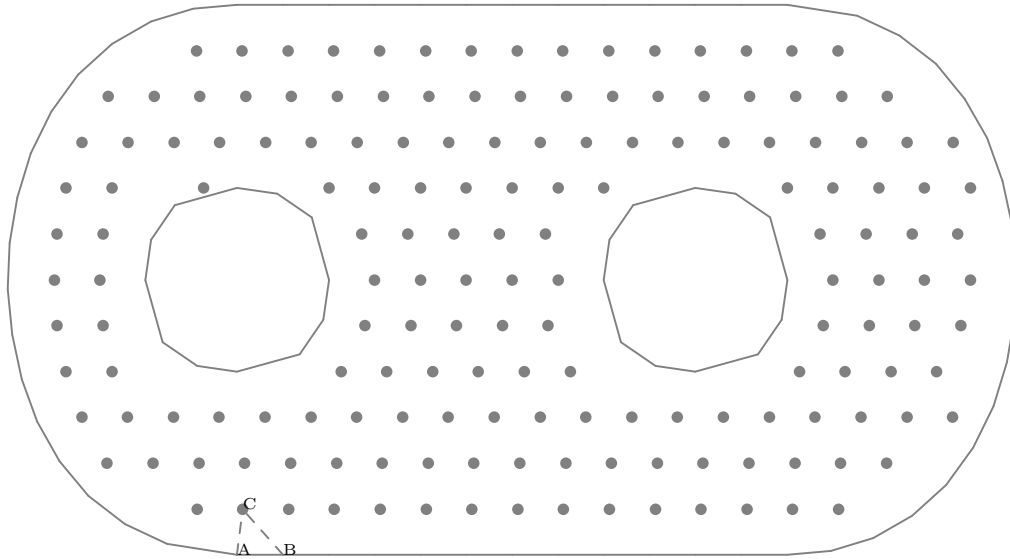


Figura 5.4: Nós interiores gerados sobre os segmentos horizontais.



- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.

Figura 5.5: Lados de elementos gerados a partir dos nós de fronteira.

segmento desta fronteira que não contenha nenhum outro nó. Estes lados são relacionados em uma fila chamada FL e, juntamente com a informação sobre os nós que definem o lado, deve-se registrar também a informação sobre a ordem dos dois nós: segundo o sentido anti-horário para a fronteira externa e horário para as fronteiras internas. Isto serve para indicar, a partir de um dado lado, o semiplano que contém o domínio. A ordem de inclusão destes lados em FL deve obedecer o mesmo sistema de ordenação dos nós, de forma que segmentos que possuam um nó em comum devam ser inseridos consecutivamente na fila na mesma ordem que seus dois extremos não compartilhados. Obviamente, isto não vale para o último e o primeiro segmentos pertencentes a uma mesma fronteira a serem relacionados em FL. A geração destes lados é apresentada na figura 5.5.

A seguir, o processo de geração dos elementos segue com o seguinte algoritmo:

1. Procura-se, entre os nós pertencentes à FN, aquele que melhor forma um triângulo com o primeiro lado da FL, segundo um critério "A" expresso por um dado parâmetro "PA", que será comentado mais adiante neste capítulo.
2. Se este parâmetro estiver acima de um valor mínimo, então:
 - (a) O nó considerado é excluído da FN.
 - (b) São criados dois lados: o primeiro lado contendo como primeiro nó o primeiro nó do primeiro lado da FL e como segundo nó, o nó considerado; e o segundo lado contendo

- como primeiro nó o nó considerado e como segundo nó, o segundo nó do primeiro lado da FL.
- (c) Estes dois lados são introduzidos, na mesma ordem com que foram definidos acima, no final da FL e o primeiro lado da FL é excluído da mesma. O triângulo formado por estes três lados define um elemento que é introduzido na fila de elementos (FE). Exemplos deste processo são apresentados nas figuras 5.5 a 5.10.
3. Em caso contrário, procura-se, entre os nós que definem os lados da FL, aquele que melhor forme um triângulo com o primeiro lado da FL, segundo o critério "A" expresso por um dado parâmetro "PA".
 4. Se este parâmetro estiver acima de um valor mínimo, então:
 - (a) São criados dois lados: o primeiro lado contendo como primeiro nó o primeiro nó do primeiro lado da FL e, como segundo nó, o nó considerado; e o segundo lado contendo como primeiro nó o nó considerado e, como segundo nó, o segundo nó do primeiro lado da FL.
 - (b) Estes dois lados são introduzidos, na mesma ordem com que foram definidos acima, no final da FL e o primeiro lado da FL é excluído da mesma. Se um destes dois lados equivale a um lado já existente em FL (são definidos pelos mesmos nós extremos), então o mesmo é excluído da FL. O triângulo formado por estes três lados define um elemento que é introduzido na fila de elementos (FE). Exemplos deste processo são apresentados nas figuras 5.11 a 5.15.
 5. Em caso contrário, procura-se novamente entre os nós pertencentes à FN aquele que melhor forma um triângulo com o primeiro lado da FL, segundo um critério "A" expresso por um dado parâmetro "PA".
 6. Se este nó existir, então:
 - (a) O nó considerado é excluído da FN.
 - (b) São criados dois lados: o primeiro lado contendo como primeiro nó o primeiro nó do primeiro lado da FL e, como segundo nó, o nó considerado; e o segundo lado contendo como primeiro nó o nó considerado e, como segundo nó, o segundo nó do primeiro lado da FL.
 - (c) Estes dois lados são introduzidos, na mesma ordem com que foram definidos acima, no final da FL e o primeiro lado da FL é excluído da mesma. O triângulo formado por estes três lados define um elemento que é introduzido na fila de elementos (FE).
 7. Em caso contrário, procura-se, entre os nós que definem os lados da FL, aquele que melhor forme um triângulo com o primeiro lado da FL, segundo o critério "A" expresso por um dado parâmetro "PA".

8. Se este nó existir, então:

- (a) São criados dois lados: o primeiro lado contendo como primeiro nó o primeiro nó do primeiro lado da FL e, como segundo nó, o nó considerado; e o segundo lado contendo como primeiro nó o nó considerado e, como segundo nó, o segundo nó do primeiro lado da FL.
- (b) Estes dois lados são introduzidos, na mesma ordem com que foram definidos acima, no final da FL, e o primeiro lado da FL é excluído da mesma. Se um destes dois lados equivale a um lado já existente em FL (são definidos pelos mesmos nós extremos), então o mesmo é excluído da FL. O triângulo formado por estes três lados define um elemento que é introduzido na fila de elementos (FE).

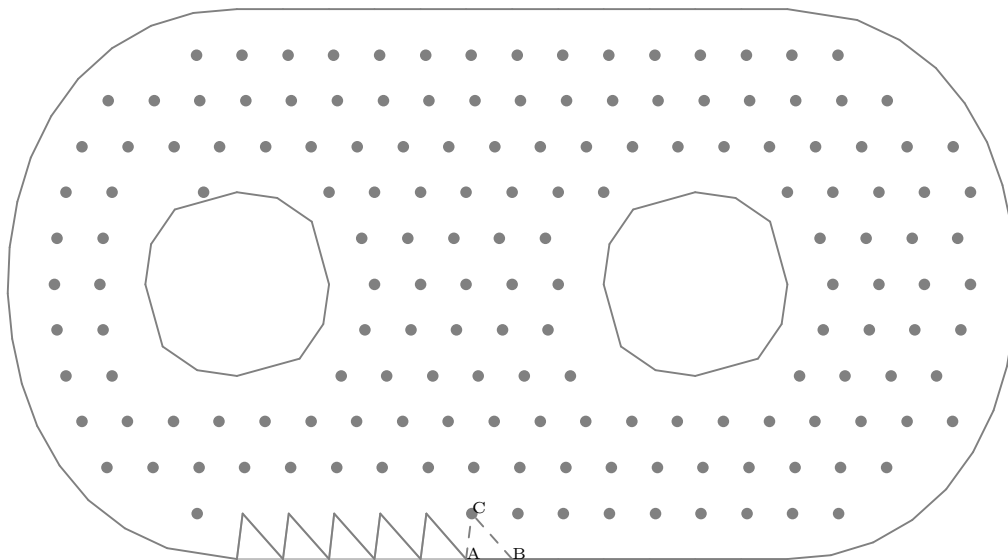
9. Em caso contrário, está completa a geração dos elementos. Os nós interiores, que após o processo acima não forem utilizados na definição de nenhum elemento gerado, são excluídos da malha. Um exemplo disto pode ser observado na figura 5.15: o nó interior "D" não será mais usado para gerar nenhum elemento devido a sua posição pouco favorável.

Em seguida, recalcula-se as coordenadas dos nós interiores tomando como nova posição para um dado nó, a média aritmética das coordenadas dos seus nós vizinhos, que são aqueles que formam um lado de elemento com o nó considerado. Este processo converge em duas ou três iterações e produz uma melhor forma dos elementos. As figuras 5.16 a 5.19 mostram o resultado deste processo. A figura 5.16 mostra a malha logo após a geração dos elementos e as figuras 5.17 a 5.19 mostram o resultado de três iterações.

Durante o processo de geração dos elementos, pode-se observar a formação de uma frente de lados de elementos que é vista com um traçado mais forte nas figuras 5.7 a 5.15 e corresponde, justamente, aos lados contidos na fila de lados "FL". Esta frente, que não é contínua, ou seja, na verdade é formada por várias frentes contínuas ou segmentos, pode evoluir de diversas maneiras conforme a forma do domínio: em alguns casos ocorre a fusão de dois segmentos distintos desta frente; em outros, a separação de um dos segmentos em dois. Nas figuras 5.9, 5.10 e 5.15 vemos o surgimento de outros segmentos na frente diferente daqueles observados nas demais figuras. Independentemente da maneira como esta frente evolui, o algoritmo de geração dos elementos não é afetado pela fusão ou separação de segmentos, ou melhor, nenhum teste é necessário para verificar a ocorrência de tais alterações.

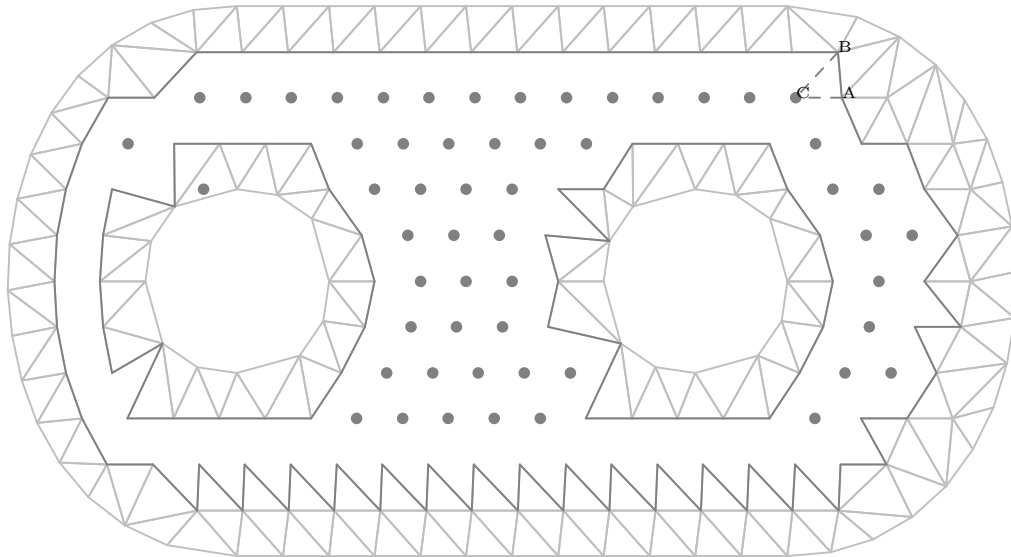
O critério empregado para a seleção da melhor possibilidade de formar um triângulo, chamado de critério "A" no texto acima, baseia-se no valor obtido pela divisão da área pelo perímetro de um triângulo dado. Quanto maior este valor, mais este triângulo aproxima-se de um triângulo equilátero.

Inicialmente, conforme descrito no algoritmo acima, procura-se entre os nós de interiores à frente de triangularização aquele que maximiza o valor do critério "A". Se este valor está acima de um mínimo, este é escolhido como base para a geração do elemento. Em caso contrário, faz-se esta procura entre os nós vértices da frente de triangularização, da mesma forma que



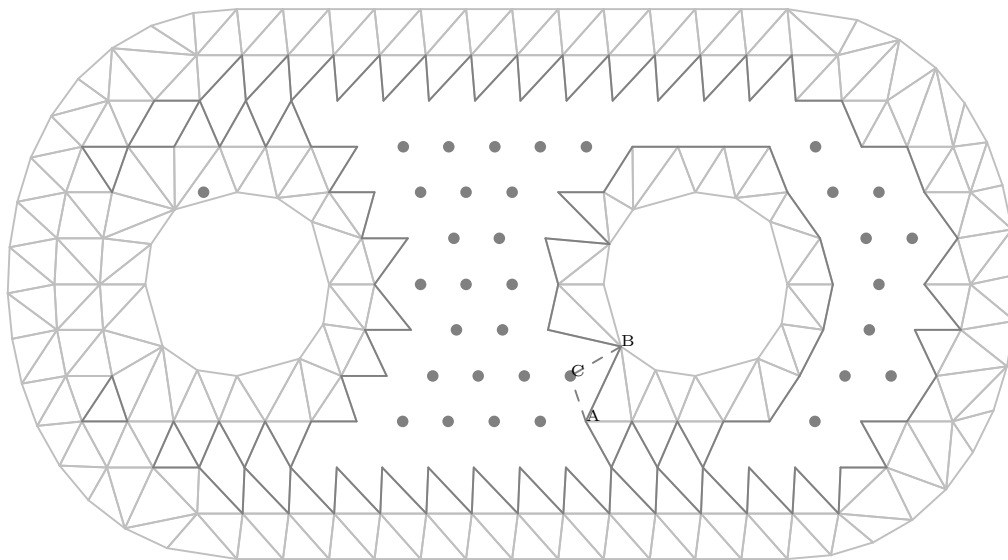
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.6: Elemento número 6 gerado com um nó interior.



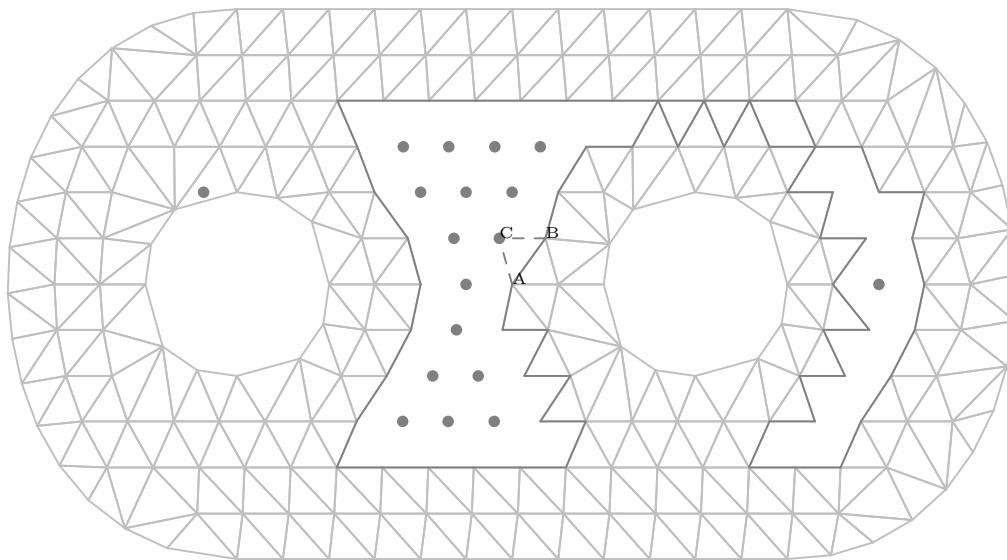
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.7: Elemento número 195 gerado com um nó interior.



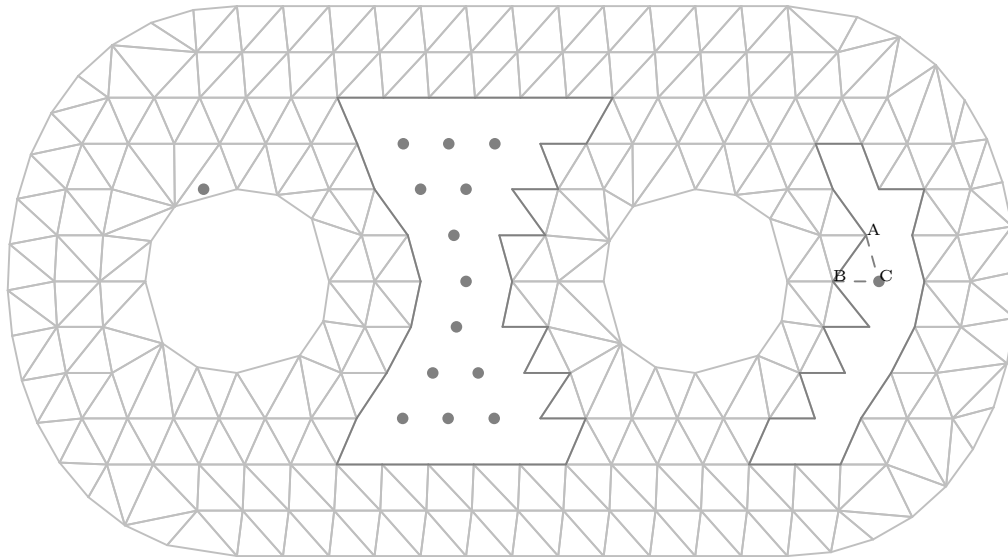
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.8: Elemento número 245 gerado com um nó interior.



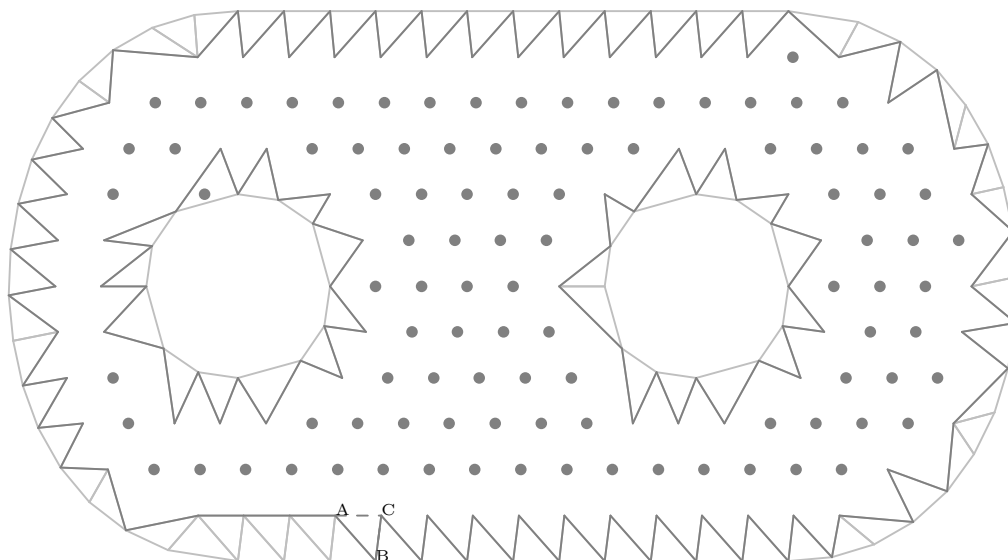
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.9: Elemento número 326 gerado com um nó interior.



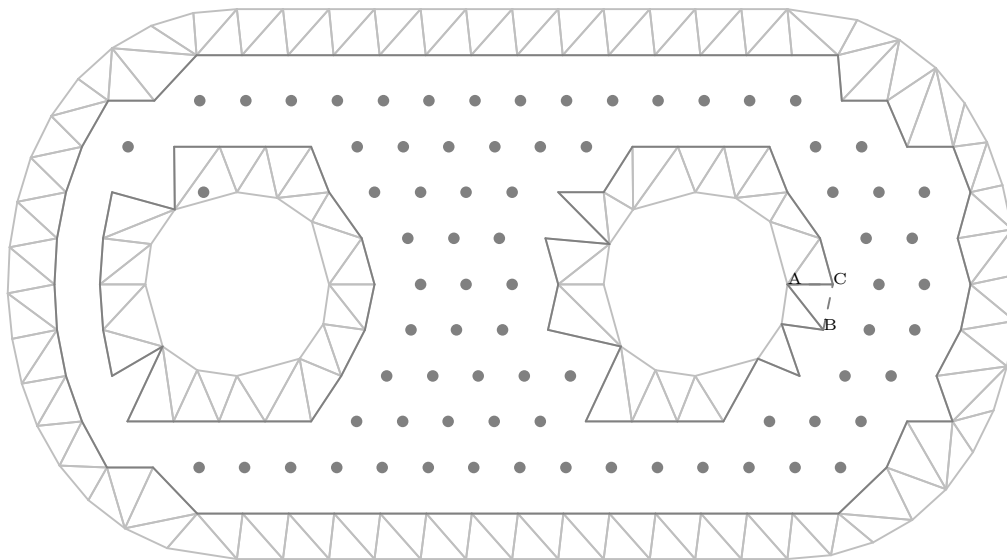
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó interior selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.10: Elemento número 337 gerado com um nó interior.



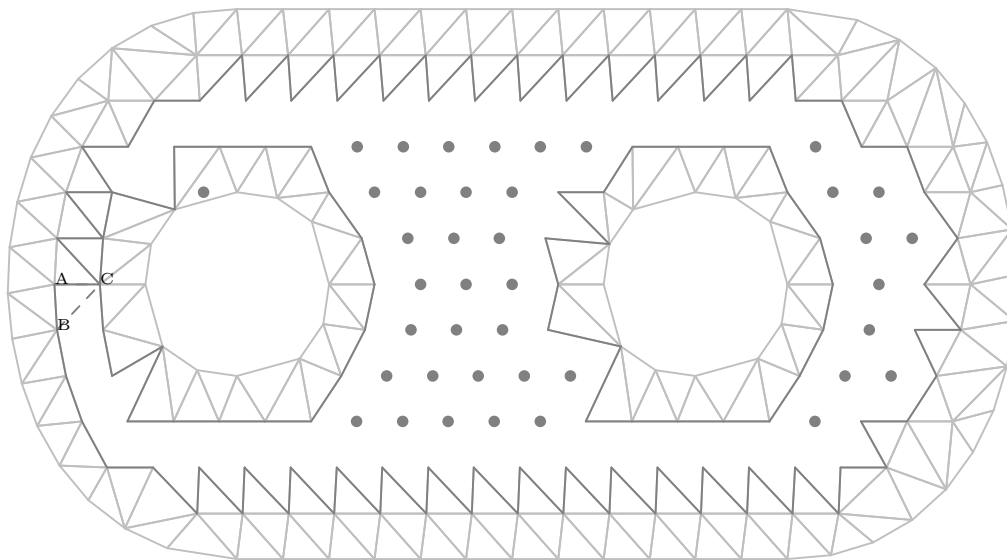
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó extremo de segmento da FL selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.11: Elemento número 86 gerado com um nó da FL.



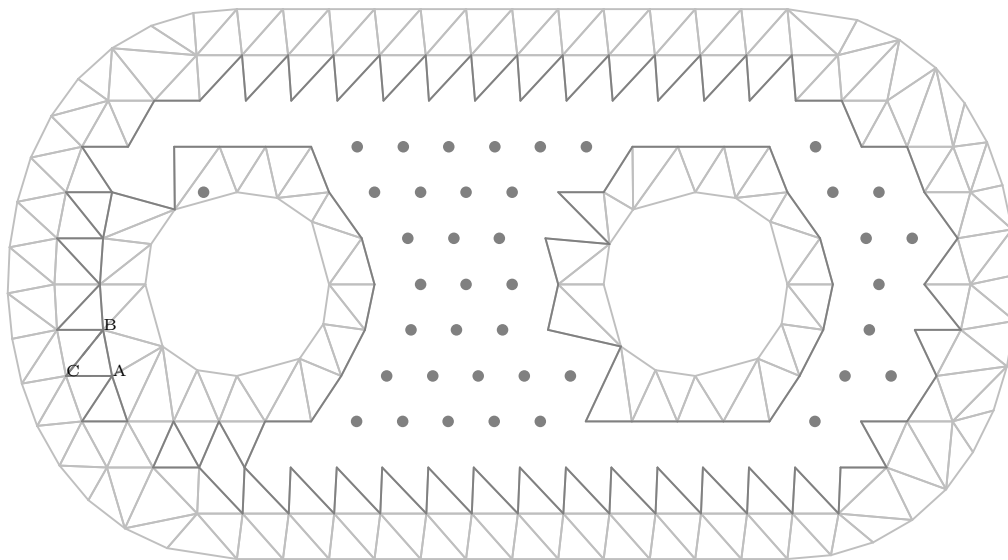
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó extremo de segmento da FL selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.12: Elemento número 166 gerado com um nó da FL.



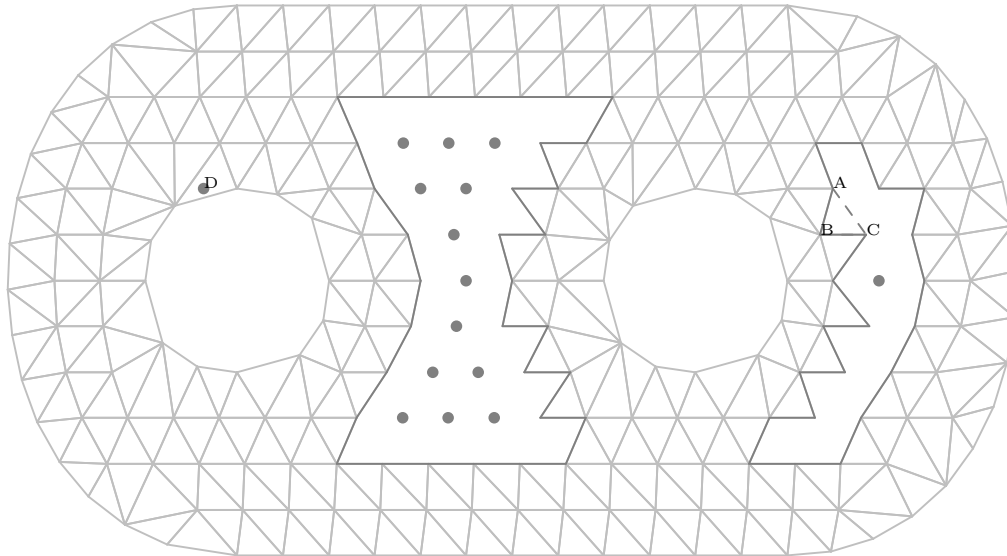
- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó extremo de segmento da FL selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.13: Elemento número 216 gerado com um nó da FL.



- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó extremo de segmento da FL selecionado.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.14: Elemento número 226 gerado com um nó da FL.



- AB - primeiro segmento da "FL".
- C - nó extremo de segmento da FL selecionado.
- D - nó interior que não será utilizado na geração da malha.
- traçado forte - lados pertencentes a "FL".
- traçado fraco - lados gerados já excluídos da "FL".
- ABC - elemento gerado.

Figura 5.15: Elemento número 336 gerado com um nó da FL.

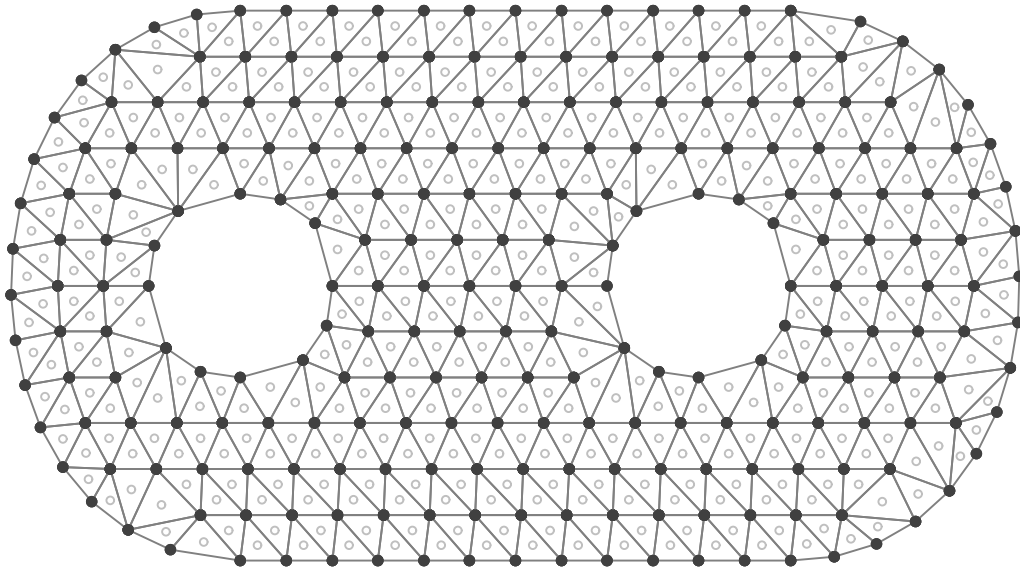


Figura 5.16: Malha resultante do processo de geração de elementos.

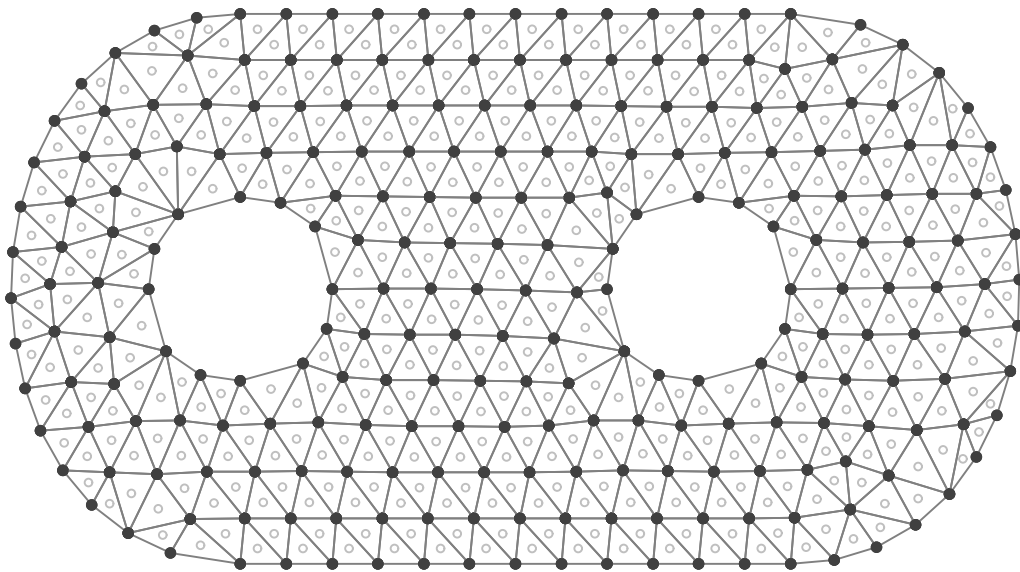


Figura 5.17: Malha com posição dos nós recalculada após primeira iteração.

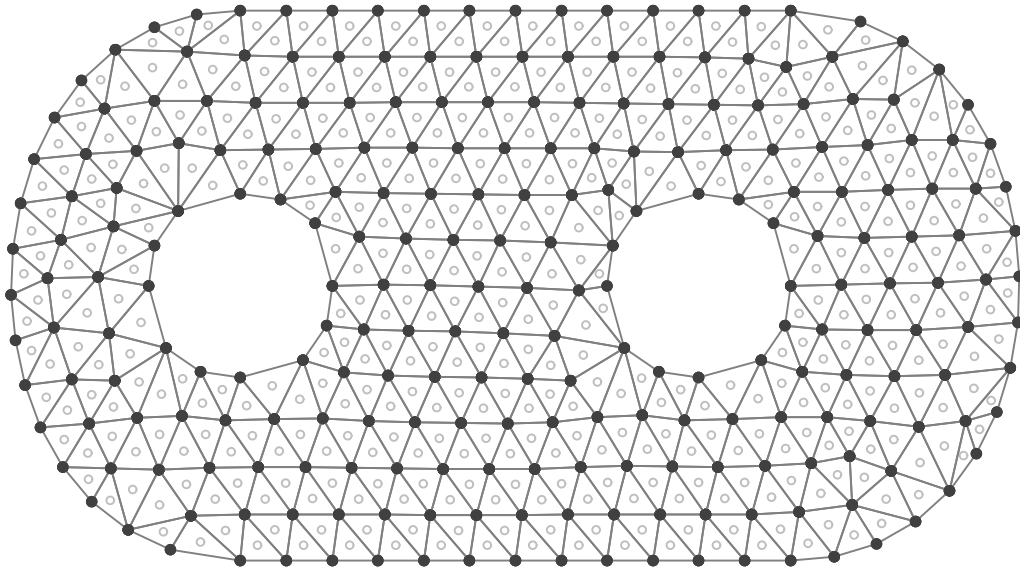


Figura 5.18: Malha com posição dos nós recalculada após segunda iteração.

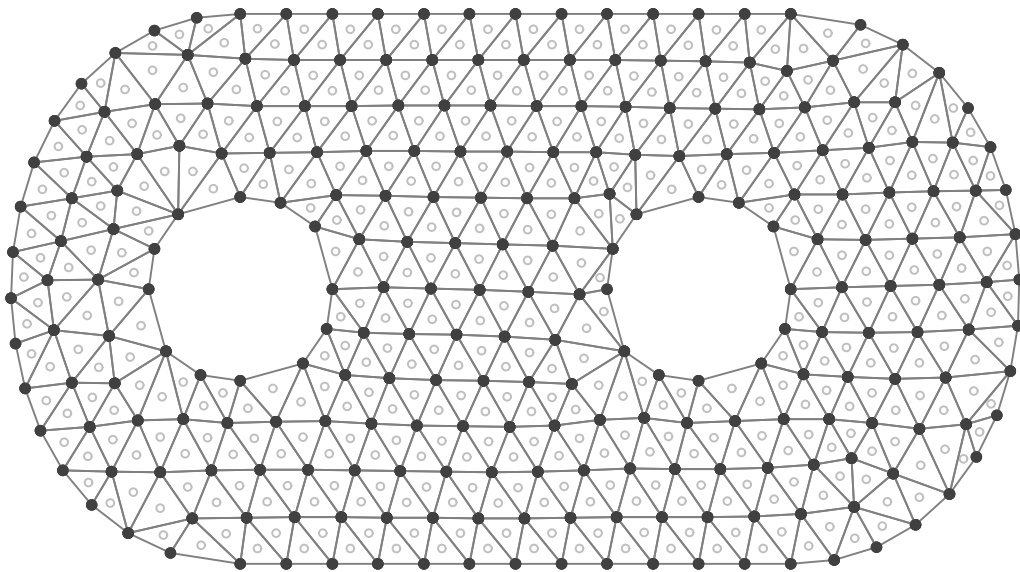


Figura 5.19: Malha com posição dos nós recalculada após terceira iteração.

para o nó interior. Se nenhum destes for selecionado, a busca se repete da mesma forma, porém sem a exigência de um valor mínimo para o critério "A". Este procedimento garante a continuidade da malha, ou seja, cada lado de elemento, com a exceção daqueles lados gerados sobre a fronteira, são sempre compartilhados por dois elementos.

Outro detalhe a ser observado é que quando são gerados novos lados, estes não devem cruzar com nenhum outro lado da frente de triangularização e também não devem ser tangenciados, com exceção de seus extremos, por nenhum ponto desta frente. A verificação disto implica em algoritmos que submetem à comparação de cada lado integrante da frente com o novo lado a ser criado. Esta comparação resume-se a um simples problema de intersecção de dois segmentos de reta que, uma vez expressos matematicamente na forma paramétrica, resultam em um sistema de equações algébricas lineares. As raízes deste sistema indicam se ocorrem ou não cruzamentos e/ou tangenciamento entre os segmentos.

As informações fornecidas pelo gerador são as seguintes:

1. Coordenados dos nós pertencentes à malha;
2. Conetividade: nós que integram os elementos;
3. Relação dos nós que são gerados sobre a fronteira do domínio;
4. Relação dos nós que são gerados no interior do domínio;
5. Relação dos lados de elemento que são gerados sobre a fronteira do domínio (e que, em razão disto, aproximam a fronteira para uma linha poligonal de lados retos);
6. Relação dos lados de elemento que são gerados no interior do domínio;
7. Associação dos nós e as respectivas linhas a partir das quais são gerados. Isto tem importância quando a fronteira do domínio é definida por linhas e deseja-se associar propriedades específicas para os nós gerados sobre cada linha;
8. Associação dos lados de elemento e as respectivas linhas sobre as quais são gerados.

Capítulo 6

Estrutura do Sistema Computacional.

O desenvolvimento do código que implementa os métodos numéricos apresentados neste trabalho levanta muitas questões e pode levar a uma infinidade de soluções de implementação. Um caminho para a criação de um sistema computacional deste tipo será apresentado em seguida.

6.1 Modelo para desenvolvimento do sistema.

A proposição inicial para a busca de soluções para o desenvolvimento adequado do código, estabelece um modelo funcional contendo os traços mais gerais de um sistema que implemente soluções por meio de uma classe de métodos numéricos com características semelhantes aos métodos de diferenças finitas e elementos finitos apresentados ao longo deste trabalho. Este modelo funcional é mostrado, esquematicamente, na figura 6.1, na qual é empregada a seguinte convenção:

1. Os retângulos indicam módulos do código que podem tanto significar tarefas como módulos a serem ligados a outros módulos.
2. Os retângulos com cantos arredondados indicam código do sistema operacional que podem significar tarefas ou módulos a serem ligados e que controlam arquivos (armazenagem bruta de dados) ou dispositivos (tela gráfica, etc ...).
3. As flechas com traçado cheio indicam o fluxo de dados que pode ocorrer entre os módulos. As formas como este fluxo se realiza podem ser várias: memória compartilhada entre dois módulos; sinais do sistema de comunicação entre processo, no caso dos módulos em comunicação serem implementados como tarefas; etc
4. As flechas tracejadas indicam a requisição de ações de um módulo para outro. Isto normalmente ocorre na seguinte seqüência:
 - (a) Um módulo envia a outro um determinado conjunto de dados;

- (b) Em seguida, o módulo que enviou os dados ordena ao que os recebeu a execução de uma dada operação com estes dados.
- (c) O módulo que realizou a operação devolve os dados resultantes ao módulo que ordenou a mesma.

No caso dos módulos estarem ligados entre si em uma mesma tarefa, esta requisição de ação resume-se a uma chamada de subrotina.

Apresentamos a descrição de cada módulo:

1. Manipulador da base de dados:

Este módulo contém as funções ou subrotinas que operam com a base de dados. Estas rotinas constituem uma interface por intermédio da qual outros módulos podem ler ou alterar os valores contidos na base de dados. A base de dados é o conjunto de informações relevantes a um problema de análise numérica cujo conteúdo pode ser enumerado da seguinte forma:

- (a) Informações sobre a malha:
 - i. número de nós;
 - ii. número de elementos;
 - iii. as coordenadas de cada nó;
 - iv. conjunto nós que definem cada elemento;
 - v. vizinhança de cada nó;
 - vi. nós pertencentes à fronteira do domínio;
 - vii. lados de elemento pertencentes à fronteira do domínio.
- (b) Informações sobre as condições de contorno relacionadas à malha:
 - i. cargas aplicadas a cada nó;
 - ii. restrições empregadas a cada nó;
 - iii. cargas aplicadas a cada elemento (cargas de volume);
 - iv. cargas aplicadas a cada lado de elemento pertencente à fronteira do domínio;
 - v. restrições aplicadas a cada lado de elemento pertencente à fronteira do domínio.
- (c) Informações sobre o domínio:
 - i. linhas que compõem fronteira do domínio, para domínios em \mathcal{R}^2 ou superfícies que compõem esta fronteira, para domínios em \mathcal{R}^3 .
 - ii. figuras auxiliares, como pontos para definir os extremos de linhas e as próprias linhas para definir as bordas das superfícies. Estas figuras ajudam a definir, com precisão, a informação de que, por exemplo, duas linhas compartilham como extremo um mesmo ponto.

- iii. subdivisões do domínio.
- (d) Informações sobre a relação entre objetos empregados para definir o domínio com os objetos componentes da malha. Por exemplo, a relação de quais os lados de elemento que são externos e possuem seus nós extremos sobre uma dada linha que é empregada para definir uma das fronteiras do domínio.
- (e) Condições de contorno definidas em relação às informações sobre o domínio ou figuras correlacionadas:
 - i. restrições aplicadas aos pontos e linhas sobre a fronteira do domínio;
 - ii. carregamentos aplicados aos pontos e linhas sobre a fronteira do domínio;
 - iii. carregamentos aplicados às subdivisões do domínio.
- (f) Informações sobre as propriedades dos materiais. Estas propriedades podem ser constantes ou dependentes de outras grandezas como posição, temperatura e deformações.
- (g) Outras informações relativas ao tipo de método numérico empregado:
 - i. tamanho do passo de integração no tempo, no caso de problemas dinâmicos;
 - ii. termos da série de Fourier da formulação do problema a serem processados, no caso em que a base de funções que descrevem a solução do problema contém expansões nesta série, como no caso da formulação para peças com geometria axissimétrica apresentada anteriormente neste trabalho.

A tarefa essencial executada por este módulo é simplificar o acesso à base de dados para os demais módulos. As suas funções são escritas de forma que todos os detalhes de ordem puramente computacional ficam contidos em seu código sem que precisem serem especificados nas chamadas destas funções. Desta forma, as estruturas auxiliares de controle de dados e respectivos algoritmos de manipulação das mesmas, que precisam ser desenvolvidos por razões que dependem dos recursos oferecidos pelo sistema operacional para guardar e recuperar dados, não necessitam ser considerados no projeto dos demais módulos, podendo as operações de acesso às informações contidas na base de dados serem especificadas em uma via direta.

2. Gerador de Malhas.

O gerador de malhas contém os procedimentos que partem das informações sobre o domínio contidas na base de dados e de parâmetros de geração de malha obtidos a partir da interface com o usuário (ou também da base de dados) e executam a geração da malha registrando as informações assim produzidas na base de dados. As ações do gerador são comandadas a partir da interface com o usuário.

3. Solução.

Este módulo contém as funções que partem das informações sobre a malha, condições de contorno, propriedades dos materiais e outras informações específicas de um ou outro

método numérico e realizam os cálculos necessários à solução do problema numérico. Muitas rotinas ou procedimentos empregados pelas funções deste módulo são de emprego geral em programas que envolvam cálculos numéricos como, por exemplo, procedimentos para calcular as raízes de um sistema de equações lineares. Por isto, tais procedimentos são implementados em um módulo a parte. O tipo de processamento a ser realizado neste módulo é comandado a partir da interface com o usuário.

4. Processamento auxiliar.

São funções de emprego geral em aplicações numéricas, cujo desenvolvimento pode ser considerado como uma questão externa ao desenvolvimento da aplicação apresentado neste capítulo.

5. Processamento de resultados.

É o módulo que contém funções que realizam um processamento complementar dos resultados gerados pelos processos do módulo de solução. São aqueles processamentos que, embora a sua natureza seja numérica e estejam ligados ao tipo de problema que foi processado na fase de solução, apresentam resultados cuja qualidade é determinada pelo tipo de procedimento realizado no módulo de solução.

Um exemplo seria aquele em que, tendo o método empregado na fase (ou módulo) de solução gerado deslocamentos como resposta para o problema de um corpo elástico submetido a uma dada carga mecânica e com certas restrições, deseja-se saber a distribuição de tensões neste corpo. Pode-se, como apresentado neste trabalho, relacionar as tensões com os deslocamentos. O processamento necessário à obtenção deste resultado fica, então, contido no módulo de processamento de resultados, pois o problema fundamental na solução foi calcular os deslocamentos no módulo de solução, sendo o cálculo de tensões a partir dos deslocamentos, um problema de importância secundária.

O processamento complementar a ser realizado é sempre comandado a partir do módulo de interface com o usuário.

6. Visualização gráfica.

São as rotinas que produzirão uma visualização gráfica das informações contidas na base de dados. Esta visualização pode ser aplicada às informações de natureza puramente geométrica como: a forma do domínio (pontos, linhas e superfícies); a geometria malha (posição dos nós, elementos, vizinhança); as informações que envolvam valores associados à posições: forças e seus pontos de aplicação, grandezas que variam com a posição como tensões, deslocamentos, deformações, tensões de contatos; restrições e as posições ou regiões em que foram empregadas; informações sem significado geométrico como o gráfico de uma função relacionando duas grandezas, temperatura e módulo de elasticidade, por exemplo. Esta visualização é sempre comandada a partir da interface com o usuário.

7. Interface com usuário.

Este módulo comanda todas as ações do sistema. Ele deve ser desenvolvido de forma a permitir ao usuário do sistema o seguinte:

- (a) Editar todas as informações da base de dados;
- (b) Comandar todas as ações disponíveis nos demais módulos;

E deve ser capaz de entender mensagens vindas do usuário nas seguintes formas:

- (a) Fluxo de caracteres produzidos pelo usuário. Este fluxo pode ter tanto origem em um teclado acionado pelo usuário, como pode ter origem em um arquivo ou como saída de um dado processo. Normalmente a fonte deste fluxo é designada partir do sistema operacional ou outras ferramentas externas ao sistema apresentado;
- (b) Fluxo de eventos produzidos em um ambiente gráfico. Estes eventos podem ter origem no acionamento de um apontador gráfico por parte do usuário: deslocamento do apontador, liberação ou carga sobre um dado botão acionador; ou no acionamento de um teclado feito pelo usuário.

6.2 Considerações sobre a implementação dos módulos.

O principal problema que envolve a implementação de cada módulo é, justamente, determinar o quanto de código precisa ser realmente desenvolvido e o quanto de recursos já existentes disponíveis no sistema operacional e em outros sistemas podem auxiliar na criação do módulo.

Nós podemos observar, a partir do diagrama funcional do sistema apresentado na seção anterior, que somente três módulos do conjunto estão intimamente ligados com a função fundamental do sistema, que é a execução das soluções numéricas. Estes módulos são o de solução, o gerador de malhas e o de processamento de resultados. Os demais módulos podem ser implementados quase inteiramente a partir de recursos disponíveis no sistema operacional, em outros sistemas e em bibliotecas de procedimentos.

Em seguida, apresentaremos propostas de implementação para cada módulo e quanto do mesmo foi desenvolvido no presente trabalho. Estas propostas terão em vista o desenvolvimento em um sistema operacional "Unix" padrão com um ambiente gráfico "X11" ("Xwindow").

1. Solução.

Este módulo deve ser desenvolvido em linguagens compiladas e com bom desempenho em aplicações numéricas como C, C++, Pascal ou Fortran, ou extensões das mesmas. Com o objetivo de redução do tempo de desenvolvimento, deve-se procurar usar rotinas já desenvolvidas para aplicações numéricas, que normalmente compõem bibliotecas de código objeto que podem ser ligadas ao módulo de solução.

A maneira como este módulo irá se relacionar com o módulo de manipulação da base de dados para acessar as informações necessárias é um problema que apresenta diversos

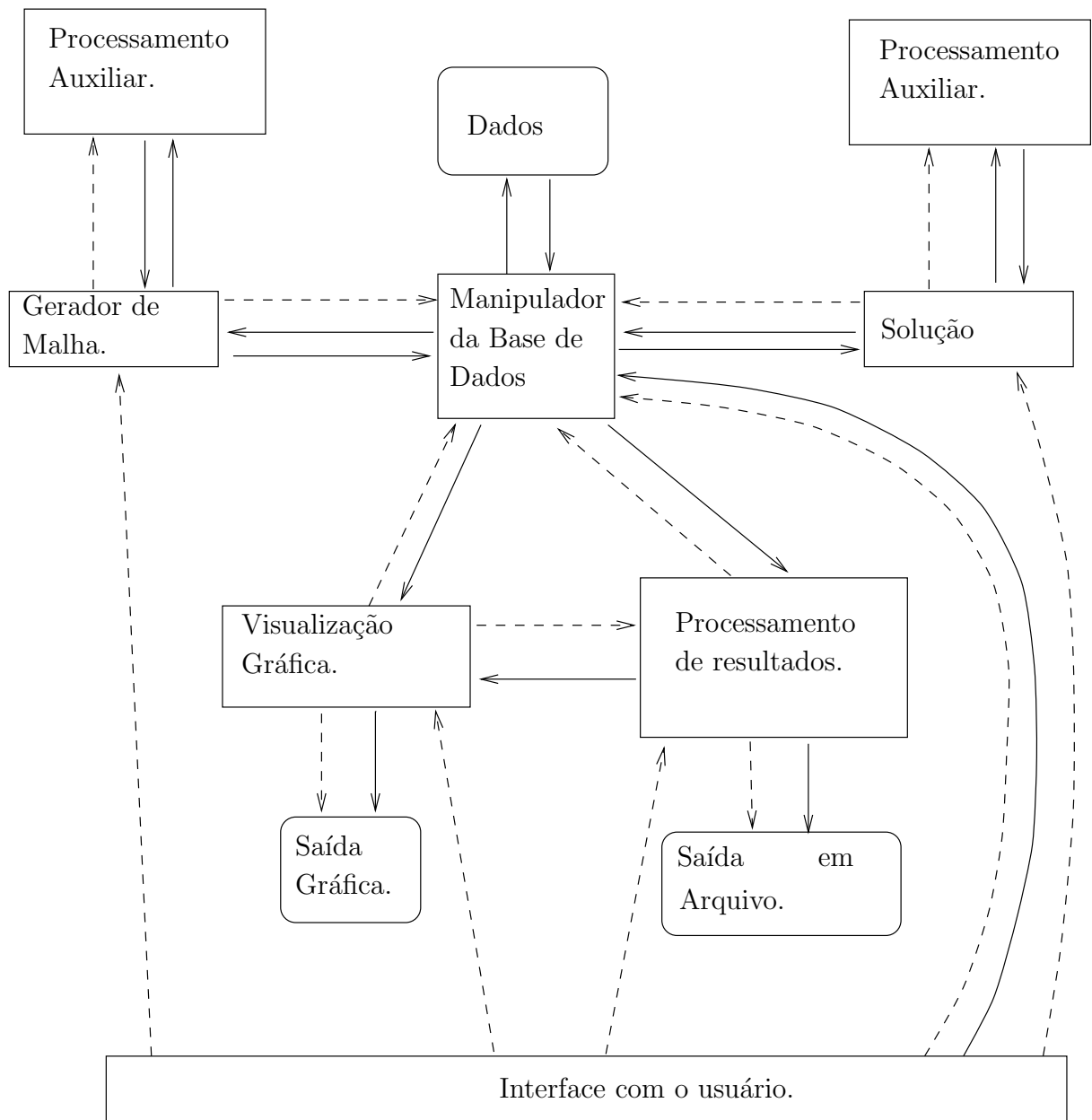


Figura 6.1: Estrutura funcional do código.

desdobramentos. A maneira mais simples é ligar os dois módulos de maneira que os dados sejam lidos e escritos por meio de chamadas de subrotinas. Esta alternativa foi empregada neste trabalho por motivo de simplicidade e de disponibilidade das ferramentas necessárias.

Uma outra forma é empregar os recursos de comunicação entre processos disponíveis no sistema operacional. Esta alternativa admite que os dois módulos constituam-se em processos separados. Isto também pode conduzir a outras vantagens computacionais, como a possibilidade de garantir a consistência da base de dados quando dois módulos requisitam alterações simultaneamente.

Neste trabalho, foram implementados os algoritmos de solução para os métodos de diferenças finitas e elementos finitos apresentados no Capítulo 4 e escritos em C++. Estes algoritmos partem das informações relativas à malha e às condições de contorno gerando um sistema de equações algébricas lineares. Este sistema é invertido por um algoritmo baseado na triangularização de "Gauss" e suas raízes são a solução aproximada do problema para cada nó, expressa em deslocamentos.

2. Gerador de Malhas.

Este módulo pode receber considerações de desenvolvimento semelhantes às que foram feitas para o módulo de solução. Porém, ao contrário do módulo de solução que necessita empregar estruturas de dados auxiliares relativamente simples, o gerador de malha emprega estruturas de dados auxiliares cuja complexidade se iguala ou supera a da base de dados de todo sistema. Isto ocorre a tal ponto que o manuseio da estrutura de dados auxiliar pode ser visto como um problema a parte dentro deste módulo. Dependendo da forma como o módulo manipulador da base de dados for implementado, o mesmo pode ser empregado para resolver o problema local de manuseio das estruturas de dados. Isto simplifica enormemente o desenvolvimento deste módulo pois permite que este esforço seja concentrado no desenvolvimento dos algoritmos de geração de malha.

O conteúdo deste módulo que foi desenvolvido neste trabalho resume-se à implementação dos algoritmos de geração de malha para os métodos de elementos finitos e diferenças finitas apresentados no capítulo 5 e foram escritos em C++. As estruturas de dados utilizadas nestes algoritmos que relacionam os elementos em filas (FL, FN, etc ...) foram implementadas na forma de filas encadeadas de ponteiros.

3. Processamento de resultados.

Este módulo possui características semelhantes ao módulo de solução, porém normalmente opera com estruturas de dados menores que este. Portanto, valem aqui as mesmas observações feitas para o módulo de solução.

O único processamento de resultados implementado neste trabalho foi o cálculo das deformações a partir dos deslocamentos, isto para o método de elementos finitos, necessário

à comparação com os resultados experimentais, conforme exposto no capítulo 7. Também neste caso a implementação foi feita em C++.

4. Manipulador da base de dados.

O problema de manipulação da base de dados é um problema geral do desenvolvimento de aplicações computacionais, e muitas teorias e soluções são propostas para o problema. Apresentamos algumas alternativas para a solução do problema:

- (a) O manipulador constitui-se de um conjunto de rotinas que permitem um fácil acesso à base de dados que fica contido em um ou mais arquivos do sistema operacional. Estas rotinas são ligadas ao código de qualquer módulo que necessite ler ou alterar o conteúdo da base de dados e possibilitam um acesso à informação que pode ser feito sem ter que levar em conta detalhes de como a informação é efetivamente registrada.
- (b) O manipulador constitui-se de um processo que seja criado toda vez que um módulo passe a acessar a base de dados. As informações, comandos e dados, são trocadas entre os processos por intermédio dos recursos de comunicação entre processos disponíveis no sistema operacional. Esta solução apresenta como vantagem sobre a primeira alternativa o fato de que alterações no módulo manipulador não implicam em processos de religação dos demais módulos que o acessam, quando estas alterações não signifiquem mudanças na maneira já estabelecida de acesso à informação. Porém apresenta a desvantagem de ter que haver a criação de uma convenção sobre a troca e formatação da informação e de um código extra, em todos os módulos, para interpretação das mensagens trocadas entre processos.
- (c) O manipulador constitui-se de um processo independente que atende às chamadas dos demais módulos para manusear as informações. Esta alternativa, além da vantagem que apresenta a segunda alternativa de eliminar os processos de religação entre os módulos, também possui a vantagem de facilitar a manutenção da coerência da base de dados no caso de mais de um módulo tentar realizar acesso às informações ao mesmo tempo. Outra vantagem desta implementação é a possibilidade do sistema poder ter a execução de seus módulos de maneira distribuída em uma rede de computadores.

Nesta implementação podemos também falar na mesma desvantagem destacada para a segunda alternativa. Existem, porém, linhas de pesquisa no desenvolvimento de novas linguagens que automaticamente estabelecem o relacionamento de um processo com outro processo gerenciador da base de dados. Uma destas direções [10],[11] e [12], vai justamente na criação de uma linguagem baseada no "C++" (uma extensão do "C++"), chamada de "E", que permite a criação de variáveis (ou instâncias de classes de objetos) permanentes, ou seja, variáveis cuja existência pode preceder e suceder a vida de processos que as manuseiam. Na prática, é uma implementação semelhante à apresentada neste item, com um processo servidor atuando permanentemente atendendo às requisições de acesso às informações por parte de outros

processos, que necessariamente devem ser escritos em E, e códigos para gerenciar esta troca de informações ligados e acessados implicitamente a todas aplicações escritas em "E". O sistema "E" também possui uma biblioteca de apoio com rotinas para a manipulação de estruturas de dados. Com estes recursos, o "E" permite a escrita de código sem necessidade de referência explícita às operações de entrada e saída de dados ou às operações de comunicações entre processos.

No presente trabalho foi adotada a primeira alternativa por motivos de simplicidade de implementação e implementada em C++. Porém, com a disponibilidade de uma ferramenta como sistema "E" descrito acima, fica clara a redução de código a ser gerado para a implementação de todos os módulos do sistema, e, até, eliminando a necessidade de implementar o próprio módulo de manipulação da base de dados.

5. Módulo de visualização gráfica.

O sistema de visualização gráfica atua intimamente ligado à interface com o usuário, sendo que o processamento de eventos gerados pelo usuário normalmente exige uma resposta gráfica imediata pelo sistema. O módulo de visualização gráfica constitui-se das rotinas responsáveis pela geração da saída gráfica. Este tipo de código pode ser agrupado em diversos níveis. Aquelas do nível mais básico são implementações do sistema gráfico fundamental existente juntamente com o sistema operacional de um computador, e são implementadas em processos e bibliotecas (servos gráficos como no "X11") juntamente com rotinas que realizam a tarefa de ler eventos gerados pelo usuário. Por isto, estas rotinas não são consideradas integrantes da interface gráfica de nosso sistema. Por outro lado, as rotinas de nível mais elevado são consideradas parte integrante do módulo de visualização gráfica.

Este módulo normalmente constitui-se de um conjunto de rotinas que são ligadas ao módulo de interface com o usuário. Aparentemente não há nenhuma vantagem na implementação deste módulo como um processo independente da interface com o usuário. A linguagem a ser empregada neste módulo depende, portanto, da linguagem a ser usada na implementação do módulo de interface com o usuário.

6. Interface com o usuário.

O conteúdo deste módulo depende muito de recursos externos disponíveis no sistema operacional ou em seus adendos de interfaceamento gráfico com usuário (como por exemplo o "X11"). Em geral, estes recursos apresentam-se suficientemente desenvolvidos de maneira que pouco trabalho de desenvolvimento precisa ser feito neste módulo. As ações a serem desencadeadas neste módulo, no caso da interface gráfica, são as seguintes:

- (a) acionar as chamadas do sistema que criam os objetos da interface: janelas, "menus", quadros de diálogos, etc ...;

- (b) associar eventos produzidos pelo usuário e rotinas a serem acionadas pelos eventos. Estas rotinas normalmente resumem-se à troca de informações com outros módulos ou à chamada de subrotinas contidas em outros módulos;
- (c) estabelecer algumas ações a serem desencadeadas, necessárias ao sistema de interfacçamento gráfico, como, por exemplo, a ação a ser desencadeada quando uma janela tem suas dimensões alteradas.

No caso em que o usuário envia um fluxo de caracteres para a interface, os recursos do sistema operacional, como os interpretadores de linha de comando, praticamente cumprem a função deste módulo.

Como exemplo de ferramentas que podem auxiliar a implementação deste módulo, podemos citar:

- (a) O interpretador de comandos de linha do sistema "Unix": o "sh", e a sua linguagem própria de programação;
- (b) As bibliotecas do sistema gráfico "X11", escritas em "C";
- (c) As ferramentas de desenvolvimento de interfaces gráficas para o ambiente "X11" como: "tcl", "tk", "tclx", e outras. Estas ferramentas possuem uma linguagem de programação própria e comandos para a criação e manuseio de objetos de interface gráfica e interpretador de comando de linha.
- (d) A biblioteca "sx"[13] que atua como uma interface mais simples para as bibliotecas do "X11", que, como estas, é escrita em "C".

Neste trabalho, por motivos de simplicidade, a implementação segue a idéia, na medida do possível, de que o usuário enviará a maior parte dos comandos ao sistema por intermédio dos interpretadores de linha de comando integrantes do próprio sistema operacional. Porém, no caso da visualização gráfica, foi criada uma interface gráfica com o usuário com um projeto bastante modesto. Foi implementado um programa, escrito em C, para a visualização dos deslocamentos obtidos como solução associada a um dado termo da série de "Fourier". Este programa permite a visualização da malha, nós, elementos, vizinhança, cargas, restrições e das componentes nas direções "R" e "Z" de tais deslocamentos.

6.3 Comentários Finais.

O objetivo principal do diagrama funcional e das observações feitas neste capítulo foi o de apresentar diversas alternativas de implementação de uma aplicação para os métodos de diferenças finitas e elementos finitos, como os apresentados neste trabalho, e que incluíam a indicação de recursos que facilitem a implementação do sistema.

Uma boa implementação é a que permite que o principal esforço seja direcionado ao desenvolvimento dos algoritmos relacionados diretamente com os métodos numéricos, ou seja, de

acordo com o modelo funcional, justamente com os módulos de solução, gerador de malhas e processamento de resultados. Acreditamos que, com o emprego das ferramentas indicadas nesta exposição, possa-se atingir este objetivo. Também é importante que estes módulos de solução, gerador de malha e processamento de resultados, que passamos a chamar de módulos fundamentais, possam ser subdivididos e ter suas partes desenvolvidas por diversas pessoas de maneira independente. Isto possibilita que diversos métodos de cálculo ou de geração de malha, desenvolvidos por pesquisadores de diferentes linhas, possam ser implementados no mesmo sistema, o que representa um significativo reaproveitamento de esforço de desenvolvimento. Isto também facilita o acesso dos usuários aos vários algoritmos implementados, uma vez que mantém-se a mesma interface com o usuário. Outra característica que deve possuir o sistema é justamente a de apresentar a capacidade para intercambiar os módulos não fundamentais, com o objetivo de permitir que o sistema possa facilmente ser remontado visando tirar partido de avanços em outras áreas como o gerenciamento da base de dados, interface com o usuário e visualização gráfica.

O caminho para que seja alcançada esta boa implementação do sistema deve buscar uma solução para os seguintes pontos:

1. Deve ser criada uma convenção a respeito da forma de acesso à base de dados e sobre o tipo e a forma destas informações. Isto implicaria estabelecer o nome das funções invocadas para o manuseio de informações e a formatação de seus parâmetros. Assim, muitas pessoas que desenvolvem algoritmos, seja de solução ou de geração de malha, podem facilmente fazê-lo de forma a serem introduzidos no sistema. A convenção sobre o tipo e a forma destas informações tem o objetivo de evitar que informações que, embora tendo um significado correto, estejam armazenadas em uma forma que outros algoritmos não a entendam. Um exemplo disto seria o caso de um gerador de malhas registrar os nós que compõem os elementos observando o sentido horário, enquanto que um algoritmo de solução interpretaria esta ordem como sendo no sentido anti-horário.
2. Os algoritmos dos módulos fundamentais devem possuir uma forma de acesso padronizada, o que implica em estabelecer uma convenção sobre nome das rotinas e formato de seus parâmetros. A implementação deste algoritmos deve, de preferência, apresentar a característica de poderem ser acionados sem que o módulo de interface com o usuário necessite ser recompilado ou religado. Isto possibilita uma fácil instalação de novos adendos ao sistema.

O sistema desenvolvido neste trabalho não atende a estes pontos, por isto fica como recomendação para o seu futuro desenvolvimento justamente um estudo detalhado das colocações acima e uma pesquisa sobre ferramentas desenvolvidas com o fim de apoiar a criação de sistemas flexíveis e resolver as questões necessárias à criação de um sistema com o máximo de redução de seus custos de desenvolvimento.

Capítulo 7

Análise experimental de tensões e comparação com os resultados numéricos.

A verificação da eficiência de métodos numéricos na solução de um problema técnico tem como sua melhor expressão a comparação dos resultados deste método com resultados obtidos experimentalmente. Esta idéia implica em que não somente o método numérico seja avaliado, mas também os fundamentos do modelo matemático empregado para descrever o sistema físico real.

A avaliação da eficácia do método numérico do ponto de vista matemático é feita somente frente ao problema matemático para o qual se procura uma aproximação numérica para a sua solução. Porém, para a Técnica, é também necessária a avaliação do modelo teórico básico usado para representar ou aproximar um dado sistema físico.

O problema objeto deste trabalho, a avaliação da distribuição de tensões em uma peça com geometria axissimétrica submetida a um carregamento não axissimétrico, que é um problema cujas metas contém a obtenção de resultados com significado físico, não permite a valiação direta do modelo matemático usado na sua representação. Isto ocorre porque a formulação matemática deste modelo, tanto as equações diferenciais parciais (2.1)-(2.3) com condições de contorno (2.6)-(2.8) como o funcional baseado na energia total do sistema (3.1), não possui uma solução analítica para um domínio qualquer, o que nos deixa como uma das alternativas buscar soluções aproximadas baseadas na idéia de um dado método numérico. Assim, a comparação dos resultados numéricos e experimentais mostraria a soma do erros cometidos nas duas aproximações:

1. A aproximação do problema físico para um modelo matemático;
2. A aproximação do modelo matemático, cuja solução não pode ser obtida por meios analíticos, para um modelo numérico, onde uma solução aproximada pode ser obtida.

O ponto central de nossa discussão é a utilidade técnica da solução numérica proposta, sendo então suficiente, a princípio, a avaliação do erro global sem necessitar a determinação de sua estrutura. A comparação entre resultados teóricos e experimentais também engloba outro erro que é justamente aquele envolvido na obtenção das medidas experimentais. Este tipo de erro, que embora possa ser tomado como um componente da estrutura do erro total, é de difícil determinação prática, pois envolveria a comparação entre diversos meios de medida, isto para avaliar a própria técnica de medição, e também a hipótese de que as condições nas quais os erros dos dispositivos de medição foram determinados são as mesmas condições nas quais os mesmos serão empregados, sendo que um tratamento estatístico dos dados obtidos nestas comparações faz-se necessário à obtenção de uma estimativa do erro experimental. Este erro, com o aperfeiçoamento do modelo teórico básico no sentido de englobar também os sistemas de medições, pode ser reduzido, porém com respectivo aumento do peso do erro matemático-numérico.

A formulação de diferenças finitas apresentadas no capítulo 4 não se apresentou adequada para a solução de problemas envolvendo malhas irregulares, uma vez que os resultados obtidos sofriam grandes variações conforme a malha fosse tendo a posição de seus nós alteradas, mesmo com o emprego de muitos nós e um domínio de forma retangular. Estes resultados somente passavam a convergir para a solução esperada quando a malha empregada passava a apresentar uma certa regularidade nas posições de seus nós. Como neste trabalho não se chegou à elaboração de nenhum critério de convergência para o método de diferenças finitas desenvolvido, não é possível uma avaliação prévia da malha a ser empregada e nem a elaboração de algoritmos que pudessem gerar uma malha adequada para um domínio irregular. Por outro lado, o método de elementos finitos admite, dentro de limites razoáveis, o emprego de malhas irregulares gerando resultados que sofrem muito menores influências da posição dos nós na malha que o método de diferenças finitas. Estudos sobre a convergência do método são encontrados em [3] e [2]. Por este motivo, somente o método de elementos finitos foi empregado na obtenção dos resultados teóricos a serem comparados com os resultados experimentais relativos ao problema exposto na próxima seção.

A verificação do modelo será feita através da comparação entre os valores experimentais de deformação obtidos para uma peça submetida a um dado carregamento mecânico e os respectivos valores de deformações obtidos pelo método de elementos finitos. Esta escolha deve-se ao fato de que a deformação pode melhor ser obtida experimentalmente do que os deslocamentos e tensões, sendo que os valores experimentais destas últimas são obtidos a partir dos valores experimentais das deformações. O cálculo teórico de deformação em um dado ponto da peça é obtido a partir da solução em deslocamentos para o problema e considerando-se a base de funções empregadas para descrever esta solução, conforme seção 4.2, juntamente com relações entre deslocamentos e deformações apresentadas no Apêndice A.

7.1 Montagem experimental.

O problema a ser resolvido, tanto numericamente como experimentalmente, consiste de uma peça de aço-carbono com geometria axissimétrica submetida a uma dado carregamento não axissimétrico formado de um par de forças de direção radial, com pontos de aplicação diametralmente opostos, e sentido direcionado ao eixo de simetria da peça, como mostra a figura 7.1. A geometria da peça é apresentada na figura 7.2. Nota-se que a força, na verdade, é aplicada sobre uma linha paralela ao eixo da peça situada na porção cilíndrica mais externa da superfície da peça. Os valores de carregamento e propriedades dos materiais são os seguintes:

1. Carga: 60 KN;
2. Módulo de Elasticidade: 210 GPa;
3. Coeficiente de "Poisson": 0,3.

O objetivo é determinar as deformações sofridas pela peça em uma série de pontos de sua superfície externa, conforme descrito mais adiante no texto.

A técnica de elementos finitos descrita neste trabalho é baseada na expansão em série de Fourier, para a variável independente " θ ", das funções que descrevem os deslocamentos e as cargas do sistema, o que resultou no desdobramento do problema inicial, envolvendo funções dependentes das variáveis " r ", " θ " e " z ", em uma série infinita de sistemas de equações que envolvem funções dependentes somente das variáveis " r " e " z ", onde cada um destes sistemas está associado a um valor inteiro " J " ($J = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$), conforme o apresentado nas equações (3.30) e nas equações (3.34) a (3.42) e (3.44) a (3.46). Para o carregamento envolvido no problema descrito nesta seção, a expansão em série de Fourier na variável independente " θ " fornece termos não nulos apenas para os termos relativos aos valores pares maiores que zero de " J " ($J = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, \infty$). Em razão disto, a solução é também desenvolvida para estes valores de " J " e o truncamento da série é feito a partir do termo " $J=30$ ", de maneira que os resultados finais são baseados nos valores obtidos das soluções relativas aos termos $J=0,2,4,\dots,26,28,30$. Uma observação dos resultados numéricos mostra que os valores para os termos da série acima de " $J=30$ " podem ser desprezados. A malha empregada nestas soluções é apresentada na figura 7.3. Uma comparação entre os resultados obtidos pelo sistema computacional desenvolvido neste trabalho e por um sistema comercial são apresentados no Apêndice B, para o mesmo problema mostrado nesta seção.

A técnica empregada para a obtenção das medidas experimentais parte de uma avaliação de diversas alternativas. Foi observado um compromisso entre os diversos fatores:

1. Minimização do erro na medição experimental;
2. Facilidade de execução da montagem;
3. Utilização de material e experiência prática disponíveis.

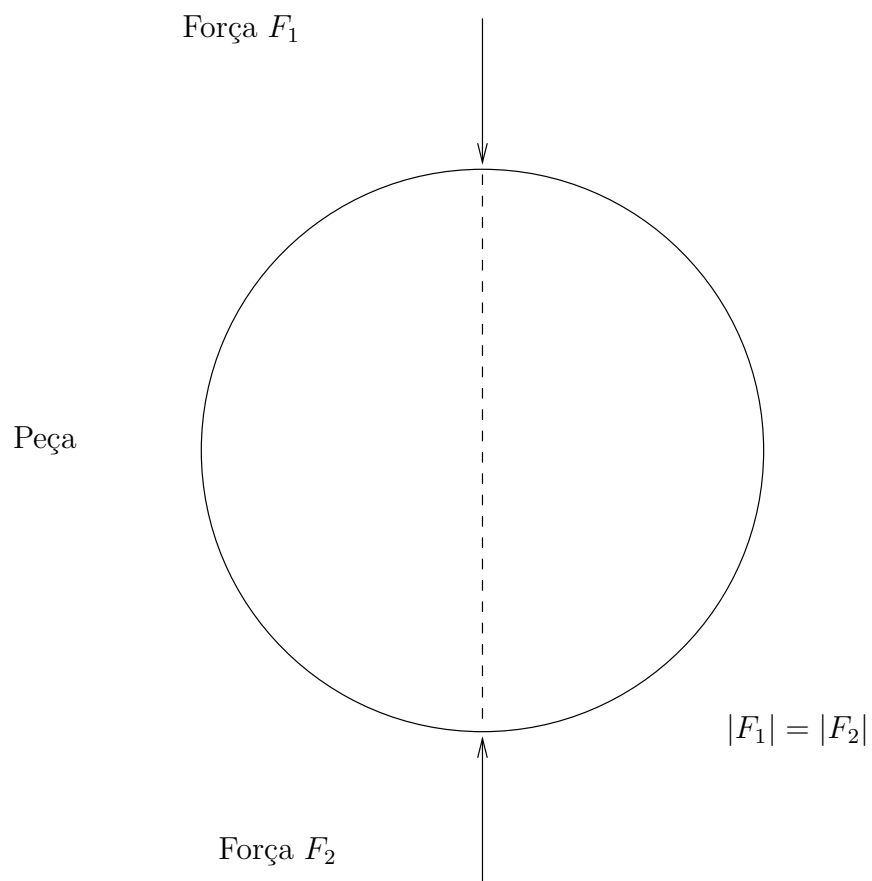


Figura 7.1: Vista esquemática do carregamento.

Em [14] são apresentadas diversas técnicas de obtenção de valores experimentais de tensões, entre as quais podemos citar:

1. Medida de deformação ou deslocamentos por sistema mecânico;
2. Medida de deformação por princípio ótico;
3. Medida de deformação por extensômetros capacitivos;
4. Medida de deformação por extensômetros indutivos;
5. Medida de deformação por extensômetros resistivos;
6. Medida de deformação por princípio acústico;
7. Medida de deformação com o emprego de materiais com propriedades piezelétricas.

A escolha para a execução das medidas recaiu sobre sistema de medidas baseado em extensômetros resistivos. Estes apresentam facilidade de montagem, baixo custo, suficiente precisão na medida, disponibilidade de equipamentos, como condicionadores de sinais, e de experiência acumulada disponível com esta técnica.

O sistema de medição empregado consistiu do seguinte:

1. Extensômetro resistivo de 350 ohms, fabricado por "Kyowa Electronic Instrumens Co.,LTD", designado pelo fabricante por "KFR-5-350-C1-11", e com as seguintes características:
 - (a) Compensado termicamente para aço-carbono à temperatura ambiente;
 - (b) Resistência elétrica: $349,5 \pm 1,2$;
 - (c) Comprimento do extensômetro: 5 mm;
 - (d) Ganho ($24^{\circ}C$): $2,02 \pm 1.5\%$;
2. Adesivo do tipo epoxi, fabricado por "Kratos Dinamômetros LTDA.", designado por "KBR 610" com dois componentes. A sua polimerização é obtida submetendo o adesivo à $180^{\circ}C$ por duas horas;
3. O circuito elétrico empregado na conexão elétrica do extensômetro ao condicionador de sinais é do tipo da ligação a quatro fios. Isto tem por objetivo reduzir influências da variação da temperatura sobre o próprio fio utilizado na ligação. Os fios para cada extensômetro foram trançados para evitar influências eletromagnéticas.
4. Foi empregado o condicionador de sinais "UMP1000" fabricado pela "HBM".

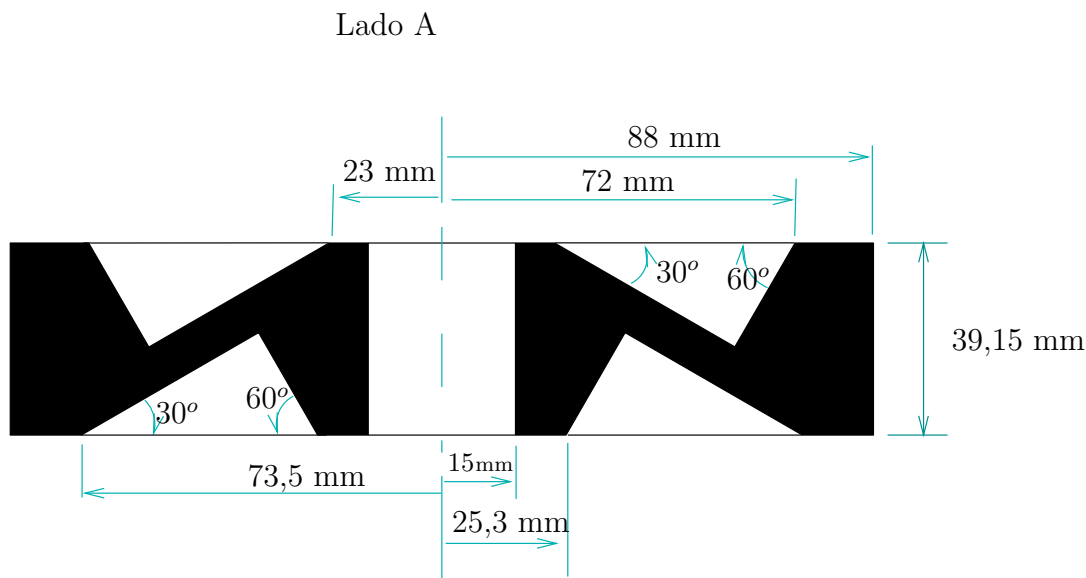


Figura 7.2: Vista radial da peça.

A geometria da peça empregada no problema é apresentada na figura 7.2 em corte radial. Nas figuras 7.4 e 7.5 são apresentadas esquematicamente as posições de colagem dos extensômetros. Na figura 7.4 são mostradas a partir de vistas axiais, a disposição dos extensômetros nos dois lados da peça. Pode-se observar que radialmente em cada lado os extensômetros estão dispostos em linhas que formam entre si ângulos de 60° . A posição relativa das linhas entre um lado e outro é tal que a cada linha em um lado corresponde uma outra no lado oposto de maneira que ambas estejam no mesmo plano radial. Pode-se também observar que nas linhas centrais de cada lado os extensômetros estão alinhados radialmente e nas demais formando um ângulo de 60° com o plano radial medido sobre a superfície de colagem dos extensômetros. Na figura 7.5 pode-se observar, em corte radial, a posição dos extensômetros e as inclinações das suas superfícies de colagem.

As medições feitas com esta montagem são exibidas na figura 7.6. Em cada esquema é mostrada a posição relativa entre as posições de colagem dos extensômetros e a força aplicada. O ensaio consistiu de um total de 12 medidas, em posições relativas à força aplicada, para cada extensômetro. Todas as medidas foram realizadas para o mesmo valor do carregamento mecânico. Devido a simetria do campo de deslocamentos gerado por este carregamento mecânico, ocorrem grupos de quatro ou duas medidas equivalentes para cada extensômetro e grupos ou grupo de quatro medidas equivalentes envolvendo extensômetros de uma mesma circunferência situados sobre linhas radiais opostas e de um mesmo lado. Esta redundância serviu para verificação dos resultados experimentais.

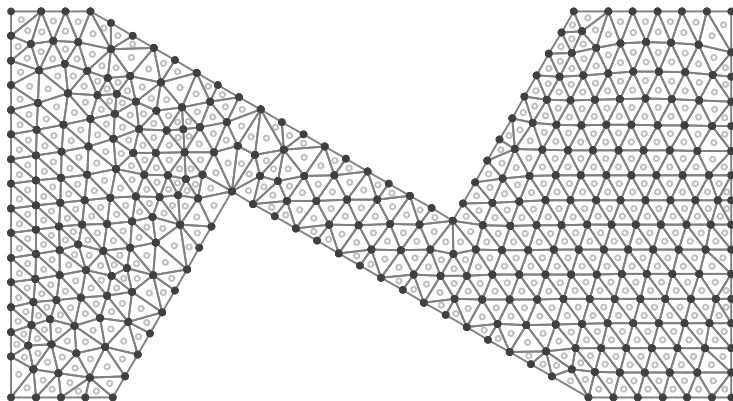


Figura 7.3: Malha de elementos finitos empregada na obtenção dos resultados numéricos.

O conjunto de medidas efetuado foi escolhido de forma a que se possa ter uma razoável avaliação da proximidade entre resultados teóricos e experimentais, o que deve variar com a posição de medida sobre a peça.

A comparação entre valores teóricos e experimentais para o problema descrito acima pode ser observada nas tabelas 7.1 a 7.8. Nestas tabelas, cada linha está associada a cada ponto de medição, sendo que, na primeira coluna, está a identificação do ponto de medição na seguinte ordem:

1. Primeiro, a indicação do lado em que se situa o ponto de medição;
2. Segundo, a circunferência sobre a qual se situa o ponto de medição;
3. Terceiro, o ângulo, em graus, que forma a linha radial sobre a qual se situa o ponto de medição com a direção de aplicação da carga, tomado em um plano axial e no sentido horário em relação à vista do lado "A";
4. Quarto, o ângulo, em graus, que a direção na qual é medida a deformação forma com a linha radial que passa pelo ponto de medição, tomado em um plano cuja normal coincida com a normal à superfície da peça no ponto de medição e assumindo o sentido anti-horário neste plano.

Na segunda coluna está o valor teórico obtido pelo método de elementos finitos, e na terceira coluna, um conjunto de medidas experimentais obtidas diretamente no ponto de medição indicado, ou em uma outra medição equivalente, determinadas pela simetria do campo de deformações neste problema.

A comparação entre resultados numéricos e experimentais apresentada nas tabelas 7.1-7.8 não apresentou uma boa verificação entre os dois resultados. Embora a eficácia do emprego dos extensômetros resistivos na medida de deformações possa ser demonstrada com o emprego de estruturas simples, tais como vigas, existem outros fatores que se fazem presentes no tipo

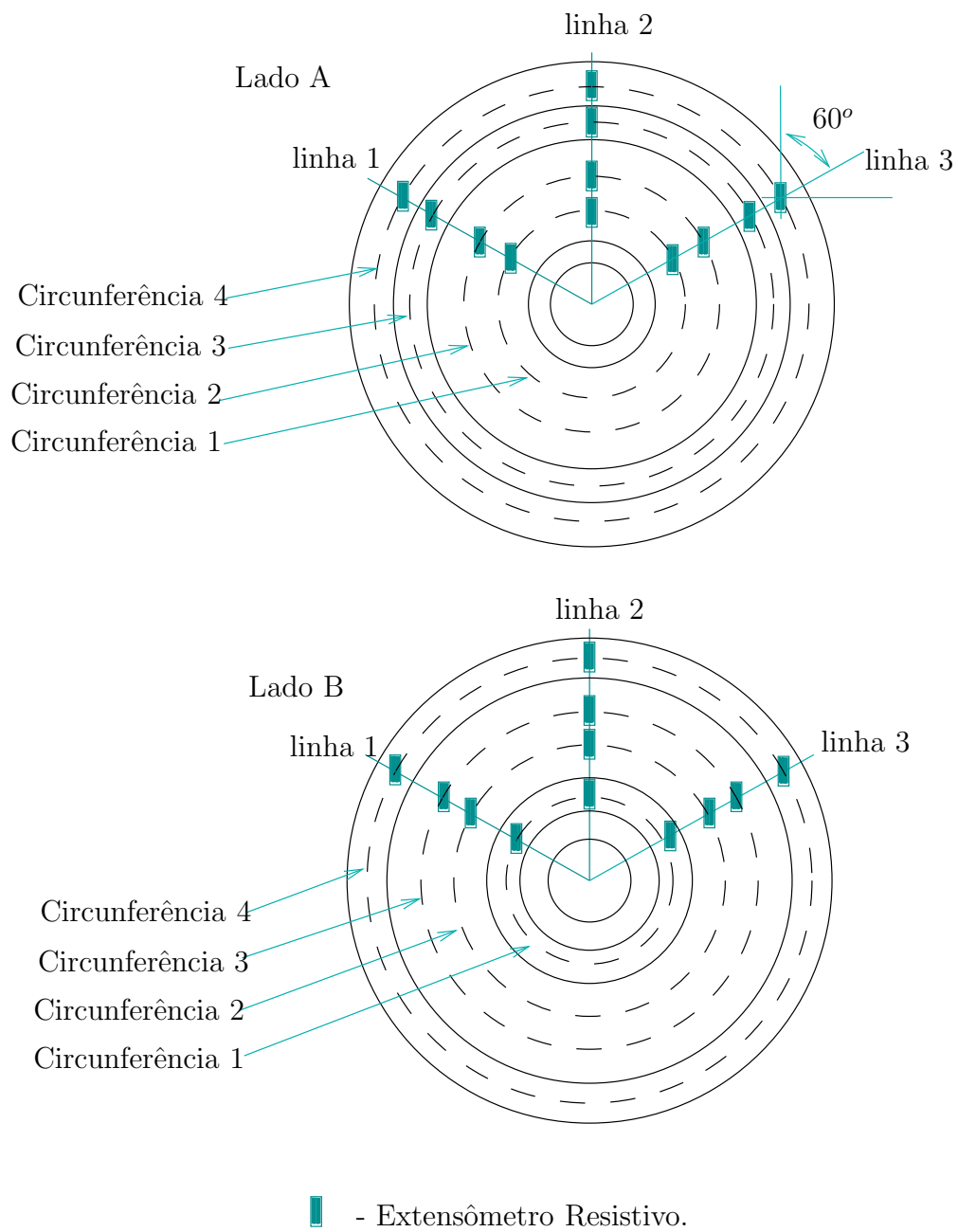


Figura 7.4: Vista axial da peça com indicação da posição de colagem dos extensômetros.

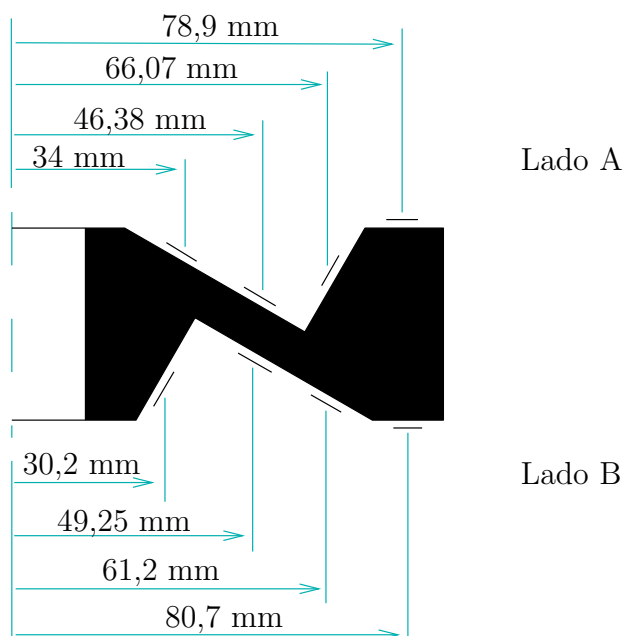


Figura 7.5: Vista radial da peça com indicação da posição de colagem dos extensômetros.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Númérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado A, Circunferência 1, 0 / -60	-1015	-29 -30 -23 -34
Lado A, Circunferência 1, 0 / 0	242	-530
Lado A, Circunferência 1, 0 / 60	-1015	-29 -30 -23 -34
Lado A, Circunferência 1, 30 / -60	-79	-68 -59 -43 -37
Lado A, Circunferência 1, 30 / 0	228	58 44 38 45
Lado A, Circunferência 1, 30 / 60	-807	20 30 13 36
Lado A, Circunferência 1, 60 / -60	926	-114 -114 -33 -30
Lado A, Circunferência 1, 60 / 0	180	37 43 29 33
Lado A, Circunferência 1, 60 / 60	161	110 120 -48 -44
Lado A, Circunferência 1, 90 / -60	966	-230 -237 -188 -179
Lado A, Circunferência 1, 90 / 0	132	38 38
Lado A, Circunferência 1, 90 / 60	966	-230 -237 -188 -179

Tabela 7.1: Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 1.

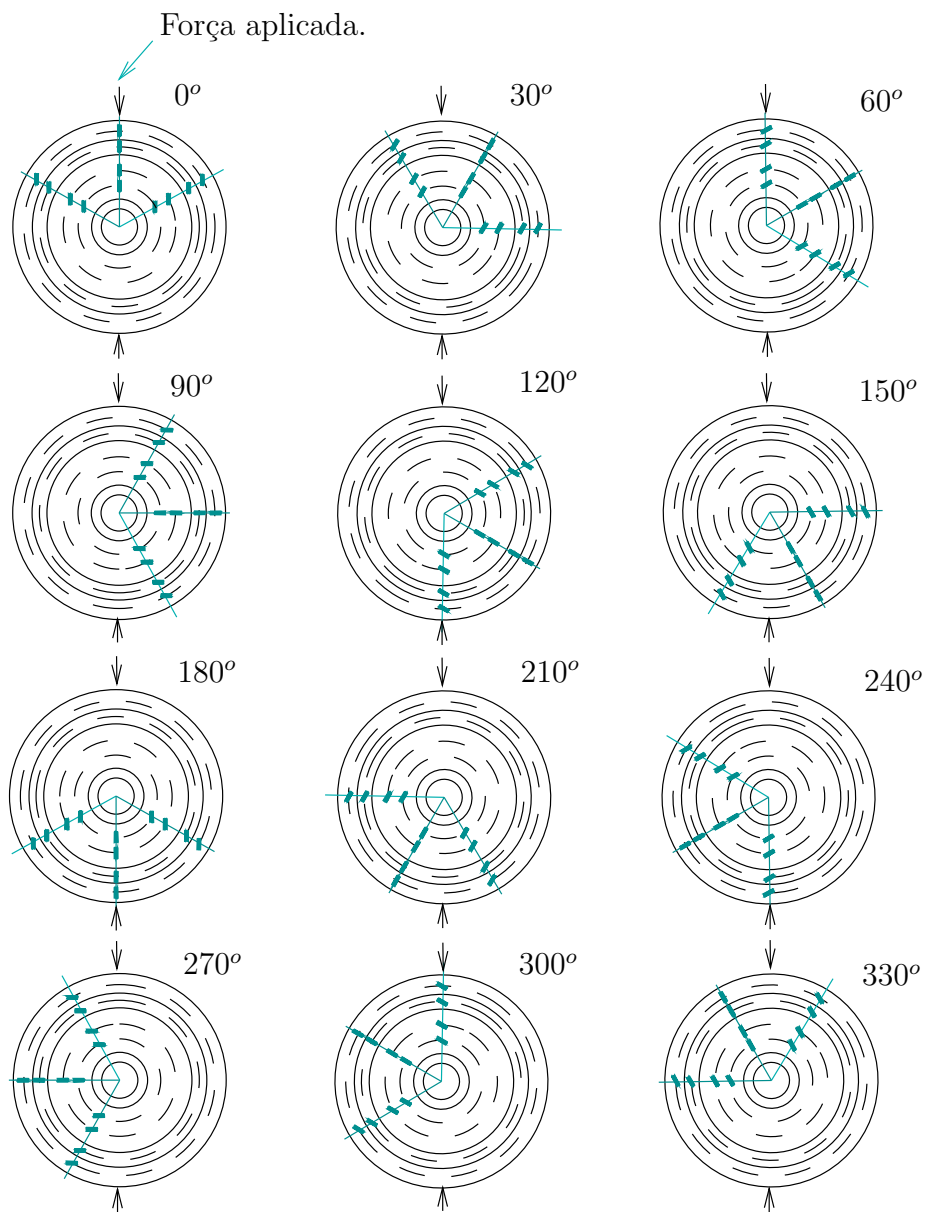


Figura 7.6: Vistas axiais da peça indicando o ângulo da mesma com a força aplicada para as diversas medições.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado A, Circunferência 2, 0 / -60	-1414	-18 -3 -8 -18
Lado A, Circunferência 2, 0 / 0	-300	-271 +58
Lado A, Circunferência 2, 0 / 60	-1414	-18 -3 -8 -18
Lado A, Circunferência 2, 30 / -60	-315	-88 -80 -67 -64
Lado A, Circunferência 2, 30 / 0	130	62 51 47 53
Lado A, Circunferência 2, 30 / 60	-620	86 122 93 112
Lado A, Circunferência 2, 60 / -60	815	-197 -197 -111 -111
Lado A, Circunferência 2, 60 / 0	377	53 57 45 49
Lado A, Circunferência 2, 60 / 60	455	185 264 236 209
Lado A, Circunferência 2, 90 / -60	969	-380 -376 -310 -303
Lado A, Circunferência 2, 90 / 0	359	49 50
Lado A, Circunferência 2, 90 / 60	969	-380 -376 -310 -303

Tabela 7.2: Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 2.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado A, Circunferência 3, 0 / -60	-3671	66 74 66 64
Lado A, Circunferência 3, 0 / 0	-112	-299 -196
Lado A, Circunferência 3, 0 / 60	-3671	66 74 66 64
Lado A, Circunferência 3, 30 / -60	594	-50 -47 -47 -52
Lado A, Circunferência 3, 30 / 0	247	-95 -89 -64 -61
Lado A, Circunferência 3, 30 / 60	-1557	147 140 140 145
Lado A, Circunferência 3, 60 / -60	1033	-165 -161 -139 -138
Lado A, Circunferência 3, 60 / 0	184	88 81 89 92
Lado A, Circunferência 3, 60 / 60	206	18 11 27 15
Lado A, Circunferência 3, 90 / -60	861	-183 -174 -157 -160
Lado A, Circunferência 3, 90 / 0	144	127 127
Lado A, Circunferência 3, 90 / 60	861	-183 -174 -157 -160

Tabela 7.3: Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 3.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado A, Circunferência 4, 0 / -60	-3397	92 103 95 90
Lado A, Circunferência 4, 0 / 0	-1061	-18 2
Lado A, Circunferência 4, 0 / 60	-3397	92 103 95 90
Lado A, Circunferência 4, 30 / -60	1206	-45 -42 -39 -43
Lado A, Circunferência 4, 30 / 0	142	0 -9 -4 7
Lado A, Circunferência 4, 30 / 60	-2353	147 145 145 150
Lado A, Circunferência 4, 60 / -60	1113	-157 -159 -131 -132
Lado A, Circunferência 4, 60 / 0	19	27 15 15 28
Lado A, Circunferência 4, 60 / 60	-352	33 35 36 31
Lado A, Circunferência 4, 90 / -60	666	-138 -128 -121 -128
Lado A, Circunferência 4, 90 / 0	31	31 30
Lado A, Circunferência 4, 90 / 60	666	-138 -128 -121 -128

Tabela 7.4: Resultados numéricos e experimentais: lado A, circunferência 4.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado B, Circunferência 1, 0 / -60	-554	-20 -16 -21 -15
Lado B, Circunferência 1, 0 / 0	-159	-380 29
Lado B, Circunferência 1, 0 / 60	-554	-20 -16 -21 -15
Lado B, Circunferência 1, 30 / -60	-169	25 25 7 0
Lado B, Circunferência 1, 30 / 0	-93	-8 -8 -3 -1
Lado B, Circunferência 1, 30 / 60	-437	-65 -65 -58 -76
Lado B, Circunferência 1, 60 / -60	288	76 87 5 0
Lado B, Circunferência 1, 60 / 0	35	-12 -27 -15 -14
Lado B, Circunferência 1, 60 / 60	52	-164 64 +10 -17 -56 -14
Lado B, Circunferência 1, 90 / -60	395	117 103 69 56
Lado B, Circunferência 1, 90 / 0	98	-15 -20
Lado B, Circunferência 1, 90 / 60	395	117 103 69 56

Tabela 7.5: Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 1.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado B, Circunferência 2, 0 / -60	-3042	-101 -102 -101 -100
Lado B, Circunferência 2, 0 / 0	-648	-200 -156
Lado B, Circunferência 2, 0 / 60	-3042	-101 -102 -101 -100
Lado B, Circunferência 2, 30 / -60	-2118	-17 -18 -36 -41
Lado B, Circunferência 2, 30 / 0	-100	42 43 43 42
Lado B, Circunferência 2, 30 / 60	474	-117 -119 -132 -118 -121 -120
Lado B, Circunferência 2, 60 / -60	-12	37 39 -45 -53
Lado B, Circunferência 2, 60 / 0	152	42 32 38 46 45
Lado B, Circunferência 2, 60 / 60	1277	134 160 143 163
Lado B, Circunferência 2, 90 / -60	973	73 64 22 34 2 9
Lado B, Circunferência 2, 90 / 0	184	27 22
Lado B, Circunferência 2, 90 / 60	973	73 64 22 34 2 9

Tabela 7.6: Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 2.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado B, Circunferência 3, 0 / -60	-2854	-16 -2 0 -17
Lado B, Circunferência 3, 0 / 0	-146	17 -90
Lado B, Circunferência 3, 0 / 60	-2854	-16 -2 0 -17
Lado B, Circunferência 3, 30 / -60	-1847	-73 -69 -77 -88
Lado B, Circunferência 3, 30 / 0	199	130 125 101 97 102
Lado B, Circunferência 3, 30 / 60	856	138 157 139 155
Lado B, Circunferência 3, 60 / -60	-100	-180 -177 -215 -214
Lado B, Circunferência 3, 60 / 0	192	72 72 70 70
Lado B, Circunferência 3, 60 / 60	1234	180 215 189 172 175
Lado B, Circunferência 3, 90 / -60	828	-230 -237 -253 -260
Lado B, Circunferência 3, 90 / 0	176	25 24
Lado B, Circunferência 3, 90 / 60	828	-230 -237 -253 -260

Tabela 7.7: Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 3.

Lado, Circunferência, Linha / direção	Numérico ($\mu m/m$)	Experimental ($\mu m/m$)
Lado B, Circunferência 4, 0 / -60	-2473	45 45 47 47
Lado B, Circunferência 4, 0 / 0	-1426	-17 -21
Lado B, Circunferência 4, 0 / 60	-2473	45 45 47 47
Lado B, Circunferência 4, 30 / -60	-1537	30 26 26 24
Lado B, Circunferência 4, 30 / 0	25	-8 -8 -9 -10 -9
Lado B, Circunferência 4, 30 / 60	671	8 10 12 8
Lado B, Circunferência 4, 60 / -60	-307	-36 -36 -43 -43
Lado B, Circunferência 4, 60 / 0	9	1 1 1 0
Lado B, Circunferência 4, 60 / 60	702	-48 -50 -51 -50
Lado B, Circunferência 4, 90 / -60	509	-78 -77 -81 -80 -78 -79
Lado B, Circunferência 4, 90 / 0	77	3 0 2
Lado B, Circunferência 4, 90 / 60	509	-78 -77 -81 -80 -78 -79

Tabela 7.8: Resultados numéricos e experimentais: lado B, circunferência 4.

de montagem descrito acima e para os quais não foi feito nenhum tipo de controle ou observação no experimento. O primeiro deles, é o fato da estrutura da prensa empregada na geração dos esforços mecânicos sofrer também deformações elásticas, o que implica em mudanças do alinhamento dos atuadores da prensa em relação a peça e conseqüente mudança na direção dos esforços atuantes sobre a peça. Um segundo fator está em que a peça, ao deformar-se, altera as condições de contato entre ela e os atuadores da prensa que, por sua vez, tendem a deformarem-se de maneira diferente, produzindo um certo perfil de tensões de contato diferente daquele perfil uniforme tido como condição de contorno no modelo numérico. Isto torna necessária uma reavaliação das condições de contorno empregadas no problema através de um levantamento experimental das mesmas, ou, de outra forma, uma reavaliação do próprio modelo empregado através da inclusão das tensões de contato entre a peça e a prensa e da própria estrutura da prensa no modelo. Um outro fator que poderia ter prejudicado o ensaio seria uma deterioração do adesivo empregado, mas medições equivalentes feitas com extensômetros diferentes resultaram em valores "relativamente" próximos entre si na maior parte dos casos, o que afasta um pouco esta hipótese.

Capítulo 8

Discussões.

O trabalho desenvolvido fornece algumas idéias sobre caminhos a serem seguidos na implementação de um sistema computacional que execute soluções numéricas de problemas de análise teórica de tensões. O principal resultado deste trabalho foi apontar as vias para a implementação de um sistema que, ao mesmo tempo seja acessível ao usuário, também permita que pesquisadores da área de análise teórica de tensões possam implementar algoritmos e adicioná-los ao sistema concentrando seus esforços principalmente nos próprios algoritmos. Também são relacionadas as diversas ferramentas computacionais que permitem a construção do sistema ser exequível em um curto prazo.

As vantagens deste tipo de abordagem são inúmeras e objetivos em diversas frentes podem ser atingidos, desde o uso direto de algoritmos já desenvolvidos até a implementação de novos algoritmos e a sua rápida difusão.

Atualmente, estão disponíveis no mercado muitos sistemas de análise numérica de tensões baseados principalmente na técnica de elementos finitos. Estes sistemas implementam, via de regra, algoritmos para a solução de problemas bastante freqüentes na prática industrial e cujo estudo é comumente encontrado na literatura sobre elementos finitos. A principal vantagem do emprego destes sistemas comerciais está na disponibilidade de um código estável e desenvolvido em condições de emprego imediato (de acordo com os requisitos da técnica que implementam e do problema a ser resolvido). Porém a arquitetura destes sistemas não permite uma adição eficaz de novos algoritmos, ficando limitado àqueles algoritmos com os quais são distribuídos comercialmente. Esta limitação torna-se crítica justamente na área de desenvolvimento e pesquisa de novos algoritmos para a análise numérica de tensões.

A forma de contornar este problema é a criação de um sistema computacional que possa ser útil simultaneamente ao usuário que deseja empregar diretamente algoritmos já disponíveis na solução de um problema como também ao usuário que necessita desenvolver um novo algoritmo ou uma variante de um já existente para resolver um caso mais específico. Os caminhos para atingir este objetivo estão expostos neste trabalho e partem, inicialmente, de uma análise funcional do sistema computacional. Nesta análise, os algoritmos essenciais à análise numérica são relacionados em módulos separados do restante do sistema, o que facilita a inclusão de novos

algoritmos no sistema. Isto tudo leva a criação de uma convenção sobre a forma de interação entre os diversos módulos do sistema o que, no entanto, não foi desenvolvido neste trabalho.

Uma implementação seguindo esta idéia leva também a importante questão dos custos de desenvolvimento dos módulos do sistema não ligados à análise numérica. Isto implica em saber não somente o custo de criação desta parte do sistema como também o custo de sua manutenção e atualização futura. Acreditamos que esta implementação possa ser alcançada a um baixo custo a partir do emprego de ferramentas já existentes, sendo a maior parte de domínio público. Isto porque as partes ou módulos não fundamentais do sistema (aqueles que não são constituídos de algoritmos usados na análise numérica) como, por exemplo, o de manuseio da base de dados, o de interfaceamento com o usuário e o de visualização gráfica envolvem problemas que já se tornaram comuns no desenvolvimento de aplicações e, hoje em dia, muitas ferramentas estão disponíveis para facilitar enormemente este trabalho. Outro ponto favorável desta idéia é que muitas destas ferramentas, como, por exemplo, a linguagem E ([10], [11] e [12]) desenvolvida para facilitar o desenvolvimento da base de dados, são de domínio público e seu desenvolvimento é continuamente mantido por instituições de pesquisa, o que permite uma sintonia do sistema que emprega estas ferramentas com as tendências atuais da ciência da computação. Com o emprego destas ferramentas, o sistema poderia ser criado na sua estrutura básica por um grupo de até três pessoas em um prazo máximo de um ano, podendo ser mantido, em seguida, por somente uma pessoa. O crescimento do sistema, no sentido dos novos algoritmos de análise numérica a serem adicionados ao mesmo, ocorreria por conta das contribuições de outros pesquisadores, sendo o principal trabalho de manutenção justamente o de orientar a escrita do código de tais algoritmos para que se ajustem perfeitamente ao sistema. Por isto, faz-se necessária a criação de uma convenção sobre a forma de interação entre as diversas partes do sistema. Esta convenção seria periodicamente reavaliada para permitir que novas características sejam introduzidas no sistema, como, por exemplo, novos tipos de estruturas de dados a serem introduzidos na base de dados por necessidade de um novo algoritmo de análise numérica que seguiria um princípio diferente daqueles até então implementados. Este processo, com os seguidos adendos ao sistema, levará à concepção de estruturas de dados mais gerais que contemplem algoritmos de naturezas diferentes. Neste ponto, a compatibilidade com as estruturas de dados anteriores passa a ser uma forte questão de discussão relativa às mudanças no sistema, uma vez que esta compatibilidade constitui-se em uma carga extra na manutenção do sistema como também no seu volume de código. Uma solução para este problema de compatibilidade pode ser através de algoritmos que traduzam as formas anteriores de acesso à base de dados para as formas correntes.

Os resultados a serem obtidos, uma vez que o sistema, na sua forma inicial, venha a ser implementado, podem ser expressos de diversas maneiras:

1. O sistema estaria diretamente acessível para o usuário cujo interesse estaria em utilizar os algoritmos já disponíveis no sistema. A interface com o usuário seria a parte do sistema que facilitaria o acesso por parte do usuário a estes algoritmos.
2. O sistema poderia ser utilizado por pesquisadores da área de análise numérica para teste

de algoritmos novos ou alternativos. Assim, a utilidade do sistema seria a de permitir que o pesquisador possa restringir o seu esforço de desenvolvimento computacional a apenas a escrita do código do seu algoritmo, sem precisar se preocupar com questões como o manuseio da base de dados e saída gráfica, contando para isto com recursos do próprio sistema.

3. O sistema permite uma rápida divulgação de novos algoritmos de análise numérica. Cada novo algoritmo poderia ser acessível a cada novo usuário simplesmente adicionando-o (ou ligando) ao sistema, ficando, então, encurtada distância entre o desenvolvimento e a aplicação.

Estas vantagens tornam-se ainda mais claras se olhadas à luz da integração Universidade-Indústria. Na hipótese do sistema ser de domínio público, surgiria a possibilidade de ocorrer o quase imediato emprego na Indústria dos algoritmos desenvolvidos nas instituições de pesquisa e também tornados de domínio público. De forma idêntica, a própria atividade de pesquisa, que tanto desenvolve algoritmos de análise numérica como também se utiliza dos mesmos, seria beneficiada por um sistema computacional do tipo apresentado neste trabalho.

Capítulo 9

Conclusões.

A experiência acumulada no desenvolvimento deste trabalho, principalmente na implementação computacional dos algoritmos de análise numérica de tensões, permite estabelecer os seguintes pontos:

1. No que diz respeito ao método de diferenças finitas:
 - (a) Não foi suficientemente desenvolvido;
 - (b) Faz-se necessário estudo de estabilidade e convergência do esquema proposto;
 - (c) Faz-se necessária a obtenção de um critério matemático que permita a avaliação prévia da malha.
2. No que diz respeito ao método de elementos finitos:
 - (a) Mostrou-se mais adequado ao problema do que método de diferenças finitas, sendo que o seu emprego neste tipo de problema já está consagrado tanto na literatura como na engenharia.
3. No que diz respeito a comparação com resultados experimentais:
 - (a) Provável erro na realização dos experimentos, possivelmente devido a:
 - i. O erro cometido ao admitir que as tensões de contato entre os atuadores da prensa e a peça assumiriam valores constantes ao longo da "linha" de contato. Seria necessária uma análise destas tensões de contato, o que está fora do tipo de análise realizada neste trabalho.
 - ii. Possível falha no adesivo empregado na colagem dos extensômetros;

Recomenda-se a criação de um sistema computacional, a partir da proposta apresentada, que possuiria as seguintes vantagens:

1. Custo relativamente baixo;

2. Auxiliaria a implementação de novos algoritmos;
3. Permitiria o emprego direto, por terceiros, dos algoritmos já desenvolvidos.

Apêndice A

Equações Básicas da Teoria da Elasticidade.

Neste Apêndice serão apresentadas as equações básicas da teoria da elasticidade aplicadas às pequenas deformações em um corpo composto por um material que apresenta um regime linear elástico. Serão desenvolvidas, inicialmente, as equações diferenciais parciais que expressam as condições de equilíbrio em tensões. Em seguida, as equações que relacionam deformações com deslocamento, admitindo pequenas deformações. E, finalmente, as relações constitutivas do material: as equações que relacionam tensões com deformações para o regime linear elástico de deformação. Uma abordagem mais detalhada destes conceitos é desenvolvida em [15].

A.1 Equações Diferenciais Parciais para o Equilíbrio Estático.

A.1.1 Equilíbrio no interior do sólido.

O estudo do equilíbrio em um corpo parte do estudo de um elemento infinitesimal de volume deste corpo como o que é apresentado na figura A.1, cujas vistas em "z", " θ " e "r" são mostradas na figura A.2, no sistema de coordenadas cilíndricas. Este elemento de volume apresenta em suas faces forças exercidas pelo restante do sólido sobre o mesmo. No caso limite, quando as dimensões do elemento de volume tendem a zero, a razão entre cada força e o valor da área de sua face de atuação resultam na tensão atuante na respectiva área. Estas tensões são apresentadas na figura A.3, onde cada força atuante foi decomposta em três componentes segundo os eixos coordenados, o que resultou, para cada face, em uma componente normal e duas tangenciais à mesma. Na figura A.3, são apresentadas apenas as tensões atuantes nas faces visíveis do elemento de volume.

Nas figuras A.4, A.5 e A.6, são mostradas, esquematicamente, todas as forças que agem em um elemento de volume infinitesimal, expressas pelos produtos das respectivas tensões pelas

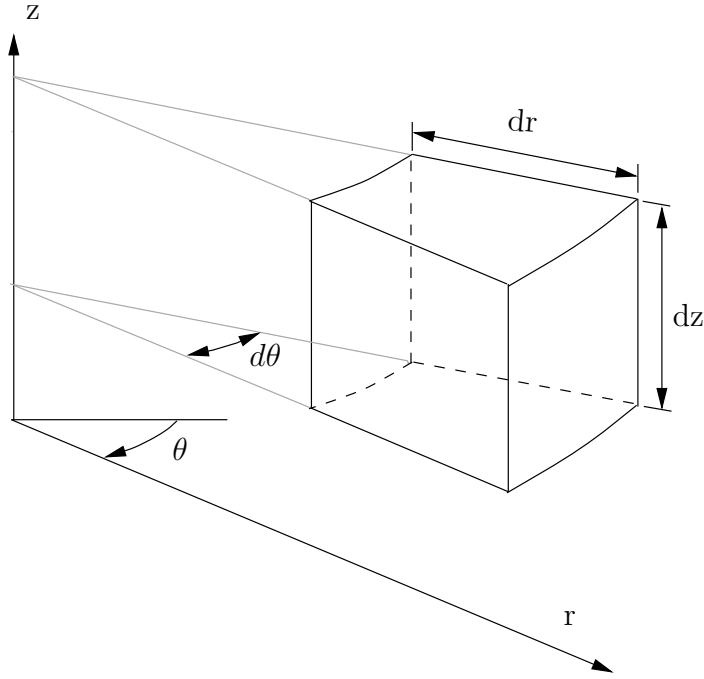


Figura A.1: Elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

respectivas áreas. Tensões em faces orientadas com sentido negativo são expressas diretamente, e aquelas em faces orientadas em sentido positivo, são expressas pela expansão em série de Taylor até o termo de primeira ordem a partir das respectivas tensões nas faces opostas.

1. Equilíbrio de Momentos em "r".

Da figura A.6, satisfazendo a condição de equilíbrio do momentos na direção "r", obtemos a equação (A.1).

$$\begin{aligned} \sum M_r = & \left\{ \left[\tau_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} dz \right] + \tau_{z\theta} \right\} \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) \frac{dz}{2} \\ & - \left\{ \left[\tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} d\theta \right] + \tau_{\theta z} \right\} (dr dz) \frac{r+(r+dr)}{2} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (A.1)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem e eliminando os fatores comuns na equação (A.1), obtemos (A.2).

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} \quad (A.2)$$

2. Equilíbrio dos Momentos em "θ".

Observando a figura A.5, obtemos a expressão (A.3) que indica a relação a ser satisfeita para a condição de equilíbrio de momentos na direção "θ".

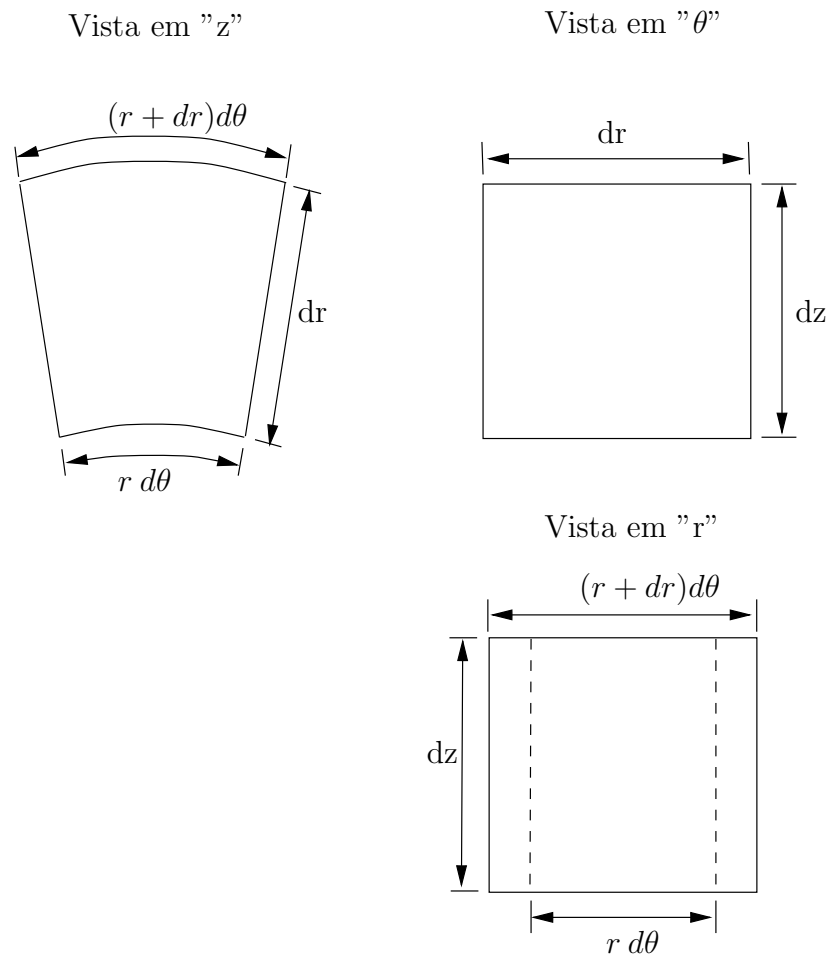


Figura A.2: Vistas em "z", " θ " e "r" de um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

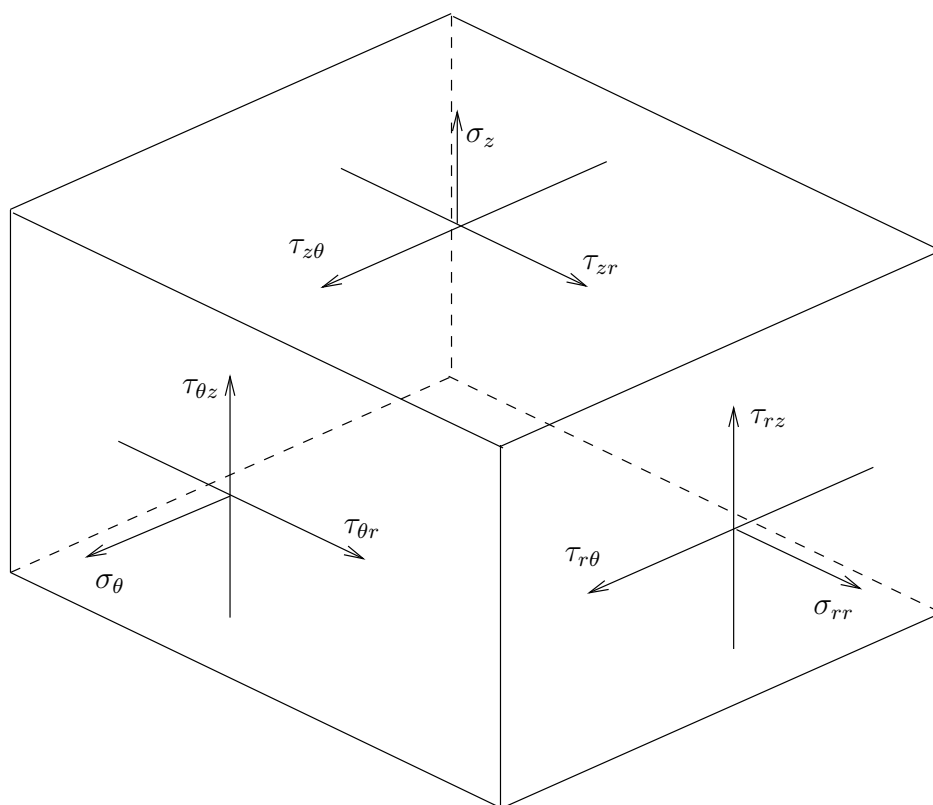


Figura A.3: Tensões agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

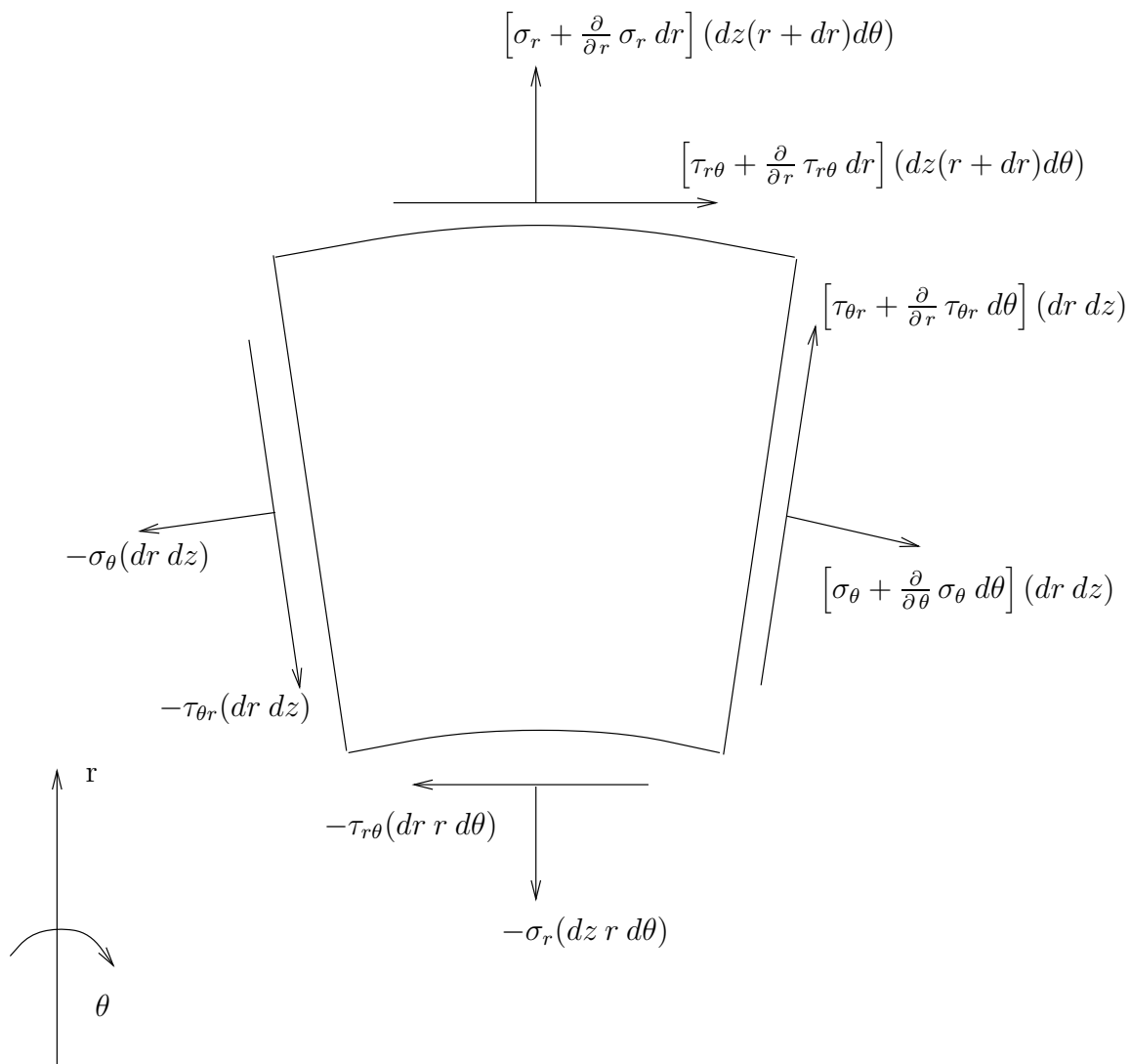


Figura A.4: Vista do plano " θr " das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

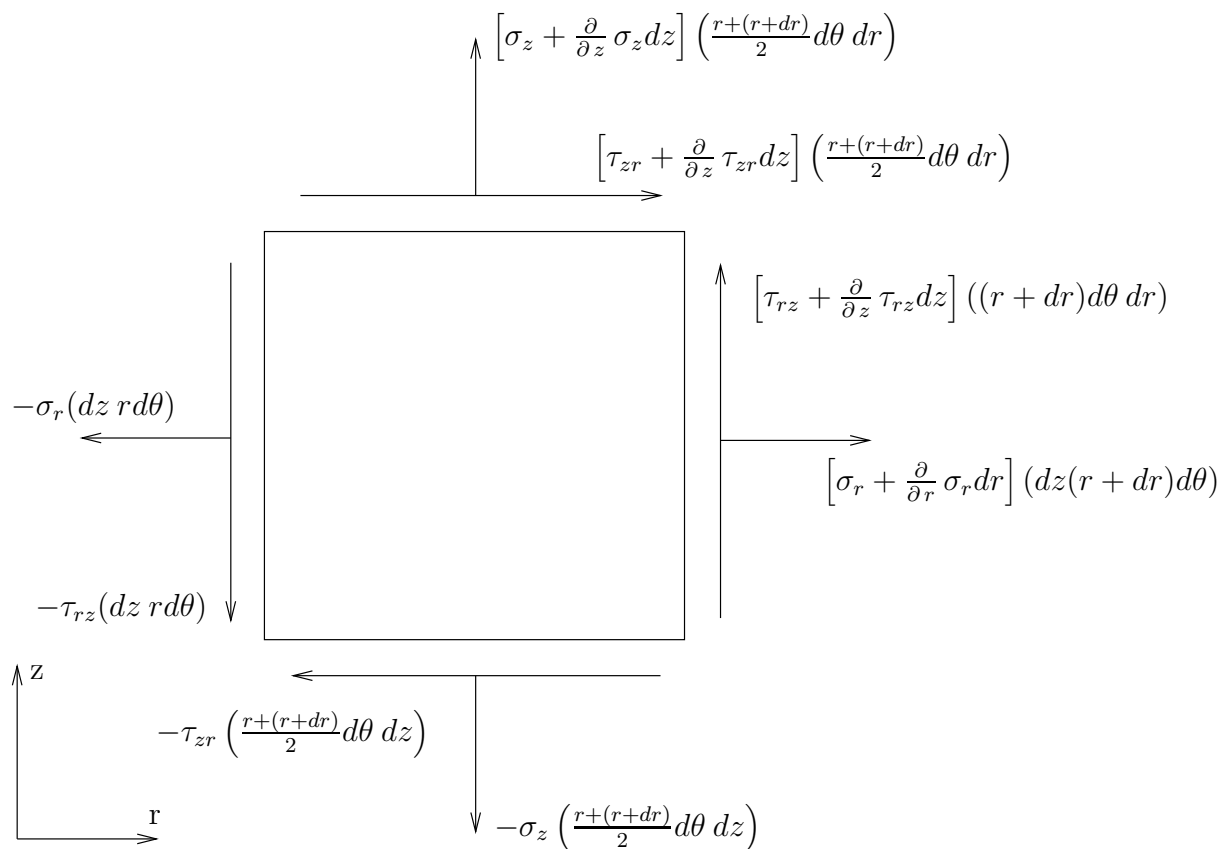


Figura A.5: Vista do plano "rz" das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

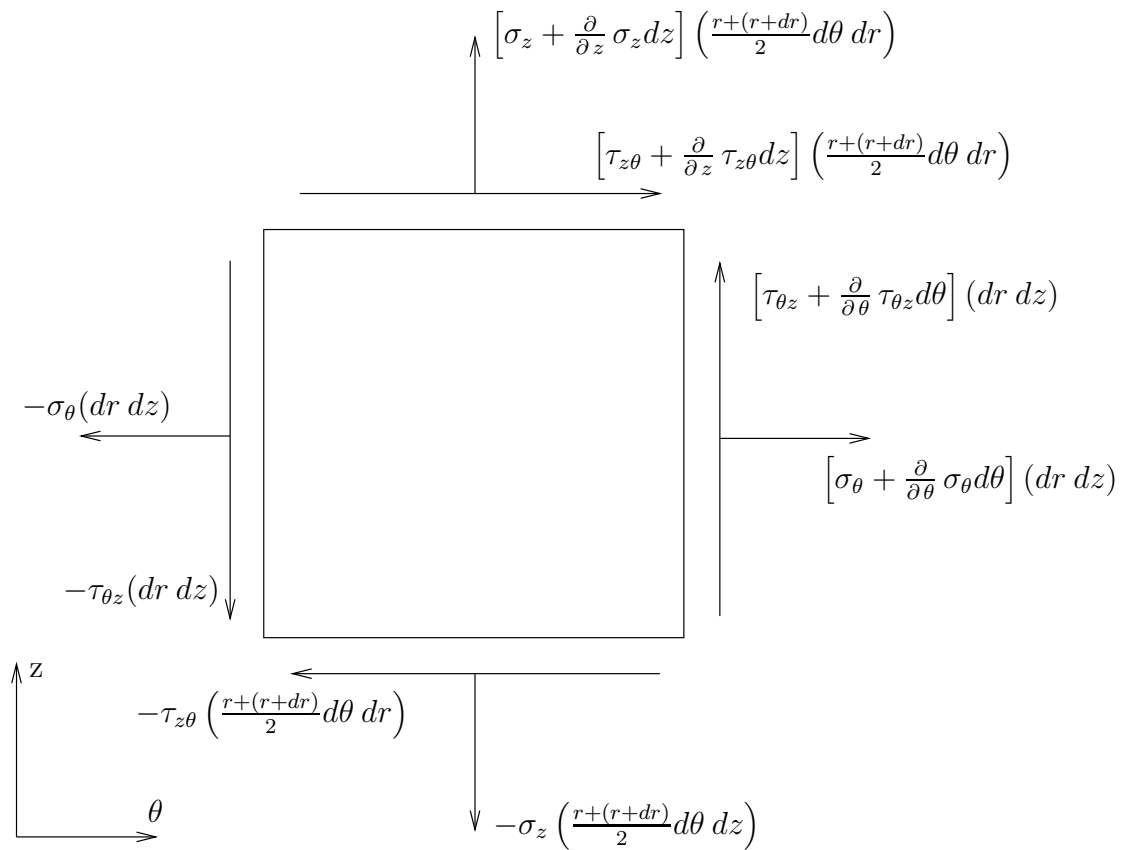


Figura A.6: Vista do plano "θz" das forças agindo sobre um elemento infinitesimal de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} \Sigma M_\theta = & \left\{ \left[\tau_{zr} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} dz \right] + \tau_{zr} \right\} \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) \frac{dz}{2} \\ & - \left\{ \left[\tau_{rz} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} dr \right] ((r+dr) d\theta dz) + \tau_{rz}(r d\theta dz) \right\} \frac{dr}{2} = 0 \end{aligned} \quad (A.3)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem e eliminando os fatores comuns na equação (A.3), obtemos (A.4).

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} \quad (A.4)$$

3. Equilíbrio de Momentos em "z".

Da figura A.4, satisfazendo a condição de equilíbrio do momentos na direção "z", obtemos a equação (A.5).

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = & \left\{ \left[\tau_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{r\theta} dr \right] (dz(r+dr)d\theta) + \tau_{r\theta}(dz r d\theta) \right\} \frac{dr}{2} \\ & - \left\{ \left[\tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} d\theta \right] + \tau_{\theta r} \right\} (dr dz) \frac{r+(r+dr)}{4} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem e eliminando os fatores comuns na equação (A.5), obtemos (A.6).

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} \quad (A.6)$$

4. Equilíbrio das forças em "r".

Nas figuras A.4 e A.5, podemos observar que o equilíbrio das forças na direção "r" pode ser obtido por uma relação como a apresentada na equação (A.7).

$$\begin{aligned} P_r = & \left\{ \left[\sigma_r + \frac{\partial}{\partial r} \sigma_r dr \right] (dz(r+dr)d\theta) - \sigma_r(dz r d\theta) \right\} \\ & + \left\{ \left[\tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} d\theta \right] (dr dz) - \tau_{\theta r}(dr dz) \right\} \cos \frac{d\theta}{2} \\ & - \left\{ \sigma_\theta (dr dz) + \left[\sigma_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_\theta d\theta \right] (dr dz) \right\} \sin \frac{d\theta}{2} \\ & + \left\{ \left[\tau_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} dz \right] \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) \right\} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Na equação (A.7), desprezando-se os termos de 4º ordem, fazendo-se $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$ e $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, dividindo-se toda a equação por $dz r d\theta dr$ e fazendo-se as devidas simplificações, obtemos a equação (A.8).

$$-p_r = \frac{\partial}{\partial r} \sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (A.8)$$

5. Equilíbrio das forças em "θ".

A expressão para o equilíbrio de forças em "θ" pode ser obtido a partir das figuras A.4 e A.6, resultando na equação (A.9).

$$\begin{aligned}
-P_\theta = & \left\{ \left[\sigma_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_\theta d\theta \right] (dr dz) - \sigma_\theta (dr dz) \right\} \cos \frac{d\theta}{2} \\
& + \left\{ \left[\tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} d\theta \right] (dr dz) + \tau_{\theta r} (dr dz) \right\} \sen \frac{d\theta}{2} \\
& + \left\{ \left[\tau_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{r\theta} dr \right] (dz(r+dr)d\theta) - \tau_{r\theta} (dz r d\theta) \right\} \\
& + \left\{ \left[\tau_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} dz \right] \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) - \tau_{z\theta} \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Dividindo-se a equação (A.9) por $dr r d\theta dz$ obtemos a equação (A.10).

$$-p_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_\theta + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \tag{A.10}$$

6. Equilíbrio de forças na direção "z".

O equilíbrio de forças na direção "z" pode ser obtido a partir das figuras A.5 e A.6, resultando na equação (A.11).

$$\begin{aligned}
-P_z = & \left\{ \left[\sigma_z + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z dz \right] \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) - \sigma_z \left(\frac{r+(r+dr)}{2} d\theta dr \right) \right\} \\
& + \left\{ \left[\tau_{rz} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} dr \right] ((r+dr) d\theta dz) - \tau_{rz} (r d\theta dz) \right\} \\
& + \left\{ \left[\tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} d\theta \right] (dr dz) - \tau_{\theta z} (dr dz) \right\}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Dividindo a equação (A.11) por $r d\theta dz$, obtemos a equação (A.12).

$$p_z = \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} + \frac{\tau_{rz}}{r} \tag{A.12}$$

As equações (A.2), (A.4), (A.6), (A.8), (A.10), (A.12) expressam a condição que o campo de tensões em um corpo deve satisfazer para que o mesmo esteja em equilíbrio estático.

A.1.2 Equilíbrio na fronteira do domínio.

O estudo do equilíbrio estático na fronteira de um sólido (interface com o meio exterior) procura estabelecer como o campo interno de tensões se relaciona com as tensões que atuam na superfície externa do sólido (tensões de contato). Este estudo, da mesma forma que para o equilíbrio no interior do sólido, parte do estudo de um elemento de volume do sólido que contém, como uma

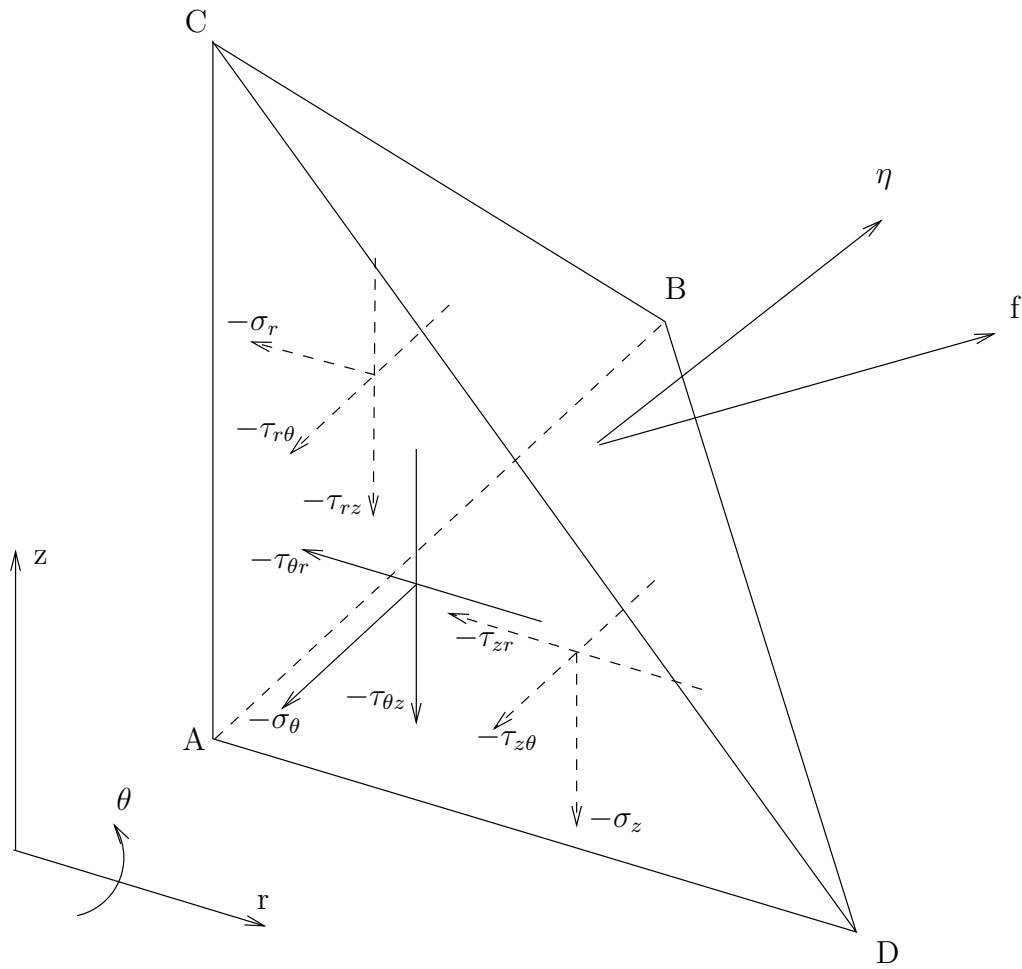


Figura A.7: Elemento infinitesimal de fronteira de sólido em um sistema de coordenadas cilíndricas.

de suas faces, um elemento da interface externa do sólido. Este elemento é apresentado na figura A.7.

Na figura A.7 podemos observar as relações apresentadas nas equações (A.13) a (A.15).

$$f_r = l \sigma_r + m \tau_{r\theta} + n \tau_{rz} \quad (\text{A.13})$$

$$f_\theta = m \sigma_\theta + l \tau_{r\theta} + n \tau_{\theta z} \quad (\text{A.14})$$

$$f_z = n \sigma_z + l \tau_{rz} + m \tau_{\theta z} \quad (\text{A.15})$$

A.2 Equações Diferenciais Parciais que relacionam Deformações e Deslocamentos.

As relações entre deformações e deslocamentos podem ser observadas diretamente a partir das figuras A.8 a A.13. Admite-se que os ângulos γ , γ' e γ'' nestas figuras são pequenos o suficiente para que seus valores sejam próximos aos valores das respectivas tangentes. Destes diagramas, pode-se facilmente obter as equações (A.16) a (A.21).

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r} u \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} w \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u + \frac{\partial}{\partial r} v \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w + \frac{\partial}{\partial z} v \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} w + \frac{\partial}{\partial z} u \quad (\text{A.21})$$

A.3 Relações entre tensões e deformações.

Para um material em regime linear elástico de deformação, com propriedades mecânicas isotrópicas, e considerando o efeito da dilatação térmica, podemos escrever as relações entre tensões e deformações conforme apresentado nas equações (A.22) a (A.27).

$$\epsilon_r = [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \frac{1}{E} + \alpha T \quad (\text{A.22})$$

$$\epsilon_\theta = [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \frac{1}{E} + \alpha T \quad (\text{A.23})$$

$$\epsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \frac{1}{E} + \alpha T \quad (\text{A.24})$$

$$\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta} \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_{\theta z} = G \gamma_{\theta z} \quad (\text{A.26})$$

$$\tau_{rz} = G \gamma_{rz} \quad (\text{A.27})$$

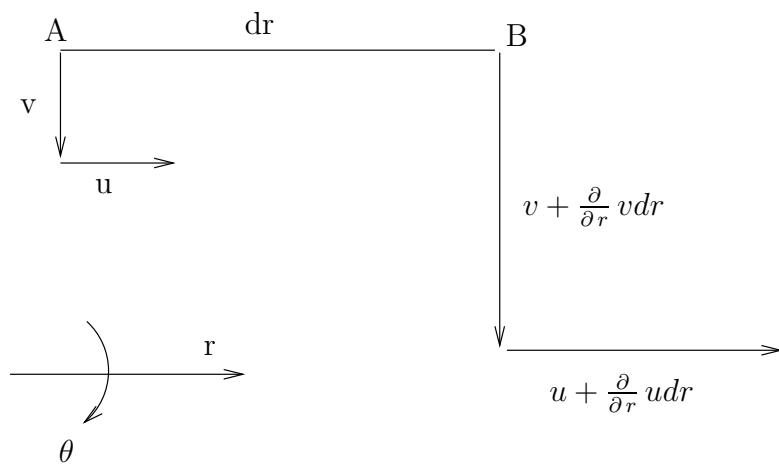


Figura A.8: Esquematização dos deslocamentos que influem na deformação ε_r .

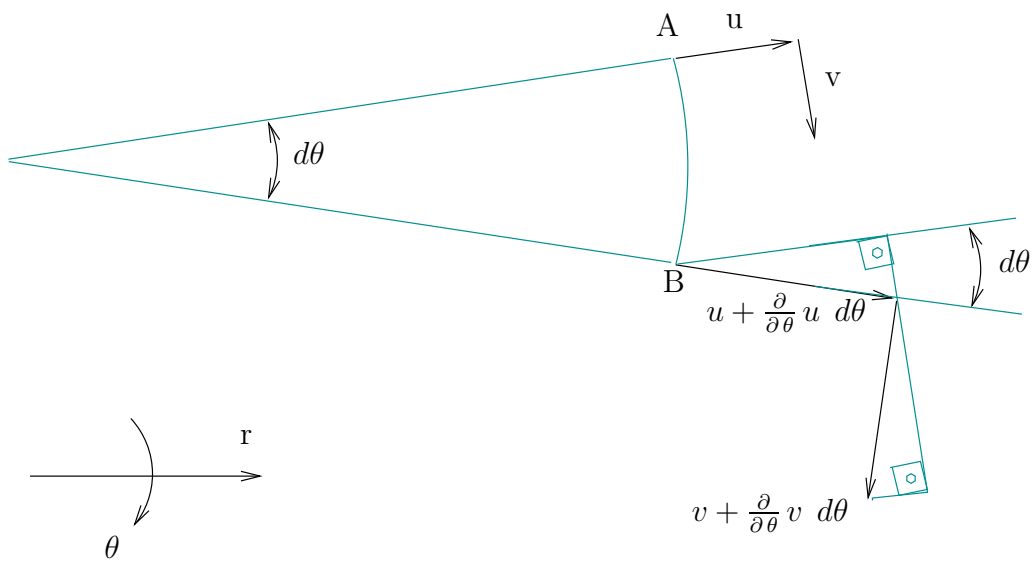


Figura A.9: Esquematização dos deslocamentos que influem na deformação ε_θ .

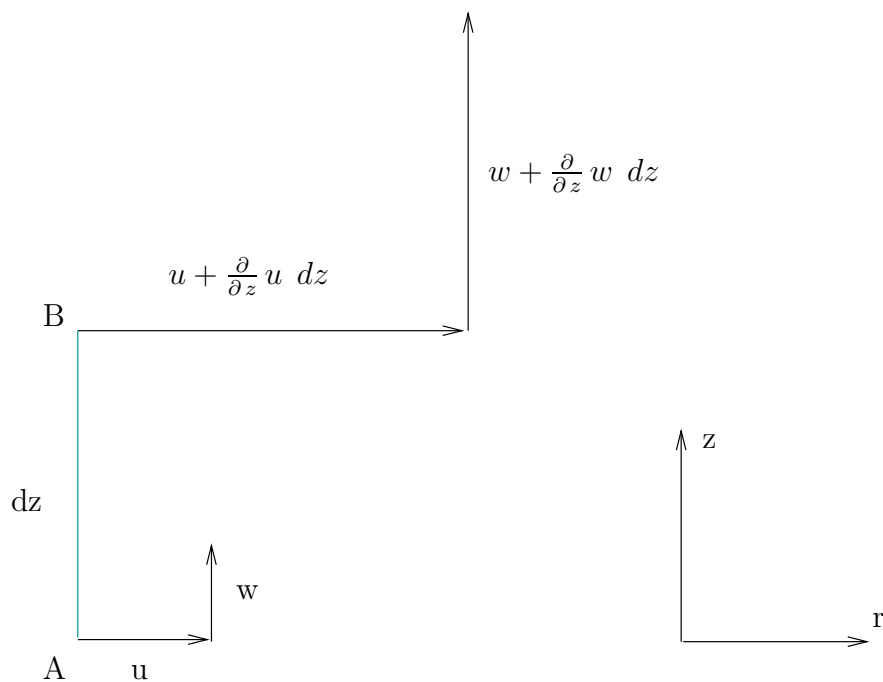


Figura A.10: Esquematização dos deslocamentos que influem na deformação ε_z .

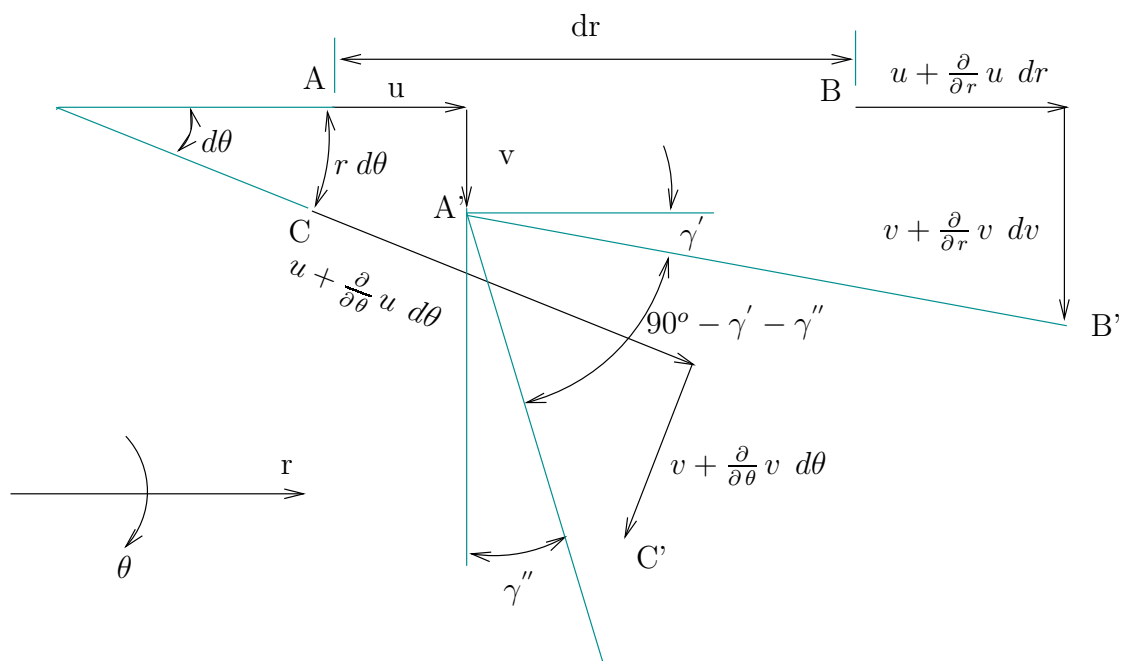


Figura A.11: Esquematização dos deslocamentos que influem na deformação $\varepsilon_{r\theta}$.

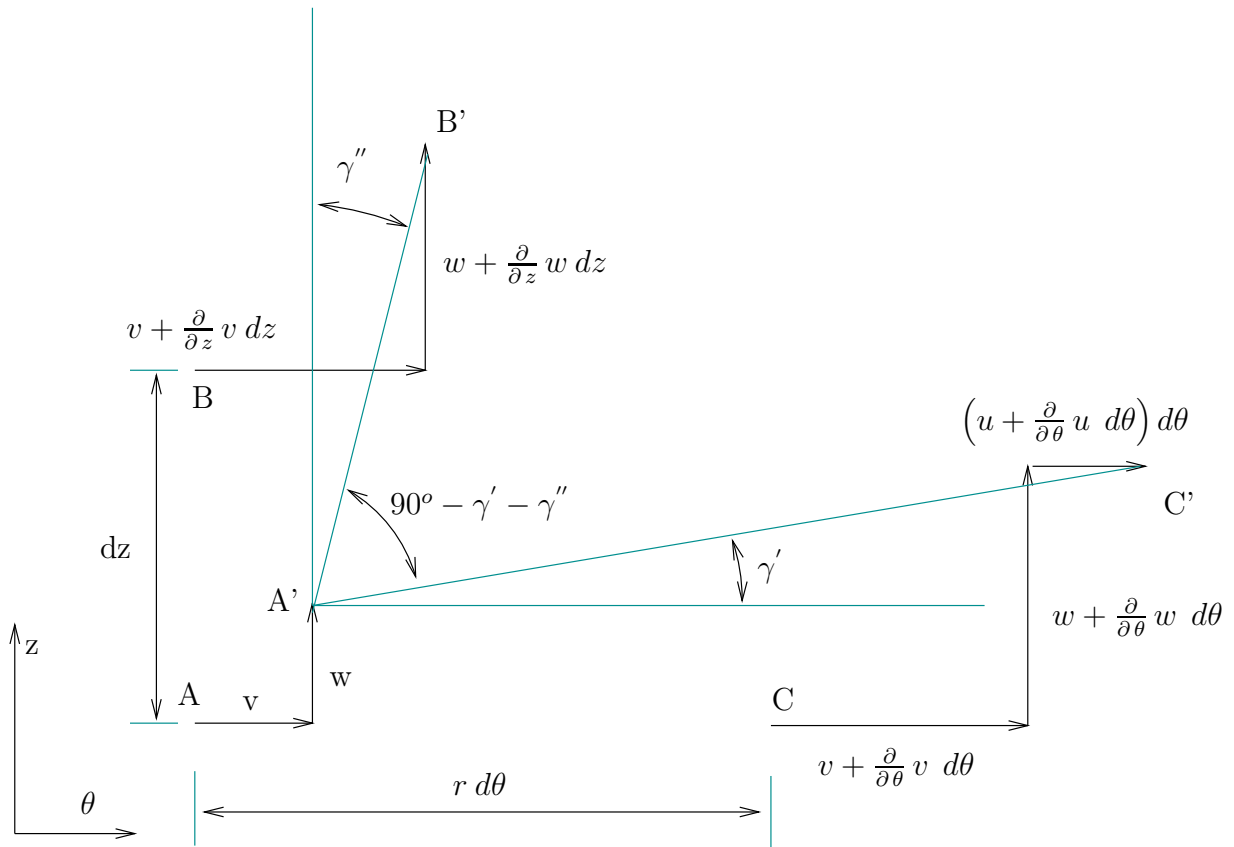


Figura A.12: Esquemática dos deslocamentos que influem na deformação $\varepsilon_{\theta z}$.

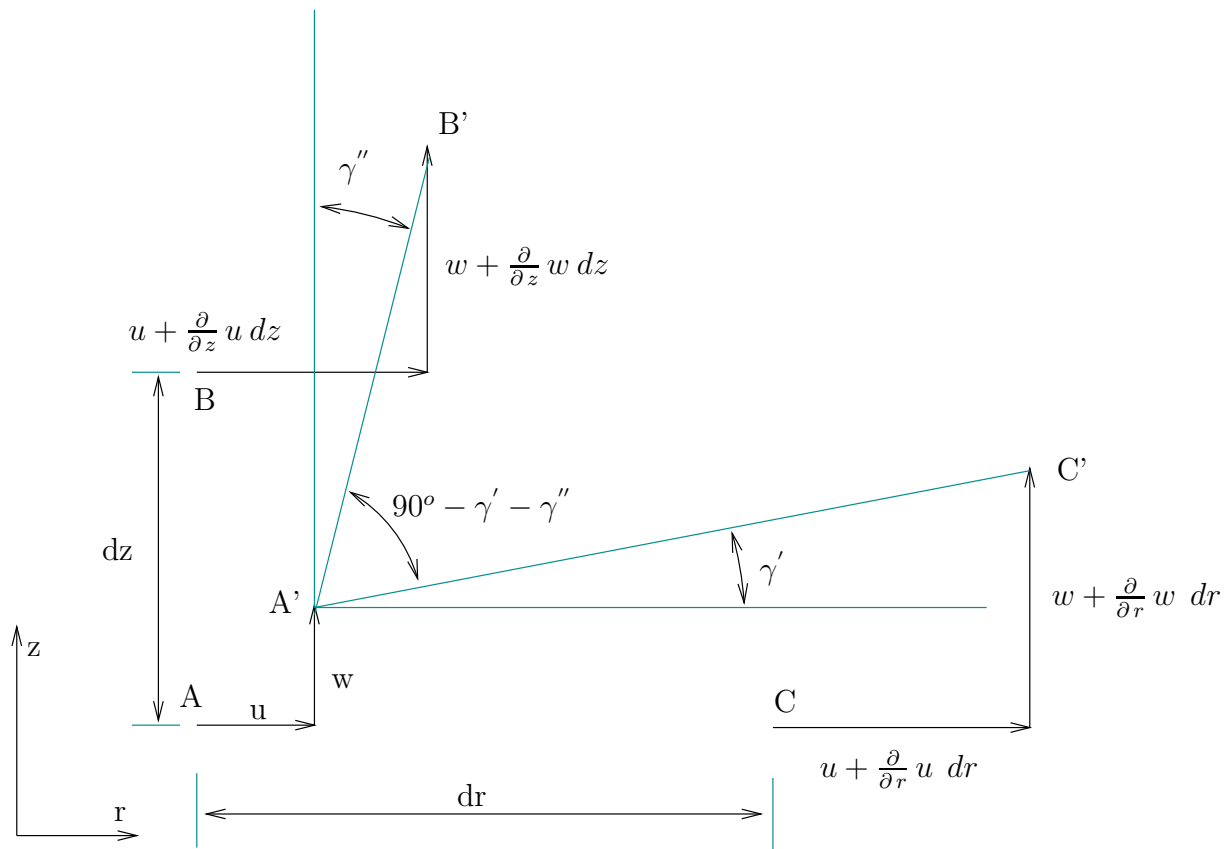


Figura A.13: Esquemática dos deslocamentos que influem na deformação ε_{rz} .

Nas equações (A.22) a (A.27), temos:

- E - módulo de elasticidade do material;
- ν - coeficiente de "Poisson";
- G - módulo de rigidez;
- α - coeficiente de dilatação térmica.

Podemos relacionar as três grandezas "E", " ν " e "G" na equação (A.28).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.28})$$

O sistema de equações (A.22)-(A.27) pode ser invertido obtendo-se o sistema (A.29).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & B & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

No sistema (A.29), os valores de "B", " λ ", que é a constante de "Lamé", e "D", são apresentadas (A.30)-(A.32).

$$B = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{A.31})$$

$$D = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \quad (\text{A.32})$$

Também definiremos a grandeza "H", apresentada na equação (A.33).

$$H = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{1}{1 - 2\nu} \right] \quad (\text{A.33})$$

A.4 Relações entre deslocamentos e tensões.

As relações entre deslocamentos e tensões pode ser obtido pela substituição das equações (A.16)-(A.21) no sistema A.29, resultando nas equações (A.34)-(A.39).

$$\sigma_r = B \frac{\partial}{\partial r} u + \lambda \frac{u}{r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + \lambda \frac{\partial}{\partial z} w - D T \quad (\text{A.34})$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial}{\partial r} u + B \frac{u}{r} + \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + \lambda \frac{\partial}{\partial z} w - D T \quad (\text{A.35})$$

$$\sigma_r = \lambda \frac{\partial}{\partial r} u + \lambda \frac{u}{r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + B \frac{\partial}{\partial z} w - D T \quad (\text{A.36})$$

$$\tau_{r\theta} = -G \frac{v}{r} + \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u + G \frac{\partial}{\partial r} v \quad (\text{A.37})$$

$$\tau_{rz} = G \frac{\partial}{\partial r} w + G \frac{\partial}{\partial z} u \quad (\text{A.38})$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w + G \frac{\partial}{\partial z} v \quad (\text{A.39})$$

A.5 Equações Diferenciais Parciais que regem os deslocamentos.

As equações diferenciais parciais que regem os deslocamentos podem ser obtidas substituindo-se as equações (A.34)-(A.39) nas equações (A.8),(A.10) e (A.12), obtendo as equações (A.40)-(A.42).

$$-p_r = H \frac{\partial}{\partial r} \Gamma + G \nabla^2 u - \frac{G}{r^2} \left(u + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} v \right) - D \frac{\partial}{\partial r} T \quad (\text{A.40})$$

$$-p_\theta = \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma + G \nabla^2 v + \frac{G}{r^2} \left(2 \frac{\partial}{\partial \theta} u \right) - \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T \quad (\text{A.41})$$

$$-p_z = H \frac{\partial}{\partial z} \Gamma + G \nabla^2 w - D \frac{\partial}{\partial z} T \quad (\text{A.42})$$

Nas equações (A.40)-(A.42), " Γ " e o operador " ∇^2 " são dados em (A.43) e (A.44).

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + \frac{\partial}{\partial z} w \quad (\text{A.43})$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.44})$$

As condições de contorno para o sistema de equações (A.40)-(A.42) são obtidas pela substituição das equações (A.34)-(A.39) nas equações (A.13)-(A.15) obtendo-se (A.45)-(A.47)-

$$f_r = G \square u + l \lambda \Gamma + G \frac{\partial}{\partial r} \delta - m G \frac{v}{r} - l D T \quad (\text{A.45})$$

$$f_\theta = G \square v + m \lambda \Gamma + \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta + \frac{G}{r} (2 m u - l v) - m D T \quad (\text{A.46})$$

$$f_z = G \square w + n \lambda \Gamma + G \frac{\partial}{\partial z} \delta - n D T \quad (\text{A.47})$$

Nas equações (A.45)-(A.47), " δ " e o operador " \square " são dados em (A.48) e (A.49).

$$\delta = l u + m v + n w \quad (\text{A.48})$$

$$\square = \left(l \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.49})$$

A.6 Energia de Deformação do Sistema.

A energia acumulada em um corpo elástico devido a sua deformação pode ser obtida a partir da energia acumulada em cada elemento infinitesimal de volume deste corpo. Esta energia acumulada é igual a soma dos trabalhos realizados por cada componente de tensão em cada face do corpo desde o estado indeformado até o estado de deformação final. Uma vez que se trata de um sistema de forças conservativo, pode-se dizer que o trabalho realizado por cada componente de força em uma dada face seja igual à metade do produto do valor desta tensão pelo valor da componente de deslocamento da face em que atua na direção de atuação desta força. Partindo-se das expressões para as forças apresentadas nas figuras (A.4)-(A.6) e das relações entre deslocamentos e deformações apresentadas em (A.16)-(A.21), pode-se obter uma expressão para energia elástica por unidade de volume apresenada em (A.50).

$$e_{interna} = \frac{1}{2} (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_z \epsilon_z + \gamma_{r\theta} \tau_{r\theta} + \gamma_{\theta z} \tau_{\theta z} + \gamma_{rz} \tau_{rz}) \quad (A.50)$$

A energia total acumulada no sistema na forma elástica pode ser obtida pela integração da expressão (A.50) sobre todo o volume da peça, conforme apresentado em (A.51).

$$E_{interna} = \int^V e_{interna} dV \quad (A.51)$$

O trabalho realizado pelas forças que atuam na superfície externa do corpo pode ser dado pelo produto destas forças pelo deslocamento dos pontos de aplicação das mesmas na fronteira. O total deste trabalho é dado pela expressão (A.52).

$$E_{externa} = \int^S (u f_r + v f_\theta + w f_z) dS \quad (A.52)$$

A energia total do sistema é dado pela soma da energia elastica acumulada pelo corpo " $E_{interna}$ " e do trabalho realizado pelo carregamento externo do corpo " $E_{externa}$ ", conforme apresentado em (A.53).

$$En = E_{interna} + E_{externa} \quad (A.53)$$

Apêndice B

Comparação com resultados obtidos por um programa comercial.

A verificação dos resultados obtidos pelo sistema desenvolvido neste trabalho para o problema de análise de tensões exposto no Capítulo 7 é feita comparando-os com os resultados obtidos para o mesmo problema, empregando-se a mesma malha, pelo programa comercialmente conhecido por "ansys", versão 5.0, produzido por "Swanson Analysis Systems, Inc."

Abaixo, estão apresentadas as soluções em coeficientes da série de Fourier para a qual são expandidos os deslocamentos associados a um determinado subconjunto de nós da fronteira, obtidas pelo sistema desenvolvido neste trabalho e pelo "ansys". Também são apresentados os maiores valores, em módulo, do vetor obtido pela diferença entre os resultados obtidos pelos dois sistemas em todos os nós, para cada termo da solução juntamente com o maior valor entre estes. Das mesma forma, são apresentados os maiores valores, em módulo, dos vetores obtidos pelos dois sistemas para cada termo da solução juntamente com o maior valor entre estes.

Os resultados para o subconjunto de nós da fronteira é apresentado abaixo, para cada nó, em grupos de cinco linhas:

1. Primeira linha: são apresentados na ordem:
 - (a) O número do termo da série de Fourier do resultado apresentado na forma "J= ...";
 - (b) O número do nó na forma "no = ...";
 - (c) As coordenadas deste nó na forma "(R , Z)".
2. Segunda linha : indicação da posição das componentes "r", " θ " e "z" dos vetores apresentados nas duas linhas logo abaixo desta;
3. Terceira linha: vetor coeficiente da série de Fourier do deslocamento obtido pelo sistema desenvolvido neste trabalho;
4. Quarta linha: vetor coeficiente da série de Fourier do deslocamento obtido pelo sistema "ansys";

5. Quinta linha: módulo da diferença entre os vetores apresentados nas duas linhas acima.

Nas linhas finais, estão apresentados os maiores valores, em módulo, entre as diferenças entre os vetores obtidos pelos dois sistemas em cada nó da malha, juntamente com o maior valor, em módulo, entre os vetores obtidos pelos dois sistemas, isto para cada termo da solução. Na última linha, são apresentados os maiores entre os valores citados acima.

Os valores para a comparação são apresentados abaixo:

```
J = 0, no 0 coord ( 1.500000e+01, 0.000000e+00)
      ur          ut          uz
sistema -> -1.751110e-03  0.000000e+00  2.524093e-08
ansys-5.0 -> -1.751100e-03  0.000000e+00  0.000000e+00
diferenca -> 2.714967e-08

J = 0, no 4 coord ( 2.530000e+01, 0.000000e+00)
      ur          ut          uz
sistema -> -1.570968e-03  0.000000e+00  8.736275e-04
ansys-5.0 -> -1.571000e-03  0.000000e+00  8.736000e-04
diferenca -> 4.219301e-08

J = 0, no 8 coord ( 3.030004e+01, 8.660232e+00)
      ur          ut          uz
sistema -> -2.577221e-03  0.000000e+00  1.367637e-03
ansys-5.0 -> -2.577200e-03  0.000000e+00  1.367600e-03
diferenca -> 4.254409e-08

J = 0, no 12 coord ( 3.530008e+01, 1.732046e+01)
      ur          ut          uz
sistema -> -4.565380e-03  0.000000e+00  1.394347e-03
ansys-5.0 -> -4.565400e-03  0.000000e+00  1.394300e-03
diferenca -> 5.107837e-08

J = 0, no 16 coord ( 4.384521e+01, 1.712103e+01)
      ur          ut          uz
sistema -> -1.902170e-02  0.000000e+00  -8.959752e-03
ansys-5.0 -> -1.902200e-02  0.000000e+00  -8.959800e-03
diferenca -> 3.038157e-07

J = 0, no 20 coord ( 5.250548e+01, 1.212107e+01)
      ur          ut          uz
sistema -> -2.738828e-02  0.000000e+00  -2.598834e-02
ansys-5.0 -> -2.738800e-02  0.000000e+00  -2.598800e-02
```

diferenca -> 4.404543e-07

J = 0, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.555883e-02	0.000000e+00	-3.281336e-02
ansys-5.0	-> -2.555900e-02	0.000000e+00	-3.281300e-02
diferenca	-> 3.981206e-07		

J = 0, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.304005e-02	0.000000e+00	-3.117459e-02
ansys-5.0	-> -2.304000e-02	0.000000e+00	-3.117500e-02
diferenca	-> 4.130375e-07		

J = 0, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.213138e-02	0.000000e+00	-2.746772e-02
ansys-5.0	-> -2.213100e-02	0.000000e+00	-2.746800e-02
diferenca	-> 4.720169e-07		

J = 0, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.337387e-02	0.000000e+00	-2.474058e-02
ansys-5.0	-> -2.337400e-02	0.000000e+00	-2.474100e-02
diferenca	-> 4.396590e-07		

J = 0, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.646390e-02	0.000000e+00	-2.301976e-02
ansys-5.0	-> -2.646400e-02	0.000000e+00	-2.302000e-02
diferenca	-> 2.600000e-07		

J = 0, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.006802e-02	0.000000e+00	-2.076583e-02
ansys-5.0	-> -3.006800e-02	0.000000e+00	-2.076600e-02
diferenca	-> 1.711724e-07		

J = 0, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz	
sistema	-> -3.443489e-02	0.000000e+00	-1.861539e-02	

ansys-5.0 -> -3.443500e-02 0.000000e+00 -1.861500e-02
diferenca -> 4.052160e-07

J = 0, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.729334e-02 0.000000e+00 -1.948970e-02
ansys-5.0 -> -3.729300e-02 0.000000e+00 -1.949000e-02
diferenca -> 4.534314e-07

J = 0, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.812461e-02 0.000000e+00 -2.434410e-02
ansys-5.0 -> -3.812500e-02 0.000000e+00 -2.434400e-02
diferenca -> 4.026164e-07

J = 0, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.414743e-02 0.000000e+00 -2.807428e-02
ansys-5.0 -> -3.414700e-02 0.000000e+00 -2.807400e-02
diferenca -> 5.131277e-07

J = 0, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.879994e-02 0.000000e+00 -3.118151e-02
ansys-5.0 -> -2.880000e-02 0.000000e+00 -3.118200e-02
diferenca -> 4.936598e-07

J = 0, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.600513e-02 0.000000e+00 -2.759426e-02
ansys-5.0 -> -1.600500e-02 0.000000e+00 -2.759400e-02
diferenca -> 2.906888e-07

J = 0, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> -4.211143e-03 0.000000e+00 -1.208209e-02
ansys-5.0 -> -4.211100e-03 0.000000e+00 -1.208200e-02
diferenca -> 9.974467e-08

J = 0, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz

sistema -> -8.457528e-04 0.000000e+00 -9.598074e-06
ansys-5.0 -> -8.457500e-04 0.000000e+00 -9.628200e-06
diferenca -> 3.025584e-08

J = 0, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.229211e-03 0.000000e+00 2.850489e-03
ansys-5.0 -> -1.229200e-03 0.000000e+00 2.850500e-03
diferenca -> 1.555635e-08

J = 0, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.036940e-03 0.000000e+00 3.817694e-03
ansys-5.0 -> -1.036900e-03 0.000000e+00 3.817700e-03
diferenca -> 4.044750e-08

J = 0, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.777478e-03 0.000000e+00 4.302796e-03
ansys-5.0 -> -1.777500e-03 0.000000e+00 4.302800e-03
diferenca -> 2.236068e-08

J = 0, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.236519e-03 0.000000e+00 3.191148e-03
ansys-5.0 -> -3.236500e-03 0.000000e+00 3.191100e-03
diferenca -> 5.162364e-08

J = 0, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.324781e-03 0.000000e+00 1.225164e-03
ansys-5.0 -> -3.324800e-03 0.000000e+00 1.225100e-03
diferenca -> 6.676077e-08

J = 0, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> -2.177190e-03 0.000000e+00 1.700205e-04
ansys-5.0 -> -2.177200e-03 0.000000e+00 1.699900e-04
diferenca -> 3.209751e-08

J = 2, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.861180e-03	-5.335770e-09	-9.051179e-09
ansys-5.0	-> -4.861000e-03	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 1.803064e-07		

J = 2, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.874665e-03	1.321807e-03	5.141148e-03
ansys-5.0	-> -5.874600e-03	1.321700e-03	5.141200e-03
diferenca	-> 1.355655e-07		

J = 2, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.012700e-02	3.960803e-03	6.696024e-03
ansys-5.0	-> -1.012700e-02	3.960700e-03	6.696100e-03
diferenca	-> 1.280039e-07		

J = 2, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.591198e-02	1.000328e-02	7.301392e-03
ansys-5.0	-> -1.591200e-02	1.000300e-02	7.301500e-03
diferenca	-> 3.007723e-07		

J = 2, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.609528e-02	2.822016e-02	-1.218797e-03
ansys-5.0	-> -3.609500e-02	2.822000e-02	-1.218700e-03
diferenca	-> 3.367625e-07		

J = 2, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.619110e-02	3.694768e-02	-1.273785e-02
ansys-5.0	-> -4.619100e-02	3.694800e-02	-1.273800e-02
diferenca	-> 3.672874e-07		

J = 2, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.541277e-02	3.739976e-02	-1.131559e-02
ansys-5.0	-> -4.541300e-02	3.740000e-02	-1.131500e-02
diferenca	-> 6.772001e-07		

J = 2, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -4.376605e-02 3.082302e-02 -3.613184e-03
 ansys-5.0 -> -4.376600e-02 3.082300e-02 -3.613100e-03
 diferencia -> 9.977976e-08

J = 2, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -4.368335e-02 2.024478e-02 5.062409e-03
 ansys-5.0 -> -4.368300e-02 2.024500e-02 5.062600e-03
 diferencia -> 4.553910e-07

J = 2, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -4.626855e-02 1.405936e-02 1.051390e-02
 ansys-5.0 -> -4.626900e-02 1.405900e-02 1.051400e-02
 diferencia -> 5.848932e-07

J = 2, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -5.378332e-02 1.451734e-02 1.215228e-02
 ansys-5.0 -> -5.378300e-02 1.451700e-02 1.215200e-02
 diferencia -> 5.444263e-07

J = 2, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -6.264116e-02 1.476922e-02 1.445010e-02
 ansys-5.0 -> -6.264100e-02 1.476900e-02 1.445000e-02
 diferencia -> 2.898275e-07

J = 2, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -7.291921e-02 1.565211e-02 1.665964e-02
 ansys-5.0 -> -7.291900e-02 1.565200e-02 1.666000e-02
 diferencia -> 4.310452e-07

J = 2, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -8.012845e-02 2.426978e-02 1.252117e-02
 ansys-5.0 -> -8.012900e-02 2.427000e-02 1.252100e-02
 diferencia -> 6.162792e-07

J = 2, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.027991e-02	3.771820e-02	8.022398e-05
ansys-5.0	-> -8.028000e-02	3.771800e-02	8.035600e-05
diferenca	-> 2.559869e-07		

J = 2, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.992748e-02	4.011173e-02	-5.752743e-03
ansys-5.0	-> -6.992800e-02	4.011200e-02	-5.752600e-03
diferenca	-> 6.031161e-07		

J = 2, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.798102e-02	3.853356e-02	-1.136774e-02
ansys-5.0	-> -5.798100e-02	3.853400e-02	-1.136800e-02
diferenca	-> 5.114685e-07		

J = 2, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.905136e-02	2.964002e-02	-1.414692e-02
ansys-5.0	-> -3.905100e-02	2.964000e-02	-1.414700e-02
diferenca	-> 3.693237e-07		

J = 2, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.303802e-02	2.264039e-02	-4.490082e-03
ansys-5.0	-> -2.303800e-02	2.264000e-02	-4.490000e-03
diferenca	-> 3.990288e-07		

J = 2, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.738654e-02	1.601356e-02	4.720603e-03
ansys-5.0	-> -1.738700e-02	1.601400e-02	4.720700e-03
diferenca	-> 6.439014e-07		

J = 2, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.844815e-02	1.225144e-02	3.767077e-03
ansys-5.0	-> -1.844800e-02	1.225100e-02	3.767200e-03

diferenca -> 4.808628e-07

J = 2, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.942106e-02	1.329036e-02	2.987986e-04
ansys-5.0	-> -1.942100e-02	1.329000e-02	2.987900e-04
diferenca	-> 3.650671e-07		

J = 2, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.712401e-02	1.661806e-02	-5.025652e-04
ansys-5.0	-> -1.712400e-02	1.661800e-02	-5.026300e-04
diferenca	-> 8.887654e-08		

J = 2, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.506290e-02	1.476488e-02	1.125357e-03
ansys-5.0	-> -1.506300e-02	1.476500e-02	1.125300e-03
diferenca	-> 1.662799e-07		

J = 2, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.197639e-02	1.132570e-02	1.399704e-03
ansys-5.0	-> -1.197600e-02	1.132600e-02	1.399700e-03
diferenca	-> 4.920528e-07		

J = 2, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.396103e-03	5.975631e-03	1.150637e-03
ansys-5.0	-> -7.396100e-03	5.975400e-03	1.150600e-03
diferenca	-> 2.339637e-07		

J = 4, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.062704e-05	2.541939e-08	2.136222e-08
ansys-5.0	-> -1.061100e-05	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 3.687508e-08		

J = 4, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.720112e-06	-2.583244e-05	6.580888e-05

ansys-5.0 -> -7.713000e-06 -2.583300e-05 6.581100e-05
diferenca -> 7.442348e-09

J = 4, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.178307e-04 5.527316e-05 1.348621e-04
ansys-5.0 -> -1.178300e-04 5.526900e-05 1.348600e-04
diferenca -> 4.712282e-09

J = 4, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
ur ut uz
sistema -> -6.651857e-04 5.996305e-04 2.045804e-04
ansys-5.0 -> -6.651900e-04 5.996200e-04 2.045800e-04
diferenca -> 1.135341e-08

J = 4, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
ur ut uz
sistema -> -5.347206e-03 4.603778e-03 -1.444427e-03
ansys-5.0 -> -5.347200e-03 4.603800e-03 -1.444400e-03
diferenca -> 3.534119e-08

J = 4, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
ur ut uz
sistema -> -8.808499e-03 7.729173e-03 -3.321261e-03
ansys-5.0 -> -8.808500e-03 7.729200e-03 -3.321300e-03
diferenca -> 4.744470e-08

J = 4, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.039043e-02 8.346267e-03 -2.043980e-03
ansys-5.0 -> -1.039000e-02 8.346300e-03 -2.044000e-03
diferenca -> 4.317279e-07

J = 4, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.195067e-02 6.195201e-03 -3.263020e-04
ansys-5.0 -> -1.195100e-02 6.195200e-03 -3.263000e-04
diferenca -> 3.300076e-07

J = 4, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz

sistema -> -1.297340e-02 1.138150e-03 6.247518e-04
ansys-5.0 -> -1.297300e-02 1.138100e-03 6.247500e-04
diferenca -> 4.031169e-07

J = 4, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.376405e-02 -2.791996e-03 1.543190e-03
ansys-5.0 -> -1.376400e-02 -2.792000e-03 1.543200e-03
diferenca -> 5.114685e-08

J = 4, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.508893e-02 -2.834338e-03 3.178610e-03
ansys-5.0 -> -1.508900e-02 -2.834300e-03 3.178600e-03
diferenca -> 8.027453e-08

J = 4, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.766627e-02 -2.948844e-03 5.059061e-03
ansys-5.0 -> -1.766600e-02 -2.948800e-03 5.059100e-03
diferenca -> 2.763277e-07

J = 4, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.144247e-02 -2.545416e-03 6.783829e-03
ansys-5.0 -> -2.144200e-02 -2.545400e-03 6.783800e-03
diferenca -> 4.711656e-07

J = 4, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.407991e-02 3.162201e-03 5.486938e-03
ansys-5.0 -> -2.408000e-02 3.162200e-03 5.486900e-03
diferenca -> 9.769852e-08

J = 4, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.330682e-02 1.059543e-02 3.851932e-04
ansys-5.0 -> -2.330700e-02 1.059500e-02 3.851900e-04
diferenca -> 4.661655e-07

J = 4, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.874304e-02	1.122135e-02	-1.144865e-03
ansys-5.0	-> -1.874300e-02	1.122100e-02	-1.144900e-03
diferenca	-> 3.540127e-07		

J = 4, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.395668e-02	9.454250e-03	-2.486497e-03
ansys-5.0	-> -1.395700e-02	9.454300e-03	-2.486500e-03
diferenca	-> 3.238966e-07		

J = 4, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.089716e-03	4.295612e-03	-3.804818e-03
ansys-5.0	-> -7.089700e-03	4.295600e-03	-3.804800e-03
diferenca	-> 2.690725e-08		

J = 4, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.410372e-03	2.036388e-03	-2.225144e-03
ansys-5.0	-> -2.410400e-03	2.036400e-03	-2.225200e-03
diferenca	-> 6.374951e-08		

J = 4, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.001097e-04	7.965192e-04	-3.070063e-04
ansys-5.0	-> -5.001100e-04	7.965200e-04	-3.070100e-04
diferenca	-> 3.797368e-09		

J = 4, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.983134e-04	2.176510e-04	-1.362542e-05
ansys-5.0	-> -1.983100e-04	2.176500e-04	-1.362600e-05
diferenca	-> 3.591156e-09		

J = 4, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.150574e-04	7.051734e-05	-1.315074e-05
ansys-5.0	-> -1.150600e-04	7.051400e-05	-1.315200e-05
diferenca	-> 4.416243e-09		

J = 4, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.091089e-04 1.098732e-04 1.793826e-06
 ansys-5.0 -> -1.091100e-04 1.098800e-04 1.792800e-06
 diferencia -> 6.964386e-09

J = 4, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.633831e-04 1.585165e-04 1.214634e-05
 ansys-5.0 -> -1.633900e-04 1.585200e-04 1.214600e-05
 diferencia -> 7.744392e-09

J = 4, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.218607e-04 1.171340e-04 -1.175838e-06
 ansys-5.0 -> -1.218600e-04 1.171400e-04 -1.176700e-06
 diferencia -> 6.101889e-09

J = 4, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -3.658031e-05 3.243622e-05 5.159858e-06
 ansys-5.0 -> -3.657600e-05 3.242800e-05 5.152600e-06
 diferencia -> 1.178232e-08

J = 6, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> 5.268888e-08 3.648817e-08 2.742481e-08
 ansys-5.0 -> 7.133600e-08 0.000000e+00 0.000000e+00
 diferencia -> 4.930742e-08

J = 6, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> 6.641051e-07 -9.583602e-07 1.747783e-06
 ansys-5.0 -> 6.689000e-07 -9.574200e-07 1.749200e-06
 diferencia -> 5.087527e-09

J = 6, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -3.842745e-06 1.973840e-06 6.426832e-06
 ansys-5.0 -> -3.842300e-06 1.973600e-06 6.427400e-06
 diferencia -> 7.604269e-10

J = 6, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -6.460779e-05 6.022061e-05 1.192595e-05
 ansys-5.0 -> -6.460700e-05 6.021700e-05 1.192600e-05
 diferencia -> 3.695768e-09

J = 6, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.015794e-03 9.051715e-04 -3.021160e-04
 ansys-5.0 -> -1.015800e-03 9.051700e-04 -3.021200e-04
 diferencia -> 7.365460e-09

J = 6, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.191342e-03 1.997996e-03 -7.161230e-04
 ansys-5.0 -> -2.191300e-03 1.998000e-03 -7.161300e-04
 diferencia -> 4.276681e-08

J = 6, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -3.373106e-03 2.703856e-03 -3.922448e-04
 ansys-5.0 -> -3.373100e-03 2.703900e-03 -3.922400e-04
 diferencia -> 4.466587e-08

J = 6, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -4.950432e-03 2.705101e-03 -2.509712e-04
 ansys-5.0 -> -4.950400e-03 2.705100e-03 -2.509700e-04
 diferencia -> 3.203810e-08

J = 6, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -6.268953e-03 8.768544e-04 -8.637725e-04
 ansys-5.0 -> -6.269000e-03 8.768500e-04 -8.637700e-04
 diferencia -> 4.727166e-08

J = 6, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -6.893804e-03 -1.649112e-03 -1.062206e-03
 ansys-5.0 -> -6.893800e-03 -1.649100e-03 -1.062200e-03

diferenca -> 1.400000e-08

J = 6, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.680051e-03	-1.986774e-03	1.554622e-04
ansys-5.0	-> -6.680100e-03	-1.986800e-03	1.554600e-04
diferenca	-> 5.551432e-08		

J = 6, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.339486e-03	-2.209845e-03	1.449715e-03
ansys-5.0	-> -7.339500e-03	-2.209800e-03	1.449700e-03
diferenca	-> 4.945705e-08		

J = 6, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.817441e-03	-2.187716e-03	2.690406e-03
ansys-5.0	-> -8.817400e-03	-2.187700e-03	2.690400e-03
diferenca	-> 4.441846e-08		

J = 6, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.680716e-03	1.046884e-03	2.364385e-03
ansys-5.0	-> -9.680700e-03	1.046900e-03	2.364400e-03
diferenca	-> 2.714774e-08		

J = 6, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.733971e-03	4.361434e-03	6.668824e-06
ansys-5.0	-> -8.734000e-03	4.361400e-03	6.668300e-06
diferenca	-> 4.469088e-08		

J = 6, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.455741e-03	4.347627e-03	-3.989349e-04
ansys-5.0	-> -6.455700e-03	4.347600e-03	-3.989400e-04
diferenca	-> 4.935595e-08		

J = 6, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.283626e-03	3.201896e-03	-6.638357e-04

ansys-5.0 -> -4.283600e-03 3.201900e-03 -6.638400e-04
diferenca -> 2.665502e-08

J = 6, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.590946e-03 8.365676e-04 -9.239820e-04
ansys-5.0 -> -1.590900e-03 8.365600e-04 -9.239800e-04
diferenca -> 4.666648e-08

J = 6, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.725457e-04 1.883679e-04 -4.889207e-04
ansys-5.0 -> -3.725500e-04 1.883600e-04 -4.889200e-04
diferenca -> 9.021641e-09

J = 6, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.869848e-05 3.356155e-05 -8.341030e-05
ansys-5.0 -> -1.869800e-05 3.356100e-05 -8.341200e-05
diferenca -> 1.850108e-09

J = 6, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz
sistema -> 7.849132e-07 2.305599e-06 -7.801224e-06
ansys-5.0 -> 7.851200e-07 2.305000e-06 -7.801500e-06
diferenca -> 6.911897e-10

J = 6, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> 5.519692e-07 -4.033545e-07 -8.511822e-07
ansys-5.0 -> 5.519800e-07 -4.034500e-07 -8.511800e-07
diferenca -> 9.613392e-11

J = 6, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -7.768250e-07 7.983357e-07 7.660889e-08
ansys-5.0 -> -7.768700e-07 7.983900e-07 7.665300e-08
diferenca -> 8.318162e-11

J = 6, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz

sistema -> -3.302242e-06 3.220074e-06 1.454200e-07
ansys-5.0 -> -3.302300e-06 3.220100e-06 1.454300e-07
diferenca -> 6.434283e-11

J = 6, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.507483e-06 2.400991e-06 -2.340810e-07
ansys-5.0 -> -2.507500e-06 2.401000e-06 -2.341900e-07
diferenca -> 1.106842e-10

J = 6, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> -3.365785e-07 3.004247e-07 3.539753e-08
ansys-5.0 -> -3.330100e-07 2.947400e-07 3.079700e-08
diferenca -> 8.137253e-09

J = 8, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> -4.395243e-09 1.313298e-08 1.944932e-08
ansys-5.0 -> 4.436500e-09 0.000000e+00 0.000000e+00
diferenca -> 2.507491e-08

J = 8, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> 4.646759e-08 -4.739614e-08 6.690890e-08
ansys-5.0 -> 4.745800e-08 -4.709500e-08 6.728700e-08
diferenca -> 1.102069e-09

J = 8, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)
ur ut uz
sistema -> -6.183035e-08 -3.620818e-08 5.005381e-07
ansys-5.0 -> -6.180500e-08 -3.624200e-08 5.005900e-07
diferenca -> 6.693299e-11

J = 8, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
ur ut uz
sistema -> -6.670312e-06 6.418236e-06 1.851300e-06
ansys-5.0 -> -6.670100e-06 6.417000e-06 1.851300e-06
diferenca -> 1.254049e-09

J = 8, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.118484e-04	1.930045e-04	-5.487445e-05
ansys-5.0	-> -2.118500e-04	1.930000e-04	-5.487500e-05
diferenca	-> 4.807546e-09		

J = 8, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.324067e-04	5.865953e-04	-1.635980e-04
ansys-5.0	-> -6.324100e-04	5.865900e-04	-1.636000e-04
diferenca	-> 6.555913e-09		

J = 8, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.307298e-03	1.055590e-03	-8.270429e-05
ansys-5.0	-> -1.307300e-03	1.055600e-03	-8.270400e-05
diferenca	-> 1.020216e-08		

J = 8, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.461884e-03	1.504095e-03	-1.841988e-04
ansys-5.0	-> -2.461900e-03	1.504100e-03	-1.842000e-04
diferenca	-> 1.680595e-08		

J = 8, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.743978e-03	8.839309e-04	-8.777410e-04
ansys-5.0	-> -3.744000e-03	8.839300e-04	-8.777400e-04
diferenca	-> 2.204110e-08		

J = 8, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.440920e-03	-9.699433e-04	-1.240519e-03
ansys-5.0	-> -4.440900e-03	-9.699500e-04	-1.240500e-03
diferenca	-> 2.838820e-08		

J = 8, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.026348e-03	-1.237071e-03	-3.084222e-04
ansys-5.0	-> -4.026400e-03	-1.237100e-03	-3.084200e-04
diferenca	-> 5.958053e-08		

J = 8, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -4.214218e-03 -1.374571e-03 5.598978e-04
 ansys-5.0 -> -4.214200e-03 -1.374600e-03 5.599000e-04
 diferencia -> 3.420292e-08

J = 8, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -4.941751e-03 -1.438953e-03 1.457182e-03
 ansys-5.0 -> -4.941800e-03 -1.439000e-03 1.457200e-03
 diferencia -> 7.024244e-08

J = 8, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -5.164466e-03 7.473800e-04 1.397335e-03
 ansys-5.0 -> -5.164500e-03 7.473800e-04 1.397300e-03
 diferencia -> 4.879549e-08

J = 8, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -4.180490e-03 2.287604e-03 -4.653723e-06
 ansys-5.0 -> -4.180500e-03 2.287600e-03 -4.654200e-06
 diferencia -> 1.078089e-08

J = 8, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.794625e-03 2.053966e-03 -1.347456e-04
 ansys-5.0 -> -2.794600e-03 2.054000e-03 -1.347500e-04
 diferencia -> 4.243065e-08

J = 8, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.615619e-03 1.300739e-03 -2.026620e-04
 ansys-5.0 -> -1.615600e-03 1.300700e-03 -2.026600e-04
 diferencia -> 4.342810e-08

J = 8, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -4.083441e-04 2.079886e-04 -2.445200e-04
 ansys-5.0 -> -4.083400e-04 2.079900e-04 -2.445200e-04
 diferencia -> 4.332436e-09

J = 8, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.140999e-05	1.519753e-05	-1.003064e-04
ansys-5.0	-> -6.141000e-05	1.519500e-05	-1.003100e-04
diferenca	-> 4.400114e-09		

J = 8, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.282785e-06	-1.421751e-06	-1.409601e-05
ansys-5.0	-> 1.282900e-06	-1.422000e-06	-1.409600e-05
diferenca	-> 2.744558e-10		

J = 8, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 6.688810e-07	-4.645682e-07	-8.348810e-07
ansys-5.0	-> 6.689200e-07	-4.646900e-07	-8.349400e-07
diferenca	-> 1.408447e-10		

J = 8, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 8.207636e-08	-6.713791e-08	-3.910112e-08
ansys-5.0	-> 8.207800e-08	-6.713800e-08	-3.909900e-08
diferenca	-> 2.681809e-12		

J = 8, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.076465e-09	2.606364e-09	-1.290677e-10
ansys-5.0	-> -2.077100e-09	2.605800e-09	-1.258900e-10
diferenca	-> 3.289240e-12		

J = 8, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.283278e-08	6.689561e-08	2.921472e-09
ansys-5.0	-> -6.283200e-08	6.689100e-08	2.922500e-09
diferenca	-> 4.787200e-12		

J = 8, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.190688e-08	5.017633e-08	-5.735771e-09
ansys-5.0	-> -5.190500e-08	5.016600e-08	-5.751600e-09

diferenca -> 1.899475e-11

J = 8, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.930662e-09	2.825606e-09	3.934457e-09
ansys-5.0	-> -1.267900e-09	3.071800e-10	1.176100e-09
diferenca	-> 3.793449e-09		

J = 10, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.540130e-09	5.354737e-09	1.339255e-08
ansys-5.0	-> 8.693900e-11	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 1.514739e-08		

J = 10, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.210702e-09	-2.269672e-09	2.563877e-09
ansys-5.0	-> 2.432200e-09	-2.197100e-09	2.690200e-09
diferenca	-> 2.651142e-10		

J = 10, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.242800e-08	-1.733293e-08	4.427857e-08
ansys-5.0	-> 1.242700e-08	-1.733500e-08	4.428200e-08
diferenca	-> 4.129140e-12		

J = 10, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.392400e-07	6.645633e-07	3.742722e-07
ansys-5.0	-> -6.391500e-07	6.642400e-07	3.742900e-07
diferenca	-> 3.360651e-10		

J = 10, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.659398e-05	4.306357e-05	-9.639806e-06
ansys-5.0	-> -4.659400e-05	4.306400e-05	-9.640000e-06
diferenca	-> 4.721610e-10		

J = 10, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.983431e-04	1.858355e-04	-3.977830e-05

ansys-5.0 -> -1.983400e-04 1.858400e-04 -3.977800e-05
diferenca -> 5.472659e-09

J = 10, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
ur ut uz
sistema -> -5.586848e-04 4.575279e-04 -1.957435e-05
ansys-5.0 -> -5.586900e-04 4.575300e-04 -1.957400e-05
diferenca -> 5.618941e-09

J = 10, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.351343e-03 9.076087e-04 -1.249736e-04
ansys-5.0 -> -1.351300e-03 9.076100e-04 -1.249700e-04
diferenca -> 4.317001e-08

J = 10, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> -2.510113e-03 7.912935e-04 -6.983938e-04
ansys-5.0 -> -2.510100e-03 7.913000e-04 -6.984000e-04
diferenca -> 1.580158e-08

J = 10, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
ur ut uz
sistema -> -3.265621e-03 -6.786155e-04 -1.056650e-03
ansys-5.0 -> -3.265600e-03 -6.786300e-04 -1.056700e-03
diferenca -> 5.613600e-08

J = 10, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.889273e-03 -8.398783e-04 -3.125126e-04
ansys-5.0 -> -2.889300e-03 -8.398900e-04 -3.125100e-04
diferenca -> 2.954065e-08

J = 10, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.936824e-03 -9.109990e-04 2.610417e-04
ansys-5.0 -> -2.936800e-03 -9.110000e-04 2.610400e-04
diferenca -> 2.408091e-08

J = 10, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
ur ut uz

sistema -> -3.333836e-03 -1.003160e-03 9.171446e-04
ansys-5.0 -> -3.333800e-03 -1.003200e-03 9.171500e-04
diferenca -> 5.408475e-08

J = 10, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.254276e-03 6.503542e-04 9.494507e-04
ansys-5.0 -> -3.254300e-03 6.503600e-04 9.494500e-04
diferenca -> 2.470081e-08

J = 10, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.281975e-03 1.338647e-03 6.857822e-07
ansys-5.0 -> -2.282000e-03 1.338700e-03 6.853700e-07
diferenca -> 5.860179e-08

J = 10, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.369261e-03 1.068503e-03 -4.145760e-05
ansys-5.0 -> -1.369300e-03 1.068500e-03 -4.145800e-05
diferenca -> 3.911726e-08

J = 10, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
ur ut uz
sistema -> -6.874069e-04 5.814848e-04 -6.583302e-05
ansys-5.0 -> -6.874100e-04 5.814900e-04 -6.583300e-05
diferenca -> 6.053957e-09

J = 10, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.157466e-04 6.099184e-05 -7.028810e-05
ansys-5.0 -> -1.157500e-04 6.099100e-05 -7.028800e-05
diferenca -> 3.503655e-09

J = 10, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.020907e-05 2.534821e-07 -2.084286e-05
ansys-5.0 -> -1.020900e-05 2.526500e-07 -2.084300e-05
diferenca -> 8.466938e-10

J = 10, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 6.322178e-07	-7.989830e-07	-2.186597e-06
ansys-5.0	-> 6.322300e-07	-7.990500e-07	-2.186700e-06
diferenca	-> 1.234781e-10		

J = 10, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 8.992832e-08	-7.226860e-08	-7.428425e-08
ansys-5.0	-> 8.993400e-08	-7.228400e-08	-7.429100e-08
diferenca	-> 1.774781e-11		

J = 10, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 4.108746e-09	-3.628600e-09	-1.338176e-09
ansys-5.0	-> 4.108900e-09	-3.628300e-09	-1.338100e-09
diferenca	-> 3.456761e-13		

J = 10, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.371787e-10	-1.412882e-10	-4.649254e-11
ansys-5.0	-> 1.371800e-10	-1.413500e-10	-4.634500e-11
diferenca	-> 1.599656e-13		

J = 10, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.201641e-10	8.776908e-10	1.157373e-10
ansys-5.0	-> -4.201700e-10	8.773700e-10	1.158000e-10
diferenca	-> 3.269231e-13		

J = 10, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.062729e-10	9.080392e-10	-8.352734e-11
ansys-5.0	-> -9.064600e-10	9.072900e-10	-8.464700e-11
diferenca	-> 1.360127e-12		

J = 10, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.538200e-12	1.379461e-09	1.489298e-09
ansys-5.0	-> 4.859000e-11	-7.254300e-11	4.258800e-11
diferenca	-> 2.050392e-09		

J = 12, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 4.793061e-09	-2.588461e-08	4.651561e-09
ansys-5.0	-> 4.351400e-13	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 2.673236e-08		

J = 12, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 3.302881e-10	-1.793891e-11	2.728257e-10
ansys-5.0	-> 1.044500e-10	-8.967900e-11	9.820000e-11
diferenca	-> 2.943529e-10		

J = 12, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.239324e-09	-2.379309e-09	3.878436e-09
ansys-5.0	-> 2.238300e-09	-2.382800e-09	3.873600e-09
diferenca	-> 6.051657e-12		

J = 12, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.850047e-08	6.223422e-08	7.064266e-08
ansys-5.0	-> -4.847600e-08	6.215900e-08	7.064600e-08
diferenca	-> 7.917061e-11		

J = 12, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.051097e-05	9.830424e-06	-1.671223e-06
ansys-5.0	-> -1.051100e-05	9.830500e-06	-1.671300e-06
diferenca	-> 1.122720e-10		

J = 12, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.486502e-05	6.132251e-05	-1.007393e-05
ansys-5.0	-> -6.486500e-05	6.132200e-05	-1.007400e-05
diferenca	-> 5.151699e-10		

J = 12, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.511498e-04	2.095475e-04	-5.478485e-06
ansys-5.0	-> -2.511500e-04	2.095500e-04	-5.478300e-06
diferenca	-> 2.514801e-09		

J = 12, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.816982e-04	5.634091e-04	-7.918559e-05
ansys-5.0	-> -7.817000e-04	5.634100e-04	-7.918500e-05
diferenca	-> 2.097165e-09		

J = 12, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.797479e-03	6.757168e-04	-5.294186e-04
ansys-5.0	-> -1.797500e-03	6.757200e-04	-5.294200e-04
diferenca	-> 2.128849e-08		

J = 12, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.584184e-03	-5.357171e-04	-8.544288e-04
ansys-5.0	-> -2.584200e-03	-5.357300e-04	-8.544300e-04
diferenca	-> 2.058762e-08		

J = 12, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.282155e-03	-6.178611e-04	-2.401387e-04
ansys-5.0	-> -2.282200e-03	-6.178700e-04	-2.401400e-04
diferenca	-> 4.589009e-08		

J = 12, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.286815e-03	-6.561850e-04	1.364718e-04
ansys-5.0	-> -2.286800e-03	-6.561900e-04	1.364700e-04
diferenca	-> 1.591352e-08		

J = 12, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.514910e-03	-7.570573e-04	6.246148e-04
ansys-5.0	-> -2.514900e-03	-7.570600e-04	6.246200e-04
diferenca	-> 1.159008e-08		

J = 12, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.272356e-03	5.813810e-04	6.913270e-04
ansys-5.0	-> -2.272400e-03	5.813900e-04	6.913300e-04

diferenca -> 4.501111e-08

J = 12, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.338789e-03	8.249647e-04	2.296687e-07
ansys-5.0	-> -1.338800e-03	8.249700e-04	2.293500e-07
diferenca	-> 1.221440e-08		

J = 12, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.162905e-04	5.826181e-04	-1.052161e-05
ansys-5.0	-> -7.162900e-04	5.826200e-04	-1.052200e-05
diferenca	-> 2.003023e-09		

J = 12, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.121868e-04	2.731858e-04	-2.167607e-05
ansys-5.0	-> -3.121900e-04	2.731900e-04	-2.167600e-05
diferenca	-> 5.280615e-09		

J = 12, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.508937e-05	1.973479e-05	-2.148317e-05
ansys-5.0	-> -3.508900e-05	1.973400e-05	-2.148300e-05
diferenca	-> 8.887632e-10		

J = 12, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.614591e-06	-3.973119e-07	-4.450151e-06
ansys-5.0	-> -1.614600e-06	-3.975800e-07	-4.450200e-06
diferenca	-> 2.726896e-10		

J = 12, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.548825e-07	-1.847275e-07	-3.325335e-07
ansys-5.0	-> 1.548800e-07	-1.847400e-07	-3.325400e-07
diferenca	-> 1.430909e-11		

J = 12, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 9.827740e-09	-8.020648e-09	-6.093220e-09

ansys-5.0 -> 9.828400e-09 -8.022100e-09 -6.093900e-09
diferenca -> 1.733870e-12

J = 12, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> 1.605880e-10 -1.444363e-10 -2.280368e-11
ansys-5.0 -> 1.606200e-10 -1.444100e-10 -2.280300e-11
diferenca -> 4.142647e-14

J = 12, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 2.995739e-12 -4.436599e-12 -1.650826e-12
ansys-5.0 -> 2.995700e-12 -4.438200e-12 -1.645400e-12
diferenca -> 5.657402e-15

J = 12, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 4.008425e-11 -1.644924e-11 5.233634e-12
ansys-5.0 -> 4.006600e-11 -1.645700e-11 5.223000e-12
diferenca -> 2.250249e-14

J = 12, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.117315e-11 1.296210e-11 1.272131e-12
ansys-5.0 -> -1.142600e-11 1.218500e-11 2.545400e-13
diferenca -> 1.305109e-12

J = 12, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> 7.013155e-11 2.967505e-09 3.782503e-09
ansys-5.0 -> 1.011200e-12 -1.544500e-12 8.842500e-13
diferenca -> 4.808396e-09

J = 14, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> 7.169390e-10 -5.734851e-09 2.558066e-09
ansys-5.0 -> -1.575300e-14 0.000000e+00 0.000000e+00
diferenca -> 6.320304e-09

J = 14, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz

sistema -> 2.224256e-11 1.856078e-12 2.529518e-11
ansys-5.0 -> 3.790100e-12 -3.103600e-12 3.053600e-12
diferenca -> 2.932200e-11

J = 14, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)
ur ut uz
sistema -> 2.599519e-10 -2.515275e-10 3.201441e-10
ansys-5.0 -> 2.601700e-10 -2.513700e-10 3.199800e-10
diferenca -> 3.151233e-13

J = 14, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
ur ut uz
sistema -> -9.245695e-10 4.488532e-09 1.215036e-08
ansys-5.0 -> -9.186100e-10 4.472800e-09 1.215100e-08
diferenca -> 1.683511e-11

J = 14, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.378430e-06 2.253989e-06 -2.840444e-07
ansys-5.0 -> -2.378400e-06 2.254000e-06 -2.840600e-07
diferenca -> 3.555784e-11

J = 14, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.155734e-05 2.059216e-05 -2.572304e-06
ansys-5.0 -> -2.155700e-05 2.059200e-05 -2.572300e-06
diferenca -> 3.757872e-10

J = 14, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.156807e-04 9.853142e-05 -1.828426e-06
ansys-5.0 -> -1.156800e-04 9.853100e-05 -1.828300e-06
diferenca -> 8.260000e-10

J = 14, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
ur ut uz
sistema -> -4.653770e-04 3.533057e-04 -4.776639e-05
ansys-5.0 -> -4.653800e-04 3.533100e-04 -4.776600e-05
diferenca -> 5.257575e-09

J = 14, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.341345e-03	5.691219e-04	-3.995228e-04
ansys-5.0	-> -1.341300e-03	5.691300e-04	-3.995200e-04
diferenca	-> 4.580884e-08		

J = 14, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.139576e-03	-4.506542e-04	-6.914138e-04
ansys-5.0	-> -2.139600e-03	-4.506700e-04	-6.914200e-04
diferenca	-> 2.939524e-08		

J = 14, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.904354e-03	-4.822184e-04	-1.716722e-04
ansys-5.0	-> -1.904400e-03	-4.822300e-04	-1.716700e-04
diferenca	-> 4.749105e-08		

J = 14, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.897959e-03	-5.089904e-04	7.651080e-05
ansys-5.0	-> -1.898000e-03	-5.089900e-04	7.651100e-05
diferenca	-> 4.100244e-08		

J = 14, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.033216e-03	-6.097209e-04	4.474610e-04
ansys-5.0	-> -2.033200e-03	-6.097300e-04	4.474600e-04
diferenca	-> 1.843394e-08		

J = 14, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.696604e-03	5.203785e-04	5.253052e-04
ansys-5.0	-> -1.696600e-03	5.203800e-04	5.253100e-04
diferenca	-> 6.425730e-09		

J = 14, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.188355e-04	5.224217e-04	-1.810851e-06
ansys-5.0	-> -8.188400e-04	5.224200e-04	-1.811100e-06
diferenca	-> 4.816846e-09		

J = 14, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -3.879529e-04 3.250099e-04 -1.358416e-06
 ansys-5.0 -> -3.879500e-04 3.250100e-04 -1.358400e-06
 diferencia -> 2.901768e-09

J = 14, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.464827e-04 1.314191e-04 -7.017983e-06
 ansys-5.0 -> -1.464800e-04 1.314200e-04 -7.018000e-06
 diferencia -> 2.846101e-09

J = 14, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.108956e-05 6.754894e-06 -6.840102e-06
 ansys-5.0 -> -1.109000e-05 6.754600e-06 -6.840100e-06
 diferencia -> 5.291881e-10

J = 14, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.153566e-07 -1.709404e-07 -9.720569e-07
 ansys-5.0 -> -2.153600e-07 -1.710200e-07 -9.720800e-07
 diferencia -> 8.295378e-11

J = 14, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
 ur ut uz
 sistema -> 3.212386e-08 -3.587397e-08 -5.010047e-08
 ansys-5.0 -> 3.212400e-08 -3.587600e-08 -5.010200e-08
 diferencia -> 2.545859e-12

J = 14, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
 ur ut uz
 sistema -> 9.682144e-10 -7.808039e-10 -4.546199e-10
 ansys-5.0 -> 9.683100e-10 -7.809100e-10 -4.546500e-10
 diferencia -> 1.459540e-13

J = 14, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> 5.410362e-12 -4.040614e-12 1.199541e-12
 ansys-5.0 -> 5.414800e-12 -4.039500e-12 1.198700e-12
 diferencia -> 4.652324e-15

J = 14, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.333082e-14	3.045480e-14	-5.075012e-14
ansys-5.0	-> -9.350700e-14	3.053700e-14	-5.056600e-14
diferenca	-> 2.677618e-16		

J = 14, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.230498e-12	-1.647857e-12	1.538736e-13
ansys-5.0	-> 2.228800e-12	-1.648500e-12	1.514400e-13
diferenca	-> 3.036291e-15		

J = 14, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 7.891023e-15	2.312364e-13	5.577729e-13
ansys-5.0	-> -7.976800e-14	7.357200e-14	7.417600e-14
diferenca	-> 5.161474e-13		

J = 14, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.453633e-11	9.451120e-10	9.337118e-10
ansys-5.0	-> -1.484000e-14	4.294300e-15	3.999700e-15
diferenca	-> 1.329666e-09		

J = 16, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 7.607490e-10	-3.721572e-09	-1.129347e-10
ansys-5.0	-> 1.382700e-16	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 3.800209e-09		

J = 16, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 5.401732e-12	-4.736311e-13	1.203720e-11
ansys-5.0	-> 1.133800e-13	-8.722900e-14	7.745700e-14
diferenca	-> 1.308249e-11		

J = 16, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.482927e-11	-2.266281e-11	2.416920e-11
ansys-5.0	-> 2.489800e-11	-2.259400e-11	2.414400e-11

diferenca -> 1.004673e-13

J = 16, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	6.665543e-10	6.672432e-11	1.909815e-09
ansys-5.0 ->	6.678200e-10	6.375300e-11	1.910000e-09
diferenca ->	3.234960e-12		

J = 16, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	-5.295568e-07	5.106452e-07	-4.682685e-08
ansys-5.0 ->	-5.295600e-07	5.106600e-07	-4.683100e-08
diferenca ->	1.570040e-11		

J = 16, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	-7.157797e-06	6.928452e-06	-6.364349e-07
ansys-5.0 ->	-7.157800e-06	6.928500e-06	-6.364300e-07
diferenca ->	4.834263e-11		

J = 16, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema ->	-5.376822e-05	4.677989e-05	-6.651611e-07
ansys-5.0 ->	-5.376800e-05	4.678000e-05	-6.650700e-07
diferenca ->	2.622960e-10		

J = 16, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema ->	-2.814929e-04	2.223190e-04	-2.779812e-05
ansys-5.0 ->	-2.814900e-04	2.223200e-04	-2.779800e-05
diferenca ->	3.069919e-09		

J = 16, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema ->	-1.028965e-03	4.782423e-04	-3.039556e-04
ansys-5.0 ->	-1.029000e-03	4.782500e-04	-3.039600e-04
diferenca ->	3.610609e-08		

J = 16, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema ->	-1.825759e-03	-3.910936e-04	-5.675996e-04

ansys-5.0 -> -1.825800e-03 -3.911100e-04 -5.676100e-04
diferenca -> 4.536651e-08

J = 16, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.642872e-03 -3.918385e-04 -1.203348e-04
ansys-5.0 -> -1.642900e-03 -3.918500e-04 -1.203400e-04
diferenca -> 3.071303e-08

J = 16, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.635740e-03 -4.176724e-04 4.466239e-05
ansys-5.0 -> -1.635700e-03 -4.176700e-04 4.466200e-05
diferenca -> 4.007383e-08

J = 16, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.717613e-03 -5.140691e-04 3.323536e-04
ansys-5.0 -> -1.717600e-03 -5.140700e-04 3.323600e-04
diferenca -> 1.451792e-08

J = 16, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.324498e-03 4.651949e-04 4.110180e-04
ansys-5.0 -> -1.324500e-03 4.652000e-04 4.110200e-04
diferenca -> 5.831809e-09

J = 16, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -5.131971e-04 3.358978e-04 -3.218925e-06
ansys-5.0 -> -5.132000e-04 3.359000e-04 -3.219100e-06
diferenca -> 3.644259e-09

J = 16, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.138745e-04 1.831401e-04 7.853654e-07
ansys-5.0 -> -2.138700e-04 1.831400e-04 7.853700e-07
diferenca -> 4.501113e-09

J = 16, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
ur ut uz

sistema -> -6.965174e-05 6.373617e-05 -2.190649e-06
ansys-5.0 -> -6.965200e-05 6.373600e-05 -2.190700e-06
diferenca -> 3.148031e-10

J = 16, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.580542e-06 2.378547e-06 -2.239336e-06
ansys-5.0 -> -3.580500e-06 2.378400e-06 -2.239300e-06
diferenca -> 1.570637e-10

J = 16, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.293583e-08 -5.638945e-08 -2.157568e-07
ansys-5.0 -> -1.293800e-08 -5.641200e-08 -2.157600e-07
diferenca -> 2.287906e-11

J = 16, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz
sistema -> 6.102512e-09 -6.440383e-09 -7.433507e-09
ansys-5.0 -> 6.102400e-09 -6.440500e-09 -7.433700e-09
diferenca -> 2.519563e-13

J = 16, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz
sistema -> 8.642824e-11 -6.795983e-11 -2.820960e-11
ansys-5.0 -> 8.644800e-11 -6.795700e-11 -2.819800e-11
diferenca -> 2.308737e-14

J = 16, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> 2.351961e-13 -6.196348e-14 1.312692e-13
ansys-5.0 -> 2.354500e-13 -6.186900e-14 1.312800e-13
diferenca -> 2.711242e-16

J = 16, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -6.501350e-15 7.498641e-15 -3.911245e-15
ansys-5.0 -> -6.494100e-15 7.475900e-15 -3.940200e-15
diferenca -> 3.752476e-17

J = 16, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.146924e-14	-4.578143e-14	-4.987869e-15
ansys-5.0	-> 2.131500e-14	-4.596300e-14	-5.485600e-15
diferenca	-> 5.518096e-16		

J = 16, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.131586e-14	1.079856e-13	2.605259e-13
ansys-5.0	-> -7.389500e-16	-7.381100e-16	3.114200e-15
diferenca	-> 2.802999e-13		

J = 16, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.242190e-11	4.760766e-10	4.977702e-10
ansys-5.0	-> -9.321300e-16	8.476500e-16	-4.076900e-16
diferenca	-> 6.949571e-10		

J = 18, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.968082e-11	-5.777364e-11	3.232802e-10
ansys-5.0	-> 1.668200e-17	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 3.307906e-10		

J = 18, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.303025e-14	1.325390e-14	-8.286746e-14
ansys-5.0	-> 2.849700e-15	-2.063200e-15	1.973200e-15
diferenca	-> 1.027381e-13		

J = 18, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.046807e-12	-1.739983e-12	1.594083e-12
ansys-5.0	-> 2.045800e-12	-1.737300e-12	1.592700e-12
diferenca	-> 3.182016e-15		

J = 18, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.850286e-10	-5.661052e-11	2.715573e-10
ansys-5.0	-> 1.852600e-10	-5.711900e-11	2.716000e-10
diferenca	-> 5.602867e-13		

J = 18, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.138149e-07 1.124563e-07 -7.502421e-09
 ansys-5.0 -> -1.138200e-07 1.124600e-07 -7.503700e-09
 diferencia -> 6.429296e-12

J = 18, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.344789e-06 2.309857e-06 -1.436450e-07
 ansys-5.0 -> -2.344800e-06 2.309900e-06 -1.436500e-07
 diferencia -> 4.466542e-11

J = 18, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -2.498036e-05 2.220582e-05 -2.256856e-07
 ansys-5.0 -> -2.498000e-05 2.220600e-05 -2.256400e-07
 diferencia -> 4.050671e-10

J = 18, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -1.716973e-04 1.399846e-04 -1.570267e-05
 ansys-5.0 -> -1.717000e-04 1.399800e-04 -1.570300e-05
 diferencia -> 5.344053e-09

J = 18, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -8.046852e-04 4.021792e-04 -2.337137e-04
 ansys-5.0 -> -8.046900e-04 4.021800e-04 -2.337200e-04
 diferencia -> 7.960528e-09

J = 18, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
 ur ut uz
 sistema -> -1.591474e-03 -3.447596e-04 -4.735130e-04
 ansys-5.0 -> -1.591500e-03 -3.447800e-04 -4.735200e-04
 diferencia -> 3.378106e-08

J = 18, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -1.448239e-03 -3.269899e-04 -8.429357e-05
 ansys-5.0 -> -1.448200e-03 -3.270000e-04 -8.429500e-05
 diferencia -> 4.031197e-08

J = 18, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.443312e-03	-3.563754e-04	2.652232e-05
ansys-5.0	-> -1.443300e-03	-3.563800e-04	2.652200e-05
diferenca	-> 1.285544e-08		

J = 18, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.493297e-03	-4.466518e-04	2.534663e-04
ansys-5.0	-> -1.493300e-03	-4.466600e-04	2.534700e-04
diferenca	-> 9.483143e-09		

J = 18, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.065420e-03	4.153426e-04	3.283230e-04
ansys-5.0	-> -1.065400e-03	4.153500e-04	3.283300e-04
diferenca	-> 2.244460e-08		

J = 18, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.262143e-04	2.178055e-04	-3.724672e-06
ansys-5.0	-> -3.262100e-04	2.178000e-04	-3.724800e-06
diferenca	-> 6.982577e-09		

J = 18, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.188452e-04	1.035198e-04	9.340829e-07
ansys-5.0	-> -1.188500e-04	1.035200e-04	9.340900e-07
diferenca	-> 4.804170e-09		

J = 18, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.316950e-05	3.087049e-05	-6.534513e-07
ansys-5.0	-> -3.317000e-05	3.087100e-05	-6.534600e-07
diferenca	-> 7.142658e-10		

J = 18, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.160739e-06	8.440224e-07	-7.492777e-07
ansys-5.0	-> -1.160700e-06	8.439500e-07	-7.492800e-07

diferenca -> 8.226816e-11

J = 18, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	6.184850e-09	-1.726340e-08	-4.839571e-08
ansys-5.0 ->	6.183700e-09	-1.726900e-08	-4.839700e-08
diferenca ->	5.860597e-12		

J = 18, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	1.079732e-09	-1.091032e-09	-1.069083e-09
ansys-5.0 ->	1.079700e-09	-1.091000e-09	-1.069100e-09
diferenca ->	4.834253e-14		

J = 18, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	6.771196e-12	-5.074519e-12	-1.015900e-12
ansys-5.0 ->	6.772800e-12	-5.072400e-12	-1.012800e-12
diferenca ->	4.083256e-15		

J = 18, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	1.836410e-14	-2.173583e-15	4.876862e-15
ansys-5.0 ->	1.835400e-14	-2.156200e-15	4.887400e-15
diferenca ->	2.269864e-17		

J = 18, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	8.092258e-17	1.694409e-16	-3.162817e-16
ansys-5.0 ->	7.874300e-17	1.714800e-16	-3.169900e-16
diferenca ->	3.067603e-18		

J = 18, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	-5.851073e-15	1.639244e-15	-1.228956e-15
ansys-5.0 ->	-5.819200e-15	1.604900e-15	-1.241900e-15
diferenca ->	4.861014e-17		

J = 18, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema ->	2.181924e-16	8.317510e-15	1.466372e-14

ansys-5.0 -> 3.043200e-17 -3.564600e-17 7.485400e-17
diferenca -> 1.681206e-14

J = 18, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> 3.547316e-13 3.961595e-11 1.217342e-11
ansys-5.0 -> 3.655400e-18 1.408300e-18 -1.389800e-17
diferenca -> 4.144565e-11

J = 20, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> 1.369144e-12 -2.797423e-12 -6.312814e-12
ansys-5.0 -> -9.745400e-19 0.000000e+00 0.000000e+00
diferenca -> 7.039301e-12

J = 20, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> 2.234463e-15 -1.755587e-15 5.726433e-15
ansys-5.0 -> 7.907400e-17 -6.411900e-17 9.304600e-17
diferenca -> 6.264329e-15

J = 20, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)
ur ut uz
sistema -> 1.428076e-13 -1.093553e-13 8.579143e-14
ansys-5.0 -> 1.426200e-13 -1.092500e-13 8.564700e-14
diferenca -> 2.591175e-16

J = 20, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
ur ut uz
sistema -> 3.247603e-11 -1.343275e-11 3.377255e-11
ansys-5.0 -> 3.251100e-11 -1.350900e-11 3.378000e-11
diferenca -> 8.421678e-14

J = 20, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.306017e-08 2.360496e-08 -1.220990e-09
ansys-5.0 -> -2.306100e-08 2.360700e-08 -1.221400e-09
diferenca -> 2.240223e-12

J = 20, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
ur ut uz

sistema -> -7.493223e-07 7.558375e-07 -2.553540e-08
ansys-5.0 -> -7.493200e-07 7.558500e-07 -2.553700e-08
diferenca -> 1.281015e-11

J = 20, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.152275e-05 1.047266e-05 -5.248972e-08
ansys-5.0 -> -1.152300e-05 1.047300e-05 -5.246600e-08
diferenca -> 4.226850e-10

J = 20, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.051089e-04 8.806913e-05 -8.605579e-06
ansys-5.0 -> -1.051100e-04 8.806900e-05 -8.605500e-06
diferenca -> 1.110469e-09

J = 20, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> -6.380723e-04 3.385700e-04 -1.814500e-04
ansys-5.0 -> -6.380800e-04 3.385700e-04 -1.814500e-04
diferenca -> 7.700000e-09

J = 20, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.409136e-03 -3.064555e-04 -4.006693e-04
ansys-5.0 -> -1.409100e-03 -3.064800e-04 -4.006800e-04
diferenca -> 4.484128e-08

J = 20, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.295995e-03 -2.777371e-04 -5.947530e-05
ansys-5.0 -> -1.296000e-03 -2.777500e-04 -5.947600e-05
diferenca -> 1.385280e-08

J = 20, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.293774e-03 -3.121081e-04 1.566473e-05
ansys-5.0 -> -1.293800e-03 -3.121100e-04 1.566400e-05
diferenca -> 2.607955e-08

J = 20, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.323992e-03	-3.956912e-04	1.970630e-04
ansys-5.0	-> -1.324000e-03	-3.957000e-04	1.970700e-04
diferenca	-> 1.380000e-08		

J = 20, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.745818e-04	3.704174e-04	2.661711e-04
ansys-5.0	-> -8.745800e-04	3.704200e-04	2.661700e-04
diferenca	-> 3.348134e-09		

J = 20, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.089741e-04	1.418482e-04	-3.617564e-06
ansys-5.0	-> -2.089700e-04	1.418500e-04	-3.617600e-06
diferenca	-> 4.477867e-09		

J = 20, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.617549e-05	5.846355e-05	6.611662e-07
ansys-5.0	-> -6.617600e-05	5.846400e-05	6.611700e-07
diferenca	-> 6.801577e-10		

J = 20, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.569756e-05	1.484221e-05	-1.901824e-07
ansys-5.0	-> -1.569800e-05	1.484200e-05	-1.901800e-07
diferenca	-> 4.875508e-10		

J = 20, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.712303e-07	2.967093e-07	-2.557699e-07
ansys-5.0	-> -3.712200e-07	2.966800e-07	-2.557700e-07
diferenca	-> 3.105785e-11		

J = 20, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 3.786146e-09	-5.144472e-09	-1.090936e-08
ansys-5.0	-> 3.785600e-09	-5.145900e-09	-1.090900e-08
diferenca	-> 1.570637e-12		

J = 20, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.770487e-10	-1.732320e-10	-1.446633e-10
ansys-5.0	-> 1.770500e-10	-1.732100e-10	-1.446700e-10
diferenca	-> 2.303432e-14		

J = 20, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 4.269549e-13	-2.854619e-13	5.972166e-14
ansys-5.0	-> 4.270500e-13	-2.855100e-13	5.962600e-14
diferenca	-> 1.432077e-16		

J = 20, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.069172e-15	-2.682184e-16	-3.770432e-17
ansys-5.0	-> 1.076100e-15	-2.717500e-16	-3.994300e-17
diferenca	-> 8.092037e-18		

J = 20, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.100576e-17	-9.663500e-18	-7.320656e-18
ansys-5.0	-> 2.101100e-17	-9.703600e-18	-7.314300e-18
diferenca	-> 4.093735e-20		

J = 20, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.068411e-16	2.827111e-16	-1.075139e-16
ansys-5.0	-> -5.816700e-16	2.665300e-16	-1.027000e-16
diferenca	-> 3.030818e-17		

J = 20, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 5.812232e-18	-1.291439e-17	-1.169913e-17
ansys-5.0	-> 5.843600e-18	-3.853800e-18	-1.427000e-19
diferenca	-> 1.468490e-17		

J = 20, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.506798e-13	-1.359422e-13	4.413120e-13
ansys-5.0	-> 9.507400e-19	-8.206000e-19	-1.714700e-19
diferenca	-> 4.857378e-13		

J = 22, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.381654e-14	2.908241e-13	-2.188667e-14
ansys-5.0	-> -7.956900e-20	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 2.949196e-13		

J = 22, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.073186e-16	7.959894e-17	-1.948558e-16
ansys-5.0	-> 3.006200e-18	-2.908500e-18	4.756900e-18
diferenca	-> 2.425372e-16		

J = 22, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 7.912554e-15	-5.040462e-15	3.324580e-15
ansys-5.0	-> 7.902100e-15	-5.021500e-15	3.315700e-15
diferenca	-> 2.340295e-17		

J = 22, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 4.064766e-12	-1.822316e-12	3.360471e-12
ansys-5.0	-> 4.070900e-12	-1.828900e-12	3.358400e-12
diferenca	-> 9.233854e-15		

J = 22, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.243743e-09	4.586213e-09	-2.286832e-10
ansys-5.0	-> -4.244000e-09	4.586700e-09	-2.288000e-10
diferenca	-> 5.629034e-13		

J = 22, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.306431e-07	2.403244e-07	-1.169611e-09
ansys-5.0	-> -2.306400e-07	2.403300e-07	-1.170700e-09
diferenca	-> 6.492759e-12		

J = 22, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.246888e-06	4.883700e-06	8.788074e-09
ansys-5.0	-> -5.246900e-06	4.883700e-06	8.798700e-09

diferenca -> 1.602847e-11

J = 22, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.436738e-05	5.530450e-05	-4.540179e-06
ansys-5.0	-> -6.436700e-05	5.530400e-05	-4.540200e-06
diferenca	-> 6.283637e-10		

J = 22, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.111512e-04	2.852143e-04	-1.419798e-04
ansys-5.0	-> -5.111500e-04	2.852200e-04	-1.419800e-04
diferenca	-> 5.828379e-09		

J = 22, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.262693e-03	-2.736833e-04	-3.430122e-04
ansys-5.0	-> -1.262700e-03	-2.737100e-04	-3.430200e-04
diferenca	-> 2.868327e-08		

J = 22, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.172721e-03	-2.387666e-04	-4.243393e-05
ansys-5.0	-> -1.172700e-03	-2.387800e-04	-4.243500e-05
diferenca	-> 2.493401e-08		

J = 22, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.173010e-03	-2.781622e-04	8.945030e-06
ansys-5.0	-> -1.173000e-03	-2.781700e-04	8.944200e-06
diferenca	-> 1.270940e-08		

J = 22, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.190529e-03	-3.551035e-04	1.553838e-04
ansys-5.0	-> -1.190500e-03	-3.551100e-04	1.553900e-04
diferenca	-> 3.035935e-08		

J = 22, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.280332e-04	3.300331e-04	2.181038e-04

ansys-5.0 -> -7.280400e-04 3.300400e-04 2.181100e-04
diferenca -> 1.150174e-08

J = 22, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.343617e-04 9.253753e-05 -3.201815e-06
ansys-5.0 -> -1.343600e-04 9.253600e-05 -3.201800e-06
diferenca -> 2.287165e-09

J = 22, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.678247e-05 3.290567e-05 3.948517e-07
ansys-5.0 -> -3.678300e-05 3.290600e-05 3.948600e-07
diferenca -> 6.243948e-10

J = 22, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
ur ut uz
sistema -> -7.338491e-06 7.051664e-06 -6.022665e-08
ansys-5.0 -> -7.338500e-06 7.051700e-06 -6.022300e-08
diferenca -> 3.728703e-11

J = 22, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.146238e-07 1.016545e-07 -8.902729e-08
ansys-5.0 -> -1.146200e-07 1.016400e-07 -8.902600e-08
diferenca -> 1.504507e-11

J = 22, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> 1.477573e-09 -1.506779e-09 -2.449440e-09
ansys-5.0 -> 1.477300e-09 -1.507100e-09 -2.449400e-09
diferenca -> 4.232848e-13

J = 22, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz
sistema -> 2.637391e-11 -2.505808e-11 -1.737848e-11
ansys-5.0 -> 2.637300e-11 -2.505200e-11 -1.737800e-11
diferenca -> 6.166433e-15

J = 22, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz

sistema -> 1.561585e-14 -6.269515e-15 1.561689e-14
ansys-5.0 -> 1.561900e-14 -6.225500e-15 1.566000e-14
diferenca -> 6.169048e-17

J = 22, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -4.178222e-17 1.906481e-17 -8.442641e-19
ansys-5.0 -> -4.209900e-17 1.911200e-17 -9.642400e-19
diferenca -> 3.420098e-19

J = 22, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 6.212924e-19 -5.521304e-19 1.001539e-18
ansys-5.0 -> 5.664000e-19 -5.244200e-19 1.004200e-18
diferenca -> 6.154773e-20

J = 22, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -3.603704e-17 1.878266e-17 -5.693621e-18
ansys-5.0 -> -3.222600e-17 1.672000e-17 -5.087200e-18
diferenca -> 4.375653e-18

J = 22, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 4.649018e-20 -3.499990e-18 -3.816426e-18
ansys-5.0 -> -1.323600e-19 -4.148800e-20 -1.553500e-19
diferenca -> 5.039514e-18

J = 22, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> 1.316200e-14 -4.929024e-14 -3.972700e-14
ansys-5.0 -> 3.078900e-21 -6.430400e-21 -2.542300e-22
diferenca -> 6.466065e-14

J = 24, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> 6.802559e-16 -2.986506e-13 3.786561e-13
ansys-5.0 -> -1.501200e-21 0.000000e+00 0.000000e+00
diferenca -> 4.822583e-13

J = 24, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.105031e-16	-1.569175e-17	5.482619e-17
ansys-5.0	-> 7.508200e-20	-6.733800e-20	1.007600e-19
diferenca	-> 1.242310e-16		

J = 24, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.687146e-16	-1.232728e-16	7.229390e-17
ansys-5.0	-> 2.696400e-16	-1.224900e-16	7.312100e-17
diferenca	-> 1.467391e-18		

J = 24, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.738593e-13	-1.055102e-13	1.864811e-13
ansys-5.0	-> 2.744300e-13	-1.057500e-13	1.860800e-13
diferenca	-> 7.376203e-16		

J = 24, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.571214e-10	7.807400e-10	-5.602865e-11
ansys-5.0	-> -6.571800e-10	7.808900e-10	-5.606300e-11
diferenca	-> 1.646629e-13		

J = 24, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.718267e-08	7.329321e-08	1.938305e-09
ansys-5.0	-> -6.718400e-08	7.329600e-08	1.937600e-09
diferenca	-> 3.170177e-12		

J = 24, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.344404e-06	2.241658e-06	2.343226e-08
ansys-5.0	-> -2.344400e-06	2.241700e-06	2.343600e-08
diferenca	-> 4.235549e-11		

J = 24, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.932887e-05	3.463280e-05	-2.262869e-06
ansys-5.0	-> -3.932900e-05	3.463200e-05	-2.262800e-06
diferenca	-> 8.134255e-10		

J = 24, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
ur ut uz
sistema -> -4.126341e-04 2.403334e-04 -1.117583e-04
ansys-5.0 -> -4.126400e-04 2.403400e-04 -1.117600e-04
diferenca -> 9.014433e-09

J = 24, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
ur ut uz
sistema -> -1.142203e-03 -2.450848e-04 -2.964434e-04
ansys-5.0 -> -1.142200e-03 -2.451100e-04 -2.964500e-04
diferenca -> 2.622213e-08

J = 24, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.070375e-03 -2.070277e-04 -3.069764e-05
ansys-5.0 -> -1.070400e-03 -2.070400e-04 -3.069800e-05
diferenca -> 2.786431e-08

J = 24, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.072862e-03 -2.509128e-04 4.702726e-06
ansys-5.0 -> -1.072900e-03 -2.509200e-04 4.701700e-06
diferenca -> 3.868970e-08

J = 24, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.081961e-03 -3.215985e-04 1.238067e-04
ansys-5.0 -> -1.082000e-03 -3.216000e-04 1.238100e-04
diferenca -> 3.916810e-08

J = 24, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -6.120386e-04 2.938213e-04 1.801266e-04
ansys-5.0 -> -6.120400e-04 2.938300e-04 1.801300e-04
diferenca -> 9.445105e-09

J = 24, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -8.646214e-05 6.035957e-05 -2.679271e-06
ansys-5.0 -> -8.646200e-05 6.035800e-05 -2.679300e-06
diferenca -> 1.576496e-09

J = 24, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.035038e-05	1.842279e-05	2.143007e-07
ansys-5.0	-> -2.035000e-05	1.842300e-05	2.143100e-07
diferenca	-> 4.342655e-10		

J = 24, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.369739e-06	3.296962e-06	-2.583283e-08
ansys-5.0	-> -3.369800e-06	3.297000e-06	-2.582900e-08
diferenca	-> 7.196992e-11		

J = 24, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.305128e-08	3.329632e-08	-3.153777e-08
ansys-5.0	-> -3.305000e-08	3.329000e-08	-3.153700e-08
diferenca	-> 6.494128e-12		

J = 24, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 4.886282e-10	-4.307226e-10	-5.386380e-10
ansys-5.0	-> 4.885500e-10	-4.307600e-10	-5.386100e-10
diferenca	-> 9.109336e-14		

J = 24, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 3.440192e-12	-3.097816e-12	-1.609423e-12
ansys-5.0	-> 3.439600e-12	-3.095900e-12	-1.608600e-12
diferenca	-> 2.167683e-15		

J = 24, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -7.692816e-16	9.397196e-16	1.541376e-15
ansys-5.0	-> -7.572900e-16	9.477000e-16	1.545900e-15
diferenca	-> 1.509807e-17		

J = 24, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.559624e-17	7.892161e-18	2.053066e-18
ansys-5.0	-> -1.564200e-17	7.892800e-18	2.018200e-18

diferenca -> 5.753281e-20

J = 24, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.955478e-20	-3.971223e-21	7.780279e-20
ansys-5.0	-> -2.064600e-20	-6.345900e-21	7.184200e-20
diferenca	-> 6.508523e-21		

J = 24, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.197530e-18	6.992861e-19	-1.629599e-19
ansys-5.0	-> -1.016000e-18	5.947000e-19	-1.371800e-19
diferenca	-> 2.110829e-19		

J = 24, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.846984e-19	1.588392e-18	2.229346e-18
ansys-5.0	-> -2.835300e-20	1.410500e-20	-7.521300e-21
diferenca	-> 2.773122e-18		

J = 24, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.334951e-14	8.069734e-14	2.494213e-14
ansys-5.0	-> -4.730900e-22	4.732500e-22	2.725200e-25
diferenca	-> 8.551245e-14		

J = 26, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.688571e-15	1.143435e-14	1.165980e-15
ansys-5.0	-> 1.575000e-23	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 1.161702e-14		

J = 26, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -5.759212e-18	-1.500774e-18	1.727919e-18
ansys-5.0	-> 1.291600e-21	-1.930100e-21	2.112600e-21
diferenca	-> 6.197446e-18		

J = 26, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.541406e-18	6.276354e-19	1.138305e-18

ansys-5.0 -> -4.634600e-18 5.581000e-19 9.732000e-19
diferenca -> 2.019405e-19

J = 26, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)
 ur ut uz
sistema -> -2.399465e-14 2.107871e-14 -1.675275e-14
ansys-5.0 -> -2.408000e-14 2.117600e-14 -1.675900e-14
diferenca -> 1.295725e-16

J = 26, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)
 ur ut uz
sistema -> -6.671258e-11 1.007713e-10 -1.677157e-11
ansys-5.0 -> -6.672700e-11 1.008100e-10 -1.677900e-11
diferenca -> 4.196226e-14

J = 26, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)
 ur ut uz
sistema -> -1.798441e-08 2.102378e-08 1.320465e-09
ansys-5.0 -> -1.798500e-08 2.102500e-08 1.320000e-09
diferenca -> 1.432733e-12

J = 26, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)
 ur ut uz
sistema -> -1.020342e-06 1.007478e-06 2.113547e-08
ansys-5.0 -> -1.020300e-06 1.007500e-06 2.113700e-08
diferenca -> 4.743776e-11

J = 26, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)
 ur ut uz
sistema -> -2.391912e-05 2.160634e-05 -1.020017e-06
ansys-5.0 -> -2.391900e-05 2.160600e-05 -1.020000e-06
diferenca -> 3.609557e-10

J = 26, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)
 ur ut uz
sistema -> -3.350677e-04 2.025133e-04 -8.834885e-05
ansys-5.0 -> -3.350700e-04 2.025200e-04 -8.835000e-05
diferenca -> 7.176524e-09

J = 26, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)
 ur ut uz

sistema -> -1.041173e-03 -2.198356e-04 -2.581871e-04
ansys-5.0 -> -1.041200e-03 -2.198600e-04 -2.582000e-04
diferenca -> 3.861049e-08

J = 26, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -9.837799e-04 -1.806365e-04 -2.257697e-05
ansys-5.0 -> -9.837900e-04 -1.806500e-04 -2.257800e-05
diferenca -> 1.689144e-08

J = 26, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -9.881988e-04 -2.282858e-04 2.002360e-06
ansys-5.0 -> -9.882000e-04 -2.282900e-04 2.001200e-06
diferenca -> 4.519469e-09

J = 26, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
ur ut uz
sistema -> -9.915815e-04 -2.932788e-04 9.943240e-05
ansys-5.0 -> -9.915900e-04 -2.932800e-04 9.943400e-05
diferenca -> 8.732125e-09

J = 26, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -5.181939e-04 2.614233e-04 1.496348e-04
ansys-5.0 -> -5.182000e-04 2.614300e-04 1.496400e-04
diferenca -> 1.044701e-08

J = 26, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -5.556543e-05 3.930812e-05 -2.160429e-06
ansys-5.0 -> -5.556500e-05 3.930700e-05 -2.160400e-06
diferenca -> 1.200059e-09

J = 26, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.117903e-05 1.024203e-05 1.079783e-07
ansys-5.0 -> -1.117900e-05 1.024200e-05 1.079800e-07
diferenca -> 4.246045e-11

J = 26, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.509988e-06	1.509812e-06	-1.580547e-08
ansys-5.0	-> -1.510000e-06	1.509800e-06	-1.580200e-08
diferenca	-> 1.732169e-11		

J = 26, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.321454e-09	1.013379e-08	-1.130643e-08
ansys-5.0	-> -8.321100e-09	1.013100e-08	-1.130600e-08
diferenca	-> 2.845051e-12		

J = 26, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.452624e-10	-1.181708e-10	-1.123277e-10
ansys-5.0	-> 1.452300e-10	-1.181700e-10	-1.123200e-10
diferenca	-> 3.331201e-14		

J = 26, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 3.712276e-13	-2.752604e-13	-5.489805e-14
ansys-5.0	-> 3.711400e-13	-2.745700e-13	-5.437300e-14
diferenca	-> 8.717818e-16		

J = 26, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.103481e-16	1.386147e-16	7.556444e-17
ansys-5.0	-> -2.103700e-16	1.385700e-16	7.479700e-17
diferenca	-> 7.690526e-19		

J = 26, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.404906e-18	7.689876e-19	2.183783e-19
ansys-5.0	-> -1.417900e-18	7.737500e-19	2.236500e-19
diferenca	-> 1.480930e-20		

J = 26, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.855542e-21	-9.639391e-23	1.657041e-21
ansys-5.0	-> -1.664200e-21	-5.361500e-22	2.785900e-21
diferenca	-> 1.699119e-21		

J = 26, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.966881e-21	8.964890e-21	-1.033715e-21
ansys-5.0	-> -1.136000e-20	1.178100e-20	-1.304800e-21
diferenca	-> 3.153529e-21		

J = 26, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 2.354853e-20	4.952351e-20	8.349613e-20
ansys-5.0	-> 2.048900e-21	-1.563700e-21	2.358700e-22
diferenca	-> 1.000220e-19		

J = 26, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 6.031984e-16	-1.921915e-15	-1.637702e-15
ansys-5.0	-> 3.077400e-24	-2.856700e-24	3.637900e-25
diferenca	-> 2.596088e-15		

J = 28, no 0 coord (1.500000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> 1.092304e-14	3.475272e-15	-1.183813e-13
ansys-5.0	-> 4.630000e-24	0.000000e+00	0.000000e+00
diferenca	-> 1.189350e-13		

J = 28, no 4 coord (2.530000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.027713e-17	-6.928639e-18	-5.995603e-18
ansys-5.0	-> 2.296300e-22	-3.582800e-22	3.383500e-22
diferenca	-> 1.376868e-17		

J = 28, no 8 coord (3.030004e+01, 8.660232e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.937500e-19	4.376518e-20	-8.913088e-20
ansys-5.0	-> -9.716300e-19	7.470200e-21	9.307500e-20
diferenca	-> 1.870978e-19		

J = 28, no 12 coord (3.530008e+01, 1.732046e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.040192e-14	7.410396e-15	-6.034504e-15
ansys-5.0	-> -1.041400e-14	7.431300e-15	-6.032800e-15
diferenca	-> 2.420345e-17		

J = 28, no 16 coord (4.384521e+01, 1.712103e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> 3.625491e-12	3.448056e-12	-5.106078e-12
ansys-5.0	-> 3.617400e-12	3.459100e-12	-5.110900e-12
diferenca	-> 1.451502e-14		

J = 28, no 20 coord (5.250548e+01, 1.212107e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.164824e-09	5.477040e-09	5.992436e-10
ansys-5.0	-> -4.165100e-09	5.477700e-09	5.990300e-10
diferenca	-> 7.465929e-13		

J = 28, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.281152e-07	4.402602e-07	1.469471e-08
ansys-5.0	-> -4.281200e-07	4.402700e-07	1.469500e-08
diferenca	-> 1.091623e-11		

J = 28, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.444439e-05	1.341404e-05	-3.658504e-07
ansys-5.0	-> -1.444400e-05	1.341400e-05	-3.658400e-07
diferenca	-> 3.921838e-10		

J = 28, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.733225e-04	1.706129e-04	-7.004538e-05
ansys-5.0	-> -2.733200e-04	1.706200e-04	-7.004600e-05
diferenca	-> 7.552774e-09		

J = 28, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.551682e-04	-1.973852e-04	-2.263211e-04
ansys-5.0	-> -9.551800e-04	-1.974100e-04	-2.263300e-04
diferenca	-> 2.887023e-08		

J = 28, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.094118e-04	-1.583512e-04	-1.693022e-05
ansys-5.0	-> -9.094200e-04	-1.583700e-04	-1.693100e-05

diferenca -> 2.052531e-08

J = 28, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.155685e-04	-2.090207e-04	2.881742e-07
ansys-5.0	-> -9.155700e-04	-2.090200e-04	2.869400e-07
diferenca	-> 2.064764e-09		

J = 28, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -9.150134e-04	-2.689620e-04	8.035158e-05
ansys-5.0	-> -9.150200e-04	-2.689600e-04	8.035200e-05
diferenca	-> 6.909153e-09		

J = 28, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -4.410430e-04	2.324885e-04	1.248486e-04
ansys-5.0	-> -4.410400e-04	2.324900e-04	1.248500e-04
diferenca	-> 3.634556e-09		

J = 28, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -3.559585e-05	2.552538e-05	-1.696534e-06
ansys-5.0	-> -3.559500e-05	2.552400e-05	-1.696500e-06
diferenca	-> 1.621128e-09		

J = 28, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.081733e-06	5.643620e-06	5.047013e-08
ansys-5.0	-> -6.081700e-06	5.643600e-06	5.047300e-08
diferenca	-> 3.869415e-11		

J = 28, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.546117e-07	6.730707e-07	-1.114603e-08
ansys-5.0	-> -6.546200e-07	6.730800e-07	-1.114300e-08
diferenca	-> 1.282813e-11		

J = 28, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.477345e-09	2.712471e-09	-4.057232e-09

ansys-5.0 -> -1.477300e-09 2.711400e-09 -4.056900e-09
diferenca -> 1.122181e-12

J = 28, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
ur ut uz
sistema -> 3.916724e-11 -3.033715e-11 -2.078557e-11
ansys-5.0 -> 3.915800e-11 -3.033600e-11 -2.078600e-11
diferenca -> 9.321212e-15

J = 28, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz
sistema -> 3.188753e-14 -3.391477e-15 1.652861e-14
ansys-5.0 -> 3.188300e-14 -3.319600e-15 1.655800e-14
diferenca -> 7.778558e-17

J = 28, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.147668e-17 1.039579e-17 1.597679e-18
ansys-5.0 -> -2.143200e-17 1.036900e-17 1.526800e-18
diferenca -> 8.796499e-20

J = 28, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -7.693312e-20 3.781791e-20 1.464503e-20
ansys-5.0 -> -7.608800e-20 3.788100e-20 1.596200e-20
diferenca -> 1.566084e-21

J = 28, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 6.744275e-22 8.409586e-22 1.877010e-21
ansys-5.0 -> -2.076700e-22 1.294800e-21 1.606500e-21
diferenca -> 1.028224e-21

J = 28, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 2.879833e-22 5.910387e-22 1.104115e-22
ansys-5.0 -> 5.359900e-23 1.094000e-21 4.442900e-23
diferenca -> 5.588021e-22

J = 28, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz

```
sistema -> 9.810453e-20 -8.692554e-19 -1.838313e-18
ansys-5.0 -> 2.469400e-22 -3.150500e-22 2.243400e-23
diferenca -> 2.035709e-18
```

```
J = 28, no 100 coord ( 1.500000e+01, 4.150001e+00)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> -7.065472e-17 -8.941279e-15 7.748818e-15
ansys-5.0 -> 1.053000e-24 -1.467800e-24 -2.861900e-25
diferenca -> 1.183198e-14
```

```
J = 30, no 0 coord ( 1.500000e+01, 0.000000e+00)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> -2.300806e-15 3.541824e-18 2.610745e-14
ansys-5.0 -> -2.211400e-25 0.000000e+00 0.000000e+00
diferenca -> 2.620864e-14
```

```
J = 30, no 4 coord ( 2.530000e+01, 0.000000e+00)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> 4.173346e-18 2.137692e-18 2.535708e-18
ansys-5.0 -> -1.964900e-23 3.018900e-23 -2.663700e-23
diferenca -> 5.330716e-18
```

```
J = 30, no 8 coord ( 3.030004e+01, 8.660232e+00)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> 8.917704e-20 1.831418e-20 9.731321e-20
ansys-5.0 -> 7.353600e-20 1.715100e-20 3.809300e-20
diferenca -> 6.126197e-20
```

```
J = 30, no 12 coord ( 3.530008e+01, 1.732046e+01)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> -1.272899e-15 9.670547e-16 -5.335560e-16
ansys-5.0 -> -1.272600e-15 9.680400e-16 -5.341400e-16
diferenca -> 1.183754e-18
```

```
J = 30, no 16 coord ( 4.384521e+01, 1.712103e+01)
```

```
      ur          ut          uz
sistema -> 4.057066e-12 -3.257324e-12 -1.386111e-12
ansys-5.0 -> 4.054900e-12 -3.254500e-12 -1.388700e-12
diferenca -> 4.401074e-15
```

```
J = 30, no 20 coord ( 5.250548e+01, 1.212107e+01)
```

	ur	ut	uz
sistema	-> -6.950694e-10	1.197261e-09	2.173674e-10
ansys-5.0	-> -6.952100e-10	1.197500e-09	2.172700e-10
diferenca	-> 2.938981e-13		

J = 30, no 24 coord (6.116576e+01, 7.121106e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -1.703823e-07	1.851442e-07	8.829609e-09
ansys-5.0	-> -1.703800e-07	1.851500e-07	8.829100e-09
diferenca	-> 6.260118e-12		

J = 30, no 28 coord (6.982603e+01, 2.121143e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.636625e-06	8.276607e-06	-4.068565e-08
ansys-5.0	-> -8.636600e-06	8.276400e-06	-4.067900e-08
diferenca	-> 2.086102e-10		

J = 30, no 32 coord (8.100000e+01, 0.000000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -2.237472e-04	1.436947e-04	-5.562746e-05
ansys-5.0	-> -2.237500e-04	1.437000e-04	-5.562800e-05
diferenca	-> 6.018438e-09		

J = 30, no 36 coord (8.800000e+01, 2.500000e+00)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.810437e-04	-1.773346e-04	-1.994755e-04
ansys-5.0	-> -8.810600e-04	-1.773600e-04	-1.994800e-04
diferenca	-> 3.051393e-08		

J = 30, no 40 coord (8.800000e+01, 1.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.447644e-04	-1.393082e-04	-1.298432e-05
ansys-5.0	-> -8.447700e-04	-1.393200e-04	-1.298500e-05
diferenca	-> 1.307908e-08		

J = 30, no 44 coord (8.800000e+01, 2.250000e+01)

	ur	ut	uz
sistema	-> -8.525237e-04	-1.923063e-04	-7.837270e-07
ansys-5.0	-> -8.525300e-04	-1.923100e-04	-7.850500e-07
diferenca	-> 7.424980e-09		

J = 30, no 48 coord (8.800000e+01, 3.250000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -8.492476e-04 -2.478505e-04 6.525253e-05
 ansys-5.0 -> -8.492500e-04 -2.478500e-04 6.525300e-05
 diferencia -> 2.496177e-09

J = 30, no 52 coord (8.300000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -3.768532e-04 2.066791e-04 1.045038e-04
 ansys-5.0 -> -3.768500e-04 2.066800e-04 1.045100e-04
 diferencia -> 7.034913e-09

J = 30, no 56 coord (7.200000e+01, 3.915000e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.268915e-05 1.650685e-05 -1.305343e-06
 ansys-5.0 -> -2.268900e-05 1.650600e-05 -1.305300e-06
 diferencia -> 8.642043e-10

J = 30, no 60 coord (6.700007e+01, 3.048971e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -3.267218e-06 3.075534e-06 2.144424e-08
 ansys-5.0 -> -3.267200e-06 3.075500e-06 2.144600e-08
 diferencia -> 3.851101e-11

J = 30, no 64 coord (6.200013e+01, 2.182941e+01)
 ur ut uz
 sistema -> -2.710220e-07 2.895419e-07 -7.744148e-09
 ansys-5.0 -> -2.710300e-07 2.895500e-07 -7.742300e-09
 diferencia -> 1.153365e-11

J = 30, no 68 coord (5.541989e+01, 2.043203e+01)
 ur ut uz
 sistema -> 8.014060e-11 5.464087e-10 -1.431712e-09
 ansys-5.0 -> 8.009500e-11 5.460400e-10 -1.431600e-09
 diferencia -> 3.880245e-13

J = 30, no 72 coord (4.675968e+01, 2.543210e+01)
 ur ut uz
 sistema -> 9.406770e-12 -7.006731e-12 -2.834507e-12
 ansys-5.0 -> 9.403900e-12 -7.003200e-12 -2.830400e-12
 diferencia -> 6.129626e-15

J = 30, no 76 coord (3.809946e+01, 3.043217e+01)
ur ut uz
sistema -> 3.074746e-15 4.578931e-15 3.452186e-15
ansys-5.0 -> 3.058700e-15 4.589400e-15 3.458000e-15
diferenca -> 2.002190e-17

J = 30, no 80 coord (2.943925e+01, 3.543223e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.079092e-18 1.065388e-18 6.109884e-19
ansys-5.0 -> -1.071600e-18 1.051900e-18 5.870700e-19
diferenca -> 2.846306e-20

J = 30, no 84 coord (2.050000e+01, 3.915000e+01)
ur ut uz
sistema -> -1.240936e-20 8.685500e-21 2.478405e-21
ansys-5.0 -> -9.889600e-21 7.170800e-21 1.458500e-21
diferenca -> 3.111866e-21

J = 30, no 88 coord (1.500000e+01, 3.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 2.182482e-23 4.239009e-22 3.826634e-22
ansys-5.0 -> -4.217300e-24 4.098500e-22 2.920200e-22
diferenca -> 9.535117e-23

J = 30, no 92 coord (1.500000e+01, 2.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> 1.586611e-22 1.872492e-23 1.592689e-23
ansys-5.0 -> 2.140100e-22 7.325900e-23 -2.431400e-23
diferenca -> 8.750312e-23

J = 30, no 96 coord (1.500000e+01, 1.415000e+01)
ur ut uz
sistema -> -2.898059e-20 3.109724e-19 4.722362e-19
ansys-5.0 -> 3.251400e-25 -9.077300e-24 -5.840900e-25
diferenca -> 5.661775e-19

J = 30, no 100 coord (1.500000e+01, 4.150001e+00)
ur ut uz
sistema -> 4.159974e-17 1.735282e-15 -2.097575e-15
ansys-5.0 -> -4.582500e-25 3.372400e-25 2.096700e-25

diferenca -> 2.722638e-15

J= 0 -> Maxima diferenca : 6.942622e-07, Maximo valor : 4.523434e-02

J= 2 -> Maxima diferenca : 8.332593e-07, Maximo valor : 8.869911e-02

J= 4 -> Maxima diferenca : 5.396295e-07, Maximo valor : 2.565568e-02

J= 6 -> Maxima diferenca : 4.218258e-07, Maximo valor : 1.085612e-02

J= 8 -> Maxima diferenca : 7.024244e-08, Maximo valor : 6.195032e-03

J= 10 -> Maxima diferenca : 6.640783e-08, Maximo valor : 4.204658e-03

J= 12 -> Maxima diferenca : 5.625264e-08, Maximo valor : 3.170665e-03

J= 14 -> Maxima diferenca : 5.691546e-08, Maximo valor : 2.556973e-03

J= 16 -> Maxima diferenca : 4.929675e-08, Maximo valor : 2.154300e-03

J= 18 -> Maxima diferenca : 4.968903e-08, Maximo valor : 1.868621e-03

J= 20 -> Maxima diferenca : 5.185914e-08, Maximo valor : 1.653297e-03

J= 22 -> Maxima diferenca : 4.852319e-08, Maximo valor : 1.483664e-03

J= 24 -> Maxima diferenca : 4.866724e-08, Maximo valor : 1.345532e-03

J= 26 -> Maxima diferenca : 4.071609e-08, Maximo valor : 1.230321e-03

J= 28 -> Maxima diferenca : 4.989389e-08, Maximo valor : 1.132490e-03

J= 30 -> Maxima diferenca : 3.051393e-08, Maximo valor : 1.048277e-03

Final -> Maxima diferenca : 8.332593e-07, Maximo valor : 8.869911e-02

Bibliografia

- [1] C. A. Brebbia and A. J. Ferrante. *The Finite Element Technique: an Introduction*. Editora da Urgs, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 1975.
- [2] Robert D. Cook, David S. Malkus, and Michael E. Plesha. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. University of Wisconsin-Madison, 1989.
- [3] P. M. Prenter. *Splines and Variational Methods*. A Wiley-Interscience Publication, 1975.
- [4] Ernest D. Eason. A review of least-squares methods for solving partial differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:1021–1046, 1976.
- [5] Paul P. Lynn and Santosh K. Arya. Finite elements formulated by the weighted discrete least square method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8:71–80, 1974.
- [6] George E. Forsythe and Wolfgang R. Wasow. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- [7] V. Pavlin and N. Perrone. Finite difference energy techniques for arbitrary meshes applied to linear plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:647–664, 1979.
- [8] Gilnei Gonçalves Furtado, Gabriel Pardo Migliaro, Marco Tullio Vilhena, e Telmo Roberto Strohaecker. Simulação numérica de processos de resfriamento de peças visando prever resultados de tratamentos térmicos. 10º *CBECIMAT, Águas de Lindóia, SP*, Dezembro 1992.
- [9] S. H. LO. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:1403–1426, 1985.
- [10] Joel E. Richardson, Michael J. Carey, and Daniel T. Shuh. *The Design of the E Programming Language*. Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, WI 53706.
- [11] Dan Shuh, Michael Carey, and David Dewitt. *Persistence in E Revisited - Implementation Experiences*. Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, WI 53706, shuh@cs.wisc.edu.

- [12] Exodus Project Document, Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, WI 53706. *An Introduction to GNU E*.
- [13] Dominic Giamapolo. *Libsx v1.1, The Simple X library*. dbg@sgi.com.
- [14] James W. Dally and Willian F. Riley. *Experimental Stress Analysis*. McGraw-Hill Book Co., 1991.
- [15] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, third edition, 1934 1970.