Sobre a Integrabilidade de Problemas em Mecânica Clássica com Dependência Temporal Explícita

(On the integrability of explicitly time–dependent problems in classical mechanics)

F. Haas
Instituto de Física, UFRGS
Caixa Postal 15051
91500–970 Porto Alegre, RS - Brasil
J. Goedert
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, UNISINOS
Av Unisinos, 950
93022–000 São Leopoldo, RS - Brasil

Recebido em 2 de Setembro, 1998

Transformações canônicas generalizadas são apresentadas como uma extensão simples das transformações canônicas usuais. Este artifício reduz uma classe extensa de sistemas com dependência temporal explícita em sistemas autônomos que podem ser tratados de maneira totalmente análoga aos sistemas conservativos. A teoria é aplicada a sistemas Hamiltonianos unidimensionais com dependência temporal explícita.

Generalized canonical transformations are introduced as a simple extension of the usual canonical transformations. This stratagem reduces a wide class of explicitly time–dependent systems into autonomous systems that can be treated in a manner totally analogous to the conservative systems. The theory is applied to one–dimensional time–dependent Hamiltonian systems.

I Introdução

Sistemas clássicos explicitamente dependentes do tempo ocorrem freqüentemente em aplicações [1, 3, 4]. Os cursos de mecânica clássica, entretanto, dedicam pouca ou mesmo nenhuma atenção a sistemas com dependência temporal explícita. Isto pode ser creditado, em parte, à maior dificuldade para integrar as equações de movimento quando há dependência explícita do tempo e em parte a crença generalizada de que qualquer sistema pode ser posto numa forma autônoma (independente do tempo) incorporando o tempo como uma variável dinâmica extra. De fato, o artifício de incorporar o tempo como uma nova variável dinâmica sempre é possível, tanto para sistemas Hamiltonianos [10, 15] como para não Hamiltonianos. Este artifício, porém, em nada auxilia na tarefa de resolver as equações de movimento. A dependência explícita do tempo necessariamente implica no aumento do número de graus de liberdade devendo, desta forma, ser levada em conta e analisada com cuidado.

O presente trabalho dedica-se a apresentar a técnica das transformações canônicas generalizadas (TCG's) para a análise de sistemas Hamiltonianos com dependência temporal explícita. O objetivo principal é apresentar o conceito de TCG como uma extensão simples do conceito de transformação canônica usual. A simplicidade do método das TCG's torna possível a sua inclusão como complemento dos cursos tradicionais de mecânica clássica, preferentemente no nível de pós–graduação. Entre as aplicações das TCG's, incluem-se o tratamento de sistemas anarmônicos [9], a busca de constantes de movimento exatas associadas a sistemas Hamiltonianos unidimensionais [13], a análise de problemas de dois corpos com massa variável [16], o cálculo exato da integral de caminho de Feynman [5] e o estudo de problemas quânticos com condição de contorno não estacionária [17]. O presente estudo utiliza TCG's no tratamento de sistemas Hamiltonianos unidimensionais não autônomos. Com isto, ilustra-se claramente o método com vistas ao tratamento de problemas explicitamente dependentes do tempo e potencialmente não lineares. Certamente, isto é de importância, dada a simplicidade da abordagem via TCG's e dada a complexidade e a relevância de sistemas não autônomos e não lineares.

O objetivo de qualquer tratamento baseado em transformações de coordenadas é encontrar um conjunto de variáveis ótimas nas quais a dinâmica torna-se trivial. Tal é, por exemplo, o espírito da teoria de Hamilton–Jacobi, em que se buscam transformações canônicas que reduzem a função Hamiltoniana a uma forma simples. No presente trabalho, determina-se a classe mais geral possível de Hamiltonianas redutíveis, por TCG's puntuais, à Hamiltoniana associada ao movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária sujeita a um potencial estacionário. Esta categoria de sistemas é exatamente solúvel pelo método da energia, tal como apresentado nos livros texto de mecânica [10, 15]. Por TCG's puntuais, entendem-se aquelas TCG's nas quais a coordenada que faz o papel de posição transforma-se segundo uma lei que não envolve o momentum. É certo que a inclusão de transformações não puntuais é justamente uma das grandes vantagens dos métodos Hamiltonianos, que permitem considerar posição e momentum como variáveis independentes e em pé de igualdade. Entretanto, o uso de TCG's não puntuais complicaria consideravelmente o tratamento.

O artigo organiza-se como segue. Na seção dois, é descrita a teoria geral das TCG's a partir do princípio de Hamilton modificado. Desta forma, o conceito de TCG é obtido como uma extensão elementar do conceito de transformação canônica usual. As equações para as transformações de coordenadas no espaço de fase que se qualificam como TCG's são descritas em termos de uma função geratriz do tipo dois. Obtém-se também a Hamiltoniana transformada em termos da Hamiltoniana não transformada e da TCG. Na seção três, encontra-se a classe geral de Hamiltonianas redutíveis, por uma TCG puntual, à Hamiltoniana associada ao movimento unidimensional de uma partícula sob ação de um potencial estacionário. A classe de Hamiltonianas assim determinada é quadrática no momentum. Na seção quatro, aplica-se o resultado da seção anterior ao movimento unidimensional de uma partícula de massa variável sob ação de um potencial explicitamente dependente do tempo. Verifica-se quais destes potenciais são tratáveis de modo exato via TCG's puntuais. É considerada a solução exata das equações de movimento e a existência de uma constante de movimento exata associada.

II Transformações Canônicas Generalizadas

Nesta seção, é introduzido o conceito de TCG para um sistema Hamiltoniano unidimensional e suas propriedades básicas são obtidas como uma extensão elementar das propriedades das transformações canônicas usuais. O formalismo é convenientemente descrito em termos de uma função geratriz do tipo dois. TCG's para sistemas Hamiltonianos multi–dimensionais são definidas como uma extensão trivial do caso unidimensional. Na verdade, todas as propriedades básicas das TCG's podem ser compreendidas analisando o caso unidimensional.

Seja, pois, um sistema Hamiltoniano unidimensional, de variáveis canônicas (q, p) e função Hamiltoniana $H(q, p, t)$. As equações de Hamilton são dadas por

$$\dot{q} = H_p \quad , \quad \dot{p} = -H_q \quad , \tag{1}$$

onde o ponto representa derivada frente ao tempo, ou seja, $\dot{W} = dW/dt$, sendo $W = W(q, p, t)$ uma função arbitrária definida no espaço de fase. Além disso, os subscritos q e p significam derivada parcial frente a q ou p. Como a função Hamiltoniana é explicitamente dependente do tempo, o mesmo vale para as equações de movimento. Definem-se as TCG's como sendo as transformações do tipo

$$\bar{q} = \bar{q}(q, p, t) \quad , \quad \bar{p} = \bar{p}(q, p, t) \quad , \quad \bar{t} = \bar{t}(t) \tag{2}$$

com a propriedade de preservarem a forma das equações de Hamilton. Ou seja,

$$d\bar{q}/d\bar{t} = \bar{H}_{\bar{p}} \quad , \quad d\bar{p}/d\bar{t} = -\bar{H}_{\bar{q}} \tag{3}$$

para alguma função $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}, \bar{t})$, obtida a partir de $H(q, p, t)$ e da transformação de coordenadas. Em (3), novamente se faz uso da notação para derivada parcial, isto é, $\bar{H}_{\bar{q}} = \partial\bar{H}/\partial\bar{q}$ e $\bar{H}_{\bar{p}} = \partial\bar{H}/\partial\bar{p}$. Em (2), supõe-se que as funções $\bar{q}(q, p, t), \bar{p}(q, p, t)$ e $\bar{t}(t)$ sejam diferenciáveis um número suficiente de vezes (infinito, se necessário). O que distingüe as TCG's das transformações canônicas usuais é o fato do parâmetro temporal também ser transformado. Em princípio, poderiam ser consideradas TCG's nas quais o tempo transformado $\bar{t}$ dependesse também das coordenadas (q, p) do espaço de fase. Este tipo de transformação, entretanto, não encontra aplicação na literatura. Assim, serão consideradas transformações do tipo (2), nas quais o tempo transformado depende funcionalmente apenas do tempo original.

É necessário estabelecer um critério operacional para decidir se uma dada transformação é uma TCG. O modo mais direto de obter este critério operacional baseia-se no princípio de Hamilton modificado. Segundo este princípio, a trajetória dinâmica que vai de um ponto de coordenadas $(q(t_1), p(t_1))$ num instante t_1 até um ponto de coordenadas $(q(t_2), p(t_2))$ num instante t_2 é aquela que extremiza o funcional da ação no espaço de fase. Formalmente, tem-se que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H)\, dt = 0\,. \tag{4}$$

Em (4), estão sendo tomadas variações $\delta\, q(t)$ e $\delta\, p(t)$ diferenciáveis arbitrárias, tais que $\delta\, q(t_1) = \delta\, q(t_2) = \delta\, p(t_1) = \delta\, p(t_2) = 0$. Isto é, por definição, não há variação nos extremos. As equações diferenciais de Hamilton (1) são equivalentes ao princípio variacional (4), o que é mostrado em vários livros texto, tais como [10, 15, 21]. Para nossos propósitos, a equivalência entre (1) e (4) será tomada como um fato dado. Nos é suficiente notar que as equações de movimento nas coordenadas transformadas terão a forma canônica (3) se e somente se for válido um princípio variacional formalmente idêntico a (4),

$$\delta \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} (\bar{p} d\bar{q}/d\bar{t} - \bar{H})\, d\bar{t} = 0\,. \tag{5}$$

De outra maneira, a transformação de coordenadas (2) induzirá equações de movimento não canônicas. A comparação entre (4) e (5) permite a construção de um critério para estabelecer se uma dada transformação é uma TCG.

Para fazer esta comparação, é necessário inicialmente notar que a integral em (4) tem como parâmetro o tempo t, enquanto (5) envolve o tempo transformado $\bar{t}$. Assim, do modo como está apresentada, não é possível comparar (5) com (4). Para obter uma expressão conveniente de (5), note-se que, no princípio variacional (4), se extremiza a ação no espaço de fase para a trajetória indo de um ponto de coordenadas $(q(t_1), p(t_1))$ até outro ponto de coordenadas $(q(t_2), p(t_2))$. No princípio variacional (5), se está extremizando a ação no espaço de fase para uma trajetória indo de um ponto de coordenadas $(\bar{q}(\bar{t}_1), \bar{p}(\bar{t}_1))$ até outro ponto de coordenadas $(\bar{q}(\bar{t}_2), \bar{p}(\bar{t}_2))$. Ocorre que estas expressões são representações diferentes, com diferentes sistemas de coordenadas, para um mesmo par de pontos. Em outras palavras,

$$\bar{q}(\bar{t}_1) = \bar{q}(q(t_1), p(t_1), t_1)\,, \tag{6}$$

$$\bar{p}(\bar{t}_1) = \bar{p}(q(t_1), p(t_1), t_1)\,, \tag{7}$$

$$\bar{t}_1 = \bar{t}(t_1)\,, \tag{8}$$

sendo que relaçõs análogas valem para o ponto no instante t_2. Assim, como são válidas, em particular, as relações $\bar{t}_1 = \bar{t}(t_1)$ e $\bar{t}_2 = \bar{t}(t_2)$, reescreve-se (5) conforme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{p}\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} - \bar{H}\right) \frac{d\bar{t}}{dt}\, dt = 0\,. \tag{9}$$

Nesta forma, a variável de integração e os limites de integração em (4) e (9) são os mesmos, sendo possível uma comparação entre as duas equações. Conclui-se que uma condição suficiente para a validade simultânea de (4) e (9) é

$$p\dot{q} - H - \left(\bar{p}\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} - \bar{H}\right) \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{dS}{dt}\,, \tag{10}$$

sendo $S = S(q, p, t)$ uma função diferenciável arbitrária definida no espaço de fase e no tempo. De fato, a contribuição de uma derivada total é nula no princípio variacional, pois

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt}\, dt &= \delta\, (S(q(t_2), p(t_2), t_2) \\ &- S(q(t_1), p(t_1), t_1)) = 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

já que a variação de uma constante numérica é nula.

A condição (10) é apenas suficiente, pois seria possível, no espírito proposto em [10], tomar

$$p\dot{q} - H - \lambda\, (\bar{p}\frac{d\bar{q}}{d\bar{t}} - \bar{H})\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{dS}{dt}\,, \tag{12}$$

onde λ é uma constante numérica arbitrária mas não nula. Entretanto, para nossos objetivos é desnecessária esta extensão.

A função S em (10) foi tomada como sendo dependente de (q, p, t). É igualmente válido tomar

$$S = -\bar{p}\bar{q} + S_2(q, \bar{p}, t)\,, \tag{13}$$

onde $S_2 = S_2(q, \bar{p}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária de $(q, \bar{p}, t)$. Com isto, e expressando (10) de forma diferencial, obtém-se

$$(\bar{q} - S_{2\bar{p}})\, d\bar{p} + (p - S_{2q})\, dq + (\bar{H}\, d\bar{t}/dt - H - S_{2t})\, dt = 0\,. \tag{14}$$

Já que as coordenadas $(q, \bar{p}, t)$ são independentes, a equação (14) é satisfeita se e somente se os coeficientes de $dq, d\bar{p}$ e dt se anularem identicamente. Isto implica

$$
\begin{aligned}
p &= S_{2q}\,, &(15)\\
\bar{q} &= S_{2\bar{p}}\,, &(16)\\
\bar{H} &= (H + S_{2t})\,\frac{dt}{d\bar{t}}\,. &(17)
\end{aligned}
$$

As equações (15–16) expressam as TCG's em termos de uma função $S_2(q, \bar{p}, t)$, dita função geratriz do tipo dois. Assim, toda transformação de coordenadas (2) que puder ser expressa através de (15–16) para alguma função geratriz do tipo dois apropriada é uma TCG. Em acréscimo, a equação (17) fornece a Hamiltoniana transformada em termos de H e S_2. O fator multiplicativo $dt/d\bar{t}$ em (17) é o que distingüe as TCG's das transformações canônicas usuais. Caso o parâmetro temporal não seja afetado pela transformação, o resultado são as equações usuais para as transformações canônicas expressas em termos de uma função geratriz do tipo dois. De uma maneira mais geral, é possível obter facilmente TCG's com funções geratrizes $S_1(q, \bar{q}, t)$ (do tipo um), $S_3(p, \bar{q}, t)$ (do tipo três) ou $S_4(p, \bar{p}, t)$ (do tipo quatro). Estas TCG's serão omitidas aqui por brevidade. Maiores informações sobre TCG's podem ser encontradas na referência [7].

III Uma Classe de Sistemas Solúvel por Quadratura

Nesta seção será considerada a questão de qual é a classe mais geral possível de Hamiltonianas

$$H = H(q, p, t) \tag{18}$$

redutíveis, por uma TCG, a Hamiltonianas da forma

$$\bar{H} = \bar{p}^2/2 + U(\bar{q})\,. \tag{19}$$

Em (19), $U(\bar{q})$ faz o papel de função potencial associada ao movimento unidimensional de uma partícula de massa unitária. Este tipo de movimento é sempre redutível a quadratura através do método da energia, apresentado em vários livros texto. Usando a equação $\bar{p} = \bar{H}_{\bar{p}} = d\bar{q}/d\bar{t}$, obtém-se a quadratura

$$\bar{t} + c = \int \frac{d\bar{q}}{\sqrt{2}(\bar{H} - U(\bar{q}))^{1/2}} \tag{20}$$

a partir de (19), onde c é uma constante numérica arbitrária. Supondo que a integral em (20) possa ser feita analiticamente, em princípio seria possível obter a trajetória por inversão,

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{t} + c; \bar{H})\,. \tag{21}$$

Esta solução é geral, já que envolve duas constantes numéricas arbitrárias, $\bar{H}$ e c, para um sistema que pode ser posto na forma Newtoniana de uma equação de segunda ordem. Em conclusão, a dinâmica no espaço de fase é completamente integrável, desde que sejam introduzidas as coordenadas adequadas, a saber, $(\bar{q}, \bar{p}, \bar{t})$. Aqui, o ponto de vista adotado é o inverso do usual, segundo o qual se procuram as coordenadas adequadas para um problema específico dado. Pelo contrário, está-se partindo de um problema cuja dinâmica pode ser descrita exatamente, procurando, em seguida, a classe de sistemas que podem ser postos nesta forma solúvel. Esta abordagem está em conformidade com uma estratégia seguida por Jacobi. No dizer de Jacobi, segundo uma citação em [2], "A dificuldade principal na integração de um problema de mecânica está na introdução de variáveis convenientes, para o que não há regra. Desta maneira, nós devemos percorrer o caminho reverso e, após encontrar alguma substituição digna de nota, procurar os problemas para os quais esta pode ser aplicada com sucesso".

A questão de qual é a classe de Hamiltonianas do tipo (19) que pode ser posta na forma (20) por uma TCG não será respondida de modo geral aqui. O tratamento será restrito meramente às TCG's puntuais, nas quais a coordenada que faz o papel de posição transforma-se segundo uma lei que não envolve o momentum,

$$\bar{q} = A(q, t)\,, \tag{22}$$

onde $A(q, t)$ é uma função diferenciável. Qualquer TCG puntual pode ser descrita por uma função geratriz do tipo dois da forma

$$S_2 = A(q, t)\bar{p} + B(q, t)\,. \tag{23}$$

Utilizando as leis de transformação (15–16) e a função geratriz (23), obtém-se a equação (22) e a equação para a transformação do momentum

$$p = A_q\bar{p} + B_q\,. \tag{24}$$

As equações (22) e (24), em conjunto com a lei de transformação do parâmetro temporal, compõem a TCG puntual completa,

$$\bar{q} = A(q, t) \quad , \quad \bar{p} = (p - B_q)/A_q \quad , \quad \bar{t} = T(t) \quad , \tag{25}$$

onde a transformação no tempo está dada em termos de uma função $T(t)$.

Especificadas a TCG e a Hamiltoniana transformada, fica simples fobter a Hamiltoniana original. A relação (17) pode ser exprimida como

$$H = \bar{H}\,d\bar{t}/dt - S_{2t}\,. \tag{26}$$

Inserindo em (26) a Hamiltoniana $\bar{H}$ dada em (19), a TCG (25) e a função geratriz (23), obtém-se, após cálculos elementares,

$$H = \frac{\dot{T}}{2A_q^2}\,p^2 - \frac{1}{A_q}\left(\frac{\dot{T}\,B_q}{A_q} + A_t\right)p + V(q,t)\,, \tag{27}$$

onde

$$V(q,t) = \dot{T}\left(\frac{B_q^2}{2A_q^2} + U(A(q,t))\right) + \frac{A_t B_q}{A_q} - B_t\,. \tag{28}$$

A equação (27) fornece a classe de Hamiltonianas redutíveis por uma TCG puntual à forma (19), que é solúvel por quadratura. A classe de Hamiltonianas (27) é bastante geral, envolvendo quatro funções arbitrárias, $T(t)$, $A(q,t)$, $B(q,t)$ e $U(A(q,t))$. Constata-se que H é uma função quadrática no momentum, mas de dependência bem mais geral na posição e no tempo. Portanto, sistemas não lineares e não estacionários podem ser resolvidos exatamente através de TCG's puntuais. A forma explícita da solução é obtida da inversa da transformação puntual (22), que denotaremos por

$$q = a(\bar{q},t)\,, \tag{29}$$

e da solução (21) para a variável $\bar{q}$. O resultado é

$$q = a(\bar{q}(T(t)+c;\bar{H}),t)\,, \tag{30}$$

que é a solução geral, pois envolve duas constantes numéricas arbitrárias, $\bar{H}$ e c.

A próxima seção dedica-se a uma importante classe de sistemas cuja Hamiltoniana pode ser posta na forma (27).

IV Movimento Unidimensional de uma Partícula de Massa Variável sob um Potencial Dependente do Tempo

Nesta seção, serão aplicados os resultados da seção precedente ao tratamento de sistemas com Hamiltonianas da forma

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + V(q,t)\,, \tag{31}$$

descrevendo o movimento unidimensional de uma partícula de massa $m(t)$ variando no tempo sujeita a um potencial $V(q,t)$ não estacionário. Hamiltonianas do tipo (31) aparecem em diversas áreas da física, como em ótica quântica [1], física de plasma [3] e cosmologia [4]. Na verdade, o uso de TCG's no tratamento de sistemas com Hamiltoniana do tipo (31) não é inédito. Munier *et al.* [16] utilizaram TCG's na descrição de problemas de dois corpos sendo um deles de massa variável, com aplicações em astrofísica. Nestes problemas, o potencial $V(q,t)$ é Kepleriano com dependência temporal explícita. Uma questão natural é determinar a classe mais geral de potenciais comparecendo em (31) solúveis exatamente via TCG's puntuais. A resposta a esta questão é obtida comparando as Hamiltonianas (27), que são as mais gerais tratáveis por TCG's puntuais, e (31).

Impondo que os coeficientes de p^2 e p coincidam nas Hamiltonianas (27) e (31), obtém-se, respectivamente,

$$\dot{T}/A_q^2 = 1/m\,, \tag{32}$$
$$\dot{T}B_q/A_q + A_t = 0\,. \tag{33}$$

A solução deste sistema de equações diferenciais parciais é encontrada após cálculo elementar, daí decorrendo que

$$A = (q-\alpha(t))/\rho(t)\,, \tag{34}$$
$$B = m\dot{\rho}\,q^2/2\rho + m\,(\rho\dot{\alpha} - \dot{\rho}\alpha)\,q/\rho + b(t)\,, \tag{35}$$
$$T = \int dt/m\rho^2\,, \tag{36}$$

sendo que $\alpha(t), \rho(t)$ e $b(t)$ são funções arbitrárias do tempo. A TCG resultante, de acordo com (25), é dada por

$$\bar{q} = (q-\alpha)/\rho\,, \tag{37}$$
$$\bar{p} = \rho(p - m\dot{\alpha}) - m\dot{\rho}(q-\alpha)\,, \tag{38}$$
$$\bar{t} = \int dt/m\rho^2\,. \tag{39}$$

A transformação (37–39) é a TCG puntual mais geral possível que, aplicada a Hamiltonianas para uma partícula de massa variável sujeita a um potencial $V(q,t)$, leva a Hamiltonianas transformadas do tipo (19).

Resta ainda saber quais são os potenciais passíveis de tratamento. Substituindo (34–36) em (28), vem

$$V(q,t) = -\frac{m}{\rho}\left(\rho\ddot{\alpha} - \ddot{\rho}\alpha + \frac{\dot{m}}{m}(\rho\dot{\alpha} - \dot{\rho}\alpha)\right) q - \frac{m}{2\rho}\left(\ddot{\rho} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\rho}\right) q^2 + \\ + \frac{1}{m\rho^2} U\left(\frac{q-\alpha}{\rho}\right) - \dot{b} - \frac{m}{2\rho^2}(\rho\dot{\alpha} - \dot{\rho}\alpha)^2 . \quad (40)$$

Para esta classe de potenciais, o movimento da partícula pode ser exatamente integrado, bastando, para efetuar a integração, utilizar as novas coordenadas canônicas (37–38) e o novo tempo (39). A introdução de um novo parâmetro temporal, que é o que distingüe as TCG's das transformações canônicas usuais, é essencial no procedimento. A classe de potenciais (40) é bastante geral, envolvendo quatro funções arbitrárias, ρ, α, U e b. Na verdade, esta última função é supérflua, pois a adição de uma função apenas do tempo à Hamiltoniana não modifica as equações de movimento.

Para comparar o potencial obtido com resultados da literatura e para interpretá-lo apropriadamente, definem-se novas funções arbitrárias $\omega(t)$, $F(t)$ e $\bar{U}(\bar{q})$ de acordo com

$$\omega^2(t) = -\ddot{\rho}/\rho - \dot{m}\dot{\rho}/m\rho + k/m^2\rho^4 , \quad (41)$$

$$F(t) = \left(\rho\ddot{\alpha} - \ddot{\rho}\alpha + (\rho\dot{\alpha} - \dot{\rho}\alpha)\dot{m}/m + k\,\alpha/m^2\rho^3\right)/\rho , \quad (42)$$

$$\bar{U}(\bar{q}) = U(\bar{q}) - k\bar{q}^2/2 , \quad (43)$$

sendo k uma constante numérica. Além disso, toma-se

$$\dot{b} = -\frac{m}{2\rho^2}(\rho\dot{\alpha} - \alpha\dot{\rho})^2 + \frac{k\,\alpha^2}{2m\rho^4} , \quad (44)$$

uma escolha que elimina todas as funções do tempo supérfluas presentes de forma aditiva na Hamiltoniana. Com as equações (41–44), reescreve-se o potencial (40) segundo

$$V(q,t) = -m(t)F(t)q + \frac{m(t)\omega^2(t)q^2}{2} + \frac{1}{m(t)\rho^2(t)}\bar{U}\left(\frac{q-\alpha(t)}{\rho(t)}\right) . \quad (45)$$

Estes potenciais incluem quatro funções arbitrárias, $m(t)$, $F(t)$, $\omega(t)$ e $U((q-\alpha(t))/\rho)$. De fato, as funções ρ e α não são arbitrárias, sendo restritas às relações de compatibilidade (41–42). Estas últimas podem ser reescritas na forma de um par de equações de segunda ordem,

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{k}{m^2\rho^3} , \quad (46)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\alpha} + \omega^2(t)\alpha = F(t) . \quad (47)$$

Quando a massa é constante, (46) reduz-se à equação de Pinney [19].

A TCG (37–39) foi utilizada por Xu *et al.* na análise de Hamiltonianos quadráticos na posição e no momentum. Aqui, mostrou-se que a mesma transformação pode ser aplicada a uma gama muito maior de sistemas, com massa variável e potencial do tipo (45). Outras transformações canônicas similares mas não idênticas a (37–39), aplicadas a sistemas unidimensionais dependentes do tempo, encontram-se em [8, 11, 18].

A interpretação do potencial (45) pode ser feita examinando as equações de movimento. Tem-se que

$$\dot{q} = H_p = p/m , \quad (48)$$

$$\dot{p} = -H_q = m\,F - m\omega^2 q - \bar{U}'/m\rho^3 , \quad (49)$$

onde a linha significa derivada de $\bar{U}$ frente ao argumento $(q-\alpha)/\rho$. A equação Newtoniana resultante é dada por

$$\ddot{q} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{q} + \omega^2(t)q = F(t) - \frac{\bar{U}'}{m^2\rho^3} . \quad (50)$$

Na ausência da função arbitrária $\bar{U}$, verifica-se que (50) descreve o movimento unidimensional de uma partícula de massa variável sujeita a uma força harmônica dependente do tempo e a uma força externa dependente do tempo. A fonte de não linearidade do sistema é a função $\bar{U}$.

Por construção, a equação de movimento (50) é exatamente solúvel, o que será verificado explicitamente no que segue. Por inspeção de (19) e (43), conclui-se que, para a classe de potenciais dada em (45), a Hamiltoniana transformada é da forma

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2} + \frac{k\bar{q}^2}{2} + \bar{U}(\bar{q})\,. \tag{51}$$

Para $\bar{U} = 0$, (51) descreve um oscilador harmônico simples, que é obviamente solúvel. Mesmo para $\bar{U} \neq 0$, é possível obter a solução $\bar{q} = \bar{q}(\bar{t} + c; \bar{H})$ utilizando o método da energia descrito na seção dois. Com isto, e invertendo as transformações (37) e (39), vem a solução exata

$$q = \rho\bar{q}\left(\int \frac{dt}{m\rho^2} + c; \bar{H}\right) + \alpha \tag{52}$$

Esta solução é geral, pois envolve duas constantes numéricas arbitrárias, $\bar{H}$ e c. Entretanto, a forma explícita da solução só pode ser obtida quando se tem a disposição soluções particulares ρ e α para (46–47). Embora sejam necessárias apenas soluções particulares para estas equações, não se pode garantir que as mesmas possam sempre ser conhecidas, sobretudo para $m(t), \omega(t)$ e $F(t)$ arbitrárias. Expressões do tipo (52), que fornecem a solução geral de uma equação de movimento em termos de soluções particulares para equações auxiliares tais como (46–47), são chamadas, na literatura, leis de superposição não lineares [20].

É interessante notar que a Hamiltoniana transformada, sendo independente do tempo transformado, é uma constante de movimento exata para a dinâmica. Utilizando a TCG (37–39), vem

$$\bar{p} = d\bar{q}/d\bar{t} = m\left(\rho(\dot{q} - \dot{\alpha}) - \dot{\rho}(q - \alpha)\right)\,, \tag{53}$$

o que, substituido em $\bar{H}$ dada em (51), fornece

$$\bar{H} = \frac{m^2}{2}\left(\rho(\dot{q} - \dot{\alpha}) - \dot{\rho}(q - \alpha)\right)^2 + \frac{k}{2\rho^2}(q - \alpha)^2 + \bar{U}\left(\frac{q - \alpha}{\rho}\right)\,. \tag{54}$$

Verifica-se diretamente que $\bar{H}$ em (54) satisfaz

$$d\bar{H}/dt = 0 \tag{55}$$

quando ρ, α e q satisfazem, respectivamente, (46), (47) e (50). Consequentemente, $\bar{H}$ é, de fato, uma constante de movimento exata. No caso particular em que a massa é unitária, $\bar{H}$ dado em (54) e o potencial (28) já foram obtidos por Lewis e Leach [13] na sua busca de sistemas Hamiltonianos com constantes de movimento exatas quadráticas no momentum. Neste mesmo caso particular no qual a massa é unitária, a constante de movimento $\bar{H}$ tem aplicação na física de plasma não colisional [14]. Entretanto, quando $\alpha = F = 0$ e $m = 1$, o potencial (28) e a constante de movimento associada (54) foram encontrados já em 1943, por Schürer, conforme uma citação em [12]. Schürer utilizou justamente a transformação de coordenada (37) e do tempo (39), com $\alpha = 0, m = 1$, sem reconhecer a estrutura de TCG subjacente.

V Conclusão

O conceito de TCG foi introduzido e aplicado ao problema não trivial do movimento de uma partícula de massa variável sob a ação de um campo externo explicitamente dependente do tempo. Mostrou-se, assim, um sistema no qual a dependência temporal explícita não traz sérias dificuldades ao processo de integração das equações de movimento. Sem dúvida, este é um fato relevante, já que Hamiltonianas explicitamente dependentes do tempo impõem sua presença numa série de áreas relevantes da física, como ótica quântica, física de plasma e cosmologia. Além disso, mostrou-se que a técnica das TCG's pode ser utilizada com sucesso no tratamento de uma vasta classe de sistemas Hamiltonianos não estacionários, dados pela Hamiltoniana (27).

Estes resultados são especialmente interessantes por serem as TCG's uma extensão relativamente simples das transformações canônicas usuais. Ou seja, através de técnicas simples é possível resolver uma extensa classe de problemas não triviais. Isto qualifica as TCG's como um complemento válido aos cursos de mecânica clássica, exemplificando o uso de métodos simples no tratamento de problemas sofisticados objetos da pesquisa atual sobre sistemas não lineares. Finalmente, o presente trabalho abre novas perspectivas no tratamento exato de sistemas quânticos e de sistemas com massa dependente não apenas do tempo, mas também da posição. Esta última aplicação fundamenta-se na classe de Hamiltonianas (27), que acomoda massas dependentes da posição, e pode ter impacto na física de semicondutores [6].

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

References

[1] ABDALLA, M. S., COLEGRAVE, R. K. Harmonic oscillator with strongly pulsating mass under the action of a driving force. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 32, n. 4, p. 1958-1964, Oct., 1985.

[2] ARNOLD, V. I. Arnold **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. New York: Springer–Verlag, 1978, p. 266.

[3] BEN–ARYEH, Y., MANN, A. Squeezed states and the interaction of electromagnetic waves with plasma. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 32, n. 1, p. 552-559, Apr., 1985.

[4] BERTONY, C., FINELLI, F., VENTURI, G. Adiabatic invariants and scalar fields in a de Sitter space–time. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 237, n. 6, p. 331-336, Jan., 1998.

[5] CHETOUANI, L., GUECHI, L., HAMMAN, T. F. Generalized canonical transformations and path integrals. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 40, n. 3, p. 1157-1164, Aug., 1989.

[6] DEKAR, L., CHETOUANI, L., HAMMANN, T. F. An exactly soluble Schrödinger equation with smooth position–dependent mass. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 39, n. 5, p. 2551-2563, May 1998.

[7] FEIX, M. R. **Self Similarity and Rescaling Methods in Nonlinear Physics**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1988.

[8] FEIX, M. R., LEWIS, H. R. Invariants for dissipative nonlinear systems by using rescaling. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 26, n. 1, p. 68-73, Jan., 1985.

[9] GAUTHIER, S. An exact invariant for the time–dependent double well anharmonic oscillators: Lie theory and quasi–invariance groups. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 17, n. 13, p. 2633-2639, Sept., 1984.

[10] GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Reading: Addison–Wesley, 1980.

[11] GZYL, H. Quantization of the damped harmonic oscillator. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 27, n. 5, p. 2297-2299, May 1983.

[12] KURTH, R. **Elements of Analytical Dynamics**. Oxford: Pergamon, 1976, p. 100.

[13] LEWIS, H. R., LEACH, P. G. L. A direct approach to finding exact invariants for one–dimensional time–dependent classical Hamiltonians. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 23, n. 12, p. 2371-2374, Dec., 1982.

[14] LEWIS, H. R., SYMON, K. R. Exact time–dependent solutions of the Vlasov–Poisson equations. **Phys. Fluids**, Woodbury, v. 27, n.1, p. 192-196, Jan., 1984.

[15] LOPES, A. **Introdução a Mecânica Clásica**. Coleção Monografias de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

[16] MUNIER, A., BURGAN, J. R., FEIX, M., FIJALKOW, E. Asymptotic solutions for a variable mass two-body problem. **Astron. Astrophys.**, Heidelberg, v. 94, n. 6, p. 373-376, June 1981.

[17] MUNIER, A., BURGAN, J. R., FEIX, M., FIJALKOW, E. Schrödinger equation with time–dependent boundary conditions. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 22, n. 6, p.1219-1223, June 1981.

[18] PEDROSA, I. A. Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 28, n. 11, p. 2662-2664, Nov., 1987.

[19] PINNEY, E. The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$. **Proc. Amer. Math. Soc.**, Menasha, v. 1, n. 5, p. 681, Oct. 1950.

[20] REID, J. L., RAY, J. R. Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion. **J. Math. Phys.**, Bloomington, v. 21, n. 7, p. 1583-1587, July 1980.

[21] SUDARSHAN, E. C. G., MUKUNDA, N. **Classical Mechanics: A Modern Perspective**. New York: John Wiley, 1974.

[22] XU, J., BAO, J., GAO, X. Path integral approach to the time–dependent quadratic Hamiltonian and coherent states. **Can. J. Phys.**, Toronto, v. 70, n. 8, p. 637-639, Aug., 1992.