

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES
PIEZELÉTRICOS UTILIZANDO GRAMIANO DE CONTROLABILIDADE**

por

Juliano Fagundes Gonçalves

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2015.

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADORES
PIEZELÉTRICOS UTILIZANDO GRAMIANO DE CONTROLABILIDADE**

por

Juliano Fagundes Gonçalves

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos (DTU MEKANIK/ Lyngby - Dinamarca)

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz (PROMEC - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler (PROMEC - UFRGS/ Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Janeiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, ao Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca pela orientação e pelo apoio em todas as etapas deste trabalho.

Aos membros da banca de avaliação, Professores Ilmar, Ignacio e Jakson, pelo tempo dedicado na avaliação deste trabalho e pelas suas contribuições.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro durante o período do mestrado.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação de um problema de otimização topológica para o posicionamento ótimo de atuadores baseado na teoria de controle. A estrutura é composta por dois materiais: um material passivo elástico e um material ativo piezolétrico, ambos lineares. Pretende-se obter um sistema de controle no qual todos os estados sejam controláveis. O processo de otimização topológica busca a distribuição de material piezolétrico que maximize o menor autovalor do Gramiano de controlabilidade garantindo, assim, sua não singularidade e, conseqüentemente, que o sistema seja completamente controlável. Programação linear sequencial (SLP) é utilizada para a solução do problema de otimização e as sensibilidades para o modelo de elementos finitos são deduzidas para a função objetivo e restrições. Análises modais das topologias ótimas são utilizadas para a definição de um controlador LQR e as respostas das estruturas controladas submetidas à uma carga impulsiva são analisadas.

Palavras-chave: Método de Otimização Topológica, Controle Ativo de Estruturas, Atuadores Piezolétricos, Gramiano de Controlabilidade.

ABSTRACT

TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR PIEZOELECTRIC ACTUATORS PLACEMENT USING CONTROLLABILITY GRAMIAN

This work presents a topology optimization formulation for the actuator placement based on the control theory. The structure is composed by two materials: a passive elastic material and an active piezoelectric material, both linear. The aim is to obtain a control system which all states are controllable. The topology optimization process searches the piezoelectric material distribution which maximizes the smallest eigenvalue of the controllability Gramian ensuring its non-singularity and, therefore, the system is completely controllable. Sequential linear programming (SLP) is used to solve the optimization problem. The sensitivities for the finite element model were derived for the objective function and constraints. Modal analysis from the optimal topologies were employed in an LQR controller and the responses for the controlled structures submitted to an impulsive load are analyzed.

Keywords: Topology Optimization Method, Active Control of Structures, Piezoelectric Actuators, Controllability Gramian.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão bibliográfica	2
1.3	Objetivos	5
1.4	Organização do Trabalho	6
2	MATERIAIS PIEZELÉTRICOS	7
2.1	Histórico	7
2.2	Cerâmicas piezelétricas	9
2.3	Equações constitutivas piezelétricas	11
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA PIEZELETRICIDADE	14
3.1	Princípio variacional para piezeletricidade linear	14
3.2	Modelo de elementos finitos com acoplamento piezelétrico	17
3.3	Problemas acoplados	19
3.4	Elemento não-conforme de Taylor	19
3.5	Análise modal	21
4	CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS	22
4.1	Modelos estruturais de segunda ordem	22
4.1.1	Modelos nodais	22
4.1.2	Modelos modais	23
4.1.3	Modelos modais através de representação em espaço de estados	25
4.2	Controlabilidade e observabilidade	26
4.2.1	Matrizes de controlabilidade e observabilidade	27
4.2.2	Gramianos de controlabilidade e observabilidade	27
5	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	29
5.1	Conceitos básicos	29
5.2	Programação matemática	30

5.2.1	Programação linear (LP)	30
5.2.2	Programação linear sequencial (SLP)	31
5.3	Conceitos teóricos de otimização topológica	33
5.3.1	Parametrização de projeto	35
5.4	Problemas numéricos em otimização topológica.....	36
5.4.1	Dependência da malha	36
5.4.2	Instabilidade de tabuleiro	37
5.4.3	Mínimos locais	38
6	METODOLOGIA PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE ATUADORES..	39
6.1	Estratégia de controle	39
6.2	Problema de posicionamento ótimo de atuadores	42
6.3	Formulação do problema de otimização topológica	44
6.3.1	Funções objetivo e restrições	44
6.3.2	Modelo material	45
6.4	Análise de sensibilidade	46
6.4.1	Sensibilidade do modelo material	46
6.4.2	Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade.....	46
6.4.3	Sensibilidade de autovalores e autovetores	48
6.5	Procedimento de otimização	50
7	RESULTADOS	51
7.1	Descrição do problema numérico	51
7.1.1	Estrutura analisada	51
7.1.2	Configuração da estrutura controlada	53
7.1.3	Parâmetros do processo de otimização	55
7.2	Distribuição ótima de material piezolétrico	55
7.3	Convergência das funções objetivo	57
7.4	Respostas das estruturas a uma carga impulsiva	61
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
8.1	Conclusões.....	69

8.2 Sugestões para trabalhos futuros	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
APÊNDICE A	79
APÊNDICE B	82

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{U}	Densidade de energia armazenada
\mathcal{H}	Densidade de entalpia elétrica
\mathbf{T}	Vetor de tensões mecânicas
\mathbf{D}	Vetor deslocamento elétrico; Matriz de amortecimento
\mathbf{S}	Vetor de deformações mecânicas
\mathbf{E}	Vetor campo elétrico
$[\mathbf{c}^E]$	Matriz de constantes elásticas
$[\mathbf{e}]$	Matriz de constantes dielétricas
$[\boldsymbol{\epsilon}^S]$	Matriz de constantes piezelétricas
$\boldsymbol{\phi}$	Vetor de potenciais elétricos
∇	Operador gradiente
\mathcal{D}	Operador deslocamento-deformação
ρ	Densidade do material piezelétrico
t_0	Início do intervalo de tempo
t_f	Final do intervalo de tempo
\mathcal{L}	Lagrangiano
\mathcal{W}	Trabalho virtual das forças externas
\mathcal{K}	Energia cinética
Γ	Superfície do corpo
Γ_1	Região da superfície do corpo com forças aplicadas
Γ_2	Região da superfície do corpo com carga elétrica aplicada
Γ_3	Região da superfície do corpo com campo de deslocamento prescrito
Γ_4	Região da superfície do corpo com potencial elétrico prescrito
\mathbf{f}_Γ	Vetor de forças de superfície sobre Γ_1
$\boldsymbol{\zeta}_\Gamma$	Vetor de cargas elétricas sobre Γ_2
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos mecânicos prescritos em Γ_3
$\bar{\boldsymbol{\phi}}$	Vetor de potenciais elétricos prescritos em Γ_4
Ω	Volume do corpo

\mathbf{f}_Ω	Vetor de forças de corpo
\mathbf{f}_P	Vetor de forças pontuais
\mathbf{q}_P	Vetor de cargas elétricas pontuais
\mathbf{N}_u	Matriz contendo as funções de interpolação para os deslocamentos
\mathbf{N}_ϕ	Matriz contendo as funções de interpolação para os potenciais elétricos
\mathbf{B}_u	Matriz de derivadas das funções de interpolação para os deslocamentos
\mathbf{B}_ϕ	Matriz de derivadas das funções de interpolação para os potenciais elétricos
\mathbf{M}_{uu}^e	Matriz de massa do elemento
\mathbf{K}_{uu}^e	Matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{K}_{u\phi}^e$	Matriz de acoplamento piezoeletrico do elemento
$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	Matriz de capacitância dielétrica do elemento
N_i	i -ésima função de interpolação do elemento
ξ	Vetor com coordenadas no espaço do elemento
\mathbf{K}^e	Matriz de rigidez para o elemento não-conforme
\mathbf{K}_{dd}	Matriz de rigidez usual para o elemento isoparamétrico
\mathbf{K}_{da}	Matriz retangular
\mathbf{K}_{aa}	Matriz quadrada com termos referentes à rigidez generalizada
\mathbf{K}_c^e	Matriz de rigidez condensada
ω_a	Frequência modal para a configuração em circuito aberto
ψ_a	Autovetor de ω_a
ω_c	Frequência modal para a configuração em curto-circuito
ψ_c	Autovetor de ω_c
n_d	Número de graus de liberdade do sistema
s	Número de entradas do sistema
r	Número de saídas do sistema
\mathbf{u}	Vetor n_d -dimensional de deslocamentos nodais
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor n_d -dimensional de velocidades nodais
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor n_d -dimensional de acelerações nodais
\mathbf{M}	Matriz de massa
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{u}^c	Vetor s -dimensional de entradas

\mathbf{y}	Vetor r -dimensional de entradas
\mathbf{B}_o	Matriz de entradas
\mathbf{C}_{ov}	Matriz de saídas em velocidades
\mathbf{C}_{od}	Matriz de saídas em deslocamentos
n	Número de modos de vibração; Número de variáveis de projeto
ω_i	i -ésima frequência natural do sistema
Ω	Matriz de frequências naturais
ψ_i	i -ésimo modo de vibração do sistema
Ψ	Matriz modal
η	Vetor n -dimensional de deslocamentos modais
\mathbf{M}_m	Matriz de massa modal
\mathbf{K}_m	Matriz de amortecimento modal
\mathbf{D}_m	Matriz de rigidez modal
\mathbf{Z}	Matriz de coeficientes de amortecimento modais
\mathbf{B}_m	Matriz de entradas modais
\mathbf{C}_{mv}	Matriz de saídas em velocidades modais
\mathbf{C}_{md}	Matriz de saídas em deslocamentos modais
N	Número de estados de um sistema linear
\mathbf{x}	Vetor N -dimensional de estados; Vetor de variáveis de projeto
\mathbf{A}	Matriz do sistema linear; Matriz de coeficientes das restrições lineares
\mathbf{B}	Matriz de entradas de um sistema linear
\mathbf{C}	Matriz de saídas de um sistema linear
\mathcal{C}	Matriz de controlabilidade
\mathcal{O}	Matriz de observabilidade
\mathbf{W}_c	Gramiano de controlabilidade
\mathbf{W}_o	Gramiano de observabilidade
f	Função objetivo
F	Função multiobjetivo
f_i	i -ésima função objetivo
\mathbb{R}^n	Espaço n -dimensional de projeto
\mathbb{S}	Conjunto definido pelas restrições de projeto

\mathbf{c}	Vetor de coeficientes da função objetivo linear
\mathbf{b}	Vetor de coeficientes das restrições lineares
m	Número de restrições lineares; Número de modos do modelo reduzido
g_j	j -ésima restrição de desigualdade
h_k	k -ésima restrição de igualdade
m_g	Número de restrições de desigualdade
m_h	Número de restrições de igualdade
\mathbf{x}_0	Vetor inicial para linearização da função objetivo e das restrições
x_i^l	Limite móvel inferior para a i -ésima variável de projeto
x_i^u	Limite móvel superior para a i -ésima variável de projeto
\mathbf{x}_L	Vetor solução do problema linearizado
Ω_d	Domínio desconhecido
Y	Propriedade material efetiva
Y_0	Propriedade do material base
1_{Ω_d}	Função discreta que caracteriza a estrutura em cada ponto
p	Expoente de penalização
\mathbf{M}_{uu}	Matriz global de massa
\mathbf{K}_{uu}	Matriz global de rigidez
$\mathbf{K}_{u\phi}$	Matriz global de acoplamento piezelétrico
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	Matriz global de capacitância dielétrica
\mathbf{f}	Vetor de forças mecânicas externas
\mathbf{q}	Vetor de cargas elétricas
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor deslocamentos modais
$\boldsymbol{\Psi}$	Matriz modal truncada
\mathbf{B}_ϕ	Matriz de entradas de potenciais elétricos
\mathbf{B}_f	Matriz de entradas de forças mecânicas
\mathbf{G}	Matriz de ganhos para realimentação do controlador LQR
J	Funcional de custo quadrático para controlador LQR
\mathbf{Q}	Matriz de pesos para as variáveis de estado
\mathbf{R}	Matriz de pesos para as entradas de controle
\mathbf{P}	Matriz solução da equação algébrica de Riccati

\mathbf{x}_I	Vetor de estado inicial em decorrência de alguma perturbação em $t = 0$
\mathbf{x}_T	Vetor de estado desejado após em $t = T$
\mathcal{F}	Energia de controle
\mathcal{F}_0	Energia de controle necessária para levar o sistema de \mathbf{x}_0 até \mathbf{x}_T
λ_1	Menor autovalor do Gramiano de controlabilidade
χ_i	Autovetor associado à λ_i
$[\mathbf{c}_{elas}^E]$	Matriz de propriedades elásticas do material não-piezelétrico
$[\mathbf{c}_{pzt}^E]$	Matriz de propriedades elásticas do material piezelétrico
$[\mathbf{e}_{pzt}]$	Matriz de acoplamento eletromecânico do material piezelétrico
$[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S]$	Matriz de capacitância elétrica do material piezelétrico
γ_{elas}	Peso específico do material não-piezelétrico
γ_{pzt}	Peso específico do material piezelétrico
$p1$	Expoente de penalização para as propriedades elásticas
$p2$	Expoente de penalização para as propriedades piezelétricas e dielétricas
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz ortogonal com os autovetor associados às derivadas dos autovalores
\mathbf{H}	Matriz auxiliar para o cálculo das derivadas dos autovetores
$\mathbf{\Phi}$	Matriz para transformação de $\mathbf{\Gamma}$ em \mathbf{H}
\mathbf{F}_j	Matriz auxiliar para o cálculo da derivada do j -ésimo autovetor
\mathbf{v}_j	Vetor solução particular para a derivada do j -ésimo autovetor
μ_{kj}	Variável auxiliar para o cálculo das derivadas dos autovetores
\mathbf{w}	Vetor auxiliar para o cálculo das derivadas dos autovetores
E_s	s -ésimo eletrodo independente ($s = 1, 2, \dots, 6$)
U_m	Deslocamento máximo vertical na extremidade livre da viga
U_{RMS}	Valor RMS do deslocamento vertical na extremidade livre da viga

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

S/A	Sensores e Atuadores
PBH	Popov-Belevitch-Hautus
HSV	Valores Singulares de Hankel
SVD	Decomposição em Valores Singulares
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo
LP	Programação Linear
QP	Programação Quadrática
NLP	Programação Não-Linear
IP	Programação Inteira
SLP	Programação Linear Sequencial
LIPSOL	Solver para Ponto Interior Linear
SIMP	Material Isotrópico Sólido com Penalização
MBB	Messerschmitt-Bolkow-Blohm
LQR	Regulador Linear Quadrático

LISTA DE FIGURAS

2.1	Estrutura cristalina de uma cerâmica piezolétrica antes e depois da polarização (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).....	9
2.2	Processo de polarização: (a) Antes de polarização; (b) Durante aplicação de um campo elétrico; (c) Após o campo elétrico ser removido (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).	10
2.3	Reação de uma cerâmica piezolétrica polarizada submetida a um estímulo (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).....	11
5.1	Domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω	34
5.2	Exemplo de soluções com dependência de malha.	37
5.3	Exemplo de solução com instabilidade de tabuleiro.	38
6.1	Fluxograma do método implementado para posicionamento ótimo de atuadores piezolétricos.	50
7.1	Modelo em elementos finitos da estrutura analisada.	51
7.2	Configurações pré-definidas para a face potencial: com (a) 1, (b) 2 ou (c) 6 eletrodos independentes.	53
7.3	Modos de vibração considerados no sistema de controle com suas respectivas frequências naturais.	53
7.4	Distribuição ótima de material piezolétrico para casos com 1 modo controlado, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	56
7.5	Distribuição ótima de material piezolétrico para casos com 2 modos controlados, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	57
7.6	Distribuição ótima de material piezolétrico para casos com 4 modos controlados, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	58
7.7	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	59
7.8	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	59

7.9	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	60
7.10	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	60
7.11	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	62
7.12	Sinais de controle para o caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	62
7.13	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	63
7.14	Sinais de controle para o caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	64
7.15	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	64
7.16	Sinais de controle para o caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	65
7.17	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	65
7.18	Sinais de controle para o caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	66
A.1	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	79
A.2	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	79
A.3	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	80
A.4	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	80
A.5	Histórico das medidas de controlabilidade para caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c	81

B.1	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	82
B.2	Sinais de controle para o caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	82
B.3	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	83
B.4	Sinais de controle para o caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	83
B.5	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	84
B.6	Sinais de controle para o caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	84
B.7	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	85
B.8	Sinais de controle para o caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	85
B.9	Resposta a uma carga impulsiva para o caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	86
B.10	Sinais de controle para o caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .	86

LISTA DE TABELAS

7.1	Propriedades do material elástico.	52
7.2	Propriedades do material piezolétrico.	52
7.3	Casos analisados.	54
7.4	Deslocamentos verticais máximos para os casos analisados.	67
7.5	Deslocamentos verticais RMS para os casos analisados.	68

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Importantes avanços foram alcançados nas últimas décadas na área de estruturas e materiais inteligentes. Estruturas inteligentes são aquelas que têm a capacidade de reagir à mudanças, sejam essas externas ou no próprio sistema. Nesse contexto, os materiais inteligentes são aqueles que permitem a alteração de características do sistema de forma controlada. Uma estrutura inteligente pode ter diversas funcionalidades como controle de forma [Irschik, 2002], atenuação de vibrações e ruído [Song et al., 2006; Kim e Ko, 1998], monitoramento de integridade estrutural [Zou et al., 2000], coleta de energia [Priya, 2007], entre outras.

No projeto de estruturas inteligentes para controle de vibrações, diversos materiais têm sido empregados em sensores e atuadores (S/A) como, por exemplo, ligas com memória de forma [Baz et al., 1990; Lan e Fan, 2010], fluidos eletro-reológicos [Stanway et al., 1996] e fluidos magneto-reológicos [Hong e Choi, 2005; Karkoub e Zribi, 2006]. Entretanto, materiais piezelétricos são comumente empregados devido a sua rápida resposta e fácil aplicação. Além disso, esse tipo de material pode ser utilizado tanto em sensores como em atuadores devido aos efeitos piezelétricos direto e inverso [Sohn et al., 2011].

Na maioria dos problemas de controle ativo de estruturas flexíveis, o posicionamento dos sensores e atuadores é previamente escolhido. Assim, o projetista deve somente construir uma lei de controle que satisfaça os requisitos de projeto. Entretanto, alguns requisitos podem não ser alcançados através do controle com realimentação se algumas condições estruturais não forem satisfeitas. Como exemplo, o posicionamento de um atuador em um ponto nodal de um modo de vibração resultaria na impossibilidade de controlar esse modo. Para esse caso, o sistema é definido como não controlável [Hać e Liu, 1993]. Entretanto, o posicionamento de um atuador arbitrariamente próximo a um ponto nodal acarretaria na necessidade de aplicação de forças de magnitude superior à capacidade do atuador, mesmo sendo esse sistema controlável. Nesse contexto, as definições de controlabilidade não podem ser utilizadas diretamente para escolha do melhor posicionamento de atuadores em uma estrutura, uma vez que é uma definição binária: o sistema é controlável ou não [Gawronski, 2004]. Consequentemente, torna-se necessário utilizar metodologias que através de medidas

de controlabilidade, empregadas como índices de desempenho, definam o posicionamento ótimo de atuadores.

1.2 Revisão bibliográfica

Importantes trabalhos no desenvolvimento de sistemas para controle ativo de vibrações utilizando atuadores piezelétricos foram realizados na segunda metade da década de 1980. Bailey e Ubbard, 1985, apresentaram o projeto e análise de um amortecedor ativo para uma viga esbelta engastada utilizando um polímero piezelétrico como elemento ativo. O problema de supressão de vibrações foi estudado por Tzou e Gadre, 1989, através da análise teórica de um modelo de cascas finas multi-camadas. Nesse estudo, as equações com o acoplamento piezelétrico foram deduzidas considerando que cada camada da casca pode ser uma camada polimérica piezelétrica sujeita a um potencial elétrico, resultando em uma força de controle local.

Como sequência natural, surge o problema de posicionamento de sensores e atuadores (S/A) piezelétricos buscando maior eficiência do sistema de controle. A determinação da melhor localização de S/A em uma estrutura simples pode ser realizada através de análises de tentativa e erro ou, simplesmente, da experiência do engenheiro de controle. Entretanto, diversos autores têm buscado desenvolver metodologias, com embasamento na teoria de controle, visando a resolução desse problema. Consequentemente, torna-se necessária a utilização de índices de desempenho que quantifiquem a observabilidade e controlabilidade de um determinado sistema.

O teste de autovetores de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) pode ser utilizado para verificar a controlabilidade de um sistema linear. Esse teste especifica que a atuação não deve ser ortogonal ao sistema. Se essa sentença for satisfeita, o modo do sistema é controlável [Junkins e Kim, 1991; Lim e Gawronski, 1993]. Hamdan e Nayfeh, 1989, introduzindo uma interpretação geométrica do teste de autovetores PBH, propuseram uma medida de controlabilidade modal como sendo uma norma de ortogonalidade.

Junkins e Kim, 1991, utilizando a definição de um custo modal considerando a resposta a um impulso unitário em $t = 0$, estabeleceram uma forma de analisar a contribuição de cada modo através de uma função de custo modal normalizada. Dessa forma, essa medida depende das condições iniciais e da matriz de pesos, que representa a importância dos

componentes dos vetores de estado e de entrada. Conseqüentemente, essa função de custo foi utilizada como peso para a medida de controlabilidade modal de Hamdan e Nayfeh, 1989.

A relação entre o Gramiano de controlabilidade e a energia transmitida pelos atuadores para a estrutura foi analisada por Hać e Liu, 1993. Dessa forma, o problema de minimização da energia necessária para levar o sistema de uma condição inicial para uma condição final desejada pode ser escrito em termos desse Gramiano. Índices de desempenho para a controlabilidade de um sistema foram propostos para dois tipos de perturbação: transientes e persistentes. Esses índices foram definidos levando em consideração a energia total do sistema, que depende fortemente dos modos de baixa ordem, e um termo proporcional à contribuição da energia de cada modo. Georges, 1995, investigou o problema de posicionamento ótimo de atuadores e sensores, estendendo a notação de Gramianos de controlabilidade e observabilidade para sistemas não-lineares. Para verificar a solução desse problema, foi utilizado um algoritmo de programação inteira buscando determinar a configuração ótima de um sistema composto por massas e molas.

Os valores singulares de Hankel (HSV) podem ser utilizados para definir uma medida de observabilidade e controlabilidade de um sistema. Gawronski e Lim, 1996, analisaram duas medidas para estruturas flexíveis balanceadas: o traço e o determinante da matriz HSV. A primeira medida implica na consideração da importância de cada modo, ou seja, os modos menos observáveis/controláveis são desconsiderados no problema de posicionamento de S/A. Para a segunda medida, o modo menos observável/controlável tem a mesma importância dos demais modos. Além disso, foi demonstrado que para estruturas levemente amortecidas, os valores singulares de Hankel dos pares individuais (atuador e sensor) podem ser somados para aproximar o HSV de uma estrutura flexível multivariável. Gawronski, 1997, utilizou essa propriedade para determinar a localização de S/A em uma estrutura treliçada através de correlação entre entrada/perturbação dos atuadores e saída/desempenho dos sensores. Para isso, um índice inteiro (0 ou 1) foi definido levando em consideração a correlação de um par S/A em relação aos demais.

Leleu et al., 2001 propuseram um critério para localização ótima de S/A definido pela multiplicação de três termos: o primeiro termo considera o significado geométrico dos autovalores dos Gramianos (elipsoide cujas direções dos eixos são dadas pelos autovetores e os comprimentos característicos são proporcionais aos autovalores); o segundo penaliza locais

onde ocorre um autovalor excessivamente elevado e outro excessivamente baixo; e o último termo é proporcional à energia total transmitida pelos atuadores para a estrutura.

Além da definição de uma medida que seja capaz de representar de forma quantitativa a observabilidade/controlabilidade de um sistema, são necessários métodos sistemáticos para encontrar o posicionamento ótimo de S/A. Wang e Wang, 2001, focaram no aspecto da controlabilidade de atuadores colados em estruturas de vigas de forma analítica. Esse trabalho apresentou uma forma de quantificar a controlabilidade por meio de um índice, obtido através de uma decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de entrada. Esse índice fornece informações sobre a quantidade de energia a ser fornecida pelos atuadores para a estrutura. Entretanto, torna-se inviável esse tipo de abordagem analítica para estruturas mais complexas. Uma forma simples de tratar o problema é através da definição de alguns candidatos a posicionamento ótimo e, posteriormente, analisar qual apresenta melhor desempenho de acordo com algum índice. Peng et al., 2005 determinaram o posicionamento ótimo para um conjunto de quatro atuadores piezelétricos independentes (de um total de 64 candidatos), colados em uma placa fina retangular. Para isso, foi utilizado um algoritmo heurístico para solução do problema de otimização. Da mesma forma, o problema de controle de vibrações utilizando atuadores piezelétricos aplicado em estruturas de cascas foi tratado por Sohn et al., 2011.

A aplicação de otimização topológica para o projeto de transdutores piezelétricos foi tratada por Silva e Kikuchi, 1999. Essa formulação é baseada no fator de acoplamento eletromecânico, que fornece a eficiência do efeito piezelétrico no processo de transdução, ou conversão, de energia mecânica em elétrica e vice-versa. Diferentes tipos de função objetivo foram definidas: buscando maximizar a resposta de um específico modo de operação do transdutor, projetar transdutores com frequências de ressonância específicas ou para uma determinada banda de frequência. Larsen et al., 2009 utilizaram o método de otimização topológica para o projeto de placas semi-espessas compostas por dois materiais. Consequentemente, o objetivo é a supressão de vibrações e o controle do transporte de energia vibracional para estruturas sujeitas à excitação harmônica. Possíveis aplicações dessa metodologia são direcionadas para o isolamento estrutural de vibrações e para a absorção ou coleta de energia.

Silveira, 2012, propôs um procedimento simultâneo utilizando otimização topológica

para o projeto de uma estrutura através da minimização da flexibilidade e localização ótima de atuadores. Essa segunda etapa é realizada por meio da maximização do traço do Gramiano de controlabilidade para um sistema de controle LQR.

Trabalhos recentes têm tratado do problema de projeto de atuadores piezelétricos com foco na polarização do material. Takezawa et al., 2013, trataram do problema de otimização da energia de vibração em dispositivos coletores de energia e, especificamente, a direção de polarização do material. Essa formulação busca maximizar o fator de acoplamento eletromecânico. Como esse tipo de dispositivo é usualmente construído com material piezelétrico entre eletrodos, pode ocorrer cancelamento do campo elétrico estabelecido em caso de existir regiões com diferentes direções de tensão mecânica aplicada. Ruiz et al., 2013, otimizaram simultaneamente a disposição de material passivo e perfil de polarização do material piezelétrico que é colado à estrutura. Dessa forma, são projetados sensores piezelétricos que maximizam a resposta estática.

1.3 Objetivos

Este trabalho propõe uma nova formulação para o problema de otimização topológica que assegure a controlabilidade completa da solução, seguindo a metodologia para posicionamento ótimo de atuadores piezelétricos baseada na controlabilidade proposta por Silveira et al., 2014. Para isso, busca-se a distribuição de material piezelétrico em uma estrutura que maximize o menor autovalor do gramiano de controlabilidade. Dessa forma, a não-singularidade do gramiano é imposta de forma direta na função objetivo. Essa condição resulta em um sistema de controle no qual todos os estados são excitáveis pelos atuadores e, conseqüentemente, controláveis. O desenvolvimento deste trabalho foi dividido nos seguintes objetivos específicos:

- Implementação da metodologia proposta por Silveira et al., 2014, para fins de validação e comparação;
- Adaptação da metodologia para posicionamento ótimo de atuadores piezelétricos utilizando o menor autovalor do gramiano de controlabilidade como função objetivo do processo de otimização topológica;
- Comparação qualitativa das soluções para distribuição ótima de material piezelétrico;

- Comparação das respostas dinâmicas da estrutura com controle ativo para um carregamento mecânico externo específico.

1.4 Organização do Trabalho

O capítulo 2 expõe uma breve revisão histórica sobre o fenômeno da piezeletricidade e as características das cerâmicas piezelétricas. Além disso, as relações constitutivas para piezeletricidade linear são apresentadas de acordo com o padrão do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (IEEE) [Meitzler et al., 1988].

O método dos elementos finitos é discutido no capítulo 3 partindo do princípio variacional para piezeletricidade linear. A seguir, é apresentado o elemento não-conforme de Taylor utilizado neste trabalho e a análise modal considerando o modelo de elementos finitos com acoplamento piezelétrico.

O capítulo 4 aborda o controle ativo de estruturas flexíveis para atenuação de vibrações. Modelos matemáticos utilizados para representar esse problema são discutidos. Por fim, são apresentadas noções de controlabilidade e observabilidade para um determinado sistema.

Conceitos básicos sobre o método de otimização topológica são apresentados no capítulo 5. Além disso, o problema de programação matemática é discutido com foco para programação linear. No final do capítulo, conceitos teóricos sobre otimização topológica são expostos, assim como as instabilidades numéricas mais comuns nesse tipo de problema.

No capítulo 6, a metodologia para localização ótima de atuadores piezelétricos em uma estrutura é apresentada. A estratégia de controle é discutida e o regulador linear-quadrático (LQR) é definido em termos das variáveis de controle. A seguir, as formulações do problema de otimização topológica são discutidas. Por fim, os cálculos de sensibilidade necessários para a resolução do problema de otimização são apresentados.

O capítulo 7 apresenta o caso de estudo e as distribuições ótimas de material piezelétrico para algumas configurações pré-definidas. Além disso, respostas dinâmicas da estrutura com e sem controle são apresentadas. A comparação da formulação de otimização proposta com as formulações anteriores é discutida no capítulo 8 e algumas sugestões para a continuidade do trabalho são expostas.

2. MATERIAIS PIEZELÉTRICOS

Neste capítulo, conceitos básicos relacionados aos materiais piezelétricos são tratados. Inicialmente, um breve histórico é exposto abordando o período da descoberta experimental dos efeitos piezelétricos, as teorias formuladas visando descrever esse fenômeno e o desenvolvimento de aplicações. Após, as principais características e propriedades das cerâmicas piezelétricas são descritas. Por fim, as equações constitutivas piezelétricas são apresentadas no padrão do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (IEEE) [Meitzler et al., 1988].

2.1 Histórico

A piezeletricidade é a capacidade que certos materiais têm de converter energia mecânica em energia elétrica (efeito direto) ou energia elétrica em mecânica (efeito inverso). O efeito piezelétrico direto consiste na geração interna de carga elétrica resultante de uma tensão mecânica aplicada. Esse efeito foi descoberto por Pierre e Jacques Curie [1880 *apud* Moheimani e Fleming, 2006]*. Inicialmente, esse fenômeno e suas propriedades foram comparados com o fenômeno de piroeletricidade. Examinando alguns tipos de cristais, foi observado que os efeitos elétricos (direção e sinal da carga gerada) devido à compressão e tração eram semelhantes aos decorrentes de resfriamento e aquecimento, respectivamente. Uma revisão mais detalhada do início da história de cristais piezelétricos pode ser encontrada em Katzir, 2007.

Como consequência desses estudos iniciais, percebeu-se que os materiais que apresentavam essa capacidade poderiam também apresentar o efeito inverso: uma deformação geométrica resultante de um potencial elétrico aplicado. Lippmann [1881 *apud* Moheimani e Fleming, 2006]†, previu teoricamente através das leis fundamentais da termodinâmica a existência do efeito piezelétrico inverso e provou sua reversibilidade. A confirmação experimental do efeito inverso foi verificada por Pierre e Jacques Curie no final de 1881.

*J. e P. Curie, “Sur les phénomènes électriques de la tourmaline des cristaux hémihédres à faces inclinées,” *OPC*, pp. 18–21, 1880.

†G. J., Lippmann, “Principe de la conservation de l’électricité ou second principe de la théorie des phénomènes électriques,” *Annales de chimie et de physique*, 24, pp. 145-177, 1881.

Em seus primeiros experimentos, Pierre e Jacques Curie examinaram apenas o efeito da pressão aplicada em um eixo elétrico na polarização desse eixo (efeito longitudinal). Hankel [1881 *apud* Katzir, 2007][‡] foi o primeiro a salientar o efeito transversal, no qual pressão aplicada em uma direção perpendicular a um eixo elétrico também geraria polarização nesse eixo. Voigt [1890 *apud* Katzir, 2007][§] sugeriu a primeira teoria que representava os comportamentos piezelétrico e pirlétrico para todos os tipos de cristais. Essa teoria englobava os fenômenos elétricos devido a tensão mecânica e mudança de temperatura. Essas teorias pioneiras são as bases das formulações modernas aplicadas para a caracterização do comportamento de materiais piezelétricos.

A primeira grande aplicação de materiais piezelétricos ocorreu durante a Primeira Guerra Mundial. Langevin [1921 *apud* Holnicki-Szulc e Rodellar, 1999][¶] construiu um detector submarino ultrassônico formado por um mosaico de cristais de quartzo finos colado entre duas placas de aço. O dispositivo era utilizado para transmitir um sinal em alta frequência na água e medir a profundidade cronometrando o tempo de retorno do sinal. Após o seu uso bem sucedido em transdutores de sonares, e entre as duas guerras mundiais, cristais piezelétricos foram empregados em diversas aplicações. Nesse período, foram desenvolvidas e comercializadas aplicações clássicas, tais como microfones, acelerômetros, transdutores ultrassônicos, entre outras.

Durante a Segunda Guerra Mundial, pesquisas significativas foram realizadas nos Estados Unidos e em outros países, como o Japão e a União Soviética. Esses trabalhos tinham como objetivo o desenvolvimento de materiais com altas constantes dielétricas para a construção de capacitores. A descoberta de cerâmicas piezelétricas foi uma consequência desses trabalhos, assim como o desenvolvimento de métodos para a produção em grande escala desses materiais. Gray, 1949, descobriu que materiais ferrelétricos, como o Titanato de Bário, poderiam ser utilizados como materiais piezelétricos se submetidos a um campo elétrico suficientemente elevado. No início dos anos 50, Jaffe [1955 *apud* Uchino, 2010]^{||}

[‡]W. G. Hankel, “Über die Aktino- und Piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den Thermoelektrischen,” Leipzig Abhandlungen, 12 (1881): 459–547, on p. 542–3.

[§]W. Voigt, “Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen,” Göttingen Abhandlungen, 36 (1890), pp. 1–99.

[¶]P. Langevin, “Improvements relating to the emission and reception of submarine waves”, British Patent No. 145 691, 1921.

^{||}H. Jaffe, US Patent No. 2,708,244, May, 1955.

descobriu o efeito piezoeétrico no Titanato Zirconato de Chumbo (PZT), um dos materiais mais utilizados. Kawai, 1969, descobriu que materiais poliméricos também podem apresentar propriedades piezoeétricas. Dessa forma, a possibilidade de construir novos dispositivos piezoeétricos, adequando um material para uma aplicação específica, resultou em uma série de desenvolvimentos, como: sonares potentes, sistemas de ignição piezoeétricos, hidrofones, entre outros [Moheimani e Fleming, 2006].

2.2 Cerâmicas piezoeétricas

Uma cerâmica piezoeétrica é uma massa de cristais, na qual cada cristal é composto por um pequeno íon metálico tetravalente colocado dentro de uma rede de íons metálicos bivalentes e de oxigênio, como mostrado na Figura 2.1. Para preparar uma cerâmica piezoeétrica, os pós finos dos óxidos metálicos são misturados em proporções específicas. Esta mistura é aquecida para formar um pó uniforme e em seguida combinada com um aglutinante orgânico. Elementos são formados (discos, barras, placas, etc.) e, em seguida, aquecidos por um tempo específico, e sob uma temperatura pré-determinada. Como resultado deste processo, forma-se uma estrutura cristalina densa.

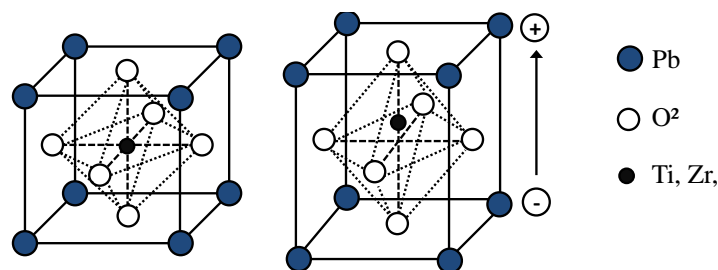


Figura 2.1 – Estrutura cristalina de uma cerâmica piezoeétrica antes e depois da polarização (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).

Acima de uma temperatura crítica, conhecida como a "temperatura de Curie", cada cristal no elemento de cerâmica aquecido exibe uma simetria cúbica simples sem momento de dipolo. No entanto, abaixo da temperatura de Curie, cada cristal tem simetria tetragonal e, associado a isso, um momento de dipolo. Dipolos adjacentes formam regiões de alinhamento local chamadas de "domínios". Esse alinhamento gera um momento de dipolo para o domínio e, portanto, uma polarização em rede. Como representado na Figura 2.2(a), a direção de

polarização entre domínios vizinhos é aleatória. Consequentemente, a cerâmica não tem polarização macro.

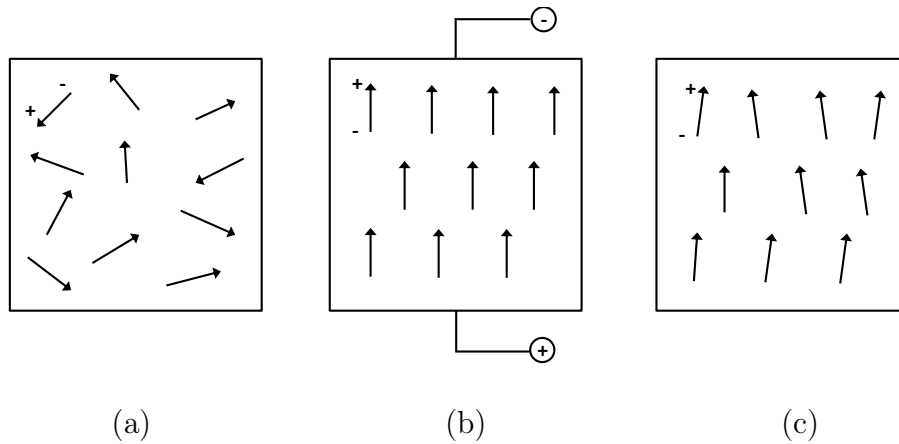


Figura 2.2 – Processo de polarização: (a) Antes de polarização; (b) Durante aplicação de um campo elétrico; (c) Após o campo elétrico ser removido (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).

Os domínios em um elemento cerâmico são alinhados através de um processo conhecido como polarização, que ocorre usualmente logo abaixo da temperatura de Curie. Esse alinhamento ocorre devido à exposição da cerâmica a um forte campo elétrico contínuo (DC) como apresentado na Figura 2.2 (b). Após a polarização, o elemento cerâmico dilata-se devido a expansão de domínios que estão próximos do alinhamento com o campo. Com a remoção do campo elétrico, a maioria dos dipolos fica presa em uma configuração próxima ao alinhamento. Dessa forma, o elemento cerâmico apresenta uma polarização permanente, ou remanescente e um alongamento permanente, como apresentado na Figura 2.2 (c). Contudo, o aumento no comprimento do elemento é muito pequeno, normalmente dentro da faixa de micrômetros.

O comportamento de uma cerâmica piezoeétrica polarizada é apresentado na Figura 2.3. Compressão ao longo da direção de polarização gera diferença de potencial elétrico com mesma polaridade da tensão de polarização (Figura 2.3 (b)). Tração ao longo da direção de polarização gera diferença de potencial elétrico com polaridade oposta a da tensão de polarização (Figura 2.3 (c)). Para os casos citados acima, ocorre o efeito direto no qual energia mecânica é convertida em elétrica. Essa é a base que permite que os materiais piezoeletricos sejam utilizados como sensores. Se diferença de potencial elétrico com mesma

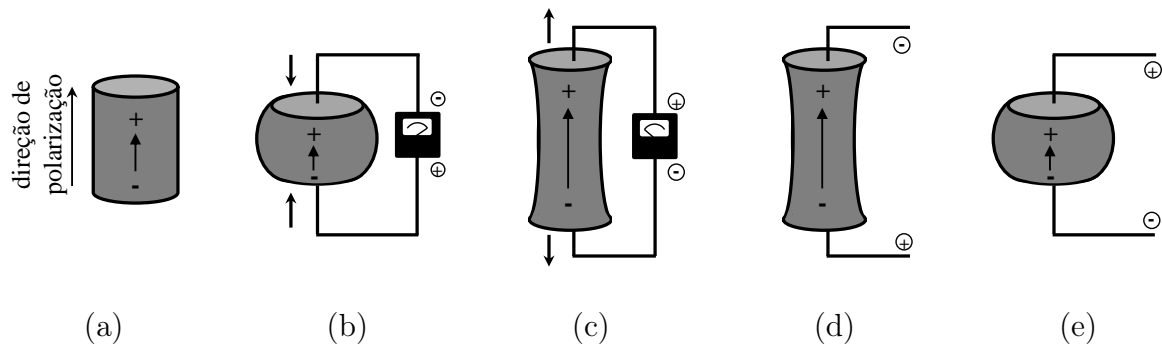


Figura 2.3 – Reação de uma cerâmica piezolétrica polarizada submetida a um estímulo (Fonte: Moheimani e Fleming, 2006).

polaridade da tensão de polarização é aplicada na direção de polarização, o elemento irá alongar e seu diâmetro será reduzido (Figura 2.3 (d)). Se uma diferença de potencial elétrico de polaridade oposta à da tensão de polarização é aplicada, o elemento irá tornar-se mais curto e mais largo (Figura 2.3 (e)). Para esses últimos casos, ocorre o efeito inverso no qual energia elétrica é convertida em mecânica. Quando opera dessa forma, a cerâmica piezolétrica é utilizada como um atuador [Moheimani e Fleming, 2006].

2.3 Equações constitutivas piezolétricas

Nesta seção, as equações que descrevem as propriedades eletromecânicas de materiais piezolétricos são apresentadas no padrão IEEE [Meitzler et al., 1988]. O padrão IEEE assume que materiais piezolétricos apresentam comportamento linear, o que é válido para baixos níveis de tensão mecânica e de campos elétricos. Contudo, quando submetidos a elevados níveis de tensão ou fortes campos elétricos, transdutores piezolétricos apresentam não-linearidade do tipo histerese e despolarização. As equações constitutivas piezolétricas são obtidas partindo do pressuposto de que a deformação total em um transdutor é soma da deformação mecânica induzida por tensão mecânica e a deformação controlável devido à aplicação de um potencial elétrico [Moheimani e Fleming, 2006].

A densidade de entalpia elétrica é definida como

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} - E_i D_i, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{U} é a densidade de energia armazenada, E_i é o vetor de campo elétrico e D_i é o vetor de deslocamento elétrico [Tiersten, 1967; Mason, 1950]. A conservação da energia para um meio contínuo piezoeletrico linear resulta em

$$\dot{\mathcal{U}} = T_{ij}\dot{S}_{ij} + E_i\dot{D}_i. \quad (2.2)$$

onde T_{ij} é o tensor de tensão mecânica e S_{ij} é o tensor de deformação mecânica [Tiersten, 1967]. Derivando a Equação 2.1 com respeito ao tempo e introduzindo a definição apresentada na Equação 2.2, obtém-se

$$\dot{\mathcal{H}} = T_{ij}\dot{S}_{ij} - D_i\dot{E}_i. \quad (2.3)$$

Isso indica que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S_{ij}, E_i)$, ou seja, a deformação mecânica e o campo elétrico são variáveis independentes. Portanto, assume-se que a densidade de entalpia elétrica tenha a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}c_{ijkl}^E S_{ij}S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^S E_i E_j. \quad (2.4)$$

onde c_{ijkl}^E , e_{kij} e ϵ_{ij}^S são os tensores de constantes elásticas, piezoeletricas e dielétricas, respectivamente [Tiersten, 1967]. Além disso, os índices superiores E e S denotam que as medidas devem ser tomadas, respectivamente, sob condição de campo elétrico ou deformação constante. As derivadas parciais de \mathcal{H} com respeito às variáveis independentes resultam em

$$T_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_{ij}} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (2.5)$$

$$D_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_i} = e_{ikl} S_{lk} + \epsilon_{ij}^S E_j. \quad (2.6)$$

As equações acima descrevem o acoplamento eletromecânico para um material piezoeletrico linear. As simetrias dos tensores mecânicos possibilitam reescrever as equações constitutivas de forma compactada. Dessa forma, substituindo os índices ij ou kl por p ou q , tem-se

$$T_p = c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k, \quad (2.7)$$

$$D_i = e_{iq} S_q + \epsilon_{ik}^S E_k. \quad (2.8)$$

onde i, j, k, l podem assumir valores 1, 2, 3 e p, q podem assumir valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, de acordo com a notação adotada.

As equações constitutivas podem ser simplificadas considerando carregamento uniaxial e a presença de apenas um par de eletrodos para medir ou gerar um campo elétrico externo. Dessa forma, pode-se considerar a possibilidade de existência de dois efeitos: longitudinal e transversal. O efeito longitudinal, usualmente chamado de modo d33, é aquele no qual tanto a deformação mecânica quanto o campo elétrico ocorrem na mesma direção que o material foi polarizado. Por sua vez, no efeito transversal, chamado de modo d31, a deformação ocorre em uma direção diferente daquela onde o campo elétrico é medido/gerado e que o material foi polarizado [Santos, 2008].

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA PIEZELETRICIDADE

Este capítulo trata do modelo de elementos finitos com acoplamento piezolétrico utilizado para a resolução do problema de posicionamento ótimo de atuadores em uma estrutura flexível. Inicialmente, o princípio variacional de Hamilton estendido para um meio contínuo piezolétrico é apresentado. A seguir, esse princípio variacional é escrito em termos de aproximações para o campo de deslocamentos e o potencial elétrico. As funções de interpolação para o elemento não-conforme utilizado neste trabalho são apresentadas assim como a condensação estática para eliminação dos deslocamentos generalizados. Por fim, o problema modal é descrito para estruturas configuradas em curto-circuito ou em circuito aberto.

3.1 Princípio variacional para piezeletricidade linear

As equações constitutivas, apresentadas no capítulo anterior, relacionam quantidades mecânicas e elétricas em um meio piezolétrico e são as bases para a definição do modelo de elementos finitos [Lerch, 1990]. Em notação matricial, essa relação pode ser escrita como

$$\mathbf{T} = [\mathbf{c}^E]\mathbf{S} - [\mathbf{e}]^T\mathbf{E}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{e}]\mathbf{S} + [\boldsymbol{\epsilon}^S]\mathbf{E}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{T} é o vetor de tensões mecânicas, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico, \mathbf{S} é o vetor de deformações mecânicas e \mathbf{E} é o vetor campo elétrico. As matrizes $[\mathbf{c}^E]$, $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ e $[\mathbf{e}]$ são, respectivamente, as matrizes de constantes elásticas, dielétricas e de acoplamento piezolétrico.

O campo elétrico \mathbf{E} é relacionado com o potencial elétrico ϕ e a deformação mecânica \mathbf{S} é relacionada com o deslocamento mecânico \mathbf{u} através das seguintes equações:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{S} = \mathcal{D}\mathbf{u}, \quad (3.4)$$

onde ∇ é o operador gradiente e \mathcal{D} é o operador de derivação, definido como

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

O comportamento elástico de um meio piezelétrico é governado pela Lei de Newton

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

onde $\operatorname{div}(\bullet)$ é o operador divergente e ρ é a densidade do material. Além disso, o comportamento elétrico é descrito pela equação de Maxwell considerando que o meio piezelétrico é isolante

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = 0. \quad (3.7)$$

As Equações 3.1 a 3.7 formam um conjunto completo de equações diferenciais que podem ser resolvidas com condições de contorno (mecânicas e elétricas) apropriadas. Uma descrição equivalente desse problema de valor de contorno é o princípio variacional de Hamilton estendido para um meio contínuo piezelétrico

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathcal{W} dt = 0, \quad (3.8)$$

onde o operador δ denota variação de primeira ordem, t_0 e t_f definem o intervalo de tempo, \mathcal{L} é o Lagrangiano e \mathcal{W} é o trabalho virtual das forças externas (mecânicas e elétricas) [Lerch, 1990; Tiersten, 1967]. O termo Lagrangiano é determinado pelas energias disponíveis no meio piezelétrico [Lerch, 1990], então

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} (\mathcal{K} - \mathcal{H}) d\Omega. \quad (3.9)$$

Dessa forma, esse termo é definido como a diferença entre a energia cinética \mathcal{K} e a entalpia

elétrica \mathcal{H} , ao invés da diferença entre energia cinética e interna como em elasticidade pura [Tiersten, 1967].

A primeira variação da densidade de energia cinética é dada por

$$\delta\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho\delta\dot{\mathbf{u}}^T\dot{\mathbf{u}}, \quad (3.10)$$

onde ρ é a massa específica e $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor campo de velocidades. Integrando-se por partes a Equação 3.10, sobre o intervalo de tempo de t_0 a t_f , obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta\mathcal{K} dt = \rho\delta\mathbf{u}^T\dot{\mathbf{u}}\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \rho\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}} dt. \quad (3.11)$$

Entretanto, a variação $\delta\mathbf{u}$ deve ser nula em $t = t_0$ e $t = t_f$ [Tiersten, 1967]. Dessa forma, o primeiro termo da integração por partes será nulo e a variação da densidade de energia cinética pode ser reescrita como

$$\delta\mathcal{K} = -\rho\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.12)$$

A densidade de entalpia elétrica, definida no capítulo anterior, pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[\mathbf{S}^T\mathbf{T} - \mathbf{E}^T\mathbf{D}]. \quad (3.13)$$

Dessa forma, a primeira variação da densidade de entalpia elétrica é dada por [Piefort, 2001]:

$$\delta\mathcal{H} = \delta\mathbf{S}^T([\mathbf{c}^E]\mathbf{S} - [\mathbf{e}^T]\mathbf{E}) - \delta\mathbf{E}^T([\mathbf{e}]\mathbf{S} + [\boldsymbol{\epsilon}^S]\mathbf{E}). \quad (3.14)$$

O termo referente ao trabalho virtual das forças externas para o problema, no qual as condições de contorno essenciais são o campo de deslocamento prescrito em Γ_3 ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$) e o potencial elétrico em Γ_4 ($\phi = \bar{\phi}$), é dado por

$$\delta\mathcal{W} = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\phi\boldsymbol{\zeta}_{\Gamma} d\Gamma + \delta\mathbf{u}^T\mathbf{f}_P - \delta\phi\mathbf{q}_P, \quad (3.15)$$

onde \mathbf{f}_Ω são as forças de corpo, \mathbf{f}_Γ são as forças de superfície sobre Γ_1 , ζ_Γ é a carga elétrica sobre Γ_2 , \mathbf{f}_P são as forças pontuais e \mathbf{q}_P são as cargas elétricas pontuais.

As Equações 3.10 e 3.14 definem a variação de primeira ordem do Lagrangiano. Substituindo essas equações e o trabalho virtual (Equação 3.15) no princípio variacional de Hamilton, apresentado na Equação 3.8, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{S}^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T [\mathbf{e}]^T \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T [\mathbf{e}] \mathbf{S} + \delta \mathbf{E}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{E} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_\Omega) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_\Gamma d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta \phi \zeta_\Gamma d\Gamma + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_P - \delta \phi \mathbf{q}_P = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 Modelo de elementos finitos com acoplamento piezoeletrico

O campo de deslocamentos e os potenciais elétricos podem ser aproximados como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^n, \quad (3.17)$$

$$\phi = \mathbf{N}_\phi \phi^n, \quad (3.18)$$

onde \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_ϕ são matrizes contendo as funções de interpolação com suporte compacto; \mathbf{u}^n e ϕ^n são os deslocamentos e potenciais elétricos nodais. Conseqüentemente, é possível reescrever as relações das Equações 3.3 e 3.4 da seguinte forma

$$\mathbf{S} = \mathcal{D} \mathbf{N}_u \mathbf{u}^n = \mathbf{B}_u \mathbf{u}^n, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{N}_\phi \phi^n = -\mathbf{B}_\phi \phi^n, \quad (3.20)$$

onde \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são as matrizes de derivadas das funções de interpolação. Dessa forma, é possível reescrever o princípio variacional (Equação 3.16) em termos das funções de interpolação e suas derivadas, assim

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{nT} \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega \ddot{\mathbf{u}}^n + \delta \mathbf{u}^{nT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{B}_u d\Omega \mathbf{u}^n + \delta \mathbf{u}^{nT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{e}]^T \mathbf{B}_\phi d\Omega \phi^n + \\ + \delta \phi^{nT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T [\mathbf{e}] \mathbf{B}_u d\Omega \mathbf{u}^n - \delta \phi^{nT} \int_{\Omega} \mathbf{B}_\phi^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{B}_\phi d\Omega \phi^n - \delta \mathbf{u}^{nT} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_\Omega d\Omega + \\ - \delta \mathbf{u}^{nT} \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_\Gamma d\Gamma + \delta \phi^{nT} \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_\phi^T \zeta_\Gamma d\Gamma - \delta \mathbf{u}^{nT} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_P + \delta \phi^{nT} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_P = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Essa equação deve ser satisfeita para qualquer escolha de $\delta \mathbf{u}^n$ e $\delta \phi^n$ que respeite as condições de contorno essenciais do problema. Portanto, isolando os termos referentes à cada variação (de deslocamentos e de potenciais elétricos) e utilizando as escolhas naturais para essas variações, a Equação 3.21 pode ser reescrita de forma matricial como

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u}^n + \mathbf{K}_{u\phi} \phi^n = \mathbf{f}^n, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^T \mathbf{u}^n + \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi^n = \mathbf{q}^n, \quad (3.23)$$

onde \mathbf{M}_{uu} é a matriz de massa; \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes de rigidez, de acoplamento piezoeletrico e de capacitância dielétrica, respectivamente. As forças mecânicas externas \mathbf{f}^n e cargas elétricas aplicadas \mathbf{q}^n são dadas por

$$\mathbf{f}^n = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_P, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{q}^n = - \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}_{\phi}^T \zeta_{\Gamma} d\Gamma - \mathbf{N}_{\phi}^T \mathbf{q}_P. \quad (3.25)$$

O princípio de Hamilton deve ser verificado para toda a estrutura por meio de equações em termos de matrizes globais, obtidas através da superposição das matrizes dos elementos:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{c}^E] \mathbf{B}_u d\Omega, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{e}]^T \mathbf{B}_{\phi} d\Omega, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{\phi}^T [\boldsymbol{\epsilon}^S] \mathbf{B}_{\phi} d\Omega. \quad (3.29)$$

3.3 Problemas acoplados

No problema com acoplamento piezolétrico abordado neste trabalho, a magnitude dos graus de liberdade mecânicos e elétricos são muito distintas. Além disso, ocorre um problema de mal condicionamento da matriz acoplada devido à diferença da ordem de grandeza dos tensores constitutivos. O escalonamento da unidade básica de força é um procedimento que pode ser adotado para eliminar o problema de condicionamento [Qi et al., 1997]. Para isso, utiliza-se um múltiplo da unidade de força, como

$$1\bar{N} = 1 \cdot 10^p N, \quad (3.30)$$

onde p é um número inteiro positivo que depende da magnitude dos tensores constitutivos envolvidos. Dessa forma, o tensor constitutivo $[\mathbf{c}^E]$ passa a ter magnitude

$$[\bar{\mathbf{c}}^E] = 10^{-p} [\mathbf{c}^E]. \quad (3.31)$$

De forma análoga, o tensor de capacitância dielétrica $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ passa a ter magnitude

$$[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^S] = 10^p [\boldsymbol{\epsilon}^S]. \quad (3.32)$$

Como consequência, os graus de liberdade elétricos passam a ter magnitude

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = 10^{-p} \boldsymbol{\phi}, \quad (3.33)$$

que são mais próximas às magnitudes dos graus de liberdade mecânicos [Cardoso, 2005].

3.4 Elemento não-conforme de Taylor

Neste trabalho, o modelo de elementos finitos com acoplamento piezolétrico foi implementado para um elemento finito sólido de 8 nós com modos incompatíveis. Esse elemento apresenta modos quadráticos de deslocamento que produzem um melhor resultado para comportamento de flexão do que o elemento isoparamétrico. As funções de interpolação para um elemento isoparamétrico em termos das coordenadas naturais são

$$N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1i}\xi_1)(1 + \xi_{2i}\xi_2)(1 + \xi_{3i}\xi_3), \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (3.34)$$

onde ξ_{1i} , ξ_{2i} e ξ_{3i} são as coordenadas do i -ésimo elemento no espaço $\boldsymbol{\xi}$ (domínio do elemento) [Hughes, 1987]. As funções de interpolação referentes aos modos quadráticos são

$$\begin{aligned} N_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 1 - \xi_1^2, \\ N_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 1 - \xi_2^2, \\ N_{11}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 1 - \xi_3^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Não existem nós associados aos modos adicionais. Os deslocamentos referentes a esses modos são chamados de generalizados, e podem ser considerados como graus de liberdade internos do elemento. Os modos incompatíveis resultam em deslocamentos descontínuos entre nós. Como os deslocamentos generalizados são independentes para cada elemento, eles podem ser eliminados através de condensação estática. Para isso, a matriz de rigidez do elemento pode ser considerada como

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{da} \\ \mathbf{K}_{ad} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

onde \mathbf{K}_{dd} é a matriz de rigidez usual para o elemento isoparamétrico, $\mathbf{K}_{da} = \mathbf{K}_{ad}^T$ é uma matriz retangular, e \mathbf{K}_{aa} é uma matriz quadrada com termos referentes à rigidez generalizada [Wilson et al., 1973; Hughes, 1987]. A matriz de rigidez condensada \mathbf{K}_c^e é obtida por:

$$\mathbf{K}_c^e = \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{da}\mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{K}_{ad}. \quad (3.37)$$

Embora essa formulação induza significativa melhora nos resultados para casos com flexão, quando o elemento toma a forma de um cubo arbitrário ocorre um comportamento errático. Dessa forma, os modos quadráticos devem ser modificados para corrigir essa deficiência. Para isso, as derivadas das funções de interpolação referentes aos modos adicionais devem ser calculadas em $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Com essa modificação, o elemento satisfaz o teste

para configurações arbitrárias [Taylor et al., 1976]. Análise de estabilidade e convergência para esse tipo de elemento que incorpora um campo de deformação enriquecido foi realizada através de formulação variacional [Reddy e Simo, 1995] e resultados numéricos comprovam uma menor estimativa de erro [Arunakirinathar e Reddy, 1995].

3.5 Análise modal

Existem duas configurações possíveis para um conjunto de eletrodos (na face aterrada e na face potencial) em uma estrutura: curto circuito e circuito aberto. Na configuração em circuito aberto os eletrodos estão desconectados. Dessa forma, a diferença de potencial entre os eletrodos depende da dinâmica da estrutura [Becker et al., 2006]. Quando submetido à uma excitação harmônica com $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ e $\phi = \phi_0 e^{j\omega t}$, o sistema apresentado nas Equações 3.22 e 3.23, escrito em termos das matrizes globais, torna-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} e^{j\omega t}. \quad (3.38)$$

Considerando vibrações livres, a Equação 3.38 resulta no problema de autovalores generalizado

$$(\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{u\phi}^T - \omega_a^2 \mathbf{M}_{uu}) \psi_a = \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

onde ψ_a é o autovetor e ω_a é a frequência modal para a configuração em circuito aberto. Para configuração em curto-circuito, assumindo $\phi_0 = \mathbf{0}$, o problema de autovalores generalizado é dado por

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega_c^2 \mathbf{M}_{uu}) \psi_c = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

onde ψ_c é o autovetor e ω_c é a frequência modal para a configuração em curto-circuito [Lim, 2003].

4. CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS

Vibrações podem gerar diversos problemas em uma estrutura como, por exemplo, fadiga estrutural, transmissão de vibrações para outros sistemas, ruídos, entre outros. Os métodos para controle de vibrações estruturais podem ser divididos, de forma simplificada, em três grupos: passivos, semi-ativos e ativos. Um sistema de controle passivo não requer energia externa e informações do sistema. Usualmente, são empregados componentes simples como, por exemplo, cabos e amortecedores para absorção de uma parcela da energia de vibração. Em sistemas semi-ativos, apenas informações do sistema são utilizadas para orientar modificações de certas propriedades da estrutura como rigidez e amortecimento. O controle ativo, em geral, consiste na utilização de sensores e atuadores para minimizar vibrações indesejadas na estrutura e se adaptar a certas condições de excitação externa. [Santos, 2008; Silveira, 2012].

Neste capítulo, os modelos estruturais de segunda ordem são apresentados para um sistema de controle com determinado número de entradas e saídas. Essa teoria é utilizada para escrever o problema estrutural em representação em espaço de estados e, posteriormente, definir algumas medidas de controlabilidade e observabilidade para um determinado sistema.

4.1 Modelos estruturais de segunda ordem

Nesta seção, serão discutidos os modelos representados por equações diferenciais lineares de segunda ordem, usualmente utilizados para análise dinâmica de estruturas. Tipicamente, os modelos de segunda ordem são representados em coordenadas nodais ou modais [Gawronski, 2004].

4.1.1 Modelos nodais

Os modelos nodais são definidos em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais. Esses modelos são caracterizados pelas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, além da posição dos sensores e atuadores. Considerando um sistema com n_d graus de liberdade, s entradas e r saídas, uma estrutura flexível em coordenadas nodais pode ser representada pelas seguintes equações diferenciais matriciais [Gawronski, 2004]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{B}_o\mathbf{u}^c, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ov}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_{od}\mathbf{u}. \quad (4.2)$$

Nessas equações, \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são os vetores n_d -dimensionais de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, respectivamente; \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez com dimensões $n_d \times n_d$; \mathbf{u}^c é o vetor s -dimensional de entradas; \mathbf{y} é o vetor r -dimensional de saídas; \mathbf{B}_o é a matriz de entradas com dimensão $n_d \times s$; \mathbf{C}_{ov} e \mathbf{C}_{od} são as matrizes de saídas em velocidades e deslocamentos, respectivamente, com dimensões $r \times n_d$.

4.1.2 Modelos modais

Modelos modais são definidos em coordenadas modais, que são frequentemente utilizadas em análises de estruturas complexas modeladas por elementos finitos visando reduzir a ordem do sistema de equações [Gawronski, 2004]. Considerando vibrações livres de uma estrutura sem amortecimento, a equação de movimento pode ser escrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

A solução da equação 4.3 é $\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}e^{j\omega t}$. Substituindo essa solução e sua segunda derivada na equação de movimento, obtém-se

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\psi}e^{j\omega t} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Dessa forma, para esse conjunto de equações homogêneas existirá solução não-trivial se

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0. \quad (4.5)$$

Essa condição será satisfeita para um conjunto de n valores de frequências naturais ω_i , sendo $i = 1, 2, \dots, n$ e $n \leq n_d$. Então, define-se a matriz de frequências naturais como

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

e a matriz modal com os correspondentes vetores $\{\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n\}$, que satisfazem o sistema de equações homogêneas, na forma

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \dots & \boldsymbol{\psi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \dots & \psi_{n1} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \dots & \psi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1nd} & \psi_{2nd} & \dots & \psi_{nnd} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

A matriz modal tem a propriedade de diagonalizar as matrizes de massa e de rigidez. A partir dessas transformações são obtidas equações desacopladas através das matrizes de massa e de rigidez modais. Realizando a mesma operação com a matriz de amortecimento, obtém-se a matriz de amortecimento modal que pode ou não ser diagonal [Gawronski, 2004].

Para escrever um modelo em termos de coordenadas modais, uma variável chamada de deslocamento modal é definida da seguinte forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi}\boldsymbol{\eta}. \quad (4.8)$$

Assim, a equação de movimento em termos dessa nova variável é obtida substituindo essa relação nas Equações 4.1 e 4.2. Em seguida, cada termo da Equação 4.1 é pré-multiplicado por $\mathbf{\Psi}^T$, resultando em

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Psi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}^c, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ov} \mathbf{\Psi} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{od} \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.10)$$

Assumindo amortecimento proporcional, a Equação 4.9 pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{M}_m \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}^c, \quad (4.11)$$

onde as matrizes de massa, rigidez e amortecimento modais são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{M}_m = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{K}_m = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{D}_m = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Psi}. \quad (4.12)$$

Para a obtenção de um sistema normalizado pela massa, pré-multiplicando a Equação 4.11 por \mathbf{M}_m^{-1} , tem-se

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} = \mathbf{M}_m^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_o \mathbf{u}^c. \quad (4.13)$$

Introduzindo uma notação mais simples, as equações de movimento e de saída do sistema podem ser reescritas como [Gawronski, 2004]:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_m \mathbf{u}^c, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{mv} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{md} \boldsymbol{\eta}, \quad (4.15)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{Z} são, respectivamente, as matrizes diagonais de frequências naturais e de amortecimento. Além disso, nessa notação, foram introduzidas as matrizes de entradas e saídas modais

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{B}_o, \quad \mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov} \boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{C}_{md} = \mathbf{C}_{od} \boldsymbol{\Psi}. \quad (4.16)$$

4.1.3 Modelos modais através de representação em espaço de estados

Para a realização de análises dinâmicas e de controle, torna-se conveniente representar as equações de movimento da estrutura na forma de espaço de estados. Um sistema linear invariante no tempo de dimensões finitas é descrito pelas equações

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}^c, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (4.18)$$

onde o vetor N -dimensional \mathbf{x} é o vetor de estado, o vetor s -dimensional \mathbf{u}^c é a entrada do sistema, e o vetor r -dimensional \mathbf{y} é a saída do sistema. Além disso, \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são respectivamente as matrizes do sistema, de entrada e de saída [Gawronski, 2004].

Essa representação depende da escolha do vetor de estado. O modelo mais popular, com abordagem mais simples e interpretação física direta, é definido em termos dos deslocamentos e velocidades modais [Gawronski, 2004], da seguinte forma

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Então, as Equações 4.14 e 4.15 podem ser representadas pelo conjunto de equações de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad (4.20)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_m \mathbf{q}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{mv} \mathbf{x}_2 + \mathbf{C}_{md} \mathbf{x}_1. \quad (4.22)$$

Esse sistema é equivalente ao conjunto de equações no espaço de estado apresentado nas Equações 4.17 e 4.18, com parâmetros de estado dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{md} & \mathbf{C}_{mv} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

4.2 Controlabilidade e observabilidade

Uma estrutura é considerada controlável se os atuadores instalados excitam todos os seus modos estruturais. De forma análoga, uma estrutura é observável se os sensores instalados detectam os movimentos de todos os seus modos estruturais [Gawronski, 2004]. Existem diversos critérios para determinar a controlabilidade e observabilidade de um sistema. Nesta seção, serão apresentadas as formas mais usuais de realizar essa análise: através das matrizes e dos Gramianos de controlabilidade e observabilidade.

4.2.1 Matrizes de controlabilidade e observabilidade

A controlabilidade, como uma medida de interação entre a entrada e os estados de um sistema, envolve as matrizes do sistema \mathbf{A} e de entrada \mathbf{B} . Um sistema linear será controlável em t_0 se existir uma entrada $\mathbf{u}(t)$ contínua por partes, com $t \in [t_0, t_f]$, que consiga transferir o sistema de um estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para $\mathbf{x}(t_f) = 0$, em um tempo finito $t_f > t_0$. O sistema será completamente controlável se essa condição for satisfeita para qualquer momento inicial t_0 e qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$. Para a observabilidade, como medida de interação entre os estados de um sistema e a saída, as matrizes envolvidas são as matrizes do sistema \mathbf{A} e de saída \mathbf{C} . De forma análoga, um sistema linear será observável em t_0 se o estado $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado pela saída $\mathbf{y}(t)$ em um tempo finito $t \in [t_0, t_f]$. Consequentemente, esse sistema será completamente observável se essa condição for satisfeita para qualquer estado inicial [Gawronski, 2004]. Uma forma de determinar essas condições é através das matrizes de controlabilidade e de observabilidade. Para um sistema linear com N estados, s entradas e r saídas, a matriz de controlabilidade é

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}], \quad (4.24)$$

e a matriz de observabilidade é dada por

$$\mathcal{O} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{N-1}]^T. \quad (4.25)$$

Esse sistema é considerado completamente controlável e observável se as matrizes \mathcal{C} e \mathcal{O} apresentarem posto N [Gawronski, 2004].

A aplicação desse critério pode se tornar inviável para sistemas com muitos estados devido as dimensões das matrizes \mathcal{C} e \mathcal{O} . Além disso, esse critério é puramente binário: o sistema é completamente controlável/observável ou não.

4.2.2 Gramianos de controlabilidade e observabilidade

Um critério alternativo para determinar a controlabilidade e/ou observabilidade de um sistema é através da análise dos Gramianos. Os Gramianos são matrizes não-negativas que expressam as propriedades de controlabilidade e observabilidade de forma qualitativa.

Além disso, essa abordagem não apresenta as dificuldades numéricas encontradas na análise da seção anterior [Gawronski, 2004].

Se um determinado sistema é assintoticamente estável (se todos os polos de \mathbf{A} apresentam parte real negativa), a resposta do sistema é limitada e a matriz de covariância para o estado estacionário é finita. Dessa forma, considerando o sistema linear apresentado nas Equações 4.17 e 4.18, e a resposta do sistema para um conjunto de ruídos brancos independentes com intensidades unitárias, o Gramiano de controlabilidade pode ser definido da seguinte forma

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau. \quad (4.26)$$

De forma análoga, o Gramiano de observabilidade é dado por

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau. \quad (4.27)$$

De forma mais conveniente, os Gramianos podem ser determinados através das seguintes equações diferenciais [Preumont, 1997]:

$$\dot{\mathbf{W}}_c = \mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T, \quad (4.28)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_o = \mathbf{A}^T\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C}, \quad (4.29)$$

onde as soluções são matrizes variáveis no tempo. Entretanto, considerando a solução para o caso estacionário, a equação diferencial 4.28 pode ser substituída por uma equação algébrica [Preumont, 1997]. Para isso, assumindo $\dot{\mathbf{W}}_c = \mathbf{0}$, obtém-se a seguinte equação de Lyapunov

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

O sistema é considerado controlável se todos os estados do sistema podem ser excitados pelos atuadores. Essa condição é satisfeita se, e somente se, o Gramiano de controlabilidade for positivo definido [Gawronski, 2004; Preumont, 1997].

5. MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo, os conceitos básicos do método de otimização topológica são apresentados. No início do capítulo, faz-se uma breve descrição e definição do problema de otimização. Após, esse problema é definido na forma padrão de uma programação linear (LP) e alguns métodos de solução são brevemente descritos. Por fim, conceitos teóricos de otimização topológica são apresentados, assim como instabilidades numéricas inerentes a esse método.

5.1 Conceitos básicos

Em um problema de otimização, busca-se extremizar (minimizar ou maximizar) uma determinada função, chamada de função objetivo, que depende das variáveis de projeto. Essas variáveis são os parâmetros do problema que podem ser alterados durante o processo de otimização. Geralmente, um problema de otimização está sujeito a restrições que podem ser impostas devido à diversos fatores, como: leis da física, requisitos legais, limitações orçamentárias, etc. A formulação de um problema de otimização é uma etapa fundamental no processo de otimização e consiste em escrever de forma matemática o problema real [Arora, 2004].

Normalmente, a formulação de um problema de otimização é realizada a partir da escolha da função objetivo que deve quantificar o que se deseja otimizar. Essa função objetivo pode ser classificada de acordo número de funções adotadas na formulação. A função objetivo é considerada simples quando se deseja extremizar uma única função $f(\mathbf{x})$. Quando se deseja extremizar mais de uma função, $F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})]$, a função objetivo é chamada de multiobjetivo. A utilização de múltiplas funções objetivo é usualmente evitada visto que podem implicar em complicações no processo de otimização. Em problemas de otimização estrutural, pode-se adotar como função objetivo parâmetros como: peso, deslocamento, tensão mecânica, frequências de vibração, cargas de flambagem, custo, entre outros [Haftka e Gurdal, 1992; Arora, 2004].

As variáveis de projeto podem ser classificadas em variáveis inteiras ou contínuas. As variáveis inteiras podem assumir somente valores pré-definidos. Geralmente, a utilização desse tipo de variáveis ocorre quando existe uma limitação como, por exemplo, de confi-

gurações disponíveis no mercado. Em contrapartida, as variáveis contínuas podem assumir qualquer valor em um determinado intervalo [Haftka e Gurdal, 1992].

5.2 Programação matemática

A programação matemática busca a extremização de uma função f definida em um espaço n -dimensional de projeto \mathbb{R}^n e limitada por um conjunto \mathbb{S} no espaço de projeto. O conjunto \mathbb{S} pode ser definido por restrições de igualdade ou de desigualdade. Além disso, essas restrições podem assumir a forma linear ou não-linear. A função f , juntamente com o conjunto \mathbb{S} , é definida como um problema de programação matemática. Esse tipo de problema pode ser classificado de acordo com a natureza e a forma das variáveis de projeto, restrições e função objetivo [Haftka e Gurdal, 1992], como por exemplo:

- Programação Linear (LP): função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não-Linear (NLP): função objetivo e/ou restrições não-lineares;
- Programação Inteira (IP): busca da solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

Neste trabalho, o problema de otimização é resolvido através de programação linear sequencial (SLP). Dessa forma, o problema é abordado como uma sequência de programações lineares. Conceitos relacionados à essa abordagem e métodos de resolução serão apresentados nessa seção.

5.2.1 Programação linear (LP)

O termo programação linear descreve uma classe particular de problemas de extremização nos quais a função objetivo e as restrições são funções que dependem linearmente das variáveis de projeto. Uma programação linear na forma padrão é dada por

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de variáveis de projeto com dimensão $n \times 1$, \mathbf{c} é um vetor com dimensão $n \times 1$, \mathbf{A} é uma matriz com dimensão $m \times n$, e \mathbf{b} é um vetor com dimensão $m \times 1$; sendo n o número de variáveis de projeto e m o número de restrições do problema. Qualquer programação linear que inclua restrições de desigualdade pode ser posta na forma padrão através da inclusão de variáveis de folga [Haftka e Gurdal, 1992]. Além disso, o problema primal de minimização de uma função linear para um conjunto de restrições lineares é equivalente ao problema dual de maximização de outra função linear para um outro conjunto de restrições lineares. Tanto a função objetivo como as restrições do problema dual são obtidos a partir da função objetivo e das restrições do problema primal [Dantzig, 1998].

Pela condição de linearidade da função objetivo, o extremo para um problema desse tipo encontra-se no contorno do espaço de projeto descrito pelas relações de restrição. Como as restrições também são lineares, o projeto ótimo deve situar-se na intersecção de duas ou mais restrições. Essa afirmação é correta exceto quando o contorno da restrição é paralela às curvas de nível da função objetivo. Nesse caso, a solução ótima não será única. Essas características permitiram a elaboração de algoritmos simples e eficientes para obtenção da solução ótima [Haftka e Gurdal, 1992]. O simplex foi o primeiro método efetivo elaborado para resolução de um LP. A ideia geométrica desse método consiste em percorrer os pontos de intersecção formados pelas restrições no espaço de projeto [Dantzig, 1951]. Entretanto, o número de operações necessárias para a convergência pode crescer exponencialmente com o número de variáveis de projeto [Haftka e Gurdal, 1992]. Ao contrário do simplex, o método de ponto interior realiza a busca do projeto ótimo partindo do interior do domínio viável até obter uma solução aproximadamente ótima e apresenta complexidade polinomial [Karmarkar, 1984].

5.2.2 Programação linear sequencial (SLP)

A abordagem para aproximação mais simples é a programação linear sequencial (SLP). Considera-se um problema de otimização na forma

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \geq 0, & j = 1, \dots, m_g, \\ h_k(\mathbf{x}) = 0, & k = 1, \dots, m_h. \end{cases} \quad (5.4)$$

Mesmo que o problema envolva funções que não sejam lineares, pode-se realizar a linearização através de uma expansão em séries de Taylor. Dessa forma, as funções do problema de otimização (Equações 5.3 e 5.4) podem ser aproximadas, na vizinhança de \mathbf{x}_0 , da seguinte forma

$$\min f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0}, \quad (5.5)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} g_j(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left. \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} \geq 0, & j = 1, \dots, m_g, \\ h_k(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left. \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0} = 0, & k = 1, \dots, m_h, \end{cases} \quad (5.6)$$

Além disso, é introduzida uma nova restrição, chamada de limites móveis, que define o intervalo no qual a aproximação é aceitável

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

onde x_i^l e x_i^u são os limites inferior e superior, respectivamente.

A solução final do problema linearizado \mathbf{x}_L raramente será suficientemente próxima do projeto ótimo. Entretanto, o processo de otimização pode ser repetido considerando a linearização da função objetivo e das restrições na vizinhança de um novo ponto inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_L$. Dessa forma, o problema de otimização original é substituído por uma sequência de programações lineares. A escolha dos limites móveis é um fator importante para o desempenho do algoritmo SLP. Usualmente, os limites móveis devem ser atualizados sistematicamente ao longo do processo de otimização. Além disso, o intervalo definido por esses limites deve ser reduzido conforme a solução da programação linear se aproxima do ótimo [Haftka e Gurdal, 1992].

Neste trabalho, adota-se uma atualização para os valores dos limites móveis baseada no histórico das variáveis de projeto [Cardoso, 2000]. Essa atualização é realizada com a utilização de uma variável adicional, da seguinte forma

$$x_i^l = \max(0, x_{0i} - \alpha_i x_{0i}), \quad (5.8)$$

$$x_i^u = \min(x_{0i} + \alpha_i x_{0i}, 1), \quad (5.9)$$

onde a variável adicional α_i é definida de acordo com a evolução da i -ésima variável de projeto durante as duas iterações anteriores. Se os valores dessa variável de projeto está aumentando (ou diminuindo) de forma contínua, os limites móveis se tornam maiores de acordo com a seguinte equação

$$\alpha_i = (1 + \alpha_g)\alpha_i. \quad (5.10)$$

Caso o histórico dessa variável de projeto apresente comportamento alternado, os limites móveis devem ser reduzidos, de forma análoga à situação anterior, através da seguinte equação

$$\alpha_i = (1 - \alpha_g)\alpha_i, \quad (5.11)$$

onde α_g é um fator de ganho para o calibrador dos limites móveis que se mantém constante durante todo o processo de otimização.

5.3 Conceitos teóricos de otimização topológica

O objetivo do método de otimização topológica é definir a configuração ótima (domínio desconhecido Ω_d) de uma estrutura dentro de um domínio pré-definido (domínio fixo estendido de projeto Ω). A Figura 5.1 apresenta uma representação desse problema.

As quantidades conhecidas no problema são as cargas aplicadas, as possíveis condições de apoio, o volume da estrutura a ser construída. Dessa forma, o domínio fixo estendido pode ser definido como um domínio de forma fixa cujos limites são determinados pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento [Bendsøe e Sigmund,

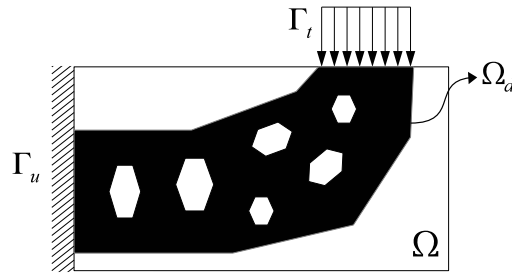


Figura 5.1 – Domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω .

2003]. De forma matemática, esse problema pode ser escrito como

$$\min_{\rho} f(\rho), \quad (5.12)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} V = \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V^{\max}, \\ \rho(x) = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.13)$$

Tipicamente, o problema de otimização topológica é tratado dividindo o domínio Ω em n_e elementos finitos. Considerando que as densidades são constantes em cada elemento finito, o problema apresentado nas Equações 5.12 e 5.13 pode ser reescrito como

$$\min_{\rho} f(\rho), \quad (5.14)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} V = \sum_{i=1}^{n_e} \rho_i v_i \leq V^{\max}, \\ \rho_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, n_e, \end{cases} \quad (5.15)$$

onde ρ_i e v_i são a densidade e o volume do elemento, respectivamente.

Como solução do problema de otimização topológica, são definidos os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção ou adição de material. Entretanto, ao contrário da otimização de forma, a otimização topológica não altera a malha de elementos finitos durante o processo de otimização. A única alteração ocorre na distribuição de material nos elementos, sendo essa uma das principais vantagens desse tipo de otimização [Sigmund e Petersson, 1998; Bendsøe e Sigmund, 2003].

5.3.1 Parametrização de projeto

No projeto da topologia de uma estrutura, busca-se determinar a localização ótima de um dado material (ou mais de um material) no espaço. Na forma discreta, isso corresponde à uma representação em preto e branco da estrutura, como apresentado na Figura 5.1. Considerando o problema no qual pretende-se distribuir um único material isotrópico no domínio fixo estendido, a parametrização pode ser escrita como

$$Y(x) = 1_{\Omega_d}(x)Y_0, \quad (5.16)$$

onde $Y(x)$ é a propriedade material efetiva (módulo de elasticidade, por exemplo), Y_0 é a mesma propriedade do material base e $1_{\Omega_d}(x)$ é uma função discreta que caracteriza a estrutura em cada ponto x do domínio Ω , definida como

$$1_{\Omega_d}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_d \\ 0 & \text{se } x \in \Omega_v \end{cases}, \quad (5.17)$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega_d} d\Omega \leq V^{max}, \quad (5.18)$$

onde Ω_v é o conjunto diferença $\Omega \setminus \Omega_d$ e V^{max} é a restrição de volume para o material base.

O problema de otimização topológica inteira (0-1) é mal posto e, em geral, carece de solução [Cheng, 1992]. Entretanto, existem diversas metodologias para contornar esse problema. Uma possibilidade é através da modificação do problema de forma que a nova versão possua solução. Nesse contexto, existem duas formas de superar o problema de não existência de solução: através da relaxação ou da restrição do problema de projeto [Sigmund e Petersson, 1998].

A abordagem mais comum para resolver esse problema é através da substituição das variáveis inteiras por variáveis contínuas, que podem ser interpretadas como densidades artificiais do material. Entretanto, é necessário que a solução da otimização seja constituída quase que inteiramente de regiões com material ou sem material. Ou seja, valores intermediários dessas densidades artificiais devem ser penalizadas de forma a solução seja conduzida à forma discreta. A penalização das variáveis intermediárias pode ser realizada através de interpolação não-linear, conhecida como SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*),

da seguinte forma

$$Y(x) = \rho^p(x)Y_0, \quad p > 1, \quad (5.19)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \, d\Omega \leq V^{max}, \quad (5.20)$$

$$0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega, \quad (5.21)$$

onde $\rho(x)$ é a densidade artificial (variável de projeto) no ponto x e p é o expoente de penalização [Bendsøe e Kikuchi, 1988; Bendsøe e Sigmund, 2003].

A utilização de um expoente de penalização maior que 1 induz um maior custo para as variáveis de projeto com valores intermediários no processo de otimização. Dessa forma, esses valores são evitados no projeto ótimo. Além disso, a comparação desse tipo de interpolação com modelos micromecânicos é apenas utilizada para o entendimento dessas medidas computacionais. Conseqüentemente, a interpretação da solução de um problema de otimização que não convergiu totalmente para uma solução discreta 0-1 é uma etapa importante no projeto ótimo [Bendsøe e Sigmund, 2003].

5.4 Problemas numéricos em otimização topológica

Nesta seção, serão apresentadas as instabilidades numéricas mais comuns em problemas de otimização topológica, assim como algumas técnicas de prevenção. Esses problemas numéricos podem ser divididos em três categorias: instabilidade de tabuleiro, dependência de malha e mínimos locais.

5.4.1 Dependência da malha

A dependência da malha é um problema numérico comum em problemas de otimização topológica. Essa instabilidade se caracteriza por diferentes soluções ótimas para diferentes níveis de discretização do domínio de projeto. O problema de dependência de malha é ilustrado na Figura 5.2, onde são apresentadas soluções para o problema de minimização do trabalho das forças externas para uma viga MBB utilizando os mesmos parâmetros de otimização.

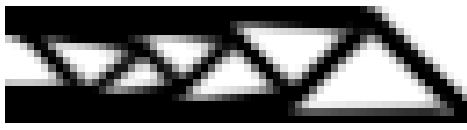
(a) 1024 (64×16) elementos finitos(b) 2304 (96×24) elementos finitos

Figura 5.2 – Exemplo de soluções com dependência de malha.

Resolvendo o mesmo problema com uma maior discretização, a solução obtida é uma estrutura muito mais detalhada. Entretanto, idealmente, o refinamento da malha de elementos finitos deveria resultar em uma melhor modelagem da estrutura ótima e em uma melhor descrição dos seus contornos, e não em uma estrutura qualitativamente diferente e mais detalhada [Sigmund e Petersson, 1998].

Os problemas de dependência de malha podem ser divididos em duas categorias: (a) decorrente da não unicidade da solução ou (b) decorrente da não existência de solução. A remoção da não unicidade não pode ser realizada para os problemas da categoria (a). Entretanto, a introdução de restrições de fabricação podem determinar uma solução menos oscilante. Os problemas da categoria (b) são aqueles nos quais são obtidas topologias diferentes à medida que a malha de elementos finitos é refinada. Para esse tipo de problema, existem métodos que buscam restringir as variações das densidades, obtendo assim soluções macroscópicas 0-1 [Sigmund e Petersson, 1998]. Métodos de restrição como controle de perímetro [Ambrosio e Buttazzo, 1993], restrição global do gradiente [Bendsøe, 1995] e restrição local do gradiente [Petersson e Sigmund, 1998] tiveram a existência das soluções provadas. O problema de dependência de malha também pode ser tratado através da aplicação de filtros de sensibilidade. Esse método é puramente heurístico e produz resultados similares aos obtidos por restrição local do gradiente. Esse filtro modifica a sensibilidade da função objetivo com respeito à uma variável de projeto de acordo com uma média ponderada das sensibilidades em uma vizinhança fixa [Sigmund, 1997].

5.4.2 Instabilidade de tabuleiro

Essa instabilidade numérica consiste em regiões na solução ótima com alternância de elementos sólidos e vazios, como ilustrado na Figura 5.3.

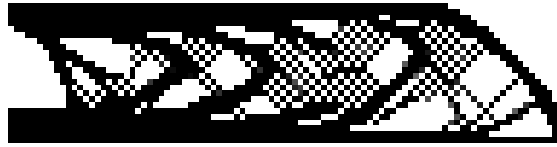


Figura 5.3 – Exemplo de solução com instabilidade de tabuleiro.

Inicialmente, acreditava-se que essas regiões representavam algum tipo de microestrutura ótima. Entretanto, Diaz e Sigmund, 1995, mostraram que estruturas com padrão de tabuleiro apresentam rigidez artificialmente elevada. Jog e Haber, 1996, propuseram um teste para identificação de elementos finitos instáveis. Diversos métodos buscam evitar ou amenizar esses problemas numéricos como, por exemplo, suavização da solução, utilização de elementos de alta ordem, filtragem, entre outros. Além disso, a maioria dos métodos de restrição utilizados para tratar o problema de dependência de malha reduzem, simultaneamente, o padrão de tabuleiro [Sigmund e Petersson, 1998].

5.4.3 Mínimos locais

Analisando as possíveis soluções ótimas para problemas como a viga MBB, torna-se evidente a existência de mínimos locais em problemas de otimização topológica. Geralmente, a não convexidade de um problema indica que métodos baseados em gradiente podem encontrar diferentes soluções de acordo com a escolha de soluções iniciais ou de parâmetros de otimização. Dessa forma, métodos de continuação podem ser empregados na tentativa de garantir a convergência global da solução. Esses métodos alteram gradualmente o problema de uma forma convexa (artificial) para uma forma não convexa (original) durante o processo de otimização [Sigmund e Petersson, 1998]. Existem diferentes procedimentos para continuação como, por exemplo, aumento gradual do fator de penalização [Haber et al., 1996] ou do custo para elementos com densidade intermediária [Guedes e Taylor, 1997], entre outros.

6. METODOLOGIA PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE ATUADORES

Neste capítulo, a metodologia para otimização topológica visando a localização de atuadores piezelétricos em uma estrutura flexível é apresentada. Inicialmente, a teoria de controle é utilizada para projetar o sistema de controle ativo de vibrações para uma estrutura flexível. Para isso, os potenciais elétricos são considerados como a entrada do sistema. Após, o modelo nodal obtido pela formulação de elementos finitos é escrito em termos de coordenadas modais e, então, reduzido através de truncamento. O problema é definido em representação de espaço de estados e o controlador é projetado considerando realimentação linear. Por fim, o problema de localização ótima de atuadores é escrito através de uma formulação de otimização topológica e as sensibilidades, necessárias para a solução do problema através de SLP, são calculadas analiticamente.

6.1 Estratégia de controle

Para o caso em estudo, o modelo de elementos finitos que governa o movimento espacial e o equilíbrio de cargas elétricas é dado por

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\phi}\phi = \mathbf{f}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^T\mathbf{u} + \mathbf{K}_{\phi\phi}\phi = \mathbf{q}, \quad (6.2)$$

onde \mathbf{u} e ϕ são, respectivamente, vetores com os graus de liberdade mecânicos e elétricos; \mathbf{M}_{uu} , \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes globais de massa, de rigidez, de acoplamento piezelétrico e de capacitância dielétrica, respectivamente; \mathbf{f} é o vetor de forças mecânicas externas e \mathbf{q} é o vetor de cargas elétricas.

Para o projeto do sistema de controle, os graus de liberdade elétricos são considerados como entrada no sistema. Dessa forma, a Equação 6.1 pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{u\phi}\phi + \mathbf{f}, \quad (6.3)$$

e a Equação 6.2 pode ser utilizada para calcular as cargas elétricas nodais [Silveira, 2012]. Os graus de liberdade elétricos podem ser divididos em três grupos: aterrados, internos e

potenciais. Os graus de liberdade elétricos aterrados são desconsiderados por apresentar valor prescrito nulo, enquanto os internos podem ser condensados assumindo que a carga elétrica interna é nula [Becker et al., 2006]. Embora reduza o tamanho do sistema de equações, essa abordagem não é adotada visando evitar a condensação estática das matrizes de rigidez, de acoplamento piezelétrico e de capacitância dielétrica.

Neste trabalho, a representação em espaço de estados é definida em termos de coordenadas modais, conforme apresentado na Seção 4.1.2. Dessa forma, a ordem do sistema de equações pode ser reduzida, o que é desejável quando se pretende analisar estruturas complexas modeladas pelo métodos dos elementos finitos. Além disso, o truncamento no m -ésimo modo pode ser empregado para a obtenção de um modelo de ordem reduzida. Esse tipo de redução sempre produz um modelo estável, pois os polos do modelo reduzido são um subconjunto dos polos do modelo completo [Gawronski, 2004]. Uma matriz modal truncada pode ser usada na transformação das coordenadas nodais \mathbf{u} para coordenadas modais $\boldsymbol{\eta}$. Assumindo os modos de menor ordem como os mais significativos para a resposta global do sistema, o vetor de deslocamentos pode ser aproximado pela superposição dos m primeiros modos

$$\mathbf{u} \approx \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\psi}_i \eta_i, \quad (6.4)$$

onde $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_m]$ é a matriz modal truncada e $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}^T$ é o vetor truncado de coordenadas modais.

Considerando uma estrutura flexível com amortecimento viscoso simples, a Equação 6.3 pode ser reescrita em termos de coordenadas modais, utilizando a transformação apresentada na Equação 6.4, como

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K}_{u\phi} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{f}, \quad (6.5)$$

onde \mathbf{Z} e $\boldsymbol{\Omega}$ são as matrizes diagonais de amortecimentos modais e de frequências naturais, respectivamente, considerando os m primeiros modos.

Utilizando o vetor de estado em termos dos deslocamentos e das velocidades modais para representação em espaço de estados, o sistema linear de equações pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\phi\boldsymbol{\phi} + \mathbf{B}_f\mathbf{f}, \quad (6.6)$$

onde \mathbf{A} é a matriz do sistema, \mathbf{B}_ϕ é a matriz de entradas de potenciais elétricos e \mathbf{B}_f é a matriz de entradas de forças mecânicas, dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ -\Omega^2 & -2\mathbf{Z}\Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Psi}^T\mathbf{K}_{u\phi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Psi}^T \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

O sistema de controle é projetado levando em consideração a formulação em regime permanente para um regulador linear-quadrático. Essa é a formulação mais simples e frequentemente empregada em problemas de controle. Considerando o sistema linear apresentado na Equação 6.6, busca-se uma realimentação linear com ganho constante [Preumont, 1997]:

$$\boldsymbol{\phi} = -\mathbf{G}\mathbf{x}, \quad (6.8)$$

de forma que um funcional de custo quadrático J seja minimizado, sendo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \boldsymbol{\phi}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\phi}) dt, \quad (6.9)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz positiva semi-definida de pesos para as variáveis de estado e \mathbf{R} é uma matriz positiva definida de pesos para as entradas de controle.

O projeto desse tipo de regulador requer o conhecimento de todos os valores de ganhos ótimos no intervalo $[0, t_f]$. Entretanto, a abordagem considerando o regime permanente simplifica consideravelmente o projeto do controlador LQR [Vasques e Dias Rodrigues, 2006]. Dessa forma, a matriz de ganho em regime permanente é dada por

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{P}, \quad (6.10)$$

onde a matriz \mathbf{P} é a solução da equação algébrica de Riccati

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}_\phi\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

Embora a equação de Riccati seja não-linear, a existência de solução única é garantida se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\phi)$ for controlável e se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$ for observável [Preumont, 1997]. Dessa forma, a equação de estados em malha fechada pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_\phi \mathbf{G}) \mathbf{x} + \mathbf{B}_f \mathbf{f}. \quad (6.12)$$

Estruturas flexíveis são sistemas com infinitos graus de liberdade. A discretização pelo método dos elementos finitos é, geralmente, suficiente para descrever o comportamento dinâmico dos modos de vibração de baixas frequências. No projeto de controle de estruturas com realimentação e observação de estados, modelos reduzidos, incluindo poucos modos de vibração dominantes, são usualmente adotados. Modelos reduzidos obtidos a partir de um modelo estável sempre são estáveis. Isso ocorre devido ao fato de que os polos do modelo reduzido são um subconjunto dos polos do modelo completo [Gawronski, 2004]. Entretanto, pode ocorrer a desestabilização de modos residuais que não estão incluídos no modelo da estrutura contido no observador de estados. Essa instabilidade é conhecida como "*spillover*" e pode degradar o desempenho do sistema de controle ou de observação [Preumont, 1997]. Métodos para reduzir essa instabilidade são discutidos em diversos trabalhos, como, por exemplo, Balas, 1978 e Preumont et al., 2003.

6.2 Problema de posicionamento ótimo de atuadores

Na maioria das aplicações, uma estrutura pode ser excitada por dois tipos de perturbação: transiente ou persistente. Para o primeiro caso, o objetivo do controle é retornar do estado perturbado para um estado desejado, em um determinado intervalo de tempo, com o mínimo esforço de controle possível. Para o segundo caso, os atuadores devem minimizar os efeitos da perturbação no movimento da estrutura. Considerando o posicionamento de atuadores sob condição de perturbação transiente, deve-se configurar os conjuntos de atuadores de forma que seja maximizada alguma norma do Gramiano de controlabilidade. Por outro lado, sob perturbação persistente, a energia transmitida ao sistema, em estado permanente, deve ser maximizada. Entretanto, para sistemas com pequenos coeficientes de amortecimento e frequências naturais bem espaçadas, qualquer um dos critérios pode ser empregado para posicionamento de atuadores independente do tipo de perturbação [Hać e

Liu, 1993; Leleu et al., 2001].

Considerando que o vetor de estados do sistema descrito na Equação 6.12 apresente uma condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_I$ em decorrência de alguma perturbação. A localização ótima dos atuadores em uma estrutura sujeita à essa excitação é aquela com a qual é necessária a menor energia de controle para levar o sistema à um estado desejado $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ após um tempo T . Essa condição pode ser satisfeita considerando o seguinte problema de mínima energia

$$\min \mathcal{F}(\boldsymbol{\phi}) = \int_0^T \boldsymbol{\phi}^T(t) \boldsymbol{\phi}(t) dt, \quad (6.13)$$

sujeito a $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_I$, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ e a equação de estados 6.12 [Middleton e Goodwin, 1990]. Esse é um problema de controle ótimo linear quadrático com solução conhecida [Hać e Liu, 1993]. Dessa forma, utilizando a definição de gramiano de controlabilidade, a energia de controle pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_0 = (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_T)^T \mathbf{W}_c^{-1}(T) (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_T). \quad (6.14)$$

A partir desse resultado, pode-se concluir que alguma norma de \mathbf{W}_c^{-1} deve ser minimizada para que a energia de controle necessária para levar o sistema do estado \mathbf{x}_I para \mathbf{x}_T em um intervalo de tempo T seja a mínima.

A solução desse problema depende do intervalo de tempo T que está relacionado com velocidade de resposta desejada. Essa variável do problema é, provavelmente, desconhecida nessa etapa inicial de posicionamento de atuadores. Para eliminar essa dependência em T , considera-se a solução do gramiano de controlabilidade para o estado estacionário. Como apresentado na seção 4.2, para um sistema assintoticamente estável, o gramiano de controlabilidade para o caso estacionário \mathbf{W}_c pode ser escrito como [Hać e Liu, 1993]:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau = \mathbf{W}_c(T) + \int_T^\infty e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau. \quad (6.15)$$

Essa equação pode ser reescrita, após algumas manipulações, como

$$\mathbf{W}_c(T) = \mathbf{W}_c - e^{\mathbf{A}T} \mathbf{W}_c e^{\mathbf{A}^T T}, \quad (6.16)$$

onde o termo $e^{\mathbf{A}T}$ não depende da posição dos atuadores e $\|e^{\mathbf{A}T}\| \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$, se a matriz do sistema for assintoticamente estável [Hać e Liu, 1993].

6.3 Formulação do problema de otimização topológica

Nesta seção, o problema de posicionamento ótimo de atuadores é escrito na forma de um problema de otimização topológica. Para isso, as propriedades do material são parametrizadas de forma que a localização dos atuadores seja obtida pela distribuição de material piezolétrico embutido na estrutura.

6.3.1 Funções objetivo e restrições

Silveira, 2012 considerou o traço de \mathbf{W}_c como função objetivo para o problema de otimização topológica. Dessa forma, o problema de otimização pode ser escrito como

$$\max_{\boldsymbol{\rho}} \quad \text{tr}(\mathbf{W}_c), \quad (6.17)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} V = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V^{\max}, \\ 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_v, \end{cases} \quad (6.18)$$

onde \mathbf{W}_c é o Gramiano de controlabilidade, $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de variáveis de projeto, V^{\max} é a restrição de volume para o material piezolétrico e N_v é o número de variáveis de projeto.

A maximização do traço de \mathbf{W}_c mostrou-se suficiente para a distribuição de material piezolétrico (atuadores) considerando o caso de uma viga curta em balanço [Silveira, 2012]. Entretanto, valor elevado para o traço de \mathbf{W}_c não garante que o sistema será completamente controlável. Um sistema é completamente controlável se todos os estados podem ser excitados pela entrada de controle. Essa condição é satisfeita apenas se \mathbf{W}_c for positivo definido [Preumont, 1997].

Uma nova formulação para o problema foi proposta neste trabalho visando assegurar que a estrutura otimizada seja completamente controlável e que possua a maior controlabilidade de acordo com o índice adotado. Dessa forma, esse problema de otimização pode ser escrito como

$$\max_{\boldsymbol{\rho}} \lambda_1, \quad (6.19)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} V = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V^{\max}, \\ 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_v, \end{cases} \quad (6.20)$$

onde λ_1 é o menor autovalor do Gramiano de controlabilidade. Dessa forma, pode-se garantir que \mathbf{W}_c será positivo definido para a estrutura otimizada e, principalmente, que nenhum estado do sistema esteja em uma condição crítica, ou seja, próxima de não ser controlável.

6.3.2 Modelo material

O modelo material utilizado nesse trabalho inclui dois materiais sólidos: um elástico isotrópico e outro piezelétrico. A parametrização que define as propriedades elásticas $[\mathbf{c}^E]$, de acoplamento piezelétrico $[\mathbf{e}]$, dielétricas $[\boldsymbol{\epsilon}^S]$ e peso específico γ , é dada por

$$[\mathbf{c}^E] = \boldsymbol{\rho}^{p1}[\mathbf{c}_{pzt}^E] + (1 - \boldsymbol{\rho}^{p1})[\mathbf{c}_{elas}^E], \quad (6.21)$$

$$[\mathbf{e}] = \boldsymbol{\rho}^{p2}[\mathbf{e}_{pzt}], \quad (6.22)$$

$$[\boldsymbol{\epsilon}^S] = \boldsymbol{\rho}^{p2}[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \quad (6.23)$$

$$\gamma = \boldsymbol{\rho}\gamma_{pzt} + (1 - \boldsymbol{\rho})\gamma_{elas}, \quad (6.24)$$

onde $[\mathbf{c}_{elas}^E]$ e $[\mathbf{c}_{pzt}^E]$ são as propriedades elásticas dos materiais não-piezelétrico e piezelétrico, respectivamente; $[\mathbf{e}_{pzt}]$ e $[\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S]$ são as matrizes de acoplamento eletromecânico e de capacitância elétrica do material piezelétrico; γ_{elas} e γ_{pzt} são os pesos específicos para cada material; $p1$ e $p2$ são coeficientes de penalização das variáveis de projeto. Dessa forma, essa interpolação define que material elástico isotrópico é obtido quando $\rho = 0$ e que material piezelétrico é obtido quando $\rho = 1$ [Silveira et al., 2014].

6.4 Análise de sensibilidade

Nesta seção, são apresentados os procedimentos de cálculo analítico das sensibilidades das funções objetivos em relação às variáveis de projeto. Essas informações são necessárias para resolução do problema de otimização através de algoritmos de primeira ordem, como o SLP.

6.4.1 Sensibilidade do modelo material

As sensibilidades do modelo material (Equações 6.21 a 6.24), em relação às variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}$, são dadas por

$$\frac{\partial[\mathbf{c}^E]}{\partial \boldsymbol{\rho}} = p1 \boldsymbol{\rho}^{p1-1} ([\mathbf{c}_{pzt}^E] - [\mathbf{c}_{elas}^E]), \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial[\mathbf{e}]}{\partial \boldsymbol{\rho}} = p2 \boldsymbol{\rho}^{p2-1} [\mathbf{e}_{pzt}], \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial[\boldsymbol{\epsilon}^S]}{\partial \boldsymbol{\rho}} = p2 \boldsymbol{\rho}^{p2-1} [\boldsymbol{\epsilon}_{pzt}^S], \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \gamma_{pzt} - \gamma_{elas}, \quad (6.28)$$

onde todos os termos foram definidos na Seção 6.3.2.

6.4.2 Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade

Para um determinado par de parâmetros em espaço de estados (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , o Gramiano de controlabilidade \mathbf{W}_c pode ser determinado através da seguinte equação de Lyapunov

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_\phi \mathbf{B}_\phi^T = \mathbf{0}. \quad (6.29)$$

Silveira, 2012, deduziu a sensibilidade do Gramiano de controlabilidade considerando a realimentação do controle LQR. Entretanto, a teoria de controle ótimo indica que os Gramianos dependem apenas da matriz do sistema e das matrizes de entrada e de saída. Ou seja, a localização ótima dos atuadores não depende do tipo de controle empregado. Conse-

quentemente, a realimentação linear com ganho constante não foi considerada na análise de sensibilidade.

Derivando a expressão 6.29 em relação às variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}$, obtém-se

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{A}^T + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{B}_\phi^T + \mathbf{B}_\phi \frac{\partial \mathbf{B}_\phi^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}. \quad (6.30)$$

Conhecendo as sensibilidades dos parâmetros em espaço de estados \mathbf{A} e \mathbf{B}_ϕ , o termo $\partial \mathbf{W}_c / \partial \boldsymbol{\rho}$ pode ser obtido resolvendo-se uma nova equação de Lyapunov. A solução desse tipo de equação é conhecida [Bartels e Stewart, 1972] e disponibilizada por diversos programas matemáticos comerciais.

Para o problema analisado, as sensibilidades dos parâmetros em espaço de estados são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Omega^2}{\partial \boldsymbol{\rho}} & -2\mathbf{Z} \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\phi}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Psi^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{K}_{u\phi} - \Psi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

O termo $\partial \mathbf{K}_{u\phi} / \partial \boldsymbol{\rho}$ é obtido pela superposição das derivadas das matrizes de acoplamento piezolétrico dos elementos

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial [\mathbf{e}]^T}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{B}_\phi d\Omega. \quad (6.33)$$

onde \mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são, respectivamente, as matrizes que relacionam deformação com deslocamento e campo elétrico com potencial elétrico. De forma análoga, outras sensibilidades como das matrizes de rigidez e de massa podem ser obtidas. O último termo necessário para o cálculo da sensibilidade do Gramiano de controlabilidade é derivada dos autovalores ($\partial \Omega^2 / \partial \boldsymbol{\rho}$) e dos autovetores ($\partial \Psi / \partial \boldsymbol{\rho}$) do problema modal.

Conhecendo a sensibilidade do Gramiano de controlabilidade em relação às variáveis de projeto, a sensibilidade da função objetivo apresentada na Equação 6.17 pode ser facilmente obtida. Para a segunda formulação, a sensibilidade da função objetivo (Equação

6.19) pode ser obtida através da derivada do seguinte problema de autovalores

$$(\mathbf{W}_c - \lambda_i \mathbf{I}_{2m}) \boldsymbol{\chi}_i = \mathbf{0}, \quad (6.34)$$

onde \mathbf{I}_{2m} é a matriz identidade, λ_i é o i -ésimo autovalor do Gramiano de controlabilidade e $\boldsymbol{\chi}_i$ é o autovetor associado à λ_i . Os procedimentos para a realização do cálculo das sensibilidades de autovalores e autovetores são apresentados na seção 6.4.3.

6.4.3 Sensibilidade de autovalores e autovetores

O cálculo da sensibilidade de autovalores e autovetores utilizado nesse trabalho é baseado na metodologia proposta por Wu et al., 2007, na qual é considerada a possibilidade de ocorrência de autovalores repetidos. Para isso, considera-se o problema de autovalores real e simétrico

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{uu}) \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{0}, \quad (6.35)$$

$$\boldsymbol{\psi}_j^T \mathbf{M}_{uu} \boldsymbol{\psi}_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.36)$$

onde \mathbf{K}_{uu} e \mathbf{M}_{uu} são as matrizes de rigidez estrutural e de massa, respectivamente; ω_j^2 é o j -ésimo autovalor do problema; $\boldsymbol{\psi}_j$ é o autovetor associado à ω_j^2 ; n é o número de graus de liberdade. Para o cálculo da sensibilidade dos autovalores do Gramiano de controlabilidade, o mesmo procedimento pode ser adotado considerando o problema real e simétrico apresentado na Equação 6.34.

Partindo do pressuposto que o problema possui m autovalores repetidos ω_j^2 , $j = 1, 2, \dots, m$, sendo que $m \leq n$. Conseqüentemente, define-se uma matriz $\boldsymbol{\Psi}$ com os respectivos autovetores: $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_m]$. Dessa forma, a derivada dos autovalores repetidos pode ser obtida resolvendo-se um novo problema [Wu et al., 2007]:

$$\left[\boldsymbol{\Psi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \omega_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right) \boldsymbol{\Psi} - \frac{\partial \omega_j^2}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{I}_n \right] \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{0}. \quad (6.37)$$

Assumindo que os autovalores desse problema ($\partial \omega_j^2 / \partial \boldsymbol{\rho}$) são distintos, a matriz ortogonal $\boldsymbol{\Gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m]$ pode ser utilizada para definir autovetores únicos $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m]$

através da relação $\mathbf{H} = \Phi\Gamma$. Por conveniência, denota-se $\mathbf{F}_j = (\mathbf{K}_{uu} - \omega_j^2\mathbf{M}_{uu})$. Utilizando essa definição e derivando a Equação 6.35 em relação às variáveis de projeto, obtém-se

$$\mathbf{F}_j \frac{\partial \psi_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} = -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} \psi_j, \quad (6.38)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \omega_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{\partial \omega_j^2}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{M}_{uu}, \quad (6.39)$$

e $\partial \omega_j^2 / \partial \boldsymbol{\rho}$ é determinado pela Equação 6.37.

Considerando que as derivadas dos autovetores $\partial \mathbf{h}_j / \partial \boldsymbol{\rho}$ têm a forma

$$\frac{\partial \mathbf{h}_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_j + \mathbf{H}\mathbf{w}, \quad (6.40)$$

onde \mathbf{v}_j é uma solução particular da Equação 6.38 e satisfaz

$$\mathbf{F}_j \mathbf{v}_j = -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}_j. \quad (6.41)$$

Define-se um sistema estendido de equações, com incógnitas \mathbf{v}_j e μ_{kj} , na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_j & \mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_1 & \mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_2 & \dots & \mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_m \\ (\mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_1)^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_2)^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{M}_{uu}\boldsymbol{\psi}_m)^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j \\ \mu_{1j} \\ \mu_{2j} \\ \vdots \\ \mu_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{h}_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

onde \mathbf{v}_j é uma solução particular da Equação 6.41 e $\mu_{kj} = 0$ para $j, k = 1, 2, \dots, m$. Consequentemente, o termo \mathbf{w} da Equação 6.40 pode ser determinado por [Wu et al., 2007]:

$$\mathbf{w}_j = -\frac{1}{2} \mathbf{h}_j^\top \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \rho_i} \mathbf{h}_i + 2\mathbf{M}_{uu} \mathbf{v}_j \right). \quad (6.43)$$

6.5 Procedimento de otimização

A metodologia implementada para distribuição de material piezelétrico (atuadores) em uma estrutura é apresentada através do fluxograma contido na Figura 6.1.

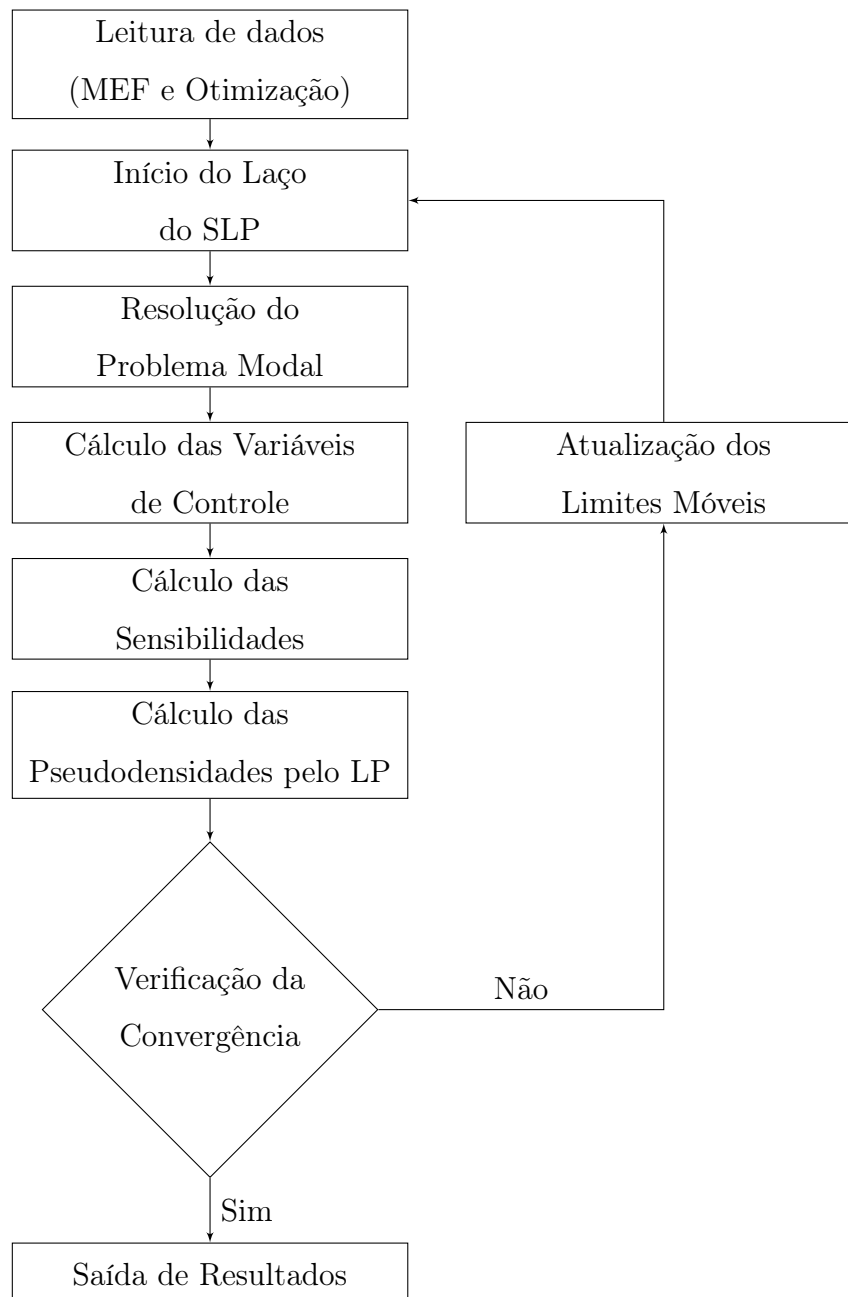


Figura 6.1 – Fluxograma do método implementado para posicionamento ótimo de atuadores piezelétricos.

7. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados obtidos através da implementação da metodologia para posicionamento de atuadores. Inicialmente, a estrutura analisada é apresentada e as configurações para a face potencial serão definidas. Além disso, as distribuições ótimas de material piezolétrico e os históricos de convergência são comparados com respeito à formulação adotada. Por final, as repostas da estrutura controlada são apresentadas para um caso com carregamento impulsivo na extremidade livre da viga.

7.1 Descrição do problema numérico

7.1.1 Estrutura analisada

A estrutura analisada é uma viga curta em balanço com dimensões $600 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$, submetida a um histórico de carregamento $f(t)$, como representado na Figura 7.1. Para todos os casos estudados, a discretização da estrutura é realizada utilizando 4800 elementos finitos sólidos não-conforme [Taylor et al., 1976]. Cada elemento apresenta 8 nós, com três graus de liberdade mecânicos e um (1) grau de liberdade elétrico em cada nó.

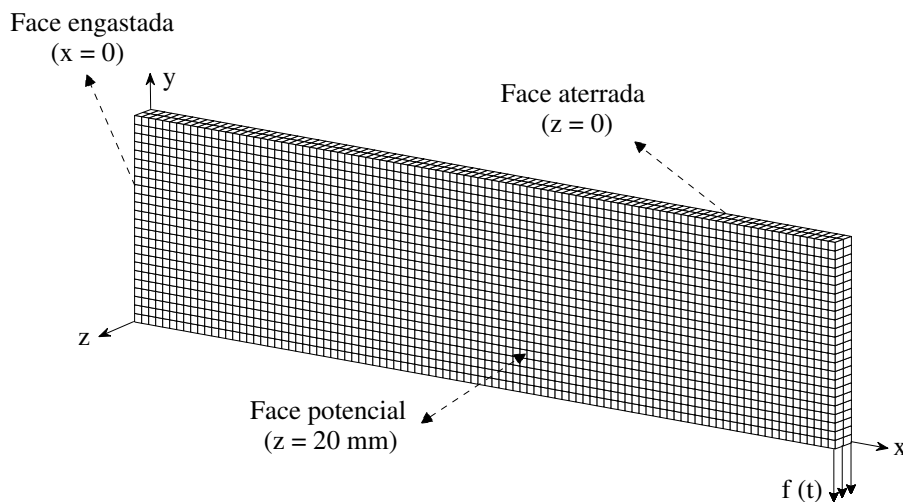


Figura 7.1 – Modelo em elementos finitos da estrutura analisada.

As propriedades mecânicas do material elástico isotrópico (alumínio) são apresentadas na Tabela 7.1. As constantes elásticas, piezolétricas e dielétricas do material piezolétrico

(PZT5A) foram retiradas do trabalho de Rubio et al., 2009 e são apresentadas na Tabela 7.2.

Tabela 7.1 – Propriedades do material elástico.

ALUMÍNIO	
módulo de Young	$71 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
densidade	2700 kg/m^3
coeficiente de Poisson	0.33

Tabela 7.2 – Propriedades do material piezelétrico.

PZT5A	
constantes elásticas	(10^{10} N/m^2)
c_{11}^E	12.1
c_{12}^E	7.54
c_{13}^E	7.52
c_{33}^E	11.1
c_{44}^E	2.11
c_{66}^E	2.26
constantes piezelétricas	(C/m^2)
e_{31}	-5.4
e_{33}	15.8
e_{51}	12.3
constantes dielétricas	(F/m)
ϵ_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$
ϵ_{11}/ϵ_0	916
ϵ_{33}/ϵ_0	830
densidade	7750 kg/m^3

7.1.2 Configuração da estrutura controlada

Os graus de liberdade elétricos são considerados nulos na face aterrada. A face potencial tem a definição dos graus de liberdade elétricos de acordo com a disposição dos eletrodos independentes. Foram pré-definidas três configurações para a face potencial, como apresentado na Figura 7.2.

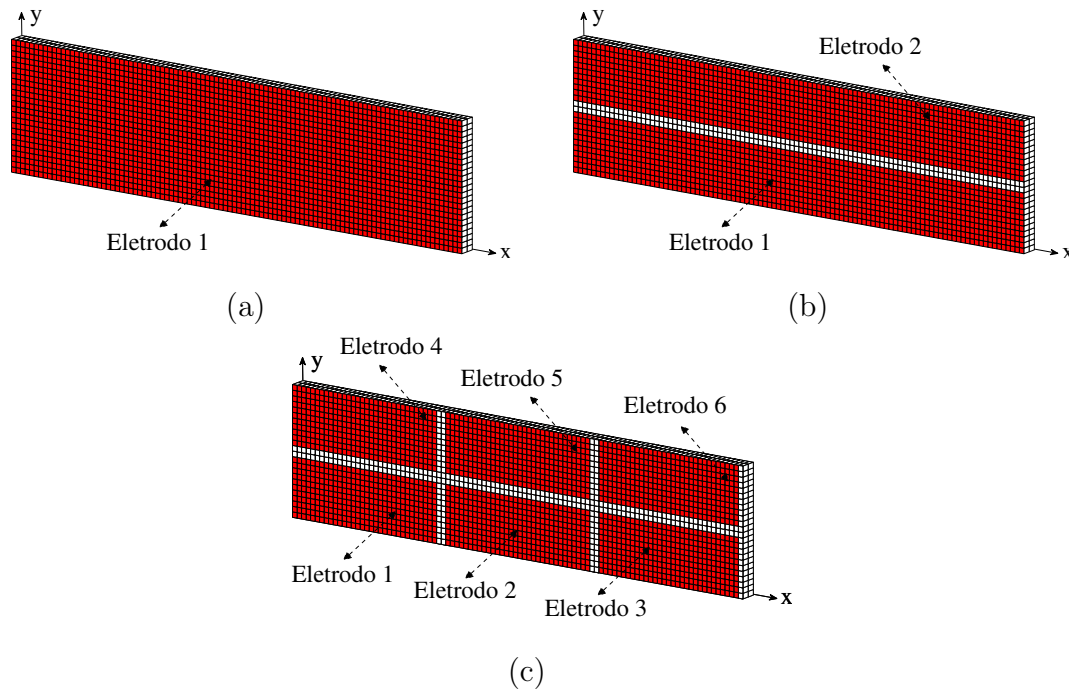


Figura 7.2 – Configurações pré-definidas para a face potencial: com (a) 1, (b) 2 ou (c) 6 eletrodos independentes.

Para o sistema de controle, foram considerados casos com até quatro modos de vibração no plano xy . Esses modos de vibração são: o primeiro e o segundo modos flexionais, o primeiro modo extensional e o terceiro modo flexional, como representado na Figura 7.3.

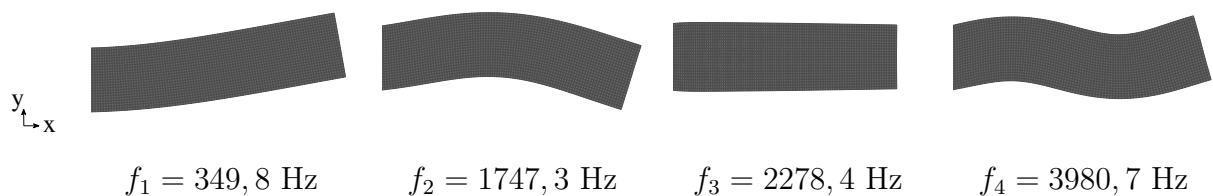


Figura 7.3 – Modos de vibração considerados no sistema de controle com suas respectivas frequências naturais.

Esses modos de vibração, assim como os valores das frequências naturais, foram obtidos para a estrutura composta totalmente pelo material elástico. Entretanto, alterações nesses parâmetros devem ocorrer de acordo com a distribuição de material piezelétrico.

Dessa forma, foram analisados 9 casos de acordo com a quantidade de modos de vibração controlados e a configuração da face potencial, como apresentado na Tabela 7.3. Tanto a formulação proposta neste trabalho como a proposta por Silveira et al., 2014 foram consideradas no processo de otimização. Dessa forma, duas soluções serão apresentadas para cada caso de acordo com a formulação do problema de otimização.

Tabela 7.3 – Casos analisados.

Caso	Modos Controlados (m)	Eletrodos Independentes (s)
1	1	1
2	1	2
3	1	6
4	2	1
5	2	2
6	2	6
7	4	1
8	4	2
9	4	6

As matrizes de ponderação utilizadas para o controlador LQR foram definidas como [Silveira, 2012]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{17} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}_s, \quad (7.1)$$

onde \mathbf{I}_m é a matriz identidade de dimensão m (número de modos) e \mathbf{I}_s é a matriz identidade de dimensão s (número de entradas). Os valores dessas matrizes influenciam diretamente na energia de controle e, conseqüentemente, no potencial elétrico de entrada necessário para controlar a estrutura. Para todos os casos, a mesma configuração do controlador foi adotada e o limite de aplicação da cerâmica piezelétrica não foi considerado.

7.1.3 Parâmetros do processo de otimização

A restrição de volume para o material piezolétrico é arbitrada igual a 8% para todos os casos. Uma distribuição uniforme, logo abaixo da restrição, é adotada para toda a estrutura como condição inicial para o processo de otimização. Para a calibração dos limites móveis, são adotados valores de $\alpha_i = 0,3$ e $\alpha_g = 0,2$ para todos os elementos. Como critério de parada, são considerados limites de 2% na variação da função objetivo e de 4% na variação das pseudodensidades de uma iteração para outra. Os coeficientes de penalização adotados para o modelo material são iguais a 3 para todos os casos [Silveira et al., 2014]. Nenhuma técnica de filtragem ou de continuação foi utilizada neste trabalho.

7.2 Distribuição ótima de material piezolétrico

Nesta seção, as distribuições ótimas de material piezolétrico obtidas para os 9 casos descritos na Tabela 7.3 serão apresentadas.

Para os primeiros três casos, as soluções do problema de otimização topológica são apresentadas na Figura 7.4. Nesses casos, apenas o primeiro modo de vibração no plano xy ($m = 1$) é considerado no sistema de controle. Esses casos diferem quanto ao número de entradas ($s = 1, 2, 6$) no sistema de controle.

Para esses três casos, as soluções para ambas as formulações são semelhantes devido à dependência dos termos do vetor de estado. De forma geral, a concentração de material piezolétrico ocorre próximo ao engaste. Esse resultado é esperado por se tratar de casos com controle apenas do primeiro modo flexional de vibração. A configuração com dois eletrodos independentes possibilita a aplicação de potenciais elétricos com sinais diferentes gerando, assim, deformações compressivas e trativas na estrutura. Além disso, pode-se notar que a utilização de seis eletrodos não altera significativamente a solução.

Para os três casos intermediários, as soluções do problema de otimização topológica são apresentadas na Figura 7.5. Nesses casos, os dois primeiros modos de vibração no plano xy ($m = 2$) são considerados no sistema de controle. Da mesma forma que os anteriores, esses casos diferem quanto ao número de entradas ($s = 1, 2, 6$) no sistema de controle.

Para esses casos, a influência da formulação adotada na solução do problema de otimização é maior. Com apenas uma entrada no sistema de controle, a formulação proposta

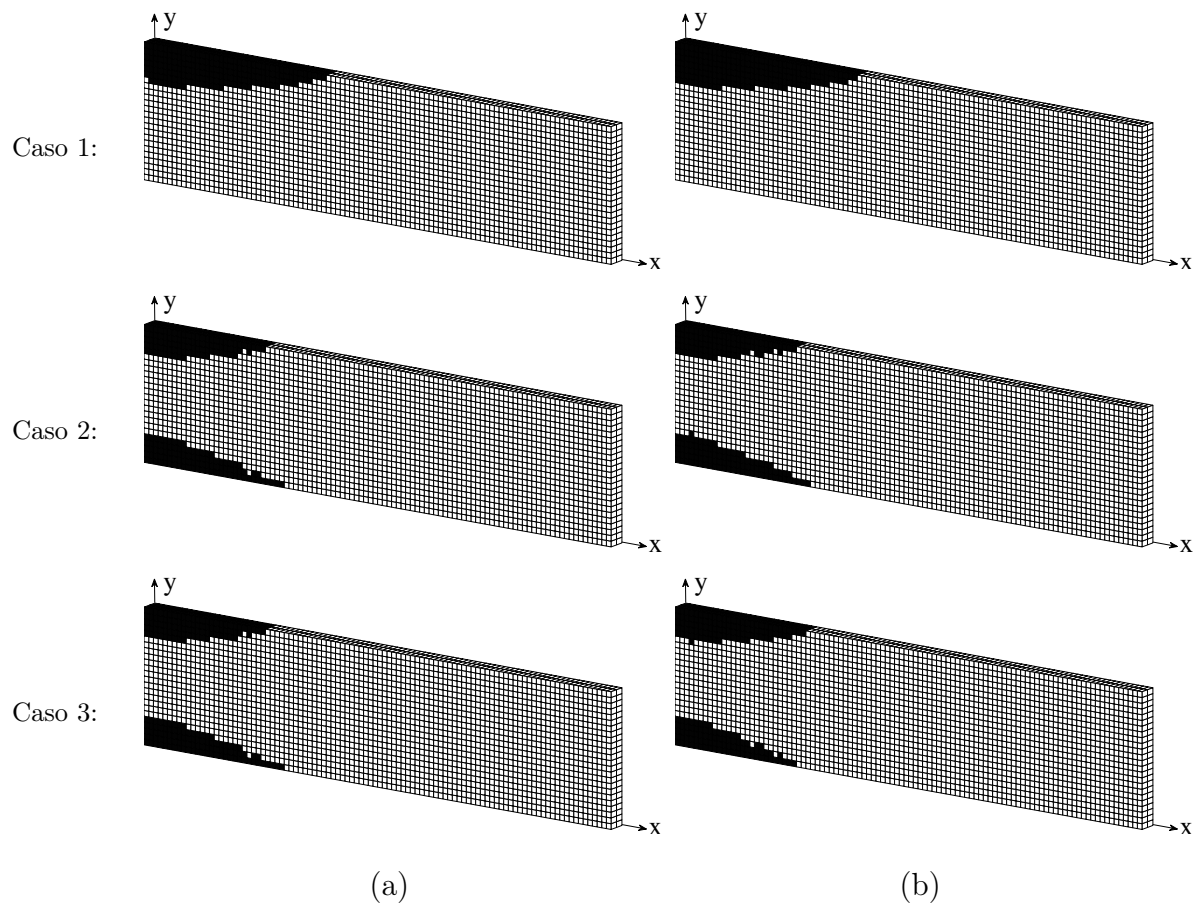


Figura 7.4 – Distribuição ótima de material piezelétrico para casos com 1 modo controlado, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

tende a privilegiar o controle do segundo modo flexional de vibração. Assim como nos casos anteriores, apenas dois eletrodos são efetivamente utilizados quando seis entradas são consideradas no sistema de controle.

A Figura 7.5 apresenta as soluções do problema de otimização topológica para os três últimos casos. Nesses casos, os quatro primeiros modos de vibração no plano xy ($m = 4$) são considerados no sistema de controle e diferem quanto ao número de entradas ($s = 1, 2, 6$) no sistema de controle. Esses modos são os dois primeiros modos flexionais, o primeiro modo longitudinal e o terceiro modo flexional de vibração.

Os casos com quatro modos controlados apresentaram soluções do problema de otimização com maiores diferenças em virtude da escolha da função objetivo. Da mesma forma que para os casos com um (1) ou dois modos controlados, apenas dois eletrodos são efetivamente utilizados quando seis entradas são consideradas. Entretanto, para caso 9 ocorre

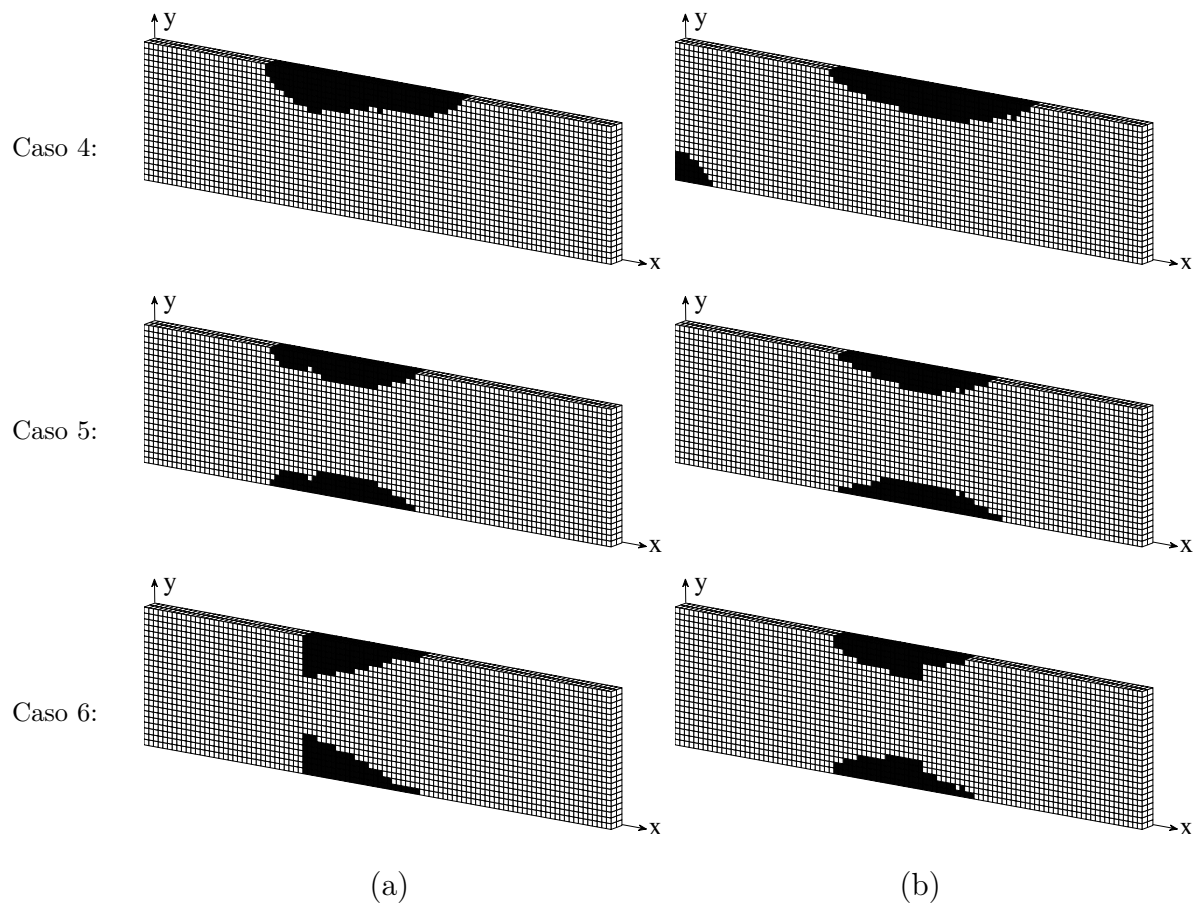


Figura 7.5 – Distribuição ótima de material piezolétrico para casos com 2 modos controlados, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

uma alteração de eletrodos efetivos de acordo com a formulação adotada. Maximizando o menor autovalor do Gramiano de controlabilidade, os eletrodos efetivos são o segundo e o quinto (E2 e E5). Para a maximização do traço de \mathbf{W}_c , o primeiro e o quarto eletrodos (E1 e E4) são efetivos.

7.3 Convergência das funções objetivo

Os históricos das funções objetivos ao longo das iterações serão apresentados e discutidos nesta seção. Para fins de comparação, a convergência da função objetivo (por exemplo, menor autovalor de \mathbf{W}_c) será apresentada juntamente com o histórico da outra medida de controlabilidade (por exemplo, traço de \mathbf{W}_c). Dessa forma, é possível avaliar a influência da maximização de uma medida de controlabilidade na outra e vice-versa. Para melhor vi-

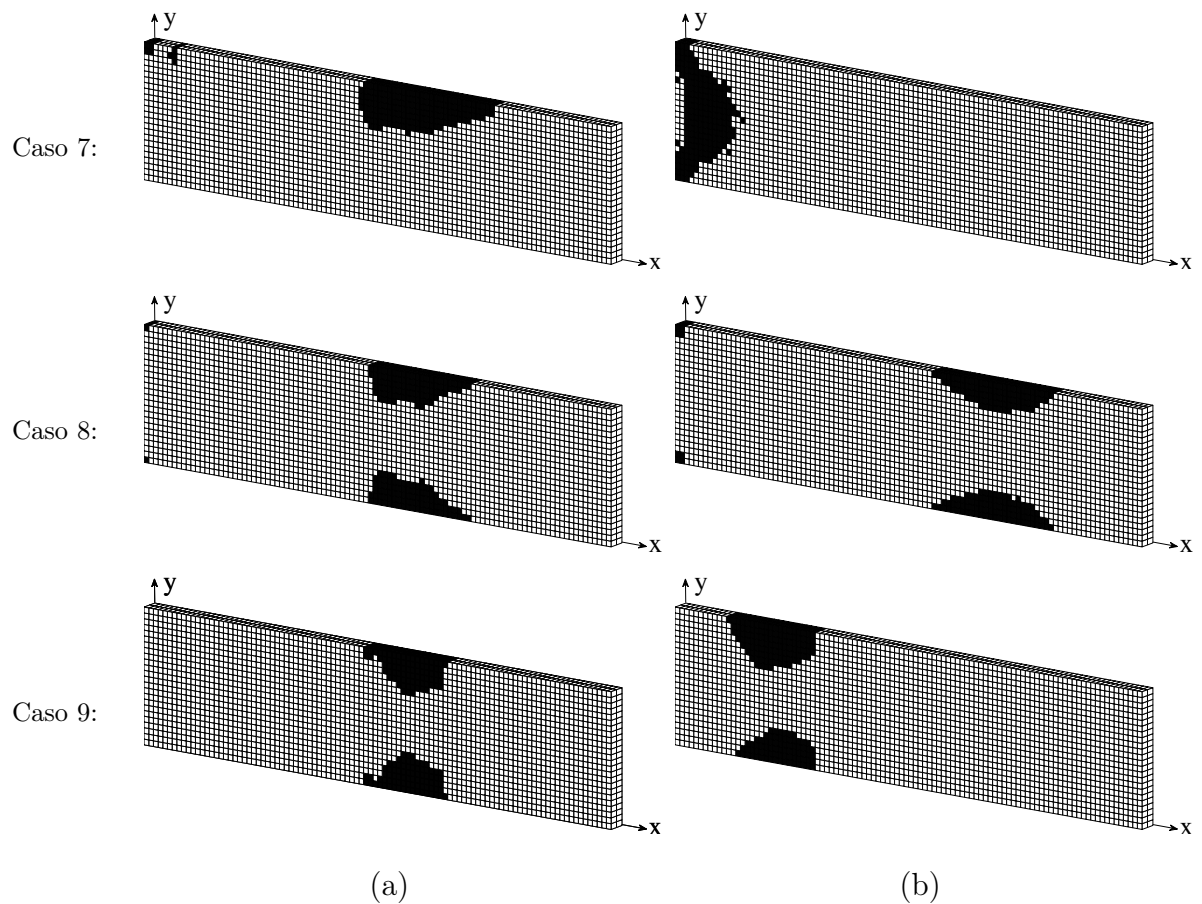


Figura 7.6 – Distribuição ótima de material piezolétrico para casos com 4 modos controlados, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

sualização desses resultados nesta seção, a função objetivo será representada por uma linha sólida com marcadores circulares e a outra medida de controlabilidade será representada por uma linha tracejada com marcadores em forma de cruz.

A Figura 7.7 apresenta esses históricos para o caso 1, no qual deseja-se controlar o primeiro modo de vibração com um eletrodo independente. Como esperado, as convergências para as duas funções objetivo são semelhantes assim como a influência na outra medida de controlabilidade. Como dito anteriormente, isso ocorre pela dependência dos componentes do vetor de estados adotado.

Na Figura 7.8, os históricos para o caso 5, no qual deseja-se controlar os dois primeiros modos de vibração com dois eletrodos independentes, são apresentados. A maximização de uma medida de controlabilidade tende a elevar o valor da outra, assim como no caso anterior. Entretanto, os valores finais variam de acordo com a formulação adotada.

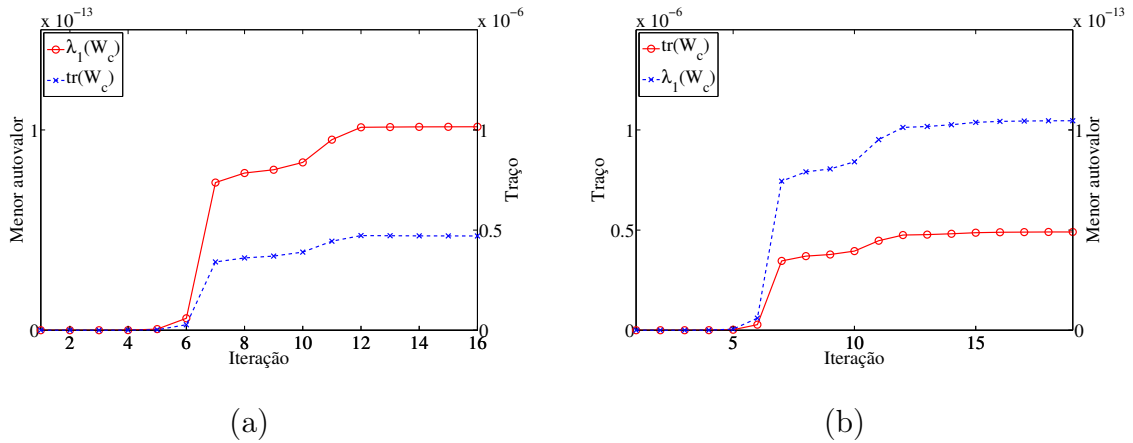


Figura 7.7 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

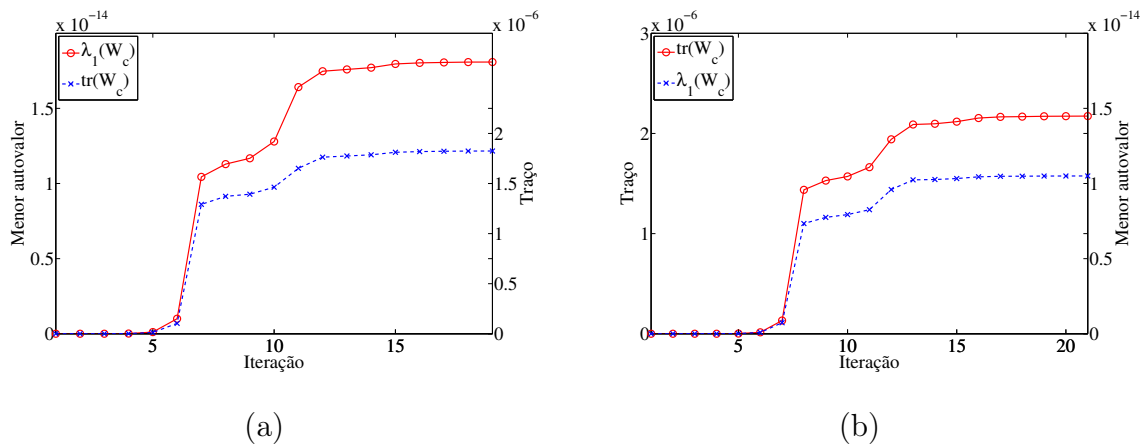


Figura 7.8 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

Os históricos para o caso 7, no qual deseja-se controlar os quatro primeiros modos de vibração com apenas um (1) eletrodo independente, são apresentados na Figura 7.9. Para a formulação proposta, com a maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c , esse caso apresentou convergência irregular. Entretanto, essa otimização induziu um aumento significativo na outra medida de controlabilidade. Isso pode ser um indicativo de que a solução (b) seja um máximo local do problema. Para a maximização do traço de \mathbf{W}_c , o histórico indica pouca influência na outra medida que apresentou valores de ordem de grandeza muito menor do

que o esperado. Essa condição pode indicar que um (1) ou mais modos podem ter o controle dificultado com essa configuração de atuadores.

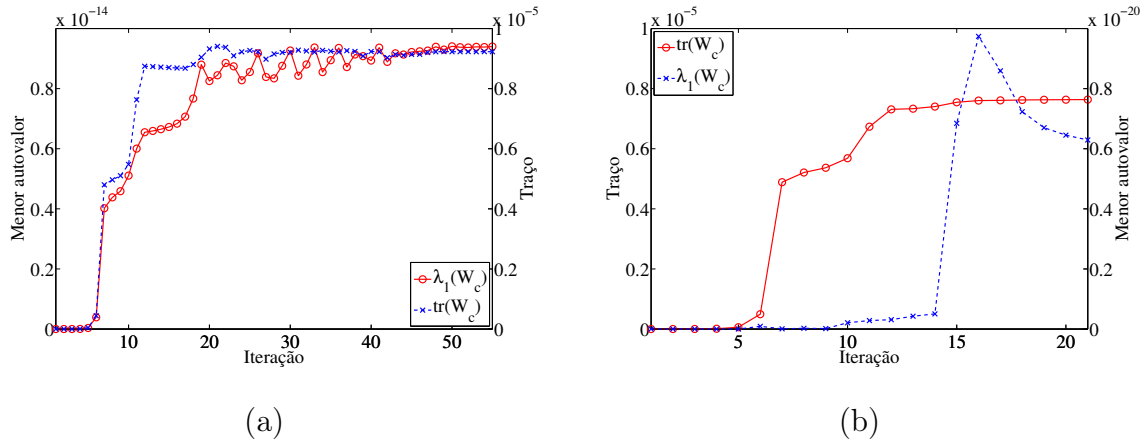


Figura 7.9 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

Na Figura 7.10, os históricos para o caso 8, no qual deseja-se controlar os quatro primeiros modos de vibração com 2 eletrodos independentes, são apresentados. Ao contrário do caso anterior, as curvas de convergência apresentam comportamento regular e os valores máximos de cada medida de controlabilidade são coerentes com a maximização imposta.

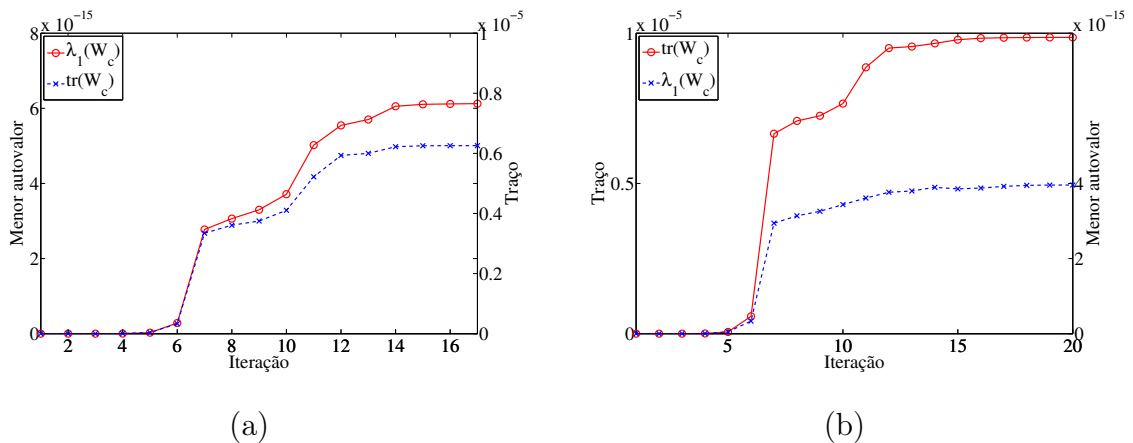


Figura 7.10 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

As curvas de convergência e históricos de evolução das medidas de controlabilidade para os demais casos são apresentados no APÊNDICE A.

7.4 Respostas das estruturas a uma carga impulsiva

Nesta seção, as respostas das estruturas otimizadas são apresentadas para uma carga impulsiva aplicada na extremidade livre da viga. Para sistemas contínuos no tempo, essa é a resposta dinâmica considerando que a entrada é um delta de Dirac no instante $t = 0$. Este trabalho considera um sistema discreto no tempo e, conseqüentemente, a resposta dinâmica é obtida com respeito a entrada de um pulso de área unitária com duração T_s (tempo de amostragem) assumindo valores nulos para os estados iniciais.

As Figuras 7.11 a 7.17 apresentam as respostas em termos do deslocamento vertical na extremidade livre da viga para a carga impulsiva. Os deslocamentos para a estrutura com controle e sem controle são representados por linhas sólidas e pontilhadas, respectivamente. Para comparação do desempenho das estruturas controladas, serão considerados parâmetros como o deslocamento vertical máximo (U_m) e a raiz do valor quadrático médio do deslocamento vertical (U_{RMS}), ambos na extremidade livre da viga. A comparação entre a resposta controlada e não controlada será apresentada separadamente para cada estrutura visto que distribuição de material piezelétrico pode modificar suas características dinâmicas.

As Tabelas 7.4 e 7.5 apresentam os parâmetros utilizados para comparação do desempenho das estruturas controladas: deslocamento vertical máximo (U_m) e a raiz do valor quadrático médio do deslocamento vertical (U_{RMS}). Os resultados obtidos para todos os casos são expostos considerando a estrutura sem controle e controlada.

Para o caso 1, como pode ser analisado através da Figura 7.11, as respostas são praticamente idênticas para as duas estruturas otimizadas. Para a estrutura obtida através da maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c , ocorre redução no deslocamento vertical máximo de $3,4454 \times 10^{-4}$ m para $2,3233 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,4146 \times 10^{-5}$ m para $1,9579 \times 10^{-5}$ m. Para a estrutura obtida através da maximização do traço de \mathbf{W}_c , nota-se redução no deslocamento vertical máximo de $3,4651 \times 10^{-4}$ m para $2,3299 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,4350 \times 10^{-5}$ m para $1,9505 \times 10^{-5}$ m. Para ambas as estruturas controladas ocorre redução no U_m de aproximadamente 33% e no U_{RMS} de 77%. A Figura 7.12 apresenta os respectivos sinais de controle para esse caso.

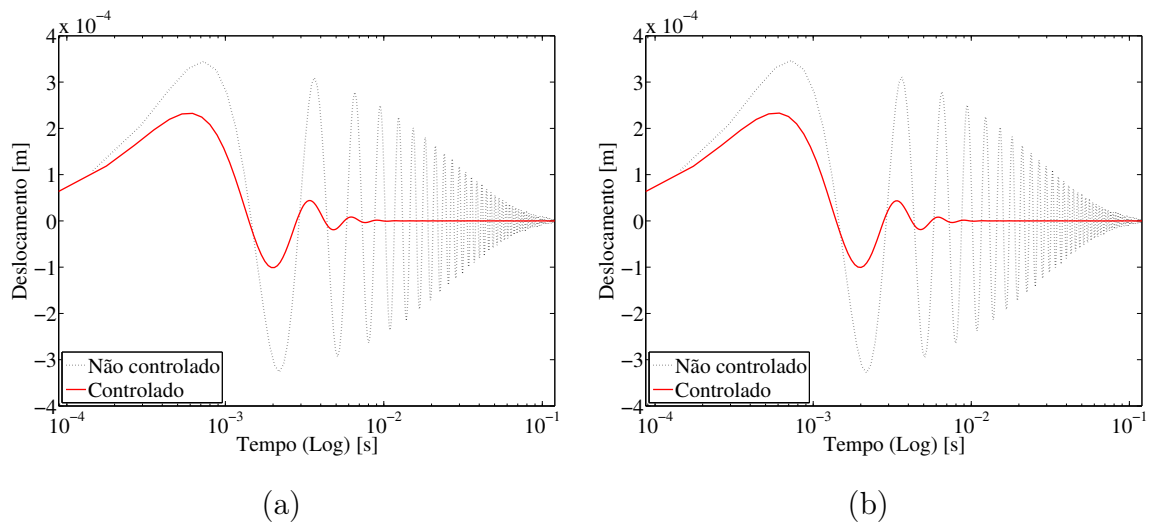


Figura 7.11 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

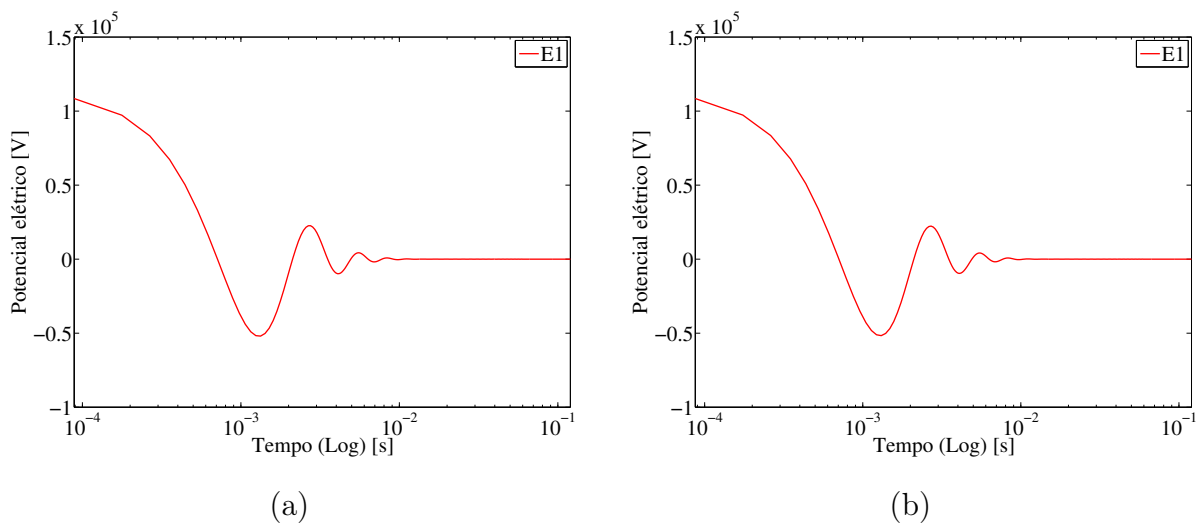


Figura 7.12 – Sinais de controle para o caso 1, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

As respostas para as duas estruturas otimizadas são apresentadas na Figura 7.13 considerando dois modos de vibração e dois eletrodos independentes no sistema de controle (caso 5). Para a estrutura obtida através da maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c , ocorre redução no deslocamento vertical máximo de $3,8777 \times 10^{-4}$ m para $3,2763 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,3272 \times 10^{-5}$ m para $3,0214 \times 10^{-5}$ m. Para a estrutura obtida através da maximização do traço de \mathbf{W}_c , nota-se redução no deslocamento vertical máximo de

$3,8579 \times 10^{-4}$ m para $3,3948 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,2132 \times 10^{-5}$ m para $3,4710 \times 10^{-5}$ m. Nesse caso, para a estrutura controlada (a) ocorre uma redução no U_m de 15,5% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 12,0%. Considerando U_{RMS} , para a estrutura controlada (a) nota-se uma redução de 63,7% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 57,7%. A Figura 7.14 apresenta os respectivos sinais de controle para esse caso.

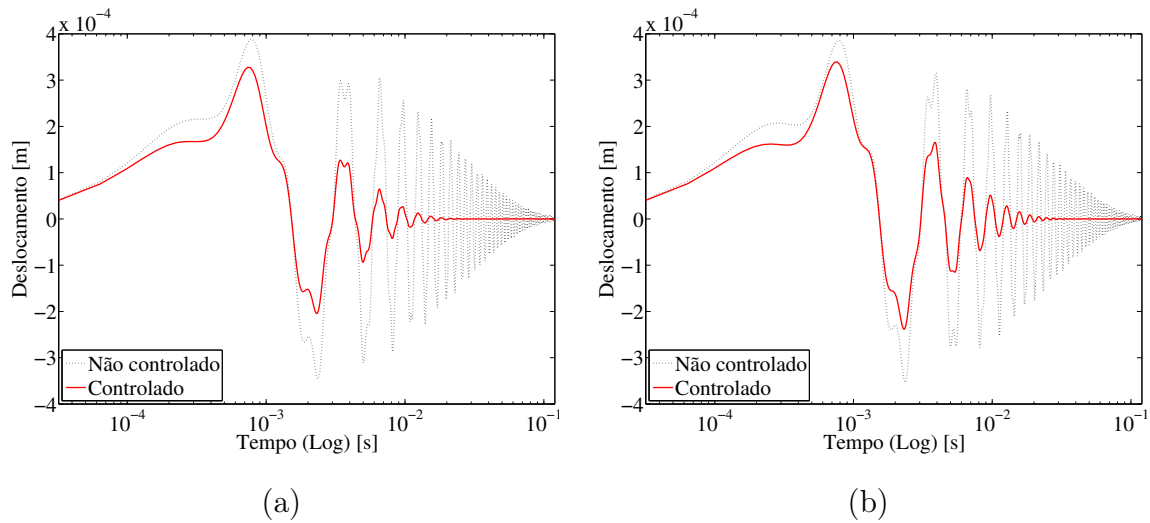


Figura 7.13 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

Para o caso 8, as respostas para as duas estruturas otimizadas são apresentadas na Figura 7.15. Para a estrutura obtida através da maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c , ocorre redução no deslocamento vertical máximo de $3,8902 \times 10^{-4}$ m para $3,4939 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,1608 \times 10^{-5}$ m para $3,9177 \times 10^{-5}$ m. Para a estrutura obtida através da maximização do traço de \mathbf{W}_c , nota-se redução no deslocamento vertical máximo de $3,6400 \times 10^{-4}$ m para $3,3707 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,0257 \times 10^{-5}$ m para $4,2464 \times 10^{-5}$ m. Nesse caso, para a estrutura controlada (a) ocorre uma redução no U_m de 10,2% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 7,4%. Considerando U_{RMS} , para a estrutura controlada (a) nota-se uma redução de 52,0% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 47,1%. A Figura 7.16 apresenta os respectivos sinais de controle para esse caso.

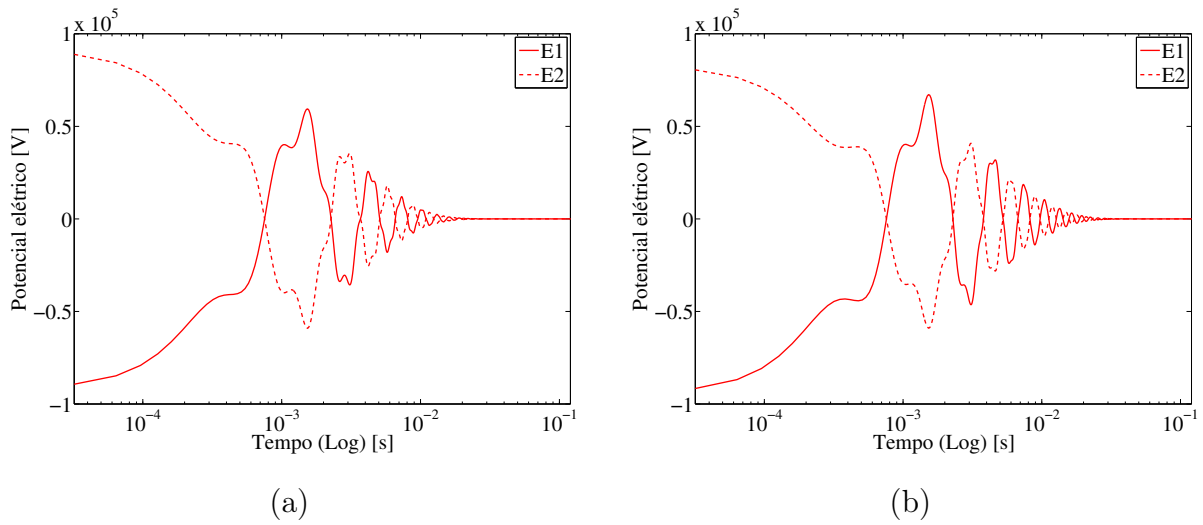


Figura 7.14 – Sinais de controle para o caso 5, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

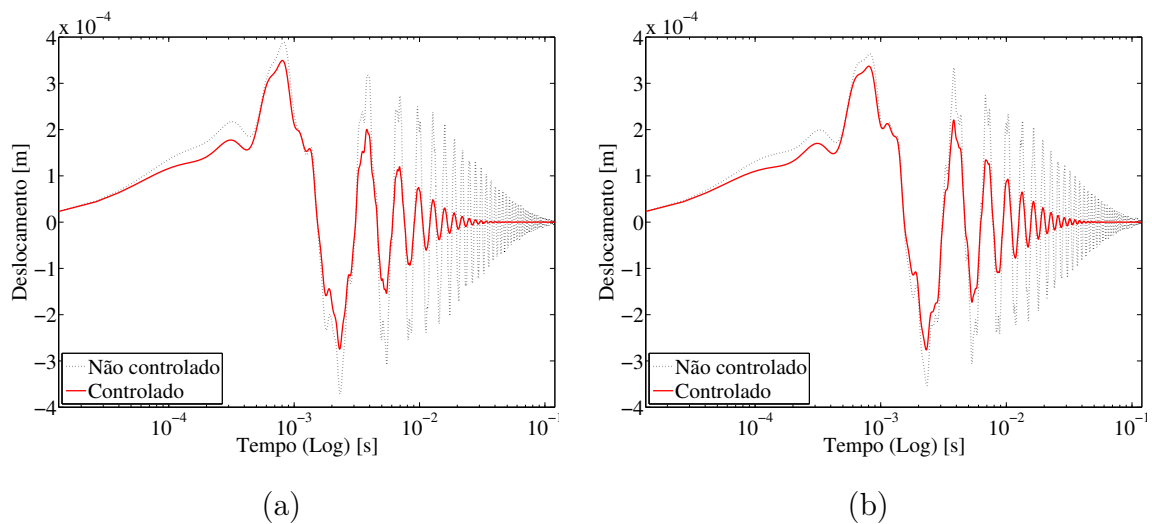


Figura 7.15 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

Para o caso 9, as respostas para as duas estruturas otimizadas são apresentadas na Figura 7.17. Para a estrutura obtida através da maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c , ocorre redução no deslocamento vertical máximo de $3,9003 \times 10^{-4}$ m para $3,5703 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,1827 \times 10^{-5}$ m para $4,2998 \times 10^{-5}$ m. Para a estrutura obtida através da maximização do traço de \mathbf{W}_c , nota-se redução no deslocamento vertical máximo de $3,9095 \times 10^{-4}$ m para $3,1801 \times 10^{-4}$ m e no valor RMS de $8,4863 \times 10^{-5}$ m para $2,6260 \times 10^{-5}$ m.

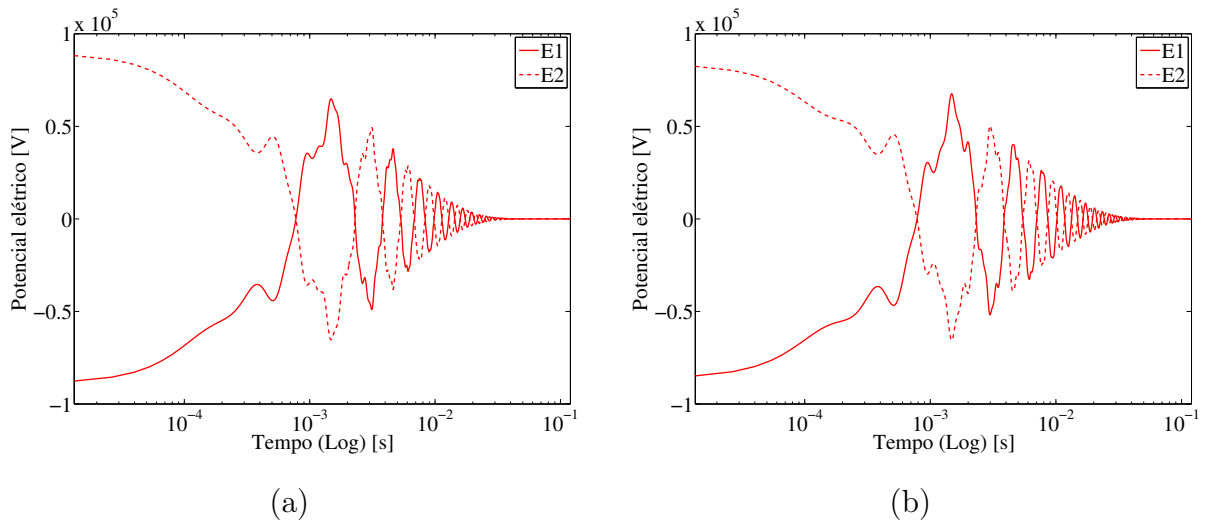


Figura 7.16 – Sinais de controle para o caso 8, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

m. Nesse caso, para a estrutura controlada (a) ocorre uma redução no U_m de 8,5% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 18,7%. Considerando U_{RMS} , para a estrutura controlada (a) nota-se uma redução de 47,4% enquanto que para a estrutura controlada (b) essa redução é de 69,1%. A Figura 7.18 apresenta os respectivos sinais de controle para esse caso.

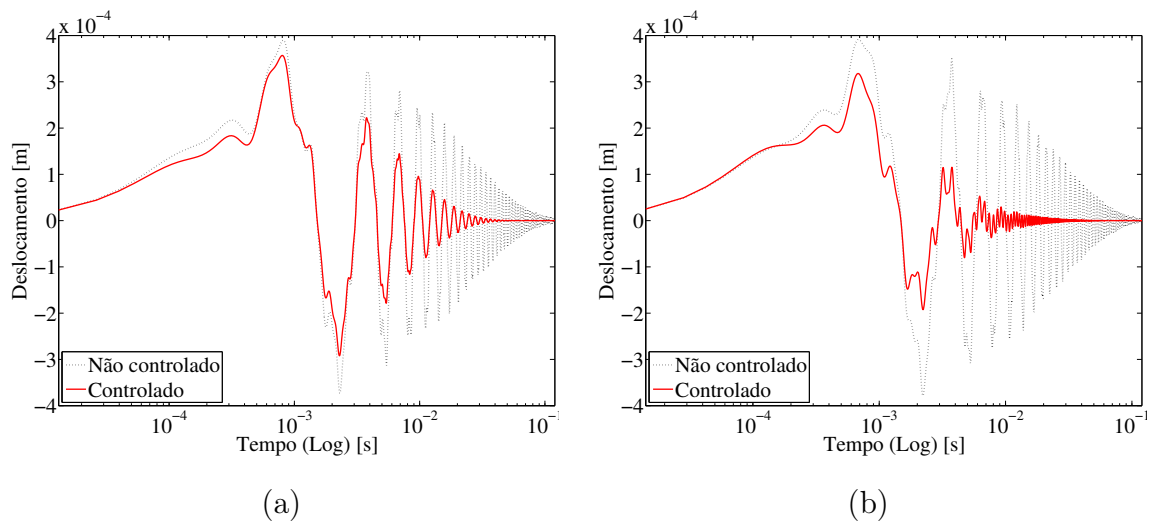


Figura 7.17 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

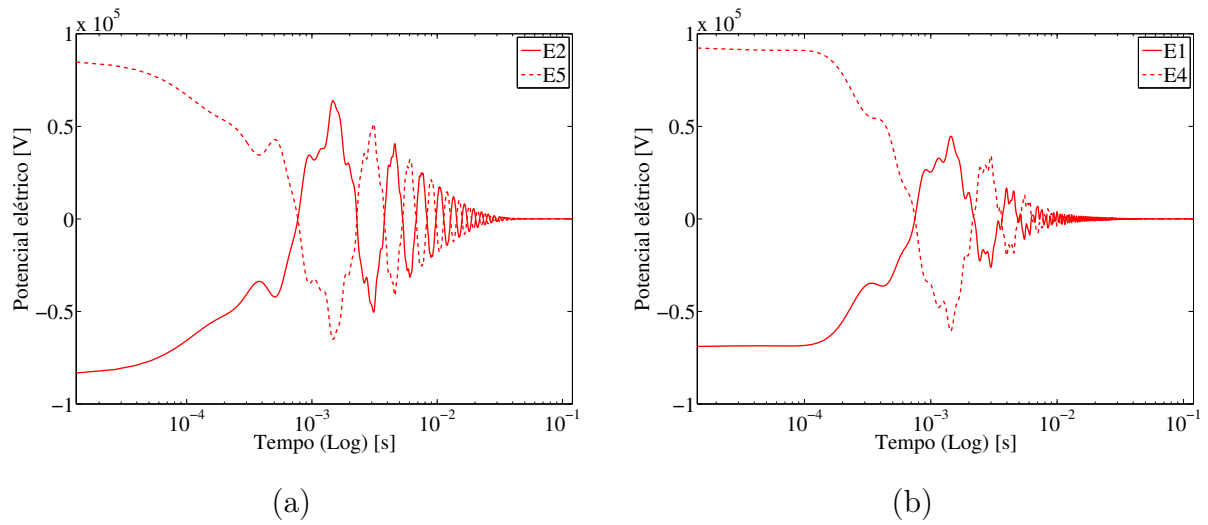


Figura 7.18 – Sinais de controle para o caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

As respostas em termos de deslocamento e os sinais de controle para para os demais casos são apresentados no APÊNDICE B.

Tabela 7.4 – Deslocamentos verticais máximos para os casos analisados.

Caso	Max.	U_m [m] (sem controle)	U_m [m] (com controle)	Redução [%]
1	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,4454 \times 10^{-4}$	$2,3233 \times 10^{-4}$	32,57
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,4651 \times 10^{-4}$	$2,3299 \times 10^{-4}$	32,76
2	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,4787 \times 10^{-4}$	$2,4927 \times 10^{-4}$	28,34
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,4787 \times 10^{-4}$	$2,4924 \times 10^{-4}$	28,35
3	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,4787 \times 10^{-4}$	$2,4924 \times 10^{-4}$	28,35
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,4787 \times 10^{-4}$	$2,4921 \times 10^{-4}$	28,36
4	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,8663 \times 10^{-4}$	$3,1387 \times 10^{-4}$	18,82
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,8518 \times 10^{-4}$	$3,6041 \times 10^{-4}$	6,43
5	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,8777 \times 10^{-4}$	$3,2763 \times 10^{-4}$	15,51
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,8579 \times 10^{-4}$	$3,3948 \times 10^{-4}$	12,00
6	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,8708 \times 10^{-4}$	$3,3229 \times 10^{-4}$	14,15
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,8676 \times 10^{-4}$	$3,3509 \times 10^{-4}$	13,36
7	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,8392 \times 10^{-4}$	$3,3035 \times 10^{-4}$	13,95
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,8237 \times 10^{-4}$	$3,8233 \times 10^{-4}$	0,01
8	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,8902 \times 10^{-4}$	$3,4939 \times 10^{-4}$	10,19
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,6400 \times 10^{-4}$	$3,3707 \times 10^{-4}$	7,40
9	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$3,9003 \times 10^{-4}$	$3,5703 \times 10^{-4}$	8,46
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$3,9095 \times 10^{-4}$	$3,1801 \times 10^{-4}$	18,66

Tabela 7.5 – Deslocamentos verticais RMS para os casos analisados.

Caso	Max.	U_{RMS} [m] (sem controle)	U_{RMS} [m] (com controle)	Redução [%]
1	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,4146 \times 10^{-5}$	$1,9579 \times 10^{-5}$	76,73
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,4350 \times 10^{-5}$	$1,9505 \times 10^{-5}$	76,87
2	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,4739 \times 10^{-5}$	$2,1724 \times 10^{-5}$	74,36
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,4734 \times 10^{-5}$	$2,1720 \times 10^{-5}$	74,37
3	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,4734 \times 10^{-5}$	$2,1720 \times 10^{-5}$	74,37
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,4736 \times 10^{-5}$	$2,1713 \times 10^{-5}$	74,37
4	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,2816 \times 10^{-5}$	$2,7038 \times 10^{-5}$	67,35
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,2194 \times 10^{-5}$	$5,2862 \times 10^{-5}$	35,69
5	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,3272 \times 10^{-5}$	$3,0214 \times 10^{-5}$	63,72
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,2132 \times 10^{-5}$	$3,4710 \times 10^{-5}$	57,74
6	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,3156 \times 10^{-5}$	$3,1679 \times 10^{-5}$	61,90
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,2706 \times 10^{-5}$	$3,2734 \times 10^{-5}$	60,42
7	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,1646 \times 10^{-5}$	$3,2576 \times 10^{-5}$	60,10
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,4234 \times 10^{-5}$	$8,4096 \times 10^{-5}$	0,16
8	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,1608 \times 10^{-5}$	$3,9177 \times 10^{-5}$	51,99
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,0257 \times 10^{-5}$	$4,2464 \times 10^{-5}$	47,09
9	$\lambda_1(\mathbf{W}_c)$	$8,1827 \times 10^{-5}$	$4,2998 \times 10^{-5}$	47,45
	$\text{tr}(\mathbf{W}_c)$	$8,4863 \times 10^{-5}$	$2,6260 \times 10^{-5}$	69,06

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, alguns aspectos conclusivos são expostos após análise dos resultados obtidos. Por fim, algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

8.1 Conclusões

Neste trabalho, uma formulação foi proposta para o problema de otimização topológica visando o posicionamento ótimo de atuadores em uma estrutura controlada. Para isso, o menor autovalor do Gramiano de controlabilidade foi maximizado propiciando, assim, que nenhum estado do sistema esteja em uma situação próxima de não ser controlável. Essa formulação foi comparada com a proposta por Silveira [2012] na qual a função objetivo é o traço do Gramiano de controlabilidade.

O desempenho das estruturas controladas foi analisado considerando um sistema de controle com realimentação e a aplicação de uma carga impulsiva. Para os casos nos quais apenas o primeiro modo de vibração foi considerado no sistema de controle, ambas as formulações apresentam resultados similares em decorrência da dependência dos termos do vetor de estados adotado. Para os casos nos quais os dois primeiros modos de vibração são considerados no sistema de controle, a formulação proposta neste trabalho obteve melhores resultados para atenuação de deslocamentos máximo e RMS. Como esperado, os casos com sistema de controle para quatro modos de vibração apresentaram maiores dificuldades para atenuar vibrações. Essa dificuldade é decorrente do compromisso que é induzido de que o sistema de controle seja efetivo, simultaneamente, para todos os modos. O desempenho da estrutura controlada obtida através da formulação proposta apresentou desempenho inferior apenas para o caso 9, com controle dos quatro primeiros modos de vibração considerando a possibilidade de seis eletrodos independentes. De forma geral, a maximização do traço de \mathbf{W}_c tende a melhorar a controlabilidade dos estados que já são bem controláveis. Em contrapartida, a maximização do menor autovalor de \mathbf{W}_c induz uma melhoria na controlabilidade do estado menos controlável. Entretanto, para a maioria dos casos, nota-se que a maximização de uma dessas medidas de controlabilidade contribui para o aumento da outra.

8.2 Sugestões para trabalhos futuros

Nesta seção, algumas sugestões são expostas levando em consideração os resultados obtidos neste trabalho:

- A configuração da face potencial influencia, consideravelmente, o problema de otimização topológica. O estudo de métodos para eliminar a necessidade de eletrodos posicionados previamente poderia flexibilizar a metodologia utilizada.
- A formulação proposta apresenta dificuldades quando o sistema de controle considera muitos modos de vibração de forma simultânea. Como alternativa, pode-se estudar a utilização de eletrodos individuais para o controle de cada modo de vibração.
- Neste trabalho, o comportamento do material piezolétrico é considerado linear. Além disso, nenhuma restrição quanto ao campo elétrico aplicado (ou tensão mecânica) é adotada para a estrutura controlada. Sabe-se que restringir os sinais de controle pode resultar em desempenho muito inferior do que os obtidos. Dessa forma, a consideração da não-linearidade material dos atuadores piezolétricos pode se tornar um acréscimo importante à metodologia utilizada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ambrosio, L.; Buttazzo, G. An optimal design problem with perimeter penalization, **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, vol. 1(1), p. 55–69, 1993.

Arora, J. **Introduction to optimum design**. Academic Press, 2004.

Arunakirinathar, K.; Reddy, B. Further results for enhanced strain methods with isoparametric elements, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 127(1), p. 127–143, 1995.

Bailey, T.; Ubbard, J. Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 8(5), p. 605–611, 1985.

Balas, M. J. Feedback control of flexible systems, **Automatic Control, IEEE Transactions on**, vol. 23(4), p. 673–679, 1978.

Bartels, R.; Stewart, G. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4], **Communications of the ACM**, vol. 15(9), p. 820–826, 1972.

Baz, A.; Imam, K.; McCoy, J. Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(3), p. 437–456, 1990.

Becker, J.; Fein, O.; Maess, M.; Gaul, L. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, **Computers & structures**, vol. 84(31), p. 2340–2350, 2006.

Bendsøe, M. P. **Optimization of structural topology, shape, and material**. Springer, 1995.

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 71(2), p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology optimization: theory, methods and applications**. Springer, 2003.

Cardoso, E. L. **Controle de complexidade na otimização topológica de estruturas contínuas**, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

Cardoso, E. L. **Otimização topológica de transdutores piezelétricos considerando não-linearidade geométrica**, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

Cheng, G. **Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution, Lecture Notes, Dalian University of Technology**, 1992.

Dantzig, G. B. Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951.

Dantzig, G. B. **Linear programming and extensions**. Princeton university press, 1998.

Diaz, A.; Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization, **Structural optimization**, vol. 10(1), p. 40–45, 1995.

Gawronski, W. Actuator and sensor placement for structural testing and control, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 208(1), p. 101–109, 1997.

Gawronski, W.; Lim, K. Balanced actuator and sensor placement for flexible structures, **International Journal of Control**, vol. 65(1), p. 131–145, 1996.

Gawronski, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures**. volume 1. Springer, 2004.

Georges, D. **The use of observability and controllability gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems**. In *Decision and Control, 1995, Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 4, pages 3319–3324. IEEE, 1995.

Gray, R. B. **Transducer and method of the same**. US Patent No. 2,486,560, May, 1949.

Guedes, J.; Taylor, J. On the prediction of material properties and topology for optimal continuum structures, **Structural optimization**, vol. 14(2-3), p. 193–199, 1997.

Haber, R.; Jog, C.; Bendsøe, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter, **Structural Optimization**, vol. 11(1-2), p. 1–12, 1996.

Hać, A.; Liu, L. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 167(2), p. 239–261, 1993.

Haftka, R. T.; Gurdal, Z. **Elements of structural optimization**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

Hamdan, A.; Nayfeh, A. Measures of modal controllability and observability for first- and second-order linear systems, **Journal of guidance, control, and dynamics**, vol. 12(3), p. 421–428, 1989.

Holnicki-Szulc, J.; Rodellar, J. **Smart structures: requirements and potential applications in mechanical and civil engineering**. volume 65. Springer, 1999.

Hong, S.-R.; Choi, S.-B. Vibration control of a structural system using magnetorheological fluid mount, **Journal of intelligent material systems and structures**, vol. 16(11-12), p. 931–936, 2005.

Hughes, T. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Prentice-Hall, 1987.

Irschik, H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation, **Engineering Structures**, vol. 24(1), p. 5–11, 2002.

Jog, C. S.; Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 130(3), p. 203–226, 1996.

Junkins, J. L.; Kim, Y. Measure of controllability for actuator placement, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, vol. 14(5), p. 895–902, 1991.

Karkoub, M. A.; Zribi, M. Active/semi-active suspension control using magnetorheological actuators, **International journal of systems science**, vol. 37(1), p. 35–44, 2006.

Karmarkar, N. **A new polynomial-time algorithm for linear programming.** In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM, 1984.

Katzir, S. **The beginnings of piezoelectricity: a study in mundane physics.** volume 246. Springer, 2007.

Kawai, H. The piezoelectricity of poly (vinylidene fluoride), **Japanese Journal of Applied Physics**, vol. 8(7), p. 975, 1969.

Kim, J.; Ko, B. Optimal design of a piezoelectric smart structure for noise control, **Smart materials and structures**, vol. 7(6), p. 801, 1998.

Lan, C.-C.; Fan, C.-H. An accurate self-sensing method for the control of shape memory alloy actuated flexures, **Sensors and Actuators A: Physical**, vol. 163(1), p. 323–332, 2010.

Larsen, A. A.; Laksafoss, B.; Jensen, J. S.; Sigmund, O. Topological material layout in plates for vibration suppression and wave propagation control, **Structural and Multi-disciplinary Optimization**, vol. 37(6), p. 585–594, 2009.

Leleu, S.; Abou-Kandil, H.; Bonnassieux, Y. Piezoelectric actuators and sensors location for active control of flexible structures, **Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on**, vol. 50(6), p. 1577–1582, 2001.

Lerch, R. Simulation of piezoelectric devices by two-and three-dimensional finite elements, **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, vol. 37(3), p. 233–247, 1990.

Lim, K.; Gawronski, W. Actuator and sensor placement for control of flexible structures, **Control and Dynamic Systems**, vol. 57, p. 109–109, 1993.

Lim, Y.-H. Finite-element simulation of closed loop vibration control of a smart plate under transient loading, **Smart materials and structures**, vol. 12(2), p. 272, 2003.

Mason, W. P. **Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics.** van Nostrand, 1950.

Meitzler, A.; Tiersten, H.; Warner, A.; Berlincourt, D.; Couqin, G.; Welsh III, F. **IEEE standard on piezoelectricity**, 1988.

Middleton, R. H.; Goodwin, G. C. **Digital control and estimation: a unified approach**. Prentice Hall Professional Technical Reference, 1990.

Moheimani, S. R.; Fleming, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping**. Springer, 2006.

Peng, F.; Ng, A.; Hu, Y.-R. Actuator placement optimization and adaptive vibration control of plate smart structures, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 16(3), p. 263–271, 2005.

Petersson, J.; Sigmund, O. Slope constrained topology optimization, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 41(8), p. 1417–1434, 1998.

Piefort, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.

Preumont, A. **Vibration control of active structures**. Kluwer Amsterdam, 1997.

Preumont, A.; François, A.; De Man, P.; Piefort, V. Spatial filters in structural control, **Journal of sound and vibration**, vol. 265(1), p. 61–79, 2003.

Priya, S. Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers, **Journal of Electroceramics**, vol. 19(1), p. 167–184, 2007.

Qi, H.; Fang, D.; Yao, Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials, **Computational materials science**, vol. 8(4), p. 283–290, 1997.

Reddy, B.; Simo, J. Stability and convergence of a class of enhanced strain methods, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, vol. 32(6), p. 1705–1728, 1995.

Rubio, W. M.; Silva, E. C.; Paulino, G. H. Toward optimal design of piezoelectric transducers based on multifunctional and smoothly graded hybrid material systems, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2009.

Ruiz, D.; Bellido, J.; Donoso, A.; Sánchez-Rojas, J. Design of in-plane piezoelectric sensors for static response by simultaneously optimizing the host structure and the electrode profile, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 48(5), p. 1023–1026, 2013.

Santos, H. F. L. **Controle de vibrações estruturais usando cerâmicas piezoelétricas em extensão e cisalhamento conectadas a circuitos híbridos ativo-passivos**. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2008.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization*, **Journal of Structural Mechanics**, vol. 25(4), p. 493–524, 1997.

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, **Structural optimization**, vol. 16(1), p. 68–75, 1998.

Silva, E. C. N.; Kikuchi, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 350, 1999.

Silveira, O. A. A. **Projeto Simultâneo de Otimização Topológica e Controle para Redução de Vibrações Utilizando Material Piezelétrico**, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Silveira, O. A. A.; Fonseca, J. S. O.; Santos, I. F. Actuator topology design using the controllability Gramian, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, pages 1–13, 2014.

Sohn, J. W.; Choi, S.-B.; Kim, H. S. Vibration control of smart hull structure with optimally placed piezoelectric composite actuators, **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 53(8), p. 647–659, 2011.

Song, G.; Sethi, V.; Li, H.-N. Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review, **Engineering Structures**, vol. 28(11), p. 1513–1524, 2006.

Stanway, R.; Sproston, J.; El-Wahed, A. Applications of electro-rheological fluids in vibration control: a survey, **Smart Materials and Structures**, vol. 5(4), p. 464, 1996.

Takezawa, A.; Kitamura, M.; Vatanabe, S.; Silva, E. Design methodology of piezoelectric energy-harvesting skin using topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49(2), p. 281–297, 2013.

Taylor, R. L.; Beresford, P. J.; Wilson, E. L. A non-conforming element for stress analysis, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 10(6), p. 1211–1219, 1976.

Tiersten, H. Hamilton's principle for linear piezoelectric media, **Proceedings of the IEEE**, vol. 55(8), p. 1523–1524, 1967.

Tzou, H.; Gadre, M. Theoretical analysis of a multi-layered thin shell coupled with piezoelectric shell actuators for distributed vibration controls, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 132(3), p. 433–450, 1989.

Uchino, K. **Advanced piezoelectric materials: Science and technology**. Elsevier, 2010.

Vasques, C.; Dias Rodrigues, J. Active vibration control of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies, **Computers & structures**, vol. 84(22), p. 1402–1414, 2006.

Wang, Q.; Wang, C. A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 242(3), p. 507–518, 2001.

Wilson, E.; Taylor, R.; Doherty, W.; Ghaboussi, J. Incompatible displacement models(isoparametric finite elements in solid and thick shell structural analysis), **Numerical and computer methods in structural mechanics.(A 74-17756 06-32) New York, Academic Press, Inc., 1973,**, pages 43–57, 1973.

Wu, B.; Xu, Z.; Li, Z. A note on computing eigenvector derivatives with distinct and repeated eigenvalues, **Communications in numerical methods in engineering**, vol. 23(3), p. 241–251, 2007.

Zou, Y.; Tong, L.; Steven, G. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures—a review, **Journal of Sound and vibration**, vol. 230(2), p. 357–378, 2000.

APÊNDICE A

Convergência das funções objetivo

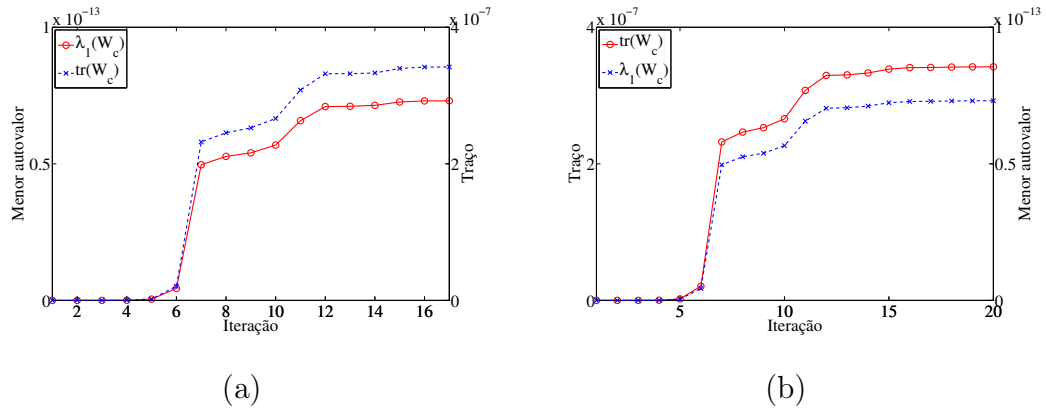


Figura A.1 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

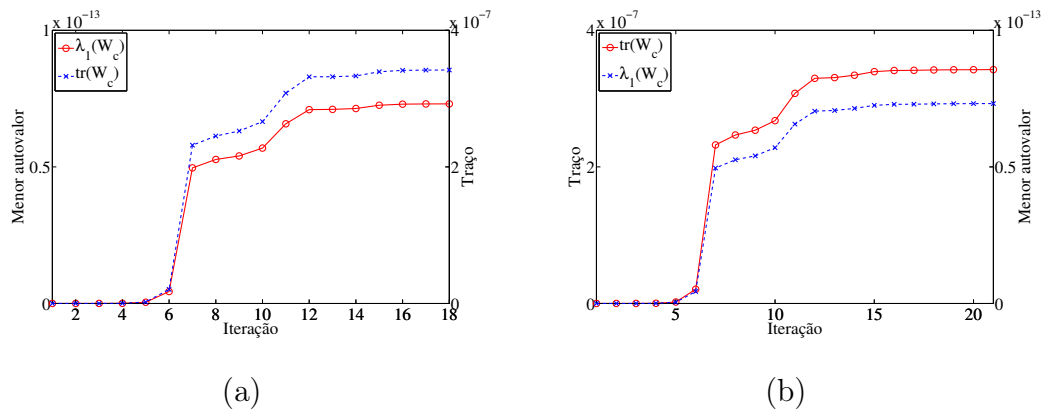


Figura A.2 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

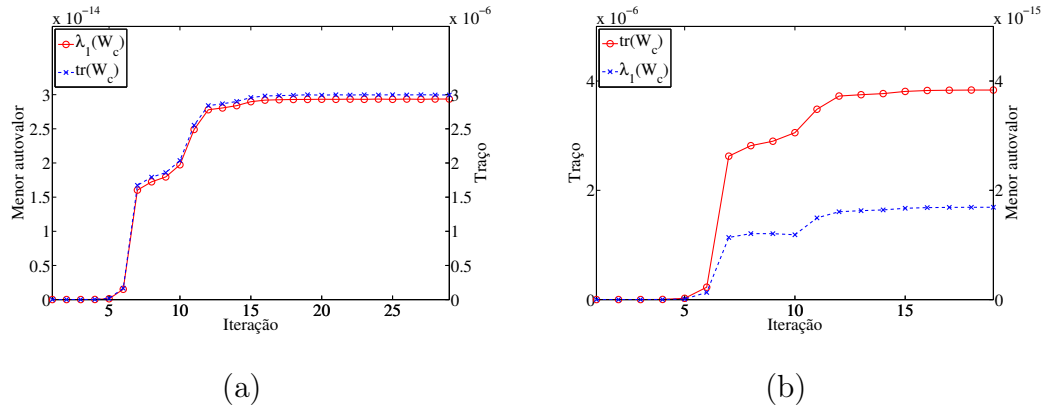


Figura A.3 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

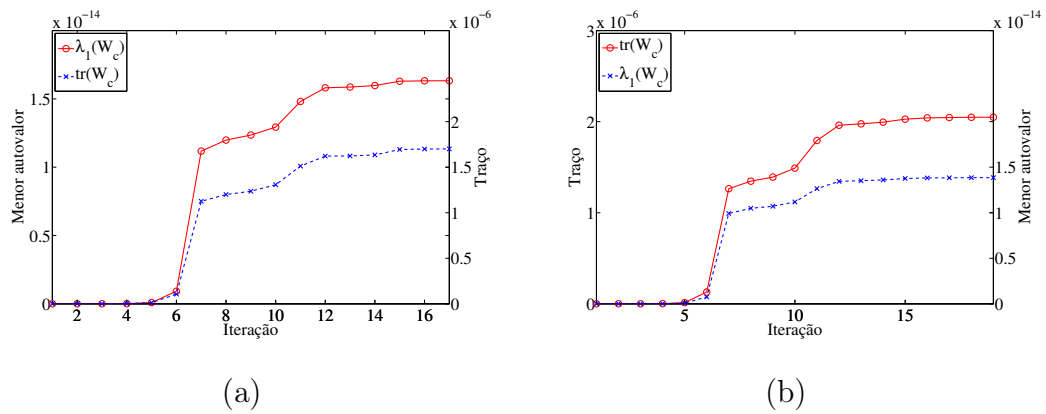


Figura A.4 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

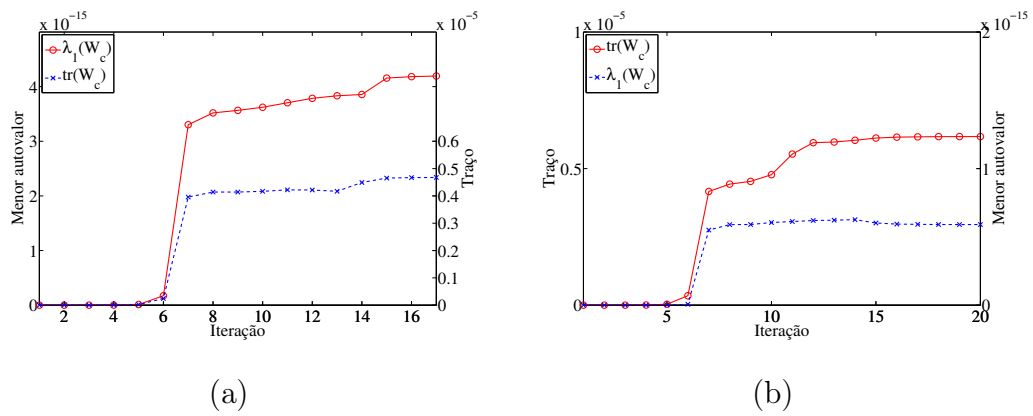


Figura A.5 – Histórico das medidas de controlabilidade para caso 9, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

APÊNDICE B

Respostas das estruturas a uma carga impulsiva

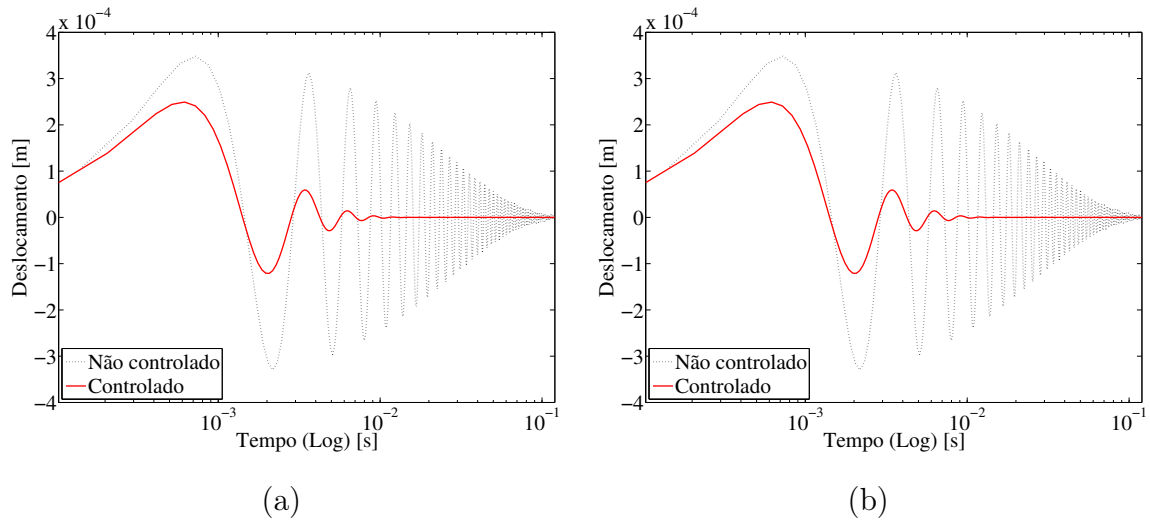


Figura B.1 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

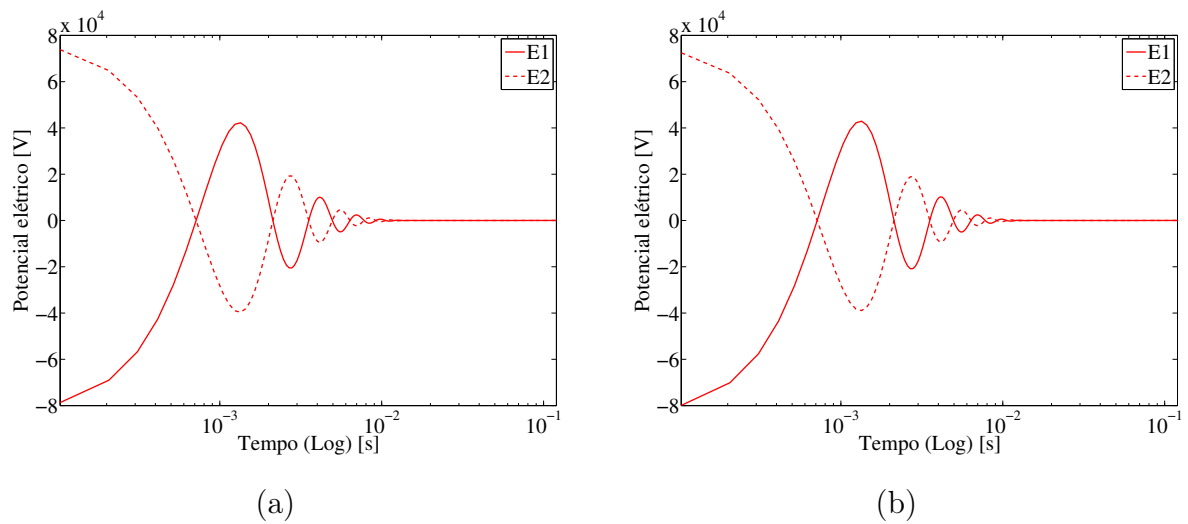


Figura B.2 – Sinais de controle para o caso 2, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

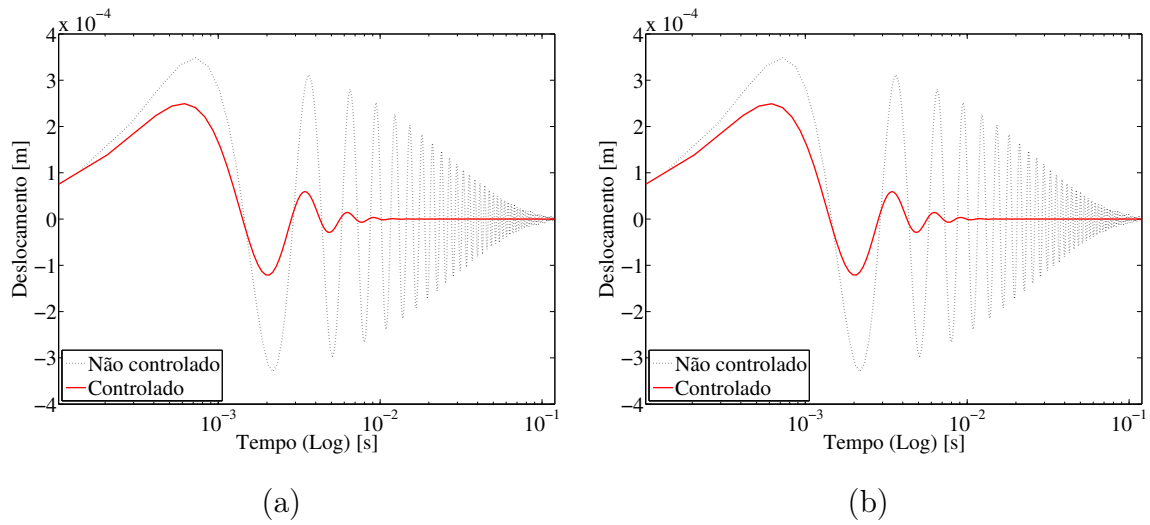


Figura B.3 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

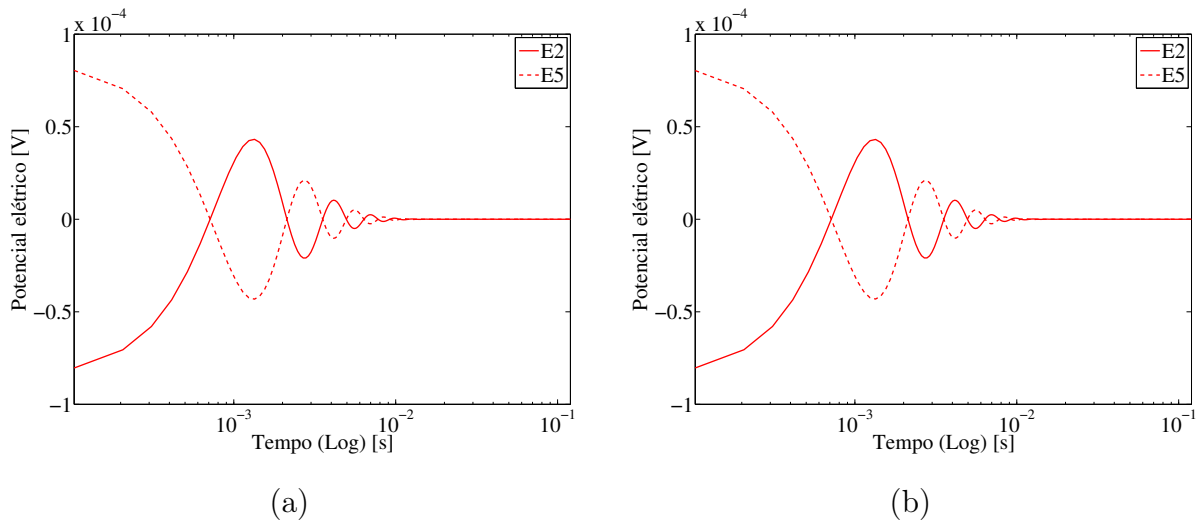


Figura B.4 – Sinais de controle para o caso 3, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

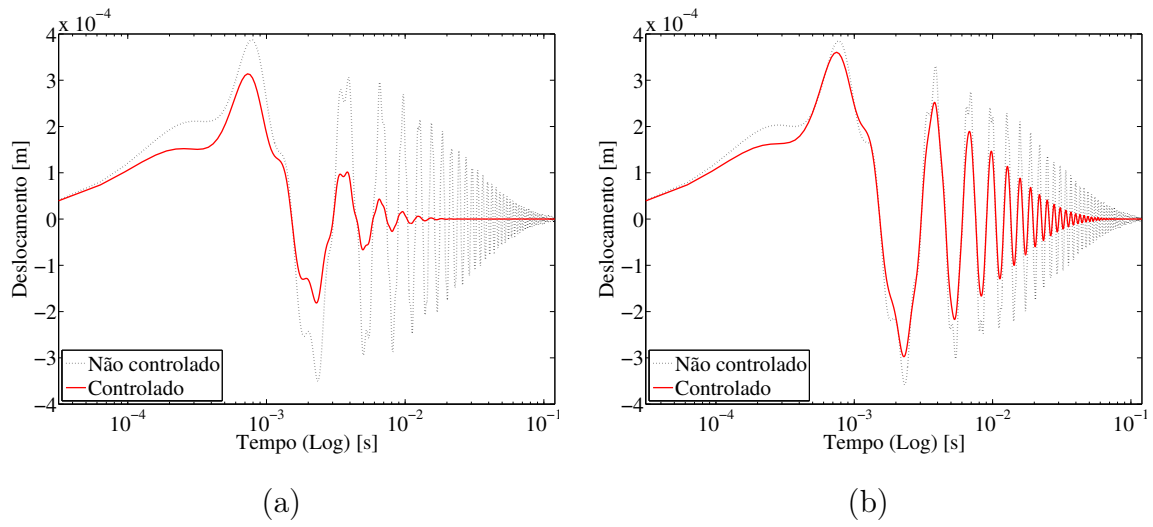


Figura B.5 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

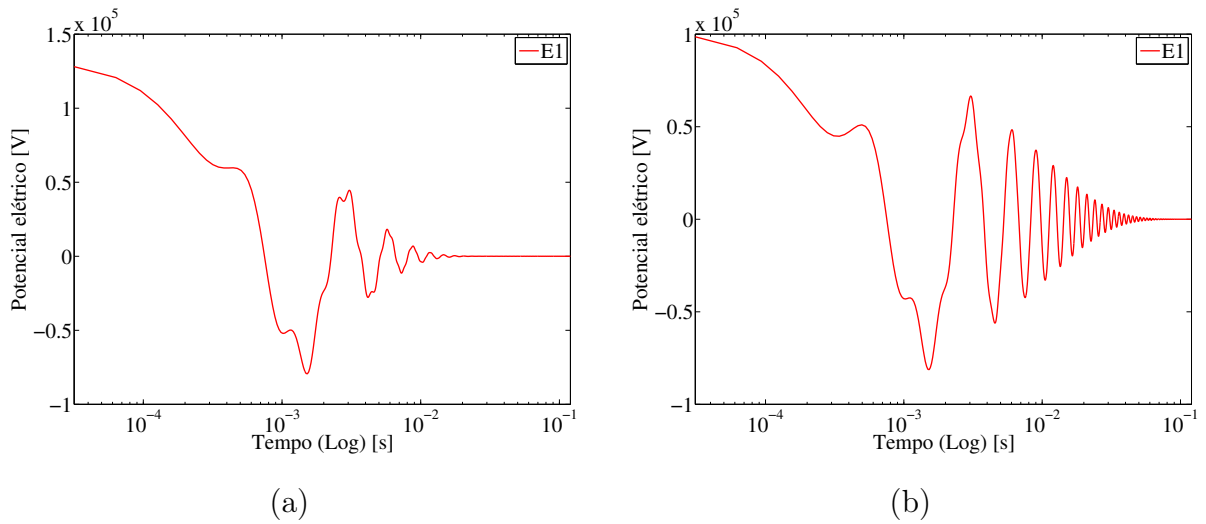


Figura B.6 – Sinais de controle para o caso 4, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

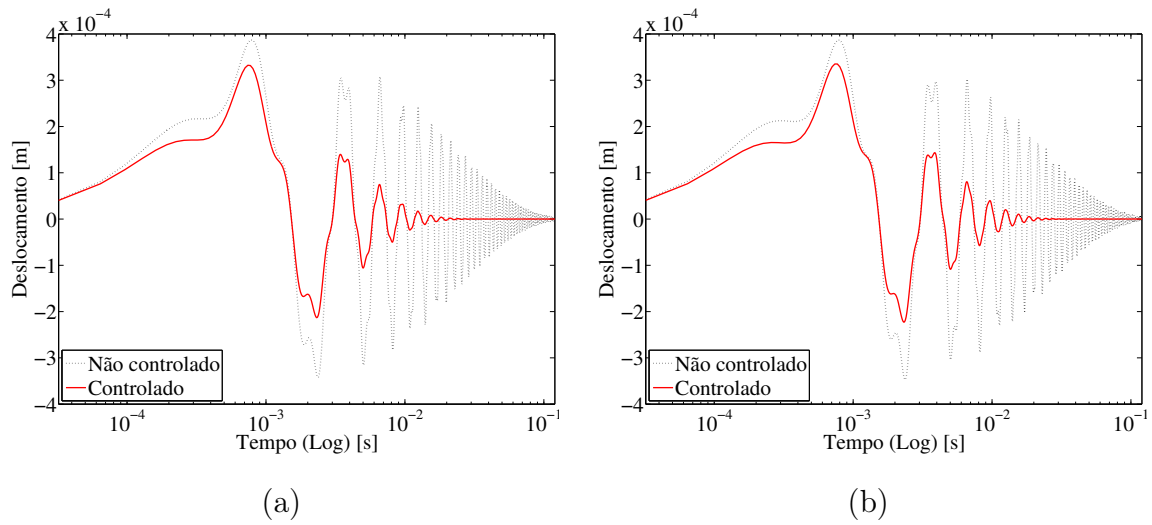


Figura B.7 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

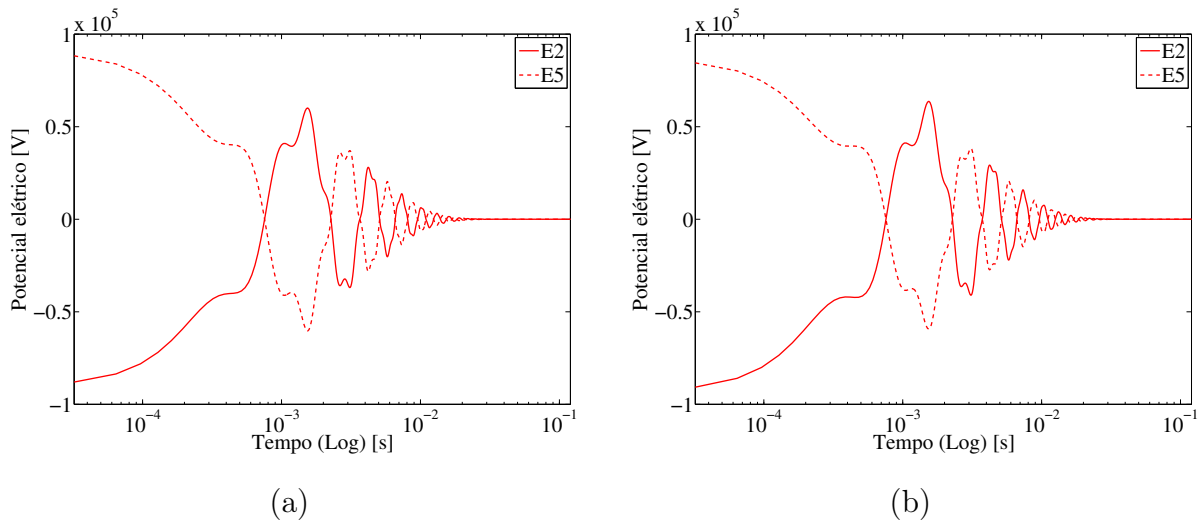


Figura B.8 – Sinais de controle para o caso 6, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

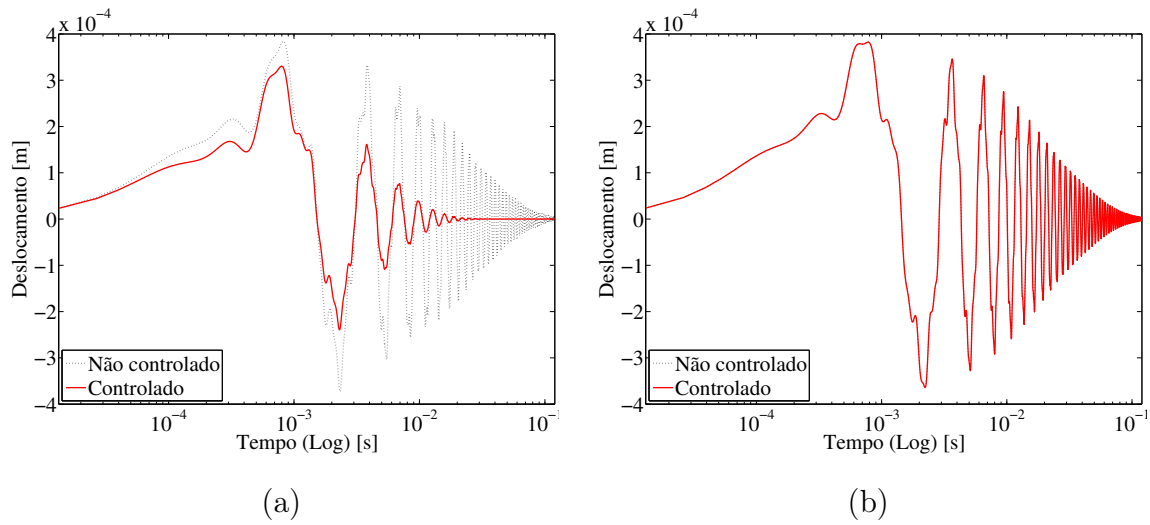


Figura B.9 – Resposta a uma carga impulsiva para o caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .

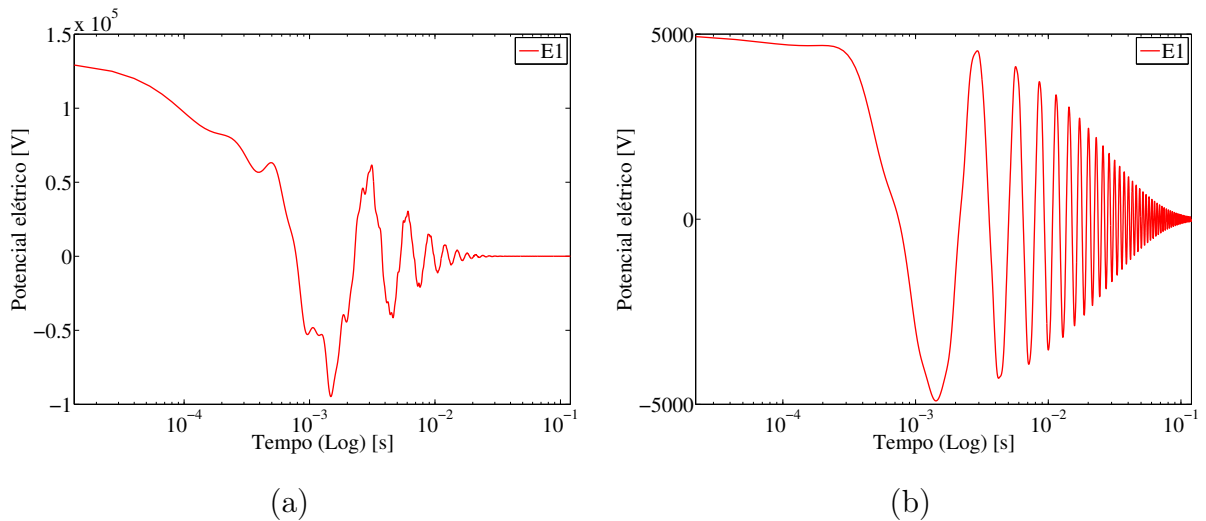


Figura B.10 – Sinais de controle para o caso 7, maximizando: (a) o menor autovalor e (b) o traço de \mathbf{W}_c .