Evento	Salão UFRGS 2014: SIC - XXVI SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2014
Local	Porto Alegre
Título	Operadores lineares compactos e Teoremas do Tipo Fredholm
Autor	FABIO DE SALES CASULA
Orientador	CARLOS HOPPEN

Da Álgebra Linear, sabemos que, em dimensão finita, uma matriz está associada univocamente a um operador (transformação) linear , isto é, uma aplicação T entre espaços vetoriais E e F, satisfazendo $T(x+y)=T(x) + T(y)$ e $T(a.x)= a.T(x)$, para quaisquer elementos x, y do espaço E e qualquer escalar a. Sabemos também que podemos estudar tal teoria tanto do ponto de vista matricial ou via transformações lineares. Além disso, conhecemos a importância dos autovalores de uma matriz e suas relações com teoremas clássicos da área, como o Teorema Espectral, que garante que em um espaço E de dimensão finita e com produto interno, todo operador auto-adjunto T possui base ortonormal $\{e_1 ,.., e_n\}$ formada por autovetores; sendo assim, denotando por λ_m os autovalores da matriz associada a T, podemos escrever $T = \lambda_1 P_1 +..+ \lambda_n P_n$, onde P_m representa o operador projeção em relação à base ortonormal, ou seja, $P_m (a_1 e_1 +..+a_n e_n) = a_m e_m$. Essas idéias podem ser generalizadas para espaços de dimensão infinita, área de estudo da Análise Funcional.

Análise Funcional é uma teoria matemática bastaste rica, capaz de combinar diferentes tópicos de análise, topologia e álgebra, além de ser vastamente usada em outras teorias matemáticas ou outras áreas da ciência, como em Física. Os objetos básicos de estudo são os espaços vetoriais normados e operadores lineares entre esses espaços.

Assim como na Álgebra Linear, podemos falar em autovalores de um operador definido num espaço normado qualquer, inclusive de dimensão infinita, como o famoso espaço das funções integráveis definidas em um intervalo [a,b], denotado por $L^1([a,b])$. É bem interessante estudar autovalores de operadores em espaços normados pois isso nos possibilita, por exemplo, a generalizar o Teorema Espectral da Álgebra Linear e portanto ter uma decomposição de certos operadores lineares análoga a anterior. Inclusive, pode-se definir o que é conhecido como o espectro do operador T, algo que generaliza o conjunto dos autovalores do operador e a partir do qual surge uma área muito rica, conhecida como Teoria Espectral, a qual está diretamente relacionada à solubilidade de equações lineares em espaços de Banach, isto é, espaços normados cuja norma induz uma métrica na qual o espaço é completo. Sendo assim, faz sentido e é bastante interessante estudar equações da forma $Tx = ax$, onde T é um operador em um espaço normado, x um elemento desse espaço e a um escalar. Isso está intimamente relacionado com equações integrais, como ilustra o exemplo a seguir: considere E o espaço das funções contínuas definidas em [a,b] assumindo valores reais, K uma função contínua definida em $[a,b]^2$ também assumindo valores reais, f um elemento de E e T um operador agindo em E, cuja lei é $Tf (t) = \int K(t,s) f(s) ds$, onde a integral é tomada de a até b. Estudar a equação $T f = r f$, onde r é um escalar é equivalente a estudar a equação integral $r. f(t) = \int K(t,s)f(s)ds$, novamente com a integral tomada de a até b.

Por volta de 1900, I. Fredholm começa a estudar tais questões, investigando equações lineares integrais. Mais tarde, outras figuras importantes na área, como F. Riesz e J. Schauder, também passaram a estudar e generalizar teoremas nesse contexto, que ficaram conhecidos como Teoremas do tipo Fredholm. Nesse trabalho, procuramos estudar algumas dessas questões e também abordaremos alguns exemplos, a fim de ilustrar a teoria.