Operadores lineares compactos e teoremas do tipo Fredholm

Aluno: Fabio de Sales Casula

Professor: Carlos Hoppen

Bolsa PIBIC CNPq UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Introdução

Por volta de 1900, Erik Ivar Fredholm, motivado por questões de Física e de análise matemática, introduziu equações integrais da forma abaixo:

$$x(s) - \mu \int K(s,t)\, x(t)dt = Y(s) \quad (*)$$

onde μ é uma constante complexa não nula, K e Y são funções conhecidas, x é a variável e o intervalo de integração é [a,b].

Tal estudo pioneiro de Fredholm foi muito importante para o desenvolvimento da Teoria de Operadores. Em particular, essas equações motivaram a definição de operador compacto, peça fundamental na teoria.

Ao usar algumas ferramentas básicas em Análise Funcional, é possível estudar esse modelo de equação. Busca-se responder problemas de existência e unicidade de soluções, dependendo da constante μ e da função K, conhecida como Núcleo da equação.

Considere uma função K definida em $L^2\{[a,b]^2\}$ e Y em $L^2[a,b]$. Definindo o operador linear T agindo em $L^2[a,b]$ por $(Tx)(s) = \int K(s,t)\, x(t)dt$, pode-se reescrever a equação na forma $Tx - \lambda x = y$, onde λ é o inverso de μ e $y = -\lambda Y$. Assim, para estudar a equação integral dada, estuda-se o seguinte problema mais geral.

Seja X um espaço de Banach complexo e T um operador em X. Dado y em X, busca-se encontrar x em X tal que $Tx - \lambda x = y$.

Teoremas de Análise Funcional

Considere X um espaço de Banach (complexo). T é um operador compacto em X se T é um operador linear tal que para todo conjunto limitado A em X, T(A) tem fecho compacto. O resolvente de um operador T, res(T), é o conjunto dos λ complexos tais que $(T-\lambda)^{-1}$ existe e é limitado. O complementar de res(T) é o espectro do operador, sp(T). Observe que $(T-\lambda)^{-1}$ pode existir e não ser limitado.

Defina por X' o espaço dual de X e T' o operador adjunto de Banach, definido em X' e satisfazendo $T'f = f \circ T$.

Teorema 1: Se T é limitado, então sp(T) é compacto não vazio e está contido na bola de centro 0 e raio |T| (norma sup).

Teorema 2: Se T é limitado e λ é tal que $|\lambda| > |T|$. Então o operador $(T-\lambda)^{-1}$ é expresso pela série

$$(T-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1} . \Sigma\, \lambda^{-j}\, T^j,\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Teorema 3: Seja T operador compacto agindo em X e λ não nulo. Então vale que

$$\dim \operatorname{Ker}(T-\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(T'-\lambda) = m$$

onde m é necessariamente finito. Em outras palavras, a quantidade de soluções LI do problema $Tx - \lambda x = 0$ é finita e é a mesma que do problema $T'f - \lambda f = 0$.

Teorema 4: Se T é compacto em X Banach complexo e λ não nulo pertence ao espectro de T, então λ é autovalor de T, isto é, Ker $(T-\lambda)$ é não trivial. Em outras palavras, se $(T-\lambda)^{-1}$ existir, deverá ser necessariamente limitado.

Teoremas do Tipo Fredholm

Considere X, T e λ como anteriormente. Defina as equações

(1) $Tx - \lambda x = y$, y em X dado.

(2) $Tx - \lambda x = 0$.

(3) $T'f - \lambda f = g$, g em X' dado.

(4) $T'f - \lambda f = 0$.

Teoremas:

a) Fixado y em X, existe solução x de (1) se, e somente se f(y)=0, para toda f solução de (4). Portanto, se f=0 é a única solução de (4), sempre existirá solução de (1).

b) Fixado g em X', existe solução f de (3) se, somente se g(x)=0, para todo x solução de (2). Portanto, se x=0 é a unica solução de (2), sempre existirá solução de (3).

c) (1) terá solução x para todo y em X se, e somente se x=0 é a unica solução de (2).

d) (3) terá solução f para todo g em X' se, e somente se f=0 é a única solução de (4).

De posse desses teoremas, em conjunto com o Teorema 3, segue-se que, para T compacto em X Banach complexo, $T-\lambda$ satisfaz a **Alternativa de Fredholm**, isto é, vale necessariamente uma das opções:

I) dados quaisquer y em X e g em X', as equações (1) e (4) têm soluções únicas. As equações homogêneas correspondentes têm apenas as soluções triviais.

II) As equações homogêneas têm o mesmo número de soluções LI,

$x_1, .., x_n$ e $f_1, .., f_n$ respectivamente.

As equações (1) e (4) não possuem solução para quaisquer y em X e g em X';

terão soluções se, e somente se, $f_k(y) = 0$ e $g(x_k) = 0$, para k = 1, .., n.

É interessante ressaltar que a Alternativa de Fredholm tem aplicações marcantes ao estudar os Índices de operadores de Fredholm e seus respectivos espectros, um assunto bastante pertinente em Análise Funcional mais avançada.

Conclusão

Tendo em vista a equação integral (*), considerando que a função K está definida em $L^2\{[a,b]^2\}$ e Y em $L^2[a,b]$, temos o teorema:

Teorema: Seja T agindo em $L^2[a,b]$ dado por $(Tx)(s) = \int K(s,t)\, x(t)dt$. Então T é compacto.

Portanto, pode-se, como exposto anteriormente, escrever a equação integral (*) na forma $Tx - \lambda x = y$ e aplicar os teoremas supracitados a fim de esclarecer as soluções de (*).

Uma vez que T é compacto, tem-se que $T-\lambda$ satisfaz a Alternativa de Fredholm e conclui-se que:

* Se λ pertencer ao res(T), então $(T-\lambda)^{-1}$ existe e a solução x sempre existirá e será única, dada por $x = (T-\lambda)^{-1} y$.

Ademais, no caso $|\lambda| > |T|$, o teorema 2 garante que x tem representação dada por

$$x = -\lambda^{-1}\,(y + \lambda^{-1} Ty + \lambda^{-2} T^2 y + \ldots).$$

* Se λ pertencert ao sp(T), então λ é autovalor de T e pelo teorema 3, tem-se que Ker $(T-\lambda)$ e Ker $(T'-\lambda)$ são espaços finito-dimensionais de mesma dimensão, gerados respectivamente por $x_1, .., x_n$ e $f_1, .., f_n$.

Sendo assim, a equação (*) terá solução x se, e somente se, x pertencer ao núcleo de cada funcional f_k, de modo que para tais escolhas de λ, nem sempre existirá solução de (*).

Referências: Introductory functional analysis with applications -E. Kreyszig.