

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

MÁRCIO ALBANO LIMA

**O CONCEITO DE SUSTENTABILIDADE EM AMBIENTE DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

PORTO ALEGRE

2014

MÁRCIO ALBANO LIMA

**O CONCEITO DE SUSTENTABILIDADE EM AMBIENTE DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Ensino de
Matemática, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre
em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana.

PORTO ALEGRE

2014

MÁRCIO ALBANO LIMA

**O CONCEITO DE SUSTENTABILIDADE EM AMBIENTE DE MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Ensino de
Matemática, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre
em Ensino de Matemática.

**Orientadora: Prof^a. Dra.
Marilaine de Fraga Sant’Ana –
UFRGS**

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Débora da Silva Soares – UFRGS

Prof^a. Dr^a. Eleni Bisognin – UNIFRA

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso – UFRGS

Porto Alegre, 10 de novembro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à professora Marilaine de Fraga Sant'Ana pela dedicação e atenção prestadas durante as orientações.

À minha família, Débora, João e a recém-chegada Maria, pelo apoio e por acreditarem no meu êxito. Essa caminhada teria sido muito mais difícil se não fosse por vocês.

Aos professores, Débora da Silva Soares, Eleni Bisognin e Marcus Vinícius de Azevedo Basso, que aceitaram participar da banca, contribuindo para o aperfeiçoamento desse trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática que colaboram com seus ensinamentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro, em forma de bolsa de estudos.

Aos meus queridos educandos, na verdade à família PEAC, que me acolheu. Vocês foram muito importantes para a formação desse inacabado professor.

A todos que me auxiliaram, de alguma maneira, nessa jornada.

O cão e a árvore também são inacabados, mas o homem se sabe inacabado e por isso se educa. Não haveria educação se o homem fosse um ser acabado. O homem pergunta-se: quem sou? de onde venho? onde posso estar? O homem pode refletir sobre si mesmo e colocar-se num determinado momento, numa certa realidade: é um ser na busca constante de ser mais e, como pode fazer esta auto-reflexão, pode descobrir-se como um ser inacabado, que está em constante busca. Eis a raiz da educação.

Paul Freire

A Educação não muda o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas mudam o mundo.

Paulo Freire

RESUMO

Nesse trabalho, apresentamos nossas concepções sobre a construção de conceitos em ambiente de Modelagem Matemática, segundo Barbosa (2004). Nossa posição em relação ao ensino é que o professor não é o detentor de todo o saber e também pode aprender em sala de aula. Para defender essa posição utilizamos Paulo Freire. Ao saber trazido pelo estudante para a sala de aula, associamos a imagem do conceito definida por Tall e Vinner (1981). Essas imagens representam tudo o que pensamos em relação a determinado conceito, seja matemático ou não. Construimos com os estudantes de um Pré-Vestibular Popular um projeto de Modelagem Matemática em um ambiente investigativo, definido por Skovsmose (2000) de cenário para investigação. Neste, utilizamos o tema gerador: sustentabilidade. Os estudantes investigaram sobre o tema, com foco no consumo consciente da água. O projeto ficou dividido em dois momentos, no primeiro, captamos o conhecimento prévio dos estudantes sobre o tema, enquanto no segundo, desenvolvemos o projeto, com o objetivo de levar os estudantes a refletirem e tomarem consciência da importância do consumo consciente da água. Eles investigaram sobre o consumo excessivo de água da casa de uma das participantes do projeto e viram que com medidas simples podemos economizar a água do planeta, e mais, monetizar tal economia. Foi possível desenvolver e ampliar os conceitos de conversão de unidades de volume, razão e proporção, aproximações e erros, além do estudo com gráficos e tabelas. No final, apresentamos uma proposta de sequência didática que pode ser seguida ou alterada, conforme necessidade do professor.

Palavras Chave: Modelagem matemática, sustentabilidade, construção de conceitos, consumo consciente da água.

ABSTRACT

In this work, we present our ideas about building concepts in mathematical modeling environment, according to Barbosa (2004). Our position in relation to teaching is that the teacher is not owner of all the knowledge and also can learn in the classroom. To defend this position we used Paulo Freire. The knowledge brought by the student to the classroom was associated to the concept image defined by Tall and Vinner (1981). These images represent everything we think about a concept, either mathematical or not. We built with students of a Popular Pre-University course, a mathematical modeling project in an investigative environment, defined by Skovsmose (2000) scenario for investigation. In this, we use the generator theme: sustainability. The students made an investigation on the topic, focusing on conscious consumption of water. The project was divided into two stages, in the first, we got the prior knowledge of students on the subject, while in the second, we develop the project, with the goal of bringing students to reflect and become aware of the importance of conscientious consumption of water. The students made an investigation on excessive water consumption of the house of one of the project participants and they saw that with simple measures is possible save the planet's water, and more, monetize such an economy. It was possible to develop and expand the conversion concepts of volume units, ratio and proportion, approximations and errors, and the study of graphs and tables. In the end, we propose a didactic sequence that can be followed or amended as teacher needs.

Keywords: Mathematical modeling, sustainability, construction of concepts, conscious consumption of water.

ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 – Gráfico elaborado a partir do quadro 13.....	88
Gráfico 2 – Gráfico elaborado a partir do quadro 13.....	89
Figura 1 – Imagem de parte de uma conta de água pertencente a uma das estudantes participante do projeto.....	59
Figura 2 – Parte da conta que indica as leituras, anterior e atual, consumo e período de consumo.....	71
Figura 3 – Parte da conta que apresenta itens financeiros.....	77
Figura 4 – Exemplo de projeto de uma casa com sistema de cisterna.	82
QUADRO 1 – Classificação de ambientes de aprendizagem, segundo Skovsmose (2000)	27
QUADRO 2 – Divisão em casos, dos ambientes de aprendizagem para modelagem, segundo Barbosa (2001)	44
QUADRO 3 – Valores de consumo médio de água dependendo da utilização da saída de água.....	62
QUADRO 4 – Consumo de água por atividade, de acordo com os dados pesquisados pelos estudantes.	62
QUADRO 5 – Tempo para encher 1 litro de água, conforme atividade	65
QUADRO 6 – Tempo em que cada saída de água fica ligada por atividade de acordo com o membro da família	66
QUADRO 7 – Custos de acordo com o consumo mensal	78
QUADRO 8 – Índices de precipitação pluviométrica mensal dos últimos três anos ...	81
QUADRO 9 – Índices de precipitação pluviométrica dados em milímetros. Média de precipitação em milímetros e com conversão para metros. Volume captado pelo sistema dado em metro cúbico	83
QUADRO 10 – Relação de tempos em que cada atividade mantém a saída de água ligada	85
QUADRO 11 – Informações que relacionam a cada atividade, o tempo para encher vasilhame com capacidade de 1 litro, o consumo mensal em litros e a representação percentual.....	86
QUADRO 12 – Consumos e percentuais de consumo de acordo com a atividade.	87
QUADRO 13 – Evolução da economia mensal e retorno, caso se tenha valor inicial para investimento, ou, em caso contrário, dívida restante.....	88
QUADRO 14 – Variação da economia e da dívida em função do mês.....	90

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 APRENDENDO E ENSINANDO ATRAVÉS DE TEMAS GERADORES	14
2.1 CONCEPÇÕES DE APRENDIZAGEM-ENSINO	14
2.2 VOLTANDO A FALAR SOBRE NOSSA PROPOSIÇÃO	19
2.3 A IMPORTÂNCIA DOS SABERES ANTERIORES DOS ESTUDANTES	20
2.3.1 IMAGEM DO CONCEITO.....	21
2.4 TEMAS GERADORES	24
3 AMBIENTES DE APRENDIZAGEM	27
4 TEMA GERADOR: SUSTENTABILIDADE	33
5 MODELAGEM MATEMÁTICA	38
5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: DA MATEMÁTICA APLICADA AO AMBIENTE INVESTIGATIVO	40
5.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E CURRÍCULO	41
5.3 COMO DISTRIBUIR A CARGA-HORÁRIA NA ESCOLA?.....	45
5.3.1 COMO DISTRIBUÍMOS A CARGA-HORÁRIA NO PEAC?	46
5.3.2 COMO SE CONSTRÓI O PLANO DE ENSINO NO PEAC?	47
5.4 PERFIL DOS ESTUDANTES DO PEAC	47
5.5 EXPERIÊNCIAS NO PEAC.....	48
6 PROJETO DE ENSINO COM MODELAGEM	51
6.1 AULA 0	54
6.2 AULA 1	56
7.2.1 QUESTIONAMENTOS E RESPOSTAS ANTES DA PESQUISA ...	56
6.3 AULA 2	59
6.3.1 CÁLCULANDO COM DADOS PESQUISADOS.....	63
6.3.2 COMPARANDO OS DADOS CALCULADOS COM OS DADOS DA CONTA DE ÁGUA DA FAMÍLIA	64
6.4 AULA 3	65
6.4.1 CALCULANDO COM DADOS MEDIDOS.....	66
6.4.2 MONETIZANDO A ECONOMIA	77
6.5 AULA 4	80

6.5.1	PONTOS DE SAÍDA DE ÁGUA QUE PODEM SER ABASTECIDOS PELA CISTERNA	84
6.6	CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ENCONTROS	91
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	94
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	101
	APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO	121

1 INTRODUÇÃO

O que nos trouxe a esse momento, de reflexão a prática educacional, foi, justamente, a preocupação com a educação, como ela ocorre e como pensamos que deveria ocorrer. Não descobrimos um método infalível ou que garante 100% da aprendizagem de nossos educandos. Apesar disso, a cada experiência, temos mais convicção de que as práticas desenvolvidas nesse trabalho têm grande potencial de conduzir os estudantes ao aprendizado. Não queremos que os educandos aprendam por aprender, que memorizem fórmulas, mas, nosso sonho é que eles possam aprender criticamente. Que, sozinhos, consigam refletir e avaliar dados de uma reportagem, ou decidam se vale a pena reciclar o lixo, ou decidam se compram à vista ou parcelado, etc. Queremos que os educandos sejam capazes de tomar decisões e que utilizem isso para aprender de forma crítica. Mas, é preciso que antes se libertem da passividade.

Sendo assim, temos nos preocupado muito com a relação ensinar-aprender e, por isso, quando em aula, procuramos formas diferentes de ensinar. Por exemplo, procuramos demonstrar a maior parte dos conteúdos de Matemática. Não acreditamos que a melhor maneira de ensinar-aprender seja através da memorização de fórmulas. E, sendo assim, constantemente, procuramos fugir da repetição e da memorização. O presente trabalho não tem a pretensão de descartar qualquer meio de ensino, mas apresentar uma estratégia de ensino que auxilie o educando no processo de aprender.

Nossos objetivos são os seguintes:

1. Verificar como aprimorar as imagens que os educandos têm sobre sustentabilidade e construir o conceito de sustentabilidade em ambiente de modelagem matemática, a partir do conhecimento dos estudantes.
2. Verificar como aprimorar as imagens dos estudantes em relação aos seguintes conceitos matemáticos: conversão de unidades de volume, razão e proporção, aproximações e erros, gráficos e tabelas, a partir de seus saberes anteriores.
3. Tornar os estudantes capazes de refletir e tomar consciência da importância do consumo consciente de água.

4. Elaborar um material didático, que possa ser utilizado e adaptado por outro professor, além de planejar, implementar e validar uma sequência didática, em ambiente de modelagem matemática.

Para alcançar esses objetivos apresentamos uma proposta de aprendizagem crítica e reflexiva que envolve o educando em todos os momentos: modelagem matemática, conforme concepção de Barbosa (2004). Ou seja, nosso interesse é que o ambiente de modelagem seja voltado para a aprendizagem investigativa.

Procuramos perceber as imagens que os estudantes tinham acerca dos conceitos e conduzi-los ao entendimento do conceito ampliando, assim, as imagens que tinham. Utilizaremos, para isso, o tema *SUSTENTABILIDADE*.

Defendemos, no segundo capítulo, a utilização de *TEMAS GERADORES* como motivador. Esses podem ter uma concepção “bancária”, quando simplesmente temos um tema que guia uma pesquisa, ou “libertadora”, quando nos preocupamos com as visões de mundo dos educandos. Por isso, nesse capítulo, também apresentamos as definições e essas concepções, de acordo com Freire (2005). Além disso, apresentamos uma descrição do que pensamos em relação a ensino-aprendizagem, tendo como alicerces Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrósio, que são autores que defendem essa díade como sendo uma troca de experiência entre o educador e o educando, no qual o foco principal é o processo de aprender. Segundo eles, o educando, ao final da experiência, deve ter a capacidade de refletir, criticar e de alguma maneira tentar reverter uma situação desfavorável.

Também no segundo capítulo, apresentamos a importância do saber anterior do educando. Nossa intenção é aproximar esse saber da definição dos conceitos estudados. Ao conhecimento trazido pelo educando para a sala de aula, associamos a definição de Tall e Vinner (1981): imagem do conceito, que pode estar em sintonia com a definição formal do conceito, porém incompleta. Nossa intenção é que no final do trabalho os estudantes tenham aprimorado suas imagens acerca dos conceitos estudados. Além disso, que possam utilizar a água de forma mais consciente.

No terceiro capítulo, apresentamos os ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose (2000), que são classificados por ele em dois paradigmas (paradigma do exercício e cenários para investigação) e três referências (à matemática pura, à

semirrealidade e a realidade). Fazemos, também, uma comparação entre os ambientes descritos por Skovsmose (2000) com as concepções de educação de Freire (2005). Veremos, ainda, que dependendo do ambiente escolhido o estudante poderá ficar mais passivo ou, como preferimos, poderá agir de forma ativa. O ambiente que propomos, para construção de um conceito, é modelagem matemática, a luz da definição de ambiente de aprendizagem de Skovsmose (2000).

No quarto capítulo, apresentamos o tema gerador utilizado: *SUSTENTABILIDADE*. A partir dele, desenvolvemos o trabalho. Aqui, apontaremos definições do conceito que estamos querendo construir com os estudantes. Principalmente, o que tem relações com a preservação da água. Utilizamos Branco (2003), ao tratar da importância da água para nossa sobrevivência; Maciel e Mousquer (2013), para apresentar que a humanidade vem interferindo no meio ambiente e, por isso, estamos diante de uma crise ambiental. Segundo eles, a preocupação e o reconhecimento do meio ambiente como direito humano ocorreu na conferência de Estocolmo em 1972. Da mesma forma, pensa Jacobi (1999), entretanto, para ele, foi em 1992, no Rio de Janeiro, que as nações de fato se organizaram para discutir o tema.

Já no capítulo cinco, apresentamos nossas concepções de modelagem matemática, que são baseadas em Barbosa (2004). E, também colocamos nesse capítulo, como Bassanezi (2002) e Biembegut (2003) pensam modelagem. Eles foram muito importantes, pois trouxeram a matemática aplicada para o ensino de matemática. A diferença entre as concepções é a importância dada ao modelo. Para nós, ele é consequência da modelagem matemática.

Ainda, no capítulo cinco, defendemos a modelagem como parte integrante do currículo escolar, apresentando a divisão feita por Barbosa (2001). Essa vem para facilitar a iniciação de modelagem pelos professores. Já que há a opção de o professor apresentar o problema, levando para a sala de aula os dados necessários para sua solução; ou o professor somente apresenta o problema, ficando os estudantes responsáveis pela coleta de dados para solucioná-lo; e, os estudantes formulam o problema, coletam os dados e o solucionam. E, mais, apresentamos como construímos nossos planos de ensino e como percebemos nossa experiência, que nem sempre é a mesma, de acordo com Bondía (2001).

Por fim, no capítulo seis, apresentamos o projeto de modelagem matemática que originou esse trabalho. Para esse, utilizamos a *SUSTENTABILIDADE* como motivador. Iniciamos questionando aos estudantes o que sabiam acerca do tema. Após, apresentamos dois vídeos, visando ampliar seus conhecimentos. Então, solicitamos que os educandos pesquisassem sobre o tema e apresentassem uma definição sobre sustentabilidade. A partir dessas definições, montamos três grupos de trabalho e solicitamos que elaborassem questões sobre o tema.

Quando pensamos em um modelo de ensino que envolva os educandos, conduzindo-os a uma reflexão crítica, o que nos vem à mente é a mescla entre o ensino que prioriza a resolução de exercícios com a Modelagem. Porque aquele modelo, que tem o exercício como principal ferramenta é importante, mas temos a percepção de que apenas ele não é mais suficiente para que os educandos sintam-se interessados pela aprendizagem de Matemática. Para mesclar essas duas formas de ensino, nos baseamos nos ambientes de aprendizagem, de acordo com Skovsmose (2000).

Queremos que os educandos sejam mais envolvidos. Que participem de forma ativa em suas aprendizagens. Entretanto, sabemos que a intensidade desse envolvimento pode variar. Ora pode ser mais intenso, ora menos intenso. Mesmo assim, para nós, o mais importante é o envolvimento e interação do educando, não sua intensidade. E é aí que entra a modelagem matemática, pois temos percebido que, quando estamos nesse ambiente, podemos contribuir para uma aprendizagem mais ativa dos educandos.

2 APRENDENDO E ENSINANDO ATRAVÉS DE TEMAS GERADORES

É comum lermos o termo ensino-aprendizagem como sendo a relação entre o ensinar e o aprender em sala de aula. Para nós, essa díade composta por aprendizagem e ensino forma um elo muito forte. Ou, pelo menos, deveria ser forte, pois elas caminham juntas. Uma depende da outra. Vamos tentar utilizar um termo muito utilizado em demonstrações matemáticas para explicar essa relação: é possível afirmar que existe ensino se e somente se existir aprendizagem?

Logicamente, como estamos falando de relações que envolvem seres humanos, não podemos afirmar com a mesma precisão de uma proposição matemática. Isso, porque é fácil encontrar contraexemplos. Nem todos precisam de professor. Aliás, aprendemos muito com nossos pais, somente por observá-los. Ou seja, nesse caso, não estamos sendo ensinados, mas estamos aprendendo. Portanto, consideraremos apenas o ambiente escolar para a análise de nossa proposição.

Dessa forma, iniciaremos definindo nosso escopo apresentando nossas concepções sobre aprendizagem e ensino.

2.1 CONCEPÇÕES DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Freire (2005) classifica o modo de ensinar-aprender em educação bancária e educação libertadora. O primeiro prioriza o ensino, ignorando o aprendiz. Nesse método, o educando é considerado um recipiente que precisa ser preenchido pelo educador. O melhor educando será o que permitir tal preenchimento com mais facilidade. Da mesma forma, o melhor educador será o que possuir mais capacidade de encher os recipientes vazios que chegarem a ele. Não há possibilidade de o educando interagir em aula, pelo menos não de forma crítica. A forma de interação permitida é através da repetição e memorização. O educando não precisa entender e tampouco relacionar o aprendizado com algo de sua realidade. Nessa concepção, o estudante nada sabe e precisa do educador para que aprenda algo.

Assim, segundo Freire (2005), o aprender fica mecanizado, pois o educando não relaciona o que estudou em sala de aula com o seu cotidiano nem com outros

aprendizados, ficando totalmente passivo na aprendizagem, não podendo modificar ou transformar o que aprendeu. Precisa treinar para repetir aquilo que o educador lhe ensinou. Portanto, se o professor perguntar algo diferente, o estudante não saberá responder. Isso porque apenas memorizou. Somente o educador é atuante nessa educação, somente ele pensa e age. O educando sequer pode reagir, fica inerte.

Essa caracterização parece referir-se a um jeito de educar do passado. De como nossos pais foram ensinados. Contudo, não é bem assim. Ainda hoje, existe quem ensine desta forma: enquanto professores transferem o conhecimento os estudantes devem ser capazes de repetir o que foi aprendido no momento da avaliação. Se o estudante errar um detalhe, em geral, perde a questão inteira. Sendo que o mais coerente é averiguar se o que o educando pensou faz sentido. Além disso, entender o que o estudante errou é importante, pois é possível que a partir do erro consigamos conduzi-lo ao caminho correto. Por exemplo, em uma das avaliações feitas pelo autor, enquanto estudante, havia a seguinte questão:

(1). (a) A soma infinita das potências inteiras positivas de um número diminuído de duas unidades é $1/3$. Determine esse número.

(b) A partir do resultado obtido no item anterior, verifique se a condição de convergência da soma infinita das potências descritas acima é satisfeita. Enuncie essa propriedade.

(c) Determine a soma dos quatro primeiros termos da sequência numérica obtida a partir do número calculado em (a).

(d) Verifique, escrevendo os quatro primeiros termos da sequência numérica, se o resultado, obtido no item (c), está correto.

A forma correta para determinar o número solicitado é a seguinte:

Seja $b \in \mathbb{R} / b \neq 2$. A soma infinita das potências inteiras e positivas desse número diminuído de duas unidades é dada pela seguinte soma:

$$S = (b - 2)^1 + (b - 2)^2 + \dots + (b - 2)^k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (b - 2)^k$$

A questão informa que o resultado da soma é um valor finito, e isso indica que a série é convergente. Nesse caso, temos mais uma restrição: $|b - 2| < 1 \rightarrow 1 < b < 3$.

E, sendo o valor da soma $1/3$, temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b - 2)^k = \frac{1}{3}$$

Metade da classe iniciou a resolução do item (a) com os passos descritos acima, e, portanto, acertaram todos os itens da questão: (a), (b), (c) e (d). A outra metade interpretou o item (a) de forma equivocada, resolvendo, inicialmente, da seguinte forma:

Seja $b \in R/b \neq 0$ e $|b| < 1$, temos:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b^k \right) - 2 = \frac{1}{3}$$

Ou seja, pensaram que deveriam retirar duas unidades da soma ao invés de retirar do número. Portanto, o resultado obtido por eles foi diferente do esperado. Os que erraram o item (a), por não interpretar corretamente, de fato, deveriam ter pontos descontados nesse item. Entretanto, os demais itens poderiam ser analisados de forma separada. Contudo, não foi o que aconteceu. Todos que interpretaram o item (a) de forma equivocada ficaram com nota zero na questão (1).

Pode parecer que somos contra o aprendizado por meio do esforço e dedicação do estudante. Queremos deixar claro que não pensamos assim. O educando deve sim se dedicar para atingir níveis elevados de aprendizagem. Mas, não somos favoráveis ao tipo de ensino que prioriza a repetição. Freire (2005) indica que o que se sobressai nesse tipo de abordagem é a narração. Pois, educadores narram e educandos, apenas para memorizar, passivamente, repetem. As aulas são como discursos elaborados pelos educadores. Do que adianta o educando repetir “três vezes três nove”, sem de fato entender o que isso significa? Memorizar a tabuada, por exemplo, é importante. Mas, somente depois de entender o que significa “três vezes três”.

Além de ainda dar fruto, essa forma de ensinar é mais fácil para o educador, pois foi assim que aprendemos e, principalmente no início de nossas carreiras, tentamos reproduzir uma aula parecida com a de nossos professores. Borges (2010), atual

coordenador do Projeto Educacional Alternativa Cidadã, relata que quando iniciou como professor do projeto se espelhava nos professores que lhe deram aula. Tentava ser engraçado e divertido, assim como eles. Portanto, seus professores foram responsáveis pela sua formação inicial.

Da mesma forma que ocorreu com Borges (2010), o autor desse trabalho tinha uma visão de como ser professor, mesmo antes de iniciar o curso de Licenciatura na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Nas primeiras aulas que participou, na Faculdade de Educação, já afirmava que sabia como ser professor. Quanta ingenuidade. Na verdade, ele sabia com quais professores gostaria de parecer; Como seus professores o avaliavam; como ensinavam; como explicavam. Ao longo de sua graduação, novos professores entraram para a lista: “como ser um professor?”. Mas somente nos primeiros contatos com os educandos que começou a descobrir o que de fato é ser professor. Até então era só teoria. Seus primeiros planos de aula eram embasados nas aulas que ele conhecia. Ou seja, para ser um bom professor, bastava atuar como aqueles que lhe inspiraram. E, tanto no Ensino Médio como na Graduação e Pós-Graduação os professores, em geral, transmitiram-lhe conhecimento. Ele absorveu o conhecimento transmitido e sempre procurou fazer todas as listas de exercícios. Sendo assim, considera que o educando precisa se esforçar. Mas, a principal questão é: que professor eu quero ser? Em geral, a resposta para essa pergunta está ligada a como fomos ensinados.

Já a educação libertadora é diferente, pois a transmissão do conteúdo deixa de ser a principal missão do educador. O professor preocupado com uma educação libertadora permite ao educando dialogar com ele e acaba também aprendendo. O diálogo não ocorre através de simples perguntas e respostas, mas deixando que o educando se liberte do comportamento passivo e tome uma posição ativa na aprendizagem. Logicamente que temos medo de dar tais liberdades para os estudantes, temos medo de, ao libertar os estudantes, que tomem conta da aula, através da bagunça. Porque se os estudantes se tornarem livres e usarem isso para crescer, aprender, refletir e criticar não há problemas. Na verdade, esse é o nosso sonho como educador libertador.

Não estamos acostumados com o fato de o professor também aprender em sala de aula. Mesmo assim, concordamos com o que Freire e Shor (1987) afirmam sobre o comportamento deste no processo de aprendizagem:

“O professor precisa ser um aprendiz ativo e cético na sala de aula, que convida os estudantes a serem curiosos e críticos... e criativos”. (Freire & Shor, 1987. P 13.).

Como é possível que a pessoa responsável pelo ensino vá para a sala de aula também querendo aprender? Mas é justamente isso. Para libertar os educandos, o educador precisa se libertar primeiro. Senão, ele vai para a sala de aula apenas para transmitir conhecimento. E, segundo Freire (1996, p.47) “ensinar não é transferir conhecimento.”. Preferimos que os educandos assumam, no processo de suas aprendizagens, uma posição mais ativa, com mais liberdade.

Ou seja, optamos por uma “educação libertadora” que segundo Freire (1987, p.21), ocorre quando educando e educador aprendem e são “agentes críticos do conhecer”. Sim, enfatizamos, novamente, que o professor também aprende e, segundo Freire (1996, p. 21), “não há docência sem que haja discência”, pois ensinar e aprender são mútuos. Enquanto o professor está ensinando, ele também está aprendendo.

Sob essa ótica, é possível perceber que um professor libertador não tem como interesse único a abordagem do conteúdo, mas a maior preocupação dele é a aprendizagem com reflexão e crítica.

Sendo assim, o que desejamos não é mais apenas ensinar, mas, sim que o educando aprenda. Boa parte desse aprendizado está diretamente ligada ao educando, ao seu empenho, a quanto ele quer aprender sobre determinado assunto. Mas, o professor tem um papel fundamental para esse aprendizado, já que ele é o responsável pelo seu encaminhamento. Encaminhar aqui não significa guiar, pelo menos não em todo o momento, mas quer dizer apontar os distintos caminhos possíveis. A escolha do melhor caminho é feita em parceria entre educando e educador.

É importante salientar que, quando enfatizamos nossa preferência por uma abordagem libertadora, que prioriza a participação ativa do educando, através de um diálogo crítico e reflexivo, não estamos diminuindo a importância do conteúdo. O

estudante precisa aprender, e com rigor, os conteúdos. Entretanto, não queremos que essa aprendizagem seja através da memorização por repetição. Sabemos, também, que de tanto estudarmos certos conteúdos acabamos por memorizá-los. Mas, essa situação é diferente da educação bancária, em que o educando repete, sem saber e nem se importar com o significado do que está memorizando. E, é desse método que tentamos fugir todos os dias.

2.2 VOLTANDO A FALAR SOBRE NOSSA PROPOSIÇÃO

Agora, somos capazes de tentar responder a veracidade de nossa proposição, ou seja, não há ensino sem aprendizagem. E, da mesma forma, não há aprendizagem sem ensino, cada parte completa a outra.

→ Podemos afirmar que, na escola, existe ensino se houver aprendizagens?

Com uma concepção bancária de educação, podemos dizer que sim. Isso porque, o objetivo daquele que ensina, não está ligado à aprendizagem do educando, muito menos à sua, já que o educador nessa concepção de educação é o detentor de todo o saber. Em geral, sua responsabilidade termina juntamente com o seu discurso. Ele não se comunica, apenas faz comunicados, transmitindo o seu conhecimento.

Já na concepção libertadora de educação, o ensino não fica restrito à transferência de conhecimento. Assim, quando pensamos na díade ensino-aprendizagem, optamos por nos dedicar as aprendizagens, nossa e do educando. Dessa forma, vamos ao encontro de D'Ambrósio (1989, p. 42). Ele faz uma inversão importante nessa díade, ao utilizar um termo que julgamos mais adequado: “processo de aprendizagem-ensino”. Segundo ele, um dos pontos para obtermos melhorias no ensino de matemática é reconhecer esse processo pela sua essência, ou seja, pela aprendizagem. Esta precisa ser o centro da díade. E, para isso ocorrer, a preocupação do educador necessita se direcionar para a aprendizagem, não para o ensino. Assim, quando elaborar o plano de aula, por exemplo, o aprender do estudante deve fazer parte dos seus objetivos, pois não tem sentido, ficar horas falando sem que o estudante aproveite.

Portanto, na visão libertadora de educação, enquanto não houver aprendizagens, não há ensino.

→ Podemos afirmar que existem aprendizagens se houver ensino?

Na visão bancária, inexistente a preocupação com aprendizagem. Mas, apenas em encher os vasilhames vazios dos educandos. Sendo assim, não precisamos responder a questão.

Porém, na educação libertadora, as aprendizagens, do educando e educador, são mais importantes do que o ensinar. E, portanto, percebemos que sem um ensino libertador não obteremos aprendizagens. Claro que sempre haverá educandos que aprendem sem que sejam ensinados, eles não dependem do professor. Mas, esses representam uma pequena porção da classe. Da mesma forma, existem aqueles que aprendem em uma concepção bancária de educação.

Portanto, nossa proposição é válida dentro da concepção libertadora de educação.

2.3 A IMPORTÂNCIA DOS SABERES ANTERIORES DOS ESTUDANTES

O professor não é o detentor de todo o saber e não está na sala de aula para transferir o conhecimento para o educando, como se o educando fosse uma “tábua rasa”. O estudante não vem para a sala sem saber nada. Na verdade, ele sabe bastante. Por isso, para construirmos conceitos, consideramos a importância do conhecimento prévio do estudante. Assim, vamos ao encontro de D’Ambrósio (1999) que indica entrarmos na realidade do estudante para obtermos melhores resultados. Ele ainda exemplifica, afirmando que levarmos um problema sobre comprar maçãs para um estudante que não conhece uma maçã, não será tão eficaz quanto se usarmos esse problema com um que saiba o que é uma maçã.

Está claro para nós que o educador também aprende quando opta por uma educação libertadora e, se ele também aprende em sala de aula, deve prestar atenção no conhecimento prévio que o educando traz para a sala de aula. Por isso, se faz necessário descobriremos aquilo que ele sabe sobre o assunto a ser abordado. E mais, utilizar esse conhecimento é importante para que ele veja sentido naquilo que está estudando. Por

exemplo, se estivermos em uma sala de aula em que todos só falam de esporte, não podemos perder a oportunidade de, em nossos problemas, também falarmos de esportes. Mais do que isso, é essencial aproveitarmos o conhecimento que os estudantes trazem para a sala de aula. Esse saber, provavelmente, estará distante da definição formal do conceito estudado, mas ao utilizarmos esses, estamos nos preocupando em dar significado à aprendizagem.

Entretanto, somente utilizar o saber do estudante não é suficiente, nossa intenção é melhorá-lo, aproximando-o da definição aceita pela comunidade acadêmica. Nossa intenção é fazer essa aproximação em ambiente de Modelagem Matemática e, para isso, vamos associar o primeiro, com a imagem do conceito definida por Tall e Vinner (1981).

2.3.1 IMAGEM DO CONCEITO

Pensar na palavra imagem significa pensar na representação, seja de uma pessoa ou objeto. Pode ser ainda, a reprodução de um objeto, dada por um espelho. Para esclarecer ao máximo esse conceito, vamos utilizar dois exemplos de imagem: carro e relógio.

Começamos falando sobre o carro. Sua imagem, nada mais é do que sua representação. Assim, ao efetuarmos uma compra, por exemplo, não pedimos um carro com rodas, pois essas fazem parte da imagem do carro, pelo menos para todas as pessoas que conhecem um. Entretanto, alguns de seus acessórios, não estão dentro de sua imagem. Por exemplo, nem todos os carros possuem ar condicionado. Não conseguimos pensar em um carro sem o limpador de para-brisas ou sem o cinto de segurança, mas há alguns anos, esses itens não faziam parte de um carro. Hoje, não são apenas acessórios, mas itens obrigatórios e, portanto, pertencem à sua imagem. Muitos itens de um carro são essenciais para seu funcionamento. Mesmo assim, existem motores com potências diferentes, rodas com tamanhos diferentes, etc.

A representação de um carro será mais bem detalhada por um mecânico do que por uma pessoa leiga no assunto. Por isso, para não fazer um mau negócio, ao efetuar uma compra de carro, é fundamental a presença de um mecânico, principalmente se o mesmo não for novo. Ao compararmos a imagem de um carro de uma criança com a de

um adulto, também notaremos muitas diferenças. Da mesma maneira, se utilizarmos nessa comparação uma pessoa que além de não ter carro não tenha interesse nenhum no assunto com alguém que possua um carro, notaremos muitas diferenças. Cada indivíduo, ao pensar na representação de um objeto, terá uma imagem diferente. Conforme conhecemos melhor, por exemplo, um carro, melhor fica nossa imagem sobre ele.

Se escolhermos o relógio como exemplo, podemos pensar em ponteiros, tempo, horas, minutos, segundos e números dispostos de 1 até 12, caso o relógio seja analógico. Sendo digital, pode-se pensar em números de 00 até 23, para as horas e 00 até 59 para minutos ou segundos, além de outras peças importantes. Essa imagem do relógio depende, basicamente, da experiência do indivíduo, do quanto conhecemos e utilizamos este objeto. Por isso, faz bastante sentido, a consideração feita por D'Ambrósio (1999), no problema das maçãs.

Uma questão típica que envolve o relógio está relacionada ao ângulo formado pelos seus ponteiros. É uma questão interessante. Mas, como pedir para um estudante pensar em um relógio de ponteiros, sem nunca ter visto ou ter pouco contato com um? Antes de um questionamento desses, é importante nos perguntarmos sobre o quanto os estudantes conhecem sobre o objeto de estudo. Caso não conheçam, não significa que não poderemos fazer tal questionamento. Podemos levá-los a conhecer o relógio, ou talvez, construir um, juntamente com eles.

É verdade que o carro é um objeto demasiadamente complexo e, cheio de detalhes, que somente o mecânico muito experiente conseguiria lembrar-se de todos os itens. Mesmo assim, serve para mostrar que existem imagens diferentes para o mesmo objeto. Além disso, não existem imagens erradas, mas sim, incompletas. Dependendo do grau de conhecimento que adquirimos do objeto em questão, melhor fica a sua representação.

Dessa forma, percebemos que existe uma associação entre um objeto e a sua imagem. Além disso, quanto mais conhecemos determinado objeto, melhor podemos descrevê-lo, no caso do carro, ou, melhor podemos estudá-lo, no caso do relógio. E, portanto, mais nítida é a imagem do objeto.

Assim, se conhecermos um objeto, quando pensarmos nele, traremos à nossa mente uma representação sua. Quando pensamos em conceitos, sejam eles matemáticos ou não, uma representação desses, também nos vem à mente.

Segundo Tall e Vinner (1981), não usamos a definição formal de todos os conceitos, mas aprendemos a reconhecê-los pela experiência e utilização. Dessa forma, aquilo que sabemos sobre determinado conceito não é necessariamente a sua definição formal. Essa formalização ocorre conforme amadurecemos o conhecimento sobre o conceito. Nesse processo de amadurecimento, surgem símbolos ou nomes para os conceitos. Por exemplo, quando queremos representar que não temos nada, utilizamos o símbolo “0” e o nomeamos de zero. Entretanto, somente dar um símbolo ou nome ao conceito não é suficiente, precisamos dar significado ao conceito. Isso acontece através do que Tall e Vinner (1981) chamam de estrutura cognitiva total. Essa estrutura inclui as imagens e propriedades associadas a determinado conceito, além de todos os processos que envolvem esse conceito. Nesse caso, diríamos que a propriedade de elemento neutro da soma faz parte dessa estrutura, ao nos referirmos ao zero. Para descrevê-la, Tall e Vinner (1981), utilizam o termo *concept image*, que traduzimos para imagem do conceito. Segundo eles, essa estrutura é construída com o tempo, dependendo das experiências vivenciadas. Essa imagem muda conforme somos estimulados ou amadurecemos.

Da mesma forma que a imagem de um objeto se aprimora, conforme o conhecemos, a imagem de um conceito se aproxima da definição formal. Assim, uma criança também possui estrutura cognitiva capaz de descrever um conceito. Entretanto, é bastante provável que essa não estará completa. Além disso, dependendo do contato que o indivíduo terá com determinado conceito, maior será a completude de sua imagem.

Giraldo (2004) afirma que a imagem de um conceito não é estritamente do conceito, mas sim do indivíduo, pois é este quem amadurece e amplia seu conhecimento sobre o conceito. Ele exemplifica, afirmando que a imagem do conceito de uma função real pode incluir aspectos representativos, como gráficos e tabelas, por exemplo, podendo ser mais rica, quando pensamos em propriedades e processos que envolvem esse conceito.

Assim, a imagem de uma função quadrática, pode incluir sua forma algébrica, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Pode também, incluir o gráfico dessa função. Alguns alunos associam de imediato o gráfico com os coeficientes da função. Pode-se pensar também em zeros, máximos e mínimos, etc. A riqueza da imagem está diretamente associada ao contato que existe entre o indivíduo e o conceito.

Ou seja, o saber trazido pelo estudante para a sala de aula são as imagens que eles possuem acerca de determinado assunto.

2.4 TEMAS GERADORES

Podemos usar temas geradores em uma visão bancária de educação. Pois, basta o professor além de escolher o tema, guiar toda a aula, deixando o estudante totalmente passivo. Entretanto, através de temas geradores, podemos utilizar uma visão libertadora na educação. Nesse caso, escolhemos alguns temas e deixamos que os educandos reflitam sobre os mesmos. A partir dessas reflexões, guiamos nossa aula, na esperança de conduzir o educando a uma prática de aprendizagem ativa, criando espaço para ele reflita e seja crítico sobre o tema.

Assim, vamos ao encontro de Freire (2005, p. 113). Para ele, é importante darmos significado ao ensino, fazendo um “movimento de ida e volta do abstrato ao concreto”, utilizando temas geradores, que trazem, para a sala de aula, problemas investigativos, por meio de uma metodologia conscientizadora. Dessa forma, nossos educandos verão sentido naquilo que estão aprendendo. Quando levamos para sala de aula problemas da realidade, podemos permitir que nosso educando critique e reflita sobre o tema.

É necessário entendermos melhor o que são temas geradores para Paulo Freire, pois é a partir dessa concepção que guiamos nosso estudo. Tema gerador poderia ser simplesmente o tema que gera uma pesquisa. Assim, por exemplo, ao pensarmos em um tema qualquer, poderíamos, a partir dele, desenvolver nossos estudos. Mas, Freire (2005) apresenta temas geradores não somente como temas que geram aprendizagens, mas temas que estão ancorados na situação de mundo dos educandos. Segundo ele, de nada adianta o educador fazer papel de locutor, passando sua visão de mundo a respeito

do tema escolhido. O ideal é dialogarmos com o educando, compartilhando nossa visão, sem qualquer imposição, permitindo que ele também compartilhe a sua visão.

Portanto, o educador pode selecionar o tema, entretanto, a visão de mundo que deve importar, em relação ao tema, é a do educando. Por isso, ao selecionar o tema, devemos ter o cuidado de escolher um que seja amplo o suficiente para acolher a visão de mundo de todos, ou escolher diversos temas. Ainda, podemos permitir que o educando escolha o tema. Mas temos visto em nossa prática que obtemos melhores resultados se, inicialmente, o tema for escolhido pelo educador e, a partir desse, os educandos compartilharem suas concepções, anseios e dúvidas em relação ao tema. Nossa sugestão está ligada, somente, a possíveis dificuldades que o educando possa ter ao lhe ser solicitado um tema. Ele não está acostumado com essa abordagem. Conforme amadurece, nessa nova forma de aprender, tornar-se-á capaz de selecionar os temas. Logicamente, existem educandos que, mesmo sem jamais terem estudado dessa forma, conseguem, já na primeira vez, escolher temas de estudo.

O professor que deseja se tornar libertador e optar por utilizar temas geradores em sua aula, pode iniciar levando para a sala de aula um tema que ele conhece bem. Assim, ele não ficará desconfortável com perguntas e afirmações dos educandos que surgirem. Depois, o educador pode levar para a sala de aula uma quantidade maior de temas, permitindo que os educandos escolham com qual irão trabalhar. E, por fim, pode libertar os estudantes, deixando que os mesmos escolham os seus temas. Esse é o ápice da educação libertadora.

Outra parte fundamental, ao utilizarmos temas geradores em aula, é a investigação crítica do mesmo. Por isso, a escolha precisa ser bem feita. O tema e o educando precisam de aderência. Ao pensar no tema, o educando deve, pelo menos, sentir curiosidade. A investigação e as descobertas, acerca dessa, devem ser importantes para o educando. Caso contrário, é bastante provável que ele não se interesse pela investigação. Pensando dessa forma, vamos ao encontro de Freire (2005), conforme destacamos:

Tanto quanto a educação, a investigação que a ela serve, tem de ser uma operação simpática, no sentido etimológico da expressão. Isto é, tem de constituir-se na comunicação, no sentir comum uma realidade que não pode ser vista mecanicistamente compartimentada,

simplistamente bem “comportada”, mas, na complexidade de seu permanente vir a ser. (FREIRE, 2005, p.57)

Portanto, educação e investigação devem ser aliadas. Não somente para o professor pesquisador, mas também para nossos educandos. Quando inserimos a investigação na educação, estamos oportunizando aos estudantes não somente trabalhar com temas que lhes inquietem. Permitimos que eles aprofundem os conhecimentos em diversos conteúdos. Isso porque não podemos controlar o que os educandos irão investigar. Sendo assim, precisamos estar abertos a apresentar conteúdos não planejados. Dessa forma, os educandos poderão, de fato, se libertar.

No próximo capítulo, trataremos de ambientes voltados para aprendizagem. Veremos que existem ambientes que atendem a educação bancária, ambientes que atendem a educação libertadora e ambientes intermediários. Nossa preferência é por atuar em ambientes em que a educação libertadora esteja em voga. Entretanto, quando for melhor para o estudante, não nos importamos de transitar entre os ambientes. O importante, para nós, é não ficar parado no ambiente de educação bancária.

3 AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

Utilizamos os conceitos de ambientes de aprendizagem definidos por Skovsmose (2000). Segundo ele, um ambiente de aprendizagem é o local onde os estudantes são estimulados a desenvolverem certas atividades, tendo como objetivo suas aprendizagens. Combinando referências e paradigmas, Skovsmose (2000) classifica os ambientes de aprendizagens em seis tipos diferentes, conforme pode ser visto no quadro abaixo:

QUADRO 1 – Classificação de ambientes de aprendizagem, segundo Skovsmose (2000).

	Exercícios	Cenário para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: SKOVSMOSE, 2000.

Quando estamos em um ambiente com referências à matemática pura, percebemos a priorização de exercícios que utilizam álgebra, deduções de fórmulas matemáticas ou manipulações geométricas. Já no ambiente com referências à semirrealidade temos eventos fictícios, que poderiam ser realidade. Para essas atividades, geralmente temos a expressão “suponha que”. Não descartamos a semirrealidade, pois os estudantes podem ser envolvidos em discussões interessantes. Além disso, elas podem ser usadas como degrau para chegarmos às atividades que envolvam a realidade. Portanto, trabalhar com atividades fictícias devem integrar o currículo, mas não podemos ficar somente com atividades desse tipo e nem acreditar que elas são suficientes para simular a realidade em sua totalidade. Apesar de o ambiente com referências à realidade, conforme Skovsmose (2000), não ser o objetivo final da educação, acreditamos que com ele podemos envolver mais os educandos, pois os estudantes trabalharão com situações que façam sentido para eles. Por exemplo, pode-se levar para a sala de aula encartes de lojas, e solicitar que os estudantes escolham a melhor opção para comprar determinado produto. Cada educando ou grupo de educandos escolhe o produto a ser analisado.

Skovsmose (2000) divide os ambientes de aprendizagens em dois paradigmas: do exercício e o cenário para investigação. No primeiro, o ambiente é do tipo tradicional, no qual a repetição de resoluções de listas de exercícios se sobressai. Mesmo que se tente utilizar situações reais ou semirreais, mantemos as atividades com muitos exercícios. Tal abordagem é evidente nas salas de aula de matemática. O professor explica o conteúdo e em seguida passa vários exercícios sobre ele. Em geral, considera-se que o aluno que mais aprende é aquele que mais exercita, é aquele que mais trabalha. Há aulas em que se dá mais atenção ao conteúdo, mas não se elimina o exercício.

Podemos fazer uma comparação, entre a atuação do aluno no ambiente de aprendizagem tradicional, com um atleta que quer ganhar uma maratona. Este, precisa se preparar muito para a competição. São aproximadamente 42 km a serem percorridos. É necessária muita preparação, muito treino. Quanto mais ele treina, mais ele fica apto a completar a prova. Para muitos, esse é o principal objetivo ao participar de uma maratona. Para aqueles que não estão entre os corredores de elite, apenas ultrapassar a linha de chegada é a meta principal. Se um atleta se inscrever para a maratona sem nunca ter se preparado para ela, é bastante provável que ele não conclua a prova.

O aluno, inserido nesse ambiente, dito tradicional, pode aprender, desde que esteja interessado pelo conteúdo. Quando nos restringimos em usar o modelo da repetição podemos provocar o desinteresse de nossos alunos que, de modo geral, precisam entender os porquês. Quem nunca ouviu a pergunta: “Ah professor, pra que eu vou usar isso?”. Então, precisamos buscar alternativas que, juntamente com o tradicional, auxiliem o aluno no processo de aprendizagem.

Comparando o ambiente tradicional com a visão de educação bancária de Freire (2005), vemos que em ambas as concepções, a aprendizagem, quando ocorre, se dá por meio da repetição, memorização e passividade do educando. Se ele não repetir e exercitar muito, não terá êxito. O problema não está no esforço demasiado do estudante, pois acreditamos que este deve se esforçar sim. Entretanto, não somos favoráveis ao esforço sem sentido. É como se o atleta que quer ganhar uma maratona, apenas corresse, sem saber por quê. Sem rumo, sem nenhum direcionamento. Apenas corresse. Ou, como se esse atleta treinasse somente em uma pista circular, sem os declives, sem o sol, sem a chuva. Ele está fora da realidade. Treina apenas por treinar e sempre da mesma forma.

Para Skovsmose (2000), esse paradigma do exercício pode ser confrontado com uma abordagem de investigação. Esta pode tomar várias formas e rumos, como por exemplo, em um projeto escolar. Geralmente o ambiente de aprendizagem de um trabalho de projeto escolar difere do utilizado no método tradicional, no qual vigora o paradigma do exercício. Naquele, é permitido investigar, o que significa sempre ter a pergunta: “o que acontece se...?”. Quando o professor faz essa pergunta ele está envolvendo o estudante, convidando-o a participar de uma investigação.

Um cenário para investigação não só convida, mas permite que o educando participe. Neste caso, não somente o professor irá fazer os questionamentos, mas o aprendiz também os fará. Se os educandos se tornarem investigadores, assumindo o processo de exploração e explicação, passamos a ter um novo ambiente de aprendizagem: cenário para investigação. Neste, é fundamental que o educando aceite o convite. Dessa forma, não sabemos se estamos diante de um cenário para investigação apenas por ler o projeto escolar, pois um projeto pode ser interessante para um grupo de alunos, porém, não para outro grupo. Portanto, o único modo de sabermos se determinado cenário será investigativo é colocando-o em prática.

Ou seja, também podemos criar um ambiente investigativo, permitindo, assim, que o educando possa pesquisar sobre determinado assunto da realidade, fazendo uma análise crítica e social do mesmo. Nesse caso, os problemas não exigem a existência de apenas uma resposta. Na verdade, não sabemos se haverá resposta, pois isso não é o importante. O que é fundamental nesse cenário é a aprendizagem via processo de investigação. Por exemplo:

- i) Suponha uma cisterna de 1.000 litros, que está vazia. Para enchê-la temos três torneiras com vazão de 20 mililitros por segundo cada. Em quanto tempo essa cisterna estará cheia?
- ii) Em quanto tempo uma cisterna de 10.000 litros cheia de água pode ficar completamente vazia?
- iii) É possível construir um sistema de cisterna na escola? Se sim, como?

O problema (i) apresenta apenas uma resposta e poucas opções de solução. Além disso, não faz parte da realidade. O problema (ii) tem mais de uma resposta, pois cada estudante pode escolher um método diferente para resolução. Esse poderia ser realidade,

se a escola possuísse tal cisterna, ou se a turma fosse visitar um lugar onde houvesse uma, por exemplo. O problema (ii) poderia criar um ambiente de investigação, levando o educando à reflexão. Isso porque, eles poderiam refletir sobre esse tempo, em que ainda há água na cisterna e, criticar o consumo de água. Esse é um problema muito interessante e aberto. Os estudantes poderiam também verificar se a cisterna mencionada é ideal para o consumo do local onde está instalada. O problema (iii) certamente criaria um ambiente investigativo, pois para respondê-lo, outras perguntas seriam necessárias, por exemplo: onde colocaríamos a cisterna? O telhado da escola tem inclinação para coletar água da chuva? É viável financeiramente? Quais retornos, podemos obter com a construção da cisterna? Além de muitas outras.

Os três problemas podem tratar do mesmo conteúdo, mas são conduzidos de formas diferentes. Não descartamos o problema (i), porque é importante para a aprendizagem. Mas, preferimos o caráter aberto e investigativo dos problemas (ii) e (iii). Esses problemas podem conduzir nossos educandos à reflexão, crítica e ação, principalmente o (iii). A diferença entre os problemas (ii) e (iii) é o tempo que o educador dispõe para a atividade. O projeto a ser realizado em (iii), certamente necessitaria de bastante tempo para a condução. Mesmo assim, é importante considerá-lo. Para quem não dispõe de muito tempo, o problema (ii) é um bom início, melhor ainda, se for real. Ou seja, se a cisterna pertencer à escola ou a casa de algum estudante, etc.

Da mesma forma que comparamos o ambiente tradicional com a educação bancária, podemos comparar o ambiente investigativo do cenário para investigação com a educação libertadora, pois o propósito dessas duas visões é tornar o estudante capaz de refletir e criticar sobre um problema real. A semirrealidade pode ser utilizada, desde que não se permaneça nela, inerte e passivo, já que, apesar de ser possível envolver os estudantes em discussões, não seremos críticos. A criticidade está atrelada a problemas reais. Até podemos refletir, entretanto, jamais poderemos ter ações em uma situação que não exista.

Ou seja, ficaremos apenas no âmbito da reflexão. Não poderemos agir sobre a situação, já que ela não é real. Por exemplo, se determinada pessoa reside em uma cidade totalmente limpa e, usássemos uma situação problema, hipotética, sobre o que acontece com o lixo jogado nas ruas, seria possível levá-la a refletir e se conscientizar

de um problema que inexistente para ela. E, assim, garantir que essa situação não aconteça na sua cidade. Por outro lado, podemos desencadear uma reação que a leve a agir nas outras cidades. Mas, para isso, ela precisaria investigar e, de fato, refletir sobre o problema dessas outras cidades e descobrir o que fazer para resolver o problema. Ou seja, recaímos em uma situação real. Portanto, para que exista uma ação que solucione um problema, esse precisa ser real.

Não é ruim ficarmos apenas nas reflexões, sem ações, desde que as reflexões sejam de situações reais. Situações em que os estudantes estejam envolvidos. No exemplo, do lixo na cidade, dado acima, vamos ao encontro do conhecimento reflexivo. Isso porque, a pessoa envolvida na situação, poderá refletir sobre o problema. Assim, nos encaixamos na visão sócio-crítica, defendida por Barbosa (2001). Nessa, segundo ele, “a matemática não é o fim, mas o meio para questionar a realidade vivida”.

Um ambiente investigativo, que prioriza a pesquisa, a reflexão e a crítica é o ambiente de Modelagem Matemática. No capítulo 5, faremos uma análise mais aprofundada sobre esse tema. Entretanto, aqui, falaremos de Modelagem Matemática, especificamente, como ambiente de aprendizagem. Começamos, destacando como Barbosa (2001) associa esses dois entes:

Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. BARBOSA (2001, p.6).

Barbosa (2001) coloca que, no ambiente de Modelagem Matemática, os educandos são convidados a investigar. Como dito anteriormente, nesse capítulo, o aceite para tais investigações e indagações são imprescindíveis. Além disso, a realidade é o ponto chave para este ambiente. E, por isso, a Modelagem Matemática só pode ser associada aos itens (5) e (6) do quadro 1, apresentado no início deste capítulo.

A associação do item (6), com Modelagem Matemática, é óbvia, a partir da definição de Barbosa (2001), destacada acima. No capítulo 5, veremos que Barbosa (2001) admite que tenhamos situações em que o professor leve os dados e faça os questionamentos iniciais. Dessa forma, os estudantes ficarão responsáveis por resolver as questões feitas pelo professor e, portanto, podemos associar a Modelagem

Matemática com o paradigma do exercício. Entretanto, os questionamentos feitos são diferentes dos que aparecem quando não estamos trabalhando com a realidade. Não solicitaremos que os educandos resolvam exercícios, mas que tomem uma decisão, por exemplo. Barbosa (2004) cita que para uma de suas aulas coletou os preços cobrados por uma empresa prestadora de serviços e solicitou que os estudantes decidissem qual o melhor plano. Todos os dados necessários estavam à disposição dos educandos, ou seja, não era necessário realizar nenhum tipo de pesquisa externa. Nessa situação, os estudantes tinham apenas que calcular o quanto seria pago em cada plano e decidir o melhor. Portanto, para solucionar esse problema, diversos exercícios seriam resolvidos. Segundo Skovsmose (2000), esse exemplo se enquadra no paradigma do exercício com referências a realidade.

No capítulo 5, veremos, também, que Barbosa (2001) sugere um ambiente em que o professor indica os temas que os estudantes poderão pesquisar. Quanto mais genéricos e amplos eles forem melhor, pois assim poderemos alcançar um número maior de estudantes que aceitem o convite.

Em particular, escolhemos o tema *SUSTENTABILIDADE*, a partir do qual os educandos foram convidados a pesquisar, investigar, indagar, dentro de um ambiente de Modelagem Matemática. No próximo capítulo, apresentaremos nossas concepções sobre a escolha do tema, além de apresentar o tema escolhido.

4 TEMA GERADOR: SUSTENTABILIDADE

A escolha do tema gerador é de extrema importância. Isso porque, dependendo de nossas escolhas, poderemos ter mais ou menos estudantes interessados. Por isso, sugerimos que o tema escolhido seja amplo o suficiente para que os estudantes não fiquem limitados em sua pesquisa. Além de o tema SUSTENTABILIDADE ser amplo, ele nos direciona, sem muitas dificuldades, à educação crítica, fazendo com que os estudantes possam refletir e agir. Oferecendo oportunidades para que desenvolvam consciência sobre os cuidados com o nosso meio ambiente.

Ao pensarmos nesse tema, não conseguimos deixar de nos lembrar de educação ambiental, já que eles estão muito ligados. Cada vez mais é preciso pensar em desenvolvimento sustentável e preservação de recursos naturais, afinal sobrevivemos graças a recursos naturais. Sendo que o mais importante à vida, apesar de renovável, é finito: a água. Destacamos o pensamento de Branco (2003) com relação a esse recurso:

A água é um bem natural por representar um elemento da natureza indispensável à vida de todos os seres aquáticos ou terrestres. Além de constituir o ambiente natural dos organismos marinhos e de água doce, a água compõe parte significativa das células de todos os seres vivos e participa de todos os processos de transportes de alimentos no interior dos organismos, bem como da formação do sangue, das seivas e de outros componentes líquidos dos animais e vegetais. Em relação às aves e aos mamíferos, desempenha, ainda, papel importante na manutenção de sua temperatura. Finalmente constitui regulador essencial do clima de toda a terra. BRANCO (2003, p. 87).

Ou seja, a partir de Branco (2003), podemos afirmar que a água está presente em grande parte de nosso corpo. Nossos órgãos dependem de hidratação para o funcionamento. E, como perdemos água através da saliva, urina e suor, por exemplo, precisamos constantemente repor essa água expelida pelo nosso corpo. Se isso não acontecer, ficaremos desidratados, nossos órgãos entrarão em falência e, conseqüentemente, morreremos.

Entretanto, precisamos nos preocupar em preservar, não somente a água, mas o meio ambiente, pois dependemos dele para sobrevivência. Sendo assim, cada vez mais a educação ambiental se faz importante.

Logicamente, um de nossos interesses, ao utilizarmos esse tema, está relacionado com a educação ambiental. Queremos que, a partir dele, os estudantes possam ser críticos, possam refletir e agir. Jacobi (2003) nos lembra que conforme a população brasileira, por exemplo, torna-se mais urbana, mais nos aproximamos de uma crise ambiental. Afinal, quanto mais casas construirmos, mais árvores precisaremos derrubar. Além disso, as cidades estão ficando superlotadas sem o devido planejamento. Assim, o sistema de esgoto, por exemplo, muitas vezes não é eficaz e, em outras tantas, sequer existe.

Essa crise ambiental, segundo Maciel e Mousquer (2013), ocorre porque o homem sempre extrai da natureza os recursos necessários para sua sobrevivência. No início, essa relação homem-natureza era sadia, ou seja, todos os problemas ambientais estavam ligados somente a catástrofes da natureza. Mas, atualmente, não é mais assim. Os problemas ambientais estão ligados às ações e intervenções humanas no meio ambiente. Conforme a sociedade se expande, mais ela explora os recursos naturais que, com o passar dos tempos, ficam escassos. Afinal, depois que se cortam algumas árvores, para construir novas casas, ou parques, etc., essas não são replantadas.

Portanto, temos por um lado a falta de conscientização da sociedade que explora a natureza sem a devida preocupação e, por outro, temos a falta de políticas públicas eficazes que acabam permitindo o crescimento industrial de forma desmedida. Segundo Barros (2008), a sociedade se preocupa com o meio ambiente somente após eventos catastróficos ou quando vozes importantes alertam sobre os perigos que toda essa intervenção humana, sobre o meio ambiente, pode causar. Por exemplo, conforme Jacobi (2003), alguns acidentes nucleares deram origem ao debate que envolve riscos socioambientais e seus danos, citando o de Chernobyl em 1986.

Segundo Maciel e Mousquer (2013, p.2), a conferência realizada em Estocolmo, no ano de 1972, foi o ponto de partida para o reconhecimento do meio ambiente como direito humano, cujo primeiro princípio, que deu origem ao artigo 225 da Constituição Federal Brasileira de 1988, apresenta a obrigação de preservar o meio ambiente para gerações presentes e futuras. A partir daí, que surgiu a ideia de sustentabilidade, que

segundo Maciel e Mousquer (2013, p.2), tem como objetivo tornar o “meio ambiente saudável e ecologicamente equilibrado”, buscando a “qualidade de vida e bem estar social”. A forma sugerida por eles é a proteção dos recursos naturais. Mas, não é suficiente proteger os recursos, eles precisam ser mais bem distribuídos. É inaceitável que ainda existam pessoas no Brasil sem o devido saneamento básico, sem água potável, sem energia elétrica.

Apesar de iniciado em 1972, segundo Jacobi (1999) foi em 1992, na conferência RIO – 92, que diversas nações deram o primeiro passo, buscando o entendimento e pautando medidas concretas para o desenvolvimento sustentável. Ou seja, a partir dali, as nações se organizaram para discutir este tema tão importante para nossa sobrevivência. Destacamos abaixo o pensamento dele sobre tal evento:

A conferência representou o primeiro passo de um longo processo de entendimento entre as nações sobre as medidas concretas visando reconciliar as atividades econômicas com a necessidade de proteger o planeta e assegurar um futuro sustentável para todos os povos. (JACOBI 1999, p. 178).

Nessa conferência, segundo Dagotti (2010), foi redigida a primeira versão da Carta da Terra. Esse documento se divide em quatro princípios básicos que se subdividem em dezesseis itens para a preservação do meio ambiente: I – Respeitar e Cuidar da Comunidade da Vida, II – Integridade Ecológica, III – Justiça social e Econômica e IV – Democracia, Não Violência e Paz. Os itens, ditos acima, indicam formas de atender cada princípio. Assim, por exemplo, no princípio II temos:

5. Proteger e restaurar a integridade dos sistemas ecológicos da Terra, com especial atenção à diversidade biológica e aos processos naturais que sustentam a vida.

6. Prevenir o dano ao ambiente como o melhor método de proteção ambiental e, quando o conhecimento for limitado, assumir uma postura de precaução.

7. Adotar padrões de produção, consumo e reprodução que protejam as capacidades regenerativas da Terra, os direitos humanos e o bem-estar comunitário.

8. Avançar o estudo da sustentabilidade ecológica e promover o intercâmbio aberto e aplicação ampla do conhecimento adquirido.

Cada um dos itens se desdobra, com a intenção de explicá-los melhor. Por exemplo, o item 5, tem os seguintes subitens:

- a. Adotar, em todos os níveis, planos e regulamentações de desenvolvimento sustentável que façam com que a conservação e a reabilitação ambiental sejam parte integral de todas as iniciativas de desenvolvimento.
- b. Estabelecer e proteger reservas naturais e da biosfera viáveis, incluindo terras selvagens e áreas marinhas, para proteger os sistemas de sustento à vida da Terra, manter a biodiversidade e preservar nossa herança natural.
- c. Promover a recuperação de espécies e ecossistemas ameaçados.
- d. Controlar e erradicar organismos não nativos ou modificados geneticamente que causem dano às espécies nativas e ao meio ambiente e impedir a introdução desses organismos prejudiciais.
- e. Administrar o uso de recursos renováveis como água, solo, produtos florestais e vida marinha de forma que não excedam às taxas de regeneração e que protejam a saúde dos ecossistemas.
- f. Administrar a extração e o uso de recursos não renováveis, como minerais e combustíveis fósseis de forma que minimizem o esgotamento e não causem dano ambiental grave.

No princípio III, um dos subitens dentro do item 9 está abaixo:

- a. Garantir o direito à água potável, ao ar puro, à segurança alimentar, aos solos não contaminados, ao abrigo e saneamento seguro, alocando os recursos nacionais e internacionais demandados.

Dessa forma, chamamos a atenção para dois subitens: II-5-e, III-9-a. Eles se referem ao recurso, escolhido pelos estudantes, tratado nesse trabalho: a água. O subitem II-5-e apresenta a água como recurso renovável. De fato, como a água que consumimos, de acordo com Branco (2003), é devolvida à natureza, poderemos reutilizá-la, com o devido tratamento. Contudo, ela é finita e, por isso, precisamos utilizá-la com racionalidade. Assim, vamos ao encontro de Didonet (1997), conforme destacamos:

“Quando em nossas casas abrimos a torneira e a água aparece, jorrando, costumamos cometer o erro de pensar que ela sempre estará ali e que é um recurso natural renovável, mas finito, e a cada dia que passa vem se tornando mais e mais escassa”. (DIDONET, 1997, p. 11).

O subitem III-9-a se refere ao direito que temos de acesso a água potável. Que, a partir da Resolução 64/292, da Assembleia Geral da ONU, realizada no dia 28/07/2010, conforme texto do sitio, acessado em agosto de 2014, http://www.un.org/ga/search/view_doc.asp?symbol=A/RES/64/292, foi reconhecida como direito de todos os seres humanos. Abaixo destacamos duas decisões tomadas nessa assembleia:

1. Recognizes the right to safe and clean drinking water and sanitation as a human right that is essential for the full enjoyment of life and all human rights.
2. Calls upon States and international organizations to provide financial resources, capacity-building and technology transfer, through international assistance and cooperation, in particular to developing countries, in order to scale up efforts to provide safe, clean, accessible and affordable drinking water and sanitation for all.

A primeira se refere ao reconhecimento da água potável como direito humano, pois ela é essencial para a vida. A segunda é uma convocação para as nações auxiliarem, através de recursos financeiros, capacitação e transferência de tecnologia, com a intenção de fornecer água potável segura, limpa, acessível e barata. Além do saneamento para todos.

Portanto, a escolha do recurso a ser estudado demonstra a preocupação dos estudantes pela preservação da vida, deles e das gerações futuras, pois, sem água não sobrevivemos. No capítulo 6, apresentaremos um projeto de ensino que utiliza o tema SUSTENTABILIDADE. Os estudantes optaram por trabalhar na preservação de recursos naturais, especificamente a água, pensando não somente na geração atual, mas também nas futuras. Esse é o pensamento deles: preservar para sobreviver.

5 MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo de aprendizagem tradicional, que prioriza e valoriza a repetição e memorização, não é completamente ineficaz. Pensamos eficácia como o alcance dos resultados planejados. Um problema de nos restringimos a esse ambiente é o desinteresse dos estudantes. Então, precisamos, na constante busca por afetar os estudantes, procurar por um método de ensino que lhes desperte o interesse, que lhes tirem da passividade da educação que Freire (2005) classifica como bancária.

É importante frisar, novamente, que não ignoramos o conteúdo, pois os estudantes precisam aprender o máximo de conteúdos possível. Entretanto, preferimos mesclar essas duas formas: conteúdo e experiência do estudante. Ou seja, o currículo tradicional é importante e útil, entretanto, não somos favoráveis que essa seja a única forma de apresentarmos aos estudantes os conteúdos.

Para Deleuze (2003), o aprendizado ocorre quando, esse, de alguma forma nos toca, nos desestabiliza. Existem vários conteúdos que são apenas memorizados para prova. Esses, em geral, não serão aprendidos por nós, porque não fomos tocados por eles. Quando somos tocados, nos movimentamos na direção do objeto de estudo. Agrada-nos estudar aquilo que nos importa.

O fato de memorizar não significa que, necessariamente, não fomos tocados, pois, também memorizamos aquilo que nos agrada. Entretanto, há a memorização do conteúdo que será utilizada somente no momento da avaliação. Ao terminar, esse será esquecido. Logicamente, também podemos memorizar certo conteúdo ao nos deparar constantemente com ele. Por exemplo, é importante saber a fórmula da área do triângulo equilátero? Não basta saber a área de um triângulo qualquer? Depende. Se o objetivo do estudante for passar no ENEM ou no Vestibular, devido à falta de tempo na resolução das questões, é importante ter essa fórmula memorizada, mas não antes de saber deduzi-la. Nesse caso, memorizar significa ter mais tempo para resolver questões.

Certamente, a abordagem contextualizada e voltada para a criação de um saber crítico é importante. Esse tipo de abordagem pode alcançar mais nossos educandos. Dependendo de como o professor conduzir a aula, ele pode atingir mais ou menos estudantes. Por isso, uma verificação no perfil deles é importante. Saber se todos são

excelentes ou se todos têm dificuldades de aprendizagem contribui para tornar mais fácil a adoção de um método com possibilidade de alcançar a todos.

Propomos uma pedagogia mais libertadora dentro do ensino de matemática: a Modelagem Matemática, que a partir daqui chamaremos de Modelagem, como metodologia ou ambiente de aprendizagem. Segundo Barbosa (2001), Modelagem é a oportunidade que os alunos têm de propor situações sem prévios procedimentos fixados através da matemática. Os conceitos matemáticos surgem conforme os alunos avançam nas atividades. A modelagem é flexível, por isso não existe um modelo matemático único. Os modelos vão surgindo de acordo com os caminhos seguidos durante a resolução. Além disso, existe a possibilidade de haver soluções para o problema sem um modelo matemático.

A modelagem também pode ser descrita como um ambiente de aprendizagem, que privilegia a interação entre professor e aluno, no qual o professor faz um convite. Destacamos como Barbosa define Modelagem.

A meu ver, o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p.3).

Durante o processo de Modelagem alunos e professor interagem de tal forma que podemos chegar ao ponto de o professor ser apenas um facilitador para o aluno, pois o aluno tem a oportunidade de investigar e pesquisar sobre o tema proposto. Segundo Biembegut (2003), atividades com Modelagem proporcionam ao aluno a chance de matematizar situações da realidade. Eventos fictícios, segundo Skovsmose (2000), são chamados de semi-realidade, para atender ao ensino de Matemática. Essas situações podem envolver os alunos em discussões e devem integrar o currículo. Porém não se enquadram como Modelagem. Essa privilegia apenas as situações reais.

Não é fácil modelar, pois existem questões a serem trabalhadas que não conseguimos conectar com algo do dia-a-dia do aluno. Questões que irão exigir um grau de abstração maior por parte do aluno. Mas esse é um dos nossos objetivos como professor: tornar os alunos independentes, abstraindo o máximo possível. E a modelagem é uma excelente ferramenta para isso, pois, quando estamos em um ambiente de modelagem, estamos fazendo com que a matemática não seja apenas mais uma disciplina a ser estudada pelos alunos, mas como algo que faça sentido para a realidade de cada aluno.

5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: DA MATEMÁTICA APLICADA AO AMBIENTE INVESTIGATIVO

O uso de modelagem no ensino de matemática, como alternativa ao método tradicional, cresceu nos últimos trinta anos. Para que isso ocorresse, contamos com um forte auxílio de professores que migraram da matemática aplicada para o ensino de matemática. Sendo assim, as práticas de modelagem na escola, foram fortemente influenciadas pela matemática aplicada.

Por exemplo, para Biembegut (2003) as atividades com modelagem podem se dividir em três etapas: interação, matematização e o modelo matemático. A interação engloba reconhecimento da situação problema a ser trabalhada e a familiarização com o assunto, através de referencial teórico. Nesse momento, escolhemos a situação-problema e, procuramos o máximo de informações sobre o assunto. Na matematização, traduzimos o problema em linguagem matemática e o resolvemos. Nessa etapa, decidimos o que queremos saber exatamente sobre o tema escolhido. Quando obtemos o modelo, precisamos verificar se ele realmente se aproxima da situação real, eis a última fase do processo de modelagem para Biembegut (2003).

Já para Bassanezi (2002), modelagem se origina de uma situação da realidade, escolhida, preferencialmente, pelo aluno. Essa, por sua vez, é transformada em um problema matemático. Ele divide as atividades de modelagem em cinco etapas, a partir do momento que temos o problema não matemático: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. A experimentação envolve pesquisa inicial e a coleta de dados, sejam eles significativos ou objetos de estudo. A abstração se divide

em quatro subetapas, a saber: seleção das variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação. Nessa fase, a partir dos dados coletados, formulamos questões acerca da situação-problema e, direcionamos nossos estudos a respondê-las todas ou parte delas. Assim, entramos na resolução. Essa etapa nem sempre é viável. Se escolhermos um problema complexo demais, mesmo depois da simplificação, podemos ficar sem a resolução. Como, em um modelo, trabalhamos com aproximações, a próxima fase, validação, serve para verificarmos se nosso modelo condiz com a situação-problema inicial. A modificação ocorre quando o modelo não é válido ou quando é preciso aprimorá-lo. Assim, se faz necessário, modificar alguma hipótese, da etapa de abstração, ou uma reformulação do problema, por exemplo.

Para os dois autores, a obtenção de um modelo é essencial, pois para a matemática aplicada esse é o propósito da modelagem matemática. Entretanto, quando pensamos no ensino de matemática, preferimos pensar na modelagem como um ambiente de aprendizagem que prioriza a investigação e a pesquisa. Ou seja, a obtenção de um modelo passa a ser uma consequência e não mais o nosso objetivo principal.

Sendo assim, consideraremos a ideia de Modelagem sugerida por Barbosa (2004). Desse modo, até podemos chegar a um modelo, mas nossa ênfase será na aprendizagem de matemática. Não estamos querendo dizer que Biembegut (2003) e Bassanezi (2002) não se preocupam com a aprendizagem, mas que eles, quando trabalham com modelagem matemática, conduzem as aprendizagens de seus alunos, através da construção de um modelo matemático.

5.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E CURRÍCULO

O currículo nos faz pensar. Logicamente que, quando elaboramos um, estamos pensando na melhor maneira de apresentar aos estudantes os conteúdos que pensamos ser fundamentais. Mas, fundamentais para o quê e para quem? Por que ensinamos determinado conteúdo? Por que ele é ensinado em um ano e não no outro? Afinal, o que queremos quando elaboramos um currículo? Além disso, sabemos que, dentre todas as faces de um currículo, está a comunidade onde a escola está localizada. O que aquela comunidade espera da escola? O que significa a escola para eles? Não podemos

simplesmente pensar que todas as escolas são iguais, pois não são. As pessoas são diferentes e vivem em situações diferentes.

Não pretendemos, nesse trabalho, aprofundar sobre os conceitos de currículo, mas é importante salientar algumas concepções acerca desse assunto. Ao pensar em currículo vemos o que pensa Moreira (2009, p.5):

“Na escola, o currículo – espaço em que se concretiza o processo educativo – pode ser visto como o instrumento central para a promoção da qualidade na educação. É por meio do currículo que as ações pedagógicas se desdobram nas escolas e nas salas de aula. É por meio do currículo que se busca alcançar as metas discutidas e definidas, coletivamente, para o trabalho pedagógico. O currículo corresponde, então, ao verdadeiro coração da escola.”

Segundo Moreira (2009), a palavra currículo tem diversas definições. Sendo que as que prevalecem na literatura são as seguintes:

- i) A que associa o currículo ao conteúdo;
- ii) A que associa o currículo a experiências de aprendizagem;
- iii) A que associa o currículo ao plano do que a escola deve fazer, como se portar perante a comunidade escolar, quais seus objetivos, métodos de avaliação, etc.

Para Moreira (2009, p.6) currículo é entendido da seguinte maneira:

“consideramos o conhecimento como a matéria-prima do currículo, o que nos leva a entender o currículo como conjunto de experiências pedagógicas organizadas e oferecidas aos alunos pela escola, experiências essas que se desdobram em torno do conhecimento.”

Ou seja, o currículo está fortemente ligado à construção do conhecimento. Como a escola se organiza para apresentar os conteúdos aos alunos? Que experiências temos proporcionado aos estudantes? Aquelas em que eles precisam memorizar o conteúdo, e assim, agir passivamente na educação, ou queremos experiências que toquem os educandos, os levando a agir?

Segundo Young (2011), a família de classe média, por exemplo, quer seus filhos lendo, escrevendo e aprendendo álgebra muito cedo. Isso porque, sabem que o sucesso

deles está ligado ao quanto aprenderão na escola. Pensando dessa forma, o melhor currículo é o que foca no conhecimento, a partir do conteúdo e não a partir da experiência do estudante. Young (2011) defende um currículo deste tipo, em que o importante é a construção do conhecimento. Para ele, não tem sentido utilizarmos a experiência dos estudantes na elaboração do currículo, já que eles não vão à escola aprender o que já sabem. O professor, sim, deve fazer uso dos seus saberes anteriores como recurso pedagógico.

Para a classe média, esse discurso funciona perfeitamente. O próprio Young (2011) afirma que essa metodologia pode excluir as classes trabalhadoras. Entretanto, diferenciar os currículos pela localização da escola é uma forma mais cruel de exclusão, ficando explícito que o educando, pertencente às classes inferiores, não vai estudar muito. Isso porque, segundo Young (2011), precisa desempenhar bem funções não gerenciais no comércio e, para isso, é necessário saber apenas o básico.

Para Veiga-Neto (2001) uma das formas de reduzir essa exclusão está ligada ao envolvimento de mais pessoas, professores e alunos, respeitando e aprendendo a conviver com as nossas diferenças.

Para D'Ambrosio (1989), a educação matemática é uma atividade social, pois ela está fortemente ligada a fatores sociais e, isso, não pode significar diferença nos conteúdos, apenas na abordagem. Por isso, preferimos auxiliar o estudante a, conscientemente, entender e criticar informações que lhe são passadas, para que assim, ao ler uma reportagem, por exemplo, ele seja capaz de questionar sobre a veracidade, ou de tentar modificar uma questão social.

Moreira (2009) coloca a escola como centro do processo de educação. A partir dela devem ocorrer as mudanças necessárias. A escola é o ambiente que favorece ao estudante a construção de seu saber. Moreira (2009) ainda destaca que se faz necessário renovar a escola, articulando com outros espaços e com a sociedade. Entretanto, ele pensa que essas mudanças e renovações devem ser feitas com cautela, preservando e defendendo a escola.

Assim, vamos ao encontro do que Skovsmose e Valero (2001) sugerem acerca de um novo currículo.

O novo currículo escolar tem como principal objectivo o de equipar os estudantes com as capacidades para resolver problemas através de decisões responsáveis, para trabalhar em equipamentos, manusear e ter uma postura crítica em relação à informação que lhe é fornecida e veiculada, e de os equipar com as ferramentas de comunicação oral e escrita adequadas. (SKOVSMOSE & VALERO, 2001, p.1).

Pensando dessa forma, percebemos que o currículo conteudista pode ser reformulado, pois o seu principal objetivo está na transmissão do conhecimento. Nossa intenção é que o conhecimento seja compartilhado e não mais transmitido. O professor precisa abandonar o seu “status” de transmissor de conhecimento e se transformar em um compartilhador. Sem ter vergonha, caso se depare com algo em que o estudante conheça melhor. Um bom exemplo disso são os recursos computacionais em sala de aula, pois muitas vezes os estudantes podem ter mais habilidade do que o professor.

Defendemos a experiência trazida pelo educando para a sala de aula como parte importante do currículo. Seus saberes anteriores devem ser aproveitados, pois assim, eles se sentirão parte desse processo que é tão importante: a aprendizagem. Para isso, sugerimos a Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem.

Nossa ideia é permitir que o aluno pesquise em um ambiente investigativo, mas sem a preocupação de elaborar um projeto de pesquisa. Aliás, segundo Barbosa (2001), precisamos recusar a ideia de associar a Modelagem exclusivamente a projetos. Essas atividades demandam muito tempo, pois envolvem não somente a elaboração do projeto, mas também o aceite dos alunos e o desenvolvimento do projeto. Para resolver isto, podemos considerar atividades menores, e dividi-las em casos, conforme quadro abaixo:

QUADRO 2 – Divisão em casos, dos ambientes de aprendizagem para modelagem, segundo Barbosa (2001).

Caso 1	Ambiente no qual o professor traz a situação-problema, os dados necessários para a resolução e o problema formulado.
Caso 2	Ambiente no qual professor traz um problema de outra área, ficando os alunos responsáveis pela coleta de informações para a resolução.
Caso 3	Ambiente no qual os alunos formulam e resolvem o problema, a partir de temas não matemáticos. Eles são responsáveis pela coleta das informações e simplificação do problema.

Fonte: BARBOSA, 2001.

Ou seja, Barbosa (2001) divide a modelagem em três casos, a saber: o professor apresenta o problema e leva para a sala de aula os dados para solucioná-lo; o professor somente apresenta o problema, ficando os estudantes responsáveis pela coleta de dados para solucioná-lo; os estudantes formulam o problema, coletam os dados e o solucionam. Há investigação, por parte dos estudantes, nas três situações, variando sua intensidade. Dessa forma, estaremos incluindo o estudante e a comunidade como partes fundamentais do currículo. O professor participa em todos os casos, porém vai diminuindo o grau de determinação.

Qual dessas opções é a melhor? Poderíamos dizer que o terceiro caso é o mais adequado, pois esse ambiente torna o aluno responsável pelo andamento de toda a atividade, deixando ao professor apenas o papel de mediador. Porém, pensamos que a melhor opção não é aquela que simplesmente mais envolve o aluno, mas a que o ajuda melhor no processo de aprendizagem. Sendo assim, da mesma forma que não existe o melhor método de ensinar, não existe a melhor maneira de trabalhar Modelagem. Precisamos escolher o formato que faça com que o aluno se sinta envolvido. É verdade que, quanto mais amadurecidos, professor e alunos, mais se encaminham para um ambiente de aprendizagem no qual o aluno torna-se responsável por todas as atividades.

5.3 COMO DISTRIBUIR A CARGA-HORÁRIA NA ESCOLA?

Antes de tudo, se faz necessário verificar se existe alguma lei que determina o que é preciso ensinar e, como ensinar. Muitas vezes utilizamos os Parâmetros Curriculares Nacionais como referência. Entretanto, apesar de terem sido elaborados por especialistas, apresentam sugestões e não determinam como organizar nosso currículo. O documento onde poderia estar indicado e até exigir, que certo conteúdo seja estudado, e em qual ano, seria uma lei em âmbito federal: Lei de Diretrizes e Bases.

A LEI Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 é a lei de diretrizes e bases que vigora atualmente. Podemos utilizá-la para nos embasar ao construir ou modificar um currículo.

A LDB apresenta uma série de artigos referentes à Educação Básica. Não há finalidade específica para o ensino de matemática, mas um objetivo geral para a educação básica: formar os educandos com vistas ao exercício da cidadania, garantindo

a continuidade dos estudos e oferecendo meios para que o cidadão possa evoluir no trabalho.

Segundo a LDB, o ensino de matemática é obrigatório e não tem carga horária mínima. São oitocentas horas anuais, divididas em duzentos dias letivos, excluindo dias de exame finais. Essas horas devem contemplar o estudo de Língua Portuguesa, Matemática, conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. A LDB não estipula quantas dessas horas devem ser destinadas a uma ou outra disciplina. Portanto, não há, segundo esse documento, diferenças no quesito importância entre esses ramos de estudo. Contudo, tanto Matemática, quanto Língua Portuguesa são únicas, em seus grupos e, por isso, possuem, geralmente, uma carga horária maior.

Ou seja, a LDB não influencia, nem faz qualquer indicação de como elaborar um currículo, deixando isso a cargo das escolas. Essas precisam se estruturar, indicando a carga horária que cada disciplina irá dispor em cada ano letivo, ficando cada disciplina responsável por determinar os conteúdos que serão ministrados ao longo de cada ano.

5.3.1 COMO DISTRIBUÍMOS A CARGA-HORÁRIA NO PEAC?

Não sabemos como exatamente se dá o processo nas escolas, mas conhecemos o processo do Projeto Educacional Alternativa Cidadã – PEAC, que segundo José Humberto Martins Borges (2010), atual coordenador, é um curso pré-vestibular voltado a pessoas de baixa renda. Nasceu do pré-vestibular Zumbi dos Palmares, no ano de 2000 e, sendo registrado como projeto de extensão da UFRGS no ano de 2005.

O PEAC é um curso que conta com mais de 50 voluntários, entre graduandos e pós-graduandos da UFRGS, tendo três grandes objetivos: i) dar a chance a estudantes da comunidade de baixa renda de ingressar no Ensino Superior via ENEM, com bolsa integral do PROUNI, ou via vestibular da UFRGS. ii) tornar a Universidade Pública cada vez mais popular, democratizando assim o acesso à Universidade Pública. iii) criar um ambiente de aprendizagem não somente para o estudante, mas também para o professor, ou seja, o PEAC é também um formador de professores.

A carga horária de matemática do PEAC é igual a das outras disciplinas. Isso porque entendemos que os estudantes precisam igualmente do conhecimento de todas as áreas. Mas não foi sempre assim. As disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática dispunham de 3 horas-aulas semanais para cada turma, atualmente, são 2 horas-aulas. Essa mudança gerou um problema com o planejamento de matemática, pois quando tínhamos a disposição 3 horas-aulas, era possível abordarmos todo o conteúdo para o Vestibular. Com apenas 2 horas-aula, é necessário retirarmos tópicos menos relevantes para o Vestibular.

5.3.2 COMO SE CONSTRÓI O PLANO DE ENSINO NO PEAC?

Quando o autor iniciou as atividades no PEAC em 2009, o plano já estava estipulado. A regra básica era seguir uma apostila. Em 2010 já participou mais ativamente, mas o plano de estudo de matemática ainda era pensado visando somente à matemática. Em 2011, quando assumiu a coordenação da disciplina, o plano deixou de ser matemática somente pela matemática. Pensamos também na matemática que as outras disciplinas utilizam. Nesse período, ainda eram somente os coordenadores das disciplinas que se reuniam para essas definições.

Em 2013, alteramos a forma de construir o plano de ensino. Seguimos usando uma apostila, que foi elaborada por professores do PEAC, mas o planejamento foi discutido entre todos os professores de matemática do curso. Uma de nossas premissas continua sendo fazer matemática também para outras disciplinas, ou seja, queremos que a matemática venha a gerar saberes, também, em outras disciplinas.

5.4 PERFIL DOS ESTUDANTES DO PEAC

Para analisarmos o perfil do estudante do Projeto Educacional Alternativa Cidadã - PEAC, escolhemos uma amostra com 118 de estudantes que se inscreveram para o projeto em 2013. Desses, 64 conseguiram uma vaga no curso, que prioriza pessoas de baixa renda.

Para se inscrever no PEAC, o estudante precisa informar alguns dados, essenciais para sua classificação. Dentre esses temos: renda média familiar, escolaridade

dos pais, local de escolarização, condições de moradia. A renda é, sem dúvida, o critério mais importante para o ingresso no curso. Na análise feita a partir das fichas de inscrição dos alunos, vimos que na família de 61 % deles, a renda per-capita é inferior a um salário mínimo. Esse cenário vai ao encontro dos objetivos do curso.

5.5 EXPERIÊNCIAS NO PEAC

Sob qualquer ponto de vista, vemos que, na maior parte das vezes, experimentamos e procuramos conduzir os educandos a experiências. Nem sempre essas são as mesmas tratadas por Bondía (2001), pois, para ele, não temos como controlar ou programar a experiência. Ou seja, não temos como guia-la. Ela simplesmente acontece. Além disso, ela é singular, afetando cada indivíduo de forma distinta, e nos é impossível prever o tempo de seu toque, se ele ocorrer.

Nossa intenção é que essas experiências tornem-se saberes. Nem sempre vivemos experiências e nem todas se tornam saberes. Algumas de nossas experiências não geram saberes, porque o professor, que também aprende, experimentou sem vivenciar uma experiência. Algo apenas passou, mas nada lhe tocou. Isso acontece com frequência, pois, em geral, o professor precisa ou pensa que precisa ser o detentor máximo do “saber”. Ele precisa conhecer muito bem sobre o que irá ensinar. Além disso, precisa saber ensinar de mais de uma maneira, para que possa alcançar mais estudantes. Com os estudantes, isso também pode acontecer, porque por melhor que tenhamos planejado e executado a aula, se eles não estiverem sensíveis, dispostos a serem afetados de algum modo, também não terão vivenciado uma experiência.

Como um dos objetivos do PEAC é a aprovação de seus alunos no vestibular, é bastante difícil vivenciarmos experiências durante as aulas normais. Os estudantes precisam receber o máximo de informações acerca de assuntos relevantes para o Vestibular da UFRGS. Como essa meta é importante, para eles e para nós, os educandos acabam, muitas vezes, não sendo afetados, tocados. Optam por memorizar. Dessa forma, recorreremos ao método tradicional, conteudista. Isso ocorre por estarem muito focados em um único objetivo e pressionados por um tipo de prova. Eles não se expõem, não se abrem a outras possibilidades de acontecimento. Então, apesar de nossa

preocupação com suas aprendizagens, se faz necessário trabalhar dessa forma: conteúdo + exercício.

Nessas aulas, procuramos levá-los a pensar. Por exemplo, nas aulas de geometria deduzimos, juntamente com eles, as fórmulas. Entretanto, como nosso foco é o vestibular, existe a necessidade de agir assim, transmitindo conhecimento. Porém, não exigimos a memorização de fórmulas, deduzimos a maior parte delas. Isso porque, para o vestibular é importante tal memorização, pois não há tempo para deduções durante a prova. Além disso, tem mais chances de aprovação o aluno que resolve as questões com maior rapidez. Por isso, precisamos, por muitas vezes, focar no conteúdo.

Sabemos que muitos dos educandos, após o vestibular, esquecerão muitos dos conteúdos, isso porque não foram tocados ou porque eles não se abriram a alguma espécie de signos que os pudessem afetar. Disso o professor não tem controle. Por outro lado, há alunos que, mesmo não aprovados, dizem que fixaram certos conteúdos e, ainda o sabem. Como conseguimos tocá-los? Através da música e de versos. Por exemplo, à expressão da soma ou da diferença de senos de arcos, $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a)$, associamos a canção do exílio: “Minha terra tem palmeira, onde canta o sabiá. Seno (a) cosseno (b), seno (b) cosseno (a), o sinal que aqui gorjeia também gorjeia lá”.

Existem outras canções e versos, que também utilizamos, na tentativa de alcançar alguns estudantes. Entretanto, tomamos o cuidado de não ficar somente nas canções, pois nem todos são tocados assim. Aliás, nossa prioridade é a construção do conhecimento, dedutivamente.

Dessa forma, temos buscado outras formas de alcançar os educandos, com o objetivo de atingir o maior número possível. Descobrimos que o ambiente de modelagem pode nos trazer resultados positivos.

Nossas experiências com modelagem têm ocorrido em horário diferente da aula, principalmente se trabalharmos com projetos. Esses projetos, não são garantia de que conseguiremos levar os educandos a pensar, mas temos observado que a maioria deles, a partir dos projetos, aprende de forma crítica. Muitos reclamam que nos projetos não aparecem exercícios parecidos com os do vestibular, isso porque não levamos lista de exercícios. As questões são propostas por eles.

Nesses projetos, é fundamental o aceite do estudante em trabalhar com algum tema que o afete, pois não faz sentido que o educando pesquise sobre algo que não lhe interessa conhecer. Temos a chance de realmente experimentar. Contudo, não há como prever se os estudantes serão afetados, pois a experiência, segundo Bondía (2001), é regida pelo imprevisível e pelo indeterminado. O que apresenta resultado positivo para um estudante pode dar errado com outro. Mas, podemos afirmar que, quando eles aceitam trabalhar dessa forma, irão aprender, usando assuntos que lhes interessam saber.

Em um ambiente de Modelagem, quando investigarem sobre determinada situação, o farão de forma aberta, sem saber a resposta, sem saber se chegarão a uma resposta. Da mesma forma, o professor perde, ou pode perder o controle das aulas, pois os estudantes conduzirão suas aprendizagens de forma mais autônoma, investigando aquilo que lhes toca.

Quando estamos em um ambiente de Modelagem, pensamos que perdemos nossos poderes de professor. Isso é muito bom, pois significa que estamos mais preocupados com o compartilhar do que o transmitir. Mas, como compartilhar se não sabemos sobre o quê? Não há como saber tudo, mas é importante saber bem sobre o que ensinar. Mesmo assim, preferimos o sentimento de medo, de não saber sobre para onde os estudantes guiarão seus estudos, ao porto seguro, quando conduzimos totalmente uma aula bem ensaiada.

Com bastante sensibilidade e certo tempo de envolvimento com os estudantes, o professor consegue pressupor diversas dúvidas deles. Quanto mais o professor ministrar aulas, mais ele consegue, durante suas aulas, prever dúvidas. Isso, em geral, não ocorre em ambiente de Modelagem Matemática, porque simplesmente não se sabe para onde os estudantes conduzirão suas pesquisas. Logicamente, que dependendo do tema escolhido, é possível se preparar para algumas situações, mas isso depende não só do tema, depende também do quanto o professor sabe, *a priori*, a respeito do tema. Sendo pouco, é necessário pesquisar, investigar, experimentar. Estas ações se fazem presente na área de modelagem justamente porque são necessárias. E é aí que reside sua riqueza e a possibilidade de aumentar nossa potência de agir. Somos provocados, desafiados e levados a agir.

6 PROJETO DE ENSINO COM MODELAGEM

Nesse capítulo, apresentamos o projeto com Modelagem, originador desse trabalho, que teve uma duração total de 17 horas, divididas em 5 aulas, sendo a primeira (AULA 0), dentro de uma aula comum, com 36 estudantes. As demais ocorreram em horário extraclasse, somente com os interessados em participar. Todos são adultos e frequentam o PEAC (Projeto Educacional Alternativa Cidadã), apresentado no capítulo 5, em que o autor é coordenador da equipe de matemática, composta por 6 professores.

Para escrevermos esse capítulo utilizamos três recursos como base para análise dos dados: (i) diário de bordo feito pelo professor. Nesse, procuramos captar o máximo de informações acerca da prática dos estudantes. (ii) gravação de áudio e vídeo de alguns encontros. (iii) análise do material elaborado pelos estudantes que optamos por transcrever.

Formamos três grupos, entretanto, detalharemos o desenvolvimento do projeto de apenas um dos grupos: o grupo 3, que optou por trabalhar com a preservação de recurso naturais. Escolhemos esse grupo porque foi o que esteve presente em todos os encontros. Os demais não participaram de todo o projeto e, por isso, não completaram suas atividades.

Na AULA 0, nos detemos a captar as imagens que os estudantes tinham acerca do tema: SUSTENTABILIDADE. Ainda, com a intenção de amplificar as suas imagens acerca do tema, utilizamos dois vídeos na primeira aula. Segundo Araujo (2012), esse recurso é eficaz e pode ser usado na sala de aula. Entretanto, deve-se tomar o cuidado para não usar vídeos muito extensos e cansativos. Além disso, precisam ter relação com o conteúdo a ser trabalhado. Conforme destacamos o pensamento de Araujo (2012), em relação a atividades com vídeo:

O sucesso nas atividades depende exclusivamente do cuidado minucioso que o professor der ao fazer uso desse meio, deverá ser de forma que instigue a curiosidade do aluno com relação ao assunto que está sendo trabalhado, pois se for utilizado de forma cansativa, o interesse e a participação serão perdidos. (ARAUJO 2012, p. 21)

Se usarmos vídeos que não tenham relação com o conteúdo, Araujo (2012) destaca que corremos o risco da seguinte frase dos alunos: “hoje não tivemos aula, assistimos um filme”.

Na AULA 0, convidamos todos para participar do projeto, entretanto, no início, somente 6 estudantes tinham disponibilidade. O principal motivo estava ligado ao fato de que o único momento disponível era sábado pela manhã e, a maior parte dos estudantes trabalhava nesse horário.

Na AULA 1, formamos três duplas, que no decorrer do projeto ganharam novos adeptos. Ou seja, no primeiro dia, os grupos tinham dois integrantes, mas, com o andamento do projeto, novos estudantes se interessaram e tiveram disponibilidade para participar. As duplas iniciais foram formadas de acordo com os interesses dos estudantes. Nessa aula, explicamos a eles como se dariam as atividades. Informamos que ficariam livres para desenvolver as atividades, primeiramente, fazendo questões quaisquer sobre o assunto escolhido. Após, escolhendo quais destas eram mais relevantes e, sendo necessário, durante as atividades, criando novos questionamentos.

Sant’Ana e Sant’Ana (2009) classificam em três os tipos de questionamentos em um ambiente de modelagem: perguntas abertas, que dependendo do entendimento do estudante, das premissas utilizadas por ele e estratégias de resolução, podem ter respostas distintas. Nesse tipo de pergunta, não são informados os dados para a resolução. Portanto, se faz necessário uma pesquisa para levantamento de dados, por exemplo. As perguntas fechadas são aquelas que apenas os dados fornecidos aos estudantes já são suficientes para a resolução. Nessas, não há necessidade de novas pesquisas. E, as semifechadas, que são semelhantes às fechadas, entretanto, deixam margem para reformulações e alterações nas estratégias de resolução.

Percebemos claramente uma diferença entre o trabalho realizado por Sant’Ana e Sant’Ana (2009) e o nosso: os questionamentos. Na experiência relatada por eles, realizada com estudantes de Licenciatura em Matemática, a maioria escolheu fazer questões fechadas. Procuraram fornecer os dados necessários para a resolução, não permitindo pesquisas acerca da questão. Por exemplo, um dos grupos colocou o seguinte questionamento, sobre *Qualidade do Ensino*:

Qual seria o aumento do percentual do PIB investido por aluno matriculado mantendo-se o investimento atual? (3,7%).

Leve em consideração que:

- O número atual de alunos matriculados é de 32 milhões.
- O número estimado para 2020 é de 22 milhões, sem redução do índice de repetências. (SANT'ANA & SANT'ANA 2009, p. 9).

A questão parecia que seria aberta, entretanto, deixou de ser, a partir do momento que o grupo inseriu dados para resolução. Segundo Sant'Ana e Sant'Ana (2009), ao informar os dados, o grupo faz com que os leitores da questão não precisem ler a reportagem original. Sendo necessários, apenas cálculos percentuais para a resolução.

Já no nosso trabalho, vemos que os estudantes não estavam preocupados em como obter a resposta e, tampouco, em dar os dados para a resolução. Por isso, as questões ficaram abertas, dando bastante margem para pesquisa e investigação. Por exemplo, a primeira pergunta do grupo 1 foi a seguinte:

“Quantos litros de água são utilizados em um dia? E quantos litros são utilizados em um mês?”.

Já a primeira pergunta do grupo 3 foi a seguinte:

Quantos litros de água uma pessoa consome por mês?

Foram duas questões abertas. E, mesmo se restringirmos a uma pessoa ou família, como na questão do grupo 3, ainda fica aberta. Pois, o leitor dessa pergunta precisará realizar alguma pesquisa para levantar os dados necessários e, somente depois disso, responder.

Sant'Ana e Sant'Ana (2009) acreditam que, em sua experiência, a maioria dos estudantes optaram por questões fechadas, devido ao fato de estarem acostumados com esse tipo de abordagem. Ou seja, enquanto estudavam no Ensino Médio, as perguntas que recebiam era nesse formato, em que é necessário apenas utilizar algumas fórmulas com os dados que estão à disposição. Assim, vamos ao encontro do que escrevemos no capítulo 2 desse trabalho: nossos professores são responsáveis pela nossa formação inicial como professores, pois tentaremos imitá-los, já que ainda não sabemos ser um professor diferente. Em geral, escolhemos alguns professores que nos marcaram para imitar.

Acreditamos que os participantes de nosso projeto não fizeram questões fechadas porque não estavam tentando ser professores. Estavam, realmente, apenas listando as curiosidades que tinham a respeito do assunto escolhido. Então, não precisavam imitar nenhum tipo de pergunta.

Na AULA 2, nosso interesse foi auxiliar os estudantes na obtenção de respostas para as questões propostas por eles na AULA 1. Também queríamos saber para onde e como exatamente conduziram o seu projeto de pesquisa. Além disso, era importante auxiliar os educandos a escreverem seus objetivos. Como o grupo 3, objeto de estudo nesse trabalho, já havia definido que trabalharia com a preservação da água, trouxeram para essa aula uma pesquisa com dados de consumo de cada saída de água. Nessa aula, os estudantes viram que os dados pesquisados não refletiam suas realidades. E, por isso, para a AULA 3, fizeram medições de seus consumos. Já na AULA 4, verificamos a viabilidade da construção de uma cisterna, para atender uma casa.

A seguir detalhamos cada uma das cinco aulas. Apresentamos todas as atividades propostas pelos estudantes e como desenvolvemos cada uma.

6.1 AULA 0

Para essa aula, utilizamos alguns minutos, dentro de uma aula comum. Estávamos interessados em captar as imagens que os estudantes tinham acerca do tema gerador. Para isso, realizamos uma pesquisa com os 36 estudantes presentes. Perguntamos o que lhes vinha à cabeça quando pensavam em SUSTENTABILIDADE. Palavras como reciclagem, preservação do meio ambiente, conscientização, consumo consciente de recursos naturais são alguns exemplos do que os estudantes escreveram. Após, passamos dois vídeos sobre o tema e novamente questionamos os estudantes.

O primeiro vídeo apresentado foi uma propaganda publicitária do Rio + 20, narrado por Fernanda Montenegro e, pode ser acessado no seguinte sítio: <http://www.youtube.com/watch?v=dX-tu2ODL5g>, acesso em março de 2013. Já o segundo, foi uma gravação do discurso feito por Severn Cullis Suzuki, na época com 12 anos, no ECO-92. Este pode ser acessado pelo sítio <http://www.youtube.com/watch?v=SlZi6iffOGc>, com acesso em março de 2013. Os dois vídeos têm duração de aproximadamente 7 minutos e transmitem uma mensagem

sobre o nosso passado, presente e futuro. Queremos um mundo com desenvolvimento sustentável ou vamos extrair todos os recursos do planeta até que se esgotem? E quando se esgotarem, procuraremos outro planeta, como faziam os nossos ancestrais nômades, que após utilizar os recursos de determinado local procuravam outro? Ou seja, escolhemos vídeos curtos que tinham ligação com o tema, exatamente como Araujo (2012) sugere.

Depois de assistirmos aos vídeos, novas ideias surgiram acerca do tema, entre elas, preservar o meio ambiente pensando no futuro, conscientização, igualdade na distribuição de renda, autossuficiência, etc.

Solicitamos, aos estudantes interessados em participar do projeto, uma pesquisa sobre o tema. Eles deveriam trazer no próximo encontro uma definição melhorada do que pensam ser SUSTENTABILIDADE para, a partir daí, definirmos os grupos de trabalho.

Ao final da AULA 0, esperávamos que os estudantes apresentassem as imagens iniciais que tinham sobre o tema e alguma modificação após assistirem os vídeos. Por exemplo, um dos estudantes colocou as seguintes definições do tema antes de assistir aos vídeos:

“preservação do meio ambiente, utilização de recursos naturais renováveis, desenvolvimento sustentável.”.

Ou seja, ele já tinha uma excelente percepção acerca do tema. E, após os vídeos, acrescentou as seguintes definições:

“preservar para pensar nas gerações futuras, proteger a fauna e a flora, políticas para evitar a emissão de carbono, utilizar os recursos naturais de forma consciente.”.

Portanto, somente por assistir os vídeos, esse estudante conseguiu ampliar sua visão sobre o tema, vinculando preservação do meio ambiente, através da utilização consciente dos recursos com o sentimento de garantir a sobrevivência das gerações futuras. Além disso, conseguiu apresentar que a sociedade não é a única responsável

pela preservação dos recursos, apesar de ter papel importantíssimo, ao colocar a necessidade de políticas que garantam que uma quantidade menor de poluição seja despejada em nosso ar.

Sendo assim, atingimos nosso objetivo para esse primeiro encontro: captar e ampliar as imagens que estudantes tinham acerca do tema.

6.2 AULA 1

Solicitamos que os estudantes falassem em voz alta o que haviam pesquisado sobre SUSTENTABILIDADE. Os temas que apareceram foram: consumo consciente de energia elétrica e de água potável, reutilização de fontes renováveis: biomassa, energia solar, água da chuva; utilização de energia menos poluente; preservação dos recursos naturais, pensando em atender não somente a geração atual, mas também as futuras; desmatamento e reutilização do solo desmatado; reciclagem; consciência social e distribuição de renda. Após, pedimos que os estudantes escolhessem um dos temas e formassem grupos de acordo com suas escolhas. Nessa aula tínhamos 6 educandos que formaram três duplas. Os temas escolhidos foram: consumo consciente de energia elétrica e de água potável; utilização de energia menos poluente; preservação dos recursos naturais, pensando em atender não somente a geração atual, mas também as futuras.

Eles fizeram os questionamentos sobre o tema escolhido. Ou seja, levantaram questões que despertaram sua curiosidade, além de coletarem os dados necessários para responder os questionamentos. Ou seja, nos encaixamos no caso 3 de Modelagem, definido por Barbosa (2001). Nessa aula, os estudantes também escreveram quais respostas esperavam ter antes da pesquisa.

6.2.1 QUESTIONAMENTOS E RESPOSTAS ANTES DA PESQUISA

Grupo 1 – Consumo consciente de energia elétrica e água potável.

1. Quantos litros de água são utilizados em um dia? E quantos litros são utilizados em um mês?

2. Quantos watts são consumidos por cada eletrodoméstico?
3. Quanto seria necessário economizar para diminuir o valor da conta de luz em 30%?
4. Quantos litros, de água da chuva, teríamos que reutilizar para compensar o consumo de um mês?
5. Quantas horas de sol equivalem a 100 w?
6. Se fosse construído um poço com motor, quanto de energia o motor consumiria?
7. Quantos teríamos que cavar para o consumo de água potável?
8. Quanto seria gasto para construir um poço?
9. Qual a média de tempo que teríamos água no poço se não chovesse durante meses?

Respostas antes da pesquisa

A utilização do poço para uso doméstico custaria menos do que utilizar a água encanada.

Grupo 2 – Utilização de energia menos poluente.

1. Utilizando uma fonte de energia menos poluente, quanto, aproximadamente, seria reduzido do gasto mensal de uma casa, se os aparelhos simples (TV, lâmpadas, ventiladores, etc.) fossem ligados a ela? E se utilizássemos a fonte tradicional?
2. Qual o investimento necessário para implantar um sistema desses? E para um sistema de energia padrão?
3. Quais seriam os benefícios, em longo prazo, na utilização desse sistema?
4. Qual a vida útil dos sistemas poluente e dos não poluentes?
5. Quanto de energia se pode extrair de um ímã? E de outras fontes de energia?
6. Quanto seria gasto para ligar uma TV, usando energia com ímã? E, para ligar a mesma TV, usando a energia convencional?

Respostas antes da pesquisa

1. Aproximadamente 99%, se utilizássemos energia a ímã. Usando energia convencional teríamos redução nula, pois são os custos atuais.

2. O investimento é alto para energia menos poluente e baixo para energia convencional.

3. Menos gastos, assim recuperando o investimento inicial e obtendo lucros.

4. Aproximadamente 500 anos, utilizando energia menos poluente e 12 dias para energia convencional.

5. O suficiente para manter uma TV ligada por 500 anos, usando energia com imã. Até o combustível ser consumido, com energia convencional.

6. O gasto seria o investimento dividido pela vida útil do imã utilizado.

Grupo 3 – Preservação dos recursos naturais, pensando em atender não somente a geração atual, mas também as futuras.

Como o objetivo desse grupo ficou muito generalista, sugerimos que focassem em apenas um recurso natural. O grupo optou pelo consumo de água.

1. Quantos litros de água uma pessoa consome por mês?

2. Qual a quantidade, em litros, seria ideal para cada atividade que necessita a utilização da água?

3. Como é medido o consumo de água pelo órgão responsável pela mesma?

4. Qual o consumo médio de água, por mês, de uma família de classe média?

5. Quanto, em litros, seria economizado, em 1 ano, se uma família de 5 pessoas diminuísse em 10 minutos o tempo médio gasto em um banho?

6. Quanto seria gasto para ter uma cisterna?

7. Como diminuir o consumo de água nos meses de pico (verão)?

8. O RS é um estado que chove muito. Quantos litros de água ao mês seriam armazenados com uma cisterna?

9. Em reais e em litros, quanto seria economizado se fossem adotadas as medidas de racionamento da questão anterior?

Respostas antes da pesquisa

1. 100 litros.

2. Lavar a louça: 5 litros por pia de louça lavada; lavar roupa: 20 litros por lavagem; banho de 20 minutos: 50 litros; comida: 5 litros por dia.

3. –
4. 5.000 litros.
5. 100.000 litros.
6. R\$ 6.000,00
7. Tomando banhos mais rápidos, fechando as torneiras quando não utilizadas, utilizando caixas de descarga econômicas.
8. Depende do mês. No mês de agosto acredito que seriam 200.000 litros.
9. Acreditamos que o consumo cairia na metade, tanto em litros quanto em reais.

Nossa expectativa para esse encontro era que os estudantes estivessem divididos em grupos de acordo com o assunto, com, aproximadamente, 10 questões elaboradas. Além disso, queríamos saber sobre o que os estudantes pensavam que obteriam como respostas, antes de tentar responder ou pesquisar. Portanto, conseguimos atingir nosso principal objetivo.

6.3 AULA 2

A partir desse momento, apresentamos dados somente do grupo 3, que iniciou as atividades com dois integrantes e terminou com quatro. Todo o trabalho se guiou pela análise feita na conta de água da casa de um dos integrantes do grupo. A parte importante para as análises está ilustrada na figura 1.

Figura 1 – Imagem de parte de uma conta de água pertencente a uma das estudantes participante do projeto.

Histórico de Consumos em Metros Cúbicos (m ³)					
Mês/Ano	04/2013	03/2013	02/2013	01/2013	12/2012
Consumo	13	13	13	21	11
Dados do Consumo do Mês					
Hidrometro	Leitura Anterior	Leitura Atual	Consumo (m ³)	Dias de Consumo	
A10N153372	772	779	14	30	

Fonte: Conta de água apresentada por uma das estudantes participantes do projeto.

1. Quantos litros de água uma pessoa consome por mês?

Questionamos se os estudantes sabiam como iriam calcular. Um deles sugeriu que poderíamos usar a média de consumo da família. Sugerimos utilizassem também a mediana, já que em um dos meses o desvio foi muito alto. Alertamos também que usando a média da família não teríamos o consumo exato de uma pessoa, pois os integrantes da família em questão poderiam utilizar a água de formas diferentes.

Então, para responder essa questão os estudantes calcularam a média e a mediana do consumo dos últimos meses, a partir do histórico de consumo de cinco meses apresentado na conta.

$$\text{Média} = \frac{13+13+13+21+11}{5} = \frac{71}{5} = 14,2 \text{ m}^3.$$

$$\text{Mediana} (11,13,13,13,21) = 13 \text{ m}^3.$$

Como a conta usada era de uma família de cinco pessoas, para descobrir o consumo diário por pessoa, precisaram trabalhar apenas com algumas divisões.

$$\text{Consumo médio} = \frac{14,2}{5} = 2,84 \text{ m}^3.$$

$$\text{Consumo mediano} = \frac{13}{5} = 2,6 \text{ m}^3.$$

Entretanto, o interesse dos estudantes era descobrir quantos litros de água eram consumidos em um mês por pessoa. Para isso, fizeram a conversão de unidades, utilizando a seguinte relação: 1 *litro* ~ 1000 cm^3 .

Os estudantes calcularam erradamente a conversão. Eles fizeram inicialmente da seguinte maneira, usando razão e proporção:

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros} \rightarrow 2,84 \text{ m}^3 = 284 \text{ cm}^3.$$

$$1000 \text{ cm}^3 = \text{litro} \rightarrow 284 \text{ cm}^3 = 0,284 \text{ litros}.$$

Perceberam o erro facilmente, devido ao valor extremamente baixo encontrado para o consumo mensal de uma pessoa. Para resolvermos esse problema, foi apresentada para o grupo outra maneira de converter unidades, sem utilizar razão e proporção, mas apenas substituição.

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros} \rightarrow 2,84 \text{ m}^3 = 2,84 (100 \text{ cm})^3 = 2,84 \cdot 10^6 \text{ cm}^3.$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro} \rightarrow 2,84.10^6 \text{ cm}^3 = 2,84.10^3 \text{ litros} = 2840 \text{ litros.}$$

Analogamente, é possível perceber que o consumo mediano foi de 2600 litros.

O pai de uma das estudantes trabalha com hidráulica. Ela disse que o pai lhe falou que para transformar metro cúbico em litros basta multiplicar por 1000, mas ela não entendia o porquê. Então generalizamos nossa situação:

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros} \rightarrow X \text{ m}^3 = X (100 \text{ cm})^3 = X.10^6 \text{ cm}^3.$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro} \rightarrow X.10^6 \text{ cm}^3 = X.10^3 \text{ litros.}$$

Ou seja, a informação é verdadeira. Sendo assim, podemos tirar mais uma relação:

$$1\text{m}^3 \sim 1000 \text{ litros.}$$

Dessa forma, vamos ao encontro do que escrevemos no capítulo 2 desse trabalho, concordando com D'Ambrosio (1999) sobre utilizar o conhecimento prévio do estudante, e utilizá-lo na construção do conhecimento. Para a estudante, era uma regra memorizada, que até então não fazia sentido para ela. Agora, ela associa as duas grandezas: metro cúbico e litros, conseguindo entender todas as relações.

2. Qual quantidade, em litros, seria ideal para cada atividade que necessita a utilização da água?

Para responder essa questão era preciso, primeiramente, verificar ou decidir quais atividades eram mais relevantes. Os estudantes escolheram como mais relevantes as seguintes atividades: banho, lavagem de louça, descarga do banheiro, lavagem de roupa, escovação de dentes e lavagem de carro. Para facilitar a visualização e compreensão pensamos em criar um quadro com as informações organizadas.

Os dados do quadro abaixo são valores médios pesquisados pelos estudantes. A principal fonte da pesquisa deles foi o seguinte sítio: http://www.sabesp.com.br/CalandraWeb/CalandraRedirect/?temp=2&temp2=3&proj=sabesp&pub=T&nome=Uso_Racional_Agua_Generico&db=&docid=DAE20C6250A162698325711B00508A40, com acesso em setembro de 2013.

QUADRO 3 – Valores de consumo médio de água dependendo da utilização da saída de água.

ATIVIDADE	CONSUMO
Banho	135 litros por banho
Lavagem de louça	117 litros por lavagem
Descarga do banheiro	17 litros por descarga
Lavagem de roupa	135 litros por lavagem
Escovação de dentes	13,5 litros por vez
Lavagem de carro	320 litros por lavagem

Fonte: Pesquisa realizada pelos estudantes.

Os estudantes queriam verificar se os valores do quadro acima podiam ser aplicados à família em questão. Para isso, precisaram comparar o consumo médio da família, calculado na questão anterior, com consumo como o do quadro acima.

Para fazer essa comparação, primeiramente, a estudante que levou a conta deveria indicar quantas vezes ao dia, cada atividade era praticada pelos membros de sua família. Segundo ela, os 5 integrantes de sua família tomam 2 banhos por dia; em sua casa a louça é lavada 2 vezes ao dia; a descarga é utilizada 10 vezes ao dia, em média; a roupa é lavada 3 vezes por semana; cada um dos integrantes escova os dentes, em casa, 2 vezes por dia; o carro da família é lavado 1 vez por semana. Em todas as situações, ninguém desliga a saída de água. Ou seja, enquanto se escova os dentes, a torneira fica aberta, por exemplo. Novamente, para organizar os dados, recorreram a uma planilha, conforme quadro abaixo:

QUADRO 4 – Consumo de água por atividade, de acordo com os dados pesquisados pelos estudantes.

Atividade	Consumo por atividade	Quantidade diária por pessoa	Quantidade mensal	Consumo mensal em litros
Banho	135 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 135 = 40500$
Lavagem de louça	117 litros		$2 \times 30 = 60$	$60 \times 117 = 7020$
Descarga do banheiro	17 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 17 = 5100$
Lavagem de roupa	135 litros		12	$12 \times 135 = 1620$
Escovação de dentes	13,5 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 13,5 = 4050$
Lavagem de carro	320 litros		4	$4 \times 320 = 1280$

Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor.

6.3.1 CÁLCULANDO COM DADOS PESQUISADOS

Calculando o consumo mensal de água utilizada no banho

Como cada familiar toma 2 banhos por dia, então são 10 banhos por dia. Ou seja, em média são 300 banhos por mês. Como em cada banho gasta-se 135 litros, então o consumo mensal com banhos nessa família é dado pelo produto $300 \times 135 = 40500$ litros. Já nesse primeiro item, os estudantes perceberam que os valores pesquisados não se aplicariam à família em questão, pois o consumo máximo nos últimos meses havia sido de 21 metros cúbicos, ou seja, 21000 litros. Sendo assim, não seria possível que tal família gastasse 40500 litros. Mesmo assim, os estudantes queriam calcular o consumo das demais atividades, para verificar de quanto seria o erro.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na lavagem de louça

São 2 lavagens de louça por dia, portanto são 60 lavagens mensais. Como em cada lavagem de louça gastam-se 117 litros, então o consumo mensal para lavar a louça é dado pelo produto $60 \times 117 = 7020$ litros.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na descarga

Por dia, são 2 descargas por pessoa. Ou seja, 10 por dia e, conseqüentemente, 300 descargas por mês. Logo, o consumo mensal em descargas é dado pelo produto $300 \times 17 = 5100$ litros.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na lavagem de roupa

São 3 lavagens de roupa por semana, portanto, 12 lavagens por mês. Sendo assim, o consumo mensal para lavar a roupa é dado pelo produto $12 \times 135 = 1620$.

Calculando o consumo mensal de água utilizada para escovar os dentes

Cada familiar escova os dentes, em casa, 2 vezes ao dia. Portanto, nessa família, escovam-se os dentes 10 vezes ao dia. Logo, o consumo mensal de água para essa família escovar os dentes é dado pelo produto $10 \times 30 \times 13,5 = 4050$ litros.

Calculando o consumo mensal de água utilizada para lavar o carro

A família lava o carro 4 vezes por mês, gastando por lavagem, em média, 320 litros. Portanto, o consumo mensal de água na lavagem do carro dessa família é dado pelo produto $4 \times 320 = 1280$ litros.

6.3.2 COMPARANDO OS DADOS CALCULADOS COM OS DADOS DA CONTA DE ÁGUA DA FAMÍLIA

O próximo passo seria a comparação entre os valores que os estudantes calcularam, com a ajuda do professor, e os dados da conta. Ou seja, tínhamos que verificar se o que calculamos refletia a realidade da família. Os estudantes somaram todos os valores para obterem o consumo total mensal de água: $40500 + 7020 + 5100 + 1620 + 4050 + 1280 = 59570$ litros.

Portanto, o erro entre a média de consumo da família e a média de consumo pesquisada é dado pela diferença: $59570 - 14200 = 45370$ litros, ou seja, um erro superior a 300 %. Dessa forma, não poderíamos utilizar os valores pesquisados como referência. Era preciso obter valores mais próximos da realidade.

Questionamos os estudantes se havia outra maneira de descobrirmos o consumo de cada uma das atividades. Ou seja, qual a vazão de cada um dos pontos de saída de água: chuveiro, torneiras, etc. A única maneira que eles pensaram foi a de realizar pesquisas na internet, baseada na marca de cada torneira e chuveiro da casa. Entretanto, ao utilizar essas médias pesquisadas, novamente poderíamos ter um erro grande, por isso precisávamos de um método que se aproximasse da realidade daquela família.

Como os estudantes não pensaram em uma forma melhor de calcular a vazão dos pontos de saída de água, sugerimos que pegassem um recipiente com capacidade de 1 litro e o enchesse com água, medindo o tempo que seria necessário para completá-lo.

Solicitamos que, nessa experiência, abrissem as torneiras e o chuveiro com a mesma vasão utilizada no banho ou na utilização de uma torneira.

6.4 AULA 3

Na aula anterior, os estudantes trabalharam com dados pesquisados por eles. A partir de agora os dados utilizados foram medidos por eles. Nosso objetivo, nesse encontro, foi auxiliar os estudantes a criar suas conclusões. Queríamos mostrar-lhes os benefícios em utilizar a água de forma consciente, mas fomos nessa direção porque eles quiseram. Auxiliamos, sem tomar todas as decisões. Os estudantes, por exemplo, não sabiam se era viável a construção de uma cisterna para reduzir o consumo de água. Seguimos nessa direção, dando suporte, questionando-os.

Essa aula começou com a tabela informativa feita através das medições dos estudantes.

QUADRO 5 – Tempo para encher 1 litro de água, conforme atividade.

ATIVIDADE	Tempo
Banho	19,01
Lavagem de louça	33,17
Descarga do banheiro	-
Lavagem de roupa	-
Escovação de dentes	17,71
Lavagem de carro	15,50

Fonte: Elaborado pelo grupo 3.

O próximo passo seria levantar o tempo em que cada ponto de saída de água fica aberto em cada uma das atividades. Assim, seria possível calcularmos o consumo de água em cada uma das atividades. Depois, bastaria verificar quantas vezes por mês determinada atividade é realizada. Por fim, somar todos os consumos.

Começamos levantando os tempos de cada atividade, conforme quadro 6. Colocamos no quadro somente as atividades que dependem do tempo de uso. Por exemplo, como a família possui máquina de lavar roupa, o consumo de água independe do tempo em que a máquina fica ligada. Tal consumo depende da capacidade da máquina de lavar.

QUADRO 6 – Tempo em que cada saída de água fica ligada por atividade de acordo com o membro da família.

Membro da família	Banho 1	Banho 2	Lavagem de louça	Escovação de dentes 1	Escovação de dentes 2	Lavagem de carro
Pai	5 min.	5 min.	-	2 min.	2 min.	
Mãe	5 min.	5 min.	-	2 min.	2 min.	
Filha adulta	30 min.	30 min.	-	5 min.	5 min.	
Filha adulta	30 min.	30 min.	-	5 min.	5 min.	
Criança	20 min.	-	-	1 min.	1 min.	
Família	90 min.	70 min.	20 min.	15 min.	15 min.	25 min.

Fonte: Elaborado pelo grupo 3.

Agora, com os tempos em que cada saída permanece aberta por atividade e o tempo que cada saída precisa para encher um recipiente com 1 litro de capacidade, podemos calcular a vazão de cada ponto de saída.

6.4.1 CALCULANDO COM DADOS MEDIDOS

Calculando o consumo mensal de água utilizada no banho

Tanto o pai quanto a mãe tomam 2 banhos por dia, de aproximadamente 5 minutos. Ou seja, o chuveiro fica ligado por 20 minutos. Fizemos a seguinte questão aos estudantes: se o chuveiro enche 1 litro de água em 19,01 segundos, quanto encherá em 20 minutos? Como os estudantes estavam interessados em estudar para o ENEM, não queriam utilizar calculadora. Por outro lado, não queriam fazer muita conta. Perguntaram se poderiam trabalhar com aproximações, já que nenhum dos valores medidos era inteiro. Nossa resposta foi que sim. Nesse caso, ao fazerem arredondamentos precisavam tomar cuidado. E mais, evitar esse procedimento quando o erro utilizado for maior do que a diferença entre as alternativas.

Perguntamos aos estudantes como eles gostariam de arredondar, ou seja, qual valor que usaríamos no lugar de 19,01. Eles responderam que o inteiro mais próximo é 19, mas que, para facilitar os cálculos, poderíamos aceitar um erro um pouco maior e utilizar o valor 20. Qualquer um dos valores nos daria um erro menor do que 1 segundo.

Dessa forma, nosso erro seria $0,1/19,01 \sim 0,53\%$, se usássemos o valor 19. Caso usássemos o valor 20, nosso erro seria de $0,99/19,01 = 5,2\%$.

Conforme pode ser visto no quadro 6, acima, essa família utiliza o chuveiro durante 160 minutos por dia, e, portanto, $160 \times 30 = 4800$ minutos por mês. Então, aceitando o erro de $5,2\%$, escolhemos arredondar o tempo que o chuveiro demora, para encher um recipiente com capacidade de 1 litro, para 20 segundos. Sendo assim, se o banho consome 1 litro de água em 20 segundos, quanto consumirá em 4800 minutos?

Se cada minuto tem 60 segundos, significa que em 1 minuto teremos 3 litros consumidos. Portanto, $3 \times 4800 = 14400$ litros são utilizados nos banhos.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na lavagem de louça

São 2 lavagens de louça por dia, portanto são 60 lavagens mensais. Segundo o quadro 6, acima, a família utiliza 20 minutos para essa atividade, sendo 10 minutos para cada lavagem e, portanto, a torneira utilizada para lavar a louça permanece ligada durante $60 \times 10 = 600$ minutos por mês.

Conforme a medição feita pelos estudantes, a torneira utilizada para a lavagem de louça enche um recipiente com capacidade de 1 litro, em 33,17 segundos. Novamente, vamos arredondar e calcular o erro de nossa aproximação. Os estudantes escolheram utilizar 33 segundos. Nesse caso, nosso erro seria de $0,17/33,17 \sim 0,51\%$. Portanto, seremos mais assertivos nesse item.

Para esse cálculo os estudantes usaram razão e proporção, denominado por eles de regra de três simples.

Cálculo da conversão do tempo para segundos:

1 minuto \rightarrow 60 segundos

600 minutos \rightarrow x segundos

$$x = \frac{600.60}{1} = 36000 \text{ segundos}$$

Cálculo da quantidade de água consumida para lavar a louça

$$1 \text{ litro} \rightarrow 33 \text{ segundos}$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 36000 \text{ segundos}$$

$$x = \frac{36000}{33} \sim 1091 \text{ litros}$$

Sendo assim, para a lavagem de louça a família consome, aproximadamente, 1091 litros por mês.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na descarga

Por dia, são 2 descargas por pessoa. Ou seja, 10 por dia e, conseqüentemente, 300 descargas por mês. Essa atividade não depende do tempo, mas da capacidade do recipiente acoplado ao vaso sanitário. Logo, o consumo mensal em descargas é dado pelo produto $300 \times 10 = 3000$ litros. Aqui utilizamos 10 litros, pois essa é a capacidade do recipiente acoplado ao vaso sanitário da família.

Calculando o consumo mensal de água utilizada na lavagem de roupa

São 3 lavagens de roupa por semana, portanto, 12 lavagens por mês. Sendo assim, o consumo mensal para lavar a roupa é dado pelo produto $12 \times 135 = 1620$.

Calculando o consumo mensal de água utilizada para escovar os dentes

Cada familiar escova os dentes, em casa, 2 vezes ao dia. Portanto, nessa família, escovam-se os dentes 10 vezes ao dia. Mas, conforme pode ser visto no quadro 6, acima, algumas pessoas escovam os dentes em 2 minutos e outras em 5 minutos. Ao somarmos os tempos, vemos que essa família mantém a torneira aberta, para escovar os dentes, por 30 minutos, diariamente. Ou seja, são 900 minutos por mês.

Segundo a medição, a torneira que a família utiliza para escovar os dentes enche um recipiente com capacidade de 1 litro em 17,71 segundos. Para os cálculos, utilizaremos o valor 18 segundos. O erro que cometemos, ao fazer esse arredondamento, foi de:

$$\frac{18 - 17,71}{17,71} = \frac{0,29}{17,71} \sim 1,64\%$$

Agora que sabemos o erro que cometemos com arredondamentos, vamos ao cálculo do consumo de água dessa família para escovar os dentes.

1 litro – 18 segundos

x litros → 900 minutos

$$x = \frac{900 \text{ minutos}}{18 \text{ segundos}} = \frac{900 \cdot 60 \text{ segundos}}{18 \text{ segundos}} = 3000 \text{ litros}$$

Logo, o consumo mensal de água para essa família escovar os dentes, é de 3000 litros por mês, com erro de arredondamento de, aproximadamente, 1,64%.

Calculando o consumo mensal de água utilizada para lavar o carro

A família lava o carro 4 vezes por mês, sendo que cada lavagem dura 25 minutos. Portanto, a torneira utilizada para essa atividade, fica aberta durante 100 minutos por mês. Como essa torneira enche um recipiente com capacidade de 1 litro em 15 segundos, para determinar o consumo mensal dessa torneira basta usarmos razão e proporção.

1 litro → 15 segundos

x litros → 1 minutos

Como no intervalo de 1 minuto temos 4 intervalos de 15 segundos, então em 1 minutos teremos 4 litros de água sendo consumidos por essa torneira.

4 litros → 1 minuto

x litros → 100 minutos

Se em 1 minuto consumimos 4 litros, então 100 minutos consumiremos $100 \cdot 4 = 400$ litros de água.

Portanto, concluímos que, segundo os cálculos descritos, essa família consome mensalmente a seguinte quantidade de água:

$$14400 + 1091 + 3000 + 1620 + 3000 + 400 = 23511 \text{ litros}$$

Seguimos com erros, porque não medimos os tempos de todos os banhos por exemplo. Nem de todas as vezes que se escovaram os dentes. Apesar disso, conseguimos uma aproximação melhor da realidade. Se compararmos com a média, nosso erro é dado por:

$$\frac{23511 - 14200}{14200} \sim 65,57 \%$$

Se nossa comparação for feita com o mês de maior consumo, nosso erro será dado por:

$$\frac{23511 - 21000}{21000} \sim 11,96 \%$$

Para minimizar ao máximo esse erro, o ideal seria medir o tempo exato de todos os consumos. Apesar de não termos essas medidas exatas, conseguimos que os estudantes tivessem noção da importância de reduzir o consumo de água. Com medidas simples, como a redução do tempo no banho, ou desligar a torneira enquanto se escova os dentes.

3. Como é medido o consumo de água pelo órgão responsável pela mesma?

Todos os meses, no mesmo período, é feita a leitura do relógio do hidrômetro. O órgão responsável pela medição do consumo registra o valor de cada leitura. Na conta tem duas informações importantes: Leitura Anterior e Leitura Atual, conforme a figura abaixo. O consumo de determinado mês é dado pela diferença entre essas medidas.

Figura 2 – Parte da conta que indica as leituras, anterior e atual, consumo e período de consumo.

Dados do Consumo do Mês				
Hidrômetro A10N153372	Leitura Anterior 772	Leitura Atual 779	Consumo (m ³) 14	Dias de Consumo 30

Fonte: Conta de água apresentada por uma das estudantes participantes do projeto.

Portanto, para o mês em questão o consumo é dado por $779 - 772 = 7$. Entretanto, a CORSAN fez uma cobrança de 14 m^3 . Pedimos para a estudante ver o que aparecia na conta anterior. A leitura de tal conta apresentava o número 1675, ou seja, houve uma troca no hidrômetro e, por isso, essa diferença. O que ocorreu foi o seguinte: A leitura do mês anterior foi de 1675 e antes de transcorrer os 30 dias o hidrômetro foi trocado. No dia da troca a leitura era de 1682. Portanto, o que não aparece nessa conta são 7 m^3 , referentes a leitura do hidrômetro anterior.

4. Qual o consumo médio de água, por mês, de uma família?

A resposta para essa pergunta foi obtida na questão 1. Ou seja, utilizando a família em questão, o consumo médio de água é $14,2$ metros cúbicos mensais.

5. Quanto, em litros, seria economizado, em 1 ano, se uma família de 5 pessoas diminuísse em 10 minutos o tempo médio gasto em um banho?

Quando vimos essa pergunta, questionamos os estudantes, para compreender melhor o que eles queriam saber: – 10 minutos no total de tempo gasto pela família, ou 10 minutos por pessoa. Nesse último caso, tal economia só poderia ser aplicada aos que ficam 30 minutos embaixo do chuveiro. Se quisessem 10 minutos no total, não seria justo com os que já economizam, ficando apenas 5 minutos, se essa economia fosse dividida de forma igual. Os estudantes resolveram que fariam de três maneiras.

i) Economia de 10 minutos no tempo total, com igual divisão no tempo.

Se optarmos por divisão igual, então cada pessoa fica responsável por reduzir 2 minutos em cada banho. Dessa forma, como os pais, por exemplo, utilizam o chuveiro por 10 minutos, sendo 5 em cada banho, seria necessário reduzir 1 minuto por banho. Como o tempo total de banho diário é 160 minutos, ao reduzir 10 minutos, essa família passaria a utilizar o chuveiro diariamente por 150 minutos. E, portanto, o consumo anual seria de $150 \times 30 \times 12 = 54000$ minutos. Novamente recorremos à razão e proporção:

Os estudantes pensaram em fazer desde o início, ou seja, ignorando os cálculos já efetuados. E deixamos que o fizessem da maneira escolhida por eles:

$$1 \text{ litro} \rightarrow 20 \text{ segundos}$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ minutos}$$

Portanto o consumo seria de 3 litros por minuto.

$$3 \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ minuto}$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 54000 \text{ minutos}$$

Ou seja, 162000 litros seriam consumidos, caso a família reduzisse 10 minutos do tempo total do banho.

Agora, era preciso calcular o consumo anual sem reduções no tempo de banho. Como o consumo diário era de 160 minutos, então o consumo anual seria de $160 \times 30 \times 12 = 57600$ minutos.

$$1 \text{ litro} \rightarrow 20 \text{ segundos}$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ minutos}$$

Portanto, o consumo seria de 3 litros por minuto.

$$3 \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ minuto}$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 57600 \text{ minutos}$$

Logo, o consumo anual, sem economia, é dado por:

$$x = 3 \cdot 57600 = 172800 \text{ litros}$$

Sendo assim, a economia gerada pela redução em 10 minutos no tempo total do banho, seria de $172800 - 162000 = 10800$ litros.

Após concluirmos, seguindo a direção dada pelos estudantes, sugerimos um método mais rápido. Não é necessário calcularmos o total do consumo sem economia e o total do consumo com economia, como foi feito. Basta calcularmos apenas o que deixamos de consumir, ou seja, quanto se consome naqueles 10 minutos.

$$1 \text{ minuto} \rightarrow 3 \text{ litros}$$

$$10 \text{ minutos} \rightarrow 30 \text{ litros}$$

Sendo 30 litros por dia, então, como estamos usando um ano bancário, com 360 dias, deixaremos de consumir $30 \times 360 = 10800$ litros.

ii) Economia de 10 minutos no tempo total, porém com divisão ponderada.

A única diferença entre esse item e o anterior é a divisão ponderada. Pois se mantermos a redução diária do banho em 10 minutos, seguiremos economizando 10800 litros. Contudo, nessa nova situação, queremos que as reduções sejam proporcionais aos consumos de cada pessoa. Sendo assim, as pessoas que já utilizam o chuveiro por 5 minutos precisarão economizar menos do que as pessoas que tomam banho de 30 minutos.

Para o cálculo ponderado o professor foi muito acionado. Os estudantes, enquanto sozinhos, não conseguiram elaborar um plano de redução. A principal orientação foi lembrá-los que cada pessoa é responsável por um percentual do consumo total. Assim, tanto o pai quanto a mãe representam 10 partes dos 160 minutos de banho, cada um. As filhas adultas representam 60 partes dos 160 minutos de banho, cada uma. E, por fim, a filha mais nova representa 20 partes dos 160 minutos de banho. Sendo assim, a redução proposta, representa 10 partes dos 160 minutos. Ou seja:

$$\frac{10}{160} = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25 \%$$

Portanto, é necessário que cada pessoa reduza 6,25 % do seu tempo de banho. Agora, os estudantes voltaram a ter autonomia. E, calcularam, diretamente, o quanto cada pessoa precisaria reduzir.

Redução do pai e da mãe:

$$10 \text{ minutos} \rightarrow 100 \%$$

$$x \text{ minutos} \rightarrow 6,25 \%$$

$$x = \frac{62,5}{100} = 0,625 \text{ minutos}$$

Portanto, tanto o pai quanto a mãe, precisam reduzir 62,5 % de 1 minuto. Ou seja:

$$1 \text{ minuto} \rightarrow 60 \text{ segundos}$$

$$0,625 \text{ minutos} \rightarrow x \text{ segundos}$$

$$x = 60 \cdot 0,625 = 37,5 \text{ segundos}$$

Redução das filhas adultas:

$$60 \text{ minutos} \rightarrow 100 \%$$

$$x \text{ minutos} \rightarrow 6,25 \%$$

$$x = \frac{60 \cdot 6,25}{100} = 3,75 \text{ minutos}$$

Sendo assim, cada uma das filhas adultas precisam reduzir 3 minutos + 0,75 minutos. Para calcular os 0,75 minutos, podemos utilizar regra de três simples, ou utilizar a substituição.

$$0,75 \text{ minutos} = 0,75 \cdot 60 \text{ segundos} = 45 \text{ segundos}$$

Ou seja, as filhas adultas precisam reduzir 3 minutos e 45 segundos do seu tempo de banho, cada uma.

Redução da filha mais nova:

$$20 \text{ minutos} \rightarrow 100 \%$$

$$x \text{ minutos} \rightarrow 6,25 \%$$

$$x = \frac{20 \cdot 6,25}{100} = 1,25 \text{ minutos}$$

Seguindo de forma análoga, vemos que a filha mais nova precisa reduzir 1 minuto + 0,25 minutos. Ou seja, 1 minuto e 15 segundos.

Para confirmar se está tudo certo, basta somar:

1 minuto + 15 segundos + 2 x (3 minutos + 45 segundos) + 2 x (37,5 segundos)
= 10 minutos. Portanto, nossa ponderação está correta.

Uma pergunta que o autor se fez, quando já havia terminado a prática, foi: Existe um tempo máximo de economia para essa família? Como determiná-lo? A resposta é sim, mas a determinação depende da estratégia utilizada na redução. Se exigirmos que todos economizem, então esse limite dependerá do tempo aceitável para um banho. O tempo que pai e mãe dessa família utilizam para o banho já está baixo, então o ideal seria pensarmos no máximo que os demais integrantes da família poderiam reduzir. E quem determina o máximo de economia é a filha criança. O banho dela não pode durar menos que 5 minutos. Nesse caso, ao invés de todos economizarem o mesmo percentual, cada um economiza um percentual diferente.

Como os tempos do pai e da mãe já estão baixos, vamos considerar os demais tempos. Assim, a filha criança passaria de 20 minutos para 5 minutos. Portanto, reduziria 15 minutos no seu tempo. Isso representa uma redução de $15/20 = 75 \%$ sendo $15/160 = 9,375 \%$ do total. As filhas adultas utilizam o chuveiro 2 vezes por dia, totalizando 60 minutos para cada uma. Sendo assim, elas precisariam reduzir de 60 minutos para 10 minutos (5 minutos para cada banho). Ou seja, a redução para cada uma delas seria de 50 minutos. O que representa uma redução de $50/60 = 83,33 \%$, sendo $50/160 = 31,25 \%$ do total. Pela conversa que tivemos com a estudante, ainda durante a prática, essa redução seria inviável para elas. Mas, uma redução para 40 minutos seria aceitável. Elas fariam uma redução de $20/60 = 33,33 \%$, sendo $20/160 = 12,5 \%$ do total.

iii) Economia de 10 minutos em cada banho das pessoas que ficam 30 minutos.

Se cada uma das filhas adultas reduzissem 10 minutos em cada banho, teríamos uma economia de 20 minutos por dia de cada uma delas, portanto, a família deixaria de usar o chuveiro, diariamente, por 40 minutos. Ou seja:

$$1 \text{ minuto} \rightarrow 3 \text{ litros}$$

$$40 \text{ minutos} \rightarrow x \text{ litros}$$

$$x = 120 \text{ litros por dia}$$

Sendo assim, nossa redução anual seria dada por:

$$1 \text{ dia} \rightarrow 120 \text{ litros}$$

$$360 \text{ dias} \rightarrow x \text{ litros}$$

$$x = 120.360 \text{ litros por ano} = 43.200 \text{ litros}$$

Como quadruplicamos o tempo de economia, passando a economizar 40 minutos ao invés de 10 minutos, é esperado que a quantidade economizada tenha quadruplicado. Isso só é verdade, porque as grandezas se relacionam de forma direta e linear.

Portanto, dessa forma, a economia seria de 32.400 litros a mais. Isso representa $32.400/10800 = 300\%$.

Até aqui, nossa preocupação estava somente no volume de água economizada. Os estudantes não perceberam imediatamente, mas seguindo a economia dos itens (i) e (ii) teríamos uma redução de 10.800 litros, ou seja, $10,8 \text{ m}^3$. Esse valor é quase o consumo médio mensal da família. E, portanto, poderiam deixar de pagar, praticamente, 1 mês. Se utilizarmos a economia do item (iii), exigindo que o banho das pessoas que ficam durante 30 minutos embaixo do chuveiro passassem para 20 minutos, teríamos uma redução de 43.200 litros, que equivale a $40,3 \text{ m}^3$. E, nesse caso, poderiam deixar de pagar pelo consumo de água em praticamente 3 meses. Logicamente, como a economia é diária e a conta é mensal, para deixar de pagar a conta de água é necessário guardar o valor equivalente à economia. Nesse momento, os estudantes quiseram monetizar a economia.

6.4.2 MONETIZANDO A ECONOMIA

Para contabilizar os valores economizados, com redução do consumo de água, precisávamos, primeiramente, verificar como é feita a cobrança.

Questionamos se sabiam como a concessionária de água efetua a cobrança. É interessante perceber que os estudantes sabiam o modo de cobrança das operadoras de telefone, por exemplo, mas não sabiam o modo de cobrança da concessionária de água. Isso faz sentido, já que eles não eram responsáveis pelo pagamento da conta. Então, não precisavam entendê-la.

Por eles não conhecerem o modo de cobrança, pedimos para que olhassem a conta e procurassem se no descritivo de pagamento havia indicação de custo fixo e custos que variam de acordo com o consumo. A figura abaixo apresenta tal descritivo:

Figura 3 – Parte da conta que apresenta itens financeiros.

CATEGORIA	EDU.ÁGUA	EDU.ESGOTO	CONSUMO	SERVIÇO BÁSICO	VALOR ÁGUA	VALOR ESGOTO
RB	1	0	14	R\$ 17,07	R\$ 50,54	R\$ 0,00

Fonte: Conta de água apresentada por uma das estudantes participantes do projeto

Conforme pode ser visto, a conta tem alguns itens importantes a serem analisados: a categoria, os serviços e o consumo. Quando questionados, os estudantes indicaram acreditar que a categoria está relacionada ao consumo. Sendo assim, quanto maior o consumo, maior será a categoria e, conseqüentemente, maior será a tarifa cobrada. De fato, segundo o site da CORSAN (www.corsan.com.br/node18, acessado em outubro de 2013) há duas categorias para clientes residenciais: RS e RB. A tarifa dos clientes RS pode chegar a 40 % da tarifa dos clientes RB nos primeiros 10 m³. O que diferencia tais clientes são os seguintes índices: renda, pontos de tomada de água e área construída.

Portanto, essa família tem categoria RB e paga uma taxa fixa de R\$ 17,07. Além disso, nota-se que o valor para o consumo é R\$ 50,54 quando o consumo é de 14 m³. Ou seja, o valor do metro cúbico é dado por:

$$R\$ 50,54 \rightarrow 14 m^3$$

$$x \rightarrow 1 m^3$$

$$x = \frac{50,54}{14} = R\$ 3,61$$

Dessa forma, os custos de consumo dessa família, nos 7 últimos meses, estão no quadro abaixo:

QUADRO 7 – Custos de acordo com o consumo mensal.

Mês	Volume consumido	Custo fixo	Custo m ³	Custo variável	Total
Abr/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Mai/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Jun/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Jul/13	21	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 75,81	R\$ 92,88
Ago/13	11	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 39,71	R\$ 56,78
Set/13	12	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 43,32	R\$ 60,39
Out/13	14	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 50,54	R\$ 67,61

Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor.

Como temos o valor de cada metro cúbico consumido, podemos calcular o valor economizado com as reduções propostas.

i) Economia de 10 minutos no tempo total.

Como vimos, reduzindo 10 minutos no tempo total de banho, consome-se 10800 litros a menos, que equivalem a 10,8 m³. E, portanto, R\$ 38,99 são economizados anualmente.

ii) Economia de 10 minutos no banho das pessoas que ficam 30 minutos.

Com essa economia, reduzimos 43200 litros. Sendo assim, economiza-se R\$ 155,95 anualmente.

O primeiro método de redução não chamou a atenção, mas o segundo sim. Principalmente, porque depende somente de duas pessoas, sendo uma delas participante

do projeto. Dessa forma, conseguimos criar uma situação em que os estudantes puderam analisar a conta de água de forma crítica. Não somente pelo valor econômico, mas pela quantidade de água que é utilizada. Por exemplo, uma reflexão feita:

“Vivemos em um local onde há água em abundância. Imagina como seria depender tanto da água se morássemos no Nordeste. Temos muita sorte”.

Essa reflexão feita faz muito sentido e mostra o quanto foram capazes de pensar e analisar criticamente, pois, apesar de o fator econômico ser importante, puderam perceber a importância de não desperdiçar água. Assim, se tornaram capazes de pensar nas gerações futuras, já que, como a água não é um recurso renovável, pode acabar. Sendo assim, podemos ficar em uma situação semelhante a do Nordeste.

iii) Economia Radical, ou seja, todos reduzem seus banhos para 5 minutos.

Esse item teve um pouco de resistência devido à inviabilidade, mas concordaram em, pelo menos, verificar. Segundo a estudante que levou a conta, seu pai gostaria bastante desse estudo, pois é a quantificação monetária do excesso do consumo de água durante um banho. Como esse item não despertou muito o interesse dos estudantes, apenas apresentamos os resultados, sem nos deter muito nessa questão.

Segundo os nossos cálculos, são 14400 litros consumidos, mensalmente, para o banho. Isso, se utilizarmos o chuveiro, diariamente, por um período de 160 minutos. Se diminuíssemos o tempo de banho de todas as pessoas da casa para 5 minutos, o tempo total, diário, passaria para 45 minutos, já que são 9 banhos por dia. E, portanto nossa redução seria bastante considerável.

$$160 \text{ minutos} \rightarrow 14400 \text{ litros}$$

$$115 \text{ minutos} \rightarrow x \text{ litros}$$

Dividindo toda a expressão por 160, para reduzirmos à unidade minutos.

$$1 \text{ minuto} \rightarrow \frac{14400}{160} \text{ litros}$$

115 minutos \rightarrow x litros

$$x = \frac{115.14400}{160} = 10350 \text{ litros}$$

Logo, como paga-se R\$ 3,61 para cada m^3 , a economia mensal com essa redução seria dada por:

$$3,61 \times 10,35 = 37,36$$

Quando pensamos anualmente, basta multiplicarmos esse valor por 12, e, portanto, nossa economia anual seria de R\$ 448,32.

Pensando em termos percentuais, nossa redução seria de $115/235 \sim 49\%$. Sendo assim, poderíamos reduzir o consumo, praticamente, pela metade.

Agora, pensemos um pouco... Quanto seria possível economizar, se todas as famílias agissem dessa forma. Será que não poderíamos abastecer melhor os estados do Nordeste brasileiro? Infelizmente não chegamos a investigar, mas ficou o questionamento.

6.5 AULA 4

Nessa aula, nosso foco se direcionou para a relação entre os custos e os benefícios ao optarmos pela instalação de uma cisterna. Esse sistema nem sempre é viável, pois depende, entre outras coisas, se há espaço no terreno, se existe possibilidade de criar um sistema de calhas para canalizar a água da chuva, etc.

6. Quanto seria gasto para ter uma cisterna?

Como o pai de uma das estudantes trabalha com hidráulica, ela ficou de questioná-lo, na aula anterior, sobre os custos para a instalação de uma cisterna. O valor informado foi de R\$ 6.000,00. Com esse valor, seria possível construir ou comprar uma cisterna pronta, fazer a instalação da cisterna, além da instalação hidráulica.

7. Como diminuir o consumo de água nos meses de pico (verão)?

Nos meses do verão é mais difícil reduzir o consumo no item banhos, pois dependendo do calor, não tem como evitar. É necessário tomar vários banhos por dia, às vezes, de mangueira, na rua. Nesses meses, a redução pode ser no tempo que se mantém a torneira aberta para escovar os dentes. Aliás, essa medida pode ser tomada durante todo o ano. Outra atividade em que os estudantes perceberam a possibilidade de economia é na lavagem do carro, podem reduzir para duas lavagens mensais.

8. O RS é um estado que chove muito. Quantos litros de água ao mês seriam armazenados com uma cisterna?

Essa resposta depende do mês em questão, pois tem meses em que chove bastante e em outros que temos escassez de chuva. Abaixo, o quadro que indica o índice de precipitação pluviométrica dos últimos anos. Os estudantes disseram que talvez não conseguissem encontrar os índices. Como utilizamos um quadro similar para um trabalho no ano de 2011, o professor se responsabilizou em apresentar um quadro com dados atuais.

Quadro 8 – Índices de precipitação pluviométrica mensal dos últimos três anos.

Mês	Índices de Precipitação Pluviométrica			
	2011	2012	2013	Média
Janeiro	101,4	166	106,2	124,53
Fevereiro	102	139,5	112,7	118,07
Março	83,1	122,7	66,5	90,767
Abril	172,7	77,1	108,9	119,57
Mai	50,1	35,7	65,3	50,367
Junho	109,7	31,9	101,6	81,067
Julho	225,7	144,9	115,9	162,17
Agosto	182	93,5		137,75
Setembro	51,9	273,7		162,8
Outubro	123,7	121,3		122,5
Novembro	13,7	26,3		20
Dezembro	53,7	196,2		124,95

Fonte: 8º Distrito de Meteorologia – INMET

O volume de água armazenado depende totalmente da área de captação. Quanto maior essa área mais água armazenaremos. A sugestão dada pelos estudantes foi aproveitar toda a água que cai no telhado. Para isso, poderíamos colocar calhas em volta de toda a casa. Para um melhor entendimento, colocamos um exemplo de projeto na figura abaixo:

Figura 4 – Exemplo de projeto de uma casa com sistema de cisterna.



Fonte: <http://sendosustentavel.blogspot.com.br/2011/09/como-construir-uma-cisterna-para.html>

Vale lembrar que se o sistema fosse como o exemplo acima, precisaríamos ainda de uma caixa d'água e de um motor para abastecer essa caixa. Ou seja, teríamos mais os gastos de energia elétrica. Os estudantes pensaram, também, em um projeto em que a cisterna estivesse acima da casa. Nesse caso, a cisterna já seria a caixa d'água. Mas, não sabemos se conseguiríamos captar toda a água da chuva. Segundo a estudante que levou a conta, na casa dela seria possível colocar a cisterna em cima da casa, pois o telhado já é de concreto. Sendo assim, é outra possibilidade para o projeto.

Perguntamos se na casa dela haveria a possibilidade de captar a água da chuva de todo o telhado, caso colocássemos a cisterna acima da casa. A resposta foi não, exceto, se a cisterna ocupasse toda a área do telhado. Entretanto, isso não seria viável, pois as chances de termos folhas ou sujeira seria muito maior e isso poderia ser prejudicial ao encanamento, por exemplo.

Como não tínhamos tempo para pensar em um projeto de cisterna nos preocupamos com o processo de captação e armazenamento, além da economia. Para nós, o local da cisterna era indiferente, mas não impedimos a discussão do tema.

A área do telhado da casa em questão tem aproximadamente 100 m^2 . Ou seja, no mês de julho teríamos armazenado $162,16 \text{ mm} \times 100 \text{ m}^2 = 16,22 \text{ m}^3$. Já no mês de novembro, teríamos armazenado apenas 2 m^3 . Ou seja, como estamos em um estado que chove bastante, sendo assim não há problemas constantes de falta de água, podemos escolher quando utilizar a água da cisterna. Portanto, o mês de novembro e o mês de maio são os meses em que mais precisaríamos da água da cisterna. Ou seja, não utilizaríamos a cisterna nos meses de abril e de outubro. Portanto, o sistema só poderia ser utilizado em 10 meses. Dessa forma, teríamos maior eficiência.

A seguir, acrescentamos ao quadro 8, a média da precipitação pluviométrica, a média em metros e o volume captado pelo sistema de calhas ao redor do telhado.

QUADRO 9 – Índices de precipitação pluviométrica dados em milímetros. Média de precipitação em milímetros e com conversão para metros. Volume captado pelo sistema dado em metro cúbico.

Mês	Índices de Precipitação Pluviométrica					
	2011	2012	2013	Média (mm)	Média (m)	Volume da Captado (m ³)
Janeiro	101,4	166	106,2	124,53	0,12	12,45
Fevereiro	102	139,5	112,7	118,07	0,12	11,81
Março	83,1	122,7	66,5	90,77	0,09	9,08
Abril	172,7	77,1	108,9	119,57	0,12	11,96
Mai	50,1	35,7	65,3	50,37	0,05	5,04
Junho	109,7	31,9	101,6	81,07	0,08	8,11
Julho	225,7	144,9	115,9	162,17	0,16	16,22
Agosto	182	93,5		137,75	0,14	13,78
Setembro	51,9	273,7		162,80	0,16	16,28
Outubro	123,7	121,3		122,50	0,12	12,25
Novembro	13,7	26,3		20,00	0,02	2,00
Dezembro	53,7	196,2		124,95	0,12	12,50

Fonte: 8º Distrito de Meteorologia – INMET, modificado pelo grupo 3 em conjunto com o autor.

Como não tínhamos muito tempo, não chegamos a projetar o sistema de cisterna. Mas, isso seria bastante interessante. Deixamos como possibilidade para um próximo projeto.

9. Em reais e em litros, quanto seria economizado se fossem adotadas as medidas de racionamento da questão anterior?

Essa questão não ficou muito clara, por isso, pedimos para que os estudantes explicassem melhor o que, de fato, queriam saber. Responderam que, é óbvia a economia ao instalar uma cisterna, contudo, gostariam de saber se existia viabilidade econômica, pois existe um custo inicial alto. Então, se gastassem o valor inicial, em quanto tempo se recuperaria o dinheiro? Qual o volume de água deixaríamos de utilizar?

Primeiramente, era preciso descobrir o valor economizado com a instalação da cisterna. Para isso, precisávamos definir os pontos de saída de água que colocaríamos a cisterna e, após, calcular o volume de água que utilizaríamos com a cisterna. Com esses dados em mãos, bastaria multiplicar o volume de água economizado pelo valor do metro cúbico.

6.5.1 PONTOS DE SAÍDA DE ÁGUA QUE PODEM SER ABASTECIDOS PELA CISTERNA

Segundo os estudantes, podemos aproveitar a cisterna para todas as saídas de água, exceto as que necessitam de água potável. Ou seja, podemos usar a água da cisterna para praticamente todas as saídas de água da casa. Como não seria possível utilizar esse sistema em todos os meses, a casa em questão deveria ter, obrigatoriamente, a opção de utilizar água potável em alguns pontos de saída.

Das atividades elencadas pelos estudantes, escovar os dentes é a única que preferem usar água potável. Entretanto, nesse item, podemos conseguir uma redução. Basta desligar a torneira enquanto não estamos utilizando a água. O consumo mensal dessa família é de 3 metros cúbicos, somente para escovar os dentes. Se a torneira ficasse desligada, quantos litros de água deixariam de ser desperdiçados? Os estudantes perceberam que essa água é, literalmente, jogada no lixo, não se aproveita nada dela.

Novamente, a organização dos dados foi através de planilhas. Abaixo, estão quadros 10 e 11 que resumem os cálculos efetuados.

Nesse quadro 10, colocamos os tempos diários, semanais e mensais das atividades elencadas pelos estudantes como sendo principais.

QUADRO 10 – Relação de tempos em que cada atividade mantém a saída de água ligada.

Atividade	Tempo total (diário)	Tempo total (semanal)	Tempo total (mensal)
Banhos	160	1120	4480
Lavagem de roupa	0	0	0
Lavagem de louça	20	140	560
Escovação de dentes	30	210	840
Descarga	0	0	0
Lavagem de carro	0	25	100
TOTAL	210	1495	5980

Fonte: Elaborado pelo grupo 3.

O quadro 11, abaixo, apresenta o tempo para encher um recipiente com capacidade de 1 litro, tomando o cuidado de ligar cada tomada de água com a mesma vazão utilizada normalmente. Assim, para medir o tempo do chuveiro, por exemplo, solicitamos que os estudantes primeiramente ligassem e regulassem o chuveiro e, após medissem.

Já o consumo em litros foi obtido através do seguinte cálculo:

$$\text{Consumo em litros mensal} = \frac{\text{Tempo total mensal} \times 60}{\text{Tempo para encher 1 litro}}$$

Por exemplo, para calcularmos o consumo em litros mensal para lavar louça, procedemos da seguinte maneira:

$$\text{Consumo em litros mensal} = \frac{560 \times 60}{33,17} = 1.012,96$$

Enquanto a representação percentual foi obtida pela divisão:

$$\% \text{ do consumo} = \frac{\text{Consumo em litros mensal}}{\text{Total do consumo em litros mensal}}$$

Seguindo o mesmo exemplo, para calcularmos o percentual do consumo da lavagem de louça efetuamos o seguinte cálculo:

$$\% \text{ do consumo} = \frac{1.012,96}{23.018,74} = 4 \%$$

QUADRO 11 – Informações que relacionam a cada atividade, o tempo para encher vasilhame com capacidade de 1 litro, o consumo mensal em litros e a representação percentual.

Atividade	Tempo para encher 1 litro	Consumo em litros (mensal)	% do consumo
Banhos	19,01	14.139,93	61%
Lavagem de roupa	0	1.620,00	7%
Lavagem de louça	33,17	1.012,96	4%
Escovação de dentes	17,71	2.845,85	12%
Descarga	0	3.000,00	13%
Lavagem de carro	15	400,00	2%
TOTAL	84,89	23.018,74	100%

Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor, após efetuar os cálculos.

Como a soma total do consumo ficou distante da média, utilizamos a coluna percentual do consumo para aproximar os valores da realidade. Assim, como para lavar o carro utilizamos um percentual de 2 % do consumo total, calculamos 2 % dos 14,2 metros cúbicos. Ou seja, dos 14,2 metros cúbicos 0,25 metros cúbicos seriam utilizados para a lavagem do carro.

Aproveitamos para medir o quanto os estudantes absorveram da prática de conversão de unidades. Queríamos saber os consumos calculados em centímetros cúbicos e em litros. Esperávamos que eles pensassem da seguinte forma:

$$0,25 \text{ m}^3 = 0,25 \cdot (100 \text{ cm})^3 = 0,25 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 250.000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ litro} \rightarrow 1000 \text{ cm}^3$$

$$x \text{ litros} \rightarrow 250.000 \text{ cm}^3$$

$$x = \frac{250.000}{1000} = 250 \text{ litros}$$

Este método está correto, entretanto os estudantes correm o risco de errar a primeira conversão, pois não estão acostumados a utilizar a substituição de unidades, preferindo a resolução usando “Regra de Três”. Não há problemas em usar a “Regra de Três”, desde que se perceba a não linearidade das unidades.

Para nossa surpresa, os estudantes responderam da seguinte forma:

$$0,25 \text{ m}^3 = 250 \text{ litros}$$

$$1 \text{ litro} \rightarrow 1000 \text{ cm}^3$$

$$250 \text{ litros} = 250.000 \text{ cm}^3$$

Ao responder dessa forma, evitaram o risco do erro, devido a não linearidade. Ficamos surpresos, porque a resposta foi dada de forma inversa. Pedimos que convertessem para cm^3 e litros, entretanto a ordem das respostas foi conversão para litros e cm^3 .

QUADRO 12 – Consumos e percentuais de consumo de acordo com a atividade.

Atividade	% do Consumo	Consumo Médio	Consumo Calculado
Banhos	61%	14,2	8,72
Lavagem de roupa	7%		1,00
Lavagem de louça	4%		0,62
Escovação de dentes	12%		1,76
Descarga	13%		1,85
Lavagem de carro	2%		0,25
TOTAL	100%		

Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor.

Como a escolha dos estudantes excluía escovar os dentes com água da cisterna, começamos retirando esse consumo. Sendo assim, utilizaríamos o seguinte volume oriundo da água da chuva:

$$14,2 - 1,76 = 12,44 \text{ m}^3$$

Logo, seria possível deixar de consumir mensalmente $12,44 \text{ m}^3$.

Como cada metro cúbico custa R\$ 3,61, então o valor economizado com a utilização da cisterna é dado por:

$$12,44 \times \text{R\$ } 3,61 = \text{R\$ } 44,92$$

Para facilitar os cálculos, arredondamos essa economia para R\$ 45,00 mensais. Com esse arredondamento teríamos um erro bastante baixo, conforme pode ser visto abaixo:

$$\varepsilon = \frac{45 - 44,92}{45} = \frac{0,08}{45} \sim 0,17 \%$$

Portanto, temos um custo inicial de R\$ 6.000,00 e um retorno mensal de R\$ 45,00. Precisamos descobrir em quanto tempo teremos o retorno financeiro.

Iniciamos montando uma planilha com os dados dos primeiros 12 meses, conforme quadro 13, abaixo:

QUADRO 13 – Evolução da economia mensal e retorno, caso se tenha valor inicial para investimento, ou, em caso contrário, dívida restante.

Mês	Valor fixo	Economia	Retorno/Dívida
1	R\$ 6.000,00	R\$ 45,00	-R\$ 5.955,00
2	R\$ 6.000,00	R\$ 90,00	-R\$ 5.910,00
3	R\$ 6.000,00	R\$ 135,00	-R\$ 5.865,00
4	R\$ 6.000,00	R\$ 180,00	-R\$ 5.820,00
5	R\$ 6.000,00	R\$ 225,00	-R\$ 5.775,00
6	R\$ 6.000,00	R\$ 270,00	-R\$ 5.730,00
7	R\$ 6.000,00	R\$ 315,00	-R\$ 5.685,00
8	R\$ 6.000,00	R\$ 360,00	-R\$ 5.640,00
9	R\$ 6.000,00	R\$ 405,00	-R\$ 5.595,00
10	R\$ 6.000,00	R\$ 450,00	-R\$ 5.550,00
11	R\$ 6.000,00	R\$ 495,00	-R\$ 5.505,00
12	R\$ 6.000,00	R\$ 540,00	-R\$ 5.460,00

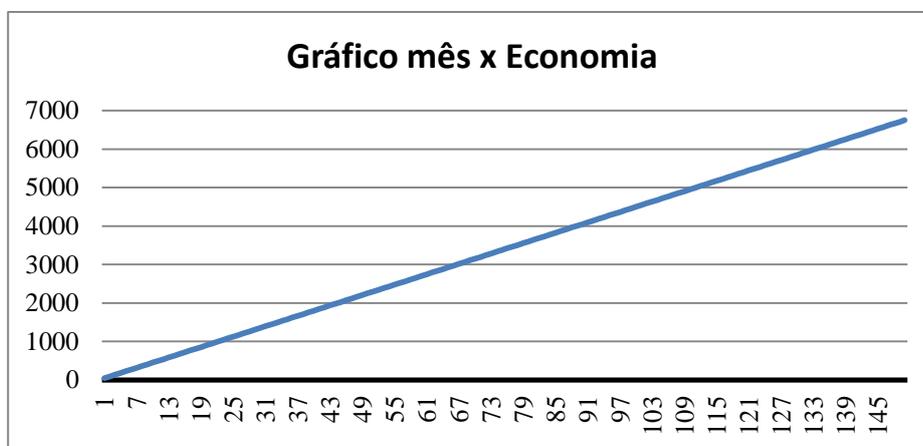
Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor.

Assim, vemos que passado 1 ano, teremos economizado R\$ 540,00. Contudo, iniciamos com uma dívida de R\$ 6.000,00. Ou seja, passado esse primeiro período, nossa dívida estaria em R\$ 5.460,00. Logicamente, que não estamos contabilizando os juros que poderiam incidir sobre o valor.

Não estudamos progressões nem funções nesse projeto, pelo menos não especificamente. É claro que alguns conceitos foram vistos, entretanto não foi nosso principal objeto de estudo. Apesar disso, é uma opção, iniciar o estudo de funções afins ou progressões, a partir desse projeto.

Como os estudantes já conheciam funções e sabiam que o gráfico de uma função de um polinômio de grau 1 é uma reta, não tiveram problemas ao verem os gráficos abaixo:

GRÁFICO 1 – Gráfico elaborado a partir do quadro 13.



Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor

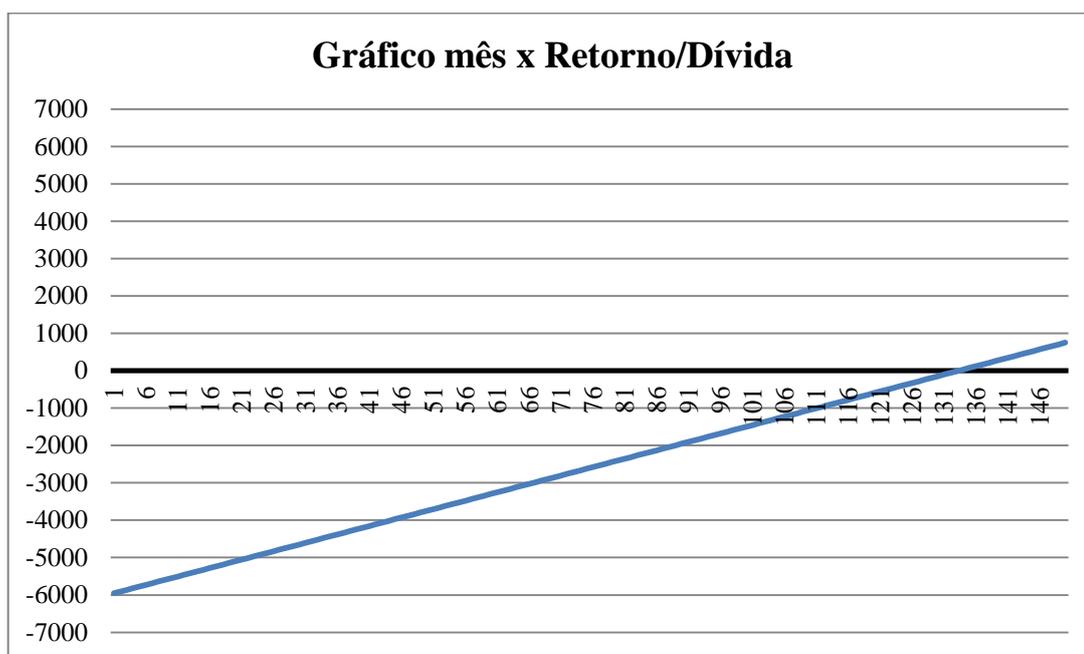
O gráfico 1, acima, apresenta como seria a evolução da economia. Mas, só seria aplicável se não fosse necessário nenhum investimento. Essa economia, na verdade, pode ser considerada como lucro, já que, não haveria a necessidade de gastar R\$ 45,00 mensalmente. Isso porque a função lucro é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Sendo que R representa as receitas e C representa os custos. Para aumentarmos nosso lucro, precisamos aumentar as receitas ou reduzir os custos. Por isso, ao economizarmos também estamos lucrando, pois esse dinheiro pode ser investido.

Já o gráfico 2, abaixo, apresenta o retorno do investimento em função do mês.

GRÁFICO 2 – Gráfico elaborado a partir do quadro 13.



Fonte: Elaborado pelo grupo 3, em conjunto com o autor

Pelo gráfico, os estudantes viram que é possível não somente recuperar o valor investido como passar a ter lucro. Entretanto, não conseguiram indicar exatamente em quanto tempo deixamos de ter prejuízo e passamos a ter lucro. Sabiam dizer apenas que era mais do que 131 meses e menos do que 136 meses.

Para aumentar a precisão foi necessária uma simples divisão:

$$\frac{6000}{45} = 133 + \frac{15}{45} = 133 + \frac{1}{3}$$

Isso significa que são necessários 133 meses e 10 dias para recuperarmos o dinheiro investido na cisterna. Ou seja, são mais de 11 anos para obtermos o retorno dos investimentos. Isso sem contar que ainda teríamos outros custos não contabilizados aqui, por exemplo, a energia gasta para o motor que vai abastecer a caixa d'água.

Podemos ver isso melhor no quadro 14, abaixo. No mês 133, a dívida está em R\$ 15,00. Já no mês 134, passamos a ter um retorno de R\$ 30,00. A partir de então, temos somente lucro.

QUADRO 14 – Variação da economia e da dívida em função do mês.

Mês	Valor fixo	Economia	Retorno/Dívida
1	R\$ 6.000,00	R\$ 45,00	-R\$ 5.955,00
2	R\$ 6.000,00	R\$ 90,00	-R\$ 5.910,00
3	R\$ 6.000,00	R\$ 135,00	-R\$ 5.865,00
4	R\$ 6.000,00	R\$ 180,00	-R\$ 5.820,00
5	R\$ 6.000,00	R\$ 225,00	-R\$ 5.775,00
6	R\$ 6.000,00	R\$ 270,00	-R\$ 5.730,00
7	R\$ 6.000,00	R\$ 315,00	-R\$ 5.685,00
8	R\$ 6.000,00	R\$ 360,00	-R\$ 5.640,00
9	R\$ 6.000,00	R\$ 405,00	-R\$ 5.595,00
10	R\$ 6.000,00	R\$ 450,00	-R\$ 5.550,00
11	R\$ 6.000,00	R\$ 495,00	-R\$ 5.505,00
12	R\$ 6.000,00	R\$ 540,00	-R\$ 5.460,00
.			
.			
.			
131	R\$ 6.000,00	R\$ 5.895,00	-R\$ 105,00
132	R\$ 6.000,00	R\$ 5.940,00	-R\$ 60,00
133	R\$ 6.000,00	R\$ 5.985,00	-R\$ 15,00
134	R\$ 6.000,00	R\$ 6.030,00	R\$ 30,00
135	R\$ 6.000,00	R\$ 6.075,00	R\$ 75,00
136	R\$ 6.000,00	R\$ 6.120,00	R\$ 120,00
137	R\$ 6.000,00	R\$ 6.165,00	R\$ 165,00
138	R\$ 6.000,00	R\$ 6.210,00	R\$ 210,00
139	R\$ 6.000,00	R\$ 6.255,00	R\$ 255,00
140	R\$ 6.000,00	R\$ 6.300,00	R\$ 300,00

Fonte: Elaborado pelo grupo 3, juntamente com o autor.

Assim, os estudantes puderam analisar a viabilidade financeira na construção de uma cisterna, percebendo que tal era inviável, pois, o retorno financeiro se daria em 11 anos. Entretanto, seria no mínimo considerável, caso a construção fosse para um local em que há falta de água constantemente. Ou seja, deduziram que se a análise feita fosse exclusivamente financeira, então a construção da cisterna não seria uma boa opção. Entretanto, se a preocupação for relacionada ao meio ambiente ou se houver constantes faltas de água, essa possibilidade passa a ser menos inviável.

6.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ENCONTROS

Estruturamos o projeto de modelagem de acordo com o caso 3 de Barbosa (2004), em que os estudantes são responsáveis pela condução deixando o professor como mediador. Apesar de termos selecionado o tema principal de estudo, que poderia classificar nosso projeto no caso 2 de Barbosa (2004), os estudantes selecionaram o que investigariam sobre o tema, por isso classificamos nosso projeto no caso 3.

Nesse projeto os estudantes perceberam a importância da utilização da água com mais consciência. E, viram que, agindo dessa forma, são capazes de obter retorno financeiro. Mas, o mais importante, foi que conseguiram refletir e pensar criticamente na situação da família em estudo. O excesso no consumo de água é capaz de abastecer uma família, que utiliza o recurso racionalmente, por pelo menos 2 meses.

Em todas as situações os estudantes recorreram a planilhas para organizar seus dados. Entretanto, foi necessário auxiliarmos nas construções dos gráficos. Dessa forma, conseguiram visualizar o consumo e os custos que a família analisada tinha. E mais, conseguiram verificar quais retornos se poderia ter, em caso de utilizar a água de forma consciente.

Além de todas as reflexões feitas, foi possível ampliarmos imagens sobre conceitos matemáticos. Os educandos recorreram a diversos conceitos para as resoluções. Dentre eles destacamos alguns:

- i) Conversão de unidades de volume

Os estudantes pensavam que poderiam converter unidades de volume considerando-as como unidades lineares. Dessa forma, quando tentaram converter

metro cúbico para centímetro cúbico o fizeram de maneira equivocada. A imagem que tinham acerca desse tema tinha desvios. Conseguimos intervir e mostrar que, analisando linearmente, os resultados obtidos são diferentes do esperado. Vale ressaltar que os próprios estudantes perceberam o erro cometido. Entretanto, precisaram de nossa ajuda para entender o erro.

ii) Aproximações e erro

Os estudantes sabiam trabalhar com aproximações e solicitaram que utilizássemos esse recurso para facilitar os cálculos. Aproveitamos e ampliamos o conhecimento deles nesse tema, ao acrescentar o erro cometido com a aproximação. Ao sabermos o erro cometido, podemos decidir se a aproximação feita é adequada. Por exemplo, ao compararmos os dados pesquisados dos consumos de água com os dados da conta de água, percebemos que o erro seria superior a 300%. Portanto, se fazia necessário procurarmos outra forma de medir o consumo de cada saída de água.

Ou seja, usamos as aproximações para facilitar os cálculos e o cálculo do erro para decidirmos se a aproximação feita era apropriada.

iii) Razão e proporção

Os estudantes conheciam o tema, entretanto sabiam resolver as questões de uma única forma e, sempre faziam todas as contas, ignorando os cálculos já efetuados. Não estava errado, ou seja, não havia conflito nas imagens, entretanto, isso mostra que não tinham total conhecimento do assunto. Por exemplo, quando calcularam a economia gerada pela redução de 10 minutos no tempo dos banhos, optaram por calcular o consumo total, depois calcularam o consumo com redução de 10 minutos, e, por fim, calcularam a diferença entre esses consumos. Sendo que, se tivessem total conhecimento acerca do tema, teriam calculado o consumo de 10 minutos, afinal, essa é a redução.

Ainda nesse tema, os estudantes aprenderam a ponderar os consumos, pensando no quanto cada pessoa pode reduzir a quantidade de água utilizada. Assim, os que consomem mais precisam economizar mais. Nas ponderações, os estudantes precisaram do professor. Esse conceito era novo para eles. Então, construímos esse conceito junto com eles. A principal orientação foi lembrá-los que cada pessoa é responsável por um percentual do consumo, e, portanto, poderíamos aplicar a redução conforme o consumo.

Logicamente, viram que, ao utilizar essa forma de redução, as filhas adultas precisariam de maior redução no consumo de água.

iv) Gráficos e tabelas

Os estudantes trabalharam com gráficos e tabelas. Estas ferramentas poderiam ser utilizadas para estudarmos funções afins ou progressões aritméticas. Como utilizamos meses como unidade de medida, para apresentar a evolução da dívida da cisterna não poderíamos trabalhar com domínios que compreendem todos os números reais para as funções. Mas, somente domínios contidos no conjunto dos números naturais. Sabemos disso e, mesmo assim, deixamos os gráficos, pois para nós essa diferença não era importante, já que não queríamos estudar ou avaliar, no momento, a continuidade de funções.

Enfim, diversos conceitos foram estudados e suas imagens ampliadas. Entretanto, não nos restringimos aos conceitos matemáticos e, tampouco, nos limitamos em dizer quais conceitos seriam abordados. Ou seja, estudamos os conceitos necessários para responder aos questionamentos feitos pelos estudantes. Para isso, foi necessário estarmos abertos para receber os questionamentos, sem medo de não saber como auxiliar os estudantes. Acreditamos que essa é a parte mais difícil para o professor: o medo de não saber responder. Mas, preferimos sentir esse medo, a conduzir aulas devidamente ensaiadas e planejadas, cheias de exercícios de fixação de certo conteúdo.

Mais importante do que os conceitos matemáticos estudados, foi a posição consciente dos estudantes. Eles perceberam que com simples reduções poderiam obter ganhos, não somente financeiros como também ambientais, pois, com a economia estariam preservando um recurso natural de extrema importância para nossa sobrevivência: a água.

Através dessas análises, descreveram o que pensam sobre sustentabilidade, que para o grupo 3, está conectado com a preservação de recursos naturais. Com isso, eles mostram o quanto estão preocupados com a nossa geração e com as futuras.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nesse trabalho, nossas concepções de como ampliar as imagens de conceito dos educandos em ambiente de modelagem matemática. Tomando como ponto de partida os saberes anteriores que os alunos trazem para a sala de aula, os associamos a imagem do conceito que, segundo Tall e Vinner (1981), são todos os processos e propriedades que envolvem determinado conceito. Vimos também que essas imagens não são estanques e podem ser incompletas. Entretanto, não precisamos nos preocupar, pois segundo Tall e Vinner (1981), com o tempo, dependendo do contato que o indivíduo tem com o conceito, a imagem ganhará nitidez, se aprimorando, conforme a definição formal.

Discutimos ambientes de aprendizagem e nos perguntamos em qual ambiente podemos aprimorar e construir conceitos. Podemos afirmar que não existe o melhor ambiente, mas escolhemos o de modelagem matemática. Essa escolha foi feita, porque pensamos que neste ambiente, que envolve o aluno de forma ativa, este, sozinho ou com a ajuda do professor, pode construir ou ampliar a imagens de seus conceitos.

Especificamente, nesse trabalho, apresentamos uma forma de construir o conceito de sustentabilidade em ambiente de modelagem matemática. Optamos por utilizar todo o conhecimento que os estudantes já tinham, acerca do tema que consideramos de extrema importância. Porém, o projeto só foi possível porque os estudantes aderiram ao tema. Por isso, a importância de escolhermos um tema amplo. O fato de nossos alunos serem adultos facilitou o andamento do projeto. Mesmo assim, acreditamos que o mesmo possa ser aplicado com alunos mais jovens, pois criamos oportunidades para que eles pudessem ampliar seus conhecimentos sobre o tema selecionado.

À luz da perspectiva de Barbosa (2004), definimos nossa posição em relação à Modelagem Matemática. E, nos utilizamos de Skovsmose (2000) e Barbosa (2001) para definirmos o ambiente de aprendizagem como um ambiente investigativo, denominado por Skovsmose (2000) de cenário para investigação. Ao ensino nesse ambiente, comparamos com a “educação libertadora” definida por Freire (2005). No que tange a construção do conceito, nos embasamos em D’Ambrósio (1999) ao nos referir à importância do conhecimento prévio do estudante.

Ainda, vimos que o ambiente de modelagem matemática pode ser voltado para a matemática. Nesse caso, primeiramente escolhemos qual o tópico de matemática queremos estudar. Após, verificamos quais as situações-problema podem nos auxiliar na abordagem do assunto. E, por fim, escolhemos entre os casos 1 e 2 do quadro 2, que está no capítulo 5, pois, somente nesses, o professor tem algum controle sobre a pesquisa. No caso 3, o professor pode auxiliar os alunos na formulação e resolução do problema e, assim, pode direcionar a pesquisa para o assunto que pretende estudar. Caso contrário, o aluno direciona a sua pesquisa e, dessa forma, não temos como saber qual tópico será estudado.

Não trabalhamos com modelagem no caso 1 ainda, mas foi possível, em um ambiente com modelagem, caso 2, construir o conceito de progressões geométricas, conforme Lima e Sant'Ana (2013). Nessa oportunidade, estávamos interessados em pesquisar a noção que os alunos tinham sobre o crescimento de uma PG e, a partir dessa, construir o conceito de progressão geométrica, utilizando planilhas eletrônicas.

Vimos que existe a possibilidade de trabalharmos com a construção do conceito em um ambiente investigativo. Partindo do conhecimento prévio do estudante, nos focamos em ampliar as imagens dos estudantes sobre o tema.

Dependendo do tema escolhido, o professor pode ter noções de como os alunos irão conduzir sua pesquisa e quais conceitos serão importantes nessa investigação. Assim, será possível também avaliar como os alunos construíram suas definições e verificar o quão perto essas se encontram da definição formal. No caso específico desse trabalho, iniciamos com o tema SUSTENTABILIDADE e, os estudantes priorizaram o consumo consciente de água. Eles perceberam que com reduções simples, é possível economizar a quantidade equivalente a 3 meses de consumo. Também foi possível verificar o valor economizado com as medidas de racionamento de água.

Nossos objetivos foram alcançados, pois foi possível verificar como aprimorar e construir determinados conceitos. A saber: sustentabilidade, conversão de unidades de volume, razão e proporção, aproximações e erros, gráficos e tabelas, a partir dos saberes anteriores dos educandos. O único conceito que pensamos previamente foi a sustentabilidade, já os demais surgiram de acordo com as escolhas dos estudantes. Para a construção ou aprimoramento deles recorreremos às imagens que os estudantes já tinham acerca dos conceitos.

Outro objetivo que não foi pré-determinado foi a consciência que os estudantes adquiriram em relação ao consumo de água. Esse objetivo só foi pensado porque os estudantes escolheram estudar sobre o consumo da água. Eles puderam analisar e avaliar o consumo de água da casa de uma das participantes do projeto. Diante dessa análise, verificaram o quanto podem economizar e quanto retorno financeiro podem obter.

Por fim, atingimos também o quarto objetivo que se referia ao material didático, ao planejamento, implementação e validação de sequência didática, que disponibilizamos no APÊNDICE A. Esse material pode ser utilizado e adaptado conforme necessidade de cada professor.

É impressionante verificar que em um ambiente de Pré-Vestibular, onde os estudantes estão muito focados por um tipo de prova aceitam o convite para trabalhar com modelagem. Isso só foi possível por dois motivos: os estudantes que aderiram ao projeto estavam motivados com a possibilidade do tema ser utilizado no ENEM ou no Vestibular, além de estarem com o sábado livre. O segundo foi o espaço que o PEAC, como um curso popular que preza pela educação e não somente pela transmissão de conteúdo, necessária em nossa prática diária, abriu para nós.

As limitações que tivemos estão diretamente relacionadas com o tempo que os estudantes dispõem. A maioria trabalha aos sábados, por isso não conseguimos um quórum maior. Não ficamos totalmente satisfeitos com os resultados, uma vez que acreditamos no potencial desse trabalho e gostaríamos de ter atingido um número maior de estudantes. Por isso, esperamos que este trabalho também possa servir de inspiração para nós e para outros professores.

Finalizamos nossas considerações afirmando que esse trabalho nos provocou a não ficar inertes, a pensar sempre nas aprendizagens que podemos proporcionar aos educandos e a nós. Além disso, nos encorajou a novos projetos, envolvendo professores de outras áreas. Por exemplo, seria muito interessante, termos também visões de professores de ciências, geografia e o outros, sobre o tema escolhido. Poderíamos elaborar aulas em conjunto, com foco na interdisciplinaridade que os projetos nos permitem. E, como as universidades estão cada vez mais aderindo ao ENEM, nosso trabalho fica cada vez mais potencializado no ambiente de pré-vestibular popular. Além disso, esse trabalho nos desenvolveu como professor e nos fez acreditar ainda mais que

o caminho para uma educação de qualidade está atrelado à preocupação que temos com as aprendizagens.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, Ivonete Sanches de. **O uso do vídeo: um recurso para promover o envolvimento na aprendizagem.** Porto Alegre: UFRGS, 2012. Disponível em <>. Acesso em junho de 2013.

BARBOSA, Jonei Cerqueira, **Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico.** In REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira, **Modelagem Matemática: o que é? Por que? Como?** Veritati, n. 4, p. 73 a 80, 2004

BARROS, Wellington Pacheco. **Direito Ambiental Sistematizado.** Porto Alegre, Livraria do Advogado, 2008.

BRANCO, Samuel Murgel. **Água: origem, uso e preservação.** 2 ed. São Paulo: Moderna, 2003.

BASSANEZI, Rodney Carlos, **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBEGUT, Maria Sallet, **Modelagem Matemática no Ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BONDÍA, Jorge Larossa. **Notas sobre a experiência e o saber da experiência.** In: I SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2001. Anais. Campinas: FUMEC, 2001.

BORGES, José Humberto Martins, **Projeto Educacional Alternativa Cidadã – PEAC: reflexões sobre uma experiência de ensino.** Porto Alegre: UFRGS, 2010. Disponível em <<http://hdl.handle.net/10183/25999>>. Acesso em junho de 2011.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan, **Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático,** 1999, disponível em <http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm>, acesso em 13 de junho de 2011.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan, **Da realidade à ação: Reflexões sobre Educação e Matemática**, São Paulo: Summus Editorial Ltda, 1989.

DELEUZE, Gilles. **Proust e os signos**. 2.ed. trad. Antonio Piquet e Roberto Machado. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

DIDONET, Marcos. **Águas: goles de pura informação**. Livro 3. Rio de Janeiro: Cima, 1997.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 31. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo, **Medo e Ousadia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, Paulo, **Pedagogia do Oprimido**. 46. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FREIRE, Paulo, **Pedagogia da Esperança: um reencontro com a Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

FREIRE, Paulo, **Educação e Mudança**. 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GADOTTI, Moacir. **A Carta da Terra na Educação**. São Paulo, Editora e Livraria Instituto Paulo Freire, 2010.

GIRALDO, Victor, **Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada**. Rio de Janeiro, 2004.

JACOBI, Pedro. **Educação Ambiental Cidadania e Sustentabilidade**. Cadernos de Pesquisa, n. 118, p. 119-205, março/2003.

JACOBI, Pedro. **Meio Ambiente e Sustentabilidade**. In Municípios do Século XXI: cenários e perspectivas, p.175 – 184,1999.

LIMA, Márcio Albano & SANT'ANA, Marilaine de Fraga, **Aprendendo progressões geométricas com planilhas eletrônicas em ambiente com modelagem matemática**. In CONGRESSO NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 2013. Anais. Santa Maria: UNIFRA, 2013.

MACIEL, Renata & MOUSQUER, João Victor Magalhães. **Meio Ambiente e Sustentabilidade**. XXI Seminário de Iniciação Científica, Unijuí. RS, 2013.

MOREIRA, Antonio Flávio Barbosa, **Currículo: conhecimento e cultura**. In **Currículo: conhecimento e cultura**. Rio de Janeiro: Salto para o Futuro, 2009. Disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012193.pdf> , com acesso em setembro de 2014.

SANT'ANA, Alvinho Alves & SANT'ANA Marilaine de Fraga. **Uma experiência com a elaboração de perguntas em modelagem matemática**. In VI CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Londrina. Anais...Paraná: CNMEM, 2009.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação** – Bolema, nº 14, pp. 66 a 91, 2000.

SKOVSMOSE, Ole & VALERO, Paola, **Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia**. Atweh, B., Forgasz, H. & Nebres, B. (Eds) (2001). Sociocultural Research in Mathematics Education. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates. Tradução de João Miguel Matos.

TALL, David & VINNER, Shlomo, **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity** In *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169, 1981.

VEIGA-NETO, Alfredo. **Currículo e exclusão social**. In MOREIRA, Antonio Flávio Barbosa. (Org.). Ênfase e Omissões no currículo. Campinas: Papirus, 2001. P.229-240.

YOUNG, Michael, **O futuro da educação em uma sociedade do conhecimento: o argumento radical em defesa de um currículo centrado em disciplinas**, Rio de Janeiro: Revista Brasileira de Educação, volume 16, número 48, 2011.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Na esperança de que nosso trabalho possa colaborar com outros educadores, seja na ideia de atividades, seja na postura, apresentamos aqui uma sequência didática. Entretanto, é muito importante lembrar que, segundo Skovsmose (2000), o projeto que deu certo para um grupo de estudantes pode não dar certo com outro. E, por isso, sugerimos aos educadores, interessados nesse trabalho, que o adaptem se assim acharem necessário.

Nosso trabalho iniciou dentro de uma aula comum. Mas, foi desenvolvido em horário extraclasse com estudantes interessados em trabalhar no projeto de Modelagem. Segundo Barbosa (2001), existe três formas de trabalhar com Modelagem, conforme pode ser visto no quadro 2 do capítulo 5. Sendo que, em duas delas, o professor tem certa autonomia, em contrapartida a isso, o educando tem menos autonomia. Optamos por trabalhar, justamente, no caso em que o professor tem menos autonomia. Ou seja, permitimos que os estudantes ficassem livres e autônomos.

Assim, a sequência proposta não foi totalmente escrita e planejada antes das aulas. Isso só foi possível nas duas primeiras. Nas demais, não conseguimos planejar toda a aula, pois não sabíamos como os estudantes optariam por guiar o trabalho. Sendo assim, a partir da aula 2, a sequência proposta é um resultado pós-aula. Tentamos organizar de forma que o professor interessado possa aproveitar da melhor forma possível.

A seguir apresentamos como se deram as cinco aulas. Entretanto, apresentamos somente as atividades propostas pelo grupo 3, pois somente este foi até o fim das atividades. Os demais, participaram até a aula 1.

AULA 0 – duração: 1 hora

Em nosso trabalho, a primeira aula não fez parte do projeto, mas foi dentro de uma aula comum. Utilizamos essa para verificar o que os estudantes pensavam acerca do tema proposto: SUSTENTABILIDADE.

ATIVIDADE 1

O que lhes vem à mente quando pensam no tema: SUSTENTABILIDADE?

Aqui, o professor pode escolher qualquer outro tema. É importante, que o tema escolhido seja amplo o suficiente para alcançar todos os educandos. Pois, conforme Freire (2005), a visão de mundo que deve nos importar é a do educando. O tema escolhido pode ser menos amplo, desde que os educando tenham aderência a ele.

Não pedimos uma quantidade mínima, mas o professor, se assim desejar, pode fazê-lo. Como, em média, nossos educandos colocaram 5 respostas iniciais, consideraremos essa quantidade.

O que lhes vem à mente quando pensam no tema: SUSTENTABILIDADE?

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

ATIVIDADE 2

Essa atividade tem o objetivo de ampliar o entendimento dos educandos acerca do tema proposto. Em nosso trabalho, transmitimos 2 vídeos sobre sustentabilidade:

Vídeo 1: <http://www.youtube.com/watch?v=dX-tu2ODL5g>, acesso em março de 2013.

Vídeo 2: <http://www.youtube.com/watch?v=SiZi6iffOGc>, com acesso em março de 2013.

Novamente questionamos:

O que lhes vem à mente quando pensam no tema: SUSTENTABILIDADE?

1. _____
2. _____
3. _____

4. _____
5. _____

Espera-se que todos ampliem seus conhecimentos acerca do tema. Entretanto, aqueles que já conhecem muito sobre o tema, não ampliarão tanto quanto os que conhecem pouco. Assim, na atividade 2, poderão escrever menos.

ATIVIDADE 3

Pesquise sobre o tema e apresente em poucas palavras o que é SUSTENTABILIDADE para você?

AULA 1 – duração: 4 horas

Nessa aula, o professor pode pedir para os estudantes se organizarem de acordo com suas escolhas. Ou, pode montar os grupos. Nós optamos por auxiliar os estudantes na formação dos grupos.

ATIVIDADE 4 – FORMAÇÃO DOS GRUPOS

Leia em voz alta o que escreveu sobre a pesquisa feita na aula anterior.

O professor pode escrever no quadro o que os educandos estão lendo. Após escrever o que todos leram, organizam-se os grupos. A organização pode ser feita da seguinte forma:

1. De acordo com as leituras. Assim, se mais de um estudante pensa que SUSTENTABILIDADE é preservação de recursos naturais, por exemplo, automaticamente eles formam um grupo.
2. De acordo com os itens escritos no quadro, o estudante escolhe em que grupo quer trabalhar. Ou seja, ele pode, também, se identificar com a definição dada por um colega.

Em nosso trabalho, os estudantes indicaram as seguintes definições:

1. Consumo consciente de energia elétrica e de água potável.
2. Reutilização de fontes renováveis: biomassa, energia solar, água da chuva.
3. Utilização de energia menos poluente.
4. Preservação dos recursos naturais, pensando em atender não somente a geração atual, mas também as futuras.
5. Desmatamento e reutilização do solo desmatado.
6. Reciclagem.
7. Consciência social.
8. Distribuição de rendas.

Formamos três grupos:

1. Consumo consciente de energia elétrica e de água potável.
2. Utilização de energia menos poluente.
3. Preservação dos recursos naturais, pensando em atender não somente a geração atual, mas também as futuras.

ATIVIDADE 4 – CURIOSIDADES SOBRE O TEMA

Faça 10 perguntas, quaisquer, iniciais sobre o tema.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

7. _____
8. _____
9. _____
10. _____

Antes de pesquisar, responda as questões elaboradas. É importante que os estudantes não conheçam essa parte da atividade antes de elaborarem as perguntas. Senão, corremos o risco de aparecer somente questões que saibam a resposta.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____
9. _____
10. _____

ATIVIDADE 5

Traga para a próxima aula fontes de pesquisa. Por exemplo, o grupo 1 poderia trazer a conta de luz de um dos integrantes e dados de consumo de cada eletrodoméstico.

AULA 2 – duração: 4 horas

O grupo 3 trouxe dados do consumo médio das saídas de água que consideraram importantes em uma casa. Além disso, escolheram uma das contas de água para ser analisada.

Histórico de Consumos em Metros Cúbicos (m ³)					
Mês/Ano	04/2013	03/2013	02/2013	01/2013	12/2012
Consumo	13	13	13	21	11

Dados do Consumo do Mês				
Hidrometro	Leitura Anterior	Leitura Atual	Consumo (m ³)	Dias de Consumo
A10N153372	772	779	14	30

Fonte: Conta de água apresentada por uma das estudantes participantes do projeto.

ATIVIDADE	CONSUMO
Banho	135 litros por banho
Lavagem de louça	117 litros por lavagem
Descarga do banheiro	17 litros por descarga
Lavagem de roupa	135 litros por lavagem
Escovação de dentes	13,5 litros por vez
Lavagem de carro	320 litros por lavagem

Fonte: Pesquisa realizada pelos estudantes.

Nessa aula, foram respondidas as duas primeiras questões propostas pelo grupo 3, utilizando os dados trazidos por eles.

ATIVIDADE 6

10. Quantos litros de água uma pessoa consome por mês?

Os estudantes optaram por calcular a média e mediana do consumo dos cinco últimos meses. A partir disso, como na família, a quem a conta de água pertencia, havia 5 pessoas, dividiram o resultado por 5. Para responder essa questão, não levaram em consideração que criança pode consumir menos do que um adulto.

Avaliando o consumo pela média

$$Média = \frac{13+13+13+21+11}{5} = \frac{71}{5} = 14,2 \text{ m}^3.$$

$$Consumo \text{ médio} = \frac{14,2}{5} = 2,84 \text{ m}^3.$$

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros} \rightarrow 2,84 \text{ m}^3 = 2,84 (100 \text{ cm})^3 = 2,84 \cdot 10^6 \text{ cm}^3.$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro} \rightarrow 2,84 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 2,84 \cdot 10^3 \text{ litros} = 2840 \text{ litros.}$$

Portanto, o consumo médio que uma pessoa dessa família consome, mensalmente, foi de 2840 litros.

Avaliando o consumo pela mediana

$$\text{Mediana } (11,13,13,13,21) = 13 \text{ m}^3.$$

$$\text{Consumo mediano} = \frac{13}{5} = 2,6 \text{ m}^3.$$

$$1 \text{ metro} = 100 \text{ centímetros} \rightarrow 2,6 \text{ m}^3 = 2,6 (100 \text{ cm})^3 = 2,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^3.$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro} \rightarrow 2,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ litros} = 2600 \text{ litros.}$$

Portanto, o consumo mediano que uma pessoa dessa família consome, mensalmente, foi de 2600 litros.

ATIVIDADE 7

11. Qual a quantidade, em litros, seria ideal para cada atividade que necessita a utilização da água?

Para responder essa questão, um novo questionamento foi necessário:

a) Quantas vezes por dia cada pessoa da casa realiza cada atividade?

Os estudantes montaram o seguinte quadro:

Atividade	Consumo por atividade	Quantidade diária por pessoa	Quantidade mensal	Consumo mensal em litros
Banho	135 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 135 = 40500$
Lavagem de louça	117 litros		$2 \times 30 = 60$	$60 \times 117 = 7020$
Descarga do banheiro	17 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 17 = 5100$
Lavagem de roupa	135 litros		12	$12 \times 135 = 1620$
Escovação de dentes	13,5 litros	2	$2 \times 5 \times 30 = 300$	$300 \times 13,5 = 4050$
Lavagem de carro	320 litros		4	$4 \times 320 = 1280$

Fonte: Pesquisa e cálculos realizados pelos estudantes.

ATIVIDADE 8**a) Compare os dados pesquisados com a conta de água:**

Soma do consumo de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes: $40500 + 7020 + 5100 + 1620 + 4050 + 1280 = 59570$ litros.

Média do consumo da família: 14200 litros.

Diferença entre os dados calculados e o consumo: $59700 - 14200 = 45370$.

b) Cálculo do erro percentual:

$$\varepsilon = \left(\frac{45370}{14200} \right) \cdot 100 \% = 319,5\%$$

c) Essa diferença é aceitável? Por quê?

ATIVIDADE 9**Existe outro método de medição do consumo de água da família?**

Os estudantes não conseguiram pensar em outro método de medição do consumo de água. Por isso, orientamos que medissem, e trouxessem os dados na próxima aula, da seguinte forma:

ATIVIDADE 10

1. Ligue a torneira com a mesma vasão utilizada para lavar a louça e meça o tempo para completar um vasilhame de 1 litro.
2. Faça o mesmo para cada uma das saídas de água em que o consumo depende do tempo.
3. Quanto tempo cada pessoa mantém a saída de água aberta durante a atividade?

AULA 3 – duração: 4 horas

Para responder as questão 2, da aula anterior, os estudantes apresentaram o quadro abaixo:

Tempo para encher 1 litro de água, conforme atividade.

ATIVIDADE	Tempo
Banho	19,01
Lavagem de louça	33,17
Descarga do banheiro	-
Lavagem de roupa	-
Escovação de dentes	17,71
Lavagem de carro	15,50

Fonte: Elaborado pelo grupo 3.

Para a questão 3, apresentaram o quadro abaixo:

Membro da família	Banho 1	Banho 2	Lavagem de louça	Escovação de dentes 1	Escovação de dentes 2	Lavagem de carro
Pai	5 min.	5 min.	-	2 min.	2 min.	
Mãe	5 min.	5 min.	-	2 min.	2 min.	
Filha adulta	30 min.	30 min.	-	5 min.	5 min.	
Filha adulta	30 min.	30 min.	-	5 min.	5 min.	
Criança	20 min.	-	-	1 min.	1 min.	
Família	90 min.	70 min.	20 min.	15 min.	15 min.	25 min.

ATIVIDADE 11

Como os estudantes queriam trabalhar com números inteiros, fizemos aproximações e calculamos os erros:

1. Determine o inteiro mais próximo do tempo medido e calcule o erro cometido:

ATIVIDADE	Tempo medido	Tempo aproximado	Erro	Erro %
Banho	19,01	19	$19,01 - 19 = 0,1$	$0,1/19,01 \sim$ 0,53 %
Lavagem de louça	33,17	33	$33,17 - 33 = 0,17$	$0,17/33,17 \sim$ 0,51 %
Descarga do banheiro	-	-	-	-
Lavagem de roupa	-	-	-	-
Escovação de dentes	17,71	18	$18 - 17,71 = 0,29$	$0,29/17,71 \sim$ 1,64 %
Lavagem de carro	15,50	15	$15,5 - 15 = 0,5$	$0,5/15,5 \sim$ 3,22 %

ATIVIDADE 12

1. Determine o consumo de água de cada uma das atividades:

ATIVIDADE	Tempo (T) (para encher 1 litro)	Tempo de utilização (TU) (diário)	Consumo (mensal)
Banho	20	160 minutos	14400 litros
Lavagem de louça	33	20 minutos	1091 litros
Descarga do banheiro	-	-	3000 litros
Lavagem de roupa	-	-	1620 litros
Escovação de dentes	18	30 minutos	3000 litros
Lavagem de carro	15	25 minutos	400 litros
TOTAL			23511 litros

Para o consumo mensal da lavagem de roupa e da descarga utilizamos o seguinte cálculo:

$$\text{Consumo} = (\text{capacidade do recipiente}) \cdot (\text{quantidade de utilização})$$

Já para os demais consumos, que dependem do tempo, foi realizado o seguinte cálculo:

$$\text{Consumo} = \left(\frac{60 \cdot TU}{T} \right) \cdot 30$$

ATIVIDADE 13

1. Calcule o erro do consumo total:

Os estudantes calcularam o erro referente à média e referente à mediana:

$$\varepsilon(\text{média}) = \left(\frac{23511 - 14200}{14200} \right) \cdot 100 \% = 65,57 \%$$

$$\varepsilon(\text{mediana}) = \left(\frac{23511 - 21000}{21000} \right) \cdot 100 \% = 11,96 \%$$

2. Avalie se o erro encontrado é aceitável. Justifique.

ATIVIDADE 14

3. Como é medido o consumo de água pelo órgão responsável pela mesma?

Os estudantes analisaram os dados da conta para responder essa questão. E, concluíram que basta subtrair os dados da Leitura Anterior do dados da Leitura Atual.

Dados do Consumo do Mês				
Identificação	Leitura Anterior	Leitura Atual	Consumo (m ³)	Dias de Consumo
A10N153372	772	779	14	30

ATIVIDADE 15**4. Qual o consumo médio de água, por mês, de uma família?**

Essa pergunta já foi respondida na primeira questão. Ou seja, a média é 14,2 metros cúbicos.

ATIVIDADE 16**5. Quanto, em litros, seria economizado, em 1 ano, se uma família de 5 pessoas diminuísse em 10 minutos o tempo médio gasto em um banho?**

Essa questão foi subdividida em três:

i) Economia de 10 minutos no tempo total, com igual divisão no tempo.

Se arredondarmos para 20 segundos o tempo para encher 1 litro:

$$20 \text{ segundos} - 1 \text{ litro} \rightarrow 10 \text{ minutos} = 10.60 \text{ segundos}$$

$$20 \text{ segundos} - 1 \text{ litro} \rightarrow 600 \text{ segundos} - 30 \text{ litros}$$

Ou seja, em 10 minutos deixamos de utilizar 30 litros, diariamente. Conseqüentemente, deixamos de utilizar 30 litros x 30 dias x 12 meses = 10800 litros, anualmente.

ii) Economia de 10 minutos no tempo total, porém com divisão ponderada.

A redução será igual ao item anterior, ou seja, 10800 litros. Entretanto, precisamos descobrir quanto tempo cada um deve reduzir.

Pai e mãe utilizam o chuveiro, diariamente, por 10 minutos cada um. Ou seja, representam $20/160 = 12,5 \%$ do consumo de água do chuveiro. Então, precisarão reduzir 12,5 % dos 10 minutos, sendo 6,25 % para cada um. E, portanto, cada um precisa reduzir 37,5 segundos de seu banho.

As filhas adultas utilizam o chuveiro, diariamente, por 60 minutos cada uma. Ou seja, representam $120/160 = 75 \%$ do consumo de água do chuveiro. Então, precisarão

reduzir 75 % dos 10 minutos, sendo 37,5 % para cada uma. Sendo assim, cada uma, precisa reduzir 3 minutos e 45 segundos de seu banho.

A filha criança utiliza o chuveiro, diariamente, por 20 minutos. Ou seja, representa $20/160 = 12,5\%$ do consumo de água do chuveiro. Então, precisará reduzir 12,5 % dos 10 minutos. Ou seja, precisa reduzir 1 minuto e 15 segundos de seu banho.

iii) Economia de 10 minutos em cada banho das pessoas que ficam 30 minutos.

Se cada uma das filhas adultas reduzissem 10 minutos em cada banho, teríamos uma economia de 20 minutos por dia de cada uma delas, portanto, a família deixaria de usar o chuveiro, diariamente, por 40 minutos. Ou seja, teremos uma redução quatro vezes maior do que a economia dos itens anteriores. Portanto, a família reduzirá $4 \times 10800 = 43200$ litros.

ATIVIDADE 17 – MONETIZANDO A ECONOMIA

Novas questões surgiram para que pudéssemos monetizar a economia. Destacamos abaixo a parte da conta de água referente aos custos:

Composição dos Serviços						
CATEGORIA	EDU.ÁGUA	EDU.ESGOTO	CONSUMO	SERVIÇO BÁSICO	VALOR ÁGUA	VALOR ESGOTO
RB	1	0	14	R\$ 17,07	R\$ 50,54	R\$ 0,00

a) Como se efetua a cobrança da concessionária?

Como pode ser visto, existem valores fixos, referente ao serviço da concessionaria e custos que variam de acordo com o consumo.

b) Qual o valor do metro cúbico?

O custo da água no mês foi de R\$ 50,54, sendo que foram consumidos 14 metros cúbicos. Portanto, o custo do metro cúbico é dado por: $R\$ 50,54/14 = R\$ 3,61$.

c) Existem valores fixos cobrados?

Vemos que o valor fixo cobrado, mensalmente, é de R\$ 17,07.

d) Qual o custo total de cada conta?

No referido mês, o custo total foi de R\$ 17,07 + R\$ 50,54 = R\$ 67,61.

Abaixo, colocamos um quadro, com o resumo dos valores pagos em 7 meses de consumo:

Mês	Volume consumido	Custo fixo	Custo m ³	Custo variável	Total
Abr/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Mai/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Jun/13	13	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 46,93	R\$ 64,00
Jul/13	21	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 75,81	R\$ 92,88
Ago/13	11	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 39,71	R\$ 56,78
Set/13	12	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 43,32	R\$ 60,39
Out/13	14	R\$ 17,07	R\$ 3,61	R\$ 50,54	R\$ 67,61

i) Economia de 10 minutos no tempo total, com igual divisão no tempo.

Como vimos, reduzindo 10 minutos no tempo total de banho, consome-se 10800 litros a menos, que equivalem a 10,8 m³. E, portanto, R\$ 38,99 são economizados anualmente.

ii) Economia de 10 minutos no banho das pessoas que ficam 30 minutos.

Com essa economia, reduzimos 43200 litros. Sendo assim, economiza-se R\$ 155,95 anualmente.

iii) Economia Radical, ou seja, todos reduzem seus banhos para 5 minutos.

Teríamos 9 banhos de 5 minutos cada um, ou seja, 45 minutos de banho. Como o tempo total em banhos é de 160 minutos, temos uma redução de $160 - 45 = 115$ minutos por dia. E, como a cada minuto o chuveiro consome 3 litros de água, teremos uma economia de $3 \times 115 = 345$ litros, diariamente. Portanto, são 10350 litros por mês,

que equivalem a 10,35 metros cúbicos. Se paga-se por metro cúbico o valor de R\$ 3,61, então deixaremos de pagar, anualmente, $R\$ 3,61 \times 10,35 \times 12 = R\$ 448,36$.

AULA 04

ATIVIDADE 18

6. Quanto seria gasto para ter uma cisterna?

O pai de uma das estudantes trabalha com hidráulica e informou que o valor seria de R\$ 6.000,00.

7. Como diminuir o consumo de água nos meses de pico (verão)?

Nos meses do verão é mais difícil reduzir o consumo no item banhos. Pois dependendo do calor, não tem como evitar. É necessário tomar vários banhos por dia, às vezes, de mangueira, na rua. Nesses meses, a redução pode ser no tempo que se mantém a torneira aberta para escovar os dentes. Aliás, essa medida pode ser tomada durante todo o ano. Outro lugar que os estudantes perceberam a possibilidade de economia é na lavagem do carro, podem reduzir para duas lavagens mensais.

ATIVIDADE 19

8. O RS é um estado que chove muito. Quantos litros de água ao mês seriam armazenados com uma cisterna?

Como não dispúnhamos de muito tempo, deixamos de projetar o sistema de cisterna. Mas, isso seria bastante interessante. Fica a dica para o leitor e também para um próximo projeto. Mesmo assim, respondemos essa questão e a próxima.

A quantidade de água a ser armazenada na cisterna depende do mês. Pois, em cada mês chove uma quantidade de água diferente.

No quadro abaixo vemos as precipitações mensais nos últimos 3 anos.

Mês	Índices de Precipitação Pluviométrica			
	2011	2012	2013	Média
Janeiro	101,4	166	106,2	124,53
Fevereiro	102	139,5	112,7	118,07
Março	83,1	122,7	66,5	90,767
Abril	172,7	77,1	108,9	119,57
Mai	50,1	35,7	65,3	50,367
Junho	109,7	31,9	101,6	81,067
Julho	225,7	144,9	115,9	162,17
Agosto	182	93,5		137,75
Setembro	51,9	273,7		162,8
Outubro	123,7	121,3		122,5
Novembro	13,7	26,3		20
Dezembro	53,7	196,2		124,95

O volume de água armazenado depende totalmente da área de captação. Quanto maior essa área mais água armazenaremos. A sugestão dada pelos estudantes foi aproveitar toda a água que cai no telhado. Para isso, poderíamos colocar calhas em volta de toda a casa.

A área do telhado da casa em questão tem aproximadamente 100 m^2 . Ou seja, no mês de julho teríamos armazenado $162,16 \text{ mm} \times 100 \text{ m}^2 = 16,22 \text{ m}^3$. Já no mês de novembro, teríamos armazenado apenas 2 m^3 . Ou seja, como estamos em um estado que chove bastante, em que não há problemas constantes de falta de água, podemos escolher quando utilizar a água da cisterna. Portanto, o mês de novembro e o mês de maio são os meses em que mais precisaríamos da água da cisterna. Ou seja, não utilizaríamos a cisterna nos meses de abril e de outubro. Portanto, o sistema só poderia ser utilizado em 10 meses. Dessa forma, teríamos maior eficiência.

ATIVIDADE 20

9. Em reais e em litros, quanto seria economizado se fossem adotadas as medidas de racionamento da questão anterior?

A pergunta não ficou muito clara. A ideia dos estudantes era descobrir sobre a viabilidade econômica da instalação da cisterna. E, para isso, primeiramente, era preciso descobrir o valor economizado com a instalação da cisterna. Sendo assim, precisávamos definir os pontos de saída de água que colocaríamos a cisterna.

Das atividades elencadas pelos estudantes, escovar os dentes é a única que preferem usar água potável. Entretanto, nesse item, podemos conseguir uma redução. Basta desligar a torneira enquanto não estamos utilizando a água. O consumo mensal dessa família é de 3 metros cúbicos, somente para escovar os dentes. Se a torneira ficasse desligada, quantos litros de água deixariam de ser desperdiçados? Os estudantes perceberam que essa água é, literalmente, jogada no lixo, não se aproveita nada dela.

ATIVIDADE 21

- a) **Verifique o consumo mensal em litros e determine o percentual do consumo:**

Atividade	Tempo para encher 1 litro	Consumo em litros (mensal)	% do consumo
Banhos	19,01	14.139,93	61%
Lavagem de roupa	0	1.620,00	7%
Lavagem de louça	33,17	1.012,96	4%
Escovação de dentes	17,71	2.845,85	12%
Descarga	0	3.000,00	13%
Lavagem de carro	15	400,00	2%
TOTAL	84,89	23.018,74	100%

- b) **Na questão anterior, verificamos que o consumo seria superior a 23 m³. Vamos determinar o valor do consumo, usando as proporções da questão anterior e a média de consumo.**

A média do consumo real foi de 14,2 m³. Como os banhos representaram 61 % do consumo calculado, por exemplo, o consumo real dos banhos poderia ser 8,72 m³, conforme quadro abaixo:

Atividade	% do Consumo	Consumo Médio	Consumo Calculado
Banhos	61%	14,2	8,72
Lavagem de roupa	7%		1,00
Lavagem de louça	4%		0,62
Escovação de dentes	12%		1,76
Descarga	13%		1,85
Lavagem de carro	2%		0,25
TOTAL	100%		

Já que escovar os dentes representa 12 % do consumo calculado, então representa $1,76 \text{ m}^3$ dos $14,2 \text{ m}^3$. Portanto, poderíamos usar a cisterna em 88 % do consumo. Ou seja, $14,2 - 1,76 = 12,44 \text{ m}^3$.

Como cada metro cúbico custa R\$ 3,61, a economia mensal gerada pela utilização da cisterna seria de $\text{R\$ } 3,61 \times 12,44 = \text{R\$ } 44,92$.

c) **Determine o erro se arredondássemos para R\$ 45,00**

$$\varepsilon = \frac{45 - 44,92}{45} = \frac{0,08}{45} \sim 0,17 \%$$

d) **Avalie se o erro é aceitável.**

ATIVIDADE 22

a) **Construa um quadro apresentando a evolução da economia e da dívida ao longo de 12 meses.**

Mês	Valor fixo	Economia	Retorno/Dívida
1	R\$ 6.000,00	R\$ 45,00	-R\$ 5.955,00
2	R\$ 6.000,00	R\$ 90,00	-R\$ 5.910,00
3	R\$ 6.000,00	R\$ 135,00	-R\$ 5.865,00
4	R\$ 6.000,00	R\$ 180,00	-R\$ 5.820,00
5	R\$ 6.000,00	R\$ 225,00	-R\$ 5.775,00
6	R\$ 6.000,00	R\$ 270,00	-R\$ 5.730,00
7	R\$ 6.000,00	R\$ 315,00	-R\$ 5.685,00
8	R\$ 6.000,00	R\$ 360,00	-R\$ 5.640,00
9	R\$ 6.000,00	R\$ 405,00	-R\$ 5.595,00
10	R\$ 6.000,00	R\$ 450,00	-R\$ 5.550,00
11	R\$ 6.000,00	R\$ 495,00	-R\$ 5.505,00
12	R\$ 6.000,00	R\$ 540,00	-R\$ 5.460,00

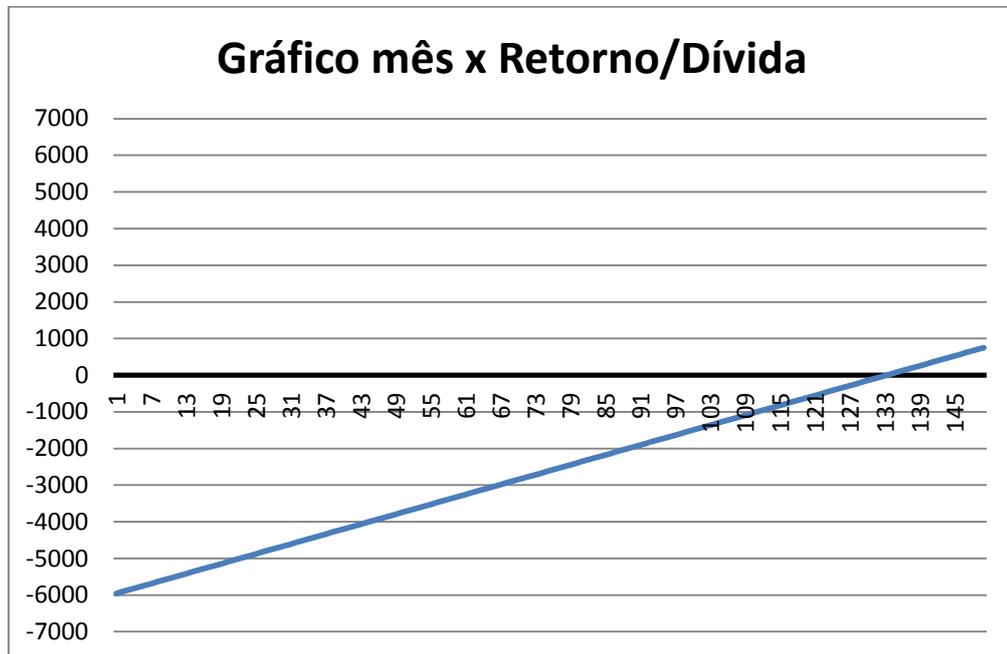
b) Após 1 ano temos o retorno esperado? Ou seja, passamos a ter lucro ou ainda teremos dívida?

Não, pois ainda teremos uma dívida de R\$5.460,00.

c) Construa um gráfico que apresente a evolução do retorno mensal, caso não fosse necessário investimento inicial.



- d) **Construa um gráfico que apresente a evolução do retorno, considerando o investimento inicial.**



- e) **Determine em quanto tempo teremos retorno do investimento.**

Pelo gráfico, os estudantes viram que é possível não somente recuperar o valor investido como passar a ter lucro. Entretanto, não conseguiram indicar exatamente em quanto tempo deixamos de ter prejuízo e passamos a ter lucro. Sabiam dizer apenas que era mais do que 131 meses e menos do que 136 meses.

Para aumentar a precisão foi necessária uma simples divisão:

$$\frac{6000}{45} = 133 + \frac{15}{45} = 133 + \frac{1}{3}$$

- f) **É viável a construção da cisterna com o investimento inicial?**

Os estudantes puderam analisar a viabilidade financeira na construção de uma cisterna, percebendo a impossibilidade de tal construção. Pois, o retorno financeiro se daria em 11 anos. Entretanto, seria no mínimo considerável, caso a construção fosse para um local em que há faltas de água constantemente. Logicamente, desde que fosse possível obter o investimento inicial.

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **A construção do conceito em ambiente de Modelagem Matemática**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Márcio Albano Lima. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine de Fraga Sant’Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 3308-6182 ou e-mail marilaine@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. Verificar como aprimorar as imagens que os educandos têm sobre sustentabilidade e construir o conceito de sustentabilidade em ambiente de modelagem matemática, a partir do conhecimento dos estudantes.
2. Verificar como aprimorar as imagens dos estudantes em relação aos seguintes conceitos matemáticos: conversão de unidades de volume, razão e proporção, aproximações e erros, gráficos e tabelas, a partir de seus saberes anteriores.
3. Tornar os estudantes capazes de refletir e tomar consciência da importância do consumo consciente de água.
4. Elaborar um material didático, que possa ser utilizado e adaptado por outro professor, além de planejar, implementar e validar uma sequência didática, em ambiente de modelagem matemática.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e/ou vídeos, obtidos durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Rua Para João XXIII, 1100 – apto 101 – Bl. 01 – Cachoeirinha - RS/telefone (51) 3041-5359/e-mail lamarcio@terra.com.br.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: