

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR  
PARALELO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Por

Vítor Tumelero Valente

Monografia apresentada à Comissão de Graduação de Engenharia de Controle e Automação da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro de Controle e Automação.

Porto Alegre, Dezembro de 2012.

ANÁLISE MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR  
PARALELO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE

por

Vítor Tumelero Valente

Esta monografia foi julgada adequada como parte dos requisitos para  
obtenção do título de

**BACHAREL EM ENGENHARIA DE CONTROLE E  
AUTOMAÇÃO**

Aprovada em sua forma final pela banca examinadora.

Prof. Renato Bayan Henriques  
Coordenador do Curso de Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Prof. Eduardo André Perondi

Comissão de Avaliação:

Prof. Flávio José Lorini

Prof. Mário Roland Sobczik Sobrinho

Prof. Rafael Antônio Comparsi Laranja

Porto Alegre, Dezembro de 2012

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, minha namorada e meus amigos.

## AGRADECIMENTOS

Presto minha gratidão primeiramente aos meus pais, por me proporcionarem uma educação de qualidade desde meus primeiros anos de vida, e por sempre me apoiarem nas minhas decisões sem nunca deixar de me aconselhar.

Agradeço também às minhas irmãs e minha namorada pelo apoio sem o qual não seria possível finalizar este trabalho.

Aos meus amigos e companheiros de laboratório, LAMECC, pelos momentos de diversão e trabalho os quais tive o prazer de vivenciar, e pelas corridas de kart.

Aos meus mestres pela dedicação e paciência em ensinar, e pelas corridas de kart.

Em especial, ao professor Eduardo André Perondi pela orientação e confiança não apenas durante a realização deste trabalho como também durante a vigência da minha bolsa de pesquisa no LAMECC.

VALENTE, V. T. **Análise matemática e simulação de um manipulador paralelo com seis graus de liberdade.** 2012. 33 fls. Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

## **RESUMO**

Neste trabalho é realizada a análise de um manipulador paralelo com seis graus de liberdade, estes provenientes de atuadores lineares fixados entre uma base fixa e uma base móvel, caracterizando um mecanismo amplamente conhecido como configuração de uma Plataforma de Stewart-Gough. O estudo é dividido em duas partes: estudo sobre os fundamentos teóricos e do levantamento do estado da arte deste tipo de mecanismo, incluindo os modelos matemáticos da cinemática direta e inversa e modelo dinâmico; e desenvolvimento de um algoritmo para simulação de cada um dos modelos. As simulações da cinemática direta e inversa apresentaram um comportamento semelhante ao encontrado na literatura e quando comparadas entre si. Já, as simulações da dinâmica direta e inversa tiveram um resultado discrepante entre si principalmente devido ao método de integração e passo utilizado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Plataforma de Stewart, manipulador paralelo, 6 GDL

## **ABSTRACT**

This study aims to present the analysis of a parallel manipulator with six degrees of freedom (DOF) provided by linear actuators fixed between a fixed base and a moving base, part of a mechanism widely known as Stewart-Gough platform. It is divided into two steps: study of the theoretical foundations and the research of state of art of this kind of mechanism, including direct and inverse kinematics and dynamic mathematical models; and development of an algorithm for simulating each one of the models. Simulations of direct and inverse kinematics showed similar behavior comparing to that found in the literature. On the other hand, the dynamics simulations had discrepant results basically due to the integration method and step used.

**KEYWORDS:** Stewart Platform, parallel manipulator, 6 DOF

# ÍNDICE

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Motivação	4
1.3	Organização do Trabalho	4
2	Modelagem Matemática	5
2.1	Cinemática Inversa	5
2.2	Cinemática Direta	8
2.2.1	Matriz Jacobiana da plataforma	8
2.3	Dinâmica Inversa	10
2.3.1	Modelo Simplificado	14
2.4	Dinâmica Direta	15
2.4.1	Algoritmo de integração	15
3	Simulações e Resultados	17
3.1	Caracterização da Plataforma	17
3.2	Cinemática Inversa	18
3.2.1	Rotação simples	18
3.2.2	Rotação com translação	19
3.3	Cinemática Direta	20
3.3.1	Rotação simples	20
3.3.2	Rotação com translação	23
3.4	Dinâmica Inversa	26
3.4.1	Deslocamento senoidal no eixo x	26
3.5	Dinâmica Direta	28
4	Conclusões	33
4.1	Trabalhos futuros	33
5	Referências Bibliográficas	34

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Configuração genérica de uma plataforma de Stewart-Gough.	1
Figura 2.1 – a) Definição dos sistemas de coordenadas. b) Arranjo vetorial de cálculo do comprimento dos atuadores.	6
Figura 2.2 - Definição dos ângulos para cada ponto de apoio.	7
Figura 2.3 - Modelo representativo de um atuador e de suas massas.	11
Figura 3.1 - Cinemática inversa para uma rotação de $45^\circ$ em torno do eixo Z resultante.	19
Figura 3.2 - Simulações de rotação e translação combinados: rotação de $15^\circ$ no eixo x, rotação de $20^\circ$ no eixo y, deslocamento de 0,5 m no eixo y, deslocamento de -0,5 m no eixo x e deslocamento de 0,2 m no eixo z.	20
Figura 3.3 - Comprimento dos atuadores na cinemática direta para uma rotação simples.	21
Figura 3.4 - Posição do centro de massa da plataforma na cinemática direta para uma rotação simples.	22
Figura 3.5 - Orientação do centro de massa da plataforma na cinemática direta para uma rotação simples.	22
Figura 3.6 - Variação dos comprimentos dos atuadores na cinemática direta para uma rotação com translação.	24
Figura 3.7 - Variação da posição do centro de massa da plataforma para a cinemática direta para uma rotação com translação.	24
Figura 3.8 - Variação dos ângulos da orientação da plataforma para a simulação da cinemática direta para uma rotação com translação.	25
Figura 3.9 - Forças e comprimentos dos atuadores para uma trajetória de deslocamento senoidal na direção x.	26
Figura 3.10 - Deslocamento e aceleração do centro de massa da plataforma para uma trajetória senoidal na direção x.	27
Figura 3.11 - Movimento acumulado dos atuadores 4, 5 e 6 para um deslocamento imposto na direção x.	28
Figura 3.12 - Comparação entre soluções para dinâmica inversa e direta considerando a mesma trajetória no eixo x.	29

Figura 3.13 - Comparação entre acelerações e deslocamentos do centro de massa da plataforma para a nova trajetória.	30
Figura 3.14 - Comparações considerando um passo de integração de $10^{-5}$ segundos.	31
Figura 3.15 - Comparação entre acelerações e deslocamentos para frequência 10 rad/s.	32



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Ângulos dos pontos de apoio dos atuadores na base e na plataforma.	8
Tabela 3.1 - Comparação entre o resultado esperado e o obtido com base no número de iterações para o movimento de rotação simples. Unidades em metros e graus.	23
Tabela 3.2 - Comparação entre o resultado esperado e o obtido com base no número de iterações para um movimento combinado de translação e rotação. Unidades em metros e graus.	25

## LISTA DE VARIÁVEIS

$R_p^b$	matriz de rotação das coordenadas da plataforma em relação à base
$p_i^p$	posição do iésimo atuador na plataforma em relação ao centro de massa da plataforma
$d_p^b$	posição do centro de massa da plataforma em relação à origem do sistema de coordenadas da base
$b_i^b$	posição na base do iésimo atuador em relação à origem do sistema de coordenadas da própria base
$b_i^b$	ponto de conexão dos atuadores na base
$p_i^p$	ponto de conexão dos atuadores na plataforma
$r_p$	raio da circunferência imaginária que liga os pontos do hexágono da plataforma
$r_b$	raio da circunferência imaginária que liga os pontos do hexágono da base
$a_i^b$	vetor de posição do iésimo atuador com respeito à base
$J$	matriz jacobiana
$\omega_p^b$	velocidade angular da plataforma com respeito à base
$v_p^b$	velocidade translacional da plataforma com respeito à base
$l_i$	comprimento do iésimo atuador
$X^T$	vetor de posição e orientação do centro de massa da plataforma
$m_p$	massa da plataforma
$g$	aceleração da gravidade
$m_{bot}$	massa da parte inferior do atuador
$v_{ibot}^b$	velocidade translacional da parte inferior do atuador
$m_{top}$	massa da parte superior do atuador
$v_{itop}^b$	velocidade translacional da parte superior do atuador
$f$	vetor de forças na direção dos atuadores
$f_p^b$	vetor de força atuante na plataforma
$\tau_p^b$	vetor de momentos atuante na plataforma
$\tau_i^b$	vetor de momentos atuante no iésimo atuador
$\omega_i^b$	velocidade angular do iésimo atuador
$a_p^b$	aceleração translacional da plataforma com respeito à base
$\alpha_p^b$	aceleração angular da plataforma com respeito à base
$\alpha_i^b$	aceleração angular do iésimo atuador
$I_p^p$	momento de inércia da plataforma com respeito ao sistema de coordenadas da plataforma

## 1 INTRODUÇÃO

A configuração mais comum de robôs industriais é do tipo cadeia cinemática aberta (ou serial), na qual vários membros são conectados sequencialmente por juntas desde a sua base até a sua ferramenta. Este design oferece muitas vantagens, dentre as quais um volume de trabalho amplo. Entretanto, devido a desvantagens, tais como a baixa relação peso/carga, outras arquiteturas, tais como a paralela e a mista entre serial e paralela, foram propostas com o passar do tempo. Como o nome indica, no caso da configuração paralela, os membros são conectados em paralelo da base até uma plataforma comum (Gosselin, 1985; Ceccarelli, 2004; Merlet, 1987).

As vantagens desta arquitetura são muitas: podem ser mais rápidos, precisos e apresentam maior rigidez. As vantagens da arquitetura paralela com respeito às características dinâmicas, em relação aos manipuladores seriais, decorrem do fato de que nesses existe a presença de atuadores nas partes móveis implicando em massas e momentos de inércia relativamente altos. Já, nos manipuladores paralelos, os atuadores são montados próximos à base, possibilitando uma redução na massa nas suas partes móveis. Além disso, a relação carga por peso é maior devido ao fato de o carregamento ser dividido entre os diversos membros (Ceccarelli, 2004; Merlet, 1987; Moretti, 2010).

Como desvantagens desse tipo de mecanismo pode-se citar a existência interferência e de restrição de movimento entre os membros. Um diagrama representativo de uma Plataforma de Stewart (SP - *Stewart Platform*) genérica pode ser visualizado na Figura 1.1.

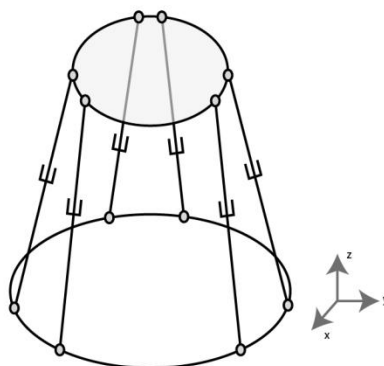


Figura 1.1 - Configuração genérica de uma plataforma de Stewart-Gough.

Diversos tipos de arquiteturas paralelas são possíveis, mas a mais comum é a chamada Plataforma de Stewart-Gough. Este manipulador com seis graus de liberdade possui uma plataforma móvel suportada por seis atuadores lineares (Ceccarelli, 2004; Merlet, 1987). Sua origem é relacionada a um mecanismo para teste de pneus (Gough e Whithall, 1962). Posteriormente, o mesmo foi configurado como manipulador usado para simulação de voo (Stewart, 1965).

Dentre outras arquiteturas paralelas podem-se citar manipuladores com menos graus de liberdade, tais como o *Delta* (BOSCH), de três graus de liberdade e o *The Adept Quattro* (ADEPT TECHNOLOGY) com quatro graus de liberdade. Este último atuando também como simuladores de voo e operações de posicionamento. O modelo *Delta* tem sido a estrutura mais utilizada industrialmente em tarefas onde é exigida uma manipulação rápida e precisa de objetos (Molina, 2008).

A configuração geral de uma Plataforma de Stewart possui duas bases, uma móvel e outra fixa, as quais são conectadas entre si através de seis atuadores. Os atuadores são conectados à base fixa por juntas esféricas e à base móvel por juntas esféricas ou por juntas universais. Cada atuador possui uma junta prismática associada a um determinado grau de liberdade independente. São, no total, seis graus de liberdade. A posição e orientação da base é fixa, enquanto que a posição e orientação da plataforma móvel (ou simplesmente plataforma) é definida pelo comprimento dos elos que a ligam à base.

A evolução do uso deste tipo de mecanismo passou invariavelmente pelo desenvolvimento teórico do mesmo. Desde a década de 1980, alguns autores passaram a estudar não apenas configurações alternativas, mas também modelos matemáticos para representar essas configurações. O estudo da cinemática direta, particularmente, tem sido foco de estudos recentes, ao contrário da cinemática inversa, cujo procedimento para resolução já é bem consolidado. Alguns trabalhos mostraram que o número de soluções numéricas para o problema da cinemática direta, ou seja, o número de configurações possíveis quando o comprimento dos elos é conhecido, pode chegar a 40 soluções numéricas distintas (Dietmaier, 1998). Métodos numéricos, tais como Newton-Raphson e Newton-Euler, também foram usados para resolver a cinemática direta (Dieudonne et al, 1972; Behi, 1988). Casos especiais da Plataforma de Stewart, onde as juntas esféricas da plataforma são concêntricas para pares de atuadores, ou seja, a plataforma apresenta a forma de um triângulo, foram resolvidos em outros trabalhos como o de

Griffis e Duffy, 1989. O caso onde a base também possui pares de atuadores conectados em juntas esféricas concêntricas também teve sua cinemática direta resolvida (Lin et al, 1990).

A cinemática direta desse tipo de manipulador pode ser descrita da seguinte forma: dados os comprimentos dos membros do manipulador, deseja-se encontrar a posição e orientação da plataforma com respeito ao sistema de referência da base. Já a cinemática inversa é o problema no qual, uma vez conhecidas a posição e orientação da plataforma, calcula-se o respectivo comprimento de cada um dos atuadores (Ceccarelli, 2004; Molina, 2008; Moretti, 2010).

Quanto à cinemática inversa, sua solução foi apresentada também em diversos trabalhos, diferindo em poucos detalhes entre eles (Fitzgerald et al, 1993, Moosaviet et al, 2010). Esta, por sua vez, é descrita através da obtenção do comprimento dos atuadores com base em uma posição e orientação dadas. Já, a modelagem dinâmica deste tipo de manipulador também é abordada em alguns artigos e apresentada através do método de Newton-Euler (Yang et al, 1986) ou da teoria de helicoides (Sugimoto, 1986). Entretanto, a maior parte dos estudos é feita através da matriz Jacobiana do manipulador (Gosselin, 1985; Merlet, 1987; Li, 1997; Molina, 2008, Moretti, 2010, Küçük, 2012; entre outros).

Atualmente, o interesse nesses tipos de mecanismos está relacionado a aplicações específicas tais como: cirurgias assistida por robôs, sistemas de monitoramento, simulação e operação onde são exigidos movimentos de precisão, orientação de telescópios, entre outros (Molina, 2008, Moretti, 2010).

### *1.1 Objetivos*

Este trabalho tem por objetivo a análise e simulação de um manipulador robótico paralelo com seis graus de liberdade, de acordo com a configuração mais comum da Plataforma de Stewart. Para tanto, é feita uma revisão dos métodos de modelagem da plataforma, descrevendo as etapas necessárias, tanto para a análise da cinemática direta, quanto para a análise da cinemática inversa. Um modelo dinâmico inverso, incluindo a massa dos atuadores, também é obtido, bem como um modelo dinâmico direto. Cada uma das etapas terá uma validação através dos resultados de simulações realizadas utilizando os modelos desenvolvidos.

## *1.2 Motivação*

Atualmente no Brasil, o desenvolvimento desse tipo de mecanismo se restringe basicamente a estudos acadêmicos dedicados a explorar as formas, a modelagem matemática e o controle deste tipo de manipulador. Entretanto, é raro encontrar empresas que tenham como foco o desenvolvimento de um produto com tais características. Normalmente, os produtos vendidos no Brasil são provenientes de empresas sediadas no exterior.

Tendo em vista a questão de controle de mecanismos e robôs, aqueles de cadeia fechada apresentam ainda um desafio, pois as estratégias baseadas em modelo, para serem aplicadas, necessitam da resolução de um sistema de equações não lineares, fortemente acopladas, em tempo real.

## *1.3 Organização do Trabalho*

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada a análise matemática, considerando os modelos de cinemática direta e inversa e análise dos modelos dinâmicos direto e inverso. No Capítulo 3 são apresentados e discutidos os resultados de simulações realizadas. Por fim, no Capítulo 4, são apresentadas as conclusões do trabalho, bem como propostas de trabalhos futuros e melhoramentos nos modelos.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática da Plataforma de Stewart pode ser dividida em duas partes: a cinemática e a dinâmica. Cada uma dessas parcelas pode ser separada em outras duas partes, uma chamada direta e outra denominada inversa. A seguir, apresentam-se todas essas quatro modelagens. A cinemática é responsável pela análise do manipulador desconsiderando os efeitos dinâmicos. Basicamente, esta é uma análise das possíveis posições da plataforma no espaço cartesiano tridimensional. Já, a análise dinâmica é responsável pela descrição do comportamento do manipulador, de acordo com as leis fundamentais da mecânica newtoniana. Para tanto, consideram-se as forças, massas e acelerações relacionadas com cada um dos corpos rígidos que compõem o manipulador. Na presente abordagem, para facilitar a análise dos resultados, os efeitos dissipativos (amortecimento) não serão considerados.

### 2.1 Cinemática Inversa

A cinemática inversa de um manipulador robótico paralelo tipo Plataforma de Stewart é aquela através da qual dada a posição e orientação da plataforma, obtêm-se o comprimento dos elos.

Define-se o sistema de coordenadas da base ( $B_{xyz}$ ) e o sistema de coordenadas da plataforma ( $P_{xyz}$ ) conforme apresentada na Figura 2.1. Para efeitos de simplificação, considera-se a carga conectada ao manipulador juntamente com a estrutura da plataforma como um cilindro de raio  $r_p$  e altura  $h$ , este também indicado na Figura 2.1.

O sistema de referência é fixo no centro de massa da plataforma móvel. Os pontos de conexão dos atuadores e da plataforma são definidos como  $B_i$  e  $P_i$ , respectivamente, sendo que o índice  $i = 1..6$  representa cada um dos seis atuadores. A Figura 2.1a ilustra a relação entre os pontos definidos e o comprimento do atuador.

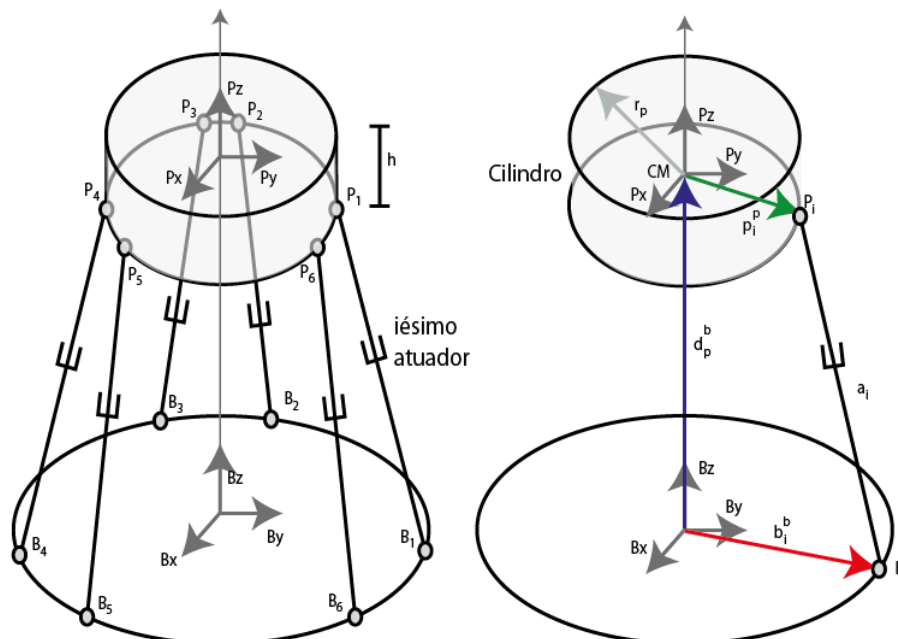


Figura 2.1 – a) Definição dos sistemas de coordenadas. b) Arranjo vetorial de cálculo do comprimento dos atuadores.

Pode-se, então, definir o segmento  $a_i$  do atuador, em relação ao sistema de coordenadas da base, como segue:

$$\mathbf{a}_i^b = \mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p + \mathbf{d}_p^b - \mathbf{b}_i^b \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{R}_p^b$  é a matriz de rotação das coordenadas da plataforma em relação à base;  $\mathbf{p}_i^p$  é a posição do *iésimo* atuador na plataforma em relação ao centro de massa da plataforma;  $\mathbf{d}_p^b$  é a posição do centro de massa da plataforma em relação à origem do sistema de coordenadas da base;  $\mathbf{b}_i^b$  é a posição na base do *iésimo* atuador em relação à origem do sistema de coordenadas da própria base.

Os pontos  $B_i$  e  $P_i$  da Figura 2.1 são localizados conforme é apresentado na Figura 2.2. Considerando tanto a base quanto a plataforma como circunferências, pode-se expressar a localização dos mesmos a partir da definição do sistema de coordenadas e dos ângulos  $\gamma_b$  e  $\gamma_p$ , respectivamente.



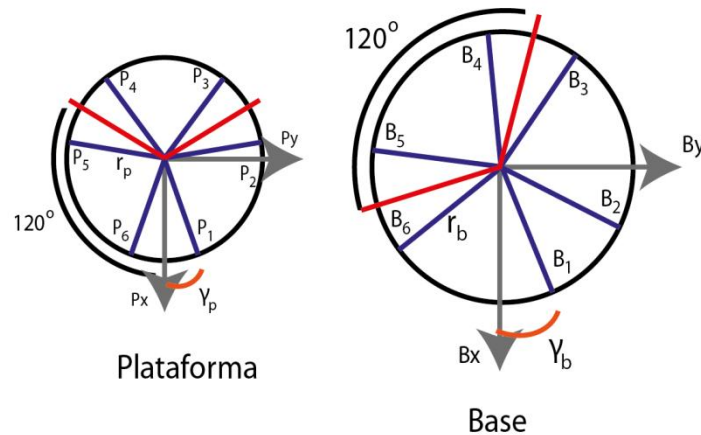


Figura 2.2 - Definição dos ângulos para cada ponto de apoio.

Considerando que os pontos de conexão dos atuadores são arranjados em pares com intervalos de  $120^\circ$  ao redor de um círculo, e considerando ainda  $h$  a altura da plataforma, pode-se definir os vetores  $\mathbf{b}_i^b$  e  $\mathbf{p}_i^p$  como seguem:

$$\mathbf{b}_i^b = [r_b \cos \gamma_{bi} \quad r_b \sin \gamma_{bi} \quad 0] \quad (2.2)$$

e

$$\mathbf{p}_i^p = [r_p \cos \gamma_{pi} \quad r_p \sin \gamma_{pi} \quad h/2] \quad (2.3)$$

onde  $r_p$  e  $r_b$  são os raios de um círculo imaginário que liga os vértices do hexágono da plataforma e da base, respectivamente. Conforme a Figura 2.1b, a plataforma tem a forma de um cilindro uniforme que considera, além da sua própria estrutura, a carga a ela acoplada. Assim, o centro de massa do mesmo é localizado exatamente na origem do seu sistema de referência nas direções  $x$  e  $y$  com uma altura  $h/2$ . Na Tabela 2.1 é apresentada a relação de ângulos entre os pontos de apoio de cada um dos atuadores da base e da plataforma, a partir da escolha dos ângulos  $\gamma_b = 10^\circ$  e  $\gamma_p = 50^\circ$ . Esses ângulos foram escolhidos de modo que a plataforma não esteja alinhada à base. Uma configuração onde os pontos de apoio da plataforma estão deslocados apenas no eixo  $z$  em relação aos pontos de apoio da base poderia levar a conclusões errôneas dos resultados de simulação. Outra influência direta dos arcos formados pelos pontos de apoio, quando analisado juntamente com o comprimento dos atuadores, é em relação ao volume de trabalho do manipulador,

Tabela 2.1 - Ângulos dos pontos de apoio dos atuadores na base e na plataforma.

$i$	$\gamma_{pi}$	$\gamma_{bi}$
1	$\gamma_p = 50^\circ$	$\gamma_b = 10^\circ$
2	$120^\circ - \gamma_p$	$120^\circ - \gamma_b$
3	$120^\circ + \gamma_p$	$120^\circ + \gamma_b$
4	$-120^\circ - \gamma_p$	$-120^\circ - \gamma_b$
5	$-120^\circ + \gamma_p$	$-120^\circ + \gamma_b$
6	$-\gamma_p$	$-\gamma_b$

A matriz de orientação da plataforma,  $\mathbf{R}_p^b$ , é definida com base nos ângulos de rolamento, arfagem e guinada. É obtida com base nas rotações do sistema de coordenadas da plataforma em relação ao sistema de coordenadas fixo à base. Assim:

$$\mathbf{R}_p^b(\beta, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta & -s\beta \\ 0 & s\beta & c\beta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_p^b(\beta, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & s\beta s\theta c\varphi - c\beta s\varphi & c\beta s\theta c\varphi + s\beta s\varphi \\ s\varphi c\theta & s\beta s\theta s\varphi + c\beta c\varphi & c\beta s\theta s\varphi - s\beta c\varphi \\ -s\theta & s\beta c\theta & c\beta c\theta \end{bmatrix}$$

Sendo  $\beta$  o ângulo de rolamento,  $\theta$  o ângulo de arfagem,  $\varphi$  o ângulo de guinada,  $c\varphi$  o  $\cos \varphi$  e  $s\varphi$  o  $\sin \varphi$ . O comprimento de cada atuador pode ser obtido calculando o módulo do vetor  $\mathbf{a}_i$ , onde  $i = 1..6$ , como segue:

$$l_i = \|\mathbf{a}_i^b\| = \sqrt{\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b} \quad (2.5)$$

## 2.2 Cinemática Direta

A cinemática direta é aquela que fornece a posição e orientação da plataforma com base nos comprimentos dos atuadores. Para a continuidade da análise é necessário definir a matriz Jacobiana da plataforma, o que será feito na próxima subseção.

### 2.2.1 Matriz Jacobiana da plataforma

A matriz Jacobiana de manipuladores paralelos é uma matriz de transformação que relaciona as velocidades da plataforma no espaço Cartesiano com as correspondentes velocidades das juntas do manipulador, isto é:

$$\dot{l} = J \begin{bmatrix} v_p^b \\ \omega_p^b \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $\dot{l}$  é o vetor de velocidades dos atuadores,  $J$  é a matriz Jacobiana da plataforma,  $v_p^b$  é o vetor de velocidades translacionais e  $\omega_p^b$  é o vetor de velocidades rotacionais da plataforma em relação ao sistema de coordenadas da base. O vetor  $\omega_p^b$  é escrito em função das derivadas dos ângulos de rotação.

$$\omega_p^b = B \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde a matriz de rotação é definida como:

$$B = \begin{bmatrix} c\theta c\phi & -s\phi & 0 \\ s\theta s\phi & c\phi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Cada linha da matriz Jacobiana representa a velocidade desenvolvida por um atuador. Para se obter a equação matemática da matriz Jacobiana pode-se diferenciar ambos os lados da equação (2.1). Assim, após algumas manipulações, chega-se:

$$\dot{l}_i = \frac{1}{l} \left[ (R_p^b p_i^p + d_p^b - b_i^b)^T \quad \left( (R_p^b p_i^p) \times (d_p^b - b_i^b) \right)^T \right] \begin{bmatrix} v_p^b \\ \omega_p^b \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Comparando a equação (2.6) com a equação (2.9), obtém-se a matriz Jacobiana em função da posição e orientação da plataforma.

$$J = \frac{1}{l} \left[ (R_p^b p_i^p + d_p^b - b_i^b)^T \quad \left( (R_p^b p_i^p) \times (d_p^b - b_i^b) \right)^T \right] \quad (2.10)$$

Como já mencionado, a solução da cinemática direta envolve a resolução de seis equações não lineares simultâneas para os valores de posição e orientação da plataforma. Desta forma, os métodos numéricos são aplicados de forma a se obter tal solução por aproximações sucessivas. Neste trabalho, o método de Newton-Raphson para múltiplas variáveis é aplicado. Esse método consiste em estimar o vetor de soluções através de sucessivas aproximações considerando o uso da matriz Jacobiana da plataforma e um valor inicial como estimativa. Para múltiplas variáveis, o método de Newton é:

$$X_{i+1} = X_i - \left( \frac{\partial g(X_i)}{\partial X_i} \right)^{-1} g(X_i) \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor de variáveis que deseja-se estimar,  $\mathbf{g}$  é a função vetorial que se aproxima de zero a medida que a estimativa de  $\mathbf{X}$  se aproxima do valor real e  $i$  é o índice de iteração. Para o caso em estudo, tem-se:

$$\mathbf{X}^T = [x \quad y \quad z \quad \beta \quad \theta \quad \varphi] \quad (2.12)$$

Já, a função vetorial  $\mathbf{g}$  é dada como a diferença entre o comprimento estimado e o comprimento real:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{a}_1^b\| - l_1 \\ \vdots \\ \|\mathbf{a}_6^b\| - l_6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{a}_i^b$  é a estimativa do comprimento e  $l_i$  é o comprimento real do *iésimo* atuador. Diferenciando ambos os lados da equação (2.13), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{g}} = J \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Então, a derivada parcial expressa na equação (2.11) é expressa por:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_i} = J \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde a matriz  $J$  depende das variáveis que definem a posição e a orientação.

Substituindo as Equações (2.13) e (2.15) em (2.11), tem-se:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \beta \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \beta \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} J^{-1} \begin{bmatrix} \|\mathbf{a}_1^b\| - l_1 \\ \vdots \\ \|\mathbf{a}_6^b\| - l_6 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Assim, dado um vetor de comprimentos  $\mathbf{l}$ , pode-se obter o vetor de posição e orientação  $\mathbf{X}$  desde que as matrizes  $J$  e  $\mathbf{B}$  sejam não singulares.

### 2.3 Dinâmica Inversa

A dinâmica inversa é aquela que permite calcular as forças aplicadas ao manipulador para a execução de uma determinada trajetória para a plataforma. O algoritmo a seguir é baseado no princípio do trabalho virtual (Li, 1997) e considera também a dinâmica dos atuadores de acordo

com as características descritas a seguir. Cada atuador consiste em duas partes como apresentado na

Figura 2.3. A parte superior móvel, com massa  $m_{top}$  e a parte inferior com massa  $m_{bot}$ . A distância entre a base (centro da junta na base) para o centro de massa da parte inferior é dada por  $l_{bot}$ , enquanto que a distância entre o ponto de conexão da plataforma (centro de junta da plataforma) e o centro de massa da parte superior é dada por  $l_{top}$ .

O atrito entre os atuadores e as juntas é considerado desprezível. O momento de inércia dos atuadores em relação ao eixo  $l_i$  também é desconsiderado.

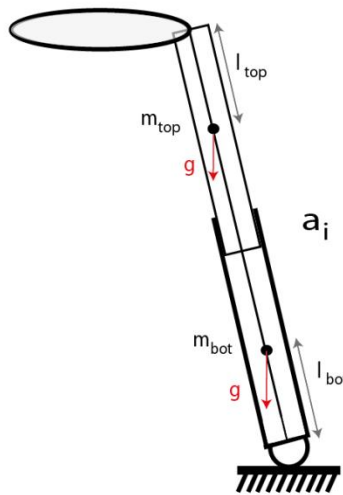


Figura 2.3 - Modelo representativo de um atuador e de suas massas.

A equação (2.17) representa o trabalho total virtual  $\delta\omega$  associado à conjugação dos seguintes movimentos: transladação da plataforma por uma distância virtual  $\mathbf{v}_p^b \delta t$ , rotação por um ângulo virtual  $\boldsymbol{\omega}_p^b \delta t$  e rotação dos atuadores também por um ângulo virtual  $\boldsymbol{\omega}_i^b \delta t$ . O subíndice  $i = 1..6$  representa cada um dos atuadores.

$$\Delta\omega = m_p g \mathbf{v}_p^b \delta t + \sum_{i=1}^6 (m_{bot} g \mathbf{v}_{ibot}^b + m_{top} g \mathbf{v}_{itop}^b) \delta t + \mathbf{f}^T \mathbf{l} \delta t - \begin{bmatrix} f_p^b \\ \tau_p^b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \delta t - \sum_{i=1}^6 (\boldsymbol{\tau}_i^b \boldsymbol{\omega}_i^b \delta t) \quad (2.17)$$

Na equação (2.17),  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\mathbf{l} = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6]^T$  é o vetor de comprimentos dos atuadores,  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças dos atuadores,  $m_p$  é a massa da plataforma,  $\mathbf{v}_p^b$  é

a velocidade translacional da plataforma,  $\mathbf{v}_{ibot}^b$  é a velocidade translacional da parte inferior do atuador,  $\mathbf{v}_{itop}^b$  é a velocidade translacional da parte superior da plataforma,  $\mathbf{f}_p^b$  é a força atuando no centro de massa da plataforma,  $\tau_p^b$  é o torque total atuando no centro de massa da plataforma,  $\boldsymbol{\omega}_p^b$  é o vetor de velocidades angulares da plataforma,  $\boldsymbol{\tau}_i^b$  é o vetor de torques atuando sobre a base de cada atuador e  $\boldsymbol{\omega}_i^b$  é o vetor de velocidades angulares de cada atuador sobre sua base. O efeito da gravidade é considerado separadamente na plataforma e nos atuadores.

As expressões para as velocidades das partes inferior e superior dos atuadores são derivadas a partir do comprimento dos mesmos. Assim, as equações (2.18) e (2.19) mostram os comprimentos da parte inferior e da parte superior dos atuadores.

$$\mathbf{a}_{ibot}^b = \frac{l_{bot}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b \quad (2.18)$$

e

$$\mathbf{a}_{itop}^b = \frac{\|\mathbf{a}_i^b\| - l_{top}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{a}_{ibot}^b$  é o vetor do centro da base do *iésimo* atuador ligado até o ponto  $B_i$  para o centro de massa da parte inferior do mesmo atuador e,  $\mathbf{a}_{itop}^b$  é o vetor partindo do centro da base do *iésimo* atuador ligado ao ponto  $B_i$  até o centro de massa da parte superior do mesmo atuador.

Obtendo as derivadas das equações acima, tem-se:

$$\dot{\mathbf{a}}_i^b = [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Permitindo, então, obter:

$$\mathbf{v}_{ibot}^b = \frac{l_{bot} \mathbf{a}_i^{bT} \dot{\mathbf{a}}_i^b}{\|\mathbf{a}_i^b\| \|\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b + \frac{\|\mathbf{a}_i^b\| - l_{bot}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} \dot{\mathbf{a}}_i^b \quad (2.21)$$

que equivale a

$$\mathbf{v}_{ibot}^b = \left( \frac{l_{bot}}{\|\mathbf{a}_i^b\| \|\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b \mathbf{a}_i^{bT} [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)] + \frac{\|\mathbf{a}_i^b\| - l_{bot}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

podendo ser reescrita como:

$$\mathbf{v}_{ibot}^b = \mathbf{h}_{ibot} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

e

$$\mathbf{v}_{itop}^b = \frac{-l_{bot} \mathbf{a}_i^{bT} \dot{\mathbf{a}}_i^b}{\|\mathbf{a}_i^b\| \|\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b + \frac{l_{top}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} \dot{\mathbf{a}}_i^b \quad (2.24)$$

que equivale a

$$\mathbf{v}_{itop}^b = \left( \frac{-l_{bot}}{\|\mathbf{a}_i^b\| \|\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b\|} \mathbf{a}_i^b \mathbf{a}_i^{bT} [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)] + \frac{l_{top}}{\|\mathbf{a}_i^b\|} [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

podendo também ser reescrito como:

$$\mathbf{v}_{itop}^b = \mathbf{h}_{itop} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde  $S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)$  é a matriz antissimétrica de  $\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p$ .

A velocidade angular de cada atuador em relação a sua junta na base é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_i^b = \frac{\mathbf{a}_i^b \times \dot{\mathbf{a}}_i^b}{\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b} = \frac{\mathbf{a}_i^b \times [I \quad -S(\mathbf{R}_p^b \mathbf{p}_i^p)]}{\mathbf{a}_i^{bT} \mathbf{a}_i^b} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ou,

$$\boldsymbol{\omega}_i^b = \mathbf{t}_i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Já, o torque em relação a sua junta na base é expresso por:

$$\boldsymbol{\tau}_i^b = (I_{ibot} + I_{itop}) \boldsymbol{\alpha}_i^b + I_{ibot} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^b \quad (2.29)$$

onde  $I_{ibot}$  é a inércia da parte inferior do *iésimo* atuador e  $I_{itop}$  é a inércia da parte superior do mesmo atuador. A aceleração angular  $\boldsymbol{\alpha}_i^b$  é expressa pela equação (2.30) a partir da derivada da equação (2.27).

$$\boldsymbol{\alpha}_i^b = \mathbf{t}_i \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_p^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_p^b \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{t}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p^b \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Quando o efeito da gravidade é considerado separadamente, a força atuante na plataforma pode ser expressa na forma da equação (2.31), onde a massa  $m_p$  é a massa da plataforma e  $\mathbf{a}_p^b$  é o vetor de acelerações translacionais em relação ao centro de massa.

$$\mathbf{f}_p^b = m_p \mathbf{a}_p^b \quad (2.31)$$

O momento angular da plataforma com respeito ao sistema de coordenadas fixo é, por definição, dado pela equação (2.33), onde o termo  $\mathbf{I}_p^p$  é a matriz de inércia da plataforma com respeito ao sistema de coordenadas da plataforma e tem a forma:

$$\mathbf{I}_p^p = \begin{bmatrix} I_{p_{xx}}^p & 0 & 0 \\ 0 & I_{p_{yy}}^p & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_{zz}}^p \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{L}_p^b = \mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\omega}_p^b = \mathbf{R}_p^b \mathbf{I}_p^p \mathbf{R}_p^{bT} \boldsymbol{\omega}_p^b \quad (2.33)$$

A partir da derivada da equação (2.33) chega-se à equação (2.34) que representa o torque aplicado à plataforma. O elemento  $\boldsymbol{\alpha}_p^b$  é um vetor de acelerações angulares da plataforma em relação ao centro de massa. Considera-se, no entanto, que a inércia da plataforma em relação ao seu sistema de coordenadas não se modifica no decorrer do tempo. Assim,

$$\boldsymbol{\tau}_p^b = \mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\alpha}_p^b + \boldsymbol{\omega}_p^b \times (\mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\omega}_p^b) \quad (2.34)$$

O princípio do trabalho virtual supõe que o trabalho feito pelas forças externas ( $\boldsymbol{\tau}_p^b, \mathbf{f}_p^b, \mathbf{f}$ ) correspondentes a qualquer deslocamento virtual ( $\delta t, \delta d, \delta \beta, \delta \theta, \delta \varphi$ ) é zero ( $\delta \omega = 0$ ). Substituindo os termos na equação (2.17) e aplicando o princípio do trabalho virtual, caso a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  seja não singular pode-se expressar o vetor de forças dos atuadores como:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p^b \\ \boldsymbol{\tau}_p^b \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 (\mathbf{t}_i)^T \boldsymbol{\tau}_i^b - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} m_p \mathbf{g} - \sum_{i=1}^6 (\mathbf{h}_{i\text{bot}}^T m_{\text{bot}}^b \mathbf{g} + \mathbf{h}_{i\text{top}}^T m_{\text{top}}^b \mathbf{g}) \right) \quad (2.35)$$

onde as expressões de  $\mathbf{t}_i, \mathbf{h}_{i\text{bot}}, \mathbf{h}_{i\text{top}}, \boldsymbol{\tau}_i^b$  e  $\mathbf{f}_p^b$  são encontradas nas equações (2.27), (2.21), (2.26), (2.29) e (2.31) respectivamente.

A equação (2.35) representa as forças dos atuadores no espaço de junta em termos da posição, velocidade e aceleração da plataforma no espaço cartesiano.

### 2.3.1 Modelo Simplificado

Considerando a massa dos seis atuadores muito menores que a massa da plataforma móvel, pode-se retirar da equação do modelo dinâmico o efeito da dinâmica dos atuadores. Assim, a equação (2.35) transforma-se em:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p^b \\ \boldsymbol{\tau}_p^b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} m_p \mathbf{g} \right) = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} m_p \boldsymbol{\alpha}_p^b - m_p \mathbf{g} \\ \mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\alpha}_p^b + \boldsymbol{\omega}_p^b \times (\mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\omega}_p^b) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$



Reescrevendo a equação (2.36) e definindo as matrizes  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$ , o modelo pode ser expresso por:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \left[ \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^b \\ \boldsymbol{\alpha}_p^b \end{bmatrix} + \mathbf{E} \right] \quad (2.37)$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_p^b \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

e

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_p g \\ \boldsymbol{\omega}_p^b \times (\mathbf{I}_p^b \boldsymbol{\omega}_p^b) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

#### 2.4 Dinâmica Direta

A resolução da dinâmica direta é feita baseada na equação (2.37) que representa o modelo simplificado da dinâmica inversa. A partir da manipulação da equação, isolam-se as acelerações translacionais e rotacionais da plataforma em função das forças nos atuadores e das matrizes  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$ , apresentadas nas equações (2.38) e (2.39). Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^b \\ \boldsymbol{\alpha}_p^b \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{J}^T \mathbf{f} - \mathbf{E}) \quad (2.40)$$

Caso a matriz  $\mathbf{D}$  seja não singular, a equação (2.40) possui solução para as acelerações translacionais e rotacionais da plataforma.

O modelo da dinâmica direta é usado principalmente para a simulação e o projeto de controladores. No intuito de verificar o equacionamento da dinâmica inversa, o modelo direto é usado para verificar as trajetórias obtidas através da aplicação do equacionamento da dinâmica inversa.

##### 2.4.1 Algoritmo de Integração

O método de integração utilizado foi o método de Euler, que é um método aproximado de primeira ordem. A equação genérica para o cálculo da solução é:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (2.41)$$

onde

$$h = x_{i+1} - x_i \quad (2.42)$$

O termo  $f(x_i, y_i)$  é a função avaliada no instante de tempo  $x_i$ . Primeiramente, aproxima-se a velocidade através da média do valor de aceleração obtido na resolução do sistema de equações e do seu valor anterior. Com a aproximação da velocidade no instante  $i$ , aproxima-se o deslocamento através da média da velocidade obtida e de seu valor anterior. Os novos valores dos deslocamentos e das velocidades são utilizados para a resolução do sistema de equações e determinação da nova aceleração.

### 3 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

A verificação dos modelos é separada em cinemática direta e inversa e dinâmica direta e inversa. A caracterização da plataforma usada para as simulações é apresentada na seção 3.1. Primeiramente, propõe-se um determinado posicionamento através da cinemática inversa. Em seguida, esse posicionamento é verificado a partir do modelo da cinemática direta. Da mesma forma, propõe-se uma trajetória a ser executada pela plataforma para a análise da dinâmica inversa. Essa trajetória é verificada através do modelo da dinâmica direta.

#### 3.1 Caracterização da Plataforma

Tanto para a análise cinemática quanto para a análise dinâmica, faz-se necessário a definição das propriedades da plataforma, desde a localização dos pontos de apoio até os momentos de inércia envolvidos.

De acordo com a Figura 2.2, define-se o ângulo de localização dos apoios dos atuadores como sendo  $\gamma_p = 50^\circ$  para a plataforma e  $\gamma_b = 10^\circ$  para os apoios da base. Quanto às características geométricas do manipulador, define-se o raio da plataforma como  $r_p = 0,5 \text{ m}$  e o raio da base como  $r_b = 1,2 \text{ m}$ .

Para facilitar o desenvolvimento e entendimento dos efeitos da carga aplicada na plataforma, define-se um modelo de carga cilíndrico, conforme a Figura 2.1, onde é considerada tanto a massa da plataforma em si quanto da sua carga. Assim, define-se a altura do cilindro como  $h_p = 0,5 \text{ m}$  e a massa do conjunto como  $m_p = 50 \text{ kg}$ .

Como o eixo de coordenadas da plataforma é solidário à mesma, o seu momento de inércia pode ser escrito na forma da equação (3.1), onde se consideram apenas os efeitos nas direções dos eixos principais.

$$I_p^p = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para essa configuração geométrica, o momento de inércia na direção  $x$  é expresso através da equação (3.2), e é equivalente ao momento de inércia na direção  $y$  por consequência da simetria do cilindro (Hibbeler, 2005).

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad (3.2)$$

Já o momento de inércia na direção  $z$  é dado pela equação (3.3) (Hibbeler, 2005).

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (3.3)$$

Assim, os valores numéricos do momento de inércia da plataforma em relação ao seu próprio sistema de coordenadas são apresentados na equação (3.4).

$$I_p^p = \begin{bmatrix} 5,20 & 0 & 0 \\ 0 & 5,20 & 0 \\ 0 & 0 & 6,25 \end{bmatrix} [\text{kgm}^2] \quad (3.4)$$

Todas as simulações consideram uma posição inicial dada por  $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$  onde as três primeiras medidas estão em metros e as três restantes em graus. O comprimento de todos os seis atuadores para esta posição é de  $L_0 = 1,527 \text{ m}$ .

### 3.2 Cinemática Inversa

Para a cinemática inversa, é dada certa configuração de posição e orientação a partir da qual é calculado o comprimento dos atuadores. Para facilitar a visualização foi desenvolvida uma rotina em Matlab® que interpreta os dados e os transforma em representações gráficas dos estados da plataforma.

São apresentados aqui os resultados de apenas duas simulações dentre todas as realizadas: uma simulação de rotação simples sobre o eixo  $z$  (ângulo de guinada) e um movimento combinado de rotações e translações nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

#### 3.2.1 Rotação simples

Foi imposta uma rotação simples sobre o eixo  $z$  (ângulo de guinada) de valor  $\varphi = 45^\circ$  a partir da posição inicial. A Figura 3.1 apresenta a plataforma na sua configuração original em cinza e sua configuração rotacionada em vermelho e azul.

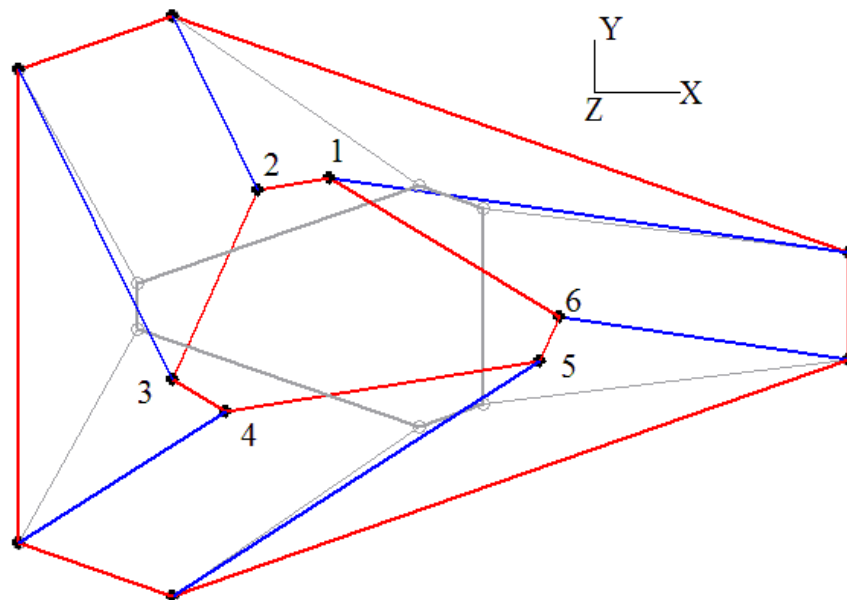


Figura 3.1 - Cinemática inversa para uma rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo Z resultante.

O comprimento dos atuadores, em ordem do atuador 1 ao atuador 6, para esta simulação, foi calculado através do modelo da cinemática inversa e resultou em  $L_1 = [1,774 \ 1,434 \ 1,774 \ 1,434 \ 1,774 \ 1,434]m$ .

### 3.2.2 Rotação com translação

Uma segunda simulação realizada considerou, além de rotações nos eixos  $x$  e  $y$  (ângulos de rolamento, arfagem e guinada, respectivamente), translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As rotações têm valor  $\beta = 15^\circ$  e  $\theta = 20^\circ$  e as translações  $x = -0,5$  m,  $y = 0,5$  m e  $z = 0,2$  m.

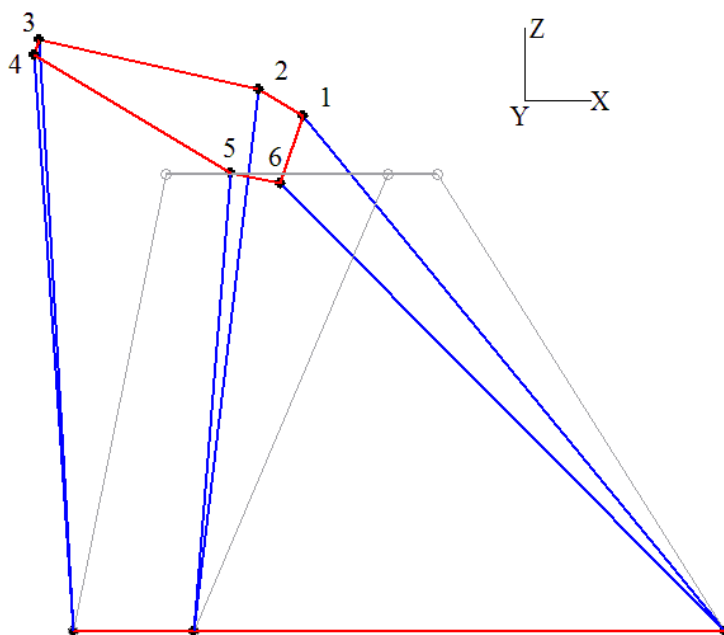


Figura 3.2 - Simulações de rotação e translação combinadas: rotação de  $15^\circ$  no eixo  $x$ , rotação de  $20^\circ$  no eixo  $y$ , deslocamento de  $0,5$  m no eixo  $y$ , deslocamento de  $-0,5$  m no eixo  $x$  e deslocamento de  $0,2$  m no eixo  $z$ .

O comprimento resultante dos atuadores, na ordem do número 1 ao número 6, obtido através do cálculo da cinemática inversa resultou em  $L_1 = [1,985 \ 1,514 \ 1,668 \ 2,026 \ 1,677 \ 1,828] \text{ m}$

### 3.3 Cinemática Direta

A cinemática direta é aquela onde, a partir dos valores dos comprimentos dos atuadores e deseja-se conhecer a posição e orientação da plataforma em relação ao sistema de coordenadas da base. A verificação do modelo se deu através do uso de simulações realizadas para a cinemática inversa.

#### 3.3.1 Rotação simples

Dada a posição inicial  $X_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$  e tendo como a posição de destino desejada  $X_d = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 45]$ , apresenta-se na Figura 3.3, Figura 3.4 e Figura 3.5 o comprimento dos atuadores e a posição e a orientação do centro de massa da plataforma,

respectivamente. As simulações foram realizadas considerando-se o número de 100 iterações de aproximação.

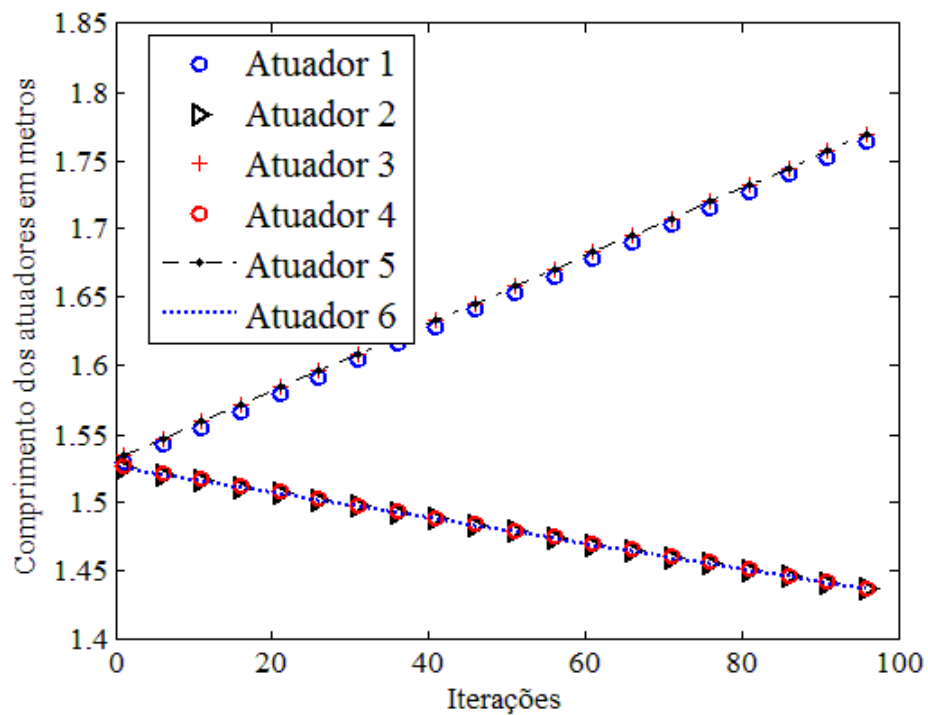


Figura 3.3 - Comprimento dos atuadores na cinemática direta para uma rotação simples.

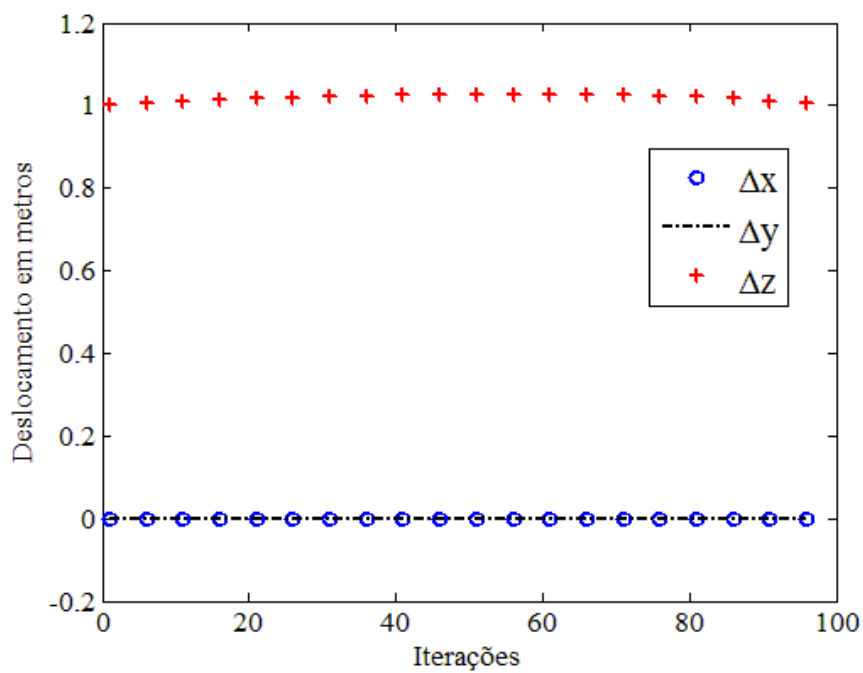


Figura 3.4 - Posição do centro de massa da plataforma na cinemática direta para uma rotação simples.

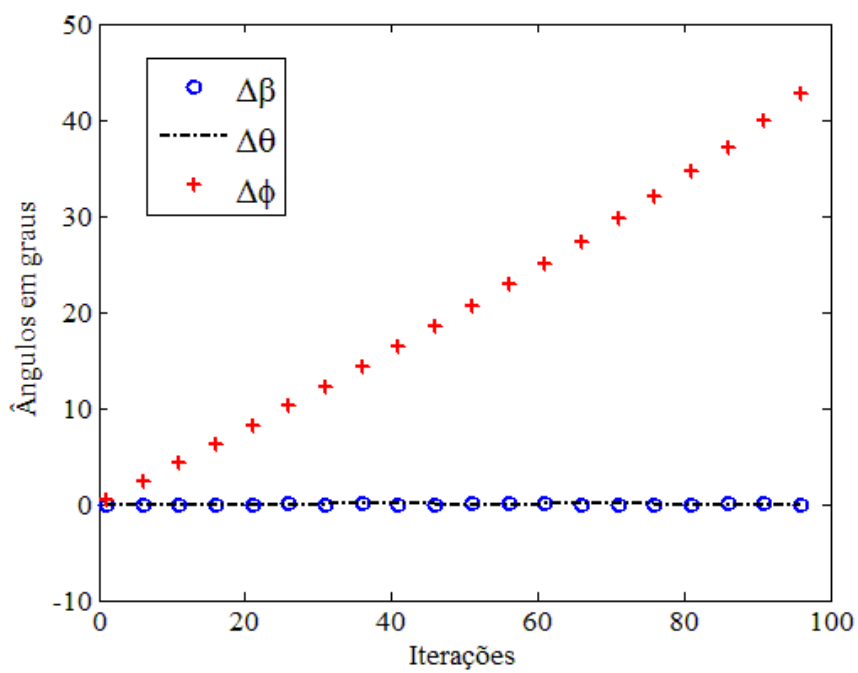


Figura 3.5 - Orientação do centro de massa da plataforma na cinemática direta para uma rotação simples.



Observa-se, em todas as representações gráficas, que os atuadores tendem ao valor de comprimento que resulta na configuração desejada. Na Tabela 3.1 é apresentado o desvio da configuração final com base no número de iterações realizadas. Observa-se que quanto maior é o número de iterações menor é o desvio em cada uma das variáveis.

Tabela 3.1 - Comparação entre o resultado esperado e o obtido com base no número de iterações para o movimento de rotação simples. Unidades em metros e graus.

N° Iterações	Desvio $x$	Desvio $y$	Desvio $z$	Desvio $\beta$	Desvio $\theta$	Desvio $\varphi$
50	0	0	0,001	0	0	0,013
100	0	0	0	0	0	0,003
250	0	0	0	0	0	0

### 3.3.2 Rotação com translação

A partir dos dados de comprimento dos atuadores obtido e da posição inicial das simulações anteriores, verificou-se a posição no espaço de alguns dos atuadores da plataforma. Assim, partindo da posição inicial  $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$  e tendo como a posição de destino desejada  $\mathbf{X}_d = [-0,5 \ 0,5 \ 1,2 \ 15 \ 20 \ 0]$ , obteve-se a variação dos comprimentos apresentada na Figura 3.6, bem como a variação da posição e da orientação do centro de massa da plataforma, apresentado na Figura 3.7 e Figura 3.8, respectivamente.

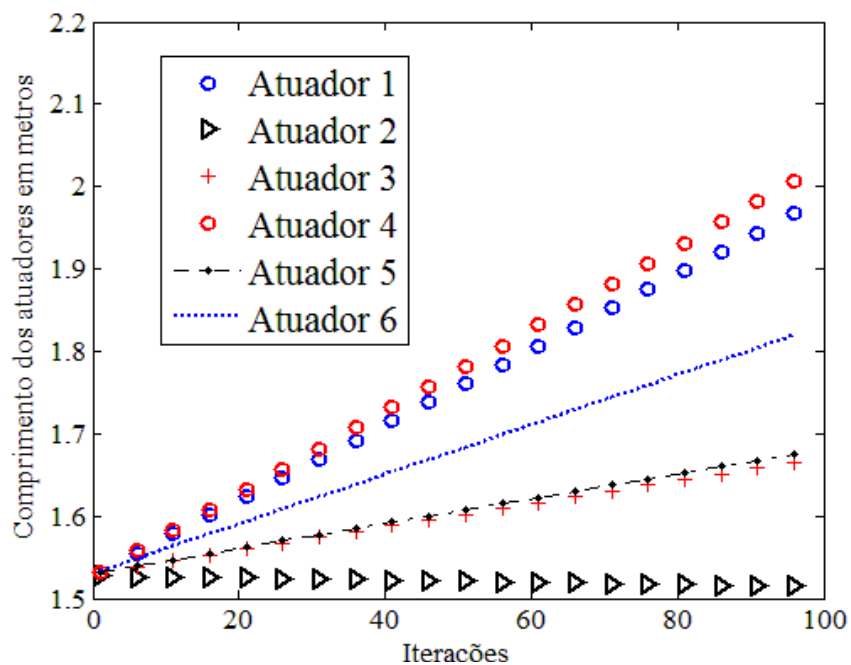


Figura 3.6 - Variação dos comprimentos dos atuadores na cinemática direta para uma rotação com translação.

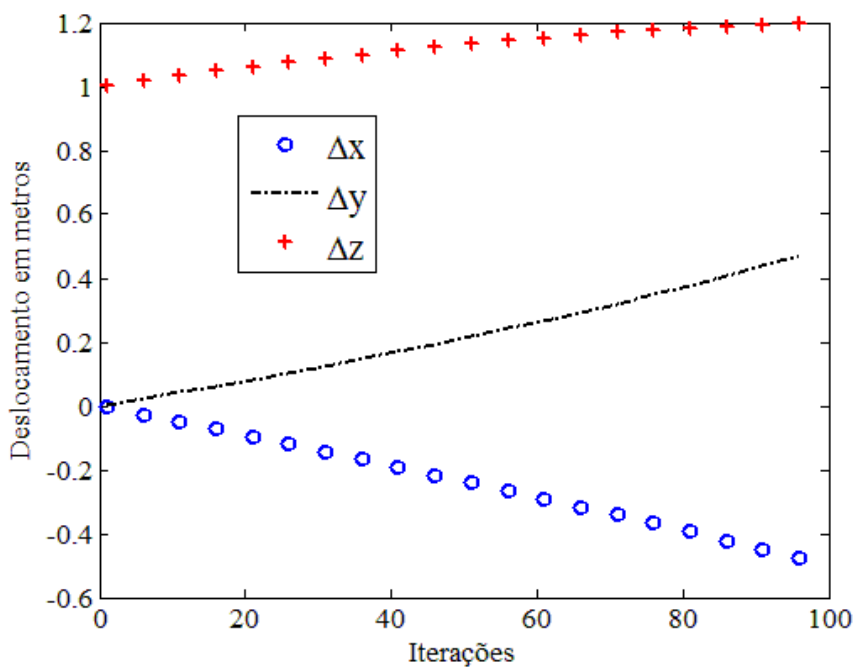


Figura 3.7 - Variação da posição do centro de massa da plataforma para a cinemática direta para uma rotação com translação.

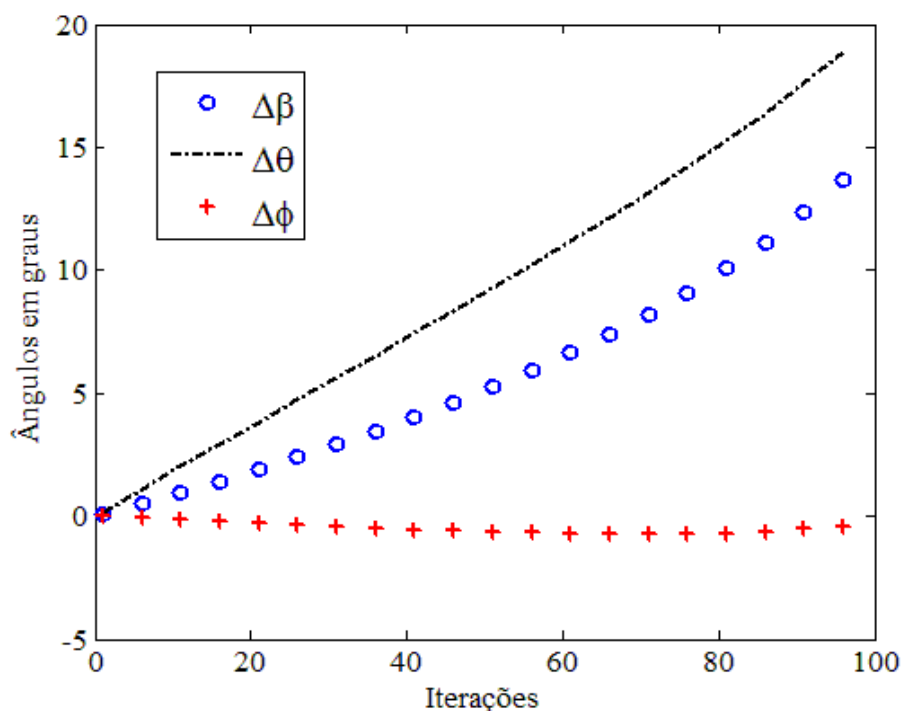


Figura 3.8 - Variação dos ângulos da orientação da plataforma para a simulação da cinemática direta para uma rotação com translação.

Neste caso, assim como na rotação simples, observa-se uma tendência de se atingir a posição e orientação desejada, dado por  $\mathbf{X}_d$ . A mesma comparação entre os desvios do resultado esperado em relação ao resultado obtido é feita aqui. Observa-se na Tabela 3.2, da mesma forma que na simulação anterior, uma diminuição do desvio à medida que se aumenta o número de iterações.

Tabela 3.2 - Comparação entre o resultado esperado e o obtido com base no número de iterações para um movimento combinado de translação e rotação. Unidades em metros e graus.

N° Iterações	Desvio $x$	Desvio $y$	Desvio $z$	Desvio $\beta$	Desvio $\theta$	Desvio $\varphi$
50	0,001	0	0	0,089	0,026	0,469
100	0	0	0	0,044	0,007	0,244
500	0	0	0	0,008	0	0,050

### 3.4 Dinâmica Inversa

A validação da dinâmica inversa é feita impondo-se uma trajetória conhecida à plataforma, calculando-se quais as forças necessárias para realização dessa trajetória.

#### 3.4.1 Deslocamento senoidal no eixo $x$

Na primeira simulação, usou-se uma trajetória de deslocamento senoidal no eixo  $x$ , com amplitude  $a = 0,5\text{ m}$  e frequência  $\omega = 1\text{ rad/s}$ . A velocidade e a aceleração impostas são as derivadas do sinal de deslocamento em relação ao tempo.

Na Figura 3.9 apresentam-se as forças necessárias aos atuadores e os respectivos comprimentos para uma trajetória de deslocamento senoidal em relação ao eixo  $x$ . Ainda, na Figura 3.10 apresenta-se o deslocamento e a aceleração do centro de massa da plataforma também com respeito ao movimento no eixo  $x$ .

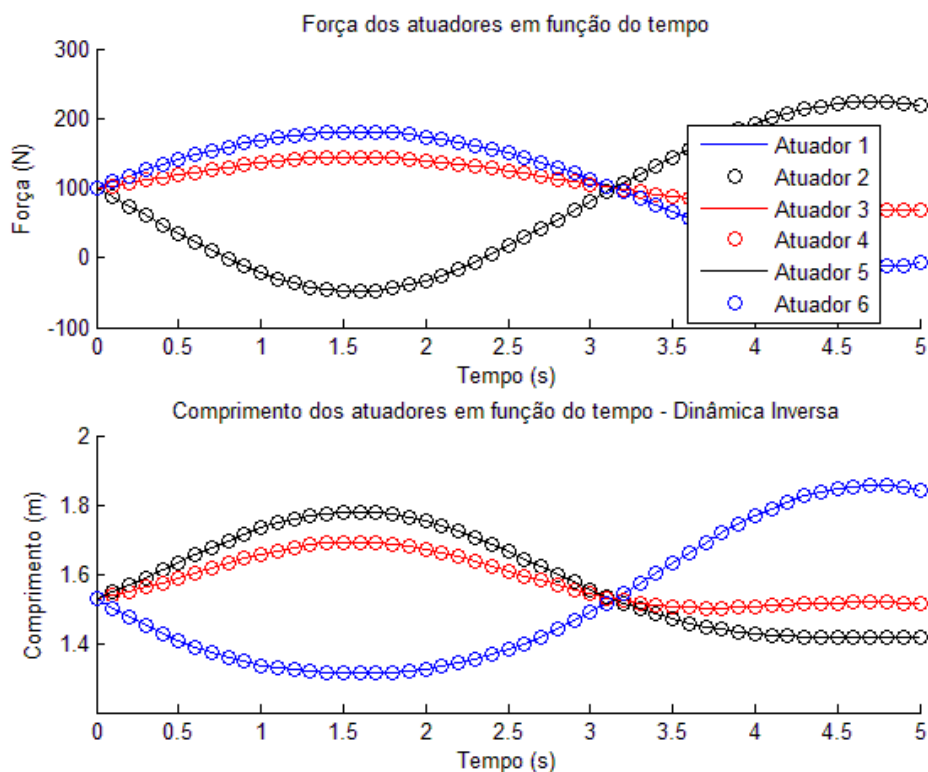


Figura 3.9 - Forças e comprimentos dos atuadores para uma trajetória de deslocamento senoidal na direção  $x$ .

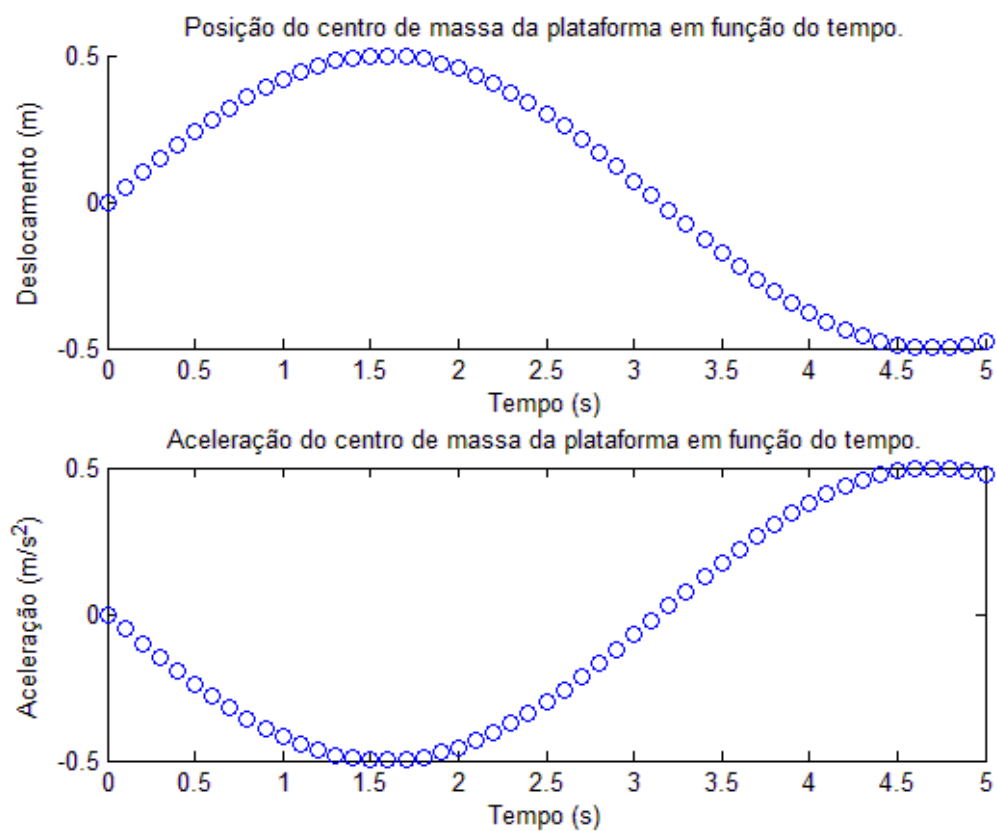


Figura 3.10 - Deslocamento e aceleração do centro de massa da plataforma para uma trajetória senoidal na direção  $x$ .

A Figura 3.11 apresenta o movimento acumulado dos atuadores 4, 5 e 6 para uma trajetória senoidal imposta na direção  $x$ . Comparando essa com as representações gráficas do deslocamento e forças, observa-se que, quando a plataforma avança na direção  $x$  positiva, existe uma redução no comprimento dos atuadores 1 e 6. Da mesma forma ocorre quando da inversão da direção do movimento, onde os atuadores 4 e 3 são aqueles onde existe uma redução no comprimento.

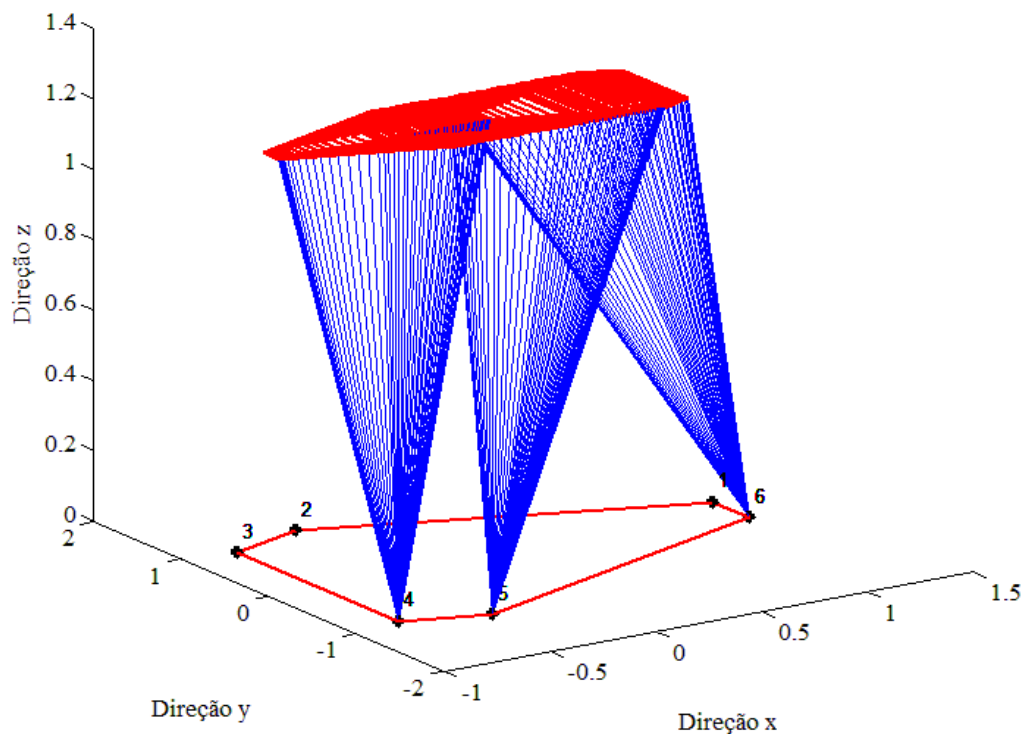


Figura 3.11 - Movimento acumulado dos atuadores 4, 5 e 6 para um deslocamento imposto na direção  $x$ .

### 3.5 Dinâmica Direta

Os testes e validação no modelo da dinâmica direta são realizados aplicando-se os vetores de forças obtidos ao longo do tempo nas simulações da dinâmica inversa. Obtêm-se, assim, os valores das acelerações para cada iteração. O passo de integração utilizado num primeiro momento foi de  $10^{-1}$  segundos para um movimento com duração de  $t = 5$  s.

Esses valores são então integrados, no tempo, para obtenção das velocidades e são depois novamente integrado para obtenção das posições, as quais são usadas para o cálculo da nova configuração da plataforma e de uma nova matriz Jacobiana, sucessivamente.

A primeira simulação considerou o movimento descrito na seção 3.4.1 .

Os resultados obtidos mostraram diferenças significativas, conforme a Figura 3.12, onde é apresentada a comparação entre as acelerações e comprimentos quando da aplicação de uma

trajetória senoidal de deslocamento no eixo  $x$ . Visualiza-se facilmente que as respostas para a dinâmica inversa e a resposta para a dinâmica direta, calculada a partir das forças obtidas no cálculo da dinâmica inversa, são significativamente distintas.

Diante destes resultados preliminares, buscou-se averiguar as causas das discrepâncias. Como é possível visualizar através da Figura 3.12, os resultados das acelerações apresentaram já diferenças significativas que se propagaram para as velocidades e, posteriormente, para as posições.

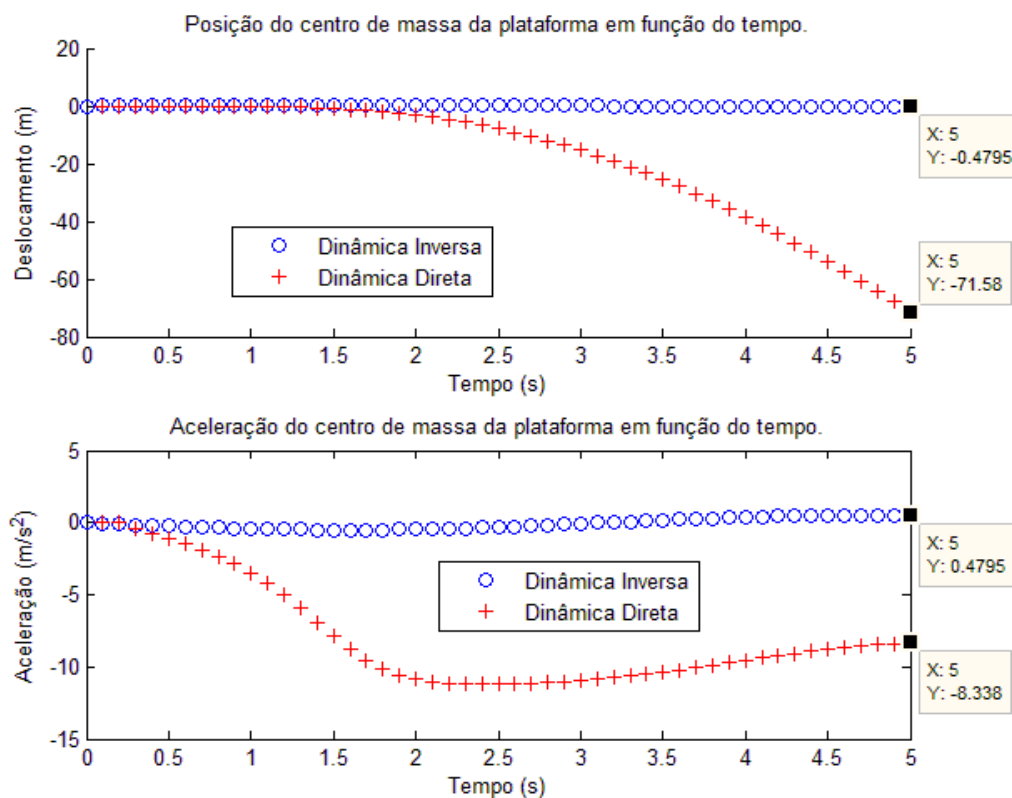


Figura 3.12 - Comparação entre soluções para dinâmica inversa e direta considerando a mesma trajetória no eixo  $x$ .

Um novo teste foi realizado, modificando-se a trajetória aplicada para deslocamento senoidal no eixo  $x$ , com amplitude  $a = 0,5 \text{ m}$  e frequência  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ , ou seja, cinco vezes maior quando comparada a frequência da trajetória anterior. O tempo de simulação foi reduzido para  $t = 0,5 \text{ s}$  e o passo de integração foi reduzido para  $10^{-3}$  segundos. Neste caso, obteve-se um resultado mais aproximado. A Figura 3.13 mostra as curvas das acelerações e comprimentos

dos atuadores obtidos. Observa-se que a aceleração calculada através da dinâmica direta é próxima daquela imposta no estudo da dinâmica inversa, e que a posição apresenta um erro muito grande. Como o algoritmo atualiza a posição geométrica a cada passo de integração, com o passar do tempo, a aceleração passa a apresentar valores com maior diferença pois os novos valores são resultado de uma função que depende da posição em instantes anteriores.

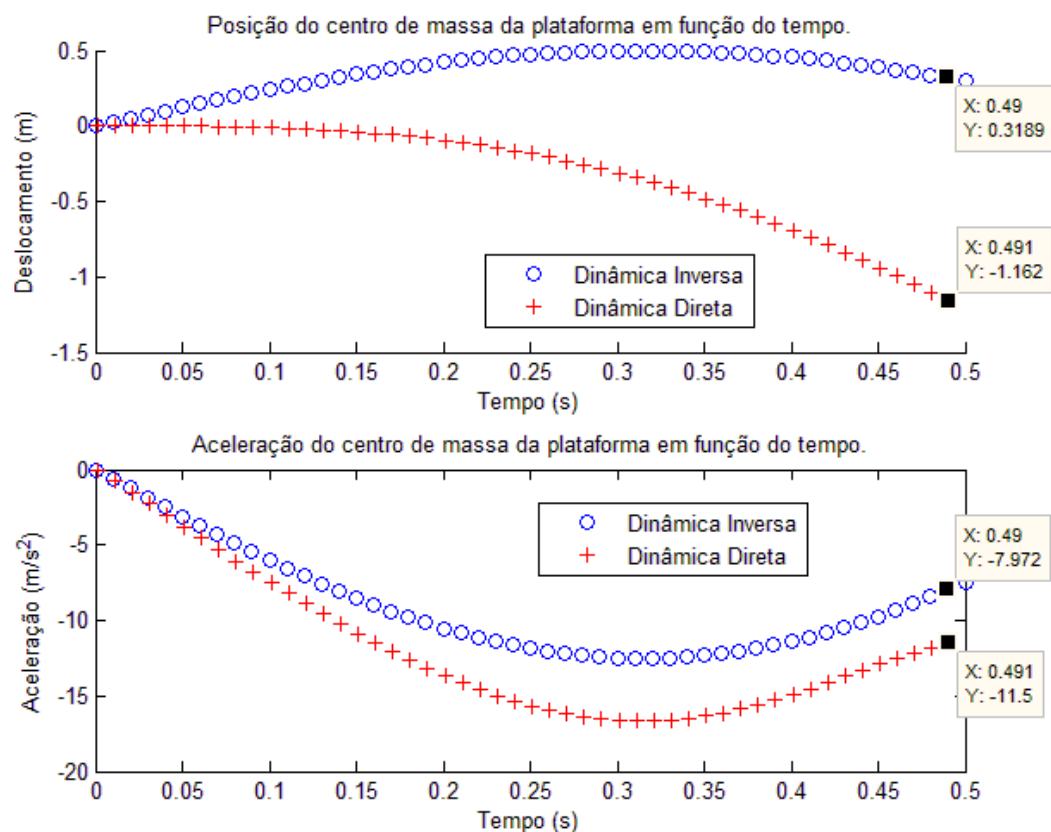


Figura 3.13 - Comparação entre acelerações e deslocamentos do centro de massa da plataforma para a nova trajetória.

Modificando-se o passo de integração para  $10^{-5}$  segundos e considerando um tempo de simulação de  $t = 0,1$  s, o resultado é apresentado na Figura 3.14.



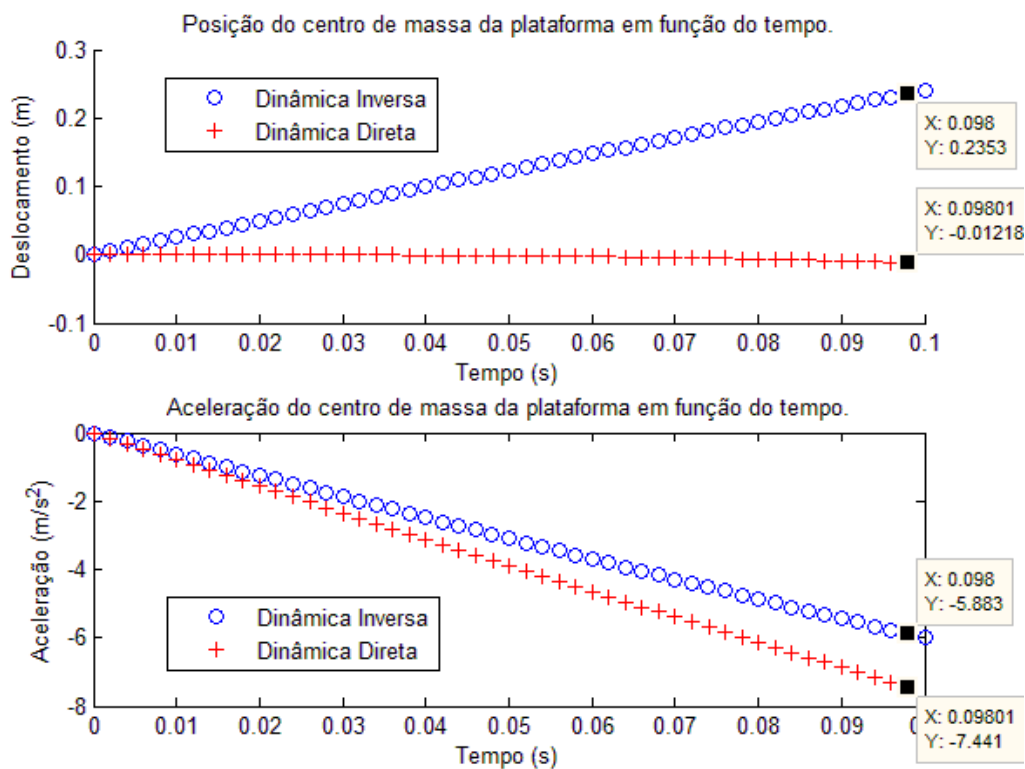


Figura 3.14 - Comparações considerando um passo de integração de  $10^{-5}$  segundos.

Para uma trajetória semelhante à anterior, modificando-se a frequência para  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , mantendo-se o passo de integração, observa-se uma diminuição maior na diferença da aceleração das respostas da dinâmica inversa comparada às da dinâmica direta, como pode ser observado através da Figura 3.15.

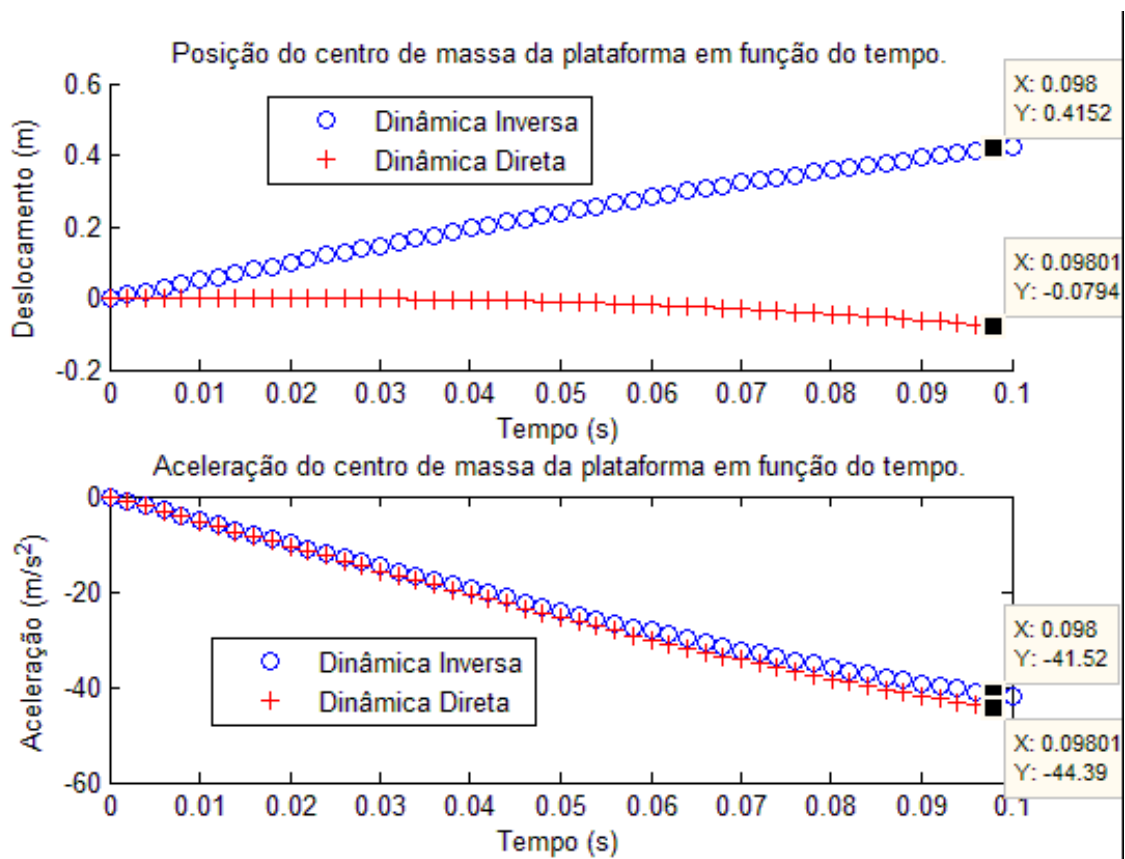


Figura 3.15 - Comparação entre acelerações e deslocamentos para frequência 10 *rad/s*.

## 4 CONCLUSÕES

Os modelos da cinemática inversa e direta foram testados e apresentaram resultados compatíveis. Verificou-se que as diversas restrições de acoplamento naturais do modelo não apresentam influência significativa na resolução de problemas de cinemática, dado que a solução para a cinemática inversa é única e para a cinemática direta usa-se um método de aproximação com minimização de uma função que apresentou resultados adequados.

A análise dos modelos dinâmicos mostrou respostas com diferenças significativas. Em um estudo preliminar, constatou-se que o modelo da dinâmica inversa apresentou respostas semelhantes às encontradas na literatura, enquanto que a dinâmica direta apresentou resultados discrepantes, com relação aos da dinâmica inversa.

A aplicação de outros métodos de integração para a resolução do problema pode trazer elementos que permitam elucidar o motivo das discrepâncias encontradas. Além disso, a redução no passo de integração mostrou uma melhora significativa na aproximação do valor da aceleração. Entretanto, mesmo utilizando um passo de  $10^{-5}$  segundos, as discrepâncias na posição da plataforma obtida pela dinâmica direta em comparação com a dinâmica inversa, permaneceram.

### 4.1 *Trabalhos futuros*

Como trabalhos futuros, podem-se citar os seguintes:

- Revisão do método de integração e implementação de um substituto, de forma a verificar o modelo dinâmico direto com as curvas do modelo dinâmico inverso.
- Desenvolvimento matemático e implementação de limites no movimento dos atuadores, tanto com relação aos seus comprimentos quanto com relação às singularidades existentes no modelo.
- Estudo do espaço de trabalho da plataforma, quando totalmente caracterizada.
- Inclusão, no modelo matemático, do modelo do atuador considerando seu acionamento.
- Estudo e desenvolvimento de técnicas de controle com o objetivo de controle de posição.

## 5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHI, F. **Kinematic Analysis for a Six-Degree-of-Freedom 3-RPS Parallel Mechanism**. IEEE J. of Robotics and Automation, Vol 4, pp 131-142, 1988.

CECCARELI, Marco. **Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation**. International Series on Microprocessor-based and Intelligent Systems Engineering. University of Cassino, Italy, 2004.

DIETMAIER, P. **The Stewart-Gough platform of general geometry can have 40 real postures**. Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, Norwell, 1998.

DIEUDONNE, J. E. PARRISH, R. V., BARDUSCH, R. E., **An actuator Extension Transformation for a Motion Simulator and an Inverse Transformation Applying Newton-Raphson's Method**. NASA Technical Report, Hampton, 1972.

FITZGERALD, J. M., LIU, K., LEWIS, F. L., **Kinematic Analysis of a Stewart Platform Manipulator**. IEEE, Vol. 40, 1993.

GOUGH, V. E., WHITEHALL, S. G. **Universal Tyre Test Machine**. Proc. 9th Int. Tech. Congress FISITA, 1962.

GOSSELIN, C., **Kinematic Analysis, Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators**. Thesis for Degree of Doctor of Philosophy, Universite de Sherbrooke, 1985.

GRIFFIS, M., DUFFY, J. **A Forward Displacement Analysis of a Class of Stewart Platforms**. J. of Robotics Systems. Vol. 6, pp. 703-720, 1989.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. Vol 2. Prentice Hall, 2005.

KÜÇÜK, S. **Serial and Parallel Robot Manipulators - Kinematics, Dynamics, Control and Optimization**. InTech, Croatia, 2012.

LIN, W., DUFFY, J., GRIFFIS, M. **Forward Displacement Analysis of the 4-4 Stewart Platforms**. Proc. of the 21st Biennial Mechanisms Conference, ASME, New York, 1990.

LI, D., SALCUDEAN, S. E., **Modeling, Simulation and Control of a Hydraulic Stewart Platform**. University of British Columbia, International Conference on Robotics and Automation, 1997.

MERLET, J-P. **Parallel Manipulators Part 1: Theory, Design, Kinematics, Dynamics and Control**. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, France, 1987.

MOLINA, F. A., **Ambiente de simulação de manipuladores paralelos: modelagem, simulação e controle de uma plataforma Stewart**. Dissertação. UNICAMP, 2008.

MOOSAVI, H., HAJIMIRZAALIAN, H., MASSAH, M., **Analyzing and Simulating the Inverse and the Direct Dynamics of Parallel Robot Stewart Platform**. IEEE, 2010.

MORETTI, M., **Estudo dinâmico e simulação de uma plataforma de Stewart com ênfase na implementação do sistema de controle**. Dissertação. UNICAMP, 2010.

STEWART, D. **A platform with six degrees of freedom**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, London, 1965.

SUGIMOTO, K., **Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra**. ASME Engineering Technical Conference, Columbus, 1986.

WALDRON, K. J., HUNT, K. H., **Series-Parallel Dualities in Actively Coordinated Mechanisms**. Proc. of the 4th Int. Symp. on Robotic Research, MIT, Cambridge, 1987.

YANG, D. C., DODO, W., **Inverse Dynamics of a platform type of manipulating structure**. ASM Design Engineering Technical Conference, Columbus, 1986.