
SÍNTESE DE CONTROLADORES REPETITIVOS CHAVEADOS: UMA APLICAÇÃO À FONTES ININTERRUPTAS DE ENERGIA (UPS)

Jeferson Vieira Flores*

jeferson.flores@ufrgs.br

João Manoel Gomes da Silva Jr*

jmgomes@ece.ufrgs.br

Luís Fernando Alves Pereira*

lfpereira@ece.ufrgs.br

Daniel Ferreira Coutinho†

coutinho@das.ufsc.br

Guilherme Bonan*

bonan@cp.com.br

*UFRGS - Departamento de Engenharia Elétrica,
Av. Osvaldo Aranha 103, 90035-190
Porto Alegre-RS, Brasil.

†Departamento de Automação e Sistema - CTC - UFSC
Cx. Postal 476, 88040-900
Florianópolis-SC, Brasil

ABSTRACT

Switched Repetitive Controller Design: An Application to Uninterruptible Power Supplies (UPS)

This paper presents a methodology for the synthesis of repetitive switched controllers to ensure the reference tracking of sinusoidal signals and the disturbance rejection on Uninterruptible Power Supplies - UPS. To improve both transitory and steady-state behavior of the output signal, we consider a state-space realization of a switched repetitive controller aiming two distinct operation conditions: transitory response (to improve the recovery time when the load is changed) and steady-state (to reduce the total harmonic distortion of the output signal when subjected to nonlinear loads). Based on a state-space framework, a state feedback is introduced to ensure the stability of the closed-loop when it is subjected to an arbitrary switching function. From a Lyapunov-Krasovskii functional, LMI conditions are derived to compute the stabilizing feedback gain. The dynamic behavior of the proposed control scheme is presented through simulation of a real UPS

model subjected to non-linear loads.

KEYWORDS: Repetitive control, Switched controller, Time-delay systems, Uninterruptible Power Supplies - UPS, Linear Matrix Inequalities - LMIs.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia de síntese de controladores repetitivos visando o seguimento assintótico de sinais senoidais e a rejeição de perturbações periódicas em fontes ininterruptas de energia (UPS). Para obter uma boa relação entre desempenho transitório e em regime permanente, emprega-se uma representação no espaço de estados do controlador repetitivo com dois modos distintos de operação. Dessa forma, permite-se que o controlador repetitivo chaveie entre as seguintes situações: regime transitório (responsável por melhorar o tempo de recuperação quando a carga é alterada) e regime permanente (responsável pela rejeição da distorção harmônica do sinal de saída quando alimentando cargas não-lineares). A partir da representação do sistema e do controlador repetitivo no espaço de estados, utiliza-se uma realimentação de estados para a garantia da estabilidade do

Artigo submetido em 24/06/2010 (Id.: 01164)

Revisado em 23/09/2010, 26/11/2010

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Takashi Yoneyama

sistema em malha fechada quando este é sujeito a uma função de chaveamento arbitrária. A partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, obtém-se um conjunto de condições na forma de desigualdades matriciais lineares (*LMI*s) para a determinação da realimentação de estados. O desempenho dinâmico do esquema de controle proposto é ilustrado através da simulação de modelos reais de sistemas *UPS* sujeitos a variações de cargas não-lineares.

PALAVRAS-CHAVE: Controlador repetitivo, Controladores chaveados, Sistemas com atraso no tempo, Fontes Ininterruptas de Energia - *UPS*, Desigualdades Matriciais Lineares - *LMI*s.

1 INTRODUÇÃO

Uma das estratégias mais utilizadas para a proteção de cargas críticas contra distúrbios ou faltas na rede elétrica é alimentá-las através de sistemas do tipo *UPS - Uninterruptible Power Supplies*. A primeira geração desses equipamentos eram sistemas dinâmicos, compostos por alternadores, motores de corrente contínua e bancos de baterias (Figueira, 2005). Com o desenvolvimento da Eletrônica de Potência e dos dispositivos semicondutores, as *UPS* passaram a ser estáticas, através da utilização de conversores eletrônicos. Estes sistemas estáticos acabaram resultando em um melhor aproveitamento da energia, altos rendimentos, redução no peso e volume das unidades e melhor desempenho. Em função da crescente exigência na qualidade da energia entregue a essas cargas, as *UPS* estão sujeitas a severas condições de operação, como o elevado desempenho dinâmico, rendimento, boa atenuação de ruídos e baixa distorção harmônica total (do inglês, *Total Harmonic Distortion - THD*). Visando atender a todos esses requisitos, diversas técnicas de controle vêm sendo estudadas e desenvolvidas nos últimos anos, principalmente buscando adequar um elevado desempenho dinâmico e baixos níveis de *THD* quando tais sistemas são submetidos a cargas com características não-lineares.

Historicamente, a técnica de controle mais utilizada pela indústria em geral, inclusive pelos fabricantes de *UPS*, são os clássicos controladores Proporcional-Integral-Derivativo (*PID*) (Rech e Pinheiro, 2000; Willmann et al., 2007; Timbus et al., 2009). No caso das *UPS*, o controlador *PID* pode ser utilizado de forma modificada, contendo dois laços de controle distintos (ver (Thomaz, 2009) e referências). Neste caso, o laço interno é realizado por um compensador proporcional-derivativo (*PD*), responsável pelo seguimento da referência senoidal (denominada dinâmica rápida). O laço externo é composto por um controlador proporcional-integral (*PI*), responsável pelo ajuste do valor *RMS* (do inglês, *Root Mean Square - RMS*) da tensão de saída, também chamada de dinâmica lenta. Dessa forma, o erro de regime é eliminado pelo controlador *PI*, onde o valor *RMS* da saída apresenta ca-

acterísticas constantes ao longo do período. Entretanto, essa estrutura não apresenta desempenho transitório satisfatório em função de uma dinâmica lenta e não-linear oriunda da inserção de um sensor que realize as medidas *RMS* de tensão na malha de realimentação do sistema.

Com o objetivo de garantir o seguimento robusto de referências e a rejeição de perturbações também de forma robusta é comum a utilização de controladores baseados no princípio do modelo interno, de modo que o controlador (ou o processo a ser controlado) deve apresentar os modos estáveis ou marginalmente estáveis da referência e/ou da perturbação. Com base nesse princípio pode-se entender, por exemplo, a necessidade da introdução da ação integral para a garantia de seguimento de referências constantes, em sistemas de controle estáveis em malha fechada operando com realimentação unitária e negativa. De forma análoga, pode-se entender a inclusão de controladores que possuam “modos senoidais”, quando o objetivo da malha de controle é garantir o perfeito seguimento de um sinal de referência senoidal. A extensão do princípio do modelo interno para o seguimento de referências de sinais de natureza periódica é direta, uma vez que tais sinais podem ser representados por série de Fourier através da soma ponderada de termos senoidais com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental do sinal que se deseja seguir. Para tanto, basta introduzir no controlador os modos correspondentes às harmônicas do sinal desejado. A maior desvantagem desta técnica é que a ordem do controlador resultante aumenta conforme aumenta o número de “modos senoidais” necessários para descrever o sinal de referência de forma adequada. Uma das primeiras metodologias que utilizaram o princípio do modelo interno é a chamada abordagem servocompensador de Francis e Wonham (1975) e Davison (1976), de tal forma que o controlador proposto consiste de um compensador que garante o seguimento adicionado a um controlador estabilizante. Posteriormente, esse trabalho foi estendido para sistemas não-lineares em Byrnes e Isidori (2000) e referências. Atualmente, o princípio do modelo interno vem sendo utilizado associado a outras técnicas como controladores repetitivos (Flores et al., 2010), controladores por modos deslizantes (Lu e Hwang, 2009), inversão estável do modelo da planta (Wang et al., 2009), controle adaptativo (Jiang e Liu, 2009) e sistemas sujeitos a restrições de controle (Flores e Gomes da Silva Jr., 2010).

Uma maneira alternativa de se considerar seguimento de referência de sinais periódicos utilizando-se do princípio do modelo interno são os chamados controladores repetitivos. Estes controladores são basicamente constituídos de um laço direto com ganho unitário e um laço de realimentação positiva composto por um elemento de atraso correspondente ao período fundamental do sinal de referência que se deseja seguir. Neste caso, é possível concluir que a resposta em frequência do controlador apresenta picos de ressonân-

cia em múltiplos inteiros da frequência fundamental. Sendo assim, assegurando-se a estabilidade do sistema de malha fechada com esse tipo de controlador, o sinal de erro deverá ser nulo para todas as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Por sua relativa simplicidade e capacidade de lidar com sinais periódicos genéricos (independente do seu conteúdo harmônico), os controladores repetitivos vem sendo amplamente utilizados nos últimos anos no controle de *UPS* (ver, por exemplo, (Zhang et al., 2003; Escobar et al., 2007; Escobar et al., 2008; Zhou et al., 2009) e referências). Em Escobar et al. (2007), a estrutura clássica do controlador repetitivo é adicionada de um laço de realimentação negativa, compensando assim apenas as harmônicas ímpares da frequência fundamental. Em Zhou et al. (2009) é proposto o chamado *dual mode repetitive control*, considerando dois controladores repetitivos em paralelo. Implementações digitais de controladores repetitivos em sistemas do tipo *UPS* foram estudadas em (Rech et al., 2003; Montagner et al., 2003; Michels e Grundling, 2005) e (Michels et al., 2009). Em Rech et al. (2003), é apresentada uma comparação entre diferentes implementações de tempo discreto do controlador repetitivo, aplicadas a inversores de tensão. Já em Montagner et al. (2003), a metodologia proposta é capaz de garantir boas margens de estabilidade e de reduzir os erros provenientes de perturbações periódicas através da combinação de um regulador quadrático linear digital e de uma estrutura repetitiva. Finalmente, em Michels et al. (2009) a estrutura original do controlador repetitivo é alterada de forma a garantir o seguimento e a rejeição de sinais periódicos de frequência variável. A partir de uma análise da função de transferência do controlador repetitivo pode-se destacar a existência de um compromisso entre a capacidade do sistema em rejeitar harmônicas e o seu desempenho dinâmico. Dessa forma, é possível que não exista um controlador capaz de atender tanto os requisitos transitórios quanto os de regime permanente inerente aos sistemas *UPS*. Uma das alternativas para contornar esse compromisso é a utilização de um controlador chaveado, sendo os parâmetros de um dos controladores projetados visando o desempenho dinâmico e os parâmetros do outro controlador são definidos de forma a proporcionar uma baixa distorção harmônica total no sinal de saída do sistema. No que diz respeito ao estudo da estabilidade de sistemas chaveados, é importante mencionar que a existência de um controlador que garanta a estabilidade de cada um dos subsistemas independentemente não é uma condição suficiente para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada quando este está sujeito a uma função de chaveamento arbitrária (Liberzon e Morse, 1999) e (Leith et al., 2003). Neste caso, uma das técnicas mais usuais tem como objetivo encontrar um conjunto de ganhos (um para cada sistema independente) associados a uma função de Lyapunov comum (Montagner et al., 2006). Outras técnicas encontradas na literatura são baseadas na utilização de múlti-

plas funções de Lyapunov (Branicky, 1998), funções de Lyapunov quadráticas por partes (Gahinet et al., 1996; Trofino e de Souza, 2001; Leite e Peres, 2004) e funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (de Oliveira et al., 2004).

Por outro lado, a utilização do controlador repetitivo introduz um elemento de atraso no sistema em malha fechada, exigindo assim a utilização de ferramentas teóricas específicas. Nesse sentido, vários resultados são apresentados na literatura para análise de estabilidade e/ou estabilização (Sun et al., 2006; Yan e Özbay, 2008), estabilização \mathcal{H}_∞ (Du et al., 2007), controle robusto (Li e de Souza, 1997), controle ótimo (Wu et al., 2006) e seguimento de referência (Li, Zhao e Dimirovski, 2008; Li et al., 2009) considerando sistemas com atrasos no tempo. Seguindo a ideia de uma única função de Lyapunov, uma das abordagens principais para análise de estabilidade de sistemas chaveados com atraso consiste na construção de um funcional de Lyapunov-Krasovskii (Gomes da Silva Jr. e Leite, 2007) comum a todos os subsistemas. Em Kim et al. (2006), através do estudo de um sistema chaveado composto de um número finito de equações diferenciais funcionais, é mostrado que a estabilidade assintótica desse tipo de sistema chaveado pode ser obtida através da utilização de um funcional de Lyapunov-Krasovskii comum e uma lei de chaveamento mínima. Extensões destes resultados para sistemas chaveados com atrasos discretos e distribuídos são apresentados em Gao et al. (2008). Porém, esse funcional e a lei de chaveamento são construídos baseados na existência de uma combinação linear estável das matrizes dos termos que não dependem do atraso. Através de uma metodologia dependente do valor do atraso, foi mostrado que o sistema em malha fechada é estável apenas para atrasos pequenos. O problema de análise de estabilidade e estabilização de uma classe de sistemas neutros chaveados é estudado em Zhang et al. (2007), onde condições dependentes do atraso foram obtidas através de uma formulação *LMI*. Seguindo essas mesmas ideias, em Mahmoud et al. (2009) são apresentadas condições *LMIs* dependentes do atraso para a estabilização robusta, análise de desempenho e estabilização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ quando o sistema está sujeito a uma lei de chaveamento arbitrária.

Neste trabalho, é proposta uma técnica de chaveamento entre duas condições de operação do controlador repetitivo, de tal maneira que uma delas privilegia o desempenho dinâmico e a outra uma boa rejeição de harmônicas. Através de uma formulação no espaço de estados e de um funcional de Lyapunov-Krasovskii comum às duas condições de operação, são obtidas condições na forma de *LMI* independentes do atraso para a síntese de uma realimentação estática de estados estabilizante quando o sistema está sujeito a uma função de chaveamento arbitrária. O comportamento da solução proposta é analisado em função de exemplos de simulação, considerando o modelo de uma *UPS* proposto na literatura.

Este trabalho está organizado como segue: na Seção 2 é apresentado o modelo no espaço de estados da UPS considerada. Na Seção 3 é apresentada uma explicação detalhada sobre o controlador repetitivo e é proposta uma realização deste controlador no espaço de estados. Baseado nesta realização, são estabelecidas condições para a síntese de uma realimentação estática de estados estabilizante, sendo a garantia de estabilidade obtida de forma independente do atraso, através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Na Seção 4 os resultados da seção anterior são estendidos para sistemas chaveados, onde é permitido que o controlador repetitivo chaveie entre duas condições distintas de operação. Além disso, são estabelecidas condições para a síntese dos ganhos dos controladores chaveados através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii comum a todos os subsistemas. Finalmente, o comportamento da solução proposta é analisado através de exemplos de simulação.

Notações: A i -ésima componente do vetor x é definida por $x_{(i)}$. $A_{(i)}$ denota a i -ésima linha da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A(i, j)$ denota o elemento localizado na i -ésima linha e j -ésima coluna e A^T denota a transposta da matriz A . $diag\{x\}$ denota a matriz diagonal obtida a partir do vetor x e I_m denota a matriz identidade de ordem m . $He\{AX\}$ denota o bloco simétrico $AX + X^T A^T$ e $*$ denota elementos simétricos em uma matriz, isto é, $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ * & A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix}$

2 SISTEMA DE INTERESSE

Nesta seção será apresentado um modelo de uma UPS seguindo as ideias de Pereira et al. (2009). Neste caso, o modelo deste sistema UPS pode ser representado no espaço de estados como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(Y_0))x(t) + Bu(t) + B_d d(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ e(t) &= r(t) - y(t) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo que o vetor de estados $x(t)$ é composto pela corrente no indutor e pela tensão no capacitor, respectivamente, $u(t)$ é o sinal do controle, $d(t)$ é o sinal de distúrbio, neste caso empregado com a finalidade de incluir no modelo o comportamento de correntes associados às cargas não-lineares, $y(t)$ é a tensão de saída da UPS e $e(t)$ o sinal de erro. Supõe-se que as matrizes A , B , B_d e C são matrizes reais, constantes e de dimensões apropriadas. A UPS a ser modelada é apresentada no circuito simplificado da Figura 1. A chave presente no esquemático serve apenas para conectar e desconectar uma carga no instante desejado.

A incerteza considerada (1) é uma incerteza limitada em norma (Li e de Souza, 1997) que depende da admitância nominal da carga, de tal forma que $\Delta A(Y_0) = H\Xi(t)E$. As matrizes H e E são matrizes reais e conhecidas que caracteri-

zam a estrutura das incertezas, enquanto $\Xi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função matricial desconhecida cujos elementos satisfazem a relação $\Xi^T(t)\Xi(t) \leq I_n$. Uma formulação alternativa seria considerar a incerteza através de uma abordagem politópica, onde a estabilidade é garantida para cada um dos vértices do politopo que caracteriza as incertezas (Leite e Peres, 2003).

Baseado na teoria de circuitos, as matrizes que definem a representação no espaço de estados deste sistema são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L_f}}{L_f} & -\frac{1}{L_f} \\ \frac{1}{C_f} & -\frac{Y_{0m}}{C_f} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta Y_0}{C_f} \end{bmatrix}, \quad E = I_2, \\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_f} \end{bmatrix}, \quad \text{e } C = [0 \quad 1]$$

onde R_{L_f} é a resistência equivalente do indutor, Y_{0m} é o valor médio da admitância de carga, ΔY_0 é a variação da admitância de carga em torno do valor médio, L_f é a indutância do filtro de saída e C_f é a capacitância do filtro de saída. Desta forma, a impedância nominal da carga pode assumir qualquer valor no intervalo $[Y_{0m} - \Delta Y_0, Y_{0m} + \Delta Y_0]$.

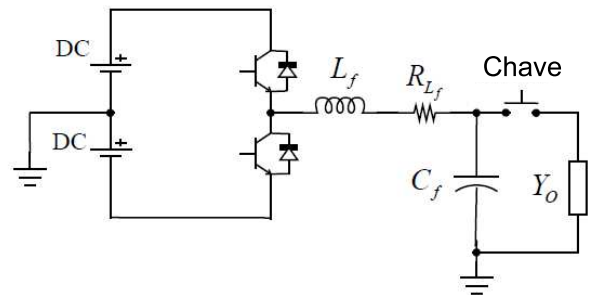


Figura 1: Circuito elétrico simplificado da UPS.

3 CONTROLADOR REPETITIVO

3.1 Conceitos Básicos

O controlador repetitivo foi inicialmente proposto em Inoue et al. (1981) como uma forma alternativa de garantir o seguimento de referências periódicas e a rejeição de perturbações também de natureza periódica. A grande vantagem deste tipo de controlador é que o seguimento/rejeição é garantido para qualquer sinal com período fundamental τ , independente de seu conteúdo harmônico. A ideia básica por trás deste controlador (que também da origem ao seu nome) é o armazenamento do erro de seguimento durante um período completo e a consequente realimentação deste sinal de erro no sistema através de um controlador apropriado (Yamamoto, 1993). Esta seqüência se repete a cada período do sinal de entrada.

Normalmente, este comportamento é obtido através da introdução de um elemento de atraso na malha de controle com o mesmo valor do período fundamental τ em um laço de realimentação positiva, conforme mostrado na Figura 2.

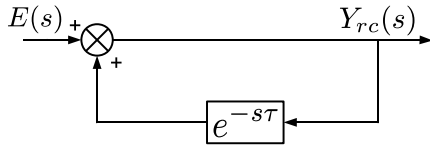


Figura 2: Configuração básica do controlador repetitivo.

Neste caso, a função de transferência do erro para a saída do controlador é dada por

$$G_{rc}(s) = \frac{Y_{rc}(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 - e^{-s\tau}}. \quad (2)$$

Substituindo $s = j\omega$ e $e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)$ segue que (2) é equivalente a

$$G_{rc}(j\omega) = \frac{1}{1 - \cos(\omega\tau) + j \sin(\omega\tau)}. \quad (3)$$

De acordo com (3), conclui-se diretamente que o controlador proposto apresentará ganho infinito para sinais com frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ rad/s e também para todos os sinais que apresentem frequências múltiplas inteiras de ω_0 , ou seja, $\omega = k\omega_0$ rad/s, $k = 1, 2, \dots$.

Uma forma alternativa de entender a ideia básica associada aos controladores repetitivos é fazendo uma analogia com os controladores baseados no princípio do modelo interno (Chen, 1970). A partir da teoria que estabelece tal princípio, sabe-se que, para garantir o seguimento de um sinal de referência na forma $r(t) = \sin(\omega_1 t)$, o sistema deve ser estável em malha fechada e, adicionalmente, o controlador ou o processo a ser controlado deve conter um termo na forma $G_1(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2}$ em sua função de transferência de laço, apresentando assim um par de polos complexos em $s = \pm j\omega_1$. A presença destes polos implica em ganho infinito na frequência ω_1 . De forma análoga, se o objetivo de controle é garantir o seguimento de $r(t) = \sin(\omega_1 t)$ e, adicionalmente, rejeitar a interferência das $k - 1$ primeiras harmônicas de ω_1 , o controlador deve ser da forma

$$G_k(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} \frac{1}{s^2 + (2\omega_1)^2} \cdots \frac{1}{s^2 + [(k-1)\omega_1]^2}. \quad (4)$$

Como pode-se observar, a função de transferência (4) apresenta k pares de polos complexos sobre o eixo imaginário e ganho infinito em ω_1 e em cada um dos $k - 1$ múltiplos inteiros desta frequência. Assim, pode-se considerar o controlador repetitivo como uma generalização do princípio do

modelo interno, admitindo-se neste caso $\omega_0 = \omega_1$ e $k \rightarrow \infty$. Logo, a introdução de um elemento de atraso na malha de controle faz o papel de um controlador com a mesma estrutura de (4), porém com ordem infinita, ou seja, apresentando polos em $s = \pm jk\omega_0$, $k = 1, \dots, \infty$.

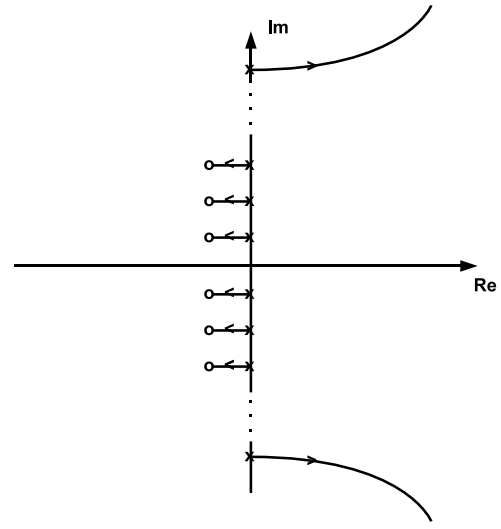


Figura 3: LGR ilustrativo.

Considerando a introdução de (4) na malha de controle e a partir de uma análise baseada em Lugar Geométrico das Raízes (LGR), nota-se que é impossível estabilizar tal sistema se a função de transferência de malha fechada apresenta um número finito de zeros (ver Figura 3). Neste caso, a estabilização do sistema exigiria a introdução de um controlador não-racional na malha de controle. Além deste problema de estabilização, do ponto de vista prático, o ganho infinito em altas frequências do controlador repetitivo pode amplificar ruídos inerentes ao processo ou ainda excitar dinâmicas não-modeladas que podem degradar o desempenho do sistema operando em malha fechada ou mesmo levá-lo à instabilidade.

Com o objetivo de contornar estes problemas de estabilização, Hara et al. (1988) propôs a introdução de um filtro passa-baixas de primeira ordem ($q(s)$) na malha do controlador repetitivo. Esta metodologia (conhecida como *Q-filter repetitive control*) permite que o sistema seja estabilizável às custas de um erro de seguimento diretamente relacionado ao valor da frequência de corte do filtro. Este erro deve-se ao fato que o ganho não é mais infinito em todas frequências múltiplas da frequência fundamental e, principalmente, pelo ganho ser muito pequeno nas altas frequências. Neste caso, a estrutura do controlador repetitivo é alterada conforme apresentado na Figura 4.

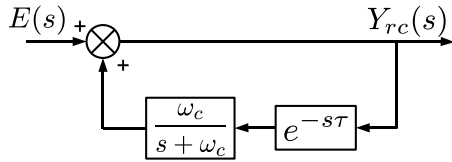


Figura 4: Estrutura básica do controlador repetitivo com o filtro $q(s)$.

A inclusão do termo $q(s) = \omega_c / (s + \omega_c)$ na malha de realimentação do controlador, resulta na seguinte função de transferência:

$$G_{rc}^f(s) = \frac{1}{1 - \frac{\omega_c}{s + \omega_c} e^{-\tau s}}. \quad (5)$$

Na Figura 5 é mostrado o diagrama de Bode de $G_{rc}^f(s)$ para valores distintos de ω_c . Note que, apesar do ganho nas frequências $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$ não ser infinito, o controlador de fato apresenta picos de ganho elevado nestas frequências. Quanto maior for o valor do ganho nestes picos, menor será o erro de seguimento para a harmônica considerada. Além disso, pode-se observar que para valores pequenos de ω_c existe um erro nas frequências onde estão localizados estes picos. Este erro também tende a diminuir conforme o valor de ω_c aumenta.

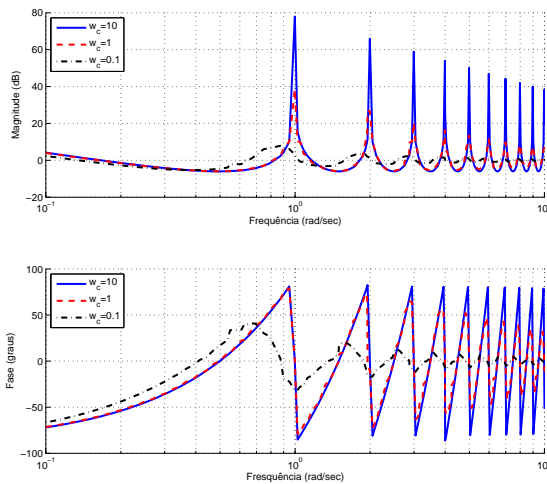


Figura 5: Diagrama de Bode de $G_{rc}^f(s)$ com $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

Na Figura 6 são apresentados os polos de $G_{rc}^f(s)$ para diferentes valores de ω_c , com o elemento de atraso sendo expandido através da aproximação de Padé. Na figura são detalhados apenas os 10 primeiros pares de polos, os quais são pouco influenciados pelos erros decorrentes desta aproximação.

ção. Relembrado, caso $\omega_c \rightarrow \infty$, os polos do controlador repetitivo estão exatamente sobre o eixo imaginário. Pode-se observar que, conforme ω_c diminui, os polos se afastam do eixo imaginário, deixando de ser puramente oscilatórios para assumir uma característica de senóide amortecida. Neste caso, quanto maior ω_c , mais perto os polos estão do eixo imaginário e, conseqüentemente, mais lento é o desempenho transitório. Por outro lado, o pequeno erro de seguimento do sinal de saída está diretamente associado a valores elevados da frequência de corte ω_c . Assim, pode-se estabelecer um compromisso entre um pequeno erro de seguimento (associado a valores grandes de ω_c) e a diminuição do tempo que o sistema leva para atingir o regime permanente (associado a valores pequenos de ω_c). É visando relaxar este compromisso que será proposto um controlador chaveado entre duas condições distintas de ω_c , com o intuito de obter uma boa resposta transitória associada a um pequeno erro (distorção) do sinal de saída.

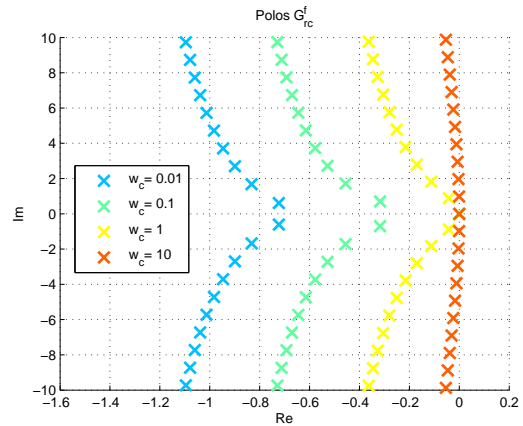


Figura 6: Polos de $G_{rc}^f(s)$ com $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

É importante ressaltar que a maioria dos trabalhos que consideram o controlador repetitivo adotam uma abordagem baseada em funções de transferência e propõem metodologias baseadas no domínio da frequência. Por outro lado, existe um crescente interesse em abordagens no espaço de estados, especialmente com o surgimento de novas técnicas para o tratamento de sistemas com atrasos. Um dos primeiros trabalhos neste sentido foi Doh e Chung (2003), apresentando condições *LMI*s apenas para a sintonia da frequência de corte do filtro passa baixas. Posteriormente, este trabalho foi estendido e analisado em (Doh et al., 2006; She et al., 2007; Sangetha e Jacob, 2008) e (Doh e Ryoo, 2008).

O trabalho Doh e Chung (2003) parte de uma possível realização do controlador repetitivo (com o filtro passa-baixas)

dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rc}(t) &= -\omega_c x_{rc}(t) + \omega_c x_{rc}(t - \tau) + e(t) \\ y_{rc}(t) &= \omega_c x_{rc}(t - \tau) + e(t), \end{aligned} \quad (6)$$

onde $x_{rc}(t) \in \mathbb{R}$. Esta realização no espaço de estados resulta na mesma função de transferência definida em (5). Vale ressaltar que o filtro $q(s)$ tem um papel fundamental na realização do controlador no espaço de estados, uma vez que é este filtro que introduz a dinâmica responsável pela determinação de $\dot{x}_{rc}(t)$. Neste caso, o sistema original é composto com (6), de forma a obter $z(t) = [x(t)^T \ x_{rc}(t)^T]^T$. A partir do sistema aumentado, condições independentes do atraso são obtidas através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Nesta mesma linha de trabalho pode-se destacar Zhao et al. (2009) e Cai et al. (2009). Em Zhao et al. (2009), um algoritmo iterativo é responsável pela síntese do controlador e pelo cálculo de ω_c . Em Cai et al. (2009) o controlador repetitivo é aplicado para sistemas com atraso, de tal forma que o problema de seguimento de referências é substituído pelo problema de estabilização do sistema que representa a dinâmica do erro. Além disso, a teoria de Hara et al. (1988) é estendida para tornar possível a sua aplicação para funções de transferência não-rationais.

3.2 Realização do controlador repetitivo no espaço de estados

A partir da função de transferência do controlador repetitivo filtrado dada por (5), pode-se obter a seguinte realização no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rc}(t) &= -\omega_c x_{rc}(t) + \omega_c x_{rc}(t - \tau) \\ &\quad + \omega_c e(t - \tau) \\ y_{rc}(t) &= x_{rc}(t) + e(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Pode-se observar que esta é uma versão alternativa da realização no espaço de estados do controlador repetitivo apresentado em Doh e Chung (2003)(ver (6)). Como a saída $y_{rc}(t)$ será aplicada diretamente (através de um ganho estático) na composição do sinal de controle, uma vantagem desta realização é que o sinal atrasado $x_{rc}(t - \tau)$ não influencia diretamente a saída da estrutura repetitiva, considerando assim apenas valores atuais na composição do sinal de controle.

A introdução do controlador repetitivo (7) no sistema em malha fechada é obtida através do vetor de estados aumentado

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{rc}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

A partir de (1) e (7) tem-se

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})z(t) + \mathbf{A}_d z(t - \tau) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}_q q(t), \quad (8)$$

com $q(t) = [r(t - \tau) \ r(t) \ d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -\omega_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -C\omega_c & \omega_c \end{bmatrix}, \\ \Delta\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \Delta A & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{A} = \mathbf{H}\Xi(t)\mathbf{E}, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} H \\ 0_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} E^T \\ 0_{n \times 1}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_q &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} & B_d \\ \omega_c & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para estabilizar o sistema (8), considera-se a lei de controle $u(t) = K_1 x(t) + K_2 y_{rc}(t)$. Esta lei de controle pode ser rescrita como $u(t) = Fz(t) + K_2 r(t)$ de tal forma que $F \in \mathbb{R}^{1 \times (n+2)} = [K_1 - CK_2 \ K_2]$, levando ao seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{z} = (\mathbf{A}_\Delta + \mathbf{B}F)z(t) + \mathbf{A}_d z(t - \tau) + \mathbf{B}_{qk} q(t). \quad (9)$$

Neste caso, tem-se que $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ e ainda que \mathbf{B}_{qk} depende do ganho K_2 através da relação

$$\mathbf{B}_{qk} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & BK_2 & B_d \\ \omega_c & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 7 é apresentada a topologia de controle considerada, sendo $u(t) = K_1 x(t) + K_2 y_{rc}(t)$.

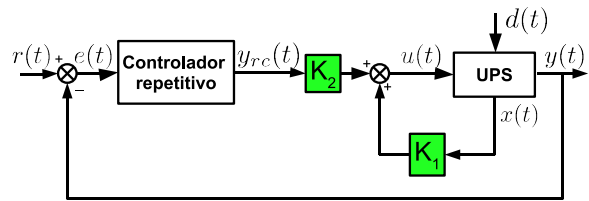


Figura 7: Topologia de controle proposta.

3.3 Condições de estabilidade

Neste trabalho, o objetivo é provar a estabilidade do sistema de forma global, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para qualquer valor de referência, perturbação e condição inicial. Em Yamamoto e Hara (1988) é mostrado que para sistemas de ordem infinita, se o sistema em malha fechada é internamente (assintoticamente) estável, então a existência do modelo interno na malha de controle implica em seguimento estável da referência. A aplicação direta desta noção

para o controlador repetitivo é apresentada no Teorema 5.12 desta mesma referência. Assim, o termo relativo às entradas externas $q(t)$ na relação (9) será desconsiderado na obtenção das *LMIs*. Desta forma, pode-se formular o seguinte problema:

Problema 1 Calcular o ganho F e a frequência de corte ω_c tais que

$$\dot{z} = (\mathbf{A}_\Delta + \mathbf{B}F)z(t) + \mathbf{A}_d z(t - \tau) \quad (10)$$

seja assintoticamente estável.

Em sistemas lineares incertos sem atraso no estado, o método de Lyapunov é uma forma efetiva de se determinar a estabilidade robusta do sistema, através de uma função $V(x)$ que quantifica o desvio entre os estados e a solução trivial nula. Para sistemas lineares submetidos a atraso nos estados, a análise é determinada seguindo os mesmos princípios, porém o conceito de estado inicial é substituído pela função inicial $\phi(t)$ no intervalo $[-\tau, 0]$. Um extensão natural da função de Lyapunov para sistemas com atraso são os funcionais de Lyapunov-Krasovskii (Gomes da Silva Jr. e Leite, 2007; Gu et al., 2003).

3.3.1 Estabilidade assintótica

Nesta seção é apresentado um teorema a fim de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada baseado nestes funcionais, considerando uma abordagem independente do valor do atraso.

Teorema 1 Se existirem as matrizes $W \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ e $S \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ simétricas positivas definidas, a matriz $Y \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ e o escalar positivo ν satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \Gamma(W, Y, S) & \mathbf{A}_d W & W \mathbf{E}^T \\ * & -S & 0 \\ * & * & -\nu I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

com $\Gamma(W, Y, S) = He\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}Y\} + S + \nu \mathbf{H} \mathbf{H}^T$ e $F = YW^{-1}$, então o sistema (10) é assintoticamente estável.

Prova. Considerando o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(z(t)) = z(t)^T P z(t) + \int_{t-\tau}^t z(\theta)^T Q z(\theta) d\theta \quad (12)$$

com $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ e calculando a sua derivada temporal ao longo das trajetórias do sistema, segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & z(t)^T ((\mathbf{A}_\Delta + \mathbf{B}F)^T P + P(\mathbf{A}_\Delta + \mathbf{B}F))z(t) \\ & + 2z(t)^T P \mathbf{A}_d z(t - \tau) - z(t - \tau)^T Q z(t - \tau) \\ & + z(t)^T Q z(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Esta relação pode ser reescrita na forma matricial como $\dot{V}(z(t)) = \eta(t)^T M \eta(t)$ com $\eta(t)^T = [z(t)^T \quad z(t - \tau)^T]$ e

$$M = \begin{bmatrix} He\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}F) + \Delta \mathbf{A}\} + Q & P \mathbf{A}_d \\ * & -Q \end{bmatrix}.$$

Pre- e pos-multiplicando M por $diag\{P^{-1}, P^{-1}\}$ e considerando $W = P^{-1}$, $S = P^{-1}QP^{-1}$ e $Y = FP^{-1}$ tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{M} = & \begin{bmatrix} He\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}Y\} + S & \mathbf{A}_d W \\ * & -S \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} He\{\Delta \mathbf{A}W\} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Seguindo as ideias apresentadas em (Mahmoud, 2000), é possível mostrar que a relação $W \mathbf{E}^T \Xi \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \Xi \mathbf{E} W \leq \nu \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \nu^{-1} W \mathbf{E}^T \mathbf{E} W$ se verifica. Assim, através do complemento de Schur, segue que (11) implica em $\tilde{M} < 0$. Se $\tilde{M} < 0$, segue que $\dot{V}(z(t)) < 0$, o que, pelo teorema de Lyapunov-Krasovskii, assegura a estabilidade assintótica de (10). ■

Observação 1 Apesar do Teorema 1 tratar apenas do problema de estabilização assintótica do sistema em malha fechada, a presença da estrutura repetitiva na malha de controle garante o seguimento de referências e a rejeição de perturbações com um erro de seguimento diretamente associado ao valor de ω_c . Desta forma, o problema da garantia de seguimento/rejeição é tratado de forma implícita nas condições apresentadas.

3.3.2 Penalização do custo do sinal de controle

Um problema implícito ao problema de estabilização apresentado anteriormente diz respeito ao cálculo do controlador de forma que o sinal de controle não assuma valores elevados. No modelo a UPS considerado, o sinal de controle não pode assumir valores maiores do que metade do valor da tensão considerada no barramento CC. Uma maneira de considerar estes limites é a introdução de uma penalização no custo do sinal de controle. Baseado na teoria clássica de regulação (referências e perturbações nulas), pode-se introduzir um custo garantido no sinal de controle se a seguinte relação for satisfeita:

$$\mathcal{L}(z(t)) = \dot{V}(z(t)) + \frac{1}{\gamma} u(t)^T u(t) < 0. \quad (14)$$

Neste caso, integrando os dois lados de (14) segue que

$$\int_0^\infty \mathcal{L}(z(t)) dt = V(\infty) - V(0) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty u(\theta)^T u(\theta) d\theta < 0.$$

Supondo (sem perda de generalidade) que a origem é o ponto de equilíbrio do sistema, tem-se que $V(\infty) = 0$ e ainda que

$$\int_0^{\infty} u(\theta)^T u(\theta) d\theta < \gamma V(0).$$

Desta forma, fica claro que a minimização de γ implica na minimização do custo do sinal de controle. Uma extensão do Teorema 1 que considera esta penalização sobre o sinal de controle é apresentada no corolário a seguir:

Corolário 1 Se existirem as matrizes $W \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ e $S \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ simétricas positivas definidas, a matriz $Y \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ e os escalares positivos ν e γ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \Gamma(W, Y, S) & \mathbf{A}_d W & W \mathbf{E}^T & Y^T \\ * & -S & 0 & 0 \\ * & * & -\nu I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

com $\Gamma(W, Y, S) = He\{\mathbf{A}W + \mathbf{B}Y\} + S + \nu \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ e $F = YW^{-1}$, então o sistema (10) é assintoticamente estável e o sinal de controle $u(t)$ satisfaz a relação

$$\int_0^{\infty} u(\theta)^T u(\theta) d\theta < \gamma V(0).$$

Prova. A prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 1, considerando agora $\mathcal{L}(z(t)) < 0$ em vez de $V(z(t)) < 0$. A partir da aplicação do complemento de Schur no termo $\frac{1}{\gamma} u(t)^T u(t) = \frac{1}{\gamma} Y^T Y$ segue que a satisfação de (15) de fato implica em $\mathcal{L}(z(t)) < 0$. ■

De forma análoga ao Teorema 1 (ver Observação 1), o Corolário 1 trata apenas do problema de estabilização, sendo o problema de seguimento tratado de forma implícita através da introdução da estrutura repetitiva na malha de controle. No caso do seguimento de referências periódicas, não é possível garantir que $V(\infty) = 0$, pois não há a convergência para um ponto de equilíbrio, mas sim para uma trajetória periódica. Desta forma, não é possível usar a condição $\int_0^{\infty} u^T(\theta)u(\theta)d\theta < \gamma V(0)$ com relação a $u(t)$ e $V(0)$ para prover um limitante sobre a norma \mathcal{L}_2 de $u(t)$ (como $u(t)$ é um sinal periódico o valor da sua norma \mathcal{L}_2 é infinito). De toda maneira, a penalização sobre o custo do sinal de controle acaba sendo considerada de forma implícita, uma vez que as condições de síntese tratam apenas do problema de estabilização interna.

Este corolário servirá como base para os resultados referentes ao controlador repetitivo chaveado apresentado na sequência, onde as mesmas ideias serão aplicadas considerando um funcional de Lyapunov-Krasovskii comum a todos os modos de chaveamento.

4 CONTROLADOR REPETITIVO CHAVEADO

As exigências impostas pelas normas que regulam as UPS (IEEE Std. 944, 1986), (ABNT, 2003) podem levar a um problema implícito de desempenho. Neste caso, o erro em regime, distorção harmônica e tempo de resposta devem ser os menores possíveis. Os dois primeiros requisitos são satisfeitos quando o valor de ω_c é o maior possível. Seguindo a discussão apresentada na Seção 3.1, quanto maior o valor de ω_c , maior é o tempo de resposta do sistema. Visando melhorar o desempenho transitório, é proposto o chaveamento entre dois valores distintos de ω_c , sendo um deles baixo para atender os requisitos de resposta transitória e outro elevado para melhorar o erro em regime e a distorção harmônica. Nesta seção é apresentada uma formulação do controlador repetitivo considerando este chaveamento, além de condições para a garantia da estabilidade do sistema chaveado quando sujeito a uma lei de chaveamento arbitrária.

4.1 Sistemas Chaveados - Conceitos Básicos

Considere o seguinte sistema chaveado:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathbb{A}_{\sigma(t)} z(t) + \mathbb{A}_{d\sigma(t)} z(t - \tau) + \mathbb{B}_q q(t) \\ z_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

de tal forma que $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{J}$, $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, N\}$ é uma função de chaveamento arbitrária que seleciona qual sistema está ativo em cada instante de tempo. Neste caso, as matrizes $\mathbb{A}_{\sigma(t)}$ e $\mathbb{A}_{d\sigma(t)}$ são definidas através do chaveamento no interior dos conjuntos $\mathbb{A}_{\sigma(t)} \in \Omega = \{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_N\}$ e $\mathbb{A}_{d\sigma(t)} \in \Omega_d = \{\mathbb{A}_{d1}, \mathbb{A}_{d2}, \dots, \mathbb{A}_{dN}\}$. Assim, para cada instante de tempo t o par $(\mathbb{A}_{\sigma(t)}, \mathbb{A}_{d\sigma(t)})$ assume o valor de apenas um par de matrizes $(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{di})$ no interior de Ω e Ω_d , respectivamente.

Considerando que o par $(\mathbb{A}_{\sigma(t)}, \mathbb{A}_{d\sigma(t)})$ assume o valor $(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{di})$ no instante de tempo $t = t_i$, então a dinâmica de (16) é representada por

$$\dot{z}(t) = \mathbb{A}_i z(t) + \mathbb{A}_{di} z(t - \tau) + \mathbb{B}_q q(t)$$

durante todo o intervalo $t \in [t_i, t_i + \delta_i)$. Neste caso, δ_i denota o tempo em que o sistema é definido pelo par $(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{di})$. Já no instante $t = t_i + \delta_i = t_j$ ocorre o chaveamento do sistema e agora a sua dinâmica é definida como

$$\dot{z}(t) = \mathbb{A}_j z(t) + \mathbb{A}_{dj} z(t - \tau) + \mathbb{B}_q q(t)$$

$\forall t \in [t_j, t_j + \delta_j)$. Nesta transição, assume-se que o vetor de estados $z(t)$ não apresenta descontinuidades (saltos) em $t = t_i + \delta_i = t_j$, isto é, o estado inicial de $\dot{z}(t) = \mathbb{A}_j z(t) + \mathbb{A}_{dj} z(t - \tau) + \mathbb{B}_q q(t)$ assume o valor do estado final de $\dot{z}(t) = \mathbb{A}_i z(t) + \mathbb{A}_{di} z(t - \tau) + \mathbb{B}_q q(t)$.

Uma das maiores dificuldades na análise de sistema chaveados é que, mesmo que cada um dos sistemas seja assintoticamente estável, o sistema resultante deste chaveamento pode ser instável. Neste caso, uma das maneiras mais usuais de provar a estabilidade do sistema chaveado para uma função de chaveamento $\sigma(t)$ arbitrária é encontrar condições sob as quais existe uma função de Lyapunov comum a toda família de sistemas (Liberzon e Morse, 1999). Ideias similares foram utilizadas em Hien (2009) e Li, Dimirovski e Zhao (2008) para garantir a estabilidade de sistemas chaveados sujeitos a atrasos no tempo. Nestes trabalhos, condições para a garantia de estabilidade são obtidas através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii da forma

$$V(z(t)) = z(t)^T P z(t) + \int_{t-\tau}^t z(\theta)^T Q z(\theta) d\theta$$

comum a todos os pares $(\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_{dj})$. Esta mesma abordagem será utilizada na sequência deste trabalho para a obtenção de condições que garantam que o sistema chaveado seja assintoticamente estável.

4.2 Formulação do controlador repetitivo chaveado

O objetivo desta seção é apresentar uma formulação para o controlador repetitivo de tal forma que seja possível realizar o chaveamento entre valores distintos da frequência de corte do filtro $q(s)$. Neste caso, foi considerada a versão chaveada e filtrada do controlador repetitivo definida por

$$G_{rc\sigma(t)}(s) = \frac{1}{1 - q_{\sigma(t)}(s)e^{-s\tau}}, \quad q_{\sigma(t)}(s) = \frac{\omega_{c\sigma(t)}}{s + \omega_{c\sigma(t)}}$$

onde $\omega_{c\sigma(t)}$ é a frequência de corte do filtro $q_{\sigma(t)}(s)$, a ser determinada, e ainda $\sigma(t)$ é uma função de chaveamento arbitrária que seleciona qual frequência de corte do filtro passabaixas está ativa em cada instante de tempo. A partir desta função de transferência, pode-se obter a seguinte realização para o controlador repetitivo chaveado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rc}(t) &= -\omega_{c\sigma(t)}x_{rc}(t) + \omega_{c\sigma(t)}x_{rc}(t - \tau) \\ &\quad + \omega_{c\sigma(t)}e^{-(t-\tau)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$y_{rc}(t) = x_{rc}(t) + e(t)$$

com $x_{rc}(t) \in \mathbb{R}$.

De forma análoga ao caso sem chaveamento, a introdução da estrutura repetitiva chaveada (17) no sistema em malha fechada é feita através do vetor de estados aumentado

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{rc}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

A partir de (1) e (17) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (\mathbf{A}_{\sigma(t)} + \Delta\mathbf{A})z(t) + \mathbf{A}_{d\sigma(t)}z(t - \tau) + \mathbf{B}u(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_q q(t), \end{aligned} \quad (18)$$

com $q(t) = [r(t - \tau) \ r(t) \ d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{A}_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -\omega_{c\sigma(t)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{1 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{d\sigma(t)} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -C\omega_{c\sigma(t)} & \omega_{c\sigma(t)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta A & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{A} = \mathbf{H}\Xi(t)\mathbf{E},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} E^T \\ 0_{n \times 1}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{q\sigma(t)} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} & B_d \\ \omega_{c\sigma(t)} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Para estabilizar o sistema (18), considera-se a lei de controle chaveada $u(t) = K_{1\sigma(t)}x(t) + K_{2\sigma(t)}y_{rc}(t)$. Esta lei de controle pode ser rescrita como $u(t) = F_{\sigma(t)}z(t) + K_{2\sigma(t)}r(t)$ de tal forma que $F_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{1 \times (n+2)} = [K_{1\sigma(t)} - CK_{2\sigma(t)} \ K_{2\sigma(t)}]$, levando ao seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\mathbf{A}_{\Delta\sigma(t)} + \mathbf{B}F_{\sigma(t)})z(t) + \mathbf{A}_{d\sigma(t)}z(t - \tau) \\ &\quad + \mathbf{B}_{qk\sigma(t)}q(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Neste caso, tem-se que $\mathbf{A}_{\Delta\sigma(t)} = \mathbf{A}_{\sigma(t)} + \Delta\mathbf{A}$ e ainda que $\mathbf{B}_{qk\sigma(t)}$ depende do ganho $K_{2\sigma(t)}$ através da relação

$$\mathbf{B}_{qk\sigma(t)} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} & BK_{2\sigma(t)} & B_d \\ \omega_{c\sigma(t)} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Observação 2 Neste caso, supõe-se que existe uma continuidade na condição inicial dos filtros $q_{\sigma(t)}(s)$, isto é, o estado inicial do integrador utilizado na implementação do filtro $q_j(s)$ assume exatamente o mesmo valor do estado final do integrador relacionado ao filtro $q_i(s)$. Caso esta condição não seja satisfeita, o sinal da saída do bloco repetitivo apresentará descontinuidades (saltos) durante o chaveamento $i \rightarrow j$, o que pode levar o sistema em malha-fechada à instabilidade.

4.3 Condições de estabilidade

Nesta seção é apresentado um teorema a fim de garantir a estabilidade interna (assintótica) do sistema (19), considerando uma abordagem independente do atraso e uma função de chaveamento $\sigma(t)$ arbitrária.

Teorema 2 Se existirem as matrizes $W \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ e $S \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ simétricas positivas definidas, matrizes

$Y_j \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ e os escalares positivos ν e γ satisfazendo¹

$$\begin{bmatrix} He\{\mathbf{A}_j W + \mathbf{B}Y_j\} + S + \nu \mathbf{H}\mathbf{H}^T & \mathbf{A}_{dj} W \\ * & -S \\ * & * \\ * & * \\ W\mathbf{E}^T & Y_j^T \\ 0 & 0 \\ -\nu I & 0 \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, j = 1, \dots, N \quad (20)$$

com $F_j = Y_j W^{-1}$, então o sistema (19) é assintoticamente estável.

Prova. A prova deste teorema segue os mesmos passos apresentados na Seção 3.3. Neste caso, considera-se que a relação (20) é satisfeita para todos conjuntos de matrizes e ganhos \mathbf{A}_j , \mathbf{A}_{dj} e F_j , $j = 1, \dots, N$. ■

Baseado no Teorema 2, pode-se propor o seguinte problema de otimização para a obtenção dos ganhos $F_{\sigma(t)}$ considerando as frequências de corte $\omega_{c\sigma(t)}$ conhecidas a priori. Neste caso, o objetivo principal é a minimização do custo garantido γ associado ao sinal de controle. Este objetivo pode ser alcançado resolvendo-se

$$\begin{aligned} \text{PO1: } \min \gamma \\ \text{sujeito à relação (20).} \end{aligned}$$

Como a relação (20) é linear para valores de $\omega_{c\sigma(t)}$ fixos, é suficiente que o problema de otimização proposto seja resolvido considerando a minimização de γ relacionado à LMI (20).

4.4 Escolha de lei de chaveamento $\sigma(t)$

Tendo em vista a aplicação do controlador repetitivo chaveado em UPS, deve-se escolher um critério para o chaveamento da função $\sigma(t)$ capaz de detectar tanto transitórios na saída do sistema quanto condições de regime, alterando assim o valor de $\omega_{c\sigma(t)}$ para o valor mais adequado em cada uma das situações.

Uma possível escolha, neste caso, é monitorar a derivada do valor RMS do erro de seguimento. Quando o sistema estiver em uma situação de regime, o valor deste sinal será pequeno. De forma análoga, quando a carga é alterada ocorre uma variação significativa do valor RMS do sinal de erro, resultando em um valor elevado de sua derivada. Matematicamente, este sinal é definido como

$$j(t) = \left| \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^2(t) dt} \right|. \quad (21)$$

¹ A_j denota a matriz $A_{\sigma(t)}$ quando $\sigma(t) = j$.

Como o valor RMS do sinal de erro é atualizado a cada período do sinal de referência, pode ser necessária a utilização de um filtro passa-baixas a fim eliminar possíveis descontinuidades do sinal $j(t)$.

Baseado na função $j(t)$, pode-se definir a função $\sigma(t)$ como

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } j(t) \geq \bar{c} \\ 1 & \text{se } j(t) < \bar{c} \end{cases}. \quad (22)$$

sendo \bar{c} é um limiar arbitrário de chaveamento. Desta forma, $\sigma(t) = 0$ está associado ao desempenho transitório e ainda $\sigma(t) = 1$ está associado ao regime permanente. Este comportamento será melhor ilustrado nos exemplos numéricos (ver Figura 11).

É importante ressaltar que esta é apenas uma possibilidade para a escolha da função de chaveamento, uma vez que a metodologia proposta considera uma função de chaveamento $\sigma(t)$ arbitrária. Outras opções podem ser utilizadas considerando o valor RMS ou a THD do sinal de saída.

5 EXEMPLO NUMÉRICO

Seguindo a formulação apresentada em Pereira et al. (2009), os valores dos componentes considerados nos exemplos numéricos são apresentados na Tabela 1. A referência de interesse é um sinal senoidal com período $\tau = 1/60s$ (frequência de 60Hz) e amplitude de 156V (valor RMS de 110V). Neste caso, a carga não-linear considerada é ilustrada na Figura 8, onde o resistor apresentado tem resistência de aproximadamente 7.9Ω e o capacitor possui capacitância de 15800μF.

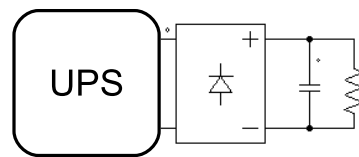


Figura 8: Configuração da carga não-linear.

Para fins de simulação, a carga não-linear foi conectada ao sistema em $t_{load} = 0.4s$, de tal forma que a função $\Xi(t)$ é 0 para $t < t_{load}$ e 1 para $t \geq t_{load}$. Além disso, a tensão no barramento CC foi ajustada para $V_{in} = 530V$.

A fim de determinar o chaveamento do sinal de controle, foram utilizados o sinal $\bar{e}(t)$ e o critério $j(t)$, conforme apresentado na Seção 4.4. A função $\sigma(t)$ assume os mesmos valores apresentados em (22), com limite de chaveamento $\bar{c} = 0.8$.

Parâmetro	Valor
L_f	0.5mH
R_{L_f}	8.0m Ω
C_f	50.0 μ F
Y_0	0.1 \pm 0.1 Ω^{-1}

Tabela 1: Valores numéricos

Assim, o problema de otimização PO1 foi resolvido para $N = 2$, $\omega_{c1} = 1$ e $\omega_{c2} = 1000$, resultando nos seguintes ganhos do controlador

$$\begin{aligned} F_1 &= [-53.1112 \ 10.7045 \ 56.9594] \\ F_2 &= [-53.2055 \ 12.5016 \ 58.7606] \end{aligned}$$

e em $\gamma = 3.94 \times 10^{-11}$.

Cada um dos controladores acima foram simulados através do *software* PSIM separadamente, conforme apresentado nas Figuras 9 e 10. Pode-se observar que de fato para ω_{c1} o sistema tem uma resposta rápida mas apresenta um valor *RMS* do sinal de saída abaixo do desejado (aproximadamente 106V). Já a simulação para o maior valor de ω_c (neste caso, ω_{c2}) mostra que o valor *RMS* da saída está perto do ideal, porém este é atingido em cerca de 10 ciclos do sinal de referência.

A comparação entre o valor *RMS* da tensão de saída no momento da conexão da carga para os três casos (ω_{c1} , ω_{c2} e chaveamento) é apresentado na Figura 11. Pode-se observar que a resposta chaveada apresenta as características desejáveis dos dois valores de ω_c . O valor de *THD* apresentado foi calculado diretamente pelo PSIM considerando a relação

$$THD = \frac{\sqrt{V_{RMS}^2 - V_f^2}}{V_f},$$

sendo V_{RMS} o valor *RMS* da tensão e V_f a componente fundamental da saída.

O comportamento da saída do sistema chaveado quando a carga não-linear é conectada é ilustrado na Figura 12. Pode-se observar que o sinal de controle fica a maior parte do tempo dentro dos limites $\pm V_{in}/2$, i.e. $u_{max} = \pm 265V$.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma metodologia baseada na teoria de sistemas chaveados tanto para a melhoria de desempenho dinâmico quanto para a melhoria da qualidade da saída de uma *UPS*. Neste caso, o objetivo foi garantir o seguimento de referência com o menor erro e distorção possíveis, associado ao menor tempo de resposta quando ocorre uma variação de carga na saída do sistema. O controlador considerado foi

baseado em uma realização no espaço de estados do controlador repetitivo com filtro $q(s)$, onde a frequência de corte do filtro é chaveada entre dois valores distintos. A partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii comum às duas condições de chaveamento, foram obtidas condições na forma de *LMI* para a garantia do seguimento da referência da rede e da rejeição de um distúrbio decorrente de cargas não-lineares. Além disso, foi proposto um problema de otimização para a obtenção dos ganhos dos controladores entre os quais o sistema irá chavear. Finalmente, os resultados obtidos foram validados através de exemplos de simulação realizados através do *software* PSIM. Pode-se observar que a solução considerando o chaveamento de fato apresenta as características dos dois valores de ω_c .

No conhecimento dos autores, tanto a realização do controlador repetitivo no espaço de estados proposta quanto a obtenção de condições na forma de *LMI* para a síntese de uma realimentação estática de estados considerando o chaveamento desta estrutura repetitiva não foi apresentado anteriormente na literatura, sendo portanto esta a principal contribuição deste artigo. Dentre os possíveis trabalhos futuros para a continuidade deste artigo pode-se citar: a implementação da metodologia proposta em uma *UPS* real, a obtenção de condições a partir de uma abordagem politópica e de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros e a síntese de um controlador que leve em conta limitação na amplitude do sinal de controle.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor deste trabalho gostaria de agradecer ao CNPq pela bolsa de doutorado e à CAPES pela bolsa de doutorado sanduíche vinculada ao projeto STIC AmSud, sendo o segundo, terceiro e quinto autores gratos ao CNPq pela concessão das bolsas de produtividade em pesquisa. Os autores agradecem a empresa CP Eletrônica por financiar parcialmente a pesquisa aplicada a *UPS*.

REFERÊNCIAS

- ABNT (2003). *NBR 15014: Conversor a semiconductor - Sistema de alimentação de potência ininterrupta, com saída em corrente alternada (nobreak) - Terminologia*, ABNT, Rio de Janeiro, Brazil.
- Branicky, M. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(4): 475–482.
- Byrnes, C. I. e Isidori, A. (2000). Output regulation for nonlinear systems: an overview, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **10**(3): 323–337.

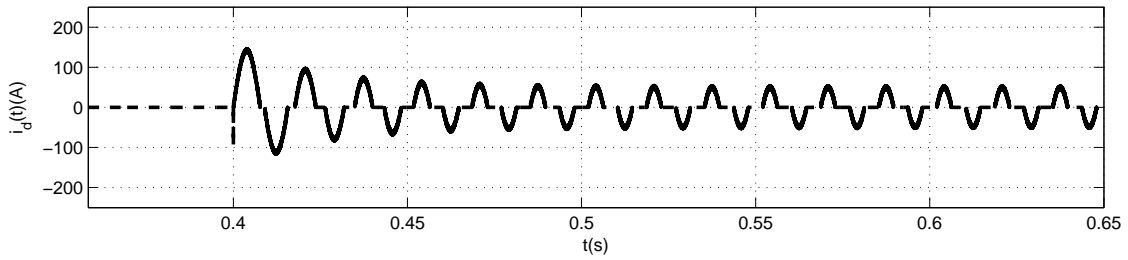
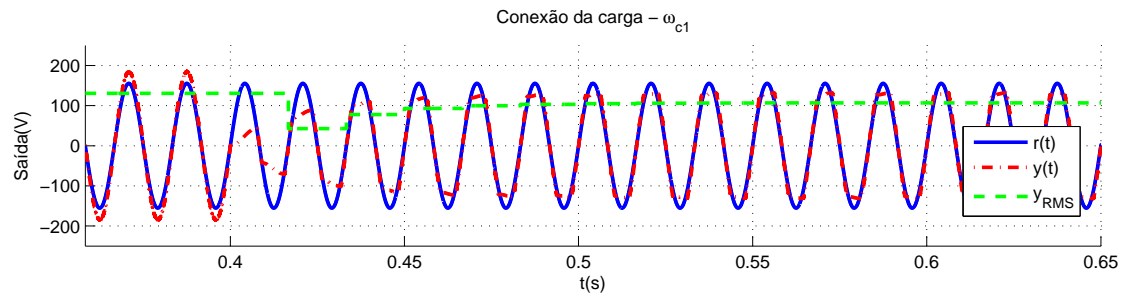


Figura 9: Simulação - $\omega_{c1} = 1$.

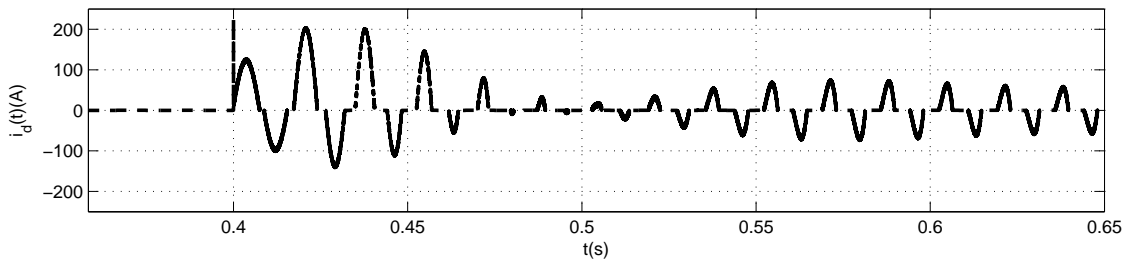
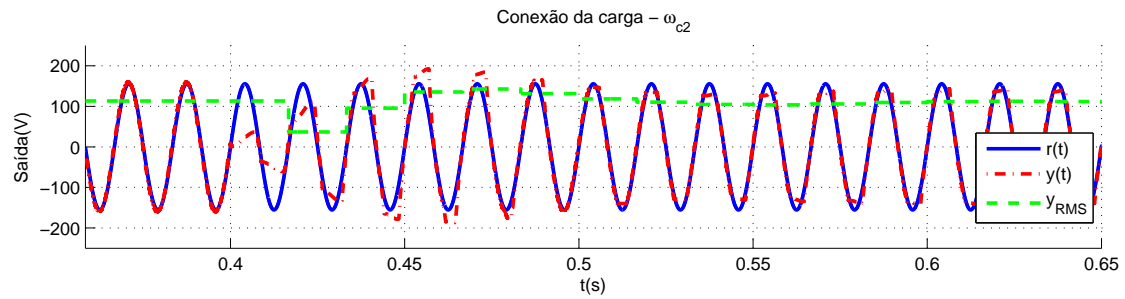


Figura 10: Simulação - $\omega_{c2} = 1000$.

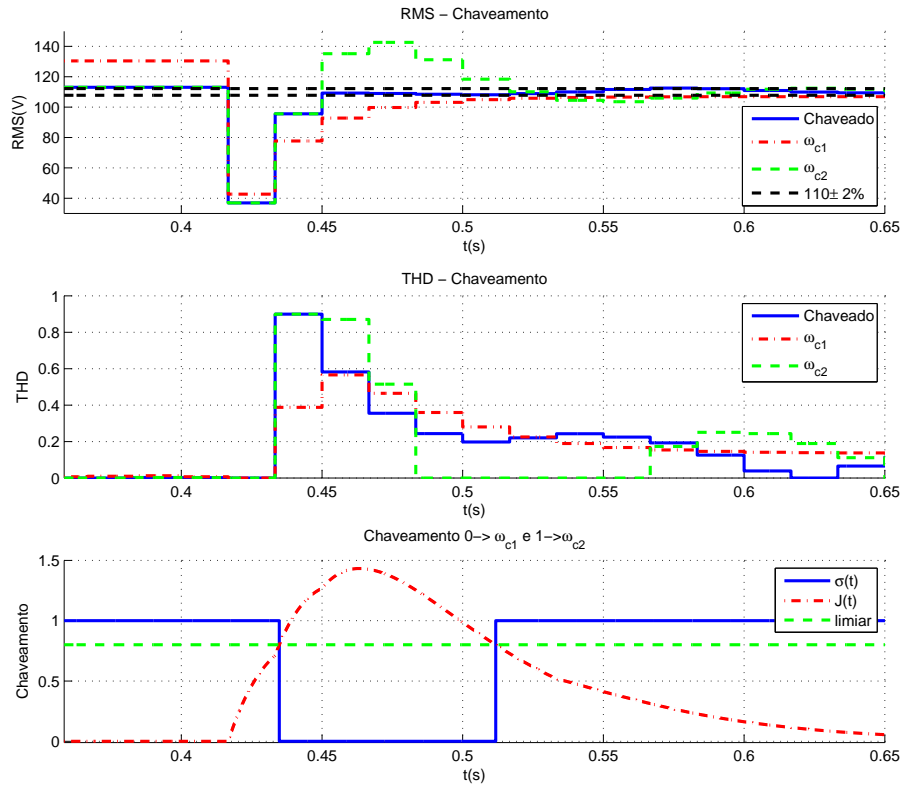


Figura 11: Valor RMS da saída - $\omega_{c1} = 1$, $\omega_{c2} = 1000$ e sistema chaveado.

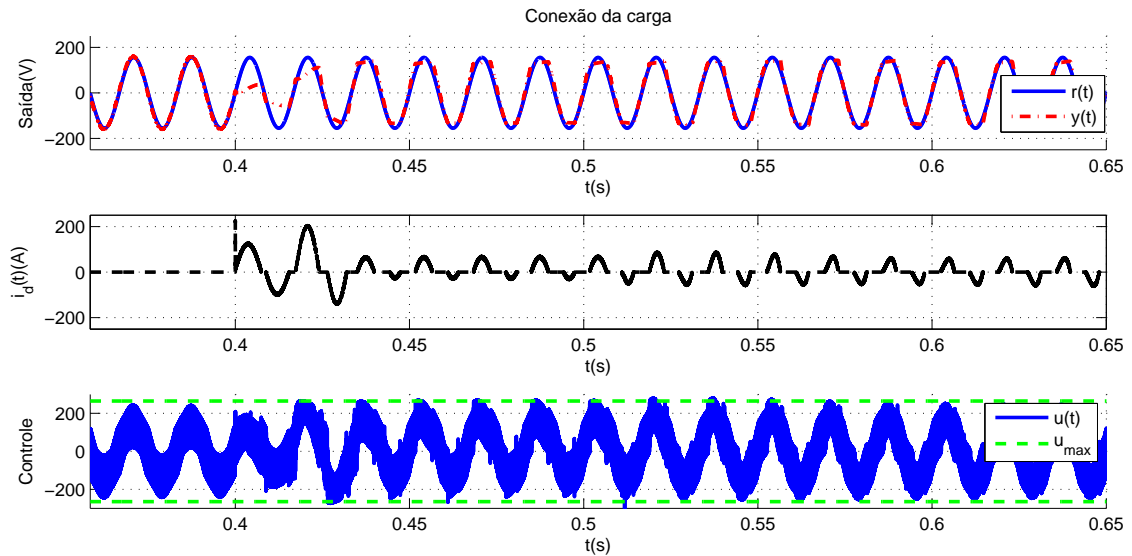


Figura 12: Simulação do sistema chaveado - $\omega_{c1} = 1$ e $\omega_{c2} = 1000$.

- Cai, K.-Y., Quan, Q., Jiang, J. e Yang, D. (2009). Repetitive control by output error for a class of uncertain time-delay systems, *Control Theory & Applications, IET* **3**(9): 1283–1292.
- Chen, C. (1970). *Linear System Theory and Design*, 2 edn, Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, p. 679.
- Davison, E. (1976). The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **21**(1): 25–34.
- de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004). \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent lyapunov functions, *Automatica* **40**(6): 1053 – 1061.
- Doh, T. e Ryoo, J. (2008). Robust stability condition and analysis on steady-state tracking errors of repetitive control systems, *International Journal of Control, Automation and Systems* **6**(6): 960–967.
- Doh, T.-Y. e Chung, M. (2003). Repetitive control design for linear systems with time-varying uncertainties, *IEE Proceedings Control Theory and Applications* **150**(4): 427–432.
- Doh, T.-Y., Ryoo, J. e Chung, M. (2006). Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, **153**(3): 323–330.
- Du, D., Jiang, B., Shi, P. e Zhou, S. (2007). h_∞ filtering of discrete-time switched systems with state delays via switched lyapunov function approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(8): 1520 –1525.
- Escobar, G., Hernandez-Briones, P., Martinez, P., Hernandez-Gomez, M. e Torres-Olguin, R. (2008). A Repetitive-Based controller for the compensation of δ ell \pm 1 harmonic components, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **55**(8): 3150–3158.
- Escobar, G., Valdez, A. A., Leyva-Ramos, J. e Mattavelli, P. (2007). Repetitive-Based controller for a UPS inverter to compensate unbalance and harmonic distortion, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **54**(1): 504–510.
- Figueira, A. (2005). *Sistemas No-Breaks Estáticos*, Antenna Edições Técnicas, Ltda., Rio de Janeiro, BR.
- Flores, J. e Gomes da Silva Jr., J. (2010). Estratégia de controle para o seguimento de referências em sistemas de tempo discreto com atuadores saturantes, *Revista Controle & Automação da Sociedade Brasileira de Automática* **21**(1): 14–28.
- Flores, J. V., Gomes da Silva Jr., J. M., Pereira, L. F. A. e Sbarbaro, D. (2010). Robust repetitive control with saturating actuators: a lmi approach, *Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC'10)*, Baltimore, Maryland, USA.
- Francis, B. A. e Wonham, W. M. (1975). The internal model principle for linear multivariable regulators, *Applied Mathematics and Optimization* **2**(2): 170–194.
- Gahinet, P., Apkarian, P. e Chilali, M. (1996). Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 436 –442.
- Gao, F., Zhong, S. e Gao, X. (2008). Delay-dependent stability of a type of linear switching systems with discrete and distributed time delays, *Applied Mathematics and Computation* **196**(1): 24–39.
- Gomes da Silva Jr., J. M. e Leite, V. J. S. (2007). Sistemas lineares com atrasos de tempo, in L. A. Aguirre, C. E. Pereira, J. Roberto, C. Piqueira e P. L. D. Peres (eds), *Enciclopédia de Automática - Controle & Automação*, Blucher, pp. 109–124.
- Gu, K., Kharitonov, V. e Chen, J. (2003). *Stability of time-delay systems*, Birkhäuser.
- Hara, S., Yamamoto, Y., Omata, T. e Nakano, M. (1988). Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**(7): 659–668.
- Hien, L. V. (2009). Exponential stability of switched systems with mixed time delays, *Applied Mathematical Sciences* **3**(50): 2481–2489.
- IEEE Std. 944 (1986). *IEEE Recommended Practice for the Application and Testing of Uninterruptible Power Supplies for Power Generating Stations*, IEEE - Institute of Electrical and Electronic Engineers.
- Inoue, T., Nakano, M. e S., I. (1981). High accuracy control of servomechanism for repeated contouring, *Proceedings of the 10th Annual Symp. Incremental Motion Contr. Syst. and Devices*, pp. 258–292.
- Jiang, Y. e Liu, S. (2009). Global disturbance rejection of a class of nonlinear systems with unknown exosystems, *Journal of Control Theory and Applications* **7**(4): 379–383.
- Kim, S., Campbell, S. e Liu, X. (2006). Stability of a class of linear switching systems with time delay, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **53**(2): 384–393.

- Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2004). Robust control through piecewise lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems, *International Journal of Control* **77**(3): 230 – 238.
- Leite, V. e Peres, P. (2003). An improved lmi condition for robust d-stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(3): 500 – 504.
- Leith, D., Shorten, R., Leithead, W., Mason, O. e Curran, P. (2003). Issues in the design of switched linear control systems: A benchmark study, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **17**(2): 103–118.
- Li, Q., Dimirovski, G. M. e Zhao, J. (2008). Tracking control for switched linear systems with time-delay, *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Vol. 17, Seoul, Korea, pp. 3889–3894.
- Li, Q., Zhao, J. e Dimirovski, G. (2008). Robust tracking control for switched linear systems with time-varying delays, *IET Control Theory & Applications* **2**(6): 449.
- Li, Q., Zhao, J., Dimirovski, G. M. e Liu, X. (2009). Tracking control for switched linear systems with time-delay: a state-dependent switching method, *Asian Journal of Control* **11**(5): 517–526.
- Li, X. e de Souza, C. (1997). Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(8): 1144 – 1148.
- Liberzon, D. e Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine* **19**: 59–70.
- Lu, Y.-S. e Hwang, C.-S. (2009). Tracking control of a harmonic drive actuator with sliding-mode disturbance observers, *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2009. AIM 2009.*, pp. 1798–1803.
- Mahmoud, M. (2000). *Robust control and filtering for time-delay systems*, Marcel Dekker, Inc.
- Mahmoud, M. S., Shi, P. e Saif, A. W. A. (2009). Stabilization of linear switched delay systems: H2 and h8 methods, *Journal of Optimization Theory and Applications* **142**(3): 583–601.
- Michels, L. e Grundling, H. A. (2005). Procedimento de projeto de controladores repetitivos para o estágio de saída de fontes ininterruptas de energia, *SOBRAEP Eletrônica de Potência* **10**(1): 39–50.
- Michels, L., Stefanello, M. e Grundling, H. A. (2009). Controlador repetitivo para inversores pwm com referência de frequência variável, *Revista Controle & Automação da Sociedade Brasileira de Automática* **20**(3): 394–404.
- Montagner, V., Carati, E. e Grundling, H. (2003). Design and analysis of a linear quadratic regulator with repetitive controller for ac power supplies, *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Vol. 1, pp. 544 – 549 vol. 1.
- Montagner, V., Leite, V., Oliveira, R. e Peres, P. (2006). State feedback control of switched linear systems: An lmi approach, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **194**(2): 192 – 206.
- Pereira, L. F. A., Bonan, G., Thomaz, G. e Coutinho, D. F. (2009). Robust PSC control design for sinusoidal tracking in uninterruptible power supplies, *Proceedings of 10th Brazilian Power Electronics Conference (COBEP 2009)*.
- Rech, C., Pinheiro, H., Grundling, H., Hey, H. e Pinheiro, J. (2003). Comparison of digital control techniques with repetitive integral action for low cost pwm inverters, *IEEE Transactions on Power Electronics* **18**(1): 401 – 410.
- Rech, C. e Pinheiro, J. (2000). Analysis and design of a predictive pid controller for pwm inverters with nonlinear cyclic loads, *Proceedings of the International Conference on Industry Applications*, Vol. 1, pp. 1–6.
- Sangeetha, G. e Jacob, J. (2008). Repetitive controller for periodic disturbance rejection in motor-gear transmission system, *Proceedings of the IEEE Conference and Exhibition on Control, Communications and Automation, INDICON 2008*, Vol. 2, pp. 559–564.
- She, J., Wu, M., Lan, Y. e He, Y. (2007). Simultaneous optimization of low-pass filter and controller in robust repetitive control systems, *Proceedings of the 2007 4th IEEE International Conference on Mechatronics, ICM 2007*.
- Sun, X.-M., Zhao, J. e Hill, D. J. (2006). Stability and l2-gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method, *Automatica* **42**(10): 1769 – 1774.
- Thomaz, G. (2009). *Projeto de leis de controle robusto do tipo psc via realimentação de estados aplicada a um sistema ups*, Master (thesis), PPGEE, PUCRS, Porto Alegre, Brazil, 2009.
- Timbus, A., Liserre, M., Teodorescu, R., Rodriguez, P. e Blaabjerg, F. (2009). Evaluation of current controllers for distributed power generation systems, *IEEE Transactions on Power Electronics* **24**(3): 654–664.

- Trofino, A. e de Souza, C. (2001). Biquadratic stability of uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(8): 1303–1307.
- Wang, Y., Chu, K. e Tsao, T.-C. (2009). An analysis and synthesis of internal model principle type controllers, *Proceedings of the American Control Conference, 2009. ACC 2009.*, pp. 488–493.
- Willmann, G., Coutinho, D., Pereira, L. e Libano, F. (2007). Multiple-loop h-infinity control design for uninterruptible power supplies, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **54**(3): 1–12.
- Wu, C., Teo, K., Li, R. e Zhao, Y. (2006). Optimal control of switched systems with time delay, *Applied Mathematics Letters* **19**(10): 1062–1067.
- Yamamoto, Y. (1993). Learning control and related problems in infinite-dimensional systems, in H. L. Trentelman e J. C. Willems (eds), *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, Birkhäuser. Plenary Lecture at 2nd European Control Conference, 1993.
- Yamamoto, Y. e Hara, S. (1988). Relationships between internal and external stability for infinite-dimensional systems with applications to a servo problem, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**(11): 1044–1052.
- Yan, P. e Özbay, H. (2008). Stability analysis of switched time delay systems, *SIAM J. Control Optim.* **47**(2): 936–949.
- Zhang, K., Kang, Y., Xiong, J. e Chen, J. (2003). Direct repetitive control of SPWM inverter for UPS purpose, *IEEE Transactions on Power Electronics* **18**(3): 784–792.
- Zhang, Y., Liu, X., Zhu, H. e Zhong, S. (2007). Stability analysis and control synthesis for a class of switched neutral systems, *Applied Mathematics and Computation* **190**(2): 1258–1266.
- Zhao, F., ming Yao, X., Liu, Y. e ku Su, B. (2009). Robust repetitive control design for a class of linear systems with time-varying uncertainties, *International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2009. IJCAI 2009.*, pp. 637–641.
- Zhou, K., Wang, D., Zhang, B. e Wang, Y. (2009). Plug-In Dual-Mode-Structure repetitive controller for CVCF PWM inverters, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(3): 784–791.