

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Angélica Alebrant Mendes

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A ANÁLISE DA
CONFIABILIDADE DE SISTEMAS REDUNDANTES
COM INSPEÇÃO PERIÓDICA**

Orientador: Professor José Luis Duarte Ribeiro

Porto Alegre

2014

Angélica Alebrant Mendes

**Uma Contribuição para a Análise da Confiabilidade de Sistemas Redundantes
com Inspeção Periódica**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia, na área de concentração em Sistemas de Qualidade.

Orientador: José Luis Duarte Ribeiro, Dr.

Porto Alegre

2014

Angélica Alebrant Mendes

**Uma Contribuição para a Análise da Confiabilidade de Sistemas Redundantes
com Inspeção Periódica**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. José Luis Duarte Ribeiro, Dr.

Orientador PPGEP/UFRGS

Prof. José Luis Duarte Ribeiro, Dr

Coordenador PPGEP/UFRGS

Banca Examinadora:

Professor Michel José Anzanello, Dr. (PPGEP/UFRGS)

Professor Jairo José de Oliveira Andrade, Dr. (FENG/PUCRS)

Professor Juan Pablo Raggio Quintas, Dr. (DEMEC/UFRGS)

*“A alegria está na luta,
na tentativa, no sofrimento envolvido.
Não na vitória propriamente dita.”*

Mahatma Gandhi

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de concluir este doutorado e pela força recebida durante este caminho.

Agradeço à minha mãe Ivanir Alebrant, bem como as minhas irmãs, Verônica e Graziella, pelo suporte e incentivo proporcionado ao longo desta caminhada.

Agradeço meu namorado Daniel Woo pela paciência durante momentos difíceis e pela dedicação e disponibilidade, principalmente para as traduções em inglês.

Agradeço ainda aos meus amigos e professores do PPGEP pelos ensinamentos e, em especial, ao meu orientador, o Professor José Luis Duarte Ribeiro, pela confiança depositada em mim e pela dedicação e paciência em ensinar.

Por fim, agradeço o Professor David W. Coit, meu orientador durante o período em que estive nos Estados Unidos, pela oportunidade e ensinamentos.

CRÉDITOS

O desenvolvimento desta tese foi possível graças as bolsas de doutorado e doutorado sanduíche no exterior outorgadas à candidata pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (Cnpq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

RESUMO

Sistemas redundantes sujeitos à inspeção periódica são amplamente utilizados nas indústrias, especialmente naqueles processos que envolvem alto risco operacional. Inspeções periódicas são realizadas a fim de identificar e recuperar eventuais falhas de componentes antes da falha do sistema. Inspeções frequentes melhoram a confiabilidade e disponibilidade do sistema, mas envolvem maiores custos de manutenção preventiva. Por outro lado, períodos longos entre inspeções diminuem os custos com inspeções, mas aumentam os riscos de falha do sistema. Desta forma, o principal objetivo deste trabalho é a análise de confiabilidade e a otimização do intervalo entre inspeções de sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas, a fim de garantir a confiabilidade desejada, juntamente com o menor custo possível. Para analisar a confiabilidade de sistemas redundantes aplicados na prática, inicialmente é realizada uma pesquisa para a identificação dos tipos e características de sistemas redundantes utilizados pelas empresas e dos métodos empregados para a manutenção desses sistemas. Identificadas suas deficiências, um modelo inicial de fácil aplicação que melhore a confiabilidade dos sistemas redundantes estudados é determinado. Na sequência, são desenvolvidos modelos mais sofisticados para a otimização do intervalo entre inspeções, através da minimização dos custos totais envolvidos na manutenção, a fim de garantir a competitividade do processo sem sacrificar a sua confiabilidade. Visto que o reparo imediato é uma suposição que não reflete totalmente a realidade, a próxima etapa envolve a consideração do tempo de reparo para a incrementação do modelo. Por fim, o aprimoramento do modelo envolve a introdução de degradação nos componentes do sistema, que passam a envelhecer com o tempo, aumentando sua taxa de falha. Como resultados têm-se: a elaboração de um quadro comparativo de tipos de redundâncias e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e recomendados, o desenvolvimento de tabelas e gráficos de simples utilização que permitem a determinação do intervalo entre inspeções mais adequado e o desenvolvimento de um método para otimização do intervalo entre inspeções de sistemas com e sem tempo de reparo e que sofrem ou não degradação, através da minimização dos custos totais de manutenção.

Palavras-chave: Confiabilidade. Sistemas Redundantes. Inspeção Periódica. *Cold Standby*.

ABSTRACT

Redundant systems subject to periodic inspections are utilized to decrease high levels of operational risk across different industries. Periodic inspections are utilized to identify and rectify component failures before complete system failure. Frequent inspections improve the system reliability and availability, but require higher preventive maintenance costs. On the other hand, long periods between inspections decrease inspection costs while also increasing the risk of system failure. The main objective of this thesis is to optimize the time intervals between periodic inspections of redundant systems to ensure the required reliability at the lowest cost possible. To analyze the reliability of redundant systems used in real situations, interviews were conducted with maintenance managers from industry leading companies. These interviews identified the types, characteristics, and maintenance methods of the redundant systems that are actually used at these firms. Once their deficiencies were identified, an initial model to improve the redundant system's reliability was created. Next, more sophisticated models were developed to optimize the time interval between inspections which minimized maintenance costs. Given that instantaneous repair cannot be assumed in many situations, the next step integrated time to repair into the model as a random variable. Finally, the model was further improved by taking into consideration systems comprised of components that degrade over time, thus increasing their failure rate. The results of this thesis include: i) a table comparing redundancy types and maintenance methods that are actually used with those that are recommended in the literature, ii) tables and graphs that determine the most appropriate time interval between inspections in a more time-efficient manner, and iii) a method to optimize the time interval between system inspections considering both time to repair and component degradation. The optimal time interval between inspections is determined through the minimization of total maintenance costs.

Keywords: *reliability, redundant systems, periodic inspections, cold standby.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Etapas principais do método de trabalho.....	19
Figura 2.1 - Cenários com válvulas redundantes.....	28
Figura 3.1 – Possível configuração de operação para o sistema estudado.....	52
Figura 3.2 – Função densidade de probabilidade e valor esperado do tempo até a falha.....	54
Figura 3.3 – Tempo esperado até a falha $E[tf]$ para t entre 0 e tm	55
Figura 3.4 - $R(t)$ para sistemas com i componentes em <i>standby</i>	58
Figura 3.5 – $R(t)$ para sistemas composto por i <i>standbys</i> e diferentes relações $tm/MTTF$	59
Figura 3.6 – Intervalo entre inspeções ($tm/MTTF$) de acordo com o número de <i>standbys</i> e meta de confiabilidade, para $t = MTTF$	60
Figura 3.7 – Curvas de confiabilidade geradas através do método proposto neste trabalho e do método exato para $MTTF = 1$ e $tm = 0,1$	62
Figura 4.1– Diagrama de espaço de estados para 2 componentes.....	76
Figura 4.2 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes.....	76
Figura 4.3 – Diagrama de espaço de estados para 2 componentes.....	78
Figura 4.4 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes.....	78
Figura 4.5 – Diagrama de espaço de estados para dois componentes (o componente sublinhado representa o componente ativo).....	80
Figura 4.6 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes (os componentes sublinhados representam os componentes ativos).....	82
Figura 4.7 – Diagrama de espaço de estados para dois componentes (o componente sublinhado representa o componente ativo. Quando um componente é reparado, este volta ao sistema na posição de <i>cold standby</i>).	85
Figura 4.8 – Diagrama de espaço de estados para três componentes (o componente sublinhado representa o componente ativo).....	87
Figura 4.9 – Exemplos numéricos para sistemas com dois componentes.....	97
Figura 4.10 – Exemplos numéricos para sistemas com três componentes.....	98
Figura 4.11 – Análise de sensibilidade dos efeitos de λ , C_i , C_r , C_s , e C_p para o Modelo IV com três componentes	99
Figura 5.1 – Diagrama de espaço de estados para dois componentes.....	116
Figura 5.2 – Diagrama de espaço de estados para componentes com degradação. (Quando um componente é reparado, este volta ao sistema na posição de <i>standby</i>).....	125
Figura 5.3 – Exemplo numérico para Sistema I.....	135
Figura 5.4 – Exemplo numérico para Sistema II.....	135
Figura 5.5 – Análise de sensibilidade dos efeitos de λ_{1e} , λ_{1g} , λ_{1p} , λ_{2e} , λ_{2g} , λ_{2p} , α_1 , α_2 , C_i , C_r , C_s e C_p para $\alpha_1 = \alpha_2$	137

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Valores de ki computados utilizando as Equações 13 e 7	57
Tabela 4.1 – Porcentagem de redução de custos comparados com o Modelo I com dois componentes.	98

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1 – Artigos que compõem esta tese	22
Quadro 2.1 – Comparação entre tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e recomendados	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	TEMA E OBJETIVOS	16
1.2	DELINEAMENTO DO ESTUDO	18
1.2.1	Método de Pesquisa.....	18
1.2.2	Método de Trabalho	18
2	ARTIGO 1:.....	25
ANÁLISE DA GESTÃO DA MANUTENÇÃO EMPREGADA EM SISTEMAS REDUNDANTES		25
2.1	INTRODUÇÃO	25
2.1.1	Revisão de literatura.....	27
2.1.2	Objetivos e justificativa de trabalho	32
2.2	METODOLOGIA	33
2.3	ESTUDO APLICADO	34
2.3.1	Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da refinaria de petróleo	34
2.3.2	Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da empresa siderúrgica	36
2.3.3	Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da empresa produtora de alimentos a base de soja	37
2.3.4	Discussão.....	38
2.4	CONCLUSÕES.....	42
3	ARTIGO 2:.....	48
CONFIABILIDADE E TEMPO ESPERADO ATÉ A FALHA PARA SISTEMAS REDUNDANTES EM <i>COLD STANDBY</i> SUJEITOS A INSPEÇÕES PERIÓDICAS		48
3.1	INTRODUÇÃO	48
3.2	DESCRIÇÃO DO MODELO E SUPOSIÇÕES	51
3.2.1	Descrição do sistema	51
3.2.2	Notações	52
3.2.3	Suposições.....	53
3.3	CONFIABILIDADE E TEMPO ESPERADO ATÉ A FALHA PARA UM SISTEMA REDUNDANTE EM <i>COLD STANDBY</i> SUBMETIDO A INSPEÇÕES PERIÓDICAS	54
3.4	EXEMPLO NUMÉRICO	57
3.5	COMPARAÇÃO DO FORMULÁRIO PROPOSTO COM A SOLUÇÃO EXATA	60
3.6	CONCLUSÃO	62
4	ARTIGO 3:.....	67
OTIMIZAÇÃO DO INTERVALO ENTRE INSPEÇÕES PERIÓDICAS PARA SISTEMAS REDUNDANTES		67

4.1	INTRODUÇÃO	67
4.2	REVISÃO DE LITERATURA	70
4.3	METODOLOGIA	72
4.3.1	Descrição do Sistema	72
4.3.2	Notações	73
4.3.3	Suposições	74
4.3.4	Análise de confiabilidade e custos de sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas	74
4.3.4.1	Definição das probabilidades de transição utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto	75
4.4	MODELOS DE CUSTOS	90
4.4.1	Exemplos Numéricos	96
4.4.2	Análise de Sensibilidade	98
4.5	CONCLUSÕES	100
5	ARTIGO 4:	104
	DETERMINAÇÃO DO INTERVALO ÓTIMO ENTRE INSPEÇÕES PERIÓDICAS PARA UM SISTEMA MULTIESTADO COM REDUNDÂNCIA EM <i>COLD STANDBY</i>	104
5.1	INTRODUÇÃO	105
5.2	REVISÃO DE LITERATURA	108
5.3	METODOLOGIA	110
5.3.1	Descrição do Sistema	110
5.3.2	Notação	112
5.3.3	Suposições	113
5.4.1	Definição das probabilidades de transições utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto	114
5.5	MODELOS DE CUSTOS	128
5.6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	134
5.7	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	136
5.8	CONCLUSÕES	137
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	142
6.1	DISCUSSÃO FINAL	142
6.3	CONTRIBUIÇÕES PRÁTICAS	143
6.4	RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	144
	APÊNDICE 1	146

1 INTRODUÇÃO

Se um sistema não é suficientemente confiável para realizar uma função requerida, duas abordagens podem ser utilizadas para melhorar seu desempenho: a primeira é referente à reestruturação do sistema por meio da aquisição de componentes mais confiáveis, a segunda é a adição de componentes redundantes no sistema. Visto que a aquisição de componentes altamente confiáveis é frequentemente mais cara, redundâncias têm sido amplamente utilizadas para melhorar a confiabilidade de sistemas (MYERS; RAUZY, 2008; HSIEH, 2002; NAKAGAWA; YASUI, 2005; MARSEGUERRA *et al.*, 2005; YUN; CHA, 2010; MORI *et al.*, 2007 e COIT, 2001).

Sistemas redundantes são amplamente utilizados nas indústrias, especialmente naqueles processos que envolvem alto risco relativo à segurança operacional, ambiental e humana. Alguns exemplos de sua aplicação são: sistemas de bombas em refinarias de petróleo, sistemas de resfriamento em companhias siderúrgicas, turbinas de aviões e reatores em usinas nucleares. Há, basicamente, dois tipos de redundâncias: ativas ou *hot standby* e inativas ou *cold standby*, sendo que sua escolha depende dos componentes utilizados e das características requeridas pelo sistema.

Contudo, para assegurar altos níveis de confiabilidade nesses sistemas, é necessário realizar monitoramento contínuo ou inspeções periódicas para identificar e recuperar eventuais falhas de componentes antes da falha do sistema como um todo. Sendo assim, a confiabilidade de sistemas redundantes deve ser analisada levando em consideração tanto a confiabilidade dos componentes como a estratégia de manutenção aplicada. Se dois sistemas redundantes idênticos, mas com diferentes estratégias de manutenção forem analisados, suas confiabilidades serão diferentes, uma vez que a detecção e a substituição do componente que sofreu a falha ocorrerão de formas diferentes.

Em muitos casos de sistemas redundantes, o monitoramento contínuo não é possível devido a problemas de desenvolvimento de tecnologia ou altos custos de operação. Nestes casos, inspeções periódicas são necessárias para identificar falhas e garantir a adequada operação do sistema (CHAY; MAZUMDAR, 1975; SIM, 1987 e MOGHADDASS *et al.*, 2012).

Durante as inspeções periódicas, falhas escondidas de componentes são detectadas e reparadas em intervalos de tempo predeterminados. Considerando que uma falha ocorra, sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas ficam desprotegidos até que a próxima inspeção ocorra e durante o tempo em que o componente está sendo reparado. Inspeções

frequentes melhoram a confiabilidade e disponibilidade do sistema, mas também envolvem maiores custos de manutenção preventiva. Por outro lado, períodos longos entre inspeções diminuem os custos com inspeções, mas aumentam os riscos de falha do sistema. Desta forma, o estabelecimento de um intervalo ótimo entre inspeções é importante para garantir a confiabilidade desejada juntamente com o menor custo possível.

A análise da confiabilidade de sistemas redundantes tem sido estudada por muitos anos considerando diferentes abordagens. Os métodos mais utilizados reportados na literatura são Modelos de Markov e semi-Markov com Transformadas de Laplace associados com Soluções Numéricas (LAPRIE ET AL., 1981; CSENKI, 1995; KAPUR; KAPOOR, 1976; OSAKI, 1972; ARORA, 1977 e SUBRAMANIAN; ANANTHARAMAN, 1995) e Algoritmos Genéticos (LEVITIN; LISNIANSKI, 1999; LEVITIN; LISNIANSKI, 2000; LAPA *et al.*, 2006 e CASTRO; CAVALCA, 2006). Combinações entre esses métodos (NOURELFATH *et al.*, 2012 e HU; XIE, 2008) e com outros métodos (FLAMMINI *et al.*, 2009) também podem ser encontrados na literatura.

Sistemas redundantes em *cold standby* podem ser considerados as estruturas mais importantes quando se trata de engenharia de confiabilidade, devido ao seu amplo uso industrial. Alguns exemplos de aplicações práticas são os sistemas de controle de nível em plantas siderúrgicas (ZHONG; JIN, 2014) e os sistemas de *backup* em redes de computadores (JIA; WU, 2009). Devido à sua importância, muitos pesquisadores têm se dedicado ao seu estudo abordando diferentes estratégias de manutenção com diferentes métodos. Ereau *et al.* (1997), Bloch-Mercier (2001), Gupta *et al.* (1994) e Zhang e Wang (2007), e Jia e Wu (2009) consideraram apenas manutenções corretivas a nível de componente e utilizaram, respectivamente: processo de Markov juntamente com Redes de Petri e Simulação de Monte Carlo, processos de Renovação e processos de Renovação juntamente com otimização da função custo. Hu e Xie (2008), Hsieh e Chiu (2002), Zhang e Wang (2011), e Smith e Dekker (1997) incluíram em seus sistemas a substituição de componentes como uma forma de manutenção preventiva e otimizaram a política de manutenção através de: processos de Markov e Algoritmos Genéticos, sistema de deterioração multiestado, Teorema de Renovação e derivação, respectivamente.

Considerando monitoramento contínuo e manutenção preventiva do componente em operação, Osaki (1972) e Zhong e Jin (2014) utilizaram processo de Markov e Transformadas de Laplace para determinar o tempo da primeira falha do sistema como uma função do tempo

entre manutenções preventivas. O tempo ótimo entre manutenções preventivas foi definido através da maximização do tempo médio até a falha do sistema.

Há poucos estudos que analisam a aplicação de inspeções periódicas em sistemas redundantes em *cold standby*. Courtois e Delsarte (2006) estabeleceram um intervalo ótimo entre inspeções que maximiza o tempo médio até a falha do sistema através da obtenção de uma expressão analítica fechada. Kancev e Cepin (2011) usaram Análise da Árvore de Falhas para avaliar o risco e otimização de custos para quantificar o impacto de testes sequenciais *versus* escalonados na indisponibilidade do sistema.

Como verificado, ainda que muitos pesquisadores tenham estudado a confiabilidade de sistemas redundantes que não sofram degradação e estão sujeitos à manutenção, somente alguns deles analisam sistemas com inspeções periódicas. Alguns autores desenvolveram modelos para sistemas com substituição preventiva, sem inspeção (HU; XIE, 2008 e JIA; WU, 2009), outros analisaram sistemas que operam com monitoramento contínuo, supondo que o reparo inicia imediatamente após a falha do componente e que somente o componente em funcionamento é sujeito a manutenções periódicas (OSAKI, 1972; ARORA, 1977; ZHONG; JIN, 2014; ZHANG; WANG, 2007 e KANCEV; CEPIN, 2011).

Estudos com sistemas redundantes nos quais a análise do estado dos componentes (funcionando ou em falha) é realizada somente durante inspeções periódicas são escassos na literatura. Nessas estruturas, o sistema irá falhar quando todos os componentes do sistema falharem entre inspeções ou quando o último componente disponível falhar antes que o reparo de um dos demais tenha sido finalizado.

1.1 TEMA E OBJETIVOS

Esta tese tem como tema o estudo da confiabilidade de sistemas redundantes com inspeção periódica. O objetivo geral do trabalho é a definição e otimização de intervalos de inspeções periódicas em sistemas redundantes, considerando os custos envolvidos.

Como objetivos específicos, esta tese busca:

- Determinar os métodos de análise de confiabilidade e gestão de manutenção utilizados em grandes empresas que aplicam sistemas redundantes;
- Desenvolver modelos para a otimização do intervalo entre inspeções, através da minimização dos custos envolvidos, para sistemas redundantes:
 1. Com redundância ativa e inativa e considerando reparo imediato;

2. Com redundância em *cold standby* e considerando o tempo de reparo; e
3. Com redundância em *cold standby*, considerando o tempo de reparo e a degradação dos componentes.

A grande importância dos sistemas redundantes para a segurança operacional de muitos processos e a diversidade do número e tipo de componentes e estratégias de manutenção empregadas tornaram a confiabilidade de sistemas redundantes objeto de estudo de muitos pesquisadores nas últimas décadas. Contudo, poucos trabalhos abordaram a otimização de intervalos de inspeção para sistemas redundantes. Grande parte destes trabalhos analisa modelos com monitoramento contínuo, onde falhas são detectadas imediatamente. Outros analisam o emprego de inspeções periódicas, porém para sistemas que não possuem redundâncias. O estudo de sistemas redundantes com inspeção periódica onde o estado dos componentes e do sistema é verificado somente durante as inspeções ainda é pouco explorado na literatura.

Há várias situações, devido a restrições tecnológicas, dificuldade de acesso aos componentes ou custos envolvidos, onde o monitoramento contínuo não pode ser empregado. Por exemplo, quando a análise de alguns componentes exige acesso ao local onde eles estão operando, e esse acesso é difícil. Nesses casos, os componentes serão analisados apenas uma vez a cada n semanas. Durante as inspeções periódicas, em intervalos de tempo predeterminados, falhas escondidas de componentes podem ser detectadas e reparadas. Considerando que uma falha ocorra, sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas ficam desprotegidos até que a próxima inspeção ocorra e durante o tempo em que o componente está sendo reparado. Inspeções frequentes melhoram a confiabilidade e disponibilidade do sistema, mas também envolvem maiores custos de manutenção preventiva. Por outro lado, períodos longos entre inspeções diminuem os custos com inspeções, mas aumentam os riscos de falha do sistema. Desta forma, o estabelecimento de um intervalo ótimo entre inspeções é importante para garantir a confiabilidade desejada juntamente com o menor custo possível.

Para analisar a confiabilidade de sistemas redundantes que são aplicados na prática, inicialmente é necessária a identificação dos tipos e características de sistemas redundantes utilizados pelas empresas e dos métodos empregados para a manutenção desses sistemas. Identificadas suas deficiências, é necessário o desenvolvimento de modelos adequados para a definição e otimização do intervalo entre inspeções, através da minimização dos custos de manutenção e perda de produção. Esses modelos são importantes para garantir a

confiabilidade do processo sem comprometer a sua atratividade financeira. Visto que o reparo imediato é uma suposição que não reflete a realidade observada em muitos cenários, a consideração do tempo de reparo amplia a abrangência do modelo proposto. Por fim, a introdução de degradação nos componentes do sistema, que passam a envelhecer com o tempo, aumentando sua taxa de falha, caracteriza outro aprimoramento do modelo.

1.2 DELINEAMENTO DO ESTUDO

Uma vez definidos os objetivos da tese e apresentada a justificativa desta pesquisa, estabelece-se o delineamento do estudo por meio do qual os objetivos serão alcançados. São considerados na sequência o método de pesquisa e o método de trabalho utilizados.

1.2.1 Método de Pesquisa

Segundo a natureza de pesquisa, este trabalho se caracteriza como pesquisa aplicada, pois busca gerar conhecimentos aplicados a sistemas práticos de utilização de sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas (GIL, 2007). Quanto à abordagem, esta pesquisa utiliza uma abordagem mista, sendo qualitativa no início da pesquisa (artigo 1) e quantitativa nos desenvolvimentos subsequentes (artigos 2, 3 e 4). Esta pesquisa é classificada como quantitativa porque recorre à linguagem matemática para descrever a operação e manutenção de sistemas redundantes específicos (FONSECA, 2002). Em relação aos seus objetivos, esta pesquisa inicia com um estudo exploratório, visto que busca maior familiaridade com a utilização de sistemas redundantes em organizações, através de levantamento bibliográfico e entrevistas com gerentes de manutenção de grandes empresas (GIL, 2007). Contudo, a parte principal do trabalho concentra-se numa pesquisa explicativa, visto que visa criar modelos que explicam o comportamento de sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas (GIL, 2007).

1.2.2 Método de Trabalho

Para atender os objetivos propostos, esta pesquisa seguiu quatro etapas principais, correspondentes à elaboração de quatro artigos, conforme mostra a Figura 1.1. As etapas principais foram divididas em etapas secundárias referentes ao desenvolvimento do estudo específico proposto por cada artigo.

As etapas principais foram: 1) Determinação dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção de sistemas redundantes existentes na literatura e utilizados por grandes empresas, através de pesquisa bibliográfica e entrevistas semiestruturadas; 2)

Desenvolvimento de um modelo simplificado para a determinação de intervalos apropriados entre inspeções periódicas para sistemas redundantes em *cold standby*, através da análise do tempo esperado de exposição dos componentes; 3) Desenvolvimento de um modelo para otimização do intervalo entre inspeções de sistemas redundantes, através da minimização dos custos envolvidos, inicialmente considerando reparo imediato; 4) Desenvolvimento de um modelo para otimização do intervalo entre inspeções para sistemas em *cold standby* considerando tempo de reparo e degradação dos componentes, através da minimização dos custos envolvidos.

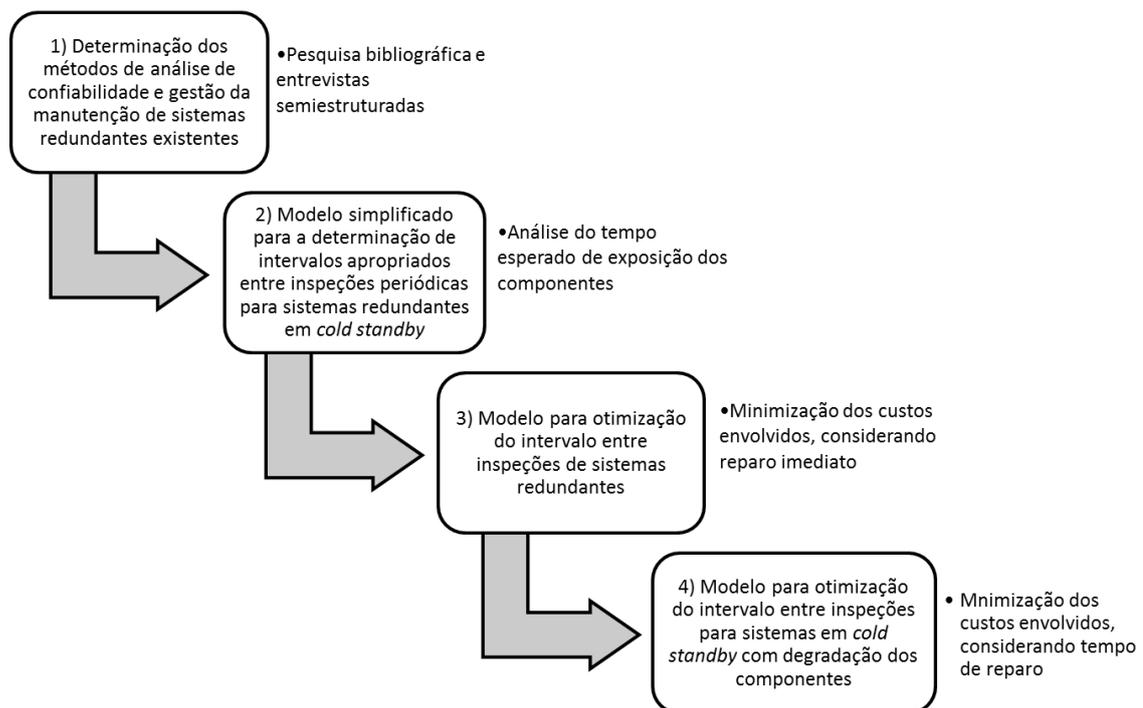


Figura 1.1 – Etapas principais do método de trabalho

O Artigo 1 teve como base as etapas para o desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa: *i)* Revisão de literatura sobre Manutenção, Confiabilidade e Sistemas; *ii)* Realização de entrevistas individuais semiestruturadas com os responsáveis pela manutenção das empresas selecionadas, buscando a identificação dos sistemas redundantes em operação e dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção empregados; *iii)* Transcrição e organização dos dados coletados quanto a tipos de redundância e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção; *iv)* Análise das eventuais deficiências e benefícios dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção empregados pelas empresas em cada tipo de sistema redundante e *v)* Elaboração de um quadro comparativo de tipos de

redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção recomendados.

As entrevistas individuais semiestruturadas foram realizadas junto aos responsáveis pela manutenção de três empresas de grande porte: uma refinaria de petróleo, uma empresa siderúrgica e uma empresa produtora de alimentos a base de soja, todas situadas na região metropolitana de Porto Alegre.

O Artigo 2 utilizou um método baseado na análise do tempo esperado de exposição dos componentes ativo e redundantes e dividiu-se nas seguintes etapas: *i)* Desenvolvimento de uma equação para calcular o tempo esperado até a falha através da análise do tempo esperado de exposição do *standby* no intervalo entre inspeções periódicas, dado que o componente ativo falhe neste intervalo; *ii)* Desenvolvimento de uma equação geral para calcular a confiabilidade de sistemas; *iii)* Desenvolvimento de equações específicas para sistemas compostos por um componente ativo e outro em *standby*, assumindo-se que os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial; *iv)* Determinação de uma tabela contendo os respectivos valores de k (fração de tm relacionada com o tempo de exposição) em relação à $tm/MTTF$ para um, dois e três componentes em *standby*; *v)* Apresentação de um exemplo numérico para sistemas com zero, um, dois ou três *standbys* e diferentes relações entre $tm/MTTF$; *vi)* Apresentação de um gráfico que permite a verificação do intervalo apropriado entre inspeções, dada uma confiabilidade meta e um número de componentes em *standby* disponível.

O Artigo 3 utilizou um modelo baseado nos métodos de Cadeias de Markov com tempo discreto, Teoria da Probabilidade e Otimização da função custo. As seguintes etapas foram realizadas: *i)* Definição dos diagramas de espaço de estados e suas transições para cada modelo; *ii)* Definição das probabilidades de transição entre estados e dos custos das transições; *iii)* Desenvolvimento de um modelo de custos de manutenção e, consequentemente, uma função objetivo referente ao custo total de manutenção; *iv)* Minimização da função objetivo e determinação do intervalo ótimo entre inspeções através da técnica de pesquisa numérica e *v)* Apresentação de um exemplo numérico para cada modelo analisado e de uma análise de sensibilidade para o quarto modelo.

Quatro modelos de sistemas foram analisados e exemplos numéricos para sistemas compostos por dois e três componentes foram apresentados: *i)* Modelo I – Sistema com redundância ativa (*hot standby*) e sem reparo de componente; *ii)* Modelo II – Sistema com redundância ativa

(*hot standby*) e com reparo de componente; *iii*) Modelo III – Sistema com redundância inativa (*cold standby*) e sem reparo de componentes e *iv*) Modelo IV - Sistema com redundância inativa (*cold standby*) e com reparo de componente.

O Artigo 4 é um aprimoramento e extensão do modelo utilizado no Artigo 3, sendo composto pelas mesmas etapas seguidas no Artigo 3, porém acrescentando o tempo de reparo e modelando sistemas redundantes multiestado.

1.3 DELIMITAÇÕES DO ESTUDO

O desenvolvimento deste estudo limitou-se a pesquisar sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas e manutenção em intervalos regulares. Aplicações técnicas de sistemas redundantes específicos, bem como sistemas sujeitos a outras abordagens de manutenção não foram contemplados. Para o desenvolvimento deste estudo, as seguintes delimitações e suposições específicas foram consideradas.

No que se refere ao Artigo 1, o trabalho limitou-se ao estudo de três empresas de grande porte do setor de petróleo, siderúrgico e de alimentos. Todas as empresas se caracterizam por apresentarem processos produtivos contínuos, em maior ou menor grau. Julga-se que empresas com este tipo de processo, que envolve uso intensivo de equipamentos e elevados riscos de segurança, possuem instalações industriais com maior número de sistemas redundantes. Não foram entrevistadas empresas com outros tipos de processo de manufatura.

Os Artigos 2, 3 e 4 possuem as seguintes suposições em comum: *i*) chaveamento (*switching*) perfeito e instantâneo; *ii*) as falhas dos componentes são independentes e os tempos até a falha seguem uma distribuição de probabilidade exponencial; *iii*) cada inspeção é executada perfeitamente e instantaneamente; *iv*) reparáveis somente durante as inspeções.

Os Artigos 2 e 3 consideram o tempo de reparo perfeito e instantâneo, enquanto que o Artigo 4 considera o tempo de reparo como uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial.

Além dessas suposições, o Artigo 2 supôs que os componentes são idênticos, sendo que um está ativo e os demais em *cold standby*, enquanto que os Artigos 3 e 4 assumiram que os componentes possuem diferentes parâmetros de distribuição e podem estar em redundância ativa ou inativa.

Foram consideradas distribuições exponenciais para que os métodos de análise do tempo esperado de exposição dos componentes ativo e redundantes e de Cadeias de Markov

pudessem ser utilizados. É sabido que a distribuição exponencial é apropriada para modelar tempos até a falha e tempos de reparo de muitos componentes, contudo, se este não for o caso, outra abordagem, como simulação de Monte Carlo, deve ser utilizada.

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Esta tese de doutorado estará organizada em seis capítulos. O Capítulo 1 refere-se à Introdução do trabalho, definindo tema e objetivos e delimitando o estudo realizado. Os Capítulos 2 a 5 apresentam os artigos que compõem esta tese, conforme apresentado no Quadro 1.1. O Capítulo 6 apresenta uma Conclusão do estudo realizado, retomando seus objetivos e apresentando os resultados objetivos.

Artigo	Objetivo	Método(s) utilizado(s)
Análise da gestão da manutenção empregada em sistemas redundantes	Identificar os métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção atualmente empregados nas empresas que utilizam sistemas redundantes	Revisão de literatura e entrevistas semiestruturadas
Confiabilidade e tempo esperado até a falha para sistemas redundantes em <i>cold standby</i> sujeitos a inspeções periódicas	Desenvolver equações simplificadas para determinar a confiabilidade, o tempo esperado até a falha e o intervalo entre inspeções mais adequado para sistemas redundantes em <i>cold standby</i> .	Análise de confiabilidade e análise do tempo esperado de exposição dos componentes
Otimização do intervalo ótimo entre inspeções periódicas para sistemas redundantes	Desenvolver um modelo para a otimização do intervalo entre inspeções para sistemas redundantes, maximizando disponibilidade e minimizando custos, considerando reparo imediato.	Teoria da Probabilidade, Cadeias de Markov com tempo discreto e otimização da função custo.
Estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções periódicas para sistemas em <i>cold standby</i> que sofrem degradação	Desenvolver um modelo para a otimização do intervalo entre inspeções para sistemas em <i>cold standby</i> com e sem degradação através da minimização dos custos totais de manutenção, considerando o tempo de reparo	Teoria da Probabilidade, Cadeias de Markov com tempo discreto e otimização da função custo.

Quadro 1.1 – Artigos que compõem esta tese

REFERÊNCIAS

- Arora JR. Reliability of Several Standby-Priority-Redundant Systems. *IEEE Transaction on Reliability* 1977, R-26(4): 290-3.
- Bloch-Mercier, S. Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system. *Reliability Engineering and System Safety* 2001, 74: 81–91.
- Castro HC, Cavalca, KL. Maintenance resources optimization applied to a manufacturing system. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 413–20.
- Chay SC, Mazumdar M. Determination of Test Intervals in Certain Repairable Standby Protective Systems. *IEEE Transactions on Reliability* 1975, R-24:201-205.
- Coit DW. Cold-standby redundancy optimization for nonrepairable systems. *IEEE Transactions on Reliability* 2001, 33:471-478.

- Courtois P-J, Delsarte P. On the optimal scheduling of periodic tests and maintenance for reliable redundant components. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91:66-72.
- Csenki A. An integral equation approach to the interval reliability of systems modeled by finite semi-Markov process. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 47: 37-45.
- Ereau JF, Saleman M, Valette R, Demmou H. Petri Nets for the Evaluation of Redundant Systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 55:95-104.
- Flammini F, Marrone S, Mazzocca N, Vittorini V. A new modeling approach to the safety evaluation of N -modular redundant computer systems in presence of imperfect maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2009, 94:1422–32.
- Fonseca JJS. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- Gil AC. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2007.
- Gupta R, Goel R, Chaudhary A. Analysis of a two-unit standby system with fixed allowed down time and truncated exponential lifetime distributions. *Reliability Engineering and System Safety* 1994, 44:119-24.
- Hsieh Y-C. A linear approximation for redundant reliability problems with multiple component choices. *Computers & Industrial Engineering* 2002, 44:91-103.
- Hu R, Xie J. Optimal Maintenance Policies for a Cold Standby Redundant System with Two Units. *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (IEEE/SOLI)* 2008, 2:1774-8.
- Jia J, Wu S. Optimizing replacement policy for a cold-standby system with waiting repair times. *Applied Mathematics and Computation* 2009, 214:133–141.
- Kancev D, Cepin M. Evaluation of risk and cost using an age-dependent unavailability modelling of test and maintenance for standby components. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 2011, 24:146-155.
- Kapur PK, Kapoor KR. Effect of Standby Redundancy on System Reliability. *IEEE Transaction on Reliability* 1976, R-25(2): 120-1.
- Lapa CMF, Pereira CMNA, Barros MP. A model for preventive maintenance planning by genetic algorithms based in cost and reliability. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 233-40.
- Laprie J, Costes A, Landrault C. Parametric Analysis of 2-Unit Redundant Computer Systems with Corrective and Preventive Maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 1981; R-30(2):139-44.
- Levitin G, Lisnianski A. Joint redundancy and maintenance optimization for multistate series-parallel systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1999, 64:33-42.

- Levitin G, Lisnianski A. Optimization of imperfect preventive maintenance for multi-state systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2000, 67:193-203.
- Marseguerra M, Zio E, Podofillini L, Coit W. Optimal Design of Reliable Network Systems in Presence of Uncertainty. *IEEE Transactions on Reliability* 2005, 54(2):243-253.
- Moghaddass R, Zuo MJ, Pandey, M. Optimal design and maintenance of a repairable multi-state system with standby components. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2012, 142:2409–2420.
- Mori BD, Castro HF, Cavalca, KL. Development of hybrid algorithm based on simulated annealing and genetic algorithm to reliability redundancy optimization. *Journal of Quality & Reliability Management* 2007, 24:972-987.
- Myers A, Rauzy A. Efficient Reliability Assessment of Redundant Systems Subject to Imperfect Fault Coverage using Binary Decision Diagrams. *IEEE Transactions on Reliability* 2008, 57(2):336-348.
- Nakagawa T, Yasui K. Note on optimal redundant policies for reliability models. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 2005, 11:82-86.
- Nourelfath M, Châtelet E, Nahas N. Joint redundancy and imperfect preventive maintenance optimization for series-parallel multi-state degraded systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012, 103:51–60.
- Osaki S. Reliability Analysis of a Two-Unit Standby-Redundant System with Preventive Maintenance. *IEEE Transaction on Reliability* 1972, R-21(1): 24-9.
- Sim SH. Reliability of Standby Equipment with Periodic Testing. *IEEE Transactions on Reliability* 1987, R-36:117-123.
- Smith MAJ, Dekker R. Preventive maintenance in a 1 out of n system: the uptime, downtime and costs. *European Journal of Operational Research* 1997, 99:565-583.
- Subramanian R, Anantharaman V. Reliability analysis of a complex standby redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 48:57-70.
- Yun WY, Cha JH. Optimal design of a general warm standby system. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95:880-886.
- Zhang YL, Wang GJ. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use. *European Journal of Operational Research* 2007, 183:278-295.
- Zhong C, Jin H. A novel optimal preventive maintenance policy for a cold standby system based on semi-Markov theory. *European Journal of Operational Research* 2014, 232:405-411.

2 ARTIGO 1:

ANÁLISE DA GESTÃO DA MANUTENÇÃO EMPREGADA EM SISTEMAS REDUNDANTES

Angélica Alebrant Mendes

José Luis Duarte Ribeiro

Resumo

Este artigo tem por objetivo identificar os métodos de análise de confiabilidade e segurança e gestão da manutenção atualmente empregados nas empresas que utilizam sistemas redundantes. A pesquisa, de caráter qualitativo, baseou-se em informações obtidas na literatura, juntamente com informações levantadas durante a realização de entrevistas individuais semiestruturadas com os responsáveis pela manutenção de três empresas de grande porte: uma refinaria de petróleo, uma empresa siderúrgica e uma empresa produtora de alimentos a base de soja. Após a análise das eventuais deficiências e benefícios dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção empregados pelas empresas em cada tipo de sistema redundante, foi elaborado, como resultado, um quadro comparativo de tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção recomendados. Observou-se que, ainda que as empresas possuam sistemas aparentemente confiáveis, não são utilizados métodos quantitativos para a definição de intervalos de manutenção, nem são feitos cálculos para estimar a confiabilidade dos sistemas. Apesar de coletarem dados de falhas e de manutenções ocorridas, as empresas não dispõem de métodos efetivos para determinar quantitativamente a sua confiabilidade.

Palavras-Chave: manutenção centrada em confiabilidade, sistemas redundantes, planejamento da manutenção.

2.1 INTRODUÇÃO

A competitividade entre as empresas tem conduzido as organizações a buscarem novas estratégias de mercado e reduzirem seus custos operacionais. A melhoria das atividades de manutenção e sua visualização como uma função estratégica para aumentar a produtividade pode, não somente, reduzir estes custos e propiciar o aumento do faturamento, como também proporcionar melhorias na segurança, nas relações com o meio ambiente e no atendimento aos requisitos normativos da empresa. Logo, melhorias na confiabilidade e disponibilidade dos

equipamentos produtivos podem contribuir significativamente para aumentar a competitividade das organizações (SANTOS; COLOSIMO, 2007; MÁRQUEZ *et al.*, 2009; PINTO; XAVIER, 2001; BLOOM, 2006 e RAUSAND, 1998).

Neste contexto, muitas empresas ao redor do mundo já perceberam a importância de uma gestão da manutenção efetiva, principalmente no que se refere aos recursos por ela demandados e a sua influência direta na disponibilidade produtiva (NGUYEN *et al.*, 2008). A eficácia dos custos empregados e a acurácia das atividades são os dois critérios básicos para uma boa manutenção. A redução dos custos de manutenção possibilita o aumento dos lucros da empresa e a acurácia das atividades garante uma operação contínua e confiável dos equipamentos (NIU *et al.*, 2010).

Dois conceitos importantes surgidos com a Manutenção Centrada em Confiabilidade são as falhas escondidas e as falhas múltiplas. Falhas escondidas ocorrem quando a perda da função do equipamento não é evidente para o pessoal operacional. Esse tipo de falha ocorre normalmente em componentes com redundância, onde as consequências da falha não são aparentes instantaneamente, sendo dependentes de uma segunda falha em outro componente. Componentes redundantes com falhas escondidas muitas vezes são classificados erroneamente como itens que podem rodar-até-a-falha. O grande problema deste tipo de classificação é a falsa sensação de proteção do sistema, pois, de fato, uma falha catastrófica pode ocorrer a qualquer momento após uma segunda falha. O ideal, neste caso, seria uma análise de falhas múltiplas, com a determinação de uma atividade de manutenção periódica de procura por falhas (BLOOM, 2006). A compreensão do conceito de redundância e suas formas de operação no sistema são fundamentais para uma correta análise de confiabilidade da planta (BLOOM, 2006 e LAFRAIA, 2001).

Desta forma, o tema desta pesquisa é Manutenção e Confiabilidade. Como tema específico tem-se a manutenção de sistemas redundantes, a fim de analisar os diferentes tipos de sistemas redundantes existentes e os métodos de manutenção desses sistemas utilizados pelas empresas.

O problema de pesquisa deste trabalho é a necessidade de identificação dos tipos e características de sistemas redundantes utilizados pelas empresas e dos métodos empregados para a manutenção desses sistemas.

2.1.1 Revisão de literatura

Segundo Fogliatto e Ribeiro (2009) sistema redundante significa que há mais de um componente disponível para realizar uma determinada função. Componentes redundantes normalmente são empregados para aumentar a confiabilidade do sistema. Contudo, se a detecção e restauração da falha deste componente não forem imediatas, o sistema passa a operar desprotegido. Para os autores, existem basicamente três tipos de redundância. A redundância pura ocorre quando todos os componentes são ativados quando o sistema é ativado e eventuais falhas não afetam a confiabilidade dos componentes sobreviventes. Na redundância com carga compartilhada, a taxa de falha dos componentes sobreviventes aumenta à medida que falhas ocorrem, como, por exemplo, em turbinas de aviões. Na redundância em *standby* ou *back up*, por sua vez, o componente redundante somente é ativado se um dos componentes em operação falhar.

Sistemas que requerem altos níveis de confiabilidade, como, por exemplo, controles de aeronaves e naves espaciais, frequentemente utilizam redundâncias para assegurar o desempenho desejado (MYERS; RAUZY, 2008).

Na Figura 2.1 são apresentados alguns tipos de redundâncias conforme descrito por Bloom (2006). No primeiro cenário as duas válvulas são normalmente operantes, ainda que apenas uma válvula seja suficiente para executar a função. Ambas as válvulas possuem sistema indicador de operação individual, o que permite a identificação imediata da falha de qualquer uma das duas válvulas. Um exemplo típico deste tipo de redundância são as turbinas de um avião.

No segundo cenário as duas válvulas são normalmente operantes, ainda que apenas uma válvula seja suficiente para executar a função. O sistema indicador de operação é compartilhado por ambas as válvulas, o que não permite a identificação imediata da falha, pois a função é totalmente cumprida pela válvula que não falhou.

No terceiro cenário uma das válvulas é normalmente operante e a outra é normalmente inoperante, ou seja, só funciona quando a primeira válvula falha. Este tipo de sistema também é conhecido como *standby* ou *back up*. Neste cenário, a falha da válvula normalmente operante é detectada por um sistema indicador de operação e este sistema envia, imediatamente, um sinal para a válvula *back up* começar a operar.

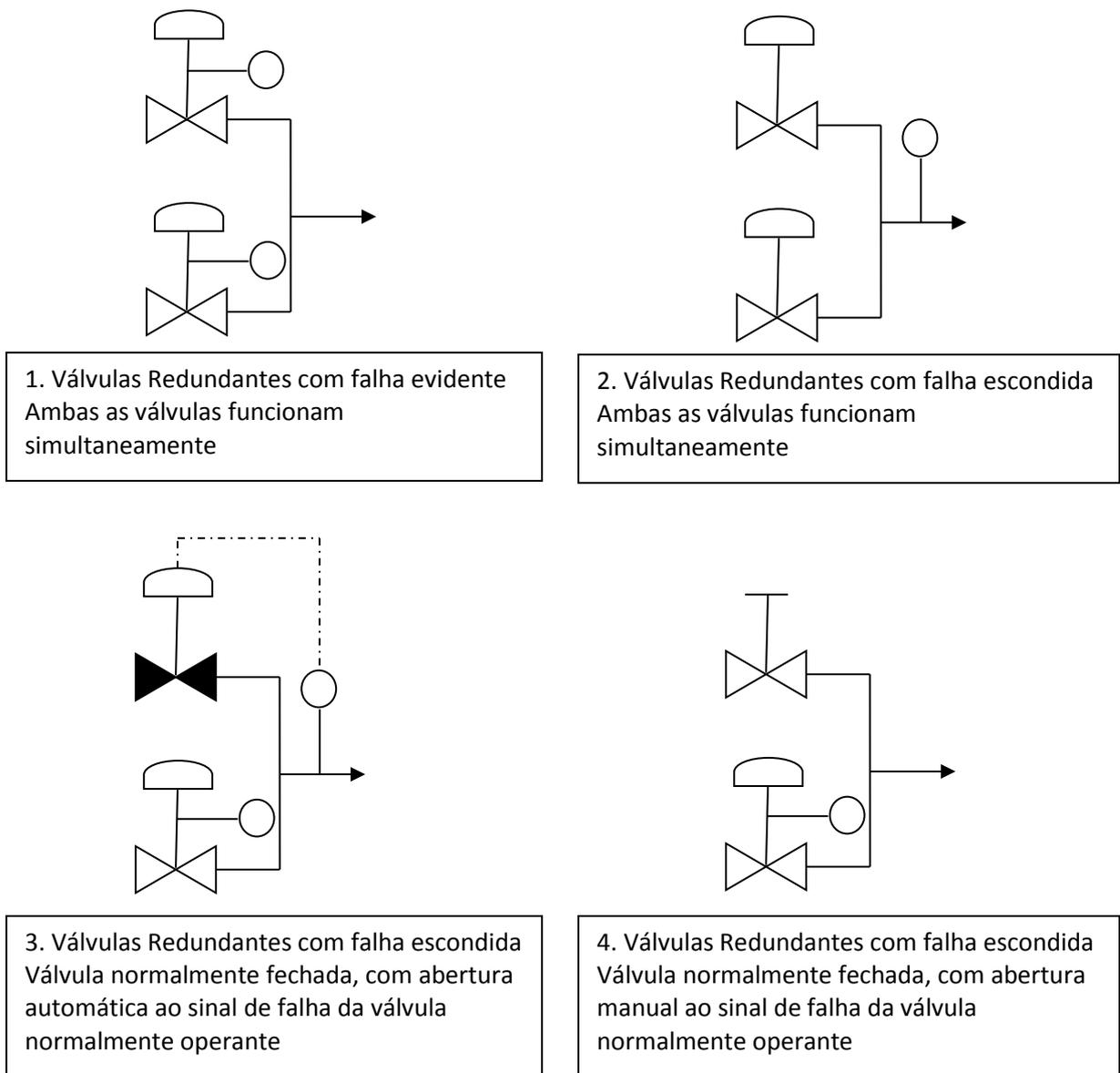


Figura 2.1 - Cenários com válvulas redundantes.

Fonte: Adaptado de BLOOM (2006)

O quarto cenário é idêntico ao terceiro, porém o *back up* é ativado manualmente assim que a perda da função do sistema e a falha da válvula normalmente operante são identificadas.

Nos cenários três e quatro há a necessidade de inspeções periódicas nos *back ups*, caso contrário, ao ser acionado, o *back up* pode não funcionar como o esperado e uma falha total do sistema pode ocorrer. O cenário quatro somente deve ser empregado quando a falha do sistema for admissível, pois o *back up* será ativado manualmente após a falha.

No cenário dois, há a necessidade de inspeções periódicas em ambas as válvulas, pois a falha de uma única válvula não é evidente e a falha da segunda válvula gera a interrupção do funcionamento do sistema.

Alguns trabalhos na literatura analisam e modelam a confiabilidade de sistemas redundantes. Entre eles está o trabalho de Myers e Rauzy (2008) que descreve duas importantes classes de coberturas de falhas imperfeitas para modelar a confiabilidade de sistemas redundantes. O trabalho descreve, fundamentalmente, dois tipos de estruturas de gerenciamento de redundâncias: uma baseada no uso de diagnósticos automáticos associados a cada um dos elementos redundantes e outra baseada no uso de sistemas k -em- n com múltiplos modos de falha.

Na prática, simplesmente maximizar a estimativa de confiabilidade dos sistemas não é suficiente, pois os tomadores de decisão necessitam avaliar também a incerteza existente nesta estimativa, a fim de escolher opções de menor risco. Para tanto, Marseguerra *et al.* (2005) sugerem o uso de algoritmos genéticos com múltiplos objetivos na seleção de um design que proporcione alta confiabilidade e que apresente baixa incerteza de estimação.

Hsieh (2002) apresenta um modelo que utiliza programação linear para solucionar problemas de sistemas série-paralelo redundantes sujeitos a múltiplas restrições, onde cada subsistema possui múltiplas opções de componentes. Para solucionar um problema semelhante, Azaron *et al.* (2009) empregam algoritmos genéticos, Processos de Markov e Programação por objetivos.

Questionando a real vantagem do uso de redundâncias, Paté-Cornell *et al.* (2004) afirmam que há a necessidade de quantificação dos riscos do uso ou não de redundâncias. Os autores lembram que as vantagens em termos de confiabilidade de componentes ou sistemas redundantes só são válidas quando suas falhas são independentes, fato que raramente acontece. Por exemplo, os componentes redundantes normalmente estão sujeitos às mesmas condições externas e, no caso de componentes idênticos, aos mesmos erros de design. O uso de redundâncias não idênticas pode evitar erros de design comuns, contudo, o emprego de redundâncias não idênticas é muito mais oneroso devido aos custos duplos de desenvolvimento.

Cadeias de Markov também são utilizadas por Dhillon e Subramanian (2001) para determinar expressões de confiabilidade para sistemas não reparáveis. Intervalos ótimos entre inspeções periódicas e entre substituições de componentes são analisados por Courtois e Delsarte (2006)

e Zhang e Wang (2007), respectivamente. Os primeiros autores empregam transformações e identificação de variáveis, enquanto os demais empregam processos geométricos.

Elerath e Pecht (2009) apresentam um método para modelar sistemas reparáveis, utilizando Simulação de Monte Carlo, que elimina a suposição de que os componentes e os sistemas necessitam ser modelados utilizando-se processos de Poisson homogêneos.

Visando assegurar altos níveis de confiabilidade, estes sistemas redundantes requerem monitoramento contínuo ou inspeções periódicas para identificação e reparo de eventuais falhas em seus componentes. Dessa forma, a confiabilidade de sistemas redundantes deve ser analisada considerando a estratégia de manutenção utilizada. Supondo que dois sistemas redundantes idênticos são analisados, porém um deles sofre inspeções periódicas e o outro é monitorado continuamente, a confiabilidade desses sistemas será diferente, pois a detecção e reparo ou substituição dos componentes que falham ocorre de maneira diferente (BLOOM, 2006).

A confiabilidade de sistemas de redundantes depende da configuração de projeto, da sua operação e da manutenção executada. Se uma falha ocorrer, sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas permanecerão desprotegidos até a próxima inspeção. Neste caso, a determinação de um intervalo entre inspeções ótimo é um aspecto fundamental (ZHANG; WANG, 2007; MOGHADDASS *et al.*, 2012 e TAGHIPOUR *et al.*, 2010). Da mesma forma, sistemas redundantes com monitoramento contínuo ficarão desprotegidos durante o tempo entre a detecção e o reparo do componente, sendo importante que o tempo de reparo do componente seja pequeno quando comparado ao tempo médio até a falha (*MTTF*) do componente ativo.

A otimização da manutenção de sistemas reparáveis tem sido objeto de investigação durante décadas. Alguns desses trabalhos estudam sistemas com *hot standbys* (SUBRAMANIAM; ANANTHARAMAN, 1995; LAPA *et al.*, 2006; FLAMMINI *et al.*, 2009; GRAY, 1985 e ZEQUEIRA; BÉRENGUER, 2006), outros utilizam sistemas do tipo *k-out-of-N* componentes, onde k de N componentes redundantes necessitam estar operando para que o sistema esteja funcionando, (DING *et al.*, 2010; RUIZ-CASTRO; LI, 2011; SMIDT-DESTOMBES *et al.*, 2009; EREAU *et al.*, 1997; LU; JIANG, 2007 e DWYER, 2012) e muitos deles analisam sistemas em *cold standby* (ZHANG; WANG, 2007; OKASHA; FRANGOPOL, 2010; HU; XIE, 2008; KAPUR; KAPOOR, 1976; OSAKI, 1972; ARORA, 1977; KUMAR, 1976; HOKSTAD; FROVIG, 1996; MONTORO-CAZORLA; PÉREZ-OCÓN, 2006; GUPTA *et al.*,

1994; KOUTRAS; PLATIS, 2008; EBRAHIMPOUR *et al.*, 2011; JIA; WU, 2009; KANCEV; CEPIN, 2011; ZHANG; WANG, 2011 e ZHONG; JIN, 2014).

Um modelo para determinar a confiabilidade de um sistema com dois componentes similares em redundância ativa foi apresentado em Laprie *et al.* (1981). Os autores usaram modelos de Markov e Transformadas de Laplace para aproximar expressões para a confiabilidade do sistema e tempo médio até a falha, em um modelo com taxa de falha crescente quando um componente está em reparo ou inspeção. Da mesma forma, trabalhando com duas unidades em redundância ativa e usando os mesmos métodos, Csenki (1995) apresentou um modelo para analisar a confiabilidade de um sistema em que o estado do componente alterna entre em funcionamento e em reparo.

Aplicando Redes Bayesianas para formular um modelo de falha e Cadeias de Markov com tempo contínuo para modelar a manutenção, Flammini *et al.* (2009) propuseram uma combinação desses modelos analisar o impacto de manutenções imperfeitas sobre a segurança do sistema.

Hu e Xie (2008) apresentaram um modelo para sistemas redundantes em *cold standby* com substituições preventivas baseadas no tempo. Utilizando processos de renovação de Markov, a disponibilidade do sistema foi derivada e os custos de colocação de pedido e compra foram determinados. Usando um modelo de programação não linear para minimizar os custos sujeitos a restrições de disponibilidade, foram propostos algoritmos genéticos para pesquisar alternativas ótimas.

Taghipour *et al.* (2010) propuseram um modelo para determinar o intervalo ótimo entre inspeções para um complexo sistema reparável sujeito a falhas *soft* ou *hard* e com mínimo reparo. Vaurio (1997) desenvolveu funções de custo para testes periódicos e manutenções planejadas e otimizou estas funções com base no custo médio. Billinton e Pan (1998) apresentaram uma equação para avaliar a frequência e a taxa de falha de sistemas redundantes com dois componentes idênticos com base na minimização da frequência total de falha do sistema. Estas equações fornecem métodos para determinar o intervalo ótimo entre manutenções do sistema.

Em um estudo recente, Nourelfath *et al.* (2012) aplicaram processos de Markov e função de geração do momento universal para avaliar a disponibilidade e estabelecer a função de custo de um sistema série-paralelo sujeito a manutenções preventivas imperfeitas.

2.1.2 Objetivos e justificativa de trabalho

Este trabalho possui como objetivo identificar métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção atualmente empregados em empresas que utilizam sistemas redundantes.

Se um sistema não é considerado suficientemente robusto para exercer a função desejada, duas técnicas podem ser utilizadas para melhorar sua confiabilidade: a primeira é o uso de componentes altamente confiáveis na estruturação do sistema, a segunda é a adição de componentes redundantes em vários subsistemas do sistema. Visto que, a aquisição de componentes altamente confiáveis demanda um investimento superior à adição de componentes redundantes, a utilização de redundâncias é largamente empregada em sistemas que possuem impacto na segurança da operação dos equipamentos ou da planta (MYERS; RAUZY, 2008).

Contudo, a confiabilidade de sistemas críticos em termos de segurança depende tanto da sua configuração e projeto, quanto da gestão de sua operação e manutenção. Em sistemas redundantes com inspeção periódica, se um componente redundante falhar durante o intervalo entre manutenções o sistema fica desprotegido até a próxima inspeção, correndo risco de ocorrer uma falha catastrófica a qualquer momento se o segundo componente redundante falhar.

Do mesmo modo, sistemas redundantes com monitoração contínua estão sujeitos a falhas que podem envolver tempo de diagnóstico e reparo significativo. Durante este tempo, o sistema perde a redundância e fica desprotegido, podendo ocorrer uma falha catastrófica a qualquer momento se o segundo componente redundante falhar.

Além disso, outro problema que pode ocorrer é a presença de causas de falha comuns. Nesse caso, a mesma causa provoca a falha de todos os componentes redundantes, virtualmente eliminando a segurança usualmente presente em sistemas redundantes.

A justificativa acadêmica para o tema está relacionada ao fato de que, apesar de existirem métodos que solucionam tais problemas, supõe-se que as empresas que utilizam redundâncias não os empregam corretamente. Assim, o levantamento dos métodos utilizados, de suas eventuais deficiências e benefícios constituem a etapa inicial para a melhoria da gestão da manutenção desses sistemas.

Este artigo está estruturado em quatro seções. Na seção 2.2 é apresentada a metodologia utilizada para realizar o trabalho e solucionar o problema de pesquisa. Na seção 2.3 é

apresentado detalhadamente o estudo aplicado, os resultados obtidos, bem como sua discussão. Por fim, na seção 2.4, são apresentadas as conclusões referentes ao estudo realizado.

2.2 METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada em três empresas. Uma refinaria de petróleo, uma empresa produtora de alimentos a base de soja e uma siderúrgica. Todas as empresas são de grande porte, líderes em seus segmentos e localizadas na região metropolitana de Porto Alegre.

A pesquisa é composta pelas seguintes etapas: *i)* Revisão de literatura sobre Manutenção, Confiabilidade e Sistemas; *ii)* Realização de entrevistas individuais semiestruturadas com os responsáveis pela manutenção das empresas selecionadas, buscando a identificação dos sistemas redundantes em operação e dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção empregados; *iii)* Transcrição e organização dos dados coletados quanto a tipos de redundância e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção; *iv)* Análise das eventuais deficiências e benefícios dos métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção empregados pelas empresas em cada tipo de sistema redundante; *v)* Elaboração de um quadro comparativo de tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e métodos de análise de confiabilidade/segurança e gestão da manutenção recomendados.

Os dados foram coletados nas três empresas identificadas anteriormente. Cada empresa possui alguns sistemas redundantes empregados. A coleta de dados não se deteve ao número geral de sistemas redundantes existentes em cada empresa, e sim aos tipos de sistemas redundantes utilizados.

A escolha prévia das empresas a serem estudadas foi baseada na facilidade de acesso aos entrevistados, de forma a agilizar as tarefas de coleta de dados e estudo dos sistemas redundantes.

As entrevistas foram realizadas com base em um roteiro de questões semiestruturadas. O Roteiro de Questões utilizado é apresentado na sequência:

1. Explicação dos objetivos do trabalho e confirmação da disponibilidade para participação.
2. Quais os sistemas redundantes existentes na empresa? Como funcionam? Quais os riscos de falha?

3. Como é feita a manutenção desses sistemas? Periodicidade, método.
4. Em quais situações ambos os componentes do sistema redundante poderiam falhar (por baixa frequência de inspeção, durante o reparo, causas comuns)?
5. Já ocorreu alguma situação dessas?
6. Pergunta resumo, resumindo as informações coletadas e verificando a precisão dos registros.
7. Pergunta final e agradecimento

Os dados de cada tipo de redundância foram registrados manualmente em roteiros de questões individuais. Não foi utilizado gravador para não inibir os entrevistados, visto que se trata de um tema relacionado à segurança da fábrica.

Os dados foram classificados em tipos de redundância e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção. Algumas características individuais de cada empresa também foram destacadas, a fim de diferenciar as empresas em termos de níveis de confiabilidade e entender os motivos do maior ou menor número de sistemas redundantes empregados.

Foi elaborado um quadro comparativo de tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção recomendados. Para cada método, foram identificadas as deficiências nos procedimentos adotados e os benefícios dos procedimentos recomendados.

Através dos resultados, foi possível visualizar se as empresas conhecem e empregam métodos adequados para a análise de confiabilidade/segurança e gestão da manutenção. Se não empregam, o porquê da não utilização. Além disso, foi possível identificar os riscos de segurança e confiabilidade decorrentes da utilização de métodos inapropriados.

2.3 ESTUDO APLICADO

A seguir é apresentado o estudo aplicado deste artigo. Inicialmente é feita a descrição dos dados coletados nas entrevistas, seguido de sua análise e interpretação.

2.3.1 Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da refinaria de petróleo

A entrevista com o gestor da manutenção da refinaria de petróleo demonstrou que a empresa emprega intensamente sistemas redundantes na planta industrial. A grande maioria dos equipamentos utilizados, principalmente bombas, possui um equipamento semelhante instalado em paralelo, de forma a garantir o funcionamento contínuo da linha produtiva.

Equipamentos maiores e mais complexos, como alguns compressores, devido ao elevado custo de aquisição, não possuem sistema redundante operando em paralelo. Contudo, durante a aquisição desses equipamentos são avaliadas questões referentes à sua qualidade e confiabilidade, de forma a garantir a aquisição de equipamentos robustos e que possuam monitoramento contínuo de falhas integrado.

O tipo de redundância empregada é a *standby* ou *back up*, onde um equipamento é normalmente operante e o outro é normalmente inoperante, funcionando como reserva em caso de falha do equipamento principal. A ativação do equipamento redundante normalmente é feita de forma automática, devido aos riscos de segurança e custos envolvidos na falha de operação da planta. Porém, para os casos onde a falha pode ser tolerada por um determinado período de tempo, são empregados sistemas de ativação manual do *back up*. Não são empregados sistemas redundantes com carga compartilhada.

Os equipamentos redundantes funcionam em regime de rodízio chamado 3 por 1. Ou seja, os equipamentos mais novos funcionam três semanas consecutivas, parando uma semana para o funcionamento do equipamento reserva e voltando a operar na semana seguinte. Para o gestor, este regime de rodízio evita falhas simultâneas dos equipamentos, visto que cada equipamento está em uma fase diferente do seu ciclo de vida. Os equipamentos em fase de desgaste saem do regime de rodízio e passam a operar apenas em situações emergenciais, onde o sistema redundante falhe.

A manutenção preditiva, como, por exemplo, a análise de vibrações, é largamente utilizada na refinaria de petróleo. Somente se aplica manutenção preventiva baseada no tempo naqueles equipamentos ou componentes que apresentam falhas não detectáveis por técnicas de manutenção preditiva. Outra opção empregada é a utilização de alguma técnica de manutenção preditiva que não seja totalmente eficaz para a detecção das falhas, mas que permita o espaçamento das intervenções preventivas baseadas no tempo.

Os intervalos entre as manutenções preditivas e preventivas são determinados com base nos manuais do fabricante e na experiência da equipe de manutenção, sendo que estes intervalos devem, preferivelmente, serem compatíveis com o regime de rodízio empregado, de forma a aproveitar o tempo em que os equipamentos estão inoperantes. À medida que as manutenções preditivas detectam o início do processo de falha do equipamento, o intervalo entre manutenções é reduzido, intensificando-se as inspeções, a fim de evitar que o equipamento falhe entre o período de intervenções. Da mesma forma, equipamentos em que, após

determinado tempo, se verifica a possibilidade de aumento do intervalo entre intervenções devido a suas boas condições de operação, o intervalo é ampliado.

Quanto a situações onde ambos os equipamentos do sistema redundante podem falhar, destacaram-se as causas comuns de degradação do produto e defeito de fabricação. A degradação do produto ocorre devido a um descontrole operacional que causa a não conformidade do produto. Este produto não conforme gera falha do equipamento em operação do sistema redundante e, automaticamente, gera a falha do equipamento reserva assim que este começa a operar. Este tipo de incidente já foi relatado na empresa. O defeito de fabricação ocorre em equipamentos novos no momento da partida, onde ambos os equipamentos possuem o mesmo defeito e falham simultaneamente. Visando reduzir os danos causados por defeito de fabricação e falhas prematuras, a empresa emprega uma rígida avaliação e inspeção do equipamento novo em início de operação.

2.3.2 Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da empresa siderúrgica

A entrevista com o gestor da manutenção da empresa siderúrgica demonstrou que a empresa utiliza poucos sistemas redundantes em sua planta fabril. Redundâncias são usadas basicamente no setor de utilidades (redes de ar comprimido, água e energia elétrica), no sistema de água para o resfriamento de fornos e nas caldeiras.

No setor de utilidades, assim como nas caldeiras, o tipo de redundância empregada é a *standby* ou *back up*, onde um equipamento é normalmente operante e o outro é normalmente inoperante, funcionando como reserva em caso de falha do equipamento principal. A ativação do equipamento redundante normalmente é feita de forma automática, devido aos riscos de segurança e custos envolvidos na falha de operação da planta. Porém, para os casos onde a falha pode ser tolerada por um determinado período de tempo, são empregados sistemas de ativação manual do *back up*. Um sistema semelhante a um sistema redundante com carga compartilhada é empregado no sistema de água para resfriamento dos fornos. O sistema é composto por três fornos e três reservatórios de água para resfriamento. A princípio, cada reservatório de água atende apenas um forno, contudo, em caso de falha no bombeamento de água de algum reservatório para algum forno, um mesmo reservatório pode fornecer água para mais de um forno.

O abastecimento desses reservatórios de água é feito através de uma bomba elétrica que bombeia a água da rede da concessionária para os reservatórios. Caso essa bomba elétrica falhe por falta de energia, uma bomba a diesel é ativada, funcionando como *back up* da

bomba elétrica. Além disso, há um terceiro *back up*: se a bomba a diesel também falhar, há um reservatório de água extra, cheio, que somente é ativado em casos de emergência. A falha da bomba elétrica seria uma causa comum para falha do sistema de resfriamento de fornos, onde todos os reservatórios perderiam o abastecimento de água e, conseqüentemente, gerariam um superaquecimento dos fornos. Contudo, como ação de contingência para esta falha, há os *back ups* constituídos pela bomba a diesel e pelo reservatório extra.

Nos equipamentos dos sistemas redundantes, tanto o ativo, como o reserva, é empregada principalmente a manutenção preventiva baseada no tempo, sendo controlada pelas horas de operação de cada equipamento. Também são empregadas técnicas de manutenção preditivas como, por exemplo, técnicas de análise de óleo e termografia.

Os intervalos entre manutenções preventivas e preditivas são determinados com base nos manuais do fabricante e na experiência da equipe de manutenção. Um equipamento pode ter seu intervalo de manutenção preditiva aumentado ou diminuído, conforme o estado do seu processo de falha.

2.3.3 Descrição da entrevista com o gestor de manutenção da empresa produtora de alimentos a base de soja

A entrevista com o gestor da manutenção da empresa produtora de alimentos a base de soja revelou a baixa utilização de sistemas redundantes, visto que o gestor prefere empregar o controle e a prevenção para prevenir a ocorrência de falhas, ao invés de fazer investimentos elevados em redundâncias. Foram citados dois sistemas redundantes, um existente nas caldeiras e outro na linha de fornecimento de água contra incêndio.

A linha de fornecimento de água contra incêndio possui três bombas em paralelo, funcionando como sistema de *back ups*, sendo que apenas uma é suficiente para suprir o fornecimento de água. Das três bombas, duas são ativadas por energia elétrica e uma usa gasolina como combustível. Além disso, há um gerador de energia elétrica que pode entrar em operação caso ocorra falha no abastecimento pela concessionária. Desta forma, o gerador e a bomba a combustível evitam falha no sistema causada pela falha no suprimento de energia elétrica, que se configura como uma causa comum.

A caldeira possui uma caldeira reserva, do tipo *back up*, que é inspecionada temporariamente através de um *check-list*. O intervalo de tempo em que a caldeira reserva é colocada em funcionamento é baseado nas recomendações do fabricante e na experiência da equipe de manutenção.

Outras causas comuns que ocasionariam a interrupção do processo, citadas pelo gestor, foram a falta de água para o processo e a falta de alimentação de soja, visto que a empresa possui um processo contínuo de produção, porém, nenhuma dessas causas foi relatada.

2.3.4 Discussão

As entrevistas revelaram que a intensidade do uso de redundâncias depende do tipo de processo da empresa e dos riscos, em termos de segurança, envolvidos na ocorrência da falha. A refinaria de petróleo emprega intensamente sistemas redundantes em seu processo. Este fato se deve ao maior risco de segurança e ambiental envolvido na falha de algum equipamento do processo e ao tipo de processo e produto existente na planta, onde os equipamentos são relativamente simples e de custo mais acessível. Além disso, por se tratar de uma empresa pública, observa-se a maior disponibilidade de recursos para compra de equipamentos redundantes. A empresa siderúrgica, por sua vez, emprega um número menor de redundâncias devido ao menor risco de seu processo e ao tipo de equipamento utilizado, normalmente de grande porte e elevado custo de aquisição e operação. A empresa de alimentos a base de soja emprega pouquíssimos sistemas redundantes devido ao baixo risco de segurança e ambiental envolvido na ocorrência de falha e ao tipo de equipamento utilizado, normalmente de grande porte e alto custo de aquisição e operação. Além disso, a empresa confia muito na eficácia de sua manutenção preventiva.

A empresa siderúrgica e a empresa de alimentos a base de soja somente utilizam redundâncias no setor de utilidade (água, ar comprimido), onde a falha gera alto risco de segurança e há um elevado custo operacional relacionado à interrupção do abastecimento, ao mesmo tempo em que os custos para a aquisição do equipamento redundante são baixos. Ambas as empresas também citaram a utilização de redundância no sistema de resfriamento das caldeiras devido ao tempo excessivo gasto para resfriamento (parada) e aquecimento (início da operação), tempo que, em casos de falha ou necessidade de manutenção preventiva, seria impraticável.

Em locais onde há um grande risco de segurança relacionado à falha, como no resfriamento dos fornos da siderúrgica e na linha de água contra incêndio da empresa de alimentos a base de soja, utilizam-se redundâncias inativas diferentes em vários níveis. O fato de a redundância ser diferente (bomba elétrica e bomba à diesel) garante o funcionamento do sistema em casos de ocorrência de falhas por causas comuns já previstas no sistema.

Nenhuma das empresas entrevistadas utiliza sistemas redundantes normalmente ativos com carga compartilhada. Os gestores da manutenção acreditam não ser um modelo eficaz devido

à possibilidade de falha simultânea gerada pelo fato de que ambos estariam na mesma etapa do ciclo de vida. Soma-se a isso a impossibilidade de realizar a manutenção no equipamento inativo.

O sistema de rodízio de três semanas para uma, utilizado pela refinaria de petróleo, reduz a probabilidade de falhas simultâneas ao mesmo tempo em que mantém os equipamentos em funcionamento, evitando falhas relacionadas à partida ou à sua baixa utilização. Além disso, a estratégia de realizar as manutenções em intervalos coincidentes com o rodízio facilita a efetiva execução da manutenção, pois elimina a necessidade de parar o equipamento somente para a execução da manutenção.

A possibilidade de retirada do sistema de rodízio dos equipamentos em fase de desgaste garante a segurança e confiabilidade, sem a necessidade de aumentar a frequência de manutenções preventivas e corretivas. Contudo, implica em um custo adicional de aquisição de novos equipamentos, podendo ser proibitivo para empresas que dispõem de poucos recursos.

Para a empresa siderúrgica e a empresa de alimentos a base de soja, o uso de rodízios pode ser uma prática pouco adequada, devido ao tipo e equipamento utilizado no processo e ao tipo de redundância empregada. Equipamentos grandes, que exigem um alto investimento e possuem alto custo de operação, principalmente na partida, e sistemas redundantes com equipamentos diferentes são pouco apropriados para o sistema de rodízio.

O emprego de técnicas de manutenção preditiva reduz os custos relacionados à troca antecipada de componentes e possibilita um aumento da confiabilidade através do acompanhamento da condição real do equipamento. Porém, o uso deste tipo de manutenção requer a utilização de equipamentos especiais e a contratação de mão-de-obra especializada, o que, normalmente, torna esse tipo de manutenção mais cara que a preventiva baseada no tempo. Assim, seu uso somente é justificável em empresas que possuem um grande número de equipamentos semelhantes onde possa ser empregada a mesma técnica. Isso explica a utilização intensa de manutenção preditiva na refinaria de petróleo e a utilização moderada nas demais empresas.

Quanto às causas comuns de falha de ambos os equipamentos do sistema redundante, as três empresas relataram suas possibilidades. Em casos mais graves, as falhas são evitadas utilizando sistemas redundantes com equipamentos diferentes, em outros, julga-se que a falha seja pouco provável ou não gere um dano catastrófico.

Observa-se que as empresas entrevistadas utilizam sistemas redundantes conforme sua necessidade em termos de segurança. Em locais onde existe um elevado risco relacionado à segurança, são empregados sistemas redundantes a fim de garantir segurança e confiabilidade. O grau de utilização varia conforme o tipo de processo envolvido, ou seja, processos em que os equipamentos utilizados são mais simples possuem um maior número de redundâncias empregadas.

Como tipo de sistema redundante é utilizado o tipo *back up*, onde um segundo equipamento com a mesma função é mantido em paralelo, pronto para entrar em operação, caso o primeiro equipamento falhar. Porém, o sistema *back up* é utilizado de algumas formas diferentes: *i) Back up* idêntico com alternância de operação, onde o *back up* participa de um rodízio de operação com o equipamento principal; *ii) Back up* idêntico normalmente inativo, onde o *back up* passa por testes de verificação de execução de função, mas normalmente não entra em operação; *iii) Back up* diferente normalmente inativo, onde o *back up* passa por testes de verificação de execução de função, mas normalmente não entra em operação e possui características diferentes do equipamento principal; *iv) Back up* de carga compartilhada, onde se um equipamento do sistema redundante falhar, o outro tem sua carga compartilhada para evitar a perda da função.

Para a manutenção destes sistemas redundantes são utilizadas estratégias de manutenção preditiva, preventiva e corretiva. A base para a definição dos intervalos de manutenção, tanto preditiva como preventiva, são os manuais dos fabricantes e a experiência da equipe de manutenção. Não são utilizados métodos quantitativos para a definição de intervalos de manutenção, nem são feitos cálculos para estimar a confiabilidade dos sistemas.

Ainda que as empresas possuam sistemas aparentemente confiáveis, seria importante mensurar o grau de confiabilidade real dos sistemas empregados, a fim de avaliar se os riscos envolvidos na operação de cada sistema são compatíveis com os riscos que a empresa está disposta a assumir. Observa-se que, apesar de se coletarem dados de falhas e de manutenções ocorridas nas empresas, as mesmas não dispõem de métodos efetivos para determinar quantitativamente a sua confiabilidade, limitando-se ao conhecimento empírico. De fato, esses métodos não são encontrados nem na literatura, tampouco na prática industrial.

O Quadro 2.1 apresenta uma comparação entre tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade/segurança e gestão da manutenção utilizados e recomendados para as três empresas avaliadas.

Empresa	Utilização de sistemas redundantes	Tipo de sistema redundante	Principal estratégia de manutenção	Base para definição de intervalos entre manutenções	Recomendações para melhoria da confiabilidade
Refinaria de petróleo	Grande	<i>Back up</i> idêntico com alternância de operação	Manutenção preditiva baseada na condição	Manuais de fabricantes, experiência e histórico das inspeções preditivas do equipamento. As manutenções devem, preferivelmente, coincidir com o período em que o equipamento está inativo.	Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.
Siderúrgica	Pequena	<i>Back up</i> idêntico normalmente inativo	Manutenção preventiva baseada no tempo	Manuais de fabricantes e experiência	Aplicar alternância de operação. Determinar os intervalos entre manutenções considerando dados quantitativos. Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.
		<i>Back up</i> diferente normalmente inativo		Manuais de fabricantes e experiência	Determinar os intervalos entre manutenções considerando dados quantitativos. Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.
		<i>Back up</i> de carga compartilhada	Rodar-até-a-falha		Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.
Empresa de alimentos	Muito pequena	<i>Back up</i> idêntico normalmente inativo	Manutenção preventiva baseada no tempo	Manuais de fabricantes e experiência	Aplicar alternância de operação. Determinar os intervalos entre manutenções considerando dados quantitativos. Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.
		<i>Back up</i> diferente normalmente inativo		Manuais de fabricantes e experiência	Determinar os intervalos entre manutenções considerando dados quantitativos. Avaliar a confiabilidade quantitativamente, a fim de levantar os riscos envolvidos.

Quadro 2.1 – Comparação entre tipos de redundâncias, métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados e recomendados

2.4 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi identificar métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção atualmente empregados em empresas que utilizam sistemas redundantes.

Após uma revisão de literatura sobre os tipos de sistemas redundantes existentes, foram feitas entrevistas semiestruturadas em três empresas de grande porte situadas na região metropolitana de Porto Alegre: uma empresa refinaria de petróleo, uma empresa siderúrgica e uma empresa de alimentos a base de soja. As entrevistas abordaram questões referentes aos tipos de sistemas redundantes utilizados pela empresa, a manutenção empregada nesses sistemas (tipos, intervalos, métodos) e a existência de causas comuns de falhas que afetariam ambos os equipamentos do sistema redundante.

Quanto às causas comuns de falha de ambos os equipamentos do sistema redundante, as três empresas relataram suas possibilidades. Em casos mais graves, as falhas são evitadas utilizando sistemas redundantes com equipamentos diferentes, em outros, julga-se que a falha seja pouco provável ou não gere um dano catastrófico.

Como tipo de sistema redundante é utilizado o tipo *back up*, onde um segundo equipamento com a mesma função é mantido em paralelo, pronto para entrar em operação, caso o primeiro equipamento falhar. Porém, o sistema *back up* é utilizado de algumas formas diferentes: *i) Back up* idêntico com alternância de operação; *ii) Back up* idêntico normalmente inativo; *iii) Back up* diferente normalmente inativo; *iv) Back up* de carga compartilhada.

Para a manutenção desses sistemas redundantes é utilizado como base os manuais dos fabricantes e a experiência da equipe de manutenção. Não são utilizados métodos quantitativos para a definição de intervalos de manutenção, nem são feitos cálculos para estimar a confiabilidade dos sistemas.

Ainda que as empresas possuam sistemas aparentemente confiáveis, seria importante mensurar o grau de confiabilidade real dos sistemas empregados, a fim de avaliar se os riscos envolvidos na operação de cada sistema são compatíveis com os riscos que a empresa está disposta a assumir. Observa-se que, apesar de se coletarem dados de falhas e de manutenções ocorridas nas empresas, as mesmas não dispõem de métodos efetivos para determinar quantitativamente a sua

confiabilidade. De fato, esses métodos não são encontrados nem na literatura, tampouco na prática industrial.

Por fim, vale ressaltar as delimitações deste estudo. Este trabalho limitou-se ao estudo de três empresas de grande porte do setor de petróleo, siderúrgico e de alimentos. Todas as empresas se caracterizam por apresentarem processos produtivos contínuos, em maior ou menor grau. Julga-se que empresas com este tipo de processo e que envolvem elevados riscos de segurança possuem instalações industriais com maior número de sistemas redundantes. Não foram entrevistadas empresas com outros tipos de processo de manufatura.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo fornecimento de bolsa de pesquisa. Também agradecemos às empresas que permitiram a realização deste estudo colaborando com a disponibilização de informações.

REFERÊNCIAS

Arora JR. Reliability of Several Standby-Priority-Redundant Systems. *IEEE Transaction on Reliability* 1977, R-26(4): 290-3.

Azaron A, Perkgoz C, Katagiri H, Kato K, Sakawa M. Multi-objective reliability optimization for dissimilar-unit cold-standby systems using a genetic algorithm. *Computers & Operations Research* 2006, 36:1562-1571.

Billinton R, Pan J. Optimal maintenance scheduling in a two identical component parallel redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1998, 59:309-16.

Bloom NB. *Reliability Centered Maintenance: implementation made simple*. New York, McGraw-Hill, 2006.

Courtois P-J, Delsarte P. On the optimal scheduling of periodic tests and maintenance for reliable redundant components. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91:66-72.

Csenki A. An integral equation approach to the interval reliability of systems modeled by finite semi-Markov process. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 47: 37-45.

Dhillon BS, Subramanian P. Reliability analysis of triple modular computer systems with redundant voters and restricted maintenance. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 2001, 7(2):151-164.

- Ding Y, Zuo M, Tian Z, Li W. The hierarchical weighted multi-state k-out-of-n system model and its application for infrastructure management. *IEEE Transaction on Reliability* 2010, 59:593–603.
- Dwyer VM. Reliability of various 2-out-of-4:G redundant systems with minimal repair. *IEEE Transactions on Reliability* 2012, 61:170-179.
- Ebrahimipour V, Tohidi AH, Rahmanniya F. Simultaneously Optimizing of Reliability, Cost and Completion Time in Series-parallel Systems Considering Redundant Allocation Using a Genetic Algorithm. *IEEE International Conference on Quality and Reliability (ICQR)* 2011, 385-390.
- Elerath JG, Pecht M. A Highly Accurate Method for Assessing Reliability of Redundant Arrays of Inexpensive Disks (RAID). *IEEE Transactions on Computers* 2009, 58(3):289-299.
- Ereau JF, Saleman M, Valette R, Demmou H. Petri Nets for the Evaluation of Redundant Systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 55:95-104.
- Flammini F, Marrone S, Mazzocca N, Vittorini V. A new modeling approach to the safety evaluation of N-modular redundant computer systems in presence of imperfect maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2009, 94:1422–32.
- Fogliatto FS, Ribeiro JLD. *Confiabilidade e Manutenção Industrial*. São Paulo: Campus - Elsevier, 2009.
- Gray JNP. Continuous-time Markov Models in the solution of practical reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety* 1985, 11(4):233-52.
- Gupta R, Goel R, Chaudhary A. Analysis of a two-unit standby system with fixed allowed down time and truncated exponential lifetime distributions. *Reliability Engineering and System Safety* 1994, 44:119-24.
- Hokstad P, Frovig AT. The modeling of degraded and critical failures for components with dormant failures. *Reliability Engineering and System Safety* 1996, 51(2):189-99.
- Hsieh Y-C. A linear approximation for redundant reliability problems with multiple component choices. *Computers & Industrial Engineering* 2002, 44:91-103.
- Hu R, Xie J. Optimal Maintenance Policies for a Cold Standby Redundant System with Two Units. *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (IEEE/SOLI)* 2008, 2:1774-8.
- Jia J, Wu S. Optimizing replacement policy for a cold-standby system with waiting repair times. *Applied Mathematics and Computation* 2009, 214:133–141.

Kancev D, Cepin M. Evaluation of risk and cost using an age-dependent unavailability modelling of test and maintenance for standby components. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 2011, 24:146-155.

Kapur PK, Kapoor KR. Effect of Standby Redundancy on System Reliability. *IEEE Transaction on Reliability* 1976, R-25(2): 120-1.

Koutras VP, Platis AN. Semi-Markov Availability Modeling of a Redundant System with Partial and Full Rejuvenation Actions. *Third International Conference on Dependability of Computer Systems DepCoS-RELCOMEX*, 2008.

Kumar A. Steady-State Profit in a 2-unit Standby System. *IEEE Transactions on Reliability* 1976, R-25(2):105-8.

Lafracia JRB. *Manual de confiabilidade, manutenibilidade e disponibilidade*. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2001.

Lapa CMF, Pereira CMNA, Barros MP. A model for preventive maintenance planning by genetic algorithms based in cost and reliability. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 233-40.

Laprie J, Costes A, Landrault C. Parametric Analysis of 2-Unit Redundant Computer Systems with Corrective and Preventive Maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 1981; R-30(2):139-44.

Lu L, Jiang J. Analysis of on-line maintenance strategies for k-out-of-n standby safety systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2007, 92:144-155.

Márquez AC, León PM, Fernández JFG, Márquez CP, Campos ML. The maintenance management framework. A practical view to maintenance management. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 2009, 15(2):167-178.

Marseguerra M, Zio E, Podofillini L, Coit W. Optimal Design of Reliable Network Systems in Presence of Uncertainty. *IEEE Transactions on Reliability* 2005, 54(2):243-253.

Moghaddass R, Zuo MJ, Pandey, M. Optimal design and maintenance of a repairable multi-state system with standby components. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2012, 142:2409–2420.

Montoro-Cazorla D, Pérez-Ocón R. A deteriorating two-system with two repair modes and sojourn times phase-type distributed. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 1–9.

Myers A, Rauzy A. Efficient Reliability Assessment of Redundant Systems Subject to Imperfect Fault Coverage using Binary Decision Diagrams. *IEEE Transactions on Reliability* 2008, 57(2):336-348.

- Nguyen DQ, Brammer C, Bagajewicz M. New tool for the evaluation of the scheduling of preventive maintenance for chemical process plants. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 2008, 47(6):110-124.
- Niu G, Yang B, Pecht M. Development of an optimized condition-based maintenance system by data fusion and reliability-centered maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:786-796.
- Nourelfath M, Châtelet E, Nahas N. Joint redundancy and imperfect preventive maintenance optimization for series-parallel multi-state degraded systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012, 103:51–60.
- Okasha NM, Frangopol DM. Redundancy of structural systems with and without maintenance: an approach based on life time functions. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:520-533.
- Osaki S. Reliability Analysis of a Two-Unit Standby-Redundant System with Preventive Maintenance. *IEEE Transaction on Reliability* 1972, R-21(1): 24-9.
- Paté-Cornell ME, Dillon RL, Guikema SD. On the Limitations of Redundancies in the Improvement of System Reliability. *Risk Analysis* 2004, 24(6):1423-1436.
- Pinto AK, Xavier JAN. *Manutenção: função estratégica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2001.
- Rausand M. Reliability Centered Maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 1998, 60:121-132.
- Ruiz-Castro J, Li Q. Algorithm for a general discrete k-out-of-n: G system subject to several types of failure with an indefinite number of repair persons. *European Journal of Operational Research* 2011, 211:97–111.
- Santos WB, Colosimo EA, Motta SB. Tempo ótimo entre manutenções preventivas para sistemas sujeitos a mais de um tipo de evento aleatório. *Revista Gestão e Produção* 2007, 14(1): 193-202.
- Smidt-Destombes K, Heijden M, Harten A. Joint optimization of spare part inventory, maintenance frequency and repair capacity for k-out-of-N systems. *International Journal of Production Economics* 2009, 118:260–268.
- Subramanian R, Anantharaman V. Reliability analysis of a complex standby redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 48:57-70.
- Taghipour S, Banjevic D, Jardine AKS. Periodic inspection optimization model for a complex repairable system. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:944–52.
- Vaurio JK. On time-dependent availability and maintenance optimization of standby units under various maintenance policies. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 56:79-89.

Zequeira RI, Bérenguer C. Periodic imperfect preventive maintenance with two categories of competing failure modes. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91(4): 460-8.

Zhang YL, Wang GJ. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use. *European Journal of Operational Research* 2007, 183:278-295.

Zhang YL, Wang GJ. An optimal repair–replacement policy for a cold standby system with use priority. *Applied Mathematical Modelling* 2011, 35:1222-1230.

Zhong C, Jin H. A novel optimal preventive maintenance policy for a cold standby system based on semi-Markov theory. *European Journal of Operational Research* 2014, 232:405-411.

3 ARTIGO 2:

CONFIABILIDADE E TEMPO ESPERADO ATÉ A FALHA PARA SISTEMAS REDUNDANTES EM *COLD STANDBY* SUJEITOS A INSPEÇÕES PERIÓDICAS

Angélica Alebrant Mendes

José Luis Duarte Ribeiro

Resumo

Sistemas em *cold standby* com inspeções periódicas são amplamente utilizados na indústria, contudo a literatura disponível sobre a solução deste problema ainda é escassa. A determinação da confiabilidade, do tempo esperado até a falha e, conseqüentemente, do intervalo entre inspeções mais adequado para sistemas redundantes em *cold standby* é um problema desafiador a ser solucionado. Este artigo tem por objetivo desenvolver equações que solucionem este problema através da análise do tempo esperado de exposição dos componentes. Como resultado, são apresentados exemplos numéricos para sistemas com zero, um, dois e três componentes em *cold standby*, juntamente com tabelas e gráficos que permitem a determinação do intervalo entre inspeções mais adequado, dado uma confiabilidade meta e o número de componentes em *standby* disponíveis. A principal vantagem da utilização dos resultados apresentados nesse trabalho é a facilidade de utilização das equações, dispensando o uso de formulações mais complexas. As tabelas e gráficos elaborados podem ser aplicados facilmente em problemas práticos onde sistemas em *cold standby* com inspeções periódicas são aplicados para assegurar altos níveis de confiabilidade.

Palavras-chave: confiabilidade, sistemas em *cold standby*, inspeções periódicas, sistemas de segurança.

3.1 INTRODUÇÃO

Quando um sistema não é suficientemente confiável para desempenhar uma determinada função, duas abordagens podem ser usadas para melhorar sua performance: a primeira se refere à aquisição de componentes mais confiáveis para reestruturar o sistema, a segunda é a adição de componentes redundantes para melhorar a confiabilidade do sistema. Visto que a aquisição de componentes altamente confiáveis frequentemente envolve custos mais elevados que a adição de redundâncias, sistemas redundantes têm sido notadamente utilizados em processos onde a

segurança operacional é extremamente importante, como em controles de aeronaves, plantas nucleares e redes de telecomunicação (MYERS; RAUZY, 2008; HSIEH, 2002; NAKAGAWA; YASUI, 2005; MARSEGUERRA *et al.*, 2005; YUN; CHA, 2010; MORI *et al.*, 2007; COIT, 2001).

Visando assegurar altos níveis de confiabilidade, estes sistemas redundantes requerem monitoramento contínuo ou inspeções periódicas para identificação e reparo de eventuais falhas em seus componentes. Dessa forma, a confiabilidade de sistemas redundantes deve ser analisada considerando a estratégia de manutenção utilizada. Supondo que dois sistemas redundantes idênticos são analisados, porém um deles sofre inspeções periódicas e o outro é monitorado continuamente, a confiabilidade desses sistemas será diferente, pois a detecção e reparo ou substituição dos componentes que falham ocorre de maneira diferente.

Em muitos casos de sistemas em *cold standby* não é possível a realização de monitoramento contínuo. Assim, testes periódicos são necessários para verificar falhas e assegurar a adequada operação do *cold standby* quando este for requerido (CHAY; MAZUMDAR, 1975; SIM, 1987; MOGHADDASS *et al.*, 2012). Exemplos desses sistemas são bombas hidráulicas em refinarias de petróleo e sistemas de caldeiras em usinas siderúrgicas.

A confiabilidade de sistemas de segurança depende da configuração de projeto, da sua operação e da manutenção executada. Se uma falha ocorrer, sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas permanecerão desprotegidos até a próxima inspeção. Neste caso, a determinação de um intervalo entre inspeções ótimo é um aspecto fundamental (MOGHADDASS *et al.*, 2012; COURTOIS; DELSARTE, 2006; TAGHIPOUR *et al.*, 2010).

A otimização da manutenção de sistemas reparáveis tem sido objeto de investigação durante décadas. Alguns desses trabalhos estudam sistemas com *hot standbys* (SUBRAMANIAN; ANANTHARAMAN, 1995; LAPA *et al.*, 2006; FLAMMINI *et al.*, 2009; GRAY, 1985 e ZEQUEIRA; BÉRENGUER, 2006), outros utilizam sistemas do tipo *k-out-of-N* componentes [18-23] e muitos deles analisam sistemas em *cold standby* (COURTOIS; DELSARTE, 2006; LU; JIANG, 2007; DWYER, 2012; OKASHA; FRANGOPOL, 2010; HU; XIE, 2008; KAPUR; KAPOOR, 1976; OSAKI, 1972; ARORA, 1977; KUMAR, 1976; HOKSTAD; FROVIG, 1996; MONTORO-CAZORLA; PÉREZ-OCÓN, 2006; GUPTA *et al.*, 1994; KOUTRAS; PLATIS,

2008; EBRAHIMIPOUR *et al.*, 2011; JIA; WU, 2009; KANCEV; CEPIN, 2011; ZHANG; WANG, 2011 e ZHONG; JIN, 2014.

Sistemas redundantes em *cold standby* representam uma das mais importantes estruturas utilizadas pela engenharia de confiabilidade e têm sido aplicados amplamente na indústria. Algumas aplicações práticas podem ser encontradas em sistemas de controle em plantas siderúrgicas (ZHONG; JIN, 2014), sistemas de *backup* de dados em redes de computadores (JIA; WU, 2009) e em sistemas de proteção de reatores nucleares (COURTOIS; DELSARTE, 2006). Devido à sua importância, sistemas em *cold standby* têm sido estudados utilizando diferentes abordagens e métodos. Hokstad e Frovig (1996), Montoro-Cazorla e Pérez-Ocón (2006), Gupta e Goel (1994) e Koutras e Platis (1994) modelaram sistemas em *cold standby* com degradação utilizando processos de Markov e Semi-Markov. Uma política de substituição foi determinada por Hu e Xie (2008) e Jia e Wu (2009) utilizando processos de Renovação e Otimização da Função Custo. Arora (1977) desenvolveu um modelo para analisar a confiabilidade de sistemas com diferentes componentes e prioridade para reparo aplicando processos de Renovação e Transformadas de Laplace. Estudando um modelo similar, porém considerando que o reparo de componentes segue um processo geométrico, Zhang e Wang (2011) estabeleceram uma política de substituição baseada no número de falhas do componente principal. Em um estudo recente, Zhong e Jin (2014) também utilizaram processo de Semi-Markov e Transformadas de Laplace combinadas com a técnica de Regeneração para desenvolver um modelo para otimizar a manutenção preventiva em um sistema em *cold standby*.

Ainda que muitos pesquisadores tenham estudado a confiabilidade de sistemas redundantes em *cold standby* que não sofrem degradação e são submetidos à manutenção, poucos analisaram sistemas com inspeções periódicas. Alguns autores estudaram modelos para substituição preventiva sem inspeção (HU; XIE, 2008 e JIA; WU, 2009), outros consideraram que o sistema opera com monitoramento contínuo, admitindo que o reparo ocorre imediatamente após a falha de um componente e que somente o componente ativo sofre manutenção periódica (OSAKI, 1972; ARORA, 1977; KANCEV; CEPIN, 2011; ZHANG; WANG, 2011 e ZHONG; JIN, 2014).

Sistemas em *cold standby* nos quais o estado do componente (ativo ou falha) é verificado somente durante inspeções ainda são escassos na literatura. Nessas estruturas, o sistema irá falhar quando os componentes em ativo e em *standby* falharem entre intervalos de inspeção. Visto que o

problema envolvendo sistemas redundantes em *cold standby* submetidos a inspeções periódicas ainda não está totalmente solucionado, este artigo busca prover equações para determinar a confiabilidade esperada, o tempo esperado até a falha do sistema e o intervalo entre inspeções apropriado para estes sistemas através da análise do tempo esperado de exposição dos componentes.

Os custos de manutenção e operação destes sistemas não foram detalhados neste artigo, pois o método desenvolvido se destina a sistemas críticos em termos de segurança. Nestes sistemas, a meta de confiabilidade é mais importante que os custos (ZHONG; JIN, 2014). Contudo, atingida a meta de confiabilidade, a escolha será por sistemas de menor custo. Ou seja, dado que o sistema atinge a meta de confiabilidade com n e com $n+1$ componentes redundantes, optar-se-á pelo sistema com o menor número de componentes, visto que este possui o menor custo de aquisição.

A principal contribuição do modelo proposto neste artigo é a possibilidade de análise de confiabilidade e determinação do intervalo entre inspeções apropriado sem a utilização de integrais complexas ou modelos como Cadeias de Markov e Simulação de Monte Carlo. As equações desenvolvidas nesse trabalho são fáceis de serem aplicadas na prática onde sistemas em *cold standby* são utilizados para assegurar elevados níveis de confiabilidade.

Este artigo está organizado conforme segue. A Seção 3.2 lista as suposições e notação usadas. A Seção 3.3 explica a metodologia aplicada na modelagem do problema. A Seção 3.4 contém a apresentação e análise de exemplos numéricos. A Seção 3.5 faz uma comparação entre as soluções exatas e as soluções geradas pelo modelo proposto. A Seção 3.6 sumariza o trabalho e conclusões obtidas.

3.2 DESCRIÇÃO DO MODELO E SUPOSIÇÕES

Nesta seção, o sistema modelado é descrito, notações são definidas e suposições são apresentadas.

3.2.1 Descrição do sistema

O sistema estudado neste artigo é composto por um componente em operação (ativo) e i componentes em *cold standby*. Este sistema é sujeito a inspeções periódicas onde o estado dos componentes são verificados (ativo ou falha) e reparados em intervalos predeterminados. Após a falha do componente ativo, o componente em *cold standby* assume a operação do sistema

automaticamente. Visto que componentes falhados são recuperados apenas durante as inspeções periódicas, o sistema irá falhar somente se todos os componentes falharem durante um mesmo intervalo entre inspeções.

A Figura 3.1 apresenta uma possível configuração de operação de um sistema com dois componentes (C_1 e C_2) no qual um componente inicia operando e o outro inicia em *cold standby* e inspeções periódicas são realizadas a cada tm .

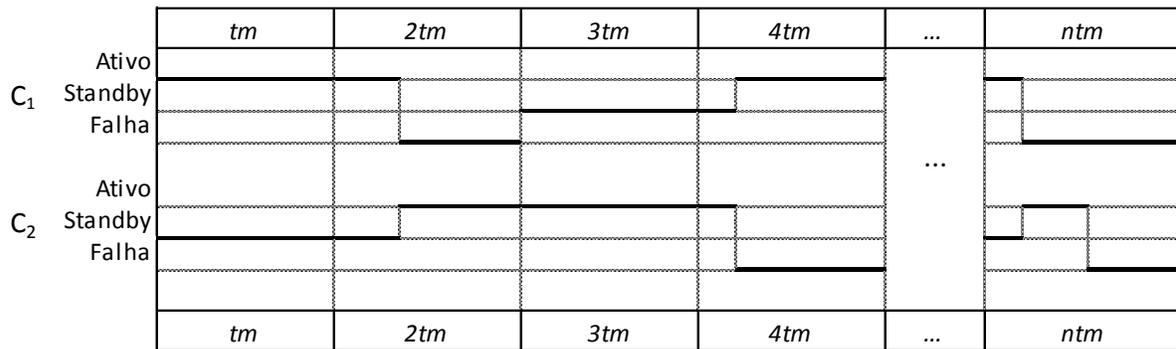


Figura 3.1 – Possível configuração de operação para o sistema estudado.

Fonte: Adaptado de [38]

3.2.2 Notações

$MTTF$ tempo médio até a falha;

t tempo de missão;

$f(t)$ função densidade de probabilidade;

tm intervalo entre inspeções periódicas;

$E[t_f]$ tempo esperado até a falha dado que o componente ativo irá falhar no intervalo entre 0 e tm ;

n número de componentes do sistema;

i número de *cold standbys*; onde $0 \leq i \leq n-1$;

k_i constante onde $0 < k_i \leq 1$; $k_0 = 1$; $k_{i-1} > k_i > k_{i+1}$;

$E[t_{fi}]$ tempo esperado até a falha do i th *cold standby* dado que ele irá operar e falhar no intervalo entre 0 e $k_{i+1}tm$;

$R_s(t)$	confiabilidade do sistema no tempo t ;
$R(t)$	confiabilidade do componente no tempo t ;
$R(k_itm)$	confiabilidade do i th <i>cold standby</i> no tempo k_itm ;
λ	taxa de falha do componente.

3.2.3 Suposições

O estudo apresentado neste artigo supõe que tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial idêntica para todos os componentes do sistema redundante. A distribuição exponencial é amplamente utilizada na modelagem de sistemas sujeitos à manutenção preventiva. Esta distribuição é aplicada, por exemplo, nos estudos desenvolvidos por Kapur e Kapoor (1976), Kumar (1976), Gupta e Goel (1994), Koutras e Platis (1994), Kancev e Cepin (2011) e Zhong e Jin (2014). A distribuição exponencial é apropriada para modelar atividades como limpeza, lubrificação, aperto e troca de componentes. Neste cenário, as condições operacionais e, conseqüentemente, a taxa de falha permanece aproximadamente constante durante o tempo de vida do sistema. Outro exemplo de sistema com taxa de falha constante são aqueles dominados por componentes eletrônicos que não se desgastam com o tempo. Contudo, para tempos até a falha que seguem distribuições diferentes da exponencial, outras abordagens devem ser consideradas.

As equações desenvolvidas neste trabalho são apropriadas para determinar a confiabilidade de sistemas que seguem as seguintes suposições: componentes idênticos com taxa de falha constante, um componente ativo e outro(s) em *cold standby*, reparáveis a condição de novo componente, reparáveis somente durante as inspeções, com tempo de reparo negligenciável e *switch* perfeito.

NOTA: *Switch* é um mecanismo altamente confiável usado em sistemas redundantes com *standby* para detectar a falha do componente em operação e ativar o componente inativo. Quando a probabilidade de falha deste mecanismo é considerada nula, o *switch* é chamado perfeito (COIT, 2003).

3.3 CONFIABILIDADE E TEMPO ESPERADO ATÉ A FALHA PARA UM SISTEMA REDUNDANTE EM *COLD STANDBY* SUBMETIDO A INSPEÇÕES PERIÓDICAS

Assumindo a função $f(t)$, $t \geq 0$, como ilustrado na Figura 3.2, o valor esperado do tempo até a falha ou tempo médio até a falha de um componente com densidade de probabilidade de falha $f(t)$ é dado pela Equação 1:

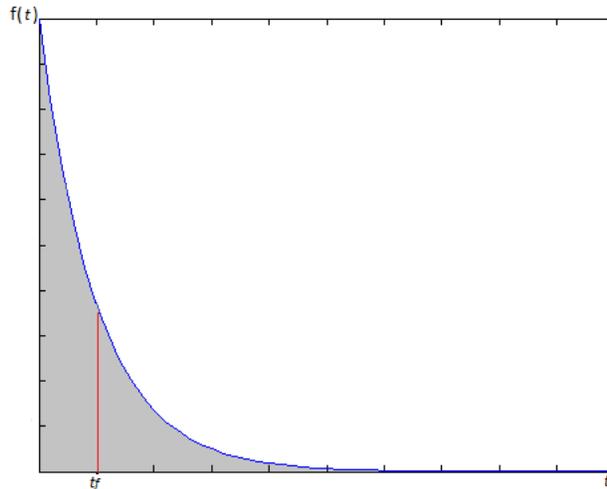


Figura 3.2 – Função densidade de probabilidade e valor esperado do tempo até a falha.

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (\text{eq. 1})$$

Considerando o tempo entre inspeções periódicas tm e supondo que no final de cada tm componentes falhados são recuperados e retornam a posição de *cold standby*, o tempo esperado até a falha para um componente que falha no intervalo entre 0 e tm é dado pela Equação 2:

$$E[t_f] = \frac{\int_0^{tm} t f(t) dt}{\int_0^{tm} f(t) dt} \quad (\text{eq. 2})$$

A Figura 3.3 ilustra o tempo esperado até a falha no intervalo entre 0 e tm . É possível observar que $E[t_f]$ corresponde ao centro de massa da área sob a curva $f(t)$ no intervalo entre 0 e tm .

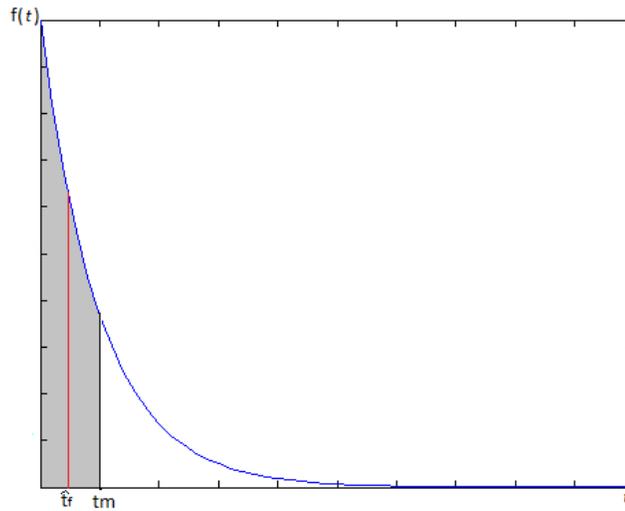


Figura 3.3 – Tempo esperado até a falha $E[t_f]$ para t entre 0 e t_m .

Se o componente ativo falhar em um dado intervalo entre inspeções, o primeiro *standby* terá um tempo esperado de exposição no intervalo de manutenção igual a $t_m - E[t_f]$. Esta fração de t_m pode ser genericamente representada por $k_1 t_m$ (Eq. 3), onde k_1 é uma constante menor que 1 e é determinada pela forma da curva $f(t)$ no intervalo entre 0 e t_m . Simultaneamente, o tempo esperado para a falha do primeiro *standby*, considerando que ele falha no intervalo entre 0 e $k_1 t_m$ é dado pelo Equação 5. A constante k_1 pode ser calculada pela Equação 4.

$$k_1 t_m = t_m - E[t_f] \quad (\text{eq. 3})$$

$$k_1 = \frac{t_m - E[t_f]}{t_m} \quad (\text{eq. 4})$$

$$E[t_{f1}] = \frac{\int_0^{k_1 t_m} t f(t) dt}{\int_0^{k_1 t_m} f(t) dt} \quad (\text{eq. 5})$$

Se o primeiro *standby* falha em $E[t_{f1}]$, o segundo *standby* terá um tempo esperado de exposição no intervalo de manutenção igual a $t_m - E[t_f] - E[t_{f1}]$. Esta fração de t_m pode ser genericamente representada por $k_2 t_m$ (Eq. 6), onde k_2 é uma constante menor que k_1 e é determinada pela forma da curva $f(t)$ no intervalo entre 0 e t_m .

$$k_2 t_m = t_m - E[t_f] - E[t_{f1}] \quad (\text{eq. 6})$$

Generalizando, considerando que o i -ésimo componente tenha falhado em um dado intervalo, o tempo esperado até a falha do i -ésimo componente redundante, dado que este também falha no intervalo, é dado pela Equação 7:

$$E[t_{fi}] = \frac{\int_0^{k_i tm} t f(t) dt}{\int_0^{k_i tm} f(t) dt} \quad (\text{eq. 7})$$

O tempo esperado de exposição no intervalo de manutenção do i -ésimo componente redundante, dado que os componentes anteriores falharam no intervalo entre 0 e tm e que o i -ésimo componente também irá falhar, é dado por $k_i tm$ (Eq. 8). A constante k_i pode ser calculada pela Equação 9.

$$k_i tm = tm - E[t_f] - E[t_{f1}] - E[t_{f2}] - \dots - E[t_{f(i-1)}] \quad (\text{eq. 8})$$

$$k_i = \frac{tm - E[t_f] - E[t_{f1}] - E[t_{f2}] - \dots - E[t_{f(i-1)}]}{tm} \quad (\text{eq. 9})$$

A confiabilidade de um sistema em paralelo (R_s), composto por componentes idênticos, não sujeitos a inspeção e não reparável pode ser obtida através da Equação 10. O cálculo para uma situação mais complexa, onde os componentes são submetidos à inspeção e são reparáveis, baseia-se nos tempos de exposição no intervalo de manutenção dos n componentes do sistema ($k_i tm$). Assim, a confiabilidade de um sistema em paralelo com inspeções periódicas pode ser calculado usando a Equação 11.

$$R_s(t) = \{1 - \prod_{i=0}^n (1 - R(t))\} \quad (\text{eq. 10})$$

$$R_s(t) = \{1 - \prod_{i=0}^n (1 - R(k_i t))\} \quad \text{para } t \leq tm \quad (\text{eq. 11})$$

$$R_s(t) = \{1 - \prod_{i=0}^n (1 - R(k_i tm))\}^{t/tm} \quad \text{para } t > tm$$

$$\text{Onde } 0 < k_i \leq 1; k_0 = 1; k_{i-1} > k_i > k_{i+1}$$

Em um sistema composto por dois componentes (um ativo e um em *cold standby*), quando o componente ativo falha, o componente em *standby* entra em operação. A falha pode ocorrer em qualquer ponto do intervalo. Em média, a falha ocorre no centro de massa do intervalo. O componente que se torna ativo durante o intervalo ficará exposto à falha por $t = k_1 tm$. Dessa forma, a probabilidade de uma segunda falha é estimada como $1 - R(k_1 tm)$. A probabilidade de falha do sistema é estimada como $(1 - R(tm))(1 - R(k_1 tm))$ e a confiabilidade do sistema pode ser estimada por $1 - (1 - R(tm))(1 - R(k_1 tm))$. Visto que os intervalos de manutenção se sucedem, para um tempo genérico t , esta situação ocorre t/tm vezes. Consequentemente, a confiabilidade do

sistema no tempo t é estimada elevando a equação anterior ao expoente t/tm , como mostra a Equação 10.

Supondo que a confiabilidade do componente $R(t)$ segue uma distribuição exponencial (Equações 12 e 13), a Equação 11 pode ser reescrita pela Equação 14 e a Equação 7 pela Equação 15.

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (\text{eq. 12})$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{eq. 13})$$

$$R_s(t) = \{1 - \prod_{i=0}^n (1 - (e^{-\lambda k_i t m}))\}^{t/tm} \quad (\text{eq. 14})$$

$$E[t_{fi}] = \frac{\int_0^{k_i t m} t \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_0^{k_i t m} \lambda e^{-\lambda t} dt} \quad (\text{eq. 15})$$

Usando as Equações 15 e 8, é possível calcular os valores de k_i como apresentados na Tabela 3.1 e calcular a confiabilidade do sistema usando a Equação 14. A Tabela 3.1 apresenta os valores de k_i em termos de $tm/MTTF$ para sistemas com 2, 3 ou 4 componentes redundantes.

Tabela 3.1 – Valores de k_i computados utilizando as Equações 13 e 7

$tm/MTTF =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K₀	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k₁	0,508	0,517	0,525	0,533	0,541	0,550	0,558	0,566	0,574	0,582
k₂	0,256	0,263	0,269	0,276	0,283	0,290	0,297	0,304	0,312	0,319
k₃	0,129	0,133	0,136	0,141	0,145	0,149	0,154	0,158	0,163	0,168

3.4 EXEMPLO NUMÉRICO

A Figura 3.4 mostra a confiabilidade $R(t)$ para sistemas compostos por 0, 1, 2 ou 3 *standbys* e diferentes relações $tm/MTTF$. A confiabilidade do sistema que não possui *standby* ($i = 0$) é substancialmente inferior à confiabilidade de sistemas com componentes em *standby*. Sistemas nos quais falhas têm efeito na segurança devem apresentar confiabilidade elevada, tipicamente maior que 99,9% ou 99,99%. Supondo que a confiabilidade meta do sistema é 99,9% e sabendo que a adição de componentes redundantes aumenta os custos do sistema, pode-se concluir que: (i) em sistema com intervalo entre inspeções $tm/MTTF$ menor que 0,1, o uso de um *standby* é recomendado; (ii) para sistemas com intervalo entre inspeções $tm/MTTF$ entre 0,1 e 0,4, é

recomendado o uso de dois *standbys*; (iii) para sistemas com intervalo entre inspeções $t_m/MTTF$ maior que 0,4, três ou mais *standbys* são necessários.

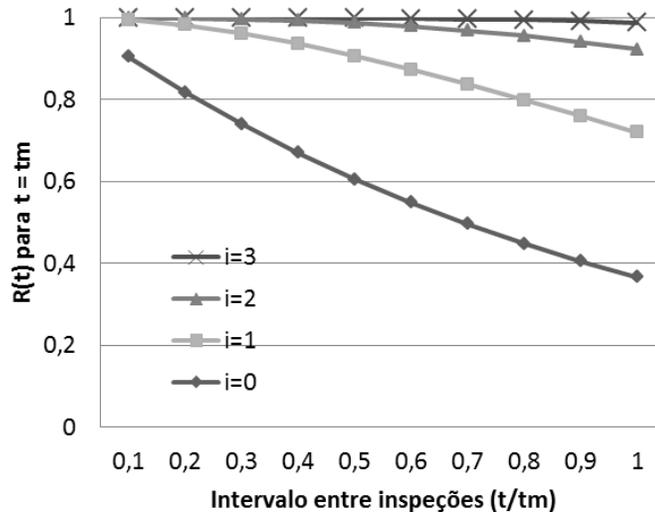


Figura 3.4 - $R(t)$ para sistemas com i componentes em *standby*

A Figura 3.5 apresenta as curvas de confiabilidade do Sistema para relações $t_m/MTTF$ iguais a 0,1, 0,3 e 0,5 respectivamente. Os gráficos corroboram com as conclusões obtidas na Figura 3.4. Também é possível verificar a diminuição da confiabilidade do sistema no decorrer dos intervalos entre inspeções.

A Figura 3.6 apresenta quatro curvas que representam os valores de confiabilidade usualmente utilizados como meta em sistemas de segurança. Estes valores são: $R(t) = 0,99999$ (sistema mais confiável), $R(t) = 0,9999$, $R(t) = 0,999$ e $R(t) = 0,99$ (sistema menos confiável). O eixo vertical é referente à relação $t_m/MTTF$ utilizada, que representa o tamanho do intervalo entre inspeção com relação ao tempo médio até a falha do sistema. O eixo horizontal representa o número de *standbys* empregados no sistema. Através destas curvas é possível identificar o intervalo apropriado entre inspeções dada a confiabilidade desejada, o número de *standbys* existentes no sistema e seu $MTTF$. Por exemplo, se o sistema requer uma confiabilidade de 0,999 e possui dois componentes em *standby*, inspeções devem ser realizadas em intervalos da ordem de, aproximadamente, $0,1MTTF$. Da mesma forma, é possível identificar o número de *standbys* necessários para atingir a confiabilidade desejada com determinado intervalo entre inspeções. Por exemplo, para uma confiabilidade de 0,999 e intervalos entre inspeções da ordem de $0,4MTTF$ são necessários, no mínimo, três componentes em *standby*. Supondo que a aquisição de mais componentes gera custos, o número ótimo de *standbys* neste caso seriam quatro componentes.

Como apresentado nas figuras anteriores, a Figura 3.6 confirma que sistemas sem componentes em *standby* não atendem os níveis de confiabilidade normalmente desejados em sistemas de segurança ainda que inspeções sejam realizadas frequentemente.

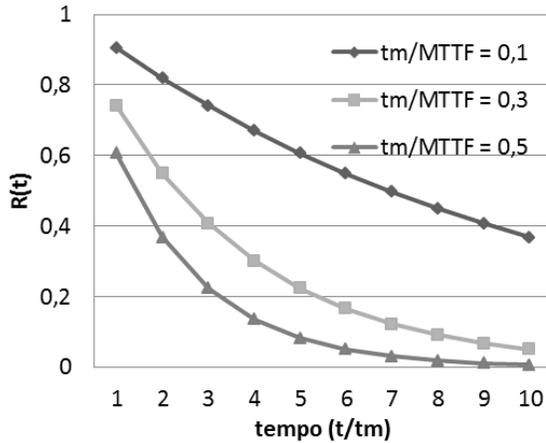


Figura 5a - $R(t)$ para $i = 0$

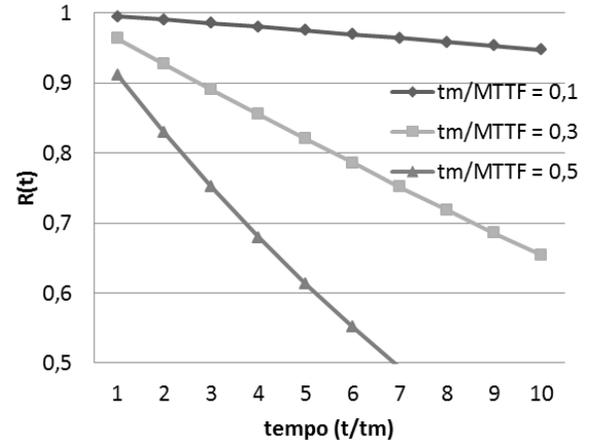


Figura 5b - $R(t)$ para $i = 1$

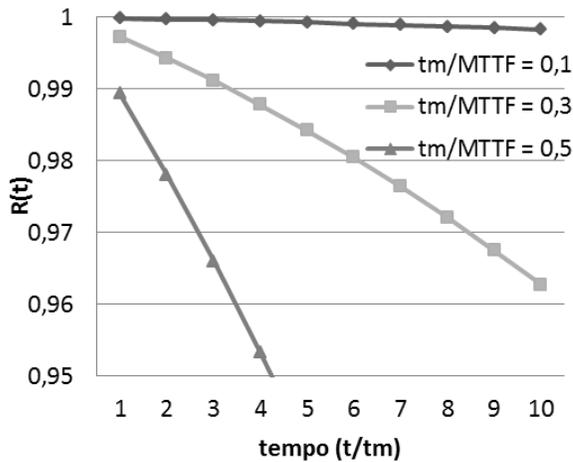


Figura 5c - $R(t)$ para $i = 2$

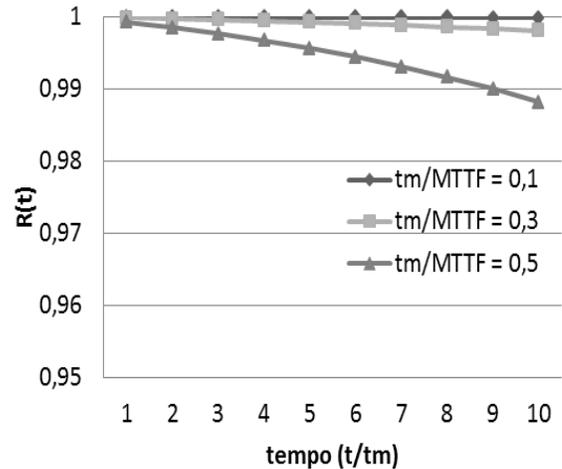


Figura 5d - $R(t)$ para $i = 3$

Figura 3.5 – $R(t)$ para sistemas composto por i *standbys* e diferentes relações $tm/MTTF$

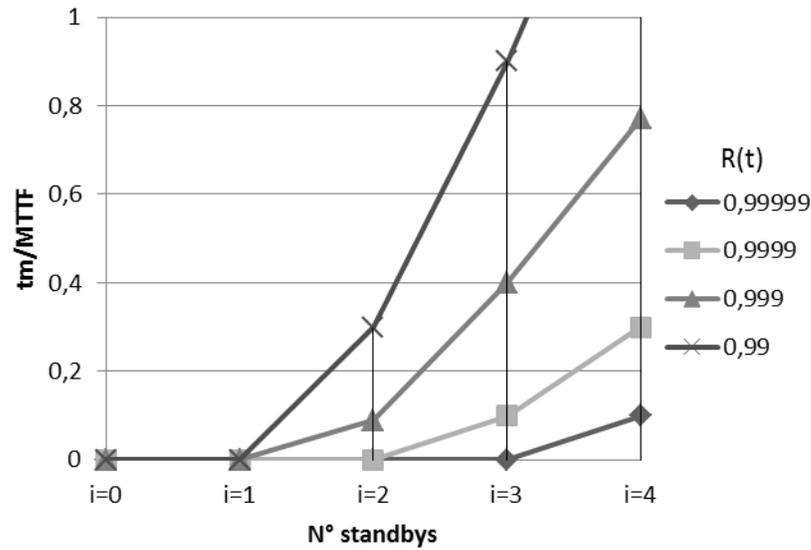


Figura 3.6 – Intervalo entre inspeções ($tm/MTTF$) de acordo com o número de *standbys* e meta de confiabilidade, para $t = MTTF$

3.5 COMPARAÇÃO DO FORMULÁRIO PROPOSTO COM A SOLUÇÃO EXATA

O modelo proposto neste trabalho visa facilitar os cálculos de confiabilidade e tempo esperado até a falha para aqueles que trabalham no dia-a-dia das indústrias. Sendo assim, seu objetivo é evitar o uso de cálculos integrais, bem como modelos de Markov e simulações de Monte Carlo. Através da tabela para k_i apresentada neste trabalho, este cálculo se torna possível com a utilização de formulário simples de ser implementado na prática, sem a necessidade de especialistas.

Para comprovar a eficácia do modelo desenvolvido, os resultados do mesmo foram comparados com os resultados exatos gerados por equações integrais. As equações integrais exatas para um sistema com dois componentes idênticos, sendo um ativo e um em *cold standby*, com as mesmas suposições utilizadas no modelo desenvolvido, é apresentada nas Equações 16 e 17. Estas equações se tornam mais complexas à medida que o número de *standbys* aumenta.

Para $t < tm$, a confiabilidade do sistema é dada pela probabilidade da soma dos tempos até a falha dos componentes ser maior que t , logo:

$$\begin{aligned}
 R_s(t) &= P\{T_1 + T_2 > t\} \\
 &= 1 - P\{T_1 + T_2 < t\} \\
 &= 1 - \int_0^t P\{T_2 < t - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \int_0^t \text{P}\{T_2 < t - u\} f_{T_1}(u) du \\
&= 1 - \int_0^t (1 - R(t - u)) f(u) du \\
&= 1 - \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-u)}) \lambda e^{-\lambda u} du \\
&= e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned} \tag{eq. 16}$$

Para $t > tm$ a confiabilidade do sistema é dada pela probabilidade do soma dos tempos até a falha dos componentes serem maior que tm , elevada ao número de vezes que esses componentes sofreram inspeções e multiplicada pela probabilidade da soma dos tempos até a falha destes componentes ser maior que a diferença entre t e tm . Para $jtm < t < (j + 1)tm$, onde j é o número de inspeções realizadas até o tempo t e pode ser obtido pela parte inteira da divisão $\frac{t}{tm}$.

$$\begin{aligned}
R_s(t) &= (\text{P}\{T_1 + T_2 > tm\})^j (\text{P}\{T_1 + T_2 > t - tm\}) \\
&= (1 - \int_0^{tm} \text{P}\{T_2 < tm - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du)^j (1 - \int_0^{t-tm} \text{P}\{T_2 < t - tm - T_1 | T_1 = \\
&u\} f_{T_1}(u) du) \\
&= (1 - \int_0^{tm} \text{P}\{T_2 < tm - u\} f_{T_1}(u) du)^j (1 - \int_0^{t-tm} \text{P}\{T_2 < t - tm - u\} f_{T_1}(u) du) \\
&= (1 - \int_0^{tm} (1 - R(tm - u)) f(u) du)^j (1 - \int_0^{t-tm} (1 - R(t - tm - u)) f(u) du) \\
&= (1 - \int_0^{tm} (1 - e^{-\lambda(tm-u)}) \lambda e^{-\lambda u} du)^j (1 - \int_0^{t-tm} (1 - e^{-\lambda(t-tm-u)}) \lambda e^{-\lambda u} du) \\
&= (e^{-\lambda tm} + \lambda e^{-\lambda tm})^j (e^{-\lambda(t-tm)} + (\lambda e^{-\lambda(t-tm)})(t - tm))
\end{aligned} \tag{eq. 17}$$

A Figura 3.7 mostra as curvas de confiabilidade geradas através do método proposto e do método exato para valores de $MTTF = 1$ e intervalo entre inspeções tm igual a 0,1. Observa-se que diferença na solução entre os dois métodos é mínima, estando entre a terceira e quarta casa decimal, o que comprova a eficácia do método proposto.

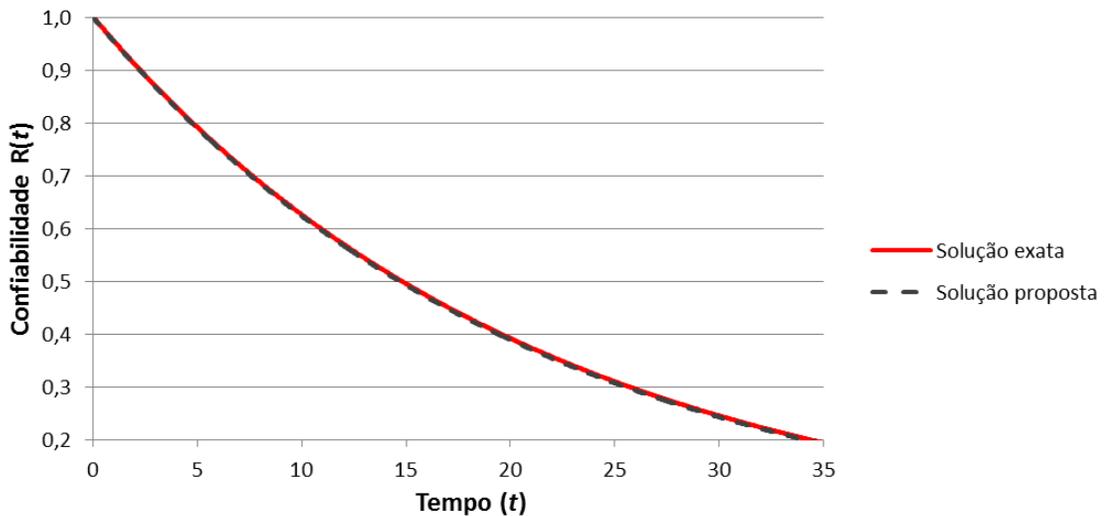


Figura 3.7 – Curvas de confiabilidade geradas através do método proposto neste trabalho e do método exato para $MTTF = 1$ e $tm = 0,1$.

3.6 CONCLUSÃO

Este artigo apresenta equações para determinar a confiabilidade esperada, o tempo esperado até a falha do sistema e o intervalo entre inspeções apropriado para sistemas redundantes em *cold standby* submetidos a inspeções periódicas. O método é baseado na análise do tempo esperado de exposição dos componentes ativo e redundante.

Nesses sistemas, existe dificuldade em se determinar: (i) o número ótimo de *standbys* que assegure determinado nível de confiabilidade; (ii) a confiabilidade do sistema e (iii) o intervalo entre inspeções apropriado para detectar e reparar falhas escondidas.

Em sistemas de segurança, o intervalo entre inspeções e o número de *standbys* deve ser otimizado para garantir o nível de segurança e disponibilidade requerido. Inspeções frequentes, assim como elevado número de *standbys*, pode fornecer o nível de segurança necessário. Contudo, estes métodos envolvem custos elevados de manutenção preventiva e de aquisição de componentes. O estabelecimento do intervalo entre inspeções apropriado e do número mínimo de *standbys* necessários é importante para assegurar a disponibilidade requerida pelo sistema com o menor custo possível.

O método utilizado nesse trabalho é baseado na análise do tempo esperado de exposição dos componentes ativo e redundantes. Inicialmente, foi estabelecida a equação para calcular o tempo

esperado até a falha através da análise do tempo esperado de exposição do *standby* no intervalo entre inspeções periódicas, dado que o componente ativo falhe neste intervalo. Em seguida, uma equação geral para calcular a confiabilidade de sistemas foi determinada. Equações específicas para sistemas compostos por um componente ativo e outro em *standby* foram desenvolvidas, assumindo-se que os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Na sequência, uma tabela contendo os respectivos valores de k (fração de tm relacionada com o tempo de exposição) em relação à $tm/MTTF$ para um, dois e três componentes em *standby* foi desenvolvida. O trabalho é concluído com um exemplo número para sistemas com zero, um, dois ou três *standbys* e diferentes relações entre $tm/MTTF$ e um gráfico que permite a verificação do intervalo apropriado entre inspeções, dada uma confiabilidade meta e um número de componentes em *standby* disponível.

A principal vantagem deste modelo é a possibilidade de avaliação da confiabilidade de sistemas e da determinação do intervalo apropriado entre inspeções de uma forma mais simples e objetiva. As equações apresentadas, juntamente com a tabela e os gráficos podem ser facilmente aplicadas em situações práticas onde *cold standbys* e inspeções periódicas são utilizadas para assegurar altos níveis de confiabilidade.

Para trabalhos futuros, o modelo apresentado neste artigo pode ser estendido para determinar a confiabilidade esperada e o tempo esperado até a falha para sistemas nos quais os tempos até a falha de seus componentes seguem diferentes distribuições de probabilidade como, por exemplo, a distribuição de Weibull.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pela disponibilização de bolsas de estudo que suportaram a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Arora JR. Reliability of Several Standby-Priority-Redundant Systems. *IEEE Transaction on Reliability* 1977, R-26(4): 290-3.
- Chay SC, Mazumdar M. Determination of Test Intervals in Certain Repairable Standby Protective Systems. *IEEE Transactions on Reliability* 1975, R-24:201-205.

Coit DW. Cold-standby redundancy optimization for nonrepairable systems. *IEEE Transactions on Reliability* 2001, 33:471-478.

COIT, D. W. Maximization of system reliability with a choice of redundancy strategies. *IEEE Transactions on Reliability*. v. 35, p. 535-543, 2003.

Courtois P-J, Delsarte P. On the optimal scheduling of periodic tests and maintenance for reliable redundant components. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91:66-72.

Ding Y, Zuo M, Tian Z, Li W. The hierarchical weighted multi-state k-out-of-n system model and its application for infrastructure management. *IEEE Transaction on Reliability* 2010, 59:593–603.

Dwyer VM. Reliability of various 2-out-of-4:G redundant systems with minimal repair. *IEEE Transactions on Reliability* 2012, 61:170-179.

Ebrahimipour V, Tohidi AH, Rahmanniya F. Simultaneously Optimizing of Reliability, Cost and Completion Time in Series-parallel Systems Considering Redundant Allocation Using a Genetic Algorithm. *IEEE International Conference on Quality and Reliability (ICQR)* 2011, 385-390.

Ereau JF, Saleman M, Valette R, Demmou H. Petri Nets for the Evaluation of Redundant Systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 55:95-104.

Flammini F, Marrone S, Mazzocca N, Vittorini V. A new modeling approach to the safety evaluation of N-modular redundant computer systems in presence of imperfect maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2009, 94:1422–32.

Gray JNP. Continuous-time Markov Models in the solution of practical reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety* 1985, 11(4):233-52.

Gupta R, Goel R, Chaudhary A. Analysis of a two-unit standby system with fixed allowed down time and truncated exponential lifetime distributions. *Reliability Engineering and System Safety* 1994, 44:119-24.

Hokstad P, Froving AT. The modeling of degraded and critical failures for components with dormant failures. *Reliability Engineering and System Safety* 1996, 51(2):189-99.

Hsieh Y-C. A linear approximation for redundant reliability problems with multiple component choices. *Computers & Industrial Engineering* 2002, 44:91-103.

Hu R, Xie J. Optimal Maintenance Policies for a Cold Standby Redundant System with Two Units. *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (IEEE/SOLI)* 2008, 2:1774-8.

Jia J, Wu S. Optimizing replacement policy for a cold-standby system with waiting repair times. *Applied Mathematics and Computation* 2009, 214:133–141.

Kancev D, Cepin M. Evaluation of risk and cost using an age-dependent unavailability modelling of test and maintenance for standby components. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 2011, 24:146-155.

Kapur PK, Kapoor KR. Effect of Standby Redundancy on System Reliability. *IEEE Transaction on Reliability* 1976, R-25(2): 120-1.

Koutras VP, Platis AN. Semi-Markov Availability Modeling of a Redundant System with Partial and Full Rejuvenation Actions. *Third International Conference on Dependability of Computer Systems DepCoS-RELCOMEX*, 2008.

Kumar A. Steady-State Profit in a 2-unit Standby System. *IEEE Transactions on Reliability* 1976, R-25(2):105-8.

Lapa CMF, Pereira CMNA, Barros MP. A model for preventive maintenance planning by genetic algorithms based in cost and reliability. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 233-40.

Lu L, Jiang J. Analysis of on-line maintenance strategies for k-out-of-n standby safety systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2007, 92:144-155.

Marseguerra M, Zio E, Podofillini, L, Coit, W. Optimal Design of Reliable Network Systems in Presence of Uncertainty. *IEEE Transactions on Reliability* 2005, 54:243-253.

Moghaddass R, Zuo MJ, Pandey, M. Optimal design and maintenance of a repairable multi-state system with standby components. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2012, 142:2409–2420.

Montoro-Cazorla D, Pérez-Ocón R. A deteriorating two-system with two repair modes and sojourn times phase-type distributed. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 1–9.

Mori BD, Castro HF, Cavalca, KL. Development of hybrid algorithm based on simulated annealing and genetic algorithm to reliability redundancy optimization. *Journal of Quality & Reliability Management* 2007, 24:972-987.

Myers A, Rauzy A. Efficient Reliability Assessment of Redundant Systems Subject to Imperfect Fault Coverage using Binary Decision Diagrams. *IEEE Transactions on Reliability* 2008, 57:336-348.

Nakagawa T, Yasui K. Note on optimal redundant policies for reliability models. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 2005, 11:82-86.

Okasha NM, Frangopol DM. Redundancy of structural systems with and without maintenance: an approach based on life time functions. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:520-533.

- Osaki S. Reliability Analysis of a Two-Unit Standby-Redundant System with Preventive Maintenance. *IEEE Transaction on Reliability* 1972, R-21(1): 24-9.
- Ruiz-Castro J, Li Q. Algorithm for a general discrete k-out-of-n: G system subject to several types of failure with an indefinite number of repair persons. *European Journal of Operational Research* 2011, 211:97–111.
- Sim SH. Reliability of Standby Equipment with Periodic Testing. *IEEE Transactions on Reliability* 1987, R-36:117-123.
- Smidt-Destombes K, Heijden M, Harten A. Joint optimization of spare part inventory, maintenance frequency and repair capacity for k-out-of-N systems. *International Journal of Production Economics* 2009, 118:260–268.
- Subramanian R, Anantharaman V. Reliability analysis of a complex standby redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 48:57-70.
- Taghipour S, Banjevic D, Jardine AKS. Periodic inspection optimization model for a complex repairable system. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:944–52.
- Yun WY, Cha JH. Optimal design of a general warm standby system. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95:880-886.
- Zequeira RI, Bérenguer C. Periodic imperfect preventive maintenance with two categories of competing failure modes. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91(4): 460-8.
- Zhang YL, Wang GJ. An optimal repair–replacement policy for a cold standby system with use priority. *Applied Mathematical Modelling* 2011, 35:1222-1230.
- Zhong C, Jin H. A novel optimal preventive maintenance policy for a cold standby system based on semi-Markov theory. *European Journal of Operational Research* 2014, 232:405-411.

4 ARTIGO 3:

OTIMIZAÇÃO DO INTERVALO ENTRE INSPEÇÕES PERIÓDICAS PARA SISTEMAS REDUNDANTES

Angélica Alebrant Mendes

David W. Coit

José Luis Duarte Ribeiro

Resumo

Para sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas, o estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções que maximiza a disponibilidade e minimiza os custos é um problema desafiador. Este artigo desenvolve um modelo para analisar a confiabilidade e determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas. O método de Cadeias de Markov com tempo discreto é utilizado para definir as probabilidades de transições entre estados do sistema e os custos relacionados a cada estado. Para otimizar o intervalo entre inspeções, o custo total por ciclo é minimizado utilizando-se as propriedades das Cadeias de Markov seguido da técnica de pesquisa numérica. Quatro modelos de sistemas são analisados e exemplos numéricos para sistemas compostos por dois e três componentes são apresentados: Modelo I – Redundância ativa sem reparo de componente; Modelo II – Redundância ativa com reparo de componente; Modelo III – Redundância em *cold standby* sem reparo de componente e Modelo IV – Redundância em *cold standby* com reparo de componente. A principal contribuição do método utilizado nesse artigo é a inclusão dos custos de indisponibilidade e perdas de produção, através da definição dos custos de *downtime* que penaliza o modelo quando o sistema falha. Este modelo pode ser estendido e generalizado para determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas com redundâncias ativas e inativas e com n componentes.

Palavras-chave: sistemas redundantes, inspeções periódicas, Cadeias de Markov, custo de manutenção, intervalo entre inspeções.

4.1 INTRODUÇÃO

Há uma crescente ênfase e expectativa para que companhias operem com altos padrões de responsabilidade social corporativa, protegendo não somente o meio ambiente, mas também a

saúde e segurança das pessoas como um todo. Tendências emergentes, como a difusão do uso da produção enxuta e *six-sigma*, têm forçado as indústrias a operar de uma forma mais eficiente. A combinação ótima entre a aplicação de redundâncias e esforços de manutenção torna-se essencial para assegurar segurança, ao mesmo tempo em que reduz custos operacionais através da eliminação de atividades desnecessárias, contribuindo para a estabilidade do processo.

Sistemas redundantes são amplamente utilizados em indústrias onde processos de risco necessitam altos níveis de confiabilidade. Por exemplo, sistemas de bombas em refinarias de petróleo, sistemas de resfriamento em companhias siderúrgicas, turbinas em aviões e reatores em plantas nucleares. Existem basicamente dois tipos de redundâncias: ativa ou *hot* redundância e inativa ou *cold standby*. O uso de redundâncias ativas ou em *cold standby* depende dos componentes utilizados e das características requeridas pelo sistema.

Nestes sistemas, se o monitoramento contínuo não é possível, inspeções periódicas são necessárias para assegurar que o sistema esteja operando e que a redundância, quando requerida, esteja funcionando adequadamente. Durante as inspeções periódicas, falhas escondidas de componentes são detectadas e reparadas em intervalos de tempo pré-determinados. O intervalo entre inspeções deve ser otimizado buscando maximizar disponibilidade e segurança e minimizar custos (MUNFORD; SHANANI, 1973). Inspeções frequentes aumentam a disponibilidade do sistema, mas envolvem altos custos de manutenção preventiva. Por outro lado, períodos longos entre inspeções reduzem os custos totais de inspeção, mas podem elevar os custos de manutenção corretiva (reparo do sistema, acidentes de segurança) e *downtime*, uma vez que há períodos longos onde o sistema pode estar indisponível (KAIO; OSAKI, 1984a e KAIO; OSAKI, 1984b). O estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções é importante para assegurar que o sistema apresente uma disponibilidade satisfatória, juntamente com o menor custo possível.

A análise de sistemas redundantes tem sido estudada durante muitos anos com diferentes abordagens e métodos. Os métodos mais utilizados são modelos de Markov e semi-Markov associados com Transformadas de Laplace e soluções numéricas. Estes métodos foram utilizados por Laprie *et al.* (1981) para estudar um sistema onde a taxa de falha da unidade em operação aumenta quando o outro componente está em reparo. Csenki (1995) também utilizou estes métodos para analisar um sistema com manutenção preventiva sequencial. Os tempos de desapontamento e interferência foram modelados por Kapur e Kapoor (1976). Estudando um

sistema sujeito a manutenções preventivas e corretivas, Osaki (1972) apresentou um algoritmo para calcular o tempo até a primeira falha do sistema. Arora (1977) usou processos de Markov para analisar um sistema com prioridades de operação e reparo, enquanto um sistema com uma unidade que muda de *cold standby* para *warm standby* foi modelado em Subramanian e Anantharaman (1995).

Através da combinação entre processos de Markov e semi-Markov e algoritmos genéticos, Levitin e Lisnianski (1999) e Levitin e Lisnianski (2000) otimizaram a manutenção de sistemas multiestado. Lapa *et al.* (2006) analisaram um sistema com intervalos entre intervenções de manutenção flexíveis e Castro e Cavalca (2006) otimizaram a disponibilidade de um sistema de manufatura. Nourelfath *et al.* (2012) combinaram processos de Markov, algoritmos genéticos e função de geração do momento universal para estudar sistemas multiestado com degradação, enquanto que Hu e Xie (2008) utilizaram programação não linear no lugar de função de geração do momento universal para otimizar uma política de substituição. Finalmente, Flammini *et al.* (2009) analisaram manutenções imperfeitas utilizando processos de Markov e Redes Bayesianas.

A grande maioria dos artigos que aplicam processos de Markov não analisam os custos relacionados com a operação e manutenção de sistemas redundantes. O principal objetivo destes artigos é a definição da confiabilidade e disponibilidade dos sistemas. Alguns artigos analisam os custos envolvidos na manutenção, porém estes artigos não incluem os custos de indisponibilidade e acidentes de segurança (*downtime*), como pode ser observado em Nourelfath *et al.* (2012), que somente consideraram os custos de aquisição e manutenções preventivas e corretivas, e em Hu e Xie (2008), que somente consideraram os custos de colocação do pedido e compra dos componentes.

Uma vez que o problema de sistemas redundantes com inspeções periódicas foi apenas parcialmente solucionado, este artigo busca desenvolver um modelo para analisar a confiabilidade e determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas, utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto.

O processo de manutenção de um sistema redundante é um processo estocástico, uma vez que tem n componentes e que cada componente pode estar em funcionamento ou falha em qualquer momento do tempo. Cada combinação de estados de componentes representa um estado no espaço do processo de Cadeias de Markov. Quando inspeções periódicas são executadas, o estado

do sistema (operando ou em falha) é observado em pontos discretos no tempo (somente durante as inspeções). Este cenário justifica a aplicação de Cadeia de Markov com tempo discreto.

A principal vantagem do modelo proposto neste artigo é a inclusão dos custos de indisponibilidade e acidentes de segurança através da definição de custos de *downtime* que penaliza o modelo de custos quando o sistema falha, aumentando os custos totais proporcionalmente ao período em que o sistema não está operando. Além disso, este modelo pode ser generalizado e utilizado para determinar o intervalo ótimo entre inspeções em sistemas com redundâncias ativas e inativas e com n componentes. Modelos para dois e três componentes são apresentados neste artigo.

Este artigo é organizado como segue. A Seção 4.2 descreve a abordagem de pesquisa, apresentando uma breve revisão dos principais estudos relacionados com manutenção preventiva de sistemas redundantes. A Seção 4.3 lista as suposições e notações utilizadas e explica a metodologia aplicada para modelar o problema. Na Seção 4.4, exemplos numéricos são apresentados e analisados. A Seção 4.5 sumariza o artigo e inclui as observações finais.

4.2 REVISÃO DE LITERATURA

Durante os últimos 60 anos, muitos artigos sobre manutenção preventiva aplicada em sistemas redundantes foram publicados. Os primeiros estudos preocuparam-se em determinar a confiabilidade do sistema e definir o melhor tempo entre inspeções considerando a maximização da disponibilidade. Uma vez que a primeira parte do problema foi bem explorada e devido ao aumento da importância dos custos incorridos para as organizações, artigos recentes buscam determinar o tempo ótimo entre inspeções considerando não somente a disponibilidade, mas também a minimização dos custos decorridos das atividades de manutenção. Os artigos mais importantes relacionados com este estudo são referenciados na sequência.

Osaki (1972) propôs um modelo para determinar o tempo da primeira falha de um sistema composto por duas unidades similares em *cold standby* utilizando processos de renovação de Markov juntamente com Transformadas de Laplace-Stieltjes. Usando uma abordagem semelhante, Kapur e Kapoor (1976) incluíram em seu estudo o conceito de tempo de desapontamento e interferência. Arora (1977), trabalhando com unidades diferentes, adicionou em seu modelo o tempo de reparo e prioridades de funcionamento e reparo de componentes.

Um modelo para determinar a confiabilidade de um sistema com dois componentes similares em redundância ativa foi apresentado em Laprie *et al.* (1981). Os autores usaram modelos de Markov e Transformadas de Laplace para aproximar expressões para a confiabilidade do sistema e tempo médio até a falha, em um modelo com taxa de falha crescente quando um componente está em reparo ou inspeção. Da mesma forma, trabalhando com duas unidades em redundância ativa e usando os mesmos métodos, Csenki (1995) apresentou um modelo para analisar a confiabilidade de um sistema em que o estado do componente alterna entre em funcionamento e em reparo.

Aplicando Redes Bayesianas para formular um modelo de falha e Cadeias de Markov com tempo contínuo para modelar a manutenção, Flammini *et al.* (2009) propuseram uma combinação desses modelos para analisar o impacto de manutenções imperfeitas sobre a segurança do sistema.

Hu e Xie (2008) apresentaram um modelo para sistemas redundantes em *cold standby* com substituições preventivas baseadas no tempo. Utilizando processos de renovação de Markov, a disponibilidade do sistema foi derivada e os custos de colocação de pedido e compra foram determinados. Usando um modelo de programação não linear para minimizar os custos sujeitos a restrições de disponibilidade, foram propostos algoritmos genéticos para pesquisar alternativas ótimas.

Taghipour *et al.* (2010) propuseram um modelo para determinar o intervalo ótimo entre inspeções para um complexo sistema reparável sujeito a falhas *soft* ou *hard* e com mínimo reparo. Vaurio (1997) desenvolveu funções de custo para testes periódicos e manutenções planejadas e otimizou estas funções com base no custo médio. Billinton e Pan (1998) apresentaram uma equação para avaliar a frequência e a taxa de falha de sistemas redundantes com dois componentes idênticos com base na minimização da frequência total de falha do sistema. Estas equações fornecem métodos para determinar o intervalo ótimo entre manutenções do sistema.

Em um estudo recente, Nourelfath *et al.* (2012) aplicaram processos de Markov e função de geração do momento universal para avaliar a disponibilidade e estabelecer a função de custo de um sistema série-paralelo sujeito a manutenções preventivas imperfeitas. Depois de dividir o espaço em um conjunto de subconjuntos utilizando o particionamento do espaço, esta abordagem aplicou algoritmos genéticos e *tabu search* para selecionar subespaços e encontrar as melhores soluções.

A fim de facilitar o modelamento, Hokstad e Frovig (1996) e Nourelfath *et al.* (2012) ignoraram o tempo de reparo dos componentes, assumindo reparo instantâneo, e analisaram disponibilidade e custos de sistemas através de processos de Markov. A solução para este tipo de sistema também pode ser obtida através de Redes de Petri e inspeções baseadas em Quantis, como mostrado em Ereau *et al.* (1997) e Zequeira e Bérenguer (2006), respectivamente.

O problema de redundâncias se torna complexo quando o tempo de reparo é considerado como uma variável e deve se ajustar a um modelo de distribuição de probabilidade. Usualmente, os autores estabelecem que tempos de reparo se ajustam a uma distribuição exponencial ou *phase-type*, o que permite a solução do problema através da utilização de processos de Markov, como visto em Kumar (1976), Gray (1985), Gupta *et al.* (1994) e Montoro-Cazorla e Pérez-Ocón (2006). Bloch-Mercier (2001) utilizou uma distribuição genérica para explicar o comportamento do tempo de reparo e analisar a confiabilidade do sistema através de processo de Markov e Teoria de Renovação. Shing (1980) aplicou a mesma distribuição genérica para analisar o efeito de *switches* perfeitos e imperfeitos na confiabilidade do sistema utilizando equações diferenciais e probabilidade.

4.3 METODOLOGIA

4.3.1 Descrição do Sistema

Neste artigo, quatro tipos de sistemas redundantes são analisados. Modelos para sistemas redundantes com dois e três componentes são apresentados, mas a metodologia pode ser estendida para sistemas redundantes compostos por mais de três componentes. Os quatro sistemas são descritos na sequência.

Sistema I – Sistema com redundância ativa e sem reparo de componente: todos os componentes redundantes entram em operação ao mesmo tempo no início da operação do sistema. Uma vez que um componente tenha falhado, o reparo não é possível e a substituição somente ocorrerá após a falha do sistema. Neste sistema, é necessário que somente um componente esteja funcionando para que o sistema se mantenha em operação. O estado do sistema (em funcionamento ou falha) é verificado durante inspeções periódicas. Para este e os outros três sistemas, o tempo entre a falha do sistema e a próxima inspeção é chamado *downtime*.

Sistema II – Sistema com redundância ativa e com reparo de componente: todos os componentes redundantes entram em operação ao mesmo tempo no início da operação do sistema. Durante as inspeções periódicas, o estado de cada componente é verificado e componentes são reparados mesmo que o sistema ainda esteja em operação. É necessário somente um componente em funcionamento para que o sistema se mantenha operacional. O sistema irá falhar somente se todos os componentes falharem entre duas inspeções periódicas.

Sistema III – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e sem reparo de componente: um componente está ativo e os demais estão em *cold standby*. Quando o componente ativo falha, o primeiro componente em *standby* na sequência é ativado instantaneamente. Uma vez que um componente tenha falhado, o reparo não é possível e a substituição somente ocorrerá após a falha do sistema. O estado do sistema (em funcionamento ou falha) é verificado somente durante inspeções periódicas. O sistema irá falhar quando todos os componentes falharem.

Sistema IV – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes: um componente está ativo e os demais estão em *cold standby*. Quando o componente ativo falha, o primeiro componente em *standby* na sequência é ativado instantaneamente. Durante as inspeções periódicas, o estado de cada componente é verificado e reparos de componentes são realizados. Os componentes reparados voltam para o sistema na condição de *cold standby*. O sistema irá falhar somente se todos os componentes falharem entre duas inspeções periódicas.

4.3.2 Notações

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Parâmetros para a distribuição exponencial dos componentes 1, 2 e 3
τ	Intervalo entre inspeções
C_i	Custo por inspeção
C_s	Custo do reparo do sistema
C_p	Custo de <i>downtime</i> por tempo
C_r	Custo de reparo de componente por unidade
ρ	<i>Downtime</i>
$CT(\tau)$	Custo total como uma função de τ
P_n	Matriz de probabilidades de transição entre estados para o Modelo n
p_{ij}	ij -entrada da matriz P

C_n	Matriz de custos de transição entre estados para o Modelo n
c_{ij}	ij -entrada da matriz C_n
N	Matriz do número esperado de vezes que o processo passa pelo estado transiente p_j , dado que ele iniciou no estado transiente p_i
n_{ij}	ij -entrada da matriz N
Q	Parte transiente da matriz P_n
I	Matriz identidade
T_1, T_2, T_3	Tempo até a falha dos componentes 1, 2 e 3, respectivamente. $T_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $T_2 \sim \exp(\lambda_2)$, $T_3 \sim \exp(\lambda_3)$,
$MTTF$	Tempo médio até a falha
TTF	Tempo até a falha

4.3.3 Suposições

Este estudo possui as seguintes suposições: *i*) reparo perfeito e instantâneo – o tempo de reparo é considerado negligenciável comparado com o tempo de operação; *ii*) perfeito e instantâneo *switching*; *iii*) tempos até a falha seguem uma distribuição de probabilidade exponencial; *iv*) componentes possuem diferentes parâmetros de distribuição; *v*) cada inspeção é executada perfeitamente e instantaneamente.

Este estudo analisa sistemas onde as falhas não são nem detectadas, nem reparadas até que uma inspeção seja executada. Se a falha do sistema ocorrer antes da inspeção, o *downtime* resultará em aumento dos custos, sendo que estes custos aumentarão até a próxima inspeção. Para os Modelos II e IV, a inspeção também pode revelar falhas de componentes que não tenham causado falha do sistema, mas que devem ser reparados (com um custo associado) para manter o alto nível de confiabilidade.

Foram consideradas distribuições exponenciais para que o método de Cadeias de Markov pudesse ser utilizado. É sabido que a distribuição exponencial é apropriada para modelar tempos até a falha de muitos componentes, contudo, se este não for o caso, outra abordagem como simulação deve ser utilizada.

4.3.4 Análise de confiabilidade e custos de sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas

Nesta seção, as probabilidades de transição para os quatro modelos apresentados acima são desenvolvidas utilizando-se Cadeias de Markov. Os custos relacionados com a manutenção dos

sistemas são estabelecidos e uma função de custo é determinada e minimizada a fim de encontrar o intervalo ótimo entre inspeções.

4.3.4.1 Definição das probabilidades de transição utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto

Cadeias de Markov é um processo que consiste em um número finito de estados e probabilidades conhecidas p_{ij} , onde p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j . As probabilidades p_{ij} dependem somente dos estados i e j , não dependendo do tempo n ou dos estados visitados previamente. O conjunto de estados em um processo de Cadeias de Markov é chamado de espaço de estados. Os números p_{ij} são as probabilidades de transição da cadeia (ROSS, 2003).

Considerando que cada possível configuração diferente do sistema redundante é um estado (exemplos de estados poderiam ser: um componente funcionando e outro em *standby*, ambos componentes funcionando ou um componente funcionando e um em falha) e que os tempos de transição de um estado para outro são variáveis aleatórias, é possível definir um diagrama de espaço de estados para os quatro modelos em estudo, como é apresentado na sequência deste artigo.

Toda vez que uma inspeção periódica é realizada, o estado do sistema é verificado. O estado do sistema pode mudar ou o sistema pode permanecer no último estado inspecionado. O sistema falha quando atinge o estado de falha do sistema e quando um ciclo é completado. Uma vez no estado de falha, o sistema não muda de estado. O estado de falha do sistema é chamado de estado de absorção da Cadeia de Markov.

Cada transição tem uma probabilidade e esta probabilidade não depende do estado anterior do sistema. As probabilidades de transição são representadas em uma matriz chamada matriz de transição. Em uma matriz de transição P_n , p_{ij} é a probabilidade de estar no estado S_j no passo $n + 1$, dado que o processo estava no estado S_i no passo n . Os diagramas de espaço de estados e as matrizes de transição de cada modelo são apresentados a seguir.

A) Sistema I – Sistema com redundância ativa e sem reparo de componente

No Sistema I, todos os componentes começam a operar ao mesmo tempo e quando um componente falha, não há reparo de componente. Os diagramas de espaço de estados para

sistemas com dois e três componentes são apresentados nas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente. Os círculos representam os estados de cada espaço de estados e os números dentro de cada círculo representam os componentes (1, 2 e 3) em funcionamento naquele estado de inspeção periódica.

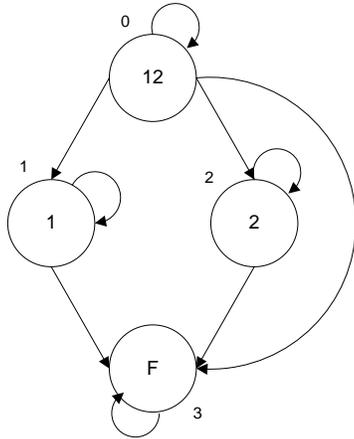


Figura 4.1– Diagrama de espaço de estados para 2 componentes

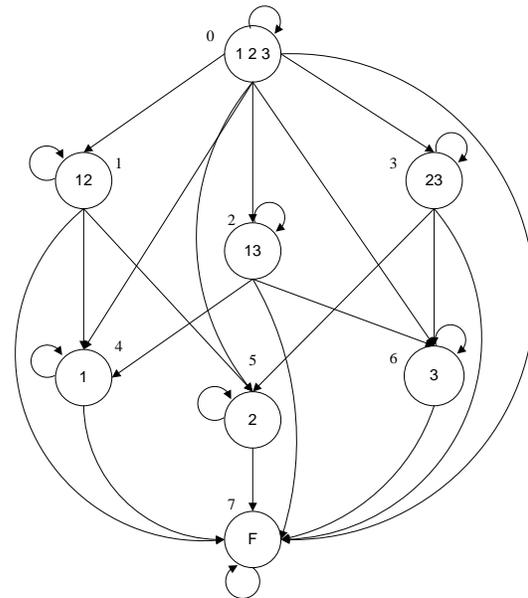


Figura 4.2 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes

Como pode ser visto na Figura 4.1, há quatro possíveis estados no espaço de estados do Sistema I com dois componentes. Os estados são: 0 – componentes 1 e 2 em funcionamento; 1 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em falha; 2 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em falha e 3 – componentes 1 e 2 em falha (falha do sistema). O sistema inicia com ambos os componentes em funcionamento e com ambos os componentes sujeitos a potencial falha. Uma vez que um componente tenha falhado, o próximo estado ocorre quando o outro componente também falhar, resultando na falha do sistema. O estado de falha do sistema é um estado de absorção. A mesma lógica é aplicada para os sistemas com três componentes.

A matriz P_1 apresenta as probabilidades de transição para os sistemas com dois componentes. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{01} de ir do estado 0 para o estado 1 é a probabilidade do componente 2 falhar enquanto que o componente 1 ainda está em funcionamento. Visto que a redundância é ativa

neste sistema, pode-se calcular esta probabilidade como $(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) e^{-\lambda_1 \tau}$. A mesma lógica é aplicada para os sistemas com três componentes, como mostrado na matriz P_2 .

$$P_1 = \begin{bmatrix} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau})e^{-\lambda_1 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau})(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \\ 0 & e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\tau} & (1 - e^{-\lambda_3 \tau})e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau})e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)\tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau} \\ 0 & e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 - e^{-\lambda_2 \tau})(1 - e^{-\lambda_3 \tau})e^{-\lambda_1 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})(1 - e^{-\lambda_3 \tau})e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})(1 - e^{-\lambda_2 \tau})e^{-\lambda_3 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})(1 - e^{-\lambda_2 \tau})(1 - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ (1 - e^{-\lambda_2 \tau})e^{-\lambda_1 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})e^{-\lambda_2 \tau} & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ (1 - e^{-\lambda_3 \tau})e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})e^{-\lambda_3 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau})(1 - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ 0 & (1 - e^{-\lambda_3 \tau})e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau})e^{-\lambda_3 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau})(1 - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & 0 & (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3 \tau} & (1 - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B) Sistema II – Sistema com redundância ativa e com reparo de componente

No Sistema II, todos os componentes começam a operar ao mesmo tempo e quando um componente falha, ele poderá ser reparado no próximo período de inspeção. Os diagramas de espaço de estados para sistemas com dois e três componentes são apresentados nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente. Os círculos representam os estados de cada espaço de estados e os números dentro dos círculos representam os componentes (1, 2 e 3) em funcionamento naquele estado de inspeção periódica.

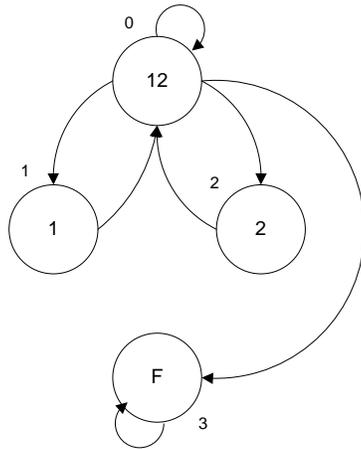


Figura 4.3 – Diagrama de espaço de estados para 2 componentes.

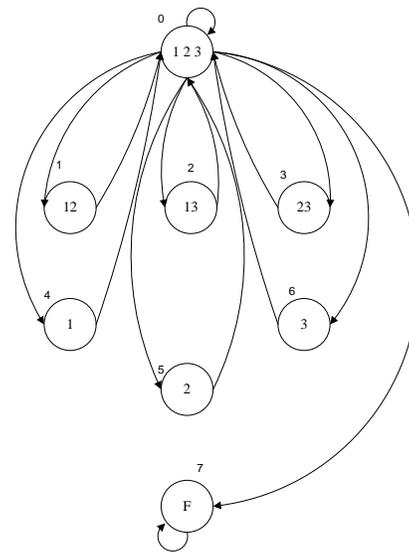


Figura 4.4 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes.

Como pode ser visto na Figura 4.3, existem quatro possíveis estados no espaço de estados do Sistema II com dois componentes. Estes estados são: 0 – componentes 1 e 2 em funcionamento; 1 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em estado de falha; 2 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em estado de falha; 3 – componentes 1 e 2 em estado de falha (falha do sistema). O sistema começa a operar com ambos os componentes em funcionamento e pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado (componente 1, 2 ou ambos em falha). Durante o tempo de inspeção, o componente em falha é reparado e, antes do início da próxima transição, ambos os componentes já estão em funcionamento. Na próxima inspeção, estes componentes podem ainda estar em funcionamento, um pode ter falhado ou ambos podem ter falhado. O estado de falha do sistema será atingido quando ambos os componentes falharem durante o intervalo entre inspeções. Uma vez que o sistema falhou, ele não é reparado, pois o estado de falha do sistema é um estado de absorção. A mesma lógica é aplicada para sistemas com três componentes.

A matriz P_3 apresenta as probabilidades de transição para sistemas com dois componentes. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{01} de ir do estado 0 para o estado 1 é a probabilidade do componente 1 permanecer em funcionamento e o componente 2 falhar. Visto que a redundância neste sistema é ativa, é possível calcular esta probabilidade como $(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) e^{-\lambda_1 \tau}$. Toda a vez que um

componente falhar, o mesmo será reparado na próxima inspeção. Desta forma, a probabilidade de ser reparado é igual a 1. A mesma lógica é aplicada para sistemas com três componentes, como pode ser observado na matriz P_4 .

$$P_3 = \begin{bmatrix} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} & (1 - e^{-\lambda_2\tau}) e^{-\lambda_1\tau} & (1 - e^{-\lambda_1\tau})e^{-\lambda_2\tau} & (1 - e^{-\lambda_1\tau})(1 - e^{-\lambda_2\tau}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\tau} & (1 - e^{-\lambda_3\tau}) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau} & (1 - e^{-\lambda_2\tau})e^{-(\lambda_1+\lambda_3)\tau} & (1 - e^{-\lambda_1\tau})e^{-(\lambda_2+\lambda_3)\tau} & (1 - e^{-\lambda_2\tau})(1 - e^{-\lambda_3\tau})e^{-\lambda_1\tau} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - e^{-\lambda_1\tau})(1 - e^{-\lambda_3\tau})e^{-\lambda_2\tau} & (1 - e^{-\lambda_1\tau})(1 - e^{-\lambda_2\tau})e^{-\lambda_3\tau} & (1 - e^{-\lambda_1\tau})(1 - e^{-\lambda_2\tau})(1 - e^{-\lambda_3\tau}) \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C) Sistema III – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e sem reparo de componente

No Sistema III, um componente está em operação e os demais estão em *cold standby*. Quando o componente ativo falha, o primeiro componente em *standby* entra em funcionamento. O componente em falha não pode ser reparado e o sistema falha quando todos os componentes falham. O diagrama de espaço de estados para sistemas com dois componentes é apresentado na Figura 4.5. Os círculos representam cada estado do espaço de estados e os números no interior dos círculos representam os componentes (1 e 2) em funcionamento e em *cold standby* naquele estado de inspeção periódica.

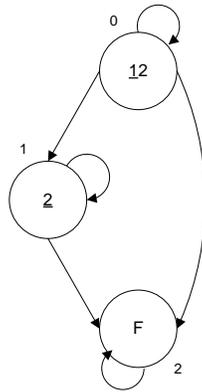


Figura 4.5 – Diagrama de espaço de estados para dois componentes (o componente sublinhado representa o componente ativo)

Como pode ser observado na Figura 4.5, existem três possíveis estados no espaço de estados do Sistema III quando este tem dois componentes. Os estados são: 0 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em *standby*; 1 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em estado de falha; 2 – componentes 1 e 2 em estado de falha, o que resulta na falha do sistema. O sistema começa a operar com o componente 1 em funcionamento e o componente 2 em *cold standby* e pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado (componente 2 em funcionamento e componente 1 em falha ou ambos os componentes em falha). Uma vez que o sistema tenha falhado, não há reparo e este é o estado de absorção.

A matriz P_5 apresenta as probabilidades de transição para sistemas com dois componentes. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de transição do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{12} é a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 2. Esta probabilidade pode ser representada pela probabilidade do componente 2 falhar: $(1 - e^{-\lambda_2 \tau})$.

$$P_5 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & P\{T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} & P\{T_1 + T_2 < \tau\} \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As probabilidades de transição para sistemas com componentes em *cold standby* não podem ser determinadas da mesma forma que as probabilidades de sistemas com redundâncias ativas, pois o tempo até a falha do componente ativo e o tempo em que o *cold standby* irá entrar em operação são desconhecidos. A Teoria da Probabilidade foi utilizada para determinar estas probabilidades. Por exemplo, a probabilidade p_{01} de ir do estado 0 para o estado 1 é a probabilidade de que o componente 1 falhe e o componente 2, que estava em *cold standby*, entre em operação e esteja

operando no estado 1. Pode-se calcular esta probabilidade como a probabilidade do tempo até a falha do componente 1 ser menor que o intervalo entre inspeções, combinada com a probabilidade da soma dos tempos até a falha dos componentes 1 e 2 ser maior que o intervalo entre inspeção: $P\{T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\}$. Estas probabilidades são calculadas nas Equações 1 e 2.

- a) Probabilidade do componente 1 ter falhado e o componente 2 estar em funcionamento no intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
 & P\{T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} \\
 &= \int_0^\tau (1 - P\{T_2 < \tau - T_1\})P\{T_1 < \tau\} \\
 &= \int_0^\tau 1 - P\{T_2 < \tau - T_1 | T_1 = u\}f_{T_1}(u)du \\
 &= \int_0^\tau (1 - F_{T_2}(\tau - u))f_{T_1}(u)du \\
 &= \int_0^\tau (e^{-\lambda_2(\tau-u)})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \tag{eq. 1}
 \end{aligned}$$

- b) Probabilidade dos componentes 1 e 2 falharem durante o intervalo entre inspeções, dado que o componente 1 está em funcionamento e o componente 2 está em *cold standby*:

$$\begin{aligned}
 & P\{T_1 + T_2 < \tau\} = P\{T_2 < \tau - T_1\} \\
 &= \int_0^\tau P\{T_2 < \tau - T_1 | T_1 = u\}f_{T_1}(u)du \\
 &= \int_0^\tau P\{T_2 < \tau - T_1\}f_{T_1}(u)du \\
 &= \int_0^\tau F_{T_2}(\tau - u)f_{T_1}(u)du \\
 &= \int_0^\tau (1 - e^{-\lambda_2(\tau-u)})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
 &= (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \tag{eq. 2}
 \end{aligned}$$

Considerando as Equações 1 e 2, P_5 pode ser reescrita como:

$$P_5 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O diagrama de espaço de estados para sistemas com três componentes é apresentado na Figura 4.6. Os círculos representam cada estado do espaço de estados e os números dentro dos círculos representam os componentes (1, 2 e 3) em funcionamento ou em *cold standby* naquele estado de inspeção periódica.

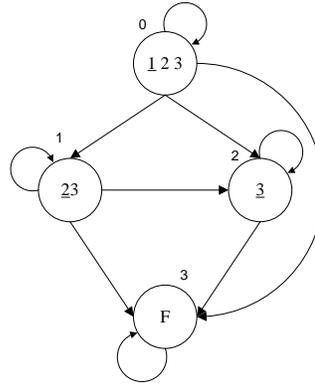


Figura 4.6 – Diagrama de espaço de estados para 3 componentes (os componentes sublinhados representam os componentes ativos)

Como observado na Figura 4.6, existem quatro possíveis estados no espaço de estados do Sistema III quando este possui três componentes. Estes estados são: 0 – componente 1 em funcionamento e componentes 2 e 3 em *cold standby*; 1 – componente 2 em funcionamento, componente 1 em falha e componente 3 em *cold standby*; 2 – componente 3 em funcionamento e componentes 1 e 2 em estado de falha; 3 – todos os componentes em falha (falha do sistema). O sistema inicia a operação com o componente 1 em funcionamento e os componentes 2 e 3 em *cold standby*. O sistema pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado (estados 1, 2 ou 3). Uma vez atingido o estado de falha do sistema, o sistema não é reparado, resultando em um estado de absorção.

A matriz P_6 apresenta as probabilidades de transição para sistemas com três componentes. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{02} representa a probabilidade de ir do estado 0 para o estado 2. Esta probabilidade é a probabilidade de que os componentes 1 e 2 tenham falhado e o componente 3 esteja em funcionamento no intervalo entre inspeções. Usando-se a Teoria da Probabilidade, é possível calcular esta probabilidade como a probabilidade da soma dos tempos até a falha dos componentes 1 e 2 ser menor que o intervalo entre inspeções, combinada com a probabilidade da

soma dos tempos até a falha dos componentes 1, 2 e 3 ser maior que o intervalo entre inspeções:

$$P\{T_1 + T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 + T_3 > \tau\}.$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & P\{T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} & P\{T_1 + T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 + T_3 > \tau\} & P\{T_1 + T_2 + T_3 < \tau\} \\ 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & P\{T_2 < \tau \cap T_2 + T_3 > \tau\} & P\{T_2 + T_3 < \tau\} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3 \tau} & (1 - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os cálculos destas probabilidades são apresentados na sequência.

- a) Probabilidade dos componentes 1 e 2 terem falhado e do componente 3 estar em operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} & P\{T_1 + T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 + T_3 > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_2 < \tau - T_1 \cap T_2 + T_3 > \tau - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau P\{T_2 < \tau - u \cap T_2 + T_3 > \tau - u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_3 > \tau - u - T_2 | T_2 = v\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_3 > \tau - u - v\} f_{T_2}(v) dv f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_3}(\tau - u - v)) f_{T_2}(v) f_{T_1}(u) dv du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_3(\tau-u-v)}) (\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}) (\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}) dv du \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_3 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_3 \tau} (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} \end{aligned} \quad (\text{eq. 3})$$

- b) Probabilidade dos componentes 1, 2 e 3 falharem durante o intervalo entre inspeções, dado que o componente 1 está em funcionamento e os componentes 2 e 3 estão em *cold standby*:

$$\begin{aligned} & P\{T_1 + T_2 + T_3 < \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_1 + T_2 < \tau - T_3 | T_3 = u\} f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau P\{T_1 + T_2 < \tau - u\} f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^\tau P\{T_1 < \tau - u - T_2 | T_2 = v\} f_{T_2}(v) dv f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_1 < \tau - u - v\} f_{T_2}(v) dv f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (F_{T_1}(\tau - u - v)) f_{T_2}(v) f_{T_3}(u) dv du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - e^{-\lambda_1(\tau-u-v)}) (\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}) (\lambda_3 e^{-\lambda_3 u}) dv du \\
&= \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} \quad (\text{eq. 4})
\end{aligned}$$

c) Probabilidade do componente 2 ter falhado e do componente 3 estar em funcionamento durante intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
&P\{T_2 < \tau \cap T_2 + T_3 > \tau\} \\
&= \int_0^\tau (1 - P\{T_3 < \tau - T_2\}) P\{T_2 < \tau\} \\
&= \int_0^\tau (1 - P\{T_3 < \tau - T_2 | T_2 = u\}) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - F_{T_3}(\tau - u)) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau e^{-\lambda_3(\tau-u)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_3 \tau}) \quad (\text{eq. 5})
\end{aligned}$$

d) Probabilidade dos componentes 2 e 3 falharem durante o tempo de inspeção, dado que o componente 2 está em funcionamento e o componente 3 está em *cold standby*:

$$\begin{aligned}
&P\{T_2 + T_3 < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_3 < \tau - T_2 | T_2 = u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau P\{T_3 < \tau - u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau F_{T_3}(\tau - u) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\lambda_3(\tau-u)}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_3 \tau}) - e^{-\lambda_2 \tau} + 1 \quad (\text{eq. 6})
\end{aligned}$$

Usando as Equações 1, 3, 4, 5 e 6, a matriz P_6 pode ser reescrita como:

ou mudar para outro estado. Assume-se que o reparo de componente é instantâneo e realizado no início da inspeção, sendo que o componente reparado retorna ao sistema na posição de *cold standby*. O sistema falha quando todos os componentes falham durante o intervalo entre inspeções. Após falhar, o sistema não é reparado, o que representa um estado de absorção.

A matriz P_7 apresenta as probabilidades de transição para um sistema com dois componentes. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{02} representa a probabilidade de ir do estado 0 para o estado 2, sendo igual à probabilidade dos componentes 1 e 2 falharem durante o intervalo entre inspeções. Usando-se a Teoria da Probabilidade, esta situação corresponde à probabilidade de que a soma dos tempos até a falha dos componentes 1 e 2 seja menor que o intervalo entre inspeções: $\Pr\{T_1 + T_2 < \tau\}$.

$$P_7 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & \Pr\{T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} & \Pr\{T_1 + T_2 < \tau\} \\ \Pr\{T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} & e^{-\lambda_2 \tau} & \Pr\{T_1 + T_2 < \tau\} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os cálculos para estas probabilidades são apresentados a seguir.

a) Probabilidade dos componentes 1 e 2 falharem durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} & \Pr\{T_1 + T_2 < \tau\} \\ &= \int_0^\tau \Pr\{T_2 < \tau - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \Pr\{T_2 < \tau - T_1\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau F_{T_2}(\tau - u) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - e^{-\lambda_2(\tau-u)}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &= (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \end{aligned} \quad (\text{eq. 7})$$

b) Probabilidade do componente 2 ter falhado e do componente 1 estar em funcionamento durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} & \Pr\{T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} \\ &= \int_0^\tau 1 - \Pr\{T_1 < \tau - T_2 | T_2 = u\} f_{T_2}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - F_{T_1}(\tau - u)) f_{T_2}(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau e^{-\lambda_1(\tau-u)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})
\end{aligned} \tag{eq. 8}$$

Usando as Equações 1, 7 e 8, a matriz P_7 pode ser reescrita como:

$$P_7 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}) & e^{-\lambda_2 \tau} & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O diagrama de espaço de estados para o sistema com três componentes é apresentado na Figura 4.8. Os círculos representam cada estado do espaço de estados e os números no interior dos círculos representam os componentes (1, 2 e 3) em funcionamento ou em *cold standby* naquele estado de inspeção periódica.

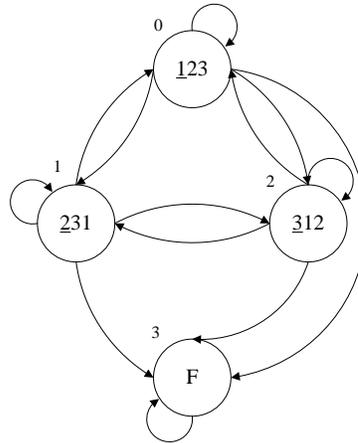


Figura 4.8 – Diagrama de espaço de estados para três componentes (o componente sublinhado representa o componente ativo)

Como pode ser observado na Figura 4.8, existem quatro possíveis estados no espaço de estados do Sistema IV com três componentes. Estes estados são: 0 – componente 1 em funcionamento e componentes 2 e 3 em *cold standby*; 1 – componente 2 em funcionamento e componentes 3 e 1 em *cold standby*; 2 – componente 3 em funcionamento e componentes 1 e 2 em *cold standby*; 3 – todos os componentes em estado de falha (falha do sistema). O sistema inicia a operação com o componente 1 em funcionamento e os componentes 2 e 3 em *cold standby*. O sistema pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado (estados 1, 2 ou 3). Assume-se que o reparo de componentes é instantâneo e executado no início da inspeção periódica, sendo que o

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} \quad (\text{eq. 9})$$

- b) Probabilidade do componente 3 ter falhado e do componente 1 estar em funcionamento durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} & P\{T_3 < \tau \cap T_1 + T_3 > \tau\} \\ &= \int_0^\tau 1 - P\{T_1 < \tau - T_3 | T_3 = u\} f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - F_{T_1}(\tau - u)) f_{T_3}(u) du \\ &= \int_0^\tau e^{-\lambda_1(\tau - u)} \lambda_3 e^{-\lambda_3 u} du \\ &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} (e^{-\lambda_3 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}) \end{aligned} \quad (\text{eq. 10})$$

- c) Probabilidade dos componentes 1 e 3 terem falhado e do componente 2 estar em funcionamento durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} & P\{T_1 + T_3 < \tau \cap T_1 + T_2 + T_3 > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_3 < \tau - T_1 \cap T_2 + T_3 > \tau - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau P\{T_3 < \tau - u \cap T_2 + T_3 > \tau - u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} P\{T_2 > \tau - u - T_3 | T_3 = v\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} P\{T_2 > \tau - u - v\} f_{T_3}(v) dv f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} (1 - F_{T_2}(\tau - u - v)) f_{T_3}(v) f_{T_1}(u) dv du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} (e^{-\lambda_2(\tau - u - v)}) (\lambda_3 e^{-\lambda_3 v}) (\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}) dv du \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_3 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_3 \tau} (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} \end{aligned} \quad (\text{eq. 11})$$

Usando as Equações 1, 3, 4, 5, 9, 10 e 11, a matriz P_8 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P}_8 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \tau} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_3 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_3 \tau} (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} & e^{-\lambda_2 \tau} & - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_3 \tau}) \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} (e^{-\lambda_3 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}) & \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_3 \tau - \lambda_1 \tau} - 1)}{e^{\lambda_3 \tau} (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3)} & e^{-\lambda_3 \tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \dots \\ \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_3 \tau} - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_3 (e^{\lambda_1 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_1 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 (e^{\lambda_2 \tau - \lambda_3 \tau} - 1)}{e^{\lambda_2 \tau} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{1}$$

4.4 MODELOS DE CUSTOS

Quando se trabalha com a otimização de problemas, otimizar a medida de desempenho por unidade de tempo é equivalente a otimizar a medida de desempenho ao longo de um período. Desta forma, neste artigo, os modelos de custos são baseados na determinação do custo total de manutenção por ciclo, onde um ciclo corresponde ao tempo entre o início da operação e a falha do sistema (Equação 12).

$$CT = \frac{E[\text{custo no ciclo}]}{E[\text{duração do ciclo}]} \quad (\text{eq. 12})$$

Para determinar os custos envolvidos em um sistema redundante sujeito a inspeções periódicas, quatro elementos foram considerados: *i*) Custo de uma inspeção periódica (C_i); *ii*) Custo do reparo de um componente (C_r); *iii*) Custo do *downtime* do sistema por tempo (C_p); *iv*) Custo do reparo do sistema após falha do sistema (C_s).

Os custos da inspeção periódica estão relacionados com os custos de mão-de-obra, ferramentas e materiais necessários para a execução da inspeção, ainda que não haja nenhum componente em estado de falha. Os custos de reparo de componente estão associados com a mão-de obra, ferramentas, substituição de partes e materiais utilizados no reparo do componente em falha durante a inspeção periódica. Os custos de reparo do sistema referem-se aos custos incorridos, após uma falha do sistema, para a reativação do sistema a sua condição de completamente operacional. Finalmente, o custo de *downtime* está relacionado à perda de produtividade durante o tempo em que o sistema não está operando. Este custo penaliza o custo total do sistema quando este está indisponível e inclui taxas monetárias como entrega atrasada, ineficiência e perda de oportunidade de vendas.

Os custos de inspeção periódica, reparo de componente e reparo do sistema são considerados constantes que devem ser estabelecidas para cada sistema individualmente. Diferentemente, o custo de *downtime* do sistema é uma função do tempo, visto que as perdas aumentam conforme o sistema se mantém indisponível por mais tempo. Para estabelecer este custo, é necessário determinar o *downtime* esperado.

Para um sistema com dois componentes (i e j) em paralelo, ambos apresentando tempos até a falha que seguem uma distribuição exponencial, o tempo médio até a falha do sistema é calculado como:

$$\text{a) Para redundância ativa - } MTTF_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \quad (\text{eq. 13})$$

$$\text{b) Para redundância em cold standby - } MTTF_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} \quad (\text{eq. 14})$$

O tempo médio até a falha do sistema quando há três componentes operando em paralelo (i, j e k) segue a mesma lógica e as respectivas expressões são apresentadas nas Equações 15 e 16.

$$\text{a) Para redundância ativa - } MTTF_{ijk} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i + \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_j + \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} \quad (\text{eq. 15})$$

$$\text{b) Para redundância em cold standby - } MTTF_{ijk} = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{eq. 16})$$

Dado um sistema composto por um único componente, no qual os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Supondo-se que este componente tenha falhado durante um dado intervalo entre inspeções (τ) e que este intervalo é relativamente pequeno quando comparado com o tempo esperado até a falha, o *downtime* esperado será aproximadamente:

$$E[\rho_{ij}] = \frac{\tau}{2} \quad \text{para } \tau \leq E[TTF] \quad (\text{eq. 17})$$

Dado um sistema composto por dois componentes, nos quais os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Supondo-se que estes componentes tenham falhado durante um dado intervalo entre inspeções (τ) e que este intervalo é relativamente pequeno quando comparado com o tempo esperado até a falha, o *downtime* esperado será aproximadamente:

$$E[\rho_{ij}] = \frac{\tau}{3} \quad \text{para } \tau \leq E[TTF] \quad (\text{eq. 18})$$

Dado um sistema composto por três componentes, nos quais os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Supondo-se que estes componentes tenham falhado durante um dado intervalo entre inspeções (τ) e que este intervalo é relativamente pequeno quando comparado com o tempo esperado até a falha, o *downtime* esperado será aproximadamente:

$$E[\rho_{ij}] = \frac{\tau}{4} \quad \text{para } \tau \leq E[MTTF] \quad (\text{eq. 19})$$

As Equações 17-19 são aproximações que são apropriadas quando o intervalo entre inspeções é menor que o tempo esperado até a falha do sistema. Relações exatas poderiam ser derivadas com base em distribuições condicionais truncadas. Contudo, a aproximação é muito útil, dada a complexidade do modelo de taxas de custo. Uma melhor explicação é apresentada no próximo parágrafo.

As aproximações nas Equações 17-19 são baseadas em três observações: (1) todas as transições que possuem *downtime* estão associadas com uma falha do sistema, sendo que o *downtime* esperado é condicional à ocorrência de uma falha (todos os componentes em operação no início do intervalo falham); (2) a ocorrência de falhas para um sistema em *cold standby* é um processo de Poisson homogêneo com taxa λ_i até a falha final e (3) a probabilidade de se ter mais falhas para um processo de Poisson com taxa λ_i é pequena para um intervalo menor que o tempo esperado até a falha do sistema. Combinando-se a primeira e a terceira observações, é possível aproximar a ocorrência de exatamente n falhas no intervalo, onde n é o número de componentes em funcionamento e em *standby* no início do intervalo entre inspeções. Para um processo de Poisson, um número particular de falhas são distribuídas uniformemente em um intervalo fixo. Assim, para $n = 1$, o tempo esperado até a falha é $\tau/2$ e o tempo remanescente é o *downtime*, para $n = 2$, os tempos esperados até a falha são $\tau/3$ e $2\tau/3$. No entanto, não há falha do sistema até a segunda falha, sendo que o *downtime* esperado é $\tau/3$. Para valores maiores de n , o mesmo padrão é realizado. Quando os intervalos entre inspeções se tornam maiores que o tempo esperado até a falha, esta aproximação não é mais apropriada, pois a terceira observação pode ser difícil de assegurar e as falhas não seriam mais uniformemente distribuídas, por exemplo: elas estariam agrupadas mais nas partes iniciais do intervalo entre inspeções.

Conforme o intervalo entre inspeções aumenta, o *downtime* esperado se torna maior que o *MTTF* do sistema, sendo que as estimativas definidas anteriormente não são mais aplicáveis. Para $\tau >$

$MTTF_{ij}$, o *downtime* esperado pode ser aproximado usando $(\tau - MTTF_{ij})$. Como resultado, o *downtime* esperado para todos os casos pode ser aproximado como:

$$E[\rho_{ij}] = \max\{(\tau - MTTF_{ij}), \tau/(n + 1)\} \quad (\text{eq. 20})$$

Onde n é o número de componentes do sistema que estão em estado operacional no início do intervalo entre inspeções. As matrizes de custos para cada modelo são apresentadas a seguir. Os custos nas matrizes representam os custos incorridos para cada transição entre dois estados no espaço de estados do respectivo sistema. Para todos os modelos, toda vez que uma inspeção é realizada, custos de inspeção são adicionados. Toda vez que o sistema falha, custos de inspeção, reparo do sistema e *downtime* são totalizados. Em sistemas onde o reparo é permitido, em toda inspeção que se repara um componente em falha, custos de reparo são contabilizados.

As matrizes C_1 e C_2 apresentam os custos para o Sistema I com dois e três componentes, respectivamente. Não há custos de reparo enquanto o sistema ainda está operando, uma vez que este sistema não permite reparo de componentes. Custos de reparo do sistema e *downtime* são totalizados toda vez que o sistema falha.

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_i & C_i & C_i & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{03} \\ 0 & C_i & 0 & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{13} \\ 0 & 0 & C_i & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 & C_i + 2C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{07} \\ 0 & C_i & 0 & 0 & C_i & C_i & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{17} \\ 0 & 0 & C_i & 0 & C_i & 0 & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{27} \\ 0 & 0 & 0 & C_i & 0 & C_i & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_i & 0 & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

As matrizes C_3 e C_4 apresentam os custos para o Sistema II com dois e três componentes, respectivamente. Neste sistema, custos de reparo são totalizados quando um ou dois componentes falham e são reparados durante a inspeção periódica. Custos de reparo do sistema e *downtime* são adicionados aos custos de inspeção e reparo de componente toda vez que o sistema falha.

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_i & C_i + C_r & C_i + C_r & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_i + 2C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} C_i & C_i + C_r & C_i + C_r & C_i + C_r & C_i + 2C_r & C_i + 2C_r & C_i + 2C_r & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{07} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

As matrizes C_5 e C_6 apresentam os custos para o Sistema III com dois e três componentes, respectivamente. Não há custos de reparo enquanto o sistema ainda está operando, uma vez que este sistema não permite reparo de componentes. Custos de reparo do sistema e *downtime* são totalizados toda vez que o sistema falha.

$$C_5 = \begin{bmatrix} C_i & C_i & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{02} \\ 0 & C_i & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{12} \\ 0 & 0 & C_i + 2C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} C_i & C_i & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{03} \\ 0 & C_i & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{13} \\ 0 & 0 & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

Finalmente, as matrizes C_7 e C_8 apresentam os custos para o Sistema IV com dois e três componentes, respectivamente. Neste sistema, custos de reparo são totalizados quando um ou dois componentes falham e são reparados durante a inspeção periódica. Custos de reparo do sistema e *downtime* são adicionados aos custos de inspeção e reparo de componente toda vez que o sistema falha.

$$C_7 = \begin{bmatrix} C_i & C_i + C_r & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{02} \\ C_i + C_r & C_i & C_i + 2C_r + C_s + C_p\rho_{12} \\ 0 & 0 & C_i + 2C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} C_i & C_i + C_r & C_i + 2C_r & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{03} \\ C_i + 2C_r & C_i & C_i + C_r & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{13} \\ C_i + C_r & C_i + 2C_r & C_i & C_i + 3C_r + C_s + C_p\rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 & C_i + 3C_r + C_s + C_p\tau \end{bmatrix}$$

Após a determinação dos custos envolvidos em cada sistema redundante sujeito a inspeções periódicas, é necessário combinar estes custos para determinar o custo total no ciclo. Este custo total pode ser calculado utilizando-se as propriedades das Cadeias de Markov com tempo discreto. De acordo com estas propriedades, o número esperado de vezes que o processo passa no estado transiente p_j , dado que ele começou no estado transiente p_i , é representado pela matriz N, onde Q é a parte transiente da matriz P (Equação 21) (ROSS, 2003):

$$N = (I - Q)^{-1} \quad (\text{eq. 21})$$

Visto que a soma de cada linha em N revela o número esperado de passos até a absorção, dado que a cadeia iniciou no estado de não absorção i , e usando as probabilidades e custos de cada transição, o custo esperado no ciclo pode ser aproximado pela Equação 22:

$$E[\text{custo no ciclo}] = n_{oj}(\sum_j p_{ij}c_{ij}) \quad (\text{eq. 22})$$

A duração do ciclo depende de quantas vezes o sistema vai do estado 0 para os outros estados e da duração do intervalo entre inspeções. Assim, a duração esperada do ciclo pode ser aproximada pela Equação 23:

$$E[\text{duração do ciclo}] = (\sum_j n_{oj})\tau \quad (\text{eq. 23})$$

Baseando-se nas Equações 22 e 23, o custo total como uma função de τ pode ser escrito pela Equação 24:

$$CT(\tau) = \frac{n_{oj}(\sum_j p_{ij}c_{ij})}{(\sum_j n_{oj})\tau} \quad (\text{eq. 24})$$

Exemplos numéricos são apresentados para a otimização do intervalo entre inspeções buscando-se a minimização do custo total por tempo. O custo total na Equação 24 pode ser minimizado e o intervalo ótimo entre inspeções pode ser estabelecido determinando-se valores para os custos de inspeção, reparo de componente, *downtime* e reparo de sistema e, conseqüentemente, tornando o intervalo entre inspeções a única variável da equação. É possível encontrar o mínimo da curva do custo total através da utilização da técnica de pesquisa numérica.

Algoritmos genéticos poderiam ser utilizados para produzir soluções para este problema. Contudo, esta não foi a abordagem selecionada e não foi necessária para a solução deste problema. Este problema possui um modelo bastante complexo e uma complexa função objetivo de custos, mas sua otimização propriamente dita é realizada para somente uma variável de decisão: intervalo entre inspeções. Conseqüentemente, uma pesquisa numérica simples, para uma dimensão, é suficiente. À medida que este modelo for estendido, surgirão problemas mais avançados com multivariáveis que irão requerer métodos como algoritmos genéticos.

4.4.1 Exemplos Numéricos

Exemplos numéricos para cada modelo estudado são apresentados e discutidos a seguir. Devido ao propósito de comparação, parâmetros idênticos foram utilizados para os quatro modelos. Os valores dos parâmetros foram determinados de forma a representar possíveis situações de sistemas reais. Apesar de serem semelhantes, os componentes podem apresentar taxas de falha ligeiramente diferentes entre si. Os parâmetros de custos utilizados possuem relações que representam situações reais onde os custos de inspeção e reparo de componentes são consideravelmente inferiores aos custos de reparo do sistema e *downtime*. A Figura 4.9 apresenta os gráficos para os modelos com dois componentes e a Figura 4.10 apresenta os gráficos para os modelos com três componentes. Os parâmetros utilizados foram:

- a) Parâmetros diferentes de distribuição exponencial para cada componente: $\lambda_1=0,02$, $\lambda_2=0,03$, $\lambda_3=0,025$ (estes parâmetros representam *MTTF* de 50,0, 33,3 e 40 unidades, respectivamente).
- b) $C_i=20.000$ e $C_r=20.000$: os custos de reparo de componente e custos de inspeção possuem os mesmos valores. Desta forma, os custos mais importantes estão relacionados à falha do sistema e ao *downtime*.
- c) $C_s=100.000$ e $C_p=50.000$: os custos de reparo do sistema e *downtime* são maiores que os outros custos. Estas são penalidades aplicadas devido à falha do sistema e indisponibilidade, contribuindo para o aumento da necessidade de inspeções periódicas e, conseqüentemente, reparos.

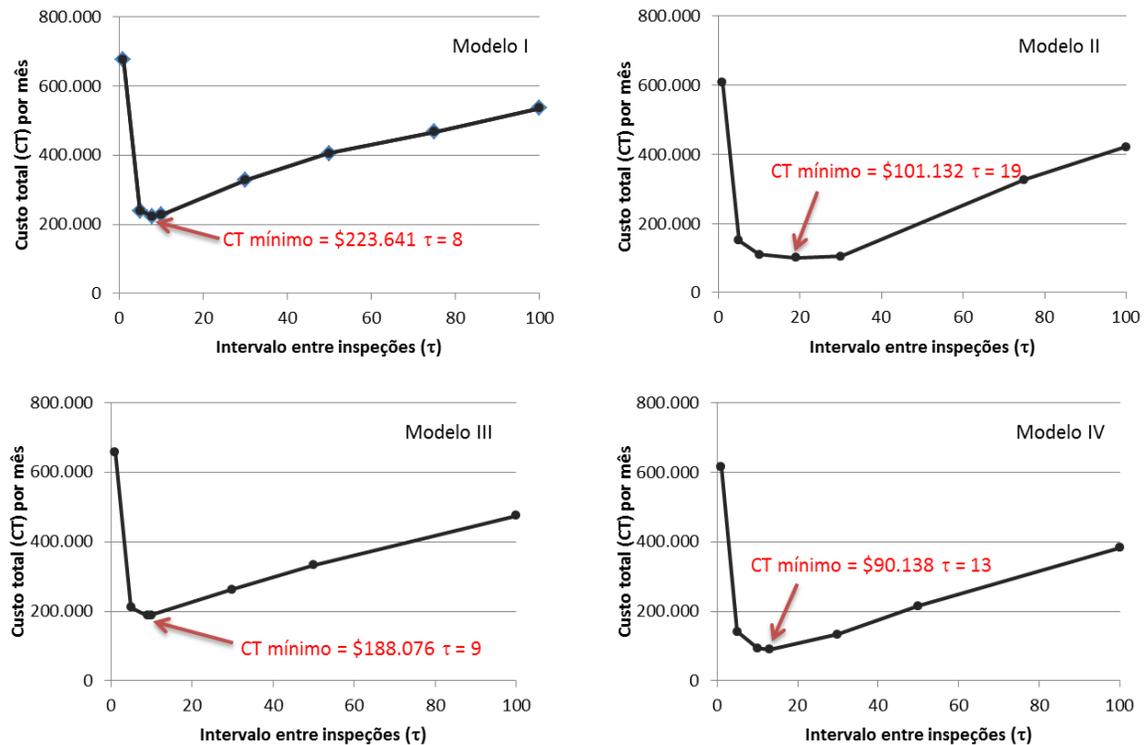


Figura 4.9 – Exemplos numéricos para sistemas com dois componentes.

De acordo com a Figura 4.9 e 4.10, a melhor configuração, dados os parâmetros selecionados, para sistemas com dois e três componentes é o Sistema IV (redundância em *cold standby* com reparo de componente) com intervalo entre inspeções (τ) igual a 13 e 24, respectivamente. Estas configurações produzem os menores custos possíveis. Para um sistema caracterizado por estes parâmetros e custos, é mais econômico aplicar dois componentes em *cold standby* com reparo. Esta configuração representa o menor custo mínimo entre os quatro sistemas com dois e três componentes. A Tabela 4.1 apresenta a porcentagem de redução de custos para cada modelo comparado com o modelo que totalizou os custos mais elevados (Modelo I com 2 componentes). A aplicação do Modelo IV com três componentes representa uma redução de aproximadamente 77% no total de custos quando comparada com o Modelo I com dois componentes.

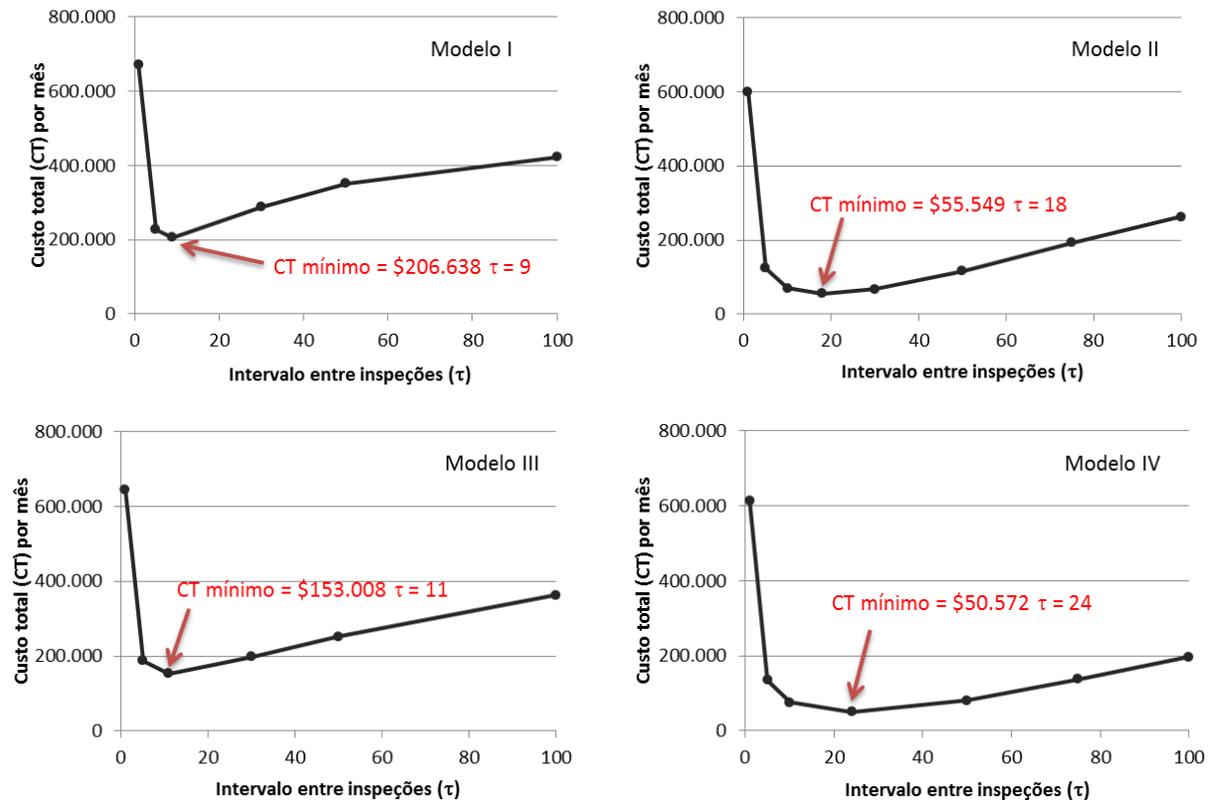


Figura 4.10 – Exemplos numéricos para sistemas com três componentes

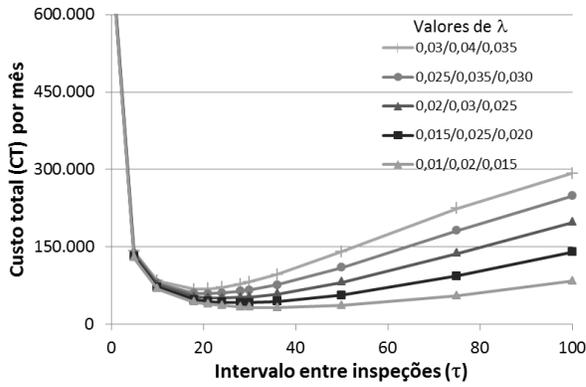
Tabela 4.1 – Porcentagem de redução de custos comparados com o Modelo I com dois componentes.

Modelo	Nº Comp.	Intervalo de inspeção	Custo total	Redução de custo
I	2	8	\$ 223.641	-
I	3	9	\$ 206.638	7,6%
III	2	9	\$ 188.076	15,9%
III	3	11	\$ 153.008	31,5%
II	2	19	\$ 101.132	54,7%
IV	2	13	\$ 90.138	59,7%
II	3	18	\$ 55.549	75,1%
IV	3	24	\$ 50.572	77,4%

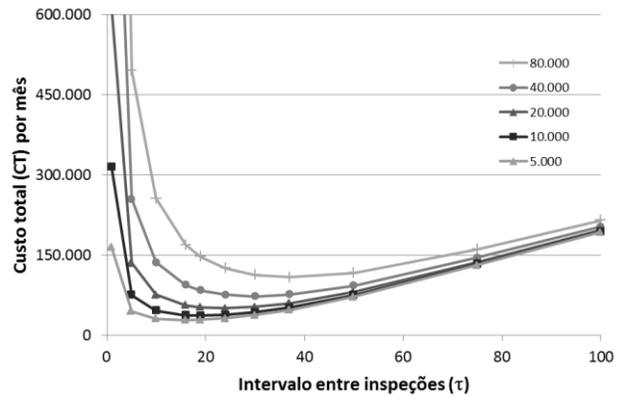
4.4.2 Análise de Sensibilidade

Uma análise de sensibilidade foi realizada para avaliar o efeito dos diferentes parâmetros (λ_1 , λ_2 , λ_3 , C_i , C_r , C_s e C_p) sobre o CT mínimo. A análise de sensibilidade foi conduzida para os quatro modelos discutidos neste artigo. A versão para o Modelo IV com três componentes é apresentada

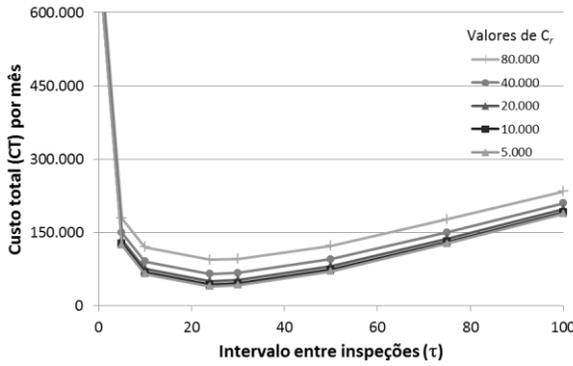
na Figura 4.11. Este modelo se caracteriza como o mais complexo entre os sistemas estudados, sendo também aquele que produziu os melhores resultados relativos aos custos totais.



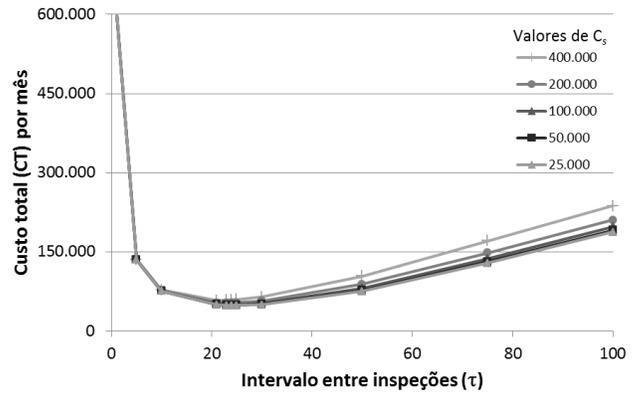
a) Efeito de λ no CT mínimo



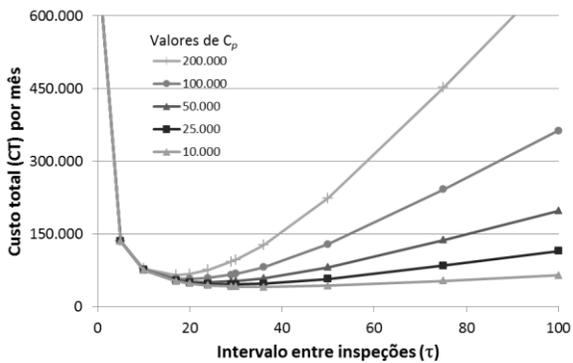
b) Efeito de C_i no CT mínimo



c) Efeito de C_r no CT mínimo



d) Efeito de C_s no CT mínimo



e) Efeito de C_p no CT mínimo

Figura 4.11 – Análise de sensibilidade dos efeitos de λ , C_i , C_r , C_s , e C_p para o Modelo IV com três componentes.

De acordo com a Figura 4.11a), uma taxa de falha (λ) mais elevada aumenta o CT mínimo e reduz o intervalo ótimo entre inspeções. O efeito no CT é mais pronunciado para $\tau > 20$. A Figura 4.11b) mostra que aumentos nos custos de inspeção (C_i) geram aumentos no CT mínimo e no intervalo ótimo entre inspeções. A diferença entre CTs é pronunciada para $\tau < 40$. A Figura

4.11c) demonstra que custos de reparo (C_r) têm um efeito pequeno em CT e que este efeito permanece o mesmo ao longo de τ . A Figura 4.11d) mostra que os custos de reparo do sistema (C_s) também possuem um efeito pequeno em CT , contudo este efeito aumenta levemente quando τ aumenta. Finalmente, a Figura 4.11e) apresenta o efeito do custo de *downtime* (C_p) no CT mínimo. O custo de *downtime* tem o maior efeito no CT para este exemplo e este efeito aumenta com o aumento de τ . É importante destacar que o intervalo ótimo entre inspeções permanece na faixa de 20 para todos os parâmetros e valores analisados no Modelo IV.

4.5 CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um modelo para analisar a confiabilidade e determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas redundantes sujeitos a inspeções periódicas, usando Cadeias de Markov com tempo discreto.

Uma importante questão quando se utilizam sistemas redundantes e inspeções periódicas é a dificuldade em determinar o melhor intervalo entre inspeções para detectar e reparar falhas escondidas. O intervalo entre inspeções deve ser otimizado para maximizar a disponibilidade ao mesmo tempo em que minimiza custos. Inspeções frequentes aumentam a disponibilidade do sistema, mas geram elevados custos em termos de manutenção preventiva. Por outro lado, longos períodos entre inspeções reduzem os custos associados a inspeções, mas aumentam os custos associados com manutenção corretiva, reparo do sistema, *downtime* e acidentes de segurança. O estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções é importante para assegurar uma disponibilidade do sistema satisfatória juntamente com o menor custo possível.

O método apresentado neste artigo usa Cadeias de Markov com tempo discreto para definir tanto as probabilidades de transição entre os estados do sistema, como os custos relacionados a cada estado. Para otimizar o intervalo entre inspeções, o custo total por tempo foi modelado e minimizado utilizando-se as propriedades das Cadeias de Markov e técnicas de pesquisa numérica. O custo mínimo e o melhor intervalo entre inspeções são obtidos levando em consideração os custos de indisponibilidade (*downtime*) e manutenção (inspeção, reparo de componente e reparo do sistema).

Quatro modelos de sistemas são analisados e exemplos numéricos para sistemas compostos por dois e três componentes são apresentados: *i*) Modelo I – Sistema com redundância ativa e sem

reparo de componente; *ii*) Modelo II – Sistema com redundância ativa e com reparo de componente; *iii*) Modelo III – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e sem reparo de componentes; *iv*) Modelo IV - Sistema com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componente.

A principal vantagem do modelo utilizado neste artigo é a inclusão dos custos de indisponibilidade e acidentes de segurança através da definição dos custos de *downtime*. Estes custos penalizam o modelo quando o sistema falha. Além disso, este modelo pode ser generalizado e utilizado para determinar o intervalo ótimo entre inspeções em sistemas com redundância ativa ou inativa e com n componentes.

Como direção para pesquisas futuras, o modelo apresentado neste artigo pode ser estendido para determinar o número ótimo de componentes n para um específico sistema redundante com componentes idênticos. Uma opção mais abrangente seria o desenvolvimento de um modelo similar para um sistema com monitoramento contínuo utilizando Cadeias de Markov com tempo contínuo.

A aplicação prática deste modelo requer a disponibilidade de dados de tempos até a falha dos componentes, a fim de determinar o parâmetro da distribuição exponencial. Além disso, é necessário o levantamento dos custos aproximados de inspeção, reparo, reparo do sistema e *downtime*. As suposições feitas neste estudo podem ser assumidas em muitas situações reais, contudo recomenda-se a análise das características de cada sistema antes de sua aplicação.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo fornecimento de bolsas de pesquisa que suportaram o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

Arora JR. Reliability of Several Standby-Priority-Redundant Systems. *IEEE Transaction on Reliability* 1977, R-26(4): 290-3.

Billinton R, Pan J. Optimal maintenance scheduling in a two identical component parallel redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1998, 59:309-16.

- Bloch-Mercier, S. Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system. *Reliability Engineering and System Safety* 2001, 74: 81–91.
- Castro HC, Cavalca, KL. Maintenance resources optimization applied to a manufacturing system. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 413–20.
- Csenki A. An integral equation approach to the interval reliability of systems modeled by finite semi-Markov process. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 47: 37-45.
- Ereau JF, Saleman M, Valette R, Demmou H. Petri Nets for the Evaluation of Redundant Systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 55:95-104.
- Flammini F, Marrone S, Mazzocca N, Vittorini V. A new modeling approach to the safety evaluation of N -modular redundant computer systems in presence of imperfect maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2009, 94:1422–32.
- Gray JNP. Continuous-time Markov Models in the solution of practical reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety* 1985, 11(4):233-52.
- Gupta R, Goel R, Chaudhary A. Analysis of a two-unit standby system with fixed allowed down time and truncated exponential lifetime distributions. *Reliability Engineering and System Safety* 1994, 44:119-24.
- Hokstad P, Frovig AT. The modeling of degraded and critical failures for components with dormant failures. *Reliability Engineering and System Safety* 1996, 51(2):189-99.
- Hu R, Xie J. Optimal Maintenance Policies for a Cold Standby Redundant System with Two Units. *IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics (IEEE/SOLI)* 2008, 2:1774-8.
- Kaio N, Osaki S. Analytical considerations on inspection policies In: Osaki S, Hatoyama Y, ed. *Stochastic models in reliability theory*. Heidelberg: Springer-Verlag; 1984a, pp 53-71.
- Kaio N, Osaki S. Some remarks on optimum inspection policies, *IEEE Transactions on Reliability* 1984b; R-33:277-285.
- Kapur PK, Kapoor KR. Effect of Standby Redundancy on System Reliability. *IEEE Transaction on Reliability* 1976, R-25(2): 120-1.
- Kumar A. Steady-State Profit in a 2-unit Standby System. *IEEE Transactions on Reliability* 1976, R-25(2):105-8.
- Lapa CMF, Pereira CMNA, Barros MP. A model for preventive maintenance planning by genetic algorithms based in cost and reliability. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 233-40.

- Laprie J, Costes A, Landrault C. Parametric Analysis of 2-Unit Redundant Computer Systems with Corrective and Preventive Maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 1981; R-30(2):139-44.
- Levitin G, Lisnianski A. Joint redundancy and maintenance optimization for multistate series-parallel systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1999, 64:33-42.
- Levitin G, Lisnianski A. Optimization of imperfect preventive maintenance for multi-state systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2000, 67:193-203.
- Montoro-Cazorla D, Pérez-Ocón R. A deteriorating two-system with two repair modes and sojourn times phase-type distributed. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 1–9.
- Munford A, Shanani A. An inspection policy for the Weibull case. *Operational Research Quarterly* 1973; 24:453-458.
- Nourelfath M, Châtelet E, Nahas N. Joint redundancy and imperfect preventive maintenance optimization for series-parallel multi-state degraded systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012, 103:51–60.
- Osaki S. Reliability Analysis of a Two-Unit Standby-Redundant System with Preventive Maintenance. *IEEE Transaction on Reliability* 1972, R-21(1): 24-9.
- Ross SM. Introduction to probability models. Academic Press, New York, 2003.
- Shing J. Effect of Switch Failure on 2 Redundant Systems. *IEEE Transactions on Reliability* 1980, R-29(1):82-3.
- Subramanian R, Anantharaman V. Reliability analysis of a complex standby redundant system. *Reliability Engineering and System Safety* 1995, 48:57-70.
- Taghipour S, Banjevic D, Jardine AKS. Periodic inspection optimization model for a complex repairable system. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:944–52.
- Vaurio JK. On time-dependent availability and maintenance optimization of standby units under various maintenance policies. *Reliability Engineering and System Safety* 1997, 56:79-89.
- Zequeira RI, Bérenguer C. Periodic imperfect preventive maintenance with two categories of competing failure modes. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91(4): 460-8.

5 ARTIGO 4:

DETERMINAÇÃO DO INTERVALO ÓTIMO ENTRE INSPEÇÕES PERIÓDICAS PARA UM SISTEMA MULTIESTADO COM REDUNDÂNCIA EM *COLD STANDBY*

Angélica Alebrant Mendes

José Luis Duarte Ribeiro

Resumo

O estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções considerando aspectos referentes à disponibilidade e custos em sistemas redundantes multiestado sujeitos a inspeções periódicas é um problema desafiador. Este artigo estende o método desenvolvido por Mendes *et al.* (2014) para sistemas onde o tempo de reparo não pode ser negligenciável para incorporar sistemas redundantes multiestado. O método de Cadeias de Markov com tempo discreto é utilizado para definir as probabilidades de transações entre estados do sistema e os custos relacionados a cada estado. Para otimizar o intervalo entre inspeções, o custo total por ciclo é minimizado utilizando-se as propriedades das Cadeias de Markov seguido da técnica de pesquisa numérica. Dois modelos são analisados e exemplos numéricos são apresentados: Sistema I – redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes (componentes com estados binários); ii) Sistema II – multiestado com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes. A principal contribuição do modelo proposto neste artigo é a determinação do intervalo ótimo entre inspeções para sistemas em *cold standby* compostos por componentes que possuem diferentes níveis de degradação e onde o estado destes componentes pode ser determinado apenas através de inspeções periódicas. Este tipo de configuração, apesar de ser bastante utilizado na prática, ainda é pouco explorado na literatura. O modelo proposto pode ser estendido e generalizado para determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas multiestado com redundâncias ativas e inativas compostos por n componentes e k diferentes estados de degradação.

Palavras-chave: sistemas multiestado, inspeções periódicas, Cadeias de Markov, custo de manutenção, intervalo entre inspeções.

5.1 INTRODUÇÃO

A manutenção preventiva baseada no tempo é amplamente utilizada no setor industrial. No entanto, seguindo essa abordagem, muitas vezes o componente ou sistema é reparado ou substituído antes do término da sua vida útil, aumentando os custos de manutenção. Assim, o interesse das organizações e pesquisadores volta-se para o desenvolvimento de técnicas de manutenção preditiva baseada na condição, onde diferentes estados de degradação do sistema podem ser observados. Estes sistemas são conhecidos como sistemas multiestado.

Sistemas multiestado (SME), onde diferentes estados de degradação são identificados, permitem capturar com maior detalhe o envelhecimento dos componentes, sendo mais realistas que abordagens que consideram os sistemas como binários (em funcionamento ou em falha) em muitas situações reais. Os SME podem contemplar vários níveis de degradação que vão do perfeito funcionamento até a falha completa do sistema. Alguns exemplos de MSS são: bombas em refinarias de petróleo, sistemas de *softwares*, sistemas geradores de energia e rolamentos de motores de trens. Os SME podem ser compostos por um único componente ou diversos componentes organizados em série e/ou paralelo. À medida que o número de estados e, principalmente, componentes aumenta, análises de confiabilidade se tornam mais complexas (LISNIANSKI; DING, 2009).

Os SME podem ser encontrados em situações onde um ou mais componentes encontra-se em posição de *cold standby*. Nesses casos, inspeções periódicas são necessárias sempre que o monitoramento contínuo não é possível. Essas inspeções, em intervalos de tempo pré-determinados, verificam o estado em que cada componente está operando e disparam o reparo de componentes sempre que um estado de falha ou de degradação avançada é detectado. O intervalo entre inspeções deve ser otimizado buscando maximizar disponibilidade e minimizar custos (MUNFORD; SHANANI, 1973). Isso acontece porque inspeções frequentes aumentam a disponibilidade, mas envolvem altos custos de manutenção preventiva. Por outro lado, períodos longos entre inspeções reduzem os custos totais de inspeção, mas podem elevar os custos de manutenção corretiva e *downtime*, uma vez que há períodos longos onde o sistema pode estar indisponível (KAIO; OSAKI, 1984a e KAIO; OSAKI, 1984b). Assim, o estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções é essencial para garantir disponibilidade satisfatória ao menor custo possível.

Apesar do recente crescimento do número de artigos sobre esse tema, sistemas redundantes multiestado têm sido estudados desde a década de 1970. Em um dos primeiros trabalhos sobre o tema, El-Neveih *et al.* (1978) desenvolveu uma teoria básica para o estudo de sistemas onde um número finito de estados podem ocorrer. Ainda que Karpinski (1986) tenha determinado o intervalo ótimo entre inspeções periódicas para um sistema multiestado de um componente utilizando Transformadas de Laplace, a maioria dos trabalhos que estudam MSS considera monitoramento contínuo, como pode ser visto em Zhang *et al.* (2007) e Sheu e Zhang (2013). Além disso, estes trabalhos buscam, basicamente, resolver dois problemas: *i*) a alocação ótima de redundâncias no sistema (LEVITIN; LISNIANSKI, 1999 e LIU *et al.*, 2013) e *ii*) a definição do intervalo ótimo para substituição de componentes (SHEU; ZHANG, 2013 e XU *et al.*, 2012).

Para solucionar esses problemas, processos de Markov e suas variações, juntamente com geração da função universal são os métodos mais aplicados. Levitin e Lisnianski (1999) desenvolveram um método para a otimização conjunta de redundâncias e intervalos de substituição para sistemas multiestado utilizando geração da função universal e algoritmos genéticos. Na sequência, os autores aprimoraram o método através da inclusão de manutenções imperfeitas (LEVITIN; LISNIANSKI, 2000). Este método foi utilizado juntamente com processos de Markov em trabalhos recentes que tratam de diferentes sistemas multiestado (LISNIANSKI; DING, 2009; SHEU; ZHANG, 2013; LIU *et al.*, 2013; XU *et al.*, 2012; TIAN *et al.*, 2009 e NOURELFATH *et al.*, 2012). Mais detalhes sobre cada um desses trabalhos serão apresentados na sequência.

Estudando sistemas em *cold* e *warm standbys*, respectivamente, Gupta *et al.* (1993) e Mokaddis *et al.* (1997) analisaram a confiabilidade de sistemas com componentes sujeitos à três estágios de degradação através das propriedades dos processos de Markov. Na mesma linha, Montoro-Cazorla e Pérez-Ocón (2006) determinaram o estágio mais adequado de degradação para a realização de reparo preventivo levando em consideração a disponibilidade do sistema e os custos de manutenções preditivas e corretivas planejadas e não planejadas. Uma estratégia que combina inspeções e monitoramento contínuo é proposta por Le e Tan (2013). Os autores usaram processos de Markov juntamente com um algoritmo iterativo para determinar a melhor estratégia de manutenção para sistemas multiestado com manutenção imperfeita.

A grande maioria dos artigos que estudam sistemas multiestado analisam sistemas complexos sujeitos a monitoramento contínuo e reparo que inicia imediatamente após a falha. Estes artigos

buscam otimizar a aquisição, localização e nível de redundâncias, juntamente com a determinação do intervalo ótimo para sua substituição. Poucos trabalhos estudam sistemas multiestado com inspeção periódica onde o estado dos componentes em *standby* e do sistema é verificado somente durante as inspeções. Contudo, essa é uma situação que ocorre na prática. Por exemplo, quando a análise de alguns componentes exige acesso ao local onde eles estão operando, e esse acesso é difícil. Nesses casos, os componentes serão analisados apenas uma vez a cada n semanas.

Karpinski (1986) determinou o intervalo ótimo entre inspeções periódicas para um sistema multiestado composto por apenas um componente. Le e Tan (2013), por sua vez, otimizaram inspeções sequenciais com monitoramento contínuo para um sistema multiestado com reparo imediato. Neste sistema, inspeções são realizadas para a tomada de decisão após um alerta dado pelo sistema de monitoramento contínuo, bem como reparos ou substituições são realizadas no sistema como um todo, e não em componentes individuais. Observa-se uma lacuna no estudo de sistemas redundantes multiestado com inspeções periódicas. Desta forma, este artigo desenvolve e apresenta um modelo para determinar o intervalo ótimo entre inspeções periódicas para sistemas multiestado com redundância em *cold standby*, utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto.

A manutenção de um sistema redundante multiestado é um processo estocástico, uma vez que tem n componentes e cada componente pode estar em qualquer nível de degradação ou em falha em qualquer momento do tempo. Cada combinação de estados de componentes representa um estado no espaço do processo de Cadeias de Markov. Quando inspeções periódicas são executadas, o estado do sistema (diferentes níveis de degradação ou falha) é observado em pontos discretos no tempo (somente durante as inspeções). Este cenário justifica a aplicação de Cadeia de Markov com tempo discreto.

A principal contribuição do modelo proposto neste artigo é a análise de sistemas em *cold standby* compostos por componentes que possuem diferentes níveis de degradação e onde o estado desses componentes pode ser determinado apenas através de inspeções periódicas. Este tipo de configuração é utilizada, principalmente, em sistemas que não podem ser monitorados a distância e estão situados em locais remotos de difícil acesso, como por exemplo, componentes internos de grandes equipamentos onde é necessário considerável esforço de desmontagem para visualizar os

mesmos. A determinação do intervalo ótimo entre inspeções, levando em consideração os custos de inspeção juntamente com os custos relacionados à indisponibilidade do sistema e acidentes, é fundamental para a garantia da confiabilidade desejada com o menor custo total possível.

Neste artigo é apresentado um modelo para sistemas compostos por dois componentes, sendo um na posição de *cold-standby*, com três níveis de degradação, além do estado de falha. A adição de componentes ao sistema aumenta o número de equações e o espaço necessário para descrevê-las, mas o modelo pode ser generalizado e utilizado para determinar o intervalo ótimo entre inspeções em sistemas redundantes multiestado com n componentes.

Este artigo está organizado como segue. A Seção 5.2 descreve a abordagem de pesquisa, apresentando uma breve revisão dos principais estudos relacionados com manutenção preventiva de sistemas redundantes multiestado. A Seção 5.3 lista as suposições e notações utilizadas e explica a metodologia aplicada para modelar o problema. Na Seção 5.4, exemplos numéricos são apresentados e analisados. A Seção 5.5 sumariza o artigo e inclui as observações finais.

5.2 REVISÃO DE LITERATURA

Recentemente muitas publicações na área de manutenção e confiabilidade têm se preocupado em analisar sistemas multiestado. Os primeiros estudos foram realizados na década de 70 (EL-NEVEIHI *et al.*, 1978 e BARLOW; WU, 1978) e procuraram estender a teoria de probabilidades de sistemas binários para sistemas multiestado. Contudo, um número maior de trabalhos surgiu somente a partir do método desenvolvido por Levitin e Lisnianski em 1999 e 2000 utilizando a técnica de geração da função universal. Antes disso, alguns autores analisaram a confiabilidade de sistemas com diferentes estágios de degradação, sem, no entanto, utilizar o termo multiestado. Estes autores basearam seus estudos nos métodos de Cadeias de Markov (GUPTA *et al.*, 1994 e MOKADDIS *et al.*, 1997).

Gupta *et al.* (1994) desenvolveu um estudo para analisar a confiabilidade de um sistema de duas unidades em *cold standby*, onde a unidade com prioridade de uso possuía três estágios de degradação. Mokaddis *et al.* (1997) estendeu o modelo de Gupta para sistemas em *warm standby*. Hsieh e Chiu (2002) modelaram um sistema com multiestados de degradação e determinaram o número ótimo de componentes em *standbys* e o estado ótimo para substituição. Também tratando do melhor momento para a substituição do sistema, Zhang *et al.* (2007) determinaram uma

política ótima de substituição baseada no nível de degradação e no número de falhas dos componentes, utilizando processos geométricos.

Para solucionar o problema do melhor nível de degradação para o reparo preventivo de um MSS em *cold standby*, Montoro-Cazorla e Pérez-Ócon (2006) utilizaram distribuições de probabilidade *phase-type* e processos de Markov. Utilizando Cadeias de Markov com tempo contínuo, Soro *et al.* (2010) desenvolveram um modelo para analisar a confiabilidade e produtividade de um SME sujeito a reparos mínimos e manutenção imperfeita. Chryssaphinou *et al.* (2011) derivaram medidas de confiabilidade, como disponibilidade e tempo médio até a falha, para MSS configurados em série, paralelo e k -de- n :F, utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto.

Levitin e Lisnianski (1999) usaram geração da função universal para avaliar a disponibilidade de um MSS em termos de sua capacidade e de seu custo de demanda não atendida. A seguir, esses autores aplicaram algoritmos genéticos para otimizar a configuração do sistema e o intervalo de substituição. Em 2000, os mesmos autores introduziram no método manutenções preventivas imperfeitas. Na sequência, muitos autores utilizaram a geração da função universal juntamente com processos de Markov para analisar e otimizar sistemas multiestado. Os principais trabalhos estão descritos a seguir.

Lisnianski e Ding (2009) analisaram a confiabilidade de um sistema redundante composto por dois sistemas multiestado interconectados, utilizando processos de Markov e geração da função universal. Utilizando os mesmos métodos, Tian *et al.* (2009) incluíram a otimização de ações técnicas e organizacionais. Nourelfath *et al.* (2012) buscaram a otimização conjunta da alocação de redundâncias e da manutenção preventiva utilizando processos de Markov e geração da função universal. Liu *et al.* (2013), além dos níveis de redundância, também otimizaram a estratégia de substituição de elementos, onde esses são substituídos após atingirem um pré-determinado número de falhas.

Utilizando abordagens semelhantes, Liu e Huang (2010), Xu *et al.* (2012) e Sheu e Zhang (2013) modelaram diferentes sistemas multiestado aplicando modelos de Markov de tempo contínuo não homogêneo e geração da função universal. Todos os estudos tinham como objetivo otimizar a política de substituição desses sistemas. Liu e Huang (2010) estudaram um sistema reparável com manutenção imperfeita e determinaram o número ótimo de falhas até a substituição. Xu *et al.*

(2012) trabalharam com sistemas relacionados a segurança e não reparáveis e, assim como Sheu e Zhang (2013), otimizaram o intervalo de tempo para a substituição do sistema.

Le e Tan (2013) utilizaram processos de Markov com tempo contínuo para otimizar a estratégia de manutenção de um sistema que sofre deterioração. Apesar de possuir monitoramento contínuo, este sistema necessita de inspeções para determinar com precisão o seu estado. Neste cenário, um algoritmo iterativo que minimiza a taxa de custo no longo prazo é proposto e uma estratégia que combina inspeção com monitoramento contínuo é determinada.

O estudo de sistemas com diferentes níveis de degradação através dos processos de Markov se torna complexo à medida que componentes e novos estados de degradação são adicionados. Os autores em Soro *et al.* (2010) e Sheu e Zhang (2013) consideram apenas os níveis de degradação do sistema como um todo, reduzindo assim o número de variáveis do modelo e permitindo a inclusão de inúmeros estados de degradação. Naqueles trabalhos que consideram estados de degradação em nível de componentes, como Mokaddis *et al.* (1997) e Montoro-Cazorla e Pérez-Ócon (2006), poucos estados e componentes são considerados, visto que o aumento de seus números aumenta substancialmente o conjunto de equações necessárias para descrever o problema.

A complexidade de problemas que envolvem redundâncias aumenta quando o tempo de reparo é considerado como uma variável que deve se ajustar a um modelo de distribuição. Usualmente, os autores estabelecem que tempos de reparo seguem uma distribuição exponencial ou *phase-type*, o que facilita a solução do problema através da utilização de processos de Markov, como visto em Tian *et al.* (2009), Mine e Kawai (1974), Liu *et al.* (2013) e Montoro-Cazorla e Pérez-Ócon (2006).

5.3 METODOLOGIA

5.3.1 Descrição do Sistema

Este artigo baseia-se no método desenvolvido por Mendes *et al.* (2014) para determinar o intervalo ótimo entre inspeções periódicas. Visto que a suposição de que os tempos de reparo são negligenciáveis nem sempre é verdadeira, este artigo, inicialmente, estende o modelo desenvolvido para sistemas redundantes com tempo de reparo não instantâneo. Através da inclusão dos tempos de reparo, é possível uma análise do efeito dos mesmos sobre a

confiabilidade e os custos dos sistemas. Na sequência, um novo aprimoramento do modelo é realizado. Lembrando que muitos sistemas redundantes sofrem degradação com o passar do tempo de operação e que, em muitos casos, é possível verificar o nível de degradação durante as inspeções, o modelo é estendido para sistemas multiestado.

Desta forma, dois sistemas redundantes (apresentados a seguir), compostos por dois componentes com redundância inativa são analisados neste artigo. Vale observar que a metodologia desenvolvida neste artigo pode ser estendida para sistemas compostos por mais componentes.

1) Sistema I – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes:

Neste sistema um componente está ativo e o outro está em *cold standby*. Quando o componente ativo falha, o componente em *standby* é ativado instantaneamente. Durante as inspeções periódicas, o estado binário (operacional ou falha) de cada componente é verificado e reparos de componentes são realizados quando necessário. Uma vez verificada a falha, o componente em falha entra em reparo. O tempo de reparo é uma variável aleatória e o sistema funciona desprotegido, sem redundância, até o reparo do componente estar completo. Os componentes reparados voltam para o sistema na condição de *cold standby*. O sistema irá falhar se todos os componentes falharem entre duas inspeções periódicas ou se um componente falhar enquanto o outro está sendo reparado.

2) Sistema II – Sistema multiestado com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes:

Neste sistema um componente está ativo e o outro está em *cold standby*. Cada componente possui, além do estado de falha, três estágios de operação referentes ao nível de degradação: i) excelente (*e*) – o componente está operando em perfeito funcionamento; ii) bom (*g*) – o componente está operando em bom funcionamento, mas já é possível identificar alguma degradação; iii) precário (*p*) – o componente ainda está em funcionamento, mas em um estado de degradação considerável, sendo indicado o reparo para evitar que a falha aconteça.

O componente sempre passa do estágio excelente para o estágio bom, do estágio bom para o precário e, se não for reparado, do estágio precário para a falha. O componente nunca falha sem passar por todos os níveis de degradação. Contudo, entre duas inspeções, o sistema pode passar por mais de um nível de degradação e falha. Quando o componente ativo falha, o componente em

standby é ativado instantaneamente e possui os mesmos estágios de degradação. Um componente é enviado para reparo sempre que, em uma inspeção periódica, for verificado que este se encontra no estágio precário de operação ou em falha. O tempo de reparo é uma variável aleatória e o sistema funciona desprotegido, sem redundância, até o reparo do componente estar completo. Enquanto o reparo do componente em falha está sendo executado, o componente em operação continua se degradando. Os componentes reparados voltam para o sistema na condição de *cold standby*. O sistema irá falhar se todos os componentes falharem entre duas inspeções periódicas ou se um componente falhar enquanto o outro está sendo reparado.

5.3.2 Notação

λ_1, λ_2	Parâmetros para a distribuição exponencial dos tempos até a falha dos componentes 1 e 2 (sem degradação)
$\lambda_{1e}, \lambda_{1g}, \lambda_{1p}$	Parâmetros para a distribuição exponencial dos estágios excelente, bom e precário do componente 1
$\lambda_{2e}, \lambda_{2g}, \lambda_{2p}$	Parâmetros para a distribuição exponencial dos estágios excelente, bom e precário do componente 2
τ	Intervalo entre inspeções
C_i	Custo por inspeção
C_r	Custo de reparo por unidade
C_s	Custo do reparo do sistema
C_p	Custo de <i>downtime</i> por tempo
ρ	<i>Downtime</i>
$CT(\tau)$	Custo Total como uma função de τ
P_n	Matriz de probabilidades de transições entre estados para o Modelo n
p_{ij}	ij -entrada da matriz P
C_n	Matriz de custos de transições entre estados para o Modelo n
c_{ij}	ij -entrada da matriz C_n
N	Matriz do número esperado de vezes que o processo passa pelo estado transiente p_j dado que ele iniciou no estado transiente p_i
n_{ij}	ij -entrada da matriz N
Q	Parte transiente da matriz P_n
I	Matriz identidade

T_1, T_2	Tempo até a falha dos componentes 1 e 2, respectivamente (sem degradação). $T_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $T_2 \sim \exp(\lambda_2)$
T_{1e}, T_{1g}	Tempo até a transição do componente 1 para os estados de degradação bom e precário, respectivamente. $T_{1e} \sim \exp(\lambda_{1e})$, $T_{1g} \sim \exp(\lambda_{1g})$
T_{2e}, T_{2g}	Tempo até a transição do componente 2 para os estados de degradação bom e precário, respectivamente. $T_{2e} \sim \exp(\lambda_{2e})$, $T_{2g} \sim \exp(\lambda_{2g})$
T_{1p}, T_{2p}	Tempo até a falha dos componentes 1 e 2, respectivamente, dado que estão no estágio precário $T_{1p} \sim \exp(\lambda_{1p})$, $T_{2p} \sim \exp(\lambda_{2p})$
$MTTF$	Tempo médio até a falha
TTF	Tempo até a falha
α_1, α_2	Parâmetros para a distribuição exponencial dos tempos de reparo dos componentes 1 e 2
R_1, R_2	Tempos de reparo dos componentes 1 e 2. $R_1 \sim \exp(\alpha_1)$, $R_2 \sim \exp(\alpha_2)$
$MTTR$	Tempo médio de reparo

5.3.3 Suposições

Este estudo possui as seguintes suposições para o Sistema I: *i*) componentes possuem apenas dois estágios (funcionamento ou falha); *ii*) chaveamento perfeito e instantâneo; *iii*) tempos até a falha e tempos de reparo seguem uma distribuição de probabilidade exponencial; *iv*) componentes possuem diferentes parâmetros de distribuição de tempos até a falha e parâmetros iguais de tempos de reparo; *v*) o componente quando em posição de *cold standby* não sofre degradação; *vi*) cada inspeção é executada perfeitamente e instantaneamente.

Este estudo possui as seguintes suposições para o Sistema II: *i*) componentes se degradam gradativamente, passando por todos os estágios de degradação antes de falhar; *ii*) chaveamento perfeito e instantâneo; *iii*) tempos de transição entre estágios de degradação, até a falha e de reparo seguem uma distribuição de probabilidade exponencial; *iv*) componentes possuem diferentes parâmetros de distribuição entre os estágios de degradação, e parâmetros iguais de tempos de reparo; *v*) o componente quando em posição de *cold standby* não sofre degradação; *vi*) cada inspeção é executada perfeitamente e instantaneamente.

Este estudo analisa sistemas onde as falhas não são nem detectadas, nem reparadas até que uma inspeção seja executada. Se a falha do sistema ocorrer antes da inspeção, o *downtime* resultará em aumento dos custos. Estes custos aumentarão até a próxima inspeção. Uma vez que uma falha de

componente seja detectada em uma inspeção antes da falha do sistema, o componente deve ser reparado (com custo e tempo associado) para manter o nível de confiabilidade. No Sistema II, a inspeção também pode revelar degradação do componente que ainda está operando, porém em um estado precário. Neste caso, o componente deve ser reparado antes mesmo de sua falha, com o devido custo e tempo associados.

Foram consideradas distribuições exponenciais para que o método de Cadeias de Markov pudesse ser utilizado. É sabido que distribuição exponencial é apropriada para modelar tempos até a falha, tempos de reparo e tempos entre transições de estados de muitos componentes. Contudo, se este não for o caso, outra abordagem como simulação de Monte Carlo poderia ser utilizada.

5.4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE E CUSTOS DE SISTEMAS REDUNDANTES SUJEITOS A INSPEÇÕES PERIÓDICAS

No início desta seção, as probabilidades de transições para os dois sistemas apresentados acima são desenvolvidas utilizando Cadeias de Markov. Na sequência, os custos relacionados com a manutenção dos sistemas são estabelecidos e uma função de custo é determinada e minimizada a fim de encontrar o intervalo ótimo entre inspeções.

5.4.1 Definição das probabilidades de transições utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto

Cadeia de Markov é um processo que consiste em um número finito de estados e probabilidades conhecidas, p_{ij} , onde p_{ij} é a probabilidade de transição do estado i para o estado j . As probabilidades p_{ij} dependem somente dos estados i e j , e não do tempo n ou dos estados prévios. O conjunto de estados em um processo de Cadeia de Markov é chamado de espaço de estados (ROSS, 2003).

Considerando que cada possível configuração diferente do sistema redundante é um estado e que os tempos de transição de um estado para outro são variáveis aleatórias, é possível definir um diagrama de espaço de estados para os dois sistemas em estudo, como é apresentado na sequência deste artigo. Exemplos de estados para o Sistema I poderiam ser: um componente funcionando e outro em *standby*, ou um componente funcionando e um em falha. Exemplos de estados para o Sistema II seriam: um componente funcionando em estado excelente e outro em *standby*, um

componente funcionando em estado bom e outro em reparo, um componente funcionando em estado precário e outro em falha.

Toda vez que uma inspeção periódica é realizada, o estado do sistema é verificado. O estado do sistema pode mudar ou o sistema pode permanecer no último estado inspecionado. O sistema falha quando atinge o(s) estado(s) de falha do sistema e quando um ciclo é completado. Uma vez em um estado de falha, o sistema não muda de estado. Cada estado de falha do sistema é chamado de estado de absorção da Cadeia de Markov.

Cada transição tem uma probabilidade, e essa probabilidade não depende do estado em que o sistema estava previamente. As probabilidades de transição são representadas em uma matriz chamada matriz de transição. Em uma matriz de transição P_n , p_{ij} é a probabilidade de estar no estado S_j no passo $n + 1$, dado que o processo estava no estado S_i no passo n (ROSS, 2003). Os diagramas de espaço de estados e as matrizes de transição de cada sistema são apresentados a seguir.

1) Sistema I - Sistema com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes:

No Sistema I, um componente está em operação e o outro está em *cold standby*. Quando o componente ativo falha, o componente em *standby* entra em funcionamento. Ao ser detectada uma falha de componente durante uma inspeção periódica, o componente é enviado para reparo, enquanto o outro componente continua em funcionamento. O sistema falha quando ambos os componentes falham durante um intervalo entre inspeções ou quando o componente ativo falha enquanto o outro componente ainda está sendo reparado. O diagrama de espaço de estados para sistemas com dois componentes é apresentado na Figura 5.1. Os círculos S_n representam cada estado do espaço de estados. Cada nos círculos representa o estado de um componente: operação (O), *standby* (S), reparo (R) ou falha (F). Cada número associado a uma letra dentro dos círculos representa um componente (1 e 2). Por exemplo, o estado S_0 possui o componente 1 em operação O_1 e o componente 2 em *standby* S_2 .

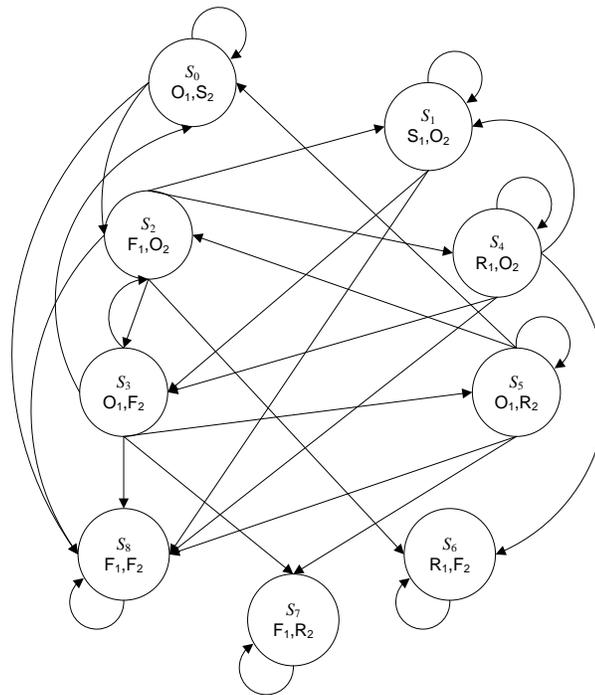


Figura 5.1 – Diagrama de espaço de estados para dois componentes

Como pode ser observado na Figura 5.1, existem nove possíveis estados no espaço de estados do Sistema I quando este tem dois componentes. Os estados são: S_0 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em *standby*; S_1 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em *standby*; S_2 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em falha; S_3 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em falha; S_4 – componente 2 em funcionamento e componente 1 em reparo; S_5 – componente 1 em funcionamento e componente 2 em reparo, S_6 – componente 1 em reparo e componente 2 em falha; S_7 – componente 2 em reparo e componente 1 em falha; S_8 – componentes 1 e 2 em falha. Os estados S_6 , S_7 e S_8 resultam em falha do sistema e são estados de absorção, pois uma vez que o sistema tenha falhado, não há reparo. O sistema começa a operar com o componente 1 em funcionamento e o componente 2 em *cold standby* e pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado.

A matriz P_1 apresenta as probabilidades de transição para este sistema. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de transição do estado i para o estado j . Por exemplo, a probabilidade p_{20} é a probabilidade de transição do estado 2 para o estado 0. Esta probabilidade pode ser representada pela probabilidade do componente 2 ser reparado e do componente 1 não falhar durante o intervalo entre inspeções.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau} (1 - F_{T_2}(\tau - u))f_{T_1}(u)du \\
&= \int_0^{\tau} (e^{-\lambda_2(\tau-u)})\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})
\end{aligned} \tag{eq. 2}$$

3) Probabilidade dos componentes 1 e 2 falharem durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{08} = p_{18} &= P\{T_1 + T_2 < \tau\} \\
&= P\{T_2 < \tau - T_1\} \\
&= \int_0^{\tau} P\{T_2 < \tau - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} F_{T_2}(\tau - u) f_{T_1}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} (1 - e^{-\lambda_2(\tau-u)}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
&= (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})
\end{aligned} \tag{eq. 3}$$

4) Probabilidade do componente 2 não falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$p_{11} = P\{T_2 > \tau\} = e^{-\lambda_2 \tau} \tag{eq. 4}$$

5) Probabilidade do componente 2 falhar e do componente 1 entrar em operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{13} &= P\{T_2 < \tau \cap T_2 + T_1 > \tau\} \\
&= \int_0^{\tau} (1 - P\{T_1 < \tau - T_2\}) P\{T_2 < \tau\} \\
&= \int_0^{\tau} (1 - P\{T_1 < \tau - T_2 | T_2 = u\}) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} (1 - F_{T_1}(\tau - u)) f_{T_2}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau} e^{-\lambda_1(\tau-u)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})
\end{aligned} \tag{eq. 5}$$

6) Probabilidade do componente 1 ser reparado e do componente 2 não falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{21} = p_{41} &= P\{R_1 < \tau \cap T_2 > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} P\{T_2 > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) e^{-\lambda_2 \tau}
\end{aligned} \tag{eq. 6}$$

7) Probabilidade do componente 1 ser reparo antes da falha do componente 2, sendo que o componente 2 falha e o componente 1 entra em funcionamento no intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{23} = p_{43} &= P\{R_1 < T_2 \cap T_2 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} \\
&= \int_0^{\tau} P\{R_1 < T_2 \cap T_2 < \tau \cap T_1 > \tau - T_2 | T_2 = u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} P\{R_1 < u \cap T_1 > \tau - u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} F_{R_1}(u) (1 - F_{T_1}(\tau - u)) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} (1 - e^{-\alpha_1 u}) e^{-\lambda_1(\tau-u)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= -\frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2}
\end{aligned} \tag{eq. 7}$$

8) Probabilidade do componente 2 não falhar e do componente 1 estar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{24} = p_{44} &= P\{T_2 > \tau \cap R_1 > \tau\} \\
&= P\{T_2 > \tau\} Pr\{R_1 > \tau\} \\
&= e^{-\lambda_2 \tau} e^{-\alpha_1 \tau}
\end{aligned} \tag{eq. 8}$$

- 9) Probabilidade do componente 2 falhar antes da conclusão do reparo do componente 1 durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{26} &= p_{46} = P\{R_1 > T_2 \cap T_2 < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 > T_2 \cap T_2 < \tau \mid T_2 = u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - P\{R_1 < u\}) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - F_{R_1}(u)) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau e^{-\alpha_1 u} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= -\frac{\lambda_2(e^{-(\alpha_1+\lambda_2)\tau}-1)}{\alpha_1+\lambda_2} \tag{eq. 9}
\end{aligned}$$

- 10) Probabilidade do componente 1 ser reparado antes do componente 2 falhar e dos componentes 2 e 1 falharem durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{28} &= p_{48} = P\{R_1 < T_2 \cap T_1 + T_2 < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_2 \cap T_1 < \tau - T_2 \mid T_2 = u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < u \cap T_1 < \tau - u\} f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau F_{R_1}(u) F_{T_1}(\tau - u) f_{T_2}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_1 u})(1 - e^{-\lambda_1(\tau-u)}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du \\
&= \frac{\lambda_2(e^{-\lambda_1\tau} - e^{-(\alpha_1+\lambda_2)\tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - e^{-\lambda_2\tau} + \frac{\lambda_2(e^{-\lambda_1\tau} - e^{-\lambda_2\tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2(e^{-(\alpha_1+\lambda_2)\tau} - 1)}{\alpha_1 + \lambda_2} + 1 \tag{eq. 10}
\end{aligned}$$

- 11) Probabilidade do componente 1 não falhar e do componente 2 estar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{30} &= p_{50} = P\{R_2 < \tau \cap T_1 > \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} P\{T_1 > \tau\}
\end{aligned}$$

$$= (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) e^{-\lambda_1 \tau} \quad (\text{eq. 11})$$

12) Probabilidade do componente 2 ser reparado antes da falha do componente 1, sendo que o componente 1 falha e o componente 2 entra em funcionamento no intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{32} = p_{52}(\tau) &= P\{R_2 < T_1 \cap T_1 < \tau \cap T_1 + T_2 > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{R_2 < T_1 \cap T_1 < \tau \cap T_2 > \tau - T_1 | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau P\{R_2 < u \cap T_2 > \tau - u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau F_{R_2}(u) (1 - F_{T_2}(\tau - u)) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_2 u}) e^{-\lambda_2(\tau - u)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &= -\frac{\lambda_1(e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1)\tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - \frac{\lambda_1(e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \quad (\text{eq. 12})$$

13) Probabilidade do componente 1 não falhar e do componente 2 estar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{35} = p_{55} &= P\{T_1 > \tau \cap R_2 > \tau\} \\ &= P\{T_1 > \tau\} P\{R_2 > \tau\} \\ &= e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\alpha_2 \tau} \end{aligned} \quad (\text{eq. 13})$$

14) Probabilidade do componente 1 falhar antes da conclusão do reparo do componente 2 durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{37} = p_{57} &= P\{R_2 > T_1 \cap T_1 < \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{R_2 > T_1 \cap T_1 < \tau | T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - P\{R_2 < u\}) f_{T_1}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - F_{R_2}(u)) f_{T_1}(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\tau} e^{-\alpha_2 u} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
&= -\frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1)\tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1}
\end{aligned} \tag{eq. 14}$$

15) Probabilidade do componente 2 ser reparado antes do componente 1 falhar e dos componentes 1 e 2 falharem durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{38} = p_{58} &= P\{R_2 < T_1 \cap T_1 + T_2 < \tau\} \\
&= \int_0^{\tau} P\{R_2 < T_1 \cap T_2 < \tau - T_1 \mid T_1 = u\} f_{T_1}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} P\{R_2 < u \cap T_2 < \tau - u\} f_{T_1}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} F_{R_2}(u) F_{T_2}(\tau - u) f_{T_1}(u) du \\
&= \int_0^{\tau} (1 - e^{-\alpha_2 u})(1 - e^{-\lambda_2(\tau - u)}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\
&= \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1)\tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1)\tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1} + 1
\end{aligned} \tag{eq. 15}$$

Considerando as Equações 1 a 15, P_1 pode ser reescrita como:

$P_1 =$

$$\begin{bmatrix}
 e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & 0 & 0 \\
 0 & e^{-\lambda_2 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau}) & 0 \\
 0 & (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) e^{-\lambda_2 \tau} & 0 & \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} & e^{-\lambda_2 \tau} e^{-\alpha_1 \tau} \\
 (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} & 0 & 0 \\
 0 & (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) e^{-\lambda_2 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} & e^{-\lambda_2 \tau} e^{-\alpha_1 \tau} \\
 (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) e^{-\lambda_1 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & \\
 \dots & 0 & 0 & (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}) & \\
 \dots & 0 & -\frac{\lambda_2 (e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau} - 1)}{\alpha_1 + \lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 (e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau} - 1)}{\alpha_1 + \lambda_2} + 1 \\
 \dots & e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\alpha_2 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1} & \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1} + 1 \\
 \dots & 0 & -\frac{\lambda_2 (e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau} - 1)}{\alpha_1 + \lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau})}{\alpha_1 - \lambda_1 + \lambda_2} - e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau})}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 (e^{-(\alpha_1 + \lambda_2) \tau} - 1)}{\alpha_1 + \lambda_2} + 1 \\
 \dots & e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\alpha_2 \tau} & 0 & -\frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1} & \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau})}{\alpha_2 - \lambda_2 + \lambda_1} - e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 (e^{-(\alpha_2 + \lambda_1) \tau} - 1)}{\alpha_2 + \lambda_1} + 1 \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

2) Sistema II – Sistema multiestado com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes:

No Sistema II, um componente está em funcionamento e um componente está em *cold standby*. Cada componente possui três estados de funcionamento, referentes ao seu nível de degradação, e mais o estado de falha. O componente ativo inicia a operação no estado excelente, passando pelos estágios bom e precário antes da falha. Quando o componente ativo falha, o *standby* entre em operação e permanece operando até a sua falha. O componente em falha ou em estado precário de operação é enviado para reparo durante a próxima inspeção periódica. Após reparado, o componente retorna ao sistema na condição de *cold standby*. Entre duas inspeções, o sistema pode passar por mais de um estágio. O diagrama de espaço de estados para o sistema é apresentado na Figura 5.2. Os círculos S_n representam cada estado do espaço de estados. Cada letra dentro dos círculos representa o estado de um componente: operação em estado excelente (O_e), operação em estado bom (O_g), operação em estado precário (O_p), *standby* (S), reparo (R) ou

falha (F). Cada número associado a uma letra dentro dos círculos representa um componente (1 e 2). Por exemplo, o estado S_0 possui o componente 1 operando em estado excelente O_{1e} e o componente 2 em *standby* S_2 .

A Figura 5.2 mostra que há 21 possíveis estados no espaço de estados do Sistema II. Estes estados são:

- S_0 – componente 1 em estado excelente de operação e componente 2 em *standby*;
- S_1 – componente 2 em estado excelente de operação e componente 1 em *standby*;
- S_2 – componente 1 em estado bom de operação e componente 2 em *standby*;
- S_3 – componente 2 em estado bom de operação e componente 1 em *standby*;
- S_4 – componente 1 em estado precário de operação e componente 1 em *standby*;
- S_5 – componente 2 em estado precário de operação e componente 2 em *standby*;
- S_6 – componente 1 em falha e componente 2 em estado excelente de operação;
- S_7 – componente 2 em falha e componente 1 em estado excelente de operação;
- S_8 – componente 1 em reparo e componente 2 em estado excelente de operação;
- S_9 – componente 2 em reparo e componente 1 em estado excelente de operação;
- S_{10} – componente 1 em falha e componente 2 em estado bom de operação;
- S_{11} - componente 2 em falha e componente 1 em estado bom de operação;
- S_{12} - componente 1 em reparo e componente 2 em estado bom de operação;
- S_{13} – componente 2 em reparo e componente 1 em estado bom de operação;
- S_{14} – componente 1 em falha e componente 2 em estado precário de operação;
- S_{15} - componente 2 em falha e componente 1 em estado precário de operação;
- S_{16} - componente 1 em reparo e componente 2 em estado precário de operação;
- S_{17} – componente 2 em reparo e componente 1 em estado precário de operação;
- S_{18} - componente 1 em reparo e componente 2 em falha (falha do sistema);
- S_{19} – componente 2 em reparo e componente 1 em falha (falha do sistema);
- S_{20} – componentes 1 e 2 em falha (falha do sistema).

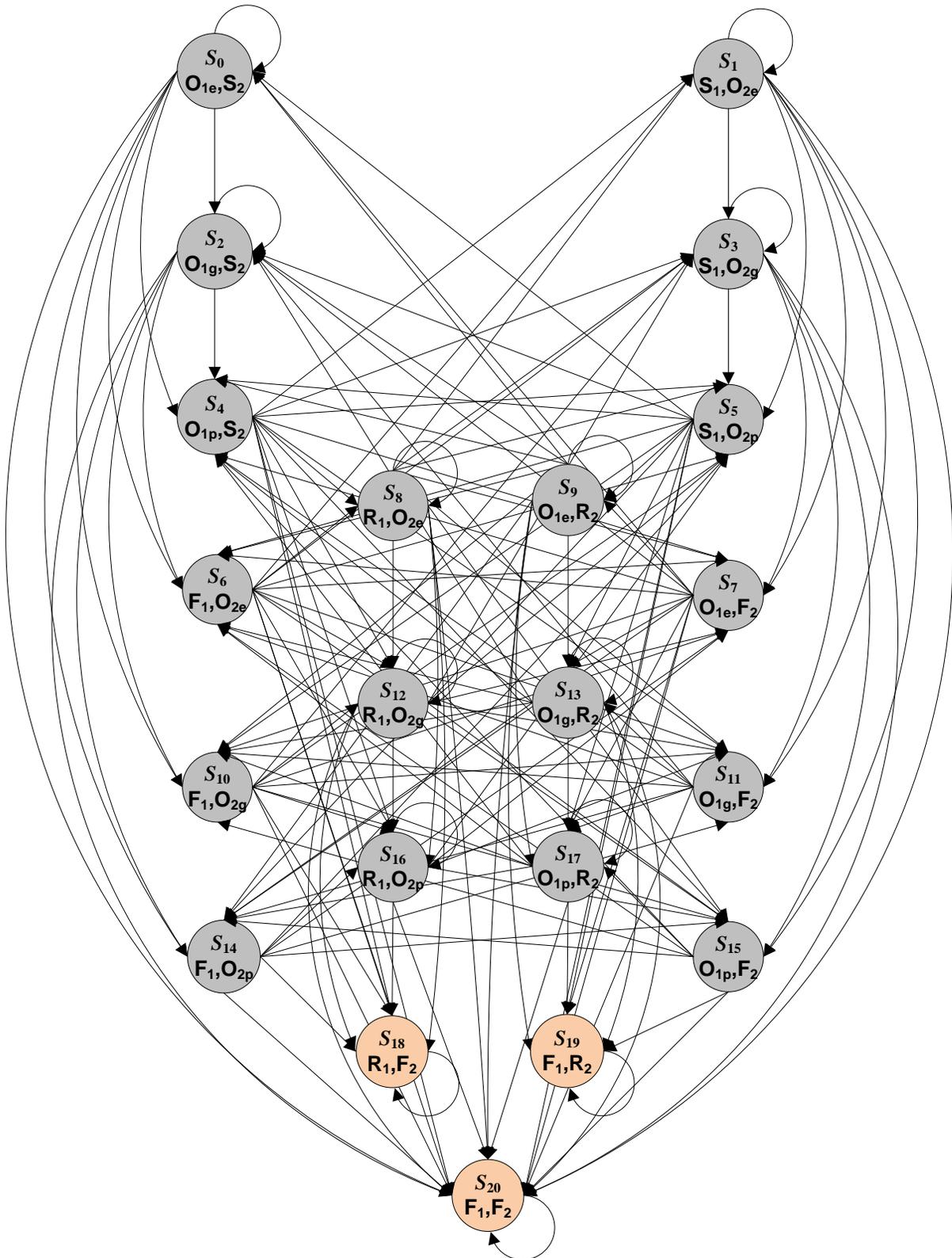


Figura 5.2 – Diagrama de espaço de estados para componentes com degradação. (Quando um componente é reparado, este volta ao sistema na posição de *standby*)

O sistema entra em operação com o componente 1 em funcionamento e o componente 2 em *cold standby*. O sistema pode permanecer no mesmo estado ou mudar para outro estado. O reparo de componentes em falha somente inicia após uma inspeção periódica. Componentes em estado precário de operação também são enviados para reparo, após inspeção periódica, sempre que o outro componente estiver disponível para operação. Se o outro componente estiver em reparo, nenhuma ação é tomada durante a inspeção. Por outro lado, se o outro componente estiver em falha, o componente em falha é enviado para reparo durante a inspeção periódica. Em ambos os casos o sistema continua operando com o componente em estado precário.

O tempo de reparo de cada componente varia de acordo com sua distribuição de probabilidade, sendo que o componente reparado retorna ao sistema na posição de *cold standby*. O sistema falha quando todos os componentes falharem durante o intervalo entre inspeções ou quando um componente falhar, enquanto o outro estiver sendo reparado. Após falhar, o sistema não é reparado. Assim, os estados S_{18} , S_{19} e S_{20} representam estados de absorção.

A matriz P_2 apresenta as probabilidades de transição do sistema. As probabilidades p_{ij} representam a probabilidade de ir do estado i para o estado j . As probabilidades da matriz P_2 são apresentadas individualmente na sequência e são resolvidas através do uso da Teoria da Probabilidade. Por exemplo, a probabilidade p_{415} é a probabilidade do componente 1 ser reparado antes da falha do componente 2 e de, na sequência, o componente 2 falhar e o componente 1 se degradar até o estado precário de operação, durante o intervalo entre inspeções. Esta probabilidade pode ser calculada através da combinação de três probabilidades: *i*) probabilidade do tempo de reparo do componente 1 ser menor que a soma dos tempos de degradação e falha do componente 2; *ii*) probabilidade da soma dos tempos de degradação e falha do componente 2, mais os tempos de degradação até o estado bom do componente 1 ser menor que o intervalo entre inspeção e *iii*) probabilidade da soma dos tempos de degradação e falha do componente 2, mais os tempos de degradação até o estado precário do componente 1 ser maior que o intervalo entre inspeção. Ou seja: $p_{415} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\}$.

$P_2 =$

p_{00}	0	p_{02}	0	p_{04}	0	p_{06}	0	0	0	p_{010}	0	0	0	p_{014}	0	0	0	0	0	p_{020}	
0	p_{11}	0	p_{13}	0	p_{15}	0	p_{17}	0	0	0	p_{111}	0	0	0	p_{115}	0	0	0	0	p_{120}	
0	0	p_{22}	0	p_{24}	0	p_{26}	0	0	0	p_{210}	0	0	0	p_{214}	0	0	0	0	0	p_{220}	
0	0	0	p_{33}	0	p_{35}	0	p_{37}	0	0	0	p_{311}	0	0	0	p_{315}	0	0	0	0	p_{320}	
0	p_{41}	0	p_{43}	0	p_{45}	0	p_{47}	p_{48}	0	0	p_{411}	p_{412}	0	0	p_{415}	p_{416}	0	p_{418}	0	p_{420}	
p_{50}	0	p_{52}	0	p_{54}	0	p_{56}	0	0	p_{59}	p_{510}	0	0	p_{513}	p_{514}	0	0	p_{517}	0	p_{519}	p_{520}	
0	p_{61}	0	p_{63}	0	p_{65}	0	p_{67}	p_{68}	0	0	p_{611}	p_{612}	0	0	p_{615}	p_{616}	0	p_{618}	0	p_{620}	
p_{70}	0	p_{72}	0	p_{74}	0	p_{76}	0	0	p_{79}	p_{710}	0	0	p_{713}	p_{714}	0	0	p_{717}	0	p_{719}	p_{720}	
0	p_{81}	0	p_{83}	0	p_{85}	0	p_{87}	p_{88}	0	0	p_{811}	p_{812}	0	0	p_{815}	p_{816}	0	p_{818}	0	p_{820}	
p_{90}	0	p_{92}	0	p_{94}	0	p_{96}	0	0	p_{99}	p_{910}	0	0	p_{913}	p_{914}	0	0	p_{917}	0	p_{919}	p_{920}	
0	0	0	p_{103}	0	p_{105}	0	p_{107}	0	0	0	p_{1011}	p_{1012}	0	0	p_{1015}	p_{1016}	0	p_{1018}	0	p_{1020}	
0	0	p_{112}	0	p_{114}	0	p_{116}	0	0	0	p_{1110}	0	0	p_{1113}	p_{1114}	0	0	p_{1117}	0	p_{1119}	p_{1120}	
0	0	0	p_{123}	0	p_{125}	0	p_{127}	0	0	0	p_{1211}	p_{1212}	0	0	p_{1215}	p_{1216}	0	p_{1218}	0	p_{1220}	
0	0	p_{132}	0	p_{134}	0	p_{136}	0	0	0	p_{1310}	0	0	p_{1313}	p_{1314}	0	0	p_{1317}	0	p_{1319}	p_{1320}	
0	0	0	0	0	p_{145}	0	p_{147}	0	0	0	p_{1411}	0	0	0	p_{1415}	p_{1416}	0	p_{1418}	0	p_{1420}	
0	0	0	0	0	p_{154}	0	p_{156}	0	0	0	p_{1510}	0	0	0	p_{1514}	0	0	p_{1517}	0	p_{1519}	p_{1520}
0	0	0	0	0	p_{165}	0	p_{167}	0	0	0	p_{1611}	0	0	0	p_{1615}	p_{1616}	0	p_{1618}	0	p_{1620}	
0	0	0	0	0	p_{174}	0	p_{176}	0	0	0	p_{1710}	0	0	0	p_{1714}	0	0	p_{1717}	0	p_{1719}	p_{1720}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Os cálculos para estas probabilidades seguem a mesma metodologia utilizada para resolver as probabilidades do Sistema I. Algumas probabilidades e seus resultados em termos de equações integrais são apresentados a seguir. As soluções destas integrais foram obtidas utilizando-se *software* de modelamento matemático. Por serem muitos extensos, resultados completos não serão apresentados neste artigo, mas podem ser vistos no Apêndice desta tese.

- 1) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado precário de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$p_{415} = p_{615} = p_{815} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\}$$

$$= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - v - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} < \tau - u - v - w - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - v - w - T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} < \tau - u - v - w - z \cap T_{1p} > \tau - u - v - w - z - T_{1g} | T_{1g} = y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1p} > \tau - u - v - w - z - y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{R_1}(u + v + w) (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w - z - y)) f_{T_{1g}}(y) f_{T_{1e}}(z) f_{T_{2p}}(w) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dy dz dw dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - e^{-\alpha_1(u+v+w)}) e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z-y)} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}y} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} dy dz dw dv du \tag{eq. 16}
\end{aligned}$$

- 2) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado precário de operação e do componente 1 continuar em reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{416} &= p_{616} = p_{816} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - u \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_1}(\tau)) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v)) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dv du \\
&= (e^{-\alpha_1\tau}) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dv du \tag{eq. 17}
\end{aligned}$$

5.5 MODELOS DE CUSTOS

Otimizar a medida de performance por unidade de tempo é equivalente a otimizar a medida de performance ao longo de um período. Desta forma, neste artigo, os modelos de custos são baseados na determinação do custo total de manutenção por ciclo. Entende-se por ciclo o período entre o início da operação e a falha do sistema (Equação 18).

$$CT = \frac{E[\text{custo no ciclo}]}{E[\text{duração do ciclo}]} \tag{eq. 18}$$

Para determinar os custos envolvidos em um sistema redundante sujeito a inspeções periódicas, quatro elementos foram considerados: *i*) Custo de inspeção periódica (C_i); *ii*) Custo do reparo de um componente (C_r); *iii*) Custo de *downtime* do sistema por unidade de tempo (C_p); *iv*) Custo do reparo do sistema após falha do sistema (C_s).

Os custos da inspeção periódica estão relacionados com os custos de mão-de-obra, ferramentas e materiais necessários para a execução da inspeção, ainda que não haja nenhum componente em estado de falha. Os custos de reparo de componente estão associados com a mão-de obra, ferramentas, substituição de partes e materiais utilizados no reparo do componente em falha durante a inspeção periódica. Os custos de reparo do sistema referem-se aos custos incorridos, após uma falha do sistema, que envolvem a reativação do sistema a sua condição de completamente operacional. Finalmente, o custo de *downtime* está relacionado à perda de produção durante o tempo em que o sistema não está operando. Este custo inclui perda de oportunidade de vendas e eventuais multas com entregas atrasadas.

Os custos de inspeção periódica, reparo de componentes e reparo do sistema são considerados constantes e devem ser estabelecidos para cada sistema individualmente. Diferentemente, o custo de *downtime* do sistema é uma função do tempo, visto que as perdas aumentam conforme o sistema se mantém indisponível por mais tempo. Para estabelecer este custo, é necessário determinar o tempo esperado de *downtime*.

Para um sistema binário (Sistema I) com dois componentes (1 e 2) em paralelo, sendo um em *cold standby*, ambos apresentando tempos até a falha que seguem uma distribuição exponencial, o tempo médio até a falha do sistema ($MTTF_{ij}$), dado que o sistema se encontra no estado i e vai para o estado j , que é um estado de falha, é calculado como:

$$\text{a) Quando ambos os componentes falham: } MTTF_{i8} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{para } i = 0 - 5 \quad (\text{eq. 19})$$

$$\text{b) Quando somente o componente 1 falha: } MTTF_{i7} = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{para } i = 3 \text{ e } 5 \quad (\text{eq. 20})$$

$$\text{c) Quando somente o componente 2 falha: } MTTF_{i6} = \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{para } i = 2 \text{ e } 4 \quad (\text{eq. 21})$$

Para um sistema multiestado (Sistema II) com dois componentes (1 e 2), sendo um em *cold standby*, e com tempos até a falha que seguem uma distribuição exponencial, o tempo médio até a falha do sistema ($MTTF_{ij}$), dado que o sistema se encontra no estado i e vai para o estado j , que é

um estado de falha, é calculado como segue. As letras associadas ao parâmetro λ representam os estágios de operação dos componentes.

$$MTTF_{i20} = \frac{1}{\lambda_{e1}} + \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} + \frac{1}{\lambda_{e2}} + \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \quad (\text{eq. 22})$$

$$MTTF_{i20} = \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} + \frac{1}{\lambda_{e2}} + \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 2, 3, 11, 13 \quad (\text{eq. 23})$$

$$MTTF_{i20} = \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} + \frac{1}{\lambda_{e1}} + \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad \text{para } i = 10, 12 \quad (\text{eq. 24})$$

$$MTTF_{i20} = \frac{1}{\lambda_{p1}} + \frac{1}{\lambda_{e2}} + \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 14, 17 \quad (\text{eq. 25})$$

$$MTTF_{i20} = \frac{1}{\lambda_{p2}} + \frac{1}{\lambda_{e1}} + \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad \text{para } i = 15, 16 \quad (\text{eq. 26})$$

$$MTTF_{i18} = \frac{1}{\lambda_{e2}} + \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 4, 6, 8 \quad (\text{eq. 27})$$

$$MTTF_{i18} = \frac{1}{\lambda_{g2}} + \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 10, 12 \quad (\text{eq. 28})$$

$$MTTF_{i18} = \frac{1}{\lambda_{p2}} \quad \text{para } i = 14, 16 \quad (\text{eq. 29})$$

$$MTTF_{i19} = \frac{1}{\lambda_{e1}} + \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad \text{para } i = 5, 7, 9 \quad (\text{eq. 30})$$

$$MTTF_{i19} = \frac{1}{\lambda_{g1}} + \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad \text{para } i = 11, 13 \quad (\text{eq. 31})$$

$$MTTF_{i19} = \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad \text{para } i = 15, 17 \quad (\text{eq. 32})$$

Considerando um sistema composto por um único componente no qual os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Supondo-se que este componente tenha falhado durante um dado intervalo entre inspeções (τ) e que este intervalo é relativamente pequeno quando comparado com o tempo esperado até a falha, o *downtime* esperado será aproximadamente:

$$E[\rho_{ij}] = \frac{\tau}{2} + MTTR \quad \text{para } \tau \leq E[TTF] \quad (\text{eq. 33})$$

Considerando um sistema composto por dois componentes nos quais os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial. Supondo-se que estes componentes tenham falhado durante um dado intervalo entre inspeções (τ) e que este intervalo é relativamente pequeno

quando comparado com o tempo esperado até a falha, o tempo esperado de *downtime* será aproximadamente:

$$E[\rho_{ij}] = \frac{\tau}{3} + MTTR \quad \text{para } \tau \leq E[TTF] \quad (\text{eq. 34})$$

As Equações 33 e 34 são aproximações apropriadas quando o intervalo entre inspeções é menor que o tempo esperado até a falha do sistema, como é usual na prática industrial. Relações exatas poderiam ser derivadas com base em distribuições condicionais truncadas. Contudo, a aproximação é muito útil, dada a complexidade do modelo de taxas de custo. Uma melhor explicação é apresentada no próximo parágrafo.

As aproximações nas Equações 33 e 34 são baseadas em três observações: (1) todas as transições que possuem *downtime* estão associadas com uma falha do sistema, sendo que o *downtime* esperado é condicional à ocorrência de uma falha (todos os componentes em operação no início do intervalo falham), (2) a ocorrência de falhas para um sistema em *cold standby* é um processo de Poisson homogêneo com taxa λ_i até a falha final e (3) a probabilidade de ter mais falhas para um processo de Poisson com taxa λ_i é pequena para um intervalo menor que o tempo esperado até a falha do sistema. Combinando-se a primeira e a terceira observações, é possível aproximar a ocorrência de exatamente n falhas no intervalo, onde n é o número de componentes em funcionamento no início do intervalo entre inspeções. Para um processo de Poisson, as falhas eventuais distribuem-se uniformemente em um intervalo fixo. Assim, para $n = 1$, o tempo esperado até a falha é $\tau/2$ e o tempo remanescente somado ao tempo médio de reparo de um componente é o *downtime*, para $n = 2$, os tempos esperados até a falha são $\tau/3$ e $2\tau/3$. No entanto, não há falha do sistema até a segunda falha, sendo que o *downtime* esperado é $\tau/3 + MTTR$. Quando os intervalos entre inspeções se tornam maiores que o tempo esperado até a falha, esta aproximação não é apropriada, pois a terceira observação não se sustenta.

Conforme o intervalo entre inspeções aumenta, o tempo esperado de *downtime* torna-se maior que o *MTTF* do sistema, sendo que as estimativas definidas anteriormente não são aplicáveis. Para $\tau > MTTF_{ij}$, o *downtime* esperado pode ser aproximado usando $(\tau - MTTF_{ij}) + MTTR$. Como resultado, o *downtime* esperado para todos os casos pode ser aproximado como:

$$E[\rho_{ij}] = \max\{(\tau - MTTF_{ij}), \tau/(n + 1)\} + MTTR \quad (\text{eq. 35})$$

Onde n é o número de componentes do sistema que estão em estado operacional no início do intervalo entre inspeções. As matrizes de custos para cada modelo são apresentadas a seguir. Os custos nas matrizes representam os custos incorridos para cada transição entre dois estados no espaço de estados do respectivo sistema. Para os dois modelos, toda vez que uma inspeção é realizada, custos de inspeção são adicionados. Em toda inspeção que repara um componente em falha, custos de reparo são contabilizados. Toda vez que o sistema falha, custos de inspeção, reparo do sistema e *downtime* são totalizados. As matrizes C_1 e C_2 apresentam os custos para os Sistemas I e II com dois componentes, respectivamente.

$C_1 =$

$$\begin{bmatrix} C_i & 0 & C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{08} \\ 0 & C_i & 0 & C_i & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{18} \\ 0 & C_i + C_{r_1} & 0 & C_i + C_{r_1} & C_i & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{26} & 0 & C_i + C_{r_1} + C_s + C_p \rho_{28} \\ C_i + C_{r_2} & 0 & C_i + C_{r_2} & 0 & 0 & C_i & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{37} & C_i + C_{r_2} + C_s + C_p \rho_{38} \\ 0 & C_i + C_{r_1} & 0 & C_i + C_{r_1} & C_i & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{46} & 0 & C_i + C_{r_1} + C_s + C_p \rho_{48} \\ C_i + C_{r_2} & 0 & C_i + C_{r_2} & 0 & 0 & C_i & 0 & C_i + C_s + C_p \rho_{57} & C_i + C_{r_2} + C_s + C_p \rho_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + C_s + C_p \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + C_s + C_p \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_i + C_s + C_p \tau \end{bmatrix}$$

Após a determinação dos custos envolvidos em cada sistema redundante sujeito a inspeções periódicas, é necessário combinar estes custos para determinar o custo total no ciclo. Este custo total pode ser calculado utilizando-se as propriedades das Cadeias de Markov com tempo discreto. De acordo com estas propriedades, o número esperado de vezes que o processo passa no estado transiente p_j , dado que ele começou no estado transiente p_i , é representado pela matriz N , onde Q é a parte transiente da matriz P (Equação 36) (ROSS, 2003):

$$N = (I - Q)^{-1} \quad (\text{eq. 36})$$

Visto que a soma de cada linha em N revela o número esperado de passos até a absorção, dado que a cadeia iniciou no i ésimo estado de não absorção, e usando as probabilidades e custos de cada transição, o custo esperado no ciclo pode ser aproximado pela Equação 37:

$$E[\text{custo no ciclo}] = n_{oj}(\sum_j p_{ij} c_{ij}) \quad (\text{eq. 37})$$

$C_2 =$

C_i	0	C_i	0	C_i	0	C_i	0	0	0	C_i	0	...
0	C_i	0	C_i	0	C_i	0	C_i	0	0	0	C_i	...
0	0	C_i	0	C_i	0	C_i	0	0	0	C_i	0	...
0	0	0	C_i	0	C_i	0	C_i	0	0	0	C_i	...
0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$...						
$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	...						
0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$...						
$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	...						
0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$...						
$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	...						
0	0	0	$C_i + C_{r_1}$	0	$C_i + C_{r_1}$	0	$C_i + C_{r_1}$	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$...
0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	$C_i + C_{r_2}$	0	$C_i + C_{r_2}$	0	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	...
0	0	0	$C_i + C_{r_1}$	0	$C_i + C_{r_1}$	0	$C_i + C_{r_1}$	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$...
0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	$C_i + C_{r_2}$	0	$C_i + C_{r_2}$	0	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	...
0	0	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$	0	$C_i + C_{r_1}$	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$...
0	0	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	$C_i + C_{r_2}$	0	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	C_i	0	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{020}$		
...	0	0	0	C_i	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{120}$		
...	0	0	C_i	0	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{220}$		
...	0	0	0	C_i	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{320}$		
...	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{418}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{420}$		
...	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{519}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{519}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{520}$		
...	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{618}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{620}$		
...	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{719}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{719}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{720}$		
...	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{818}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{820}$		
...	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{919}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{919}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{920}$		
...	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1018}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{1020}$		
...	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1119}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{1119}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{1120}$		
...	C_i	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1218}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{1220}$		
...	0	C_i	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1319}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{1319}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{1320}$		
...	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1418}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{1420}$		
...	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1519}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{1519}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{1520}$		
...	0	0	0	$C_i + C_{r_1}$	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1618}$	0	0	$C_i + C_{r_1} + C_s + C_p\rho_{1620}$		
...	0	0	$C_i + C_{r_2}$	0	0	C_i	0	$C_i + C_s + C_p\rho_{1719}$	$C_i + C_s + C_p\rho_{1719}$	$C_i + C_{r_2} + C_s + C_p\rho_{1720}$		
...	0	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\tau$	0	0	0		
...	0	0	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\tau$	$C_i + C_s + C_p\tau$	0		
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$C_i + C_s + C_p\tau$		

A duração do ciclo depende de quantas vezes o sistema vai do estado 0 para os outros estados e da duração do intervalo entre inspeções. Assim, a duração esperada do ciclo pode ser aproximada pela Equação 38:

$$E[\text{duração do ciclo}] = (\sum_j n_{0j})\tau \quad (\text{eq. 38})$$

Baseando-se nas Equações 37 e 38, o custo total como uma função de τ pode ser escrito pela Equação 39:

$$CT(\tau) = \frac{n_{0j}(\sum_j p_{ij}c_{ij})}{(\sum_j n_{0j})\tau} \quad (\text{eq. 39})$$

Exemplos numéricos são apresentados para a otimização do intervalo entre inspeções buscando-se minimizar o custo total. O custo total na Equação 39 pode ser minimizado, e o intervalo ótimo entre inspeções pode ser estabelecido determinando-se valores para os custos de inspeção, reparo de componente, *downtime* e reparo de sistema e, conseqüentemente, o intervalo entre inspeções resulta a única variável da equação. É possível encontrar o custo total mínimo através de pesquisa numérica.

Algoritmos genéticos poderiam ser utilizados para produzir soluções para este problema, mas essa abordagem não foi necessária. Este problema possui um modelo e uma função objetivo de custos complexa, mas sua otimização propriamente dita é realizada para somente uma variável de decisão: intervalo entre inspeções. Conseqüentemente, a pesquisa numérica unidimensional é a solução mais eficiente considerando esforço computacional. À medida que este modelo for estendido para tratar de problemas multi-variáveis pode ser necessário o uso de algoritmos genéticos.

5.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplos numéricos para cada modelo estudado são apresentados e discutidos a seguir. Devido ao propósito de comparação, parâmetros idênticos de custos e reparo foram utilizados para os dois modelos. Parâmetros equivalentes de tempos médio até a falha foram considerados. O *MTTF* de cada componente do Sistema I, sem degradação, $(\frac{1}{\lambda_1} \text{ e } \frac{1}{\lambda_2})$ é equivalente à soma dos tempos médios entre as transições do estado excelente para o bom, do bom para o estado precário e finalmente para a falha do Sistema II $(\frac{1}{\lambda_{1e}} + \frac{1}{\lambda_{1g}} + \frac{1}{\lambda_{1p}} \text{ e } \frac{1}{\lambda_{2e}} + \frac{1}{\lambda_{2g}} + \frac{1}{\lambda_{2p}})$, supondo que o sistema não sofra inspeção e reparo. Os valores dos parâmetros foram determinados de forma a representar possíveis situações de sistemas reais. Apesar de serem semelhantes, os componentes podem apresentar taxas de falha ligeiramente diferentes entre si. Os parâmetros de custos utilizados possuem relações que representam situações reais onde os custos de inspeção e reparo

de componentes são consideravelmente inferiores aos custos de reparo do sistema e *downtime*. As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam as curvas de custos totais por mês e o intervalo ótimo entre inspeções em dias calculados para os Sistemas I e II, respectivamente. Os parâmetros utilizados foram:

- Sistema I** - Parâmetros diferentes de distribuição exponencial para os tempos até a falha para cada componente: $\lambda_1=0,005$, $\lambda_2=0,006$ (estes parâmetros representam *MTTF* de 200 e 166,67 dias, respectivamente).
- Sistema II** - Parâmetros diferentes de distribuição exponencial para os tempos de transição de estado de degradação e falha para cada componente: $\lambda_{1e}=0,02$, $\lambda_{1g}=0,01$, $\lambda_{1p}=0,021$, $\lambda_{2e}=0,025$, $\lambda_{2g}=0,015$ e $\lambda_{2p}=0,026$ (estes parâmetros representam *MTTF* de 200 e 166,67 dias, respectivamente).
- Parâmetros iguais de distribuição exponencial para os tempos de reparo: α_1 e $\alpha_2 = 0,05$.
- $C_i=10.000$ e $C_r=30.000$: os custos de reparo de componente são superiores aos custos de inspeção.
- $C_s=100.000$ e $C_p=100.000$ /unidade por dia: o custo de *downtime* é substancialmente maior que os outros custos. Isso reproduz o que usualmente é observado na prática, onde a indisponibilidade implica em custos substancialmente maiores que aqueles associados à inspeção e reparo.

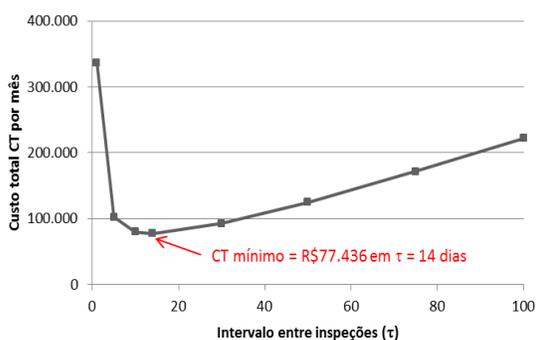


Figura 5.3 – Exemplo numérico para Sistema I

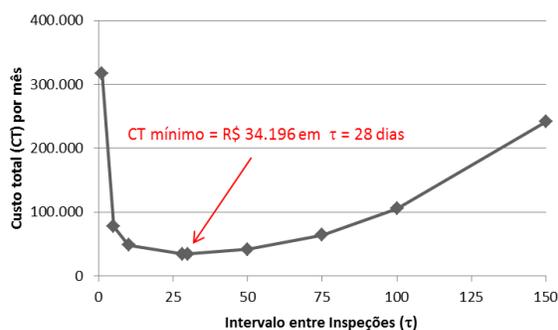


Figura 5.4 – Exemplo numérico para Sistema II

A Figura 5.3 mostra que o intervalo entre inspeções periódicas de 14 dias minimiza os custos totais para o Sistema I. Da mesma forma, a Figura 5.4 mostra que o intervalo ótimo entre inspeções periódicas para o Sistema II é de 28 dias. Observa-se que, apesar de possuírem *MTTF*s

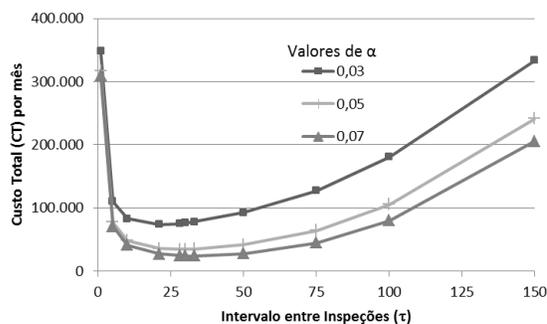
equivalentes, o valor ótimo do intervalo entre inspeções é bastante diferente entre os dois sistemas. O sistema com componentes onde a degradação gradual não pode ser identificada através de inspeções possuem um custo total mínimo maior e exige intervalo entre inspeções menores que o sistema onde o nível de degradação pode ser detectado. Isto se deve ao fato de que no Sistema II é possível identificar um nível avançado de degradação e fazer o reparo antes que a falha aconteça, o que reduz os custos devidos à falha do sistema e *downtime*.

Observa-se que o modelo desenvolvido para otimização de sistemas binários não é eficaz para sistemas multiestado. A análise de sistemas multiestado como se tivessem comportamento semelhante a sistemas binários leva a redução desnecessária dos intervalos entre inspeções e consequente aumento dos custos totais.

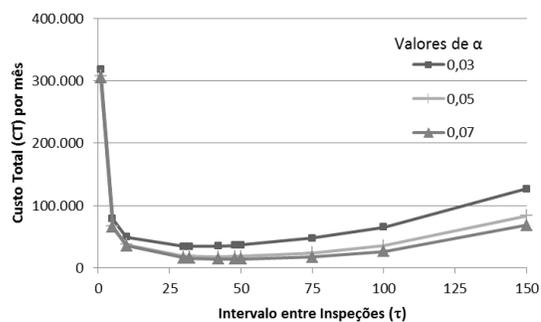
5.7 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma análise de sensibilidade foi realizada para avaliar o efeito dos diferentes parâmetros (λ_{1e} , λ_{1g} , λ_{1p} , λ_{2e} , λ_{2g} , λ_{2p} , α_1 , α_2 , C_i , C_r , C_s e C_p) sobre o *CT* mínimo do Sistema II. A Figura 5.5 apresenta seis gráficos. As Figuras 5.5a e 5.5b apresentam o efeito de α sobre sistemas com diferentes parâmetros λ_{1e} , λ_{1g} , λ_{1p} , λ_{2e} , λ_{2g} , λ_{2p} . As Figuras 5.5c, 5.5d, 5.5e e 5.5f apresentam os efeitos de C_i , C_r , C_s e C_p , respectivamente, sobre os custos totais e o intervalo ótimo entre inspeções do sistema.

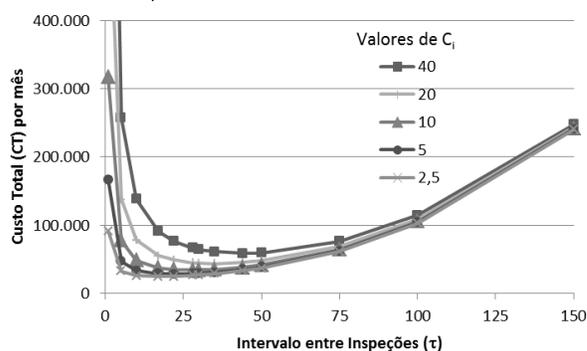
De acordo com a Figura 5.5a, taxas de reparo (α) maiores aumentam o *CT* mínimo e os intervalos ótimos entre inspeções se mantem aproximadamente iguais. A Figura 5.5b, quando comparada com a Figura 5.5a, mostra que reduções nas taxas de degradação e falha reduzem os custos totais do sistema. A Figura 5.5c demonstra que aumentos nos custos de inspeção (C_i) geram aumentos no *CT* mínimo e no intervalo ótimo entre inspeções. A Figura 5.5d demonstra que custos de reparo (C_r) tem um efeito pequeno em *CT* e que este efeito não muda ao longo de τ . A Figura 5e mostra que os custos de reparo do sistema (C_s) também possuem um efeito pequeno em *CT*. Finalmente, a Figura 5.5f apresenta o efeito do custo de *downtime* (C_p) no *CT* mínimo. O custo de *downtime* tem o maior efeito no *CT* mínimo para este exemplo e este efeito aumenta com o aumento de τ .



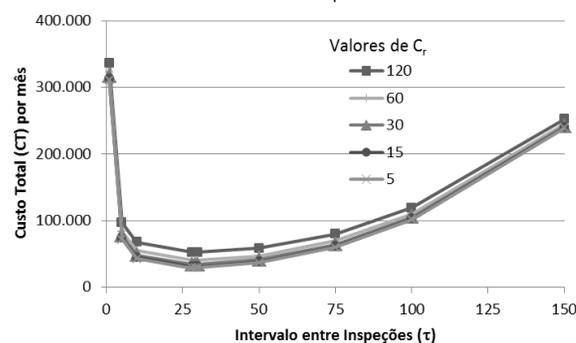
a) Efeito de α no CT mínimo para: $\lambda_{1e}=0,02$, $\lambda_{1g}=0,01$, $\lambda_{1p}=0,021$, $\lambda_{2e}=0,025$, $\lambda_{2g}=0,015$, $\lambda_{2p}=0,026$



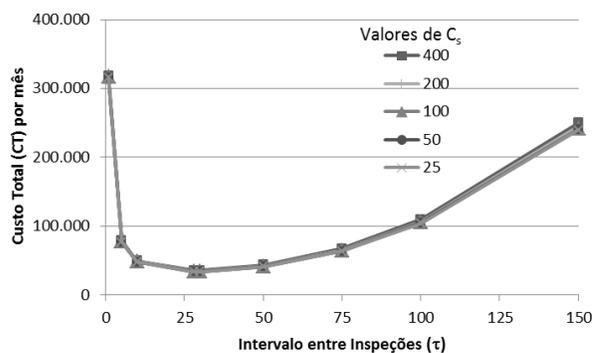
b) Efeito de α no CT mínimo para: $\lambda_{1e}=0,015$, $\lambda_{1g}=0,005$, $\lambda_{1p}=0,016$, $\lambda_{2e}=0,02$, $\lambda_{2g}=0,01$, $\lambda_{2p}=0,021$



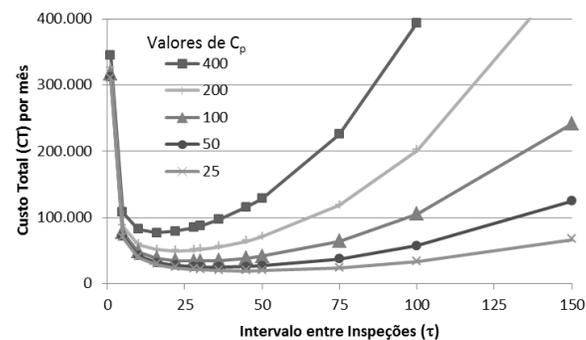
c) Efeito de C_i no CT mínimo



d) Efeito de C_r no CT mínimo



e) Efeito de C_s no CT mínimo



f) Efeito de C_p no CT mínimo

Figura 5.5 – Análise de sensibilidade dos efeitos de λ_{1e} , λ_{1g} , λ_{1p} , λ_{2e} , λ_{2g} , λ_{2p} , α_1 , α_2 , C_i , C_r , C_s e C_p para $\alpha_1 = \alpha_2$

5.8 CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um modelo para determinar o intervalo ótimo entre inspeções periódicas para sistemas multiestado com redundância em *cold standby*, utilizando Cadeias de Markov com tempo discreto.

Sistemas multiestado (MSS), onde diferentes estados de degradação são identificados, permitem capturar com maior detalhe o envelhecimento dos componentes, sendo mais realistas em muitas

situações do que abordagens que consideram os sistemas como binários (em funcionamento ou em falha). Quando o monitoramento contínuo não é possível, inspeções periódicas são necessárias. Durante essas inspeções, o estado dos componentes é verificado e o reparo é iniciado sempre que um estado de falha ou degradação avançada é detectado. O intervalo entre inspeções deve ser otimizado para maximizar a disponibilidade ao mesmo tempo em que minimiza custos. Inspeções frequentes aumentam a disponibilidade do sistema, mas geram custos maiores em termos de manutenção preventiva. Por outro lado, longos períodos entre inspeções reduzem os custos associados a inspeções, mas aumentam os custos associados com manutenção corretiva, *downtime* e mesmo acidentes de segurança. O estabelecimento do intervalo ótimo entre inspeções é importante para assegurar uma disponibilidade do sistema satisfatória juntamente com o menor custo possível.

O método apresentado neste artigo usa Cadeias de Markov com tempo discreto para definir tanto as probabilidades de transição entre os estados do sistema, como os custos relacionados a cada estado. Para otimizar o intervalo entre inspeções, o custo total foi modelado e minimizado utilizando as propriedades das Cadeias de Markov e técnicas de pesquisa numérica. O custo mínimo e o melhor intervalo entre inspeções são obtidos levando em consideração os custos de indisponibilidade (*downtime*) e manutenção (inspeção, reparo de componente e reparo do sistema).

Dois modelos de sistemas redundantes em *cold standby* são analisados e exemplos numéricos para sistemas compostos por dois componentes são apresentados: *i*) Sistema I – Sistema com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes (componentes com estados binários); *ii*) Sistema II – Sistema multiestado com redundância inativa em *cold standby* e com reparo de componentes.

A principal vantagem do modelo proposto neste artigo é a análise de sistemas em *cold standby* compostos por componentes que possuem diferentes níveis de degradação e onde o estado desses componentes pode ser determinado apenas através de inspeções periódicas. Este tipo de configuração é utilizada, principalmente, em sistemas que não podem ser monitorados a distância e estão situados em locais remotos de difícil acesso. A determinação do intervalo ótimo entre inspeções, levando em consideração os custos de inspeção juntamente com os custos

relacionados à indisponibilidade do sistema e acidentes, é fundamental para a garantia da confiabilidade desejada com o menor custo total possível.

Como direção para pesquisas futuras, o modelo apresentado neste artigo pode ser estendido para determinar o intervalo ótimo entre inspeções para sistemas multiestado com redundâncias ativas e inativas compostos por n componentes. Outra opção seria a determinação do número ótimo de componentes para um sistema redundante multiestado específico que possui componentes idênticos, visando alcançar as metas de confiabilidade estabelecidas. Além disso, a consideração do custo de reparo de componentes como uma função do tempo de reparo seria um aprimoramento interessante para o modelo desenvolvido.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e o Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo fornecimento de bolsas de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Alebrant Mendes A, Coit DW, Ribeiro JLD. Establishment of the optimal time interval between periodic inspections for redundant systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2014, 131:148–165.
- Barlow R, Wu A. Coherent systems with multi-state elements. *Math. Operation Research* 1978, 3:275-281.
- Chryssaphinou O, Limnios N, Malefaki S. Multi-state reliability systems under discrete time semi-markovian hypothesis. *IEEE Transactions on Reliability* 2011, 60(1):80-87.
- El-Neveih E, Proschan F, Setharaman J. Multi-state coherent systems. *J. Applied Probability* 1978, 15:675-688.
- Gupta R, Goel R, Chaudhary A. Analysis of a two-unit standby system with fixed allowed down time and truncated exponential lifetime distributions. *Reliability Engineering and System Safety* 1994, 44:119-24.
- Hsieh C, Chiu K. Optimal maintenance policy in a multistate deteriorating standby system. *European Journal of Operational Research* 2002, 141:689-698.
- Kaio N, Osaki S. Analytical considerations on inspection policies In: Osaki S, Hatoyama Y, ed. *Stochastic models in reliability theory*. Heidelberg: Springer-Verlag; 1984a, pp 53-71.

- Kaio N, Osaki S. Some remarks on optimum inspection policies, *IEEE Transactions on Reliability* 1984b; R-33:277-285.
- Karpinski J. A Multistate System under an Inspection and Repair Policy. *IEEE Transactions on Reliability* 1986, R-35(1):76-77.
- Le MD, Tan CM. Optimal maintenance strategy of deteriorating system under imperfect maintenance and inspection using mixed inspection scheduling. *Reliability Engineering and System Safety* 2013, 113:21-29.
- Levitin G, Lisnianski A. Joint redundancy and maintenance optimization for multistate series-parallel systems. *Reliability Engineering and System Safety* 1999, 64:33-42.
- Levitin G, Lisnianski A. Optimization of imperfect preventive maintenance for multi-state systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2000, 67:193-203.
- Lisnianski A, Ding Y. Redundancy analysis for repairable multi-state system by using combined stochastic processes methods and universal generating function technique. *Reliability Engineering and Systems Safety* 2009, 94:1788–1795.
- Liu Y, Huang H, Wang Z, Li Y, Yang Y. A Joint Redundancy and Imperfect Maintenance Strategy Optimization for Multi-State Systems. *IEEE Transactions on Reliability* 2013, 62(2):368-378.
- Liu Y, Huang H. Optimal Replacement Policy for Multi-State System Under Imperfect Maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 2010, 59(3):483-495.
- Mine H, Kawai H. An Optimal Maintenance Policy for a 2-Unit Parallel System with Degraded States. *IEEE Transactions on Reliability* 1974, R-23(2):81-86.
- Mokaddis GS, Labib SW, Ahmed AM. Analysis of a two-unit warm standby system subject to degradation. *Microelectron. Reliab.* 1997, 37(4):641-647.
- Montoro-Cazorla D, Pérez-Ocón R. A deteriorating two-system with two repair modes and sojourn times phase-type distributed. *Reliability Engineering and System Safety* 2006, 91: 1–9.
- Munford A, Shanani A. An inspection policy for the Weibull case. *Operational Research Quarterly* 1973; 24:453-458.
- Nourelfath M, Châtelet E, Nahas N. Joint redundancy and imperfect preventive maintenance optimization for series-parallel multi-state degraded systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012, 103:51–60.
- Ross SM. Introduction to probability models. Academic Press, New York, 2003.
- Sheu S, Zhang ZG. An Optimal Age Replacement Policy for Multi-State Systems. *IEEE Transactions on Reliability* 2013, 62(3):722-735.

Soro IW, Nourelfath M, Ait-Kadi D. Performance evaluation of multi-state degraded systems with minimal repairs and imperfect preventive maintenance. *Reliability Engineering and System Safety* 2010, 95:65-69.

Tian Z, Levitin G, Zuo MJ. A joint reliability–redundancy optimization approach for multi-state series–parallel systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2009, 94:1568–1576.

Xu M, Chen T, Yang X. Optimal replacement policy for safety-related multi-component multi-state systems. *Reliability Engineering and System Safety* 2012, 99:87-95.

Zhang YL, Yam RCM, Zuo MJ. A bivariate optimal replacement policy for a multistate repairable system. *Reliability Engineering and System Safety* 2007, 92:535-542.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta as discussões finais sobre os estudos realizados, as contribuições acadêmicas e práticas e recomendações para pesquisas futuras.

6.1 DISCUSSÃO FINAL

Apesar de serem bastante empregados em processos que requerem altos níveis de confiabilidade nas indústrias, sistemas redundantes com inspeção periódica ainda são pouco estudados na literatura. Para este tipo de sistema, a determinação do intervalo ótimo entre inspeções é fundamental para garantir a confiabilidade desejada com o menor custo possível. Durante estas inspeções, falhas são descobertas e componentes são reparados, evitando assim que o sistema como um todo falhe. Contudo, é necessário o balanceamento entre custos de inspeção e reparo e custos de *downtime* e falha do sistema. Desta forma, esta tese teve como objetivo a definição e otimização de intervalos de inspeções periódicas em sistemas redundantes, considerando os custos envolvidos.

Para atender este objetivo, inicialmente, buscou-se identificar os métodos de análise de confiabilidade e gestão da manutenção utilizados em grandes empresas que empregam sistemas redundantes. Na sequência, foi determinado um método simples de aplicação prática para a determinação do intervalo mais apropriado entre inspeções periódicas. Em seguida, modelos mais complexos que buscam a minimização dos custos envolvidos foram desenvolvidos para otimizar o intervalo entre inspeções periódicas de três tipos de sistemas redundantes: *i*) com redundância ativa e inativa e considerando reparo imediato; *ii*) com redundância em *cold standby* e considerando o tempo de reparo e *iii*) com redundância em *cold standby*, considerando o tempo de reparo e a degradação dos componentes.

6.2 CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS

A principal contribuição acadêmica desta tese é o estudo e otimização do intervalo entre inspeções periódicas de sistemas redundantes considerando os custos envolvidos. Esse estudo justifica-se uma vez que estudos com sistemas redundantes nos quais a análise do estado dos componentes somente pode ser realizada durante inspeções periódicas ainda são escassos na literatura.

Ainda que muitos pesquisadores tenham investigado a confiabilidade de sistemas redundantes que sofram ou não degradação e estão sujeitos à manutenção, somente alguns deles analisam sistemas com inspeções periódicas. Alguns autores desenvolveram modelos para sistemas com substituição preventiva, sem inspeção, outros analisaram sistemas que operam com monitoramento contínuo, supondo que o reparo inicia imediatamente após a falha do componente e que somente o componente em funcionamento é sujeito a manutenções periódicas. Além disso, trabalhos sobre sistemas com inspeções periódicas podem ser encontrados para sistemas que não possuem redundâncias, o que não reflete o caso em estudo.

Outra contribuição acadêmica desta tese é a inclusão dos custos relacionados com a operação e manutenção de sistemas redundantes no modelo para a otimização do intervalo entre inspeções periódicas, principalmente no que se refere à inclusão de custos de indisponibilidade (*downtime*). A grande maioria dos artigos não analisa os custos relacionados com a operação e manutenção de sistemas redundantes. O principal objetivo desses artigos é a definição da confiabilidade e disponibilidade dos sistemas. Alguns artigos analisam os custos envolvidos na manutenção, porém consideram somente os custos de aquisição, manutenção preventiva e corretiva e custos de colocação de pedidos.

6.3 CONTRIBUIÇÕES PRÁTICAS

A redução de custos nas empresas, mantendo ou melhorando os níveis de confiabilidade, é essencial para a sua competitividade no mercado. O uso dos diferentes modelos desenvolvidos nesta tese para a otimização dos intervalos entre inspeções periódicas de diferentes sistemas pode auxiliar as empresas nesta tarefa. Esses modelos garantem a confiabilidade do processo sem comprometer a sua atratividade financeira.

O levantamento inicial realizado em três empresas de grande porte revela que, apesar de empregarem redundâncias e coletarem alguns dados de manutenções realizadas, a manutenção dos sistemas redundantes ainda é baseada na experiência do pessoal que planeja e executa manutenções. É sabido que a adição de redundâncias melhora a confiabilidade do sistema e que esses sistemas possuem confiabilidade relativamente alta, porém o nível quantitativo de confiabilidade do sistema e da planta é totalmente ignorando.

A fim de auxiliar as empresas na determinação dessa confiabilidade de forma simples, sem a necessidade de integrações e modelos matemáticos e estatísticos mais complexos, um modelo

baseado no tempo de exposição dos componentes foi desenvolvido. Os gráficos e tabelas apresentados permitem a determinação do intervalo entre inspeções mais adequado, dada uma confiabilidade meta e o número de componentes em *standby* disponível. Estas equações podem ser aplicadas facilmente na prática sem a necessidade de um especialista.

Para empresas que se encontram em um nível mais avançado em termos de confiabilidade ou possuem recursos para contratar um especialista, modelos mais complexos envolvendo custos foram desenvolvidos utilizando-se Cadeias de Markov com tempo discreto. A fim de ampliar a abrangência prática desse modelo, foram analisados sistemas redundantes com diferentes características: redundância ativa e inativa; com reparo e sem reparo de componente; considerando reparo imediato e não imediato; e componentes que sofrem ou não degradação.

6.4 RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Para pesquisas futuras recomenda-se, inicialmente, a realização de um levantamento, a nível nacional, do grau de desenvolvimento das empresas em termos da análise da confiabilidade de sistemas redundantes. Este levantamento poderia direcionar o desenvolvimento de modelos que pudessem reduzir a lacuna existente entre a prática industrial e a academia.

Além disso, os modelos desenvolvidos poderiam ser aperfeiçoados para serem ainda mais representativos de situações reais através da inclusão de alguns fatores relevantes: *i*) confiabilidade do chaveamento que controla a entrada em operação do componente em *standby*; *ii*) manutenção imperfeita, onde o *TBF* esperado após a manutenção pode ser diferente do *TBF* característico do componente na condição de novo; *iii*) fatores que possam influenciar a confiabilidade dos componentes em *cold standby*, tais como verificações e manutenções periódicas realizadas nesses componentes, com o intuito de evitar que longos períodos de inatividade comprometam sua operação quando requerida.

Vale ressaltar que os modelos desenvolvidos neste trabalho estudaram situações onde os tempos até a falha seguem uma distribuição exponencial, a fim de possibilitar o uso do método de Cadeias de Markov e facilitar a solução de equações integrais. A distribuição exponencial pode representar a distribuição de probabilidade dos tempos até a falha de sistemas predominantemente eletrônicos ou que sofram manutenções que recuperem o sistema a condição inicial. Contudo, há muitas situações onde a distribuição exponencial não é adequada. Desta forma, recomenda-se o desenvolvimento de modelos que permitam a análise de sistemas que

possuam tempos até a falha que seguem diferentes distribuições de probabilidade como, por exemplo, a distribuição de Weibull.

APÊNDICE 1

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO ENTRE ESTADOS PARA O SISTEMA MULTIESTADO COM REDUNDÂNCIA INATIVA EM *COLD STANDBY* E COM REPARO DE COMPONENTES REFERENTE AO ARTIGO 4 DESTA TESE DE DOUTORADO

- 1) Probabilidade do componente 1 continuar em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{T_{1e} > \tau\} \\ &= e^{-\lambda_{1e}\tau} \end{aligned}$$

- 2) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{02} &= P\{T_{1e} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e}\} P\{T_{1e} < \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u)) f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1g}(\tau-u)}) \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} du \end{aligned}$$

- 3) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{04} &= P\{T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - u \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v)) f_{T_{1g}}(v) f_{1e}(u) dv du \end{aligned}$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dv du$$

- 4) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar e do componente 2 estar funcionando em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{06} &= P\{T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{1p} < \tau - u - v \cap T_{2e} > \tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2e} > \tau - u - v - w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{T_{2e}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (e^{-\lambda_{2e}(\tau-u-v-w)}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dw dv du \end{aligned}$$

- 5) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar até o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{010} &= P\{T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} + T_{2e} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2e} < \tau - u - v - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{T_{2e} < \tau - u - v - w \cap T_{2g} > \tau - u - v - w - T_{2e} | T_{2e} = z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \{T_{2g} > \\
&\tau - u - v - w - z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u - v - w - \\
&z)) f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (e^{-\lambda_{2g}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

6) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar até o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{014} &= P\{T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - \\
&T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - \\
&T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - v - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - \\
&v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{T_{2g} < \tau - u - v - w - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - \\
&v - w - T_{2e} | T_{2e} = z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{T_{2g} < \tau - u - v - w - z \cap T_{2p} > \tau - \\
&u - v - w - z - T_{2g} | T_{2g} = y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{T_{2p} > \tau - u - v - w - z - \\
&y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z - \\
&y)) f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z-y)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}y}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w}) \\
&(\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

7) Probabilidade dos componentes 1 e 2 se degradarem e falharem durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{020} &= p_{120} = P\{T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = \\
&w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - w - T_{2e} | T_{2e} = \\
&z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{T_{2p} < \tau - u - v - w - z - \\
&T_{2g} | T_{2g} = y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{T_{2p} < \tau - u - v - w - z - \\
&y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z - \\
&y) f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - \\
&e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z-y)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}y}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w}) \\
&(\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

8) Probabilidade do componente 2 continuar em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= P\{T_{2e} > \tau\} \\
&= e^{-\lambda_{2e}\tau}
\end{aligned}$$

- 9) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
 p_{13} &= P\{T_{2e} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
 &= \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e}\} P\{T_{2e} < \tau\} \\
 &= \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u)) f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2g}(\tau-u)}) \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} du
 \end{aligned}$$

- 10) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
 p_{15} &= P\{T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
 &= \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - u \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v)) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dv du \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dv du
 \end{aligned}$$

- 11) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar e do componente 1 entrar em funcionamento no estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
 p_{17} &= P\{T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau\} \\
 &= \int_0^\tau P\{T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
 &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2p} < \tau - u - v \cap T_{1e} > \tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \mathbb{P}\{T_{1e} > \tau - u - v - w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{T_{1e}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (e^{-\lambda_{1e}(\tau-u-v-w)}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dw dv du
\end{aligned}$$

12) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{111} &= \mathbb{P}\{T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \mathbb{P}\{T_{2p} + T_{1e} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \mathbb{P}\{T_{1e} < \tau - u - v - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \mathbb{P}\{T_{1e} < \tau - u - v - w \cap T_{1g} > \tau - u - v - w - T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \mathbb{P}\{T_{1g} > \tau - u - v - w - z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u - v - w - z)) f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (e^{-\lambda_{1g}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

13) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$p_{115} = \mathbb{P}\{T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - \\
&T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \mathbb{P}\{T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - \\
&T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \mathbb{P}\{T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - v - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - \\
&v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \mathbb{P}\{T_{1g} < \tau - u - v - w - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - \\
&v - w - T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} \mathbb{P}\{T_{1g} < \tau - u - v - w - z \cap T_{1p} > \tau - \\
&u - v - w - z - T_{1g} | T_{1g} = y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} \mathbb{P}\{T_{1p} > \tau - u - v - w - z - \\
&y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w - z - \\
&y)) f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z-y)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}y}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w}) \\
&(\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

14) Probabilidade do componente 1 continuar em estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{22} &= \mathbb{P}\{T_{1g} > \tau\} \\
&= e^{-\lambda_{1g}\tau}
\end{aligned}$$

15) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{24} &= \mathbb{P}\{T_{1g} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{1p} > \tau - T_{1g}\} \mathbb{P}\{T_{1g} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{1p} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u)) f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} du
\end{aligned}$$

16) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 2 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{26} &= P\{T_{1g} + T_{1p} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1p} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1p} < \tau - u \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau - u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2e} > \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2e} > \tau - u - v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{2e}}(\tau - u - v)) f_{T_{1p}}(v) f_{1g}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{2e}(\tau-u-v)}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u}) dv du
\end{aligned}$$

17) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{210} &= P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1p} + T_{2e} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2e} < \tau - u - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2e} < \tau - u - v \cap T_{2g} > \tau - u - v - T_{2e} | T_{2e} = \\
&w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2g} > \tau - u - v - w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (e^{-\lambda_{2g}(\tau-u-v-w)}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u}) dw dv du
\end{aligned}$$

18) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 2 entrar em operação e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{214} &= P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2g} < \tau - u - v - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - v - T_{2e} | T_{2e} = w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{T_{2g} < \tau - u - v - w \cap T_{2p} > \tau - u - v - w - T_{2g} | T_{2g} = z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{T_{2p} > \tau - u - v - w - z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z)) f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}z}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

19) Probabilidade dos componentes 1 e 2 se degradarem e falharem, dado que o componente 1 estava no estado bom de operação, durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{220} &= P\{T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - T_{2e} | T_{2e} = w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \mathbb{P}\{T_{2p} < \tau - u - v - w - T_{2g} | T_{2g} = z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \mathbb{P}\{T_{2p} < \tau - u - v - w - z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z) f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}z}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w}) (\lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

20) Probabilidade do componente 2 continuar em estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{33} &= \mathbb{P}\{T_{2g} > \tau\} \\
&= e^{-\lambda_{2g}\tau}
\end{aligned}$$

21) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{35} &= \mathbb{P}\{T_{2g} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{2p} > \tau - T_{2g}\} \mathbb{P}\{T_{2g} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau \mathbb{P}\{T_{2p} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u)) f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} du
\end{aligned}$$

22) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 1 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$p_{37} = \mathbb{P}\{T_{2g} + T_{2p} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \text{P}\{T_{2p} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{T_{2p} < \tau - u \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau - u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{T_{1e} > \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{T_{1e} > \tau - u - v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{1e}}(\tau - u - v)) f_{T_{2p}}(v) f_{T_{2g}}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{1e}(\tau-u-v)}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u}) dv du
\end{aligned}$$

23) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar até o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{311} &= \text{P}\{T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{T_{2p} + T_{1e} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{T_{1e} < \tau - u - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{T_{1e} < \tau - u - v \cap T_{1g} > \tau - u - v - T_{1e} | T_{1e} = w\} \\
&f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{T_{1g} > \tau - u - v - w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (e^{-\lambda_{1g}(\tau-u-v-w)}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u}) dw dv du
\end{aligned}$$

24) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar até o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{315} &= \text{P}\{T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} \\
&f_{T_{2g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{T_{1g} < \tau - u - v - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - v - T_{1e} | T_{1e} = w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \text{P}\{T_{1g} < \tau - u - v - w \cap T_{1p} > \tau - u - v - w - T_{1g} | T_{1g} = z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \text{P}\{T_{1p} > \tau - u - v - w - z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w - z)) f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}z}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w}) \\
&(\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

25) Probabilidade dos componentes 1 e 2 se degradarem e falharem, dado que o componente 2 estava no estado bom de operação, durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{320} &= \text{P}\{T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - v - T_{1e} | T_{1e} = w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \text{P}\{T_{1p} < \tau - u - v - w - T_{1g} | T_{1g} = z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \text{P}\{T_{1p} < \tau - u - v - w - z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{T_{1p}}(\tau-u-v-w-z) f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv \\
&f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - \\
&e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}z}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w}) (\lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u}) dz dw dv du
\end{aligned}$$

26) Probabilidade do componente 2 continuar em estado excelente de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{41} &= p_{61} = p_{81} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2e} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} P\{T_{2e} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) e^{-\lambda_{2e} \tau}
\end{aligned}$$

27) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{43} &= p_{63} = p_{83} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2e} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e}\} P\{T_{2e} < \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= F_{R_1}(\tau) \int_0^\tau (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u)) f_{T_{2e}}(u) du \\
&= (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2g}(\tau-u)}) \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} du
\end{aligned}$$

28) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{45} &= p_{65} = p_{85} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - u \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{R_1}(\tau) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v)) f_{T_{2g}}(v) f_{2e}(u) dv du \\
&= (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g} v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e} u}) dv du
\end{aligned}$$

29) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{47} &= p_{67} = p_{87} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u - v \cap T_{1e} > \tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1e} > \tau - u - v - w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_1}(u + v + w) (1 - F_{T_{1e}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - e^{-\alpha_1(u+v+w)}) e^{-\lambda_{1e}(\tau-u-v-w)} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g} v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e} u} dw dv du
\end{aligned}$$

30) Probabilidade do componente 2 continuar em estado excelente de operação e do componente 1 continuar em reparo o durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{48} &= p_{68} = p_{88} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2e} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} P\{T_{2e} > \tau\} \\
&= e^{-\alpha_1 \tau} e^{-\lambda_{2e} \tau}
\end{aligned}$$

31) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{411} &= p_{611} = p_{811} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau \cap T_{2e} + \\
&T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + \\
&T_{1g} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + \\
&T_{1g} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + T_{2p} \cap T_{1e} < \tau - u - v - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} > \\
&\tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1e} < \tau - u - v - w \cap T_{1g} > \\
&\tau - u - v - w - T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} > \tau - u - v - w - \\
&z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_1}(u + v + w) (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u - v - w - \\
&z)) f_{T_{1e}}(z) f_{T_{2p}}(w) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - \\
&e^{-\alpha_1(u+v+w)}) e^{-\lambda_{1g}(\tau-u-v-w-z)} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} dz dw dv du
\end{aligned}$$

32) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação e do componente 1 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{412} &= p_{612} = p_{812} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2e} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e}\} P\{T_{2e} < \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_1}(\tau)) \int_0^\tau (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u)) f_{T_{2e}}(u) du \\
&= (e^{-\alpha_1\tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2g}(\tau-u)}) \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} du
\end{aligned}$$

33) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{415} &= p_{615} = p_{815} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap \\
&T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} + \\
&T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - T_{2g} \cap T_{2p} + \\
&T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - v - T_{2p} \cap T_{1e} + \\
&T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - v - T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} < \tau - u - v - w - T_{1e} \cap \\
&T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - v - w - T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} < \tau - u - v - \\
&w - z \cap T_{1p} > \tau - u - v - w - z - T_{1g} | T_{1g} = \\
&y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1p} > \tau - u - v - \\
&w - z - y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{R_1}(u + v + w) (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v - \\
&w - z - y)) f_{T_{1g}}(y) f_{T_{1e}}(z) f_{T_{2p}}(w) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dy dz dw dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - e^{-\alpha_1(u+v+w)}) e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z-y)} \\
&\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}y} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

34) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação e do componente 1 continuar em reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{416} &= p_{616} = p_{816} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2g} < \tau - u \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u\} f_{T_{2e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{2p} > \tau - u - v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_1}(\tau)) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v)) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dv du \\
&= (e^{-\alpha_1 \tau}) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v}) (\lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u}) dv du
\end{aligned}$$

35) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 1 seja concluído:

$$\begin{aligned}
p_{418} &= p_{618} = p_{818} = P\{R_1 > T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 > T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 > u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 > u + v + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u - v | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 > u + v + w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{R_1}(u + v + w)) f_{T_{2p}}(w) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} e^{-\alpha_1(u+v+w)} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} dw dv du
\end{aligned}$$

36) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{420} &= p_{620} = p_{820} = P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{2e} | T_{2e} = u\} f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - T_{2g} | T_{2g} = v\} f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v + T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - v - \\
T_{2p} | T_{2p} = w\} f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - v - w - \\
T_{1e} | T_{1e} = z\} f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1p} < \tau - u - v - \\
w - z - T_{1g} | T_{1g} = y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_1 < u + v + w \cap T_{1p} < \tau - u - v - \\
w - z - y\} f_{T_{1g}}(y) dy f_{T_{1e}}(z) dz f_{T_{2p}}(w) dw f_{T_{2g}}(v) dv f_{T_{2e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{R_1}(u + v + w) F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w - \\
z - y) f_{T_{1g}}(y) f_{T_{1e}}(z) f_{T_{2p}}(w) f_{T_{2g}}(v) f_{T_{2e}}(u) dy dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - e^{-\alpha_1(u+v+w)})(1 - e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z-y)}) \\
\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}y} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}z} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}w} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}v} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}u} dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

37) Probabilidade do componente 1 continuar em estado excelente de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{50} &= p_{70} = p_{90} = P\{R_2 < \tau \cap T_{1e} > \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} P\{T_{1e} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_2\tau}) e^{-\lambda_{1e}\tau}
\end{aligned}$$

38) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{52} &= p_{72} = p_{92} = P\{R_2 < \tau \cap T_{1e} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e}\} P\{T_{1e} < \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= F_{R_2}(\tau) \int_0^\tau (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u)) f_{T_{1e}}(u) du \\
&= (1 - e^{-\alpha_2\tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1g}(\tau-u)}) \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} du
\end{aligned}$$

39) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{54} &= p_{74} = p_{94} = P\{R_2 < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - u \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= F_{R_2}(\tau) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v)) f_{T_{1g}}(v) f_{1e}(u) dv du \\
&= (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g} v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e} u}) dv du
\end{aligned}$$

40) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{56} &= p_{76} = p_{96} = P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + \\
&T_{1p} + T_{2e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} > \\
&\tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau - u - \\
&T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u - v \cap T_{2e} > \tau - u - v - \\
&T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2e} > \\
&\tau - u - v - w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_2}(u + v + w) (1 - \\
&F_{T_{2e}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - e^{-\alpha_2(u+v+w)}) e^{-\lambda_{2e}(\tau-u-v-w)} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} dw dv du$$

41) Probabilidade do componente 1 continuar em estado excelente de operação e do componente 2 continuar em reparo o durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{59} &= p_{79} = p_{99} = P\{R_2 > \tau \cap T_{1e} > \tau\} \\ &= P\{R_2 > \tau\} P\{T_{1e} > \tau\} \\ &= e^{-\alpha_2\tau} e^{-\lambda_{1e}\tau} \end{aligned}$$

42) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar após o reparo do componente 2 e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned} p_{510} &= p_{710} = p_{910} = P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau \cap T_{1e} + \\ &T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\ &= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + \\ &T_{2g} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + \\ &T_{2g} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v + T_{1p} \cap T_{2e} < \tau - u - v - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} > \\ &\tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2e} < \tau - u - v - w \cap T_{2g} > \\ &\tau - u - v - w - T_{2e} | T_{2e} = z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2g} > \tau - u - v - w - \\ &z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_2}(u + v + w) (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u - v - w - \\ &z)) f_{T_{2e}}(z) f_{T_{1p}}(w) f_{T_{1g}}(v) f_{T_{1e}}(u) dz dw dv du \\ &= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - \\ &e^{-\alpha_2(u+v+w)}) e^{-\lambda_{2g}(\tau-u-v-w-z)} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} dz dw dv du \end{aligned}$$

43) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado bom de operação e do componente 2 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{513} &= p_{713} = p_{913} = P\{R_2 > \tau \cap T_{1e} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e}\} P\{T_{1e} < \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_2}(\tau)) \int_0^\tau (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u)) f_{T_{1e}}(u) du \\
&= (e^{\alpha_2 \tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1g}(\tau-u)}) \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e} u} du
\end{aligned}$$

44) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar após o reparo do componente 2 e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{514} &= p_{714} = p_{914} = P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap \\
&T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} + \\
&T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - T_{1g} \cap T_{1p} + \\
&T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v + T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - v - T_{1p} \cap T_{2e} + \\
&T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2g} < \tau - u - v - w - T_{2e} \cap \\
&T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - v - w - T_{2e} | T_{2e} = z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2g} < \tau - u - v - \\
&w - z \cap T_{2p} > \tau - u - v - w - z - T_{2g} | T_{2g} = \\
&y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2p} > \tau - u - v - \\
&w - z - y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{R_2}(u+v+w)(1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z - y)) f_{T_{2g}}(y) f_{T_{2e}}(z) f_{T_{1p}}(w) f_{T_{1g}}(v) f_{T_{1e}}(u) dy dz dw dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - e^{-\alpha_2(u+v+w)}) e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z-y)} \\
&\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}y} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

45) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação e do componente 2 continuar em reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{517} &= p_{717} = p_{917} = P\{R_2 > \tau \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1g} < \tau - u \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{T_{1p} > \tau - u - v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_2}(\tau)) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v)) f_{T_{1g}}(v) f_{T_{1e}}(u) dv du \\
&= (e^{-\alpha_2\tau}) \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v)}) (\lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v}) (\lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u}) dv du
\end{aligned}$$

46) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 2 seja concluído:

$$\begin{aligned}
p_{519} &= p_{719} = p_{919} = P\{R_2 > T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 > T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 > u + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 > u + v + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u - v | T_{1p} = \\
&w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 > u + v + w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - F_{R_2}(u + v + w)) f_{T_{1p}}(w) f_{T_{1g}}(v) f_{T_{1e}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} e^{-\alpha_2(u+v+w)} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} dw dv du
\end{aligned}$$

47) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar após o reparo do componente 2 e do componente 2 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{520} &= p_{720} = p_{920} = P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{1e} | T_{1e} = u\} f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - T_{1g} | T_{1g} = v\} f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v + T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - T_{1p} | T_{1p} = w\} f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - w - T_{2e} | T_{2e} = z\} f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2p} < \tau - u - v - w - z - T_{2g} | T_{2g} = y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} P\{R_2 < u + v + w \cap T_{2p} < \tau - u - v - w - z - y\} f_{T_{2g}}(y) dy f_{T_{2e}}(z) dz f_{T_{1p}}(w) dw f_{T_{1g}}(v) dv f_{T_{1e}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} F_{R_2}(u + v + w) F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z - y) f_{T_{2g}}(y) f_{T_{2e}}(z) f_{T_{1p}}(w) f_{T_{1g}}(v) f_{T_{1e}}(u) dy dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \int_0^{\tau-u-v-w-z} (1 - e^{-\alpha_2(u+v+w)})(1 - e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z-y)}) \\
&\lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}y} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}z} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}w} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}v} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}u} dy dz dw dv du
\end{aligned}$$

48) Probabilidade do componente 2 continuar em estado bom de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{103} &= p_{123} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2g} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} P\{T_{2g} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_1\tau}) e^{-\lambda_{2g}\tau}
\end{aligned}$$

49) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{105} &= p_{125} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2g} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2p} > \tau - T_{2g}\} P\{T_{2g} < \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2p} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= F_{R_1}(\tau) \int_0^\tau (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u)) f_{T_{2g}}(u) du \\
&= (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} du
\end{aligned}$$

50) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{107} &= p_{127} = P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = \\
&u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u \cap T_{1e} > \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = \\
&v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + v \cap T_{1e} > \tau - u - v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} F_{R_1}(u + v) (1 - F_{T_{1e}}(\tau - u - v)) f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - e^{-\alpha_1(u+v)}) e^{-\lambda_{1e}(\tau-u-v)} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} dv du
\end{aligned}$$

51) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1011} &= p_{1211} = P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \\
&\tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau - \\
&T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_1 < u + T_{2p} \cap T_{1e} < \tau - u - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau - u - \\
&T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_1 < u + v \cap T_{1e} < \tau - u - v \cap T_{1g} > \tau - u - v - \\
&T_{1e} | T_{1e} = w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_1 < u + v \cap T_{1g} > \tau - u - v - w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_1}(u + v) (1 - F_{T_{1g}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{1e}}(w) f_{T_{2p}}(v) f_{T_{2g}}(u) dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - \\
&e^{-\alpha_1(u+v)}) e^{-\lambda_{1g}(\tau-u-v-w)} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} dw dv du
\end{aligned}$$

52) Probabilidade do componente 2 continuar em estado bom de operação e do componente 1 continuar em reparo o durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1012} &= p_{1212} = \text{P}\{R_1 > \tau \cap T_{2g} > \tau\} \\
&= \text{P}\{R_1 > \tau\} \text{P}\{T_{2g} > \tau\} \\
&= e^{-\alpha_1 \tau} e^{-\lambda_{2g} \tau}
\end{aligned}$$

53) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1015} &= p_{1215} = \text{P}\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + \\
&T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2g} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \\
&\tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_1 < u + T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau - u - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - \\
&u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_1 < u + v \cap T_{1g} < \tau - u - v - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - \\
&v - T_{1e} | T_{1e} = w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u+v \cap T_{1g} < \tau-u-v-w \cap T_{1p} > \tau-u-v-w - T_{1g} | T_{1g} = z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u+v \cap T_{1p} > \tau-u-v-w - z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_1}(u+v) (1 - F_{T_{1p}}(\tau-u-v-w-z)) f_{T_{1g}}(z) f_{T_{1e}}(w) f_{T_{2p}}(v) f_{T_{2g}}(u) dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - e^{-\alpha_1(u+v)}) e^{-\lambda_{1g}(\tau-u-v-w-z)} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}z} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} dz dw dv du
\end{aligned}$$

54) Probabilidade do componente 2 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação e do componente 1 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1016} &= p_{1216} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2g} < \tau \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2p} > \tau - T_{2g}\} P\{T_{2g} < \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{2p} > \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_1}(\tau)) \int_0^\tau (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u)) f_{T_{2g}}(u) du \\
&= e^{-\alpha_1 \tau} \int_0^\tau (e^{-\lambda_{2p}(\tau-u)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} du
\end{aligned}$$

55) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 1 seja concluído, dado que o componente 2 estava em estado bom de operação,:

$$\begin{aligned}
p_{1018} &= p_{1218} = P\{R_1 > T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 > T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 > u + T_{2p} \cap T_{2p} < \tau - u | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 > u + v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{R_1}(u+v)) f_{T_{2p}}(v) f_{T_{2g}}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} e^{-\alpha_1(u+v)} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} dv du
\end{aligned}$$

56) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava em estado bom de operação, após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1020} &= p_{1220} = P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2g} + T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2g} + T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{2g} | T_{2g} = u\} f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u + T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - T_{2p} | T_{2p} = v\} f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u + v \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - v - T_{1e} | T_{1e} = \\
&w\} f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v \cap T_{1p} < \tau - u - v - w - T_{1g} | T_{1g} = \\
&z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_1 < u + v \cap T_{1p} < \tau - u - v - w - \\
&z\} f_{T_{1g}}(z) dz f_{T_{1e}}(w) dw f_{T_{2p}}(v) dv f_{T_{2g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_1}(u + \\
&v) F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w - z) f_{T_{1g}}(z) f_{T_{1e}}(w) f_{T_{2p}}(v) f_{T_{2g}}(u) dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - \\
&e^{-\alpha_1(u+v)})(1 - e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w-z)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}z} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e}w} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p}v} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}u} dz dw dv du
\end{aligned}$$

57) Probabilidade do componente 1 continuar em estado bom de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{112} &= p_{132} = P\{R_2 < \tau \cap T_{1g} > \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} P\{T_{1g} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_2\tau}) e^{-\lambda_{1g}\tau}
\end{aligned}$$

58) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$p_{114} = p_{134} = P\{R_2 < \tau \cap T_{1g} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau\}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1p} > \tau - T_{1g}\} P\{T_{1g} < \tau\} \\
&= P\{R_2 < \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1p} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= F_{R_2}(\tau) \int_0^\tau (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u)) f_{T_{1g}}(u) du \\
&= (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} du
\end{aligned}$$

59) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1116} &= p_{1316} = P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u \cap T_{2e} > \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + v \cap T_{2e} > \tau - u - v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} F_{R_2}(u + v) (1 - F_{T_{2e}}(\tau - u - v)) f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - e^{-\alpha_2(u+v)}) e^{-\lambda_{2e}(\tau-u-v)} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} dv du
\end{aligned}$$

60) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1110} &= p_{1310} = P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1p} \cap T_{2e} < \tau - u - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_2 < u + v \cap T_{2e} < \tau - u - v \cap T_{2g} > \tau - u - v - \\
&T_{2e} | T_{2e} = w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_2 < u + v \cap T_{2g} > \tau - u - v - w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_2}(u + v) (1 - F_{T_{2g}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{2e}}(w) f_{T_{1p}}(v) f_{T_{1g}}(u) dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} (1 - \\
&e^{-\alpha_2(u+v)}) e^{-\lambda_{2g}(\tau-u-v-w)} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} (u) dw dv du
\end{aligned}$$

61) Probabilidade do componente 1 continuar em estado bom de operação e do componente 2 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1113} &= p_{1313} = \text{P}\{R_2 > \tau \cap T_{1g} > \tau\} \\
&= \text{P}\{R_2 > \tau\} \text{P}\{T_{1g} > \tau\} \\
&= e^{-\alpha_2\tau} e^{-\lambda_{1g}\tau}
\end{aligned}$$

62) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado bom de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1114} &= p_{1314} = \text{P}\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + \\
&T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau - T_{1g} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \\
&\tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_2 < u + T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau - u - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - \\
&u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_2 < u + v \cap T_{2g} < \tau - u - v - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - \\
&u - v - T_{2e} | T_{2e} = w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} \text{P}\{R_2 < u + v \cap T_{2g} < \tau - u - v - w \cap T_{2p} > \tau - \\
&u - v - w - T_{2g} | T_{2g} = z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v \cap T_{2p} > \tau - u - v - w - z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_2}(u + v) (1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z)) f_{T_{2g}}(z) f_{T_{2e}}(w) f_{T_{1p}}(v) f_{T_{1g}}(u) dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - e^{-\alpha_2(u+v)}) e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z)} \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}z} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} dz dw dv du
\end{aligned}$$

63) Probabilidade do componente 1 se degradar do estado bom para o estado ruim de operação e do componente 2 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1117} &= p_{1317} = P\{R_2 > \tau \cap T_{1g} < \tau \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1p} > \tau - T_{1g}\} P\{T_{1g} < \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} \int_0^\tau P\{T_{1p} > \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= (1 - F_{R_2}(\tau)) \int_0^\tau (1 - F_{T_{1p}}(\tau - u)) f_{T_{1g}}(u) du \\
&= e^{-\alpha_2\tau} \int_0^\tau (e^{-\lambda_{1p}(\tau-u)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} du
\end{aligned}$$

64) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 2 seja concluído, dado que o componente 1 estava em estado bom de operação,:

$$\begin{aligned}
p_{1119} &= p_{1319} = P\{R_2 > T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 > T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 > u + T_{1p} \cap T_{1p} < \tau - u | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 > u + v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - F_{R_2}(u + v)) f_{T_{1p}}(v) f_{T_{1g}}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} e^{-\alpha_2(u+v)} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} (u) dv du
\end{aligned}$$

65) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava em estado bom de operação, após o reparo do componente 2 e do componente 2 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1120} &= p_{1320} = P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1g} + T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1g} + T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{1g} | T_{1g} = u\} f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u + T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - T_{1p} | T_{1p} = v\} f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u + v \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - v - T_{2e} | T_{2e} = \\
&w\} f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v \cap T_{2p} < \tau - u - v - w - T_{2g} | T_{2g} = \\
&z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} P\{R_2 < u + v \cap T_{2p} < \tau - u - v - w - \\
&z\} f_{T_{2g}}(z) dz f_{T_{2e}}(w) dw f_{T_{1p}}(v) dv f_{T_{1g}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} F_{R_2}(u + \\
&v) F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w - z) f_{T_{2g}}(z) f_{T_{2e}}(w) f_{T_{1p}}(v) f_{T_{1g}}(u) dz dw dv du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \int_0^{\tau-u-v-w} (1 - \\
&e^{-\alpha_2(u+v)})(1 - e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w-z)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}z} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}w} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}v} \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g}u} dz dw dv du
\end{aligned}$$

66) Probabilidade do componente 2 continuar em estado ruim de operação e do componente 1 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{145} &= p_{165} = P\{R_1 < \tau \cap T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 < \tau\} P\{T_{2p} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_1\tau}) e^{-\lambda_{2p}\tau}
\end{aligned}$$

67) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{147} &= p_{167} = P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{2p} < \tau \cap T_{2p} + T_{1e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{2p} < \tau \cap T_{1e} > \tau - T_{2p} | T_{2p} = u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < u \cap T_{1e} > \tau - u\} f_{T_{2p}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau F_{R_1}(u)(1 - F_{T_{1e}}(\tau - u)) f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_1 u})(e^{-\lambda_{1e}(\tau - u)}) \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} u} (u) du
\end{aligned}$$

68) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1411} &= p_{1611} = P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} < \tau \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{1e} < \tau - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} > \tau - T_{2p} | T_{2p} = u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau - u} P\{R_1 < u \cap T_{1e} < \tau - u \cap T_{1g} > \tau - u - T_{1e} | T_{1e} = v\} f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} P\{R_1 < u \cap T_{1g} > \tau - u - v\} f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} F_{R_1}(u)(1 - F_{T_{1g}}(\tau - u - v)) f_{T_{1e}}(v) f_{T_{2p}}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} (1 - e^{-\alpha_1 u})(e^{-\lambda_{1g}(\tau - u - v)}) \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e} v} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} u} dv du
\end{aligned}$$

69) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 1 ser reparado e do componente 1 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1415} &= p_{1615} = P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} < \tau \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} < \tau - T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} > \tau - T_{2p} | T_{2p} = \\
&u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} P\{R_1 < u \cap T_{1g} < \tau - u - T_{1e} \cap T_{1g} + T_{1p} > \tau - u - T_{1e} | T_{1e} = \\
&v\} f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau - u} \int_0^{\tau - u - v} P\{R_1 < u \cap T_{1g} < \tau - u - v \cap T_{1p} > \tau - u - v - T_{1g} | T_{1g} = \\
&w\} f_{T_{1g}}(w) dw f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau - u} \int_0^{\tau - u - v} P\{R_1 < u \cap T_{1p} > \tau - u - v - w\} f_{T_{1g}}(w) dw f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_1}(u)(1 - F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{1g}}(w) f_{T_{1e}}(v) f_{T_{2p}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_1 u})(e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g} w} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e} v} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} u} dw dv du
\end{aligned}$$

70) Probabilidade do componente 2 continuar em estado ruim de operação e do componente 1 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1416} &= p_{1616} = P\{R_1 > \tau \cap T_{2p} > \tau\} \\
&= P\{R_1 > \tau\} P\{T_{2p} > \tau\} \\
&= (e^{-\alpha_1 \tau}) e^{-\lambda_{2p} \tau}
\end{aligned}$$

71) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 1 seja concluído, dado que estava em estado ruim de operação,:

$$\begin{aligned}
p_{1418} &= p_{1618} = P\{R_1 > T_{2p} \cap T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 > T_{2p} \cap T_{2p} < \tau | T_{2p} = u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 > u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - F_{R_1}(u)) f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (e^{-\alpha_1 u}) \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} u} du
\end{aligned}$$

72) Probabilidade do componente 2 se degradar e falhar, dado que estava em estado ruim de operação, após o reparo do componente 1 e do componente 1 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1420} &= p_{1620} = P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{2p} + T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_1 < T_{2p} \cap T_{1e} + T_{1g} + T_{1p} < \tau - T_{2p} | T_{2p} = u\} f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_1 < u \cap T_{1g} + T_{1p} < \tau - u - T_{1e} | T_{1e} = v\} f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_1 < u \cap T_{1p} < \tau - u - v - T_{1g} | T_{1g} = \\
&w\} f_{T_{1g}}(w) dw f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_1 < u \cap T_{1p} < \tau - u - v - w\} f_{T_{1g}}(w) dw f_{T_{1e}}(v) dv f_{T_{2p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_1}(u) F_{T_{1p}}(\tau - u - v - w) f_{T_{1g}}(w) f_{T_{1e}}(v) f_{T_{2p}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_1 u}) (1 - e^{-\lambda_{1p}(\tau-u-v-w)}) \lambda_{1g} e^{-\lambda_{1g} w} \lambda_{1e} e^{-\lambda_{1e} v} \lambda_{2p} e^{-\lambda_{2p} u} dw dv du
\end{aligned}$$

73) Probabilidade do componente 1 continuar em estado ruim de operação e do componente 2 ser reparado durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{154} &= p_{174} = \text{P}\{R_2 < \tau \cap T_{1p} > \tau\} \\
&= \text{P}\{R_2 < \tau\} \text{P}\{T_{1p} > \tau\} \\
&= (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) e^{-\lambda_{1p} \tau}
\end{aligned}$$

74) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento em estado excelente de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{156} &= p_{176} = \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{1p} < \tau \cap T_{1p} + T_{2e} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{1p} < \tau \cap T_{2e} > \tau - T_{1p} | T_{1p} = u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2e} > \tau - u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau F_{R_2}(u) (1 - F_{T_{2e}}(\tau - u)) f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_2 u}) (e^{-\lambda_{2e}(\tau-u)}) \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p} u} (u) du
\end{aligned}$$

75) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado bom de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1510} &= p_{1710} = \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} < \tau \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{2e} < \tau - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} > \tau - T_{1p} | T_{1p} = u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2e} < \tau - u \cap T_{2g} > \tau - u - T_{2e} | T_{2e} = v\} f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2g} > \tau - u - v\} f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} F_{R_2}(u)(1 - F_{T_{2g}}(\tau - u - v)) f_{T_{2e}}(v) f_{T_{1p}}(u) dv du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} (1 - e^{-\alpha_2 u})(e^{-\lambda_{2g}(\tau-u-v)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2e}v} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}u} dv du
\end{aligned}$$

76) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava no estado ruim de operação, após o componente 2 ser reparado e do componente 2 entrar em funcionamento e se degradar do estado excelente para o estado ruim de operação durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1514} &= p_{1714} = P\{R_2 < T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} < \tau \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau\} \\
&= \int_0^\tau P\{R_2 < T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} < \tau - T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} > \tau - T_{1p} | T_{1p} = \\
&u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} P\{R_2 < u \cap T_{2g} < \tau - u - T_{2e} \cap T_{2g} + T_{2p} > \tau - u - T_{2e} | T_{2e} = \\
&v\} f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u \cap T_{2g} < \tau - u - v \cap T_{2p} > \tau - u - v - T_{2g} | T_{2g} = \\
&w\} f_{T_{2g}}(w) dw f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} P\{R_2 < u \cap T_{2p} > \tau - u - v - w\} f_{T_{2g}}(w) dw f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_2}(u)(1 - F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w)) f_{T_{2g}}(w) f_{T_{2e}}(v) f_{T_{1p}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_2 u})(e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g}w} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e}v} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p}u} dw dv du
\end{aligned}$$

77) Probabilidade do componente 1 continuar em estado ruim de operação e do componente 2 continuar em reparo durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1517} &= p_{1717} = P\{R_2 > \tau \cap T_{1p} > \tau\} \\
&= P\{R_2 > \tau\} P\{T_{1p} > \tau\} \\
&= (e^{-\alpha_2 \tau}) e^{-\lambda_{1p} \tau}
\end{aligned}$$

78) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, durante o intervalo entre inspeções, antes que o reparo do componente 2 seja concluído, dado que o componente 1 estava em estado ruim de operação:

$$p_{1519} = p_{1719} = P\{R_2 > T_{1p} \cap T_{1p} < \tau\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 > T_{1p} \cap T_{1p} < \tau | T_{1p} = u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 > u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (1 - F_{R_2}(u)) f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau (e^{-\alpha_2 u}) \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p} u} du
\end{aligned}$$

79) Probabilidade do componente 1 se degradar e falhar, dado que estava em estado ruim de operação, após o reparo do componente 2 e do componente 2 entrar em funcionamento e também se degradar e falhar durante o intervalo entre inspeções:

$$\begin{aligned}
p_{1520} &= p_{1520} = \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{1p} + T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau\} \\
&= \int_0^\tau \text{P}\{R_2 < T_{1p} \cap T_{2e} + T_{2g} + T_{2p} < \tau - T_{1p} | T_{1p} = u\} f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2g} + T_{2p} < \tau - u - T_{2e} | T_{2e} = v\} f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2p} < \tau - u - v - T_{2g} | T_{2g} = \\
&w\} f_{T_{2g}}(w) dw f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \\
&\int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} \text{P}\{R_2 < u \cap T_{2p} < \tau - u - v - w\} f_{T_{2g}}(w) dw f_{T_{2e}}(v) dv f_{T_{1p}}(u) du \\
&= \int_0^\tau \int_0^{\tau-u} \int_0^{\tau-u-v} F_{R_2}(u) F_{T_{2p}}(\tau - u - v - w) f_{T_{2g}}(w) f_{T_{2e}}(v) f_{T_{1p}}(u) dw dv du \\
&= \int_0^\tau (1 - e^{-\alpha_2 u}) (1 - e^{-\lambda_{2p}(\tau-u-v-w)}) \lambda_{2g} e^{-\lambda_{2g} w} \lambda_{2e} e^{-\lambda_{2e} v} \lambda_{1p} e^{-\lambda_{1p} u} dw dv du
\end{aligned}$$