UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ELIANA BEVILACQUA SALIN

MATEMÁTICA DINÂMICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA A PARTIR DE SITUAÇÕES GEOMÉTRICAS

Porto Alegre
2014

ELIANA BEVILACQUA SALIN

MATEMÁTICA DINÂMICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA A PARTIR DE SITUAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: professora Dra. Maria Alice Gravina.

Porto Alegre

2014

ELIANA BEVILACQUA SALIN

MATEMÁTICA DINÂMICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA A PARTIR DE SITUAÇÕES GEOMÉTRICAS

Banca Examinadora:

____

Prof(a). Dr(a). Elisabete Zardo Búrigo (IM/UFRGS)

____

Prof(a). Dr(a). Débora da Silva Soares (IM/UFRGS)

____

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

A Deus, princípio de tudo.

À minha orientadora Prof.ª Drª. Maria Alice Gravina pela forma como me orientou, pelas suas críticas, sugestões e ensinamentos, pelas palavras de incentivo e sobretudo pela constante disponibilidade.

À todos os professores do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, pela contribuição na minha formação continuada. Em especial à professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo, professora Dra. Débora da Silva Soares, e ao professor Dr.Victor Augusto Giraldo (UFRJ) pelo aceite em compor a banca de minha defesa de dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudos concedida, proporcionando condições para realização desta pesquisa.

À minha família e amigos pelo incentivo, apoio e carinho e pela compreensão dos momentos em que não pude estar presente.

Aos alunos que participaram neste estudo, pela colaboração e disponibilidade, bem como pelo empenho que demonstraram.

RESUMO

Esta pesquisa tratou de investigar o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular daquelas do tipo afim e quadrática. Parte da pesquisa também foi investigar de que forma o uso de um software de matemática dinâmica, o GeoGebra, pode ajudar o processo de aprendizagem do tópico em questão. A metodologia de pesquisa utilizada é inspirada nos moldes da Engenharia Didática de Artigue. É através das atividades da sequência didática projetada e implementada em 2013, com turma de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre, que vamos mostrar como aconteceu o desenvolvimento de conexões múltiplas entre as diversas representações de uma função (algébrica, gráfica e numérica), bem como a importância do software GeoGebra como recurso pedagógico quando se quer trabalhar com múltiplas representações. As respostas apresentadas, pelos alunos, foram analisadas tendo como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. A observação de relações entre variáveis a partir da manipulação de pontos em uma construção no Geogebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, através de constante processo de conversão de registros.

Palavras-chave: Função, Matemática Dinâmica, Representação Semiótica, Engenharia Didática, Geogebra.

ABSTRACT

This research aims to investigate the role of semiotic representation registers in the construction of the concept of function, in particular those of the affine and quadratic type. Part of the research was also to investigate how the use of a dynamic mathematics software GeoGebra can help the learning process. The research methodology is inspired by the lines of Didactic Engineering. Through a instructional sequence designed and implemented in 2013, with a group of students of the first year of high school to a state school in Porto Alegre, it is shown how they developed the connections between different registers of representations (algebraic , graphical and numerical). The experience has also shown the importance of GeoGebra as a tool to explore the different registers of representation. The production of students were analyzed taking into acount the theory of semiotic representations of Duval and it was posible to identify their understanding of the concept of variable, function and graph, through the an active process of conversion of registers.

Keywords: Function, Dynamics Mathematics, Representation Semiotics, Teaching Engineering, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho surgiu da constatação, na nossa prática docente, das dificuldades apresentadas por muitos dos alunos do 1º ano do Ensino Médio em compreender o conceito de função. Dentro do conteúdo “Funções”, escolhemos como tema desta dissertação o conteúdo “Funções Afim e Quadrática”, nisso levando em consideração não só as dificuldades dos alunos mas também o currículo de matemática do Ensino Médio.

Nossa vivência escolar e o uso de livros didáticos em nosso trabalho pedagógico, nos levou a perceber que, em geral, a forma mais usada para introduzir o conceito de função é baseada ou na ideia de par ordenado, ou no desenho de dois conjuntos e flechas estabelecendo relação ou por fórmulas analíticas. Essas formas de proceder para introduzir esse conceito, a nosso ver, não parece ser a melhor opção, pois exige muita abstração. Mas mesmo com as dificuldades que se apresentam no ensino deste assunto, consideramos que quando o professor leva em conta os pré-requisitos para aprender (ou ensinar) um determinado assunto, as dificuldades de aprendizagem (ou mesmo de ensino) podem ser minimizadas. Mas não basta só levar isso em consideração. É preciso deixar que o aluno atue, efetivamente, para sua aprendizagem. Temos percebido que no âmbito escolar, no geral, nas aulas de matemática quem mais fala é o professor, enquanto a maioria dos alunos parece não compreender o que está sendo explicado.

Sentimos que existe uma tensão entre o “ensinar do professor” e o “aprender do aluno”, relacionada com a preocupação excessiva, por parte do professor, em vencer os conteúdos do programa, em detrimento do processo de aprendizagem do aluno. Silva (2002) também fala desta nossa percepção:

> É difícil o professor que consegue se convencer de que seu objetivo principal no processo educacional é o maior aproveitamento possível dos alunos, e que esse objetivo fica longe de ser atingido quando a sua meta passa a ser cobrir a maior quantidade possível de matéria em aula (SILVA, 2002, p. 67).

A redução da tensão, nos parece, depende de uma outra forma de ensino. Seria trabalhar, com os alunos, dentro da premissa da descoberta, do ensino que ensina a pensar, a problematizar. Uma alternativa seria a elaboração de tarefas em que o aluno tenha um papel mais ativo na compreensão dos conceitos, de forma a se tornar mais autônomo em relação à sua aprendizagem. Pouco adianta uma lista de tarefas bem planejadas, se o professor não acompanha o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, em relação ao conteúdo que deseja ensinar.

Na pesquisa bibliográfica realizada, identificamos possibilidades que podem ajudar a repensar a prática didática de modo a melhor acompanhar o processo de aprendizagem dos alunos. Destacamos como de importância para o nosso trabalho a teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003; 2011) e o potencial semiótico dos softwares de matemática dinâmica (GRAVINA & SANTAROSA, 1998; GRAVINA, 2001).

Uma das dificuldades que se apresenta para os alunos é fazer a associação entre a representação algébrica da função e a representação geométrica. Duval defende que a apreensão do objeto matemático é constituído a partir da conceitualização e a coordenação, pelo aluno, entre vários registros de representação. A teoria dos registros de representação semiótica ajuda a entender a complexidade do processo de aprendizagem do conceito de função e indica que pode haver maior êxito no processo se o professor considera as diferentes dificuldades que nele se apresentam:

- ✓ Dificuldade em entender o significado de função como relação entre grandezas;
- ✓ Dificuldade em fazer a correspondência entre informações do campo algébrico para o campo geométrico e vice-versa;
- ✓ Dificuldade em reconhecer a mesma função, em duas representações diferentes;
- ✓ Dificuldade em entender o significado da linguagem simbólica que envolve o estudo de funções; em particular, dificuldade em tratar letras como números generalizados e/ou interpretá-las como variáveis.

Quanto aos softwares de matemática dinâmica, concordamos com Gravina (2001) ao dizer que eles “desencadeiam alguma das primeiras ações mentais características do pensar matemático - o estabelecer relações e conjecturar”. Acreditamos que este processo de desencadeamento se dá pelas inúmeras possibilidades que estes softwares permitem, entre as quais, destaco algumas que serão fundamentais para o entendimento do conceito de função: a visualização[1] simultânea de diferentes registros de representação de um mesmo objeto; exploração qualitativa das relações matemáticas que se evidenciam no dinamismo da representação, através de manipulações de pontos da figura; obtenção do gráfico da função antes mesmo de determinar a expressão analítica e além disso, ele permite, através do gráfico, que se tenha uma estimativa do resultado do problema, já que este só será obtido de forma exata a partir de sua expressão algébrica.

Estabelecidos a escolha do tema a ser ensinado aos alunos e os pressupostos quanto ao papel dos sistemas de representação no processo de aprendizagem da matemática , enunciamos a questão que é objeto de investigação neste trabalho:

As articulações entre os diferentes registros de representação semiótica, aliadas a situações geométricas e ao software de matemática dinâmica, podem ajudar o processo de aprendizagem do conceito de função?

Na busca de resposta a esta questão, elaboramos uma sequência de atividades e fomos conduzidas pelos seguintes objetivos:

- ✓ Utilizar situações geométricas como um meio para a construção da ideia de variável independente e dependente;
- ✓ Propiciar análise qualitativa da variabilidade nas situações geométricas, visando estabelecer relações entre variáveis.
- ✓ Elaborar atividades para estudo de funções afim e quadrática que possibilitassem a transição entre distintas representações, bem como o tratamento em uma mesma representação;
- ✓ Procurar meios para solucionar ou amenizar as dificuldades de compreensão enfrentadas pelos alunos no estudo de funções.

A pesquisa feita se organiza dentro dos princípios da Engenharia Didática. A

---

[1] A expressão visualização não deve ser entendida no sentido restrito das representações gráficas, pelo contrário, o sentido amplo inclui a visão tanto dos gráficos, como das equações, como das

partir de análises prévias, foi elaborada a sequência de atividades, acompanhada de análise *a priori*, tendo como o propósito apresentar uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das funções afim e quadrática, utilizando o software GeoGebra. Foi feita uma experiência de ensino e através de análise *a posteriori* da sequência de atividades buscou-se obter subsídios para responder a questão de pesquisa; como instrumento de análise da construção de conhecimento, por parte dos alunos, ao longo da experiência utilizamos a teoria dos registros de representação semiótica.

A organização dos capítulos que compõem a dissertação refletem de que forma os princípios da Engenharia Didática se fizeram presentes no desenrolar da pesquisa.

No capítulo dois, apresentamos as análises prévias; elas tratam de aspectos teóricos que vão fundamentar a concepção da experiência e dizem respeito a teoria das representações semióticas e ao potencial semiótico do software GeoGebra, um software de matemática dinâmica.

No capítulo três, também como parte das análises prévias, fazemos reflexões de natureza histórica, epistemológica e cognitiva. Em linhas muito gerais, apresentamos a forma como evoluiu o conceito de função e a importância que as várias representações desse conceito tiveram ao longo do seu desenvolvimento. Relatamos algumas considerações, sobre esse conceito, através da posição crítico reflexiva de Caraça (1978). Ao abordar as dificuldades, constatamos que na produção desse conhecimento, no âmbito escolar, há uma forte preocupação com o formal em detrimento da utilização da intuição, por exemplo, ao considerar função como um subconjunto de uma relação, que por sua vez é um subconjunto de um produto cartesiano. No que diz respeito aos modos de representação desse objeto matemático verifica-se que não há articulação entre elas, sendo privilegiada a forma analítica ou algébrica. Constatamos também através de pesquisas realizadas nessa área que, os fatores apontados são, entre outros, causas de dificuldades de aprendizagem do conceito de função.

Neste capítulo também analisamos os documentos oficiais com o intuito de verificar como eles sugerem que se faça o estudo de funções no Ensino Médio; também colocamos um olhar sobre os livros didáticos escolares para ver como abordam o tema, em particular, como é feita a integração entre representações algébrica e geométrica. No final do capítulo nos concentramos na apresentação de algumas experiências de ensino, que fazem uso ou não de tecnologia.

No capítulo quatro, apresentamos a metodologia de pesquisa utilizada, que é inspirada nos moldes da Engenharia Didática de Artigue (1996, *apud* Machado, 1999). O capítulo trata da concepção de uma sequência de atividades e de sua análise *a priori*, feita à luz da teoria dos registros de representação semiótica; analisamos as possibilidades de resolução de cada atividade, prevendo possíveis comportamentos na direção de evidenciar aspectos do processo de aprendizagem.

No capítulo cinco, descrevemos a experiência realizada; fazemos um relato dos diferentes encontros e analisamos as atitudes dos alunos frente às atividades propostas e suas resoluções. Para esta análise *a posteriori* usamos as observações realizadas durante a aplicação das atividades e as produções dos alunos.

No capítulo seis, apresentamos as conclusões que sintetizam os resultados obtidos na pesquisa.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Discutiremos aqui os aspectos da fundamentação teórica dessa pesquisa. Nosso estudo sobre funções afim e quadrática baseia-se nos trabalhos de Raymond Duval sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em que procuramos abordar os aspectos cognitivos que devem ser levados em conta em uma atividade matemática. E, para melhor compreender sobre o potencial dos ambientes de Matemática Dinâmica, encontramos nos trabalhos de Gravina e Santarosa (1998) e Gravina (2001) contribuições, através de suas experiências, que ajudaram a refletir sobre as atividades elaboradas de forma a explorar os recursos semióticos do software GeoGebra.

2.1 A TEORIA DOS REGISTOS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, seus conceitos, suas propriedades, suas estruturas, suas relações não são palpáveis, necessitam para sua compreensão do uso de uma representação.

Nos dias atuais, no âmbito educacional, cada vez mais se valoriza o papel das representações semióticas nas situações de ensino e aprendizagem. O trabalho de Colombo, Flores e Moretti (2008), sobre pesquisas que vem sendo feitas no Brasil e que tratam de dificuldades de aprendizagem, apontam para uma tendência ao uso da teoria dos registros de representação semiótica de Duval:

> Os dados coletados permitem dizer que as pesquisas estão articuladas em torno das principais dificuldades apresentadas por alunos - sejam estes do Ensino Fundamental, Médio ou Superior - que, ao utilizarem a noção de registros de representação semiótica, buscam possíveis soluções para minimizar tais dificuldades (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p.19).

Segundo Duval (1993), um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções: a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. E mais, as representações semióticas apresentam dois aspectos: sua *forma* (o representante) e seu *conteúdo* (o representado). Para ele

"[...] as representações (semióticas) não são, somente, necessárias para fins de comunicação[2], elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento" (DUVAL, 1993, p. 39). E é preciso levar em consideração que as representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação[3], os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (idem, p.39).

Segundo Duval (2003) "há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para compreensão em matemática" (DUVAL, 2003, p.31). Desta forma, o autor sinaliza a importância de cuidadoso trabalho com as representações nas situações de aprendizagem. Pois, segundo (DUVAL, 1993 *apud* MORETTI, 2012, p. 283) a ausência de coordenação não impede toda a compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece as transferências e aprendizagens posteriores. É necessário, no ensino da matemática, considerarmos as diferentes representações semióticas de um mesmo objeto (figuras, gráficos, língua natural) evitando com isso a confusão entre o objeto e sua representação. Devemos também levar em conta a transição entre estas representações, pois estes procedimentos provocam as atividades cognitivas do pensamento. Ao pretender pesquisar sobre como o aluno articula os diferentes registros de representação para o entendimento das funções afim e quadrática, através de problemas em contexto geométrico, estaremos abordando não só o aspecto conceitual destes objetos, mas também formas de elaborar, resolver e representá-los matematicamente. E, nestas resoluções e representações, o pensamento matemático é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos usados para representar os objetos e suas relações (GRANGER, 1979, p. 21).

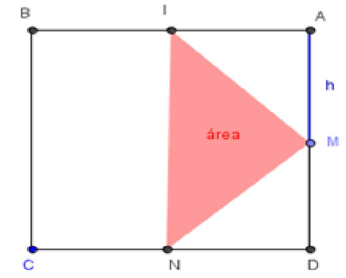
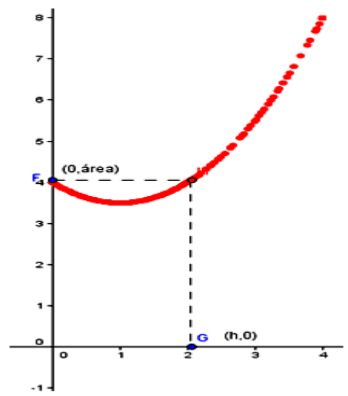
No quadro 1, abaixo, trazemos alguns exemplos de registros de representação semiótica que serão utilizados na nossa proposta de ensino.

---

[2] Função de comunicação das representações mentais.

[3] É um sistema que além de representar conceitos e ideias, tem regras de funcionamento, que permitem a realização de processos matemáticos que levam a novos conceitos e ideias.

Quadro 1: Exemplos de Registros de Representação Semiótica.

<table>
<tr><td>Língua natural- textos escritos em língua portuguesa. Com regras convencionais de comunicação que permitem encontrar as informações ou dados para resolver o problema</td><td>Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que AM = DN. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?</td></tr>
<tr><td>Geométrico (figura): quando temos figuras geométricas. Com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Geométrico (gráfico): quando temos gráficos, no nosso caso cartesiano. Com regras de tratamento que permitem a identificação dos intervalos onde a função cresce/decresce e antecipação do resultado.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Algébrico: quando temos a escrita algébrica. Com suas regras de tratamento levam a resolução do problema.</td><td>$A(x)= \frac{x^2}{2} - x + 4$</td></tr>
</table>

Fonte: A autora

Segundo Duval (2003), conforme já mencionado, a condição necessária para a compreensão em matemática depende de coordenação de pelo menos dois registros de representação. Para bem analisar o funcionamento cognitivo da compreensão matemática, ele destaca dois tipos de transformações que se fazem presentes quando se trabalha com sistemas de representação: o tratamento de uma representação e a conversão entre representações.

- Quanto ao tratamento de uma representação: é a transformação de uma representação em outra, dentro de um mesmo registro; ou seja, é uma transformação interna a um registro. Por exemplo: efetuar cálculos ficando estritamente no mesmo sistema de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; ou acrescentar novos elementos geométricos em uma figura, quando se quer avançar na demonstração de uma propriedade.

No que segue, apresentamos um exemplo de tratamento, a ser utilizado em nossa proposta de ensino. Partimos da expressão algébrica da função quadrática e através do procedimento de "completar quadrados" obtemos sua expressão algébrica na forma canônica. Com esse tratamento, temos uma expressão da função em que é possível determinar com facilidade as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função. Esse tratamento está detalhado na figura 1 abaixo:

$$A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$$

$$A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8)$$

$$A\,(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1 + 8)$$

$$A(x) = \frac{1}{2}[(x^2 - 2x + 1) + 7]$$

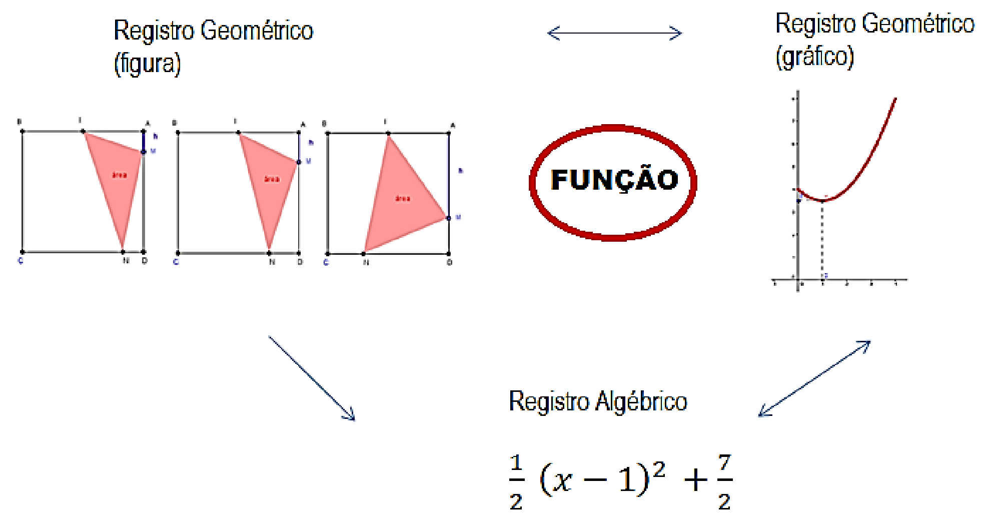
$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow v = (1, \frac{7}{2})$$

Figura 1: Exemplo da operação de tratamento.
Fonte: A autora

- Quanto à conversão entre representações - é a transformação de uma representação que implica na mudança de registro; ou seja , é uma transformação que é exterior ao registro de partida. O que Duval (2003) quer dizer é que duas representações diferentes não explicitam o mesmo conteúdo do objeto; ou seja, a representação da função no registro de chegada, não terá o mesmo conteúdo que sua representação no registro de partida.

No esquema da figura 2, temos três representações diferentes do mesmo objeto (função) e cada uma dessas representações tem conteúdo diferente: conteúdo geométrico na composição retângulo com triângulo, conteúdo geométrico no gráfico no sistema cartesiano e conteúdo algébrico na “lei”.



.

Figura 2: Exemplo da operação de conversão.
Fonte: A autora

É importante ressaltar que é na passagem de um registro para outro que se pode observar a importância das formas de representação. A mudança de registro pode propiciar a descoberta de diferentes aspectos de um mesmo objeto; também pode propiciar, no novo registro, tratamentos mais econômicos e/ou mais potentes; ou ainda, ter-se no segundo registro um suporte ou guia para melhor proceder no primeiro registro.

Duval (2004a) destaca que cada representação tem suas peculiaridades e que elas precisam ser observadas como tais, embora se tratando do mesmo objeto matemático; e mais, ele considera que nenhuma das representações é suficiente para esgotar todas as informações possíveis do objeto em questão. Os diferentes registros de representação se diferenciam não só pela natureza de seus significados, mas também pelo sistema de regras que autoriza associações entre registros e pelo número de dimensões em que pode efetuar-se essa associação. Estas duas últimas diferenciações fundamentam a flexibilidade e força da diversidade dos registros quando se está em frente de uma atividade complexa: tem-se não somente a possibilidade de efetuar tratamentos equivalentes com custos menores, mas também tem-se a complementaridade dos tratamentos transitando entre registros e permitindo ir além dos limites inerentes a cada registro.

O processo de conversão entre representações traz à tona o fenômeno que é denominado por Duval (2003) de congruência semântica. Com este conceito, ele identifica o grau de transparência que existe entre representações de um mesmo objeto matemático. Tal fenômeno se torna mais agudo na transformação de conversão por se tratar de mudança de registros; para que o objeto seja reconhecido em dois sistemas distintos, é necessário também conhecer as regras de funcionamento semiótico em cada um desses sistemas.

Quando a representação terminal (no registro de chegada) transparece de certa forma na representação de partida e a conversão se assemelha a uma situação de simples codificação, então há congruência (há correspondência semântica das unidades de significado entre os dois registros); ou seja, é quando podemos “ver” , facilmente, nos registros de partida e de chegada o mesmo objeto matemático. Se a representação terminal não transparece absolutamente no registro de partida, então há o fenômeno da não congruência; ou seja, é quando há certo bloqueio ou confusão para a passagem de um registro a outro.

Para ajudar a clarificar a ideia de congruência e não congruência, um exemplo clássico é a conversão de registros no esboço de curvas. A dificuldade encontrada pelos alunos é quanto à conversão do registro gráfico da curva, dada no plano cartesiano, para o registro algébrico e vice versa. Sendo que a maior dificuldade está na conversão da geometria para a álgebra.

O exemplo, da figura 3, extraído de Moretti e Thiel (2012), traz a situação de conversão numérica para conversão gráfica da curva parábola $y = 2x^2 - 4x + 6$.

x	y
-1	12
0	6
1	4
2	6

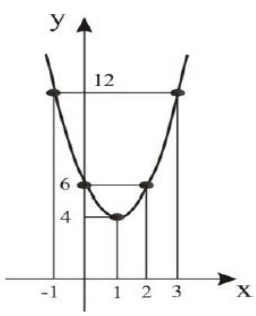


Figura 3: Curva traçada a partir de pontos.
Fonte: Moretti e Thiel (2012, p. 388).

No esboço de curvas, o procedimento que mais se observa no Ensino Básico é o uso de uma tabela de pontos obtida por atribuição de valores na expressão matemática da curva (SILVA, 2008 *apud* MORETTI; THIEL, 2012, p 388).

Na figura 3, cada par ordenado determina um ponto no sistema de coordenadas cartesianas que pertence ao gráfico da função, e é a partir destes pontos que é traçado o gráfico. Segundo Moretti e Thiel (2012) há muitos defeitos nesta conversão: a curva passa a ser um aglomerado de alguns pontos; o aluno perde de vista a percepção global da curva.

Aqui a conversão se dá no sentido de conjunto de pares ordenados de números reais para pontos que são tomados como representativos do gráfico a ser produzido. É a partir da junção destes pontos que é traçado o gráfico da função. Não raro, no caso das parábolas, o vértice está fora desse conjunto de pontos e então algum outro ponto é forçado, no desenho da curva, a se tornar o vértice. Nesta conversão, existe congruência semântica entre pares de números e pontos do gráfico apenas para alguns pontos: um par dado pela tabela é congruente com um ponto no gráfico. Mas a parábola é uma curva contínua, enquanto na tabela, por maior que seja, tem-se apenas um certo número de pares de números.

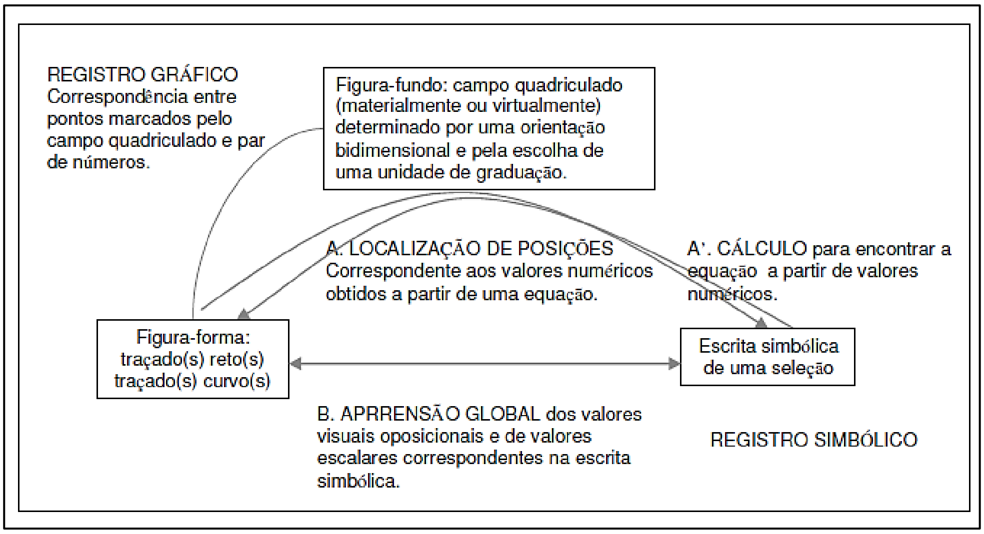
A conversão no outro sentido, da função em sua forma geométrica (gráfico) para a numérica (tabela), é altamente não congruente, pois nesse modo não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente, ou seja, não há um entendimento global da relação entre as coordenadas dos pontos que pertencem à curva desenhada, para estabelecer a equação correspondente.

A conversão realizada dessa maneira (ponto a ponto) não contribui para a percepção de interpretação global e qualitativa, seria como aplicar uma regra na qual um ponto está associado a um par de números num plano cartesiano. Sobre esse procedimento, Duval nos fala que:

> [...] Tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens[...], mas igualmente de um ponto de vista teórico, pois a regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas. Essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa.(DUVAL, 2003, p.17)

E é justamente essa apreensão global e qualitativa que se faz necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle relacionado ao tratamentos algébricos. Para esse mesmo autor, na conversão entre gráficos e equações é necessário que se levem em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (concavidade e intersecção com os eixos) e as unidades simbólicas significativas da equação (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1), como pode ser visto no quadro 2.

Quadro *2*: Esquema das representações gráficas.



Fonte: Duval (2003, p. 18).

Duval explica que a organização, mostrada no quadro acima, permite três tipos de tratamento e dois de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A' permitem somente uma leitura pontual dos gráficos. Somente a coordenação de B permite uma apreensão global qualitativa.

É importante ressaltar, que é na passagem de um registro para outro que se pode observar a importância da forma de representação, pois mudar de registro não consiste apenas em mudar o modo de tratamento, mas também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Para investigar essas dificuldades, Duval (1988) sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais levando em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, em que o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Vale ressaltar que esse procedimento possibilita identificar as modificações realizadas na figura e na expressão algébrica. Isso implica sair de um tratamento focado na associação um ponto ↔ par ordenado para a associação variável visual da representação ↔ unidade significativa da escrita algébrica.

Para exemplificar este procedimento de esboço de curvas, Duval relaciona as variáveis visuais e a correspondente unidade simbólica, no estudo de funções polinomiais de 1º grau, $y = ax + b$, onde são variáveis visuais a inclinação, intersecção com os eixos, etc; e suas unidades simbólicas correspondentes[4] são os coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1.

Seguindo essa perspectiva, a articulação entre a representação gráfica da função quadrática e as três formas padrões (fatorada, desenvolvida e canônica) de escrita algébrica se realizará pelas associações entre as informações dos coeficientes na forma algébrica e informações geométricas observadas na representação gráfica.

Na função quadrática, cada uma dessas formas de representação algébrica tem sua funcionalidade, ou seja, cada forma da função quadrática fornece informações que dizem respeito a diferentes informações da sua representação geométrica, tais como: a intersecção com o eixo das abscissas, com o eixo das ordenadas, as coordenadas do vértice, ou ainda, a orientação da curva.

Dessa forma, os tratamentos realizados na função terão como finalidade acessar as diversas informações específicas, tanto no que diz respeito às escritas algébricas, quanto à representação geométrica da função quadrática.

Na segunda etapa do nosso trabalho, queremos que o aluno encontre a resposta exata dos problemas de máximo e mínimo, que já havia sido antecipado graficamente (na primeira etapa), através do vértice da parábola. Assim, privilegiamos a forma canônica da função quadrática pois nela, pela simples observação da expressão algébrica, podemos ver com facilidade as coordenadas do vértice da parábola.

Analogamente ao trabalho de Duval (1998), o nosso ponto de partida para o estudo das articulações entre o registro de representação algébrica e o geométrico (gráfico) consiste na descrição sistemática das variáveis visuais e correspondentes unidades simbólicas significativas. E sobre isto, encontramos em Maia (2007) um estudo sobre a representação algébrica e gráfica da função quadrática em que a

---

[4] Em Duval (2003) o autor usa valores escalares da equação ao invés de unidades simbólicas correspondentes.

autora destaca as variáveis visuais pertinentes ao gráfico e as correspondentes unidades simbólicas relacionadas à representação algébrica da função quadrática em sua forma canônica, como mostram os dois quadros abaixo.

Quadro 3 – Unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a>0 (ausência de sinal -) Parâmetro a<0 (presença de sinal +)
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura	0<IaI<1 IaI>1

Fonte: Adaptado de (MAIA 2007, p. 65).

Quadro 4: Unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas(translação vertical)	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	$l > 0$ $l = 0$ $l < 0$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas(translação horizontal)	À esquerda do eixo Na origem À direita do eixo	$k > 0$ $k = 0$ $k < 0$

Fonte: Adaptado de (MAIA 2007, p. 65).

Assim, temos quatro variáveis visuais relacionadas à análise da representação algébrica canônica $y = a(x - k)^2 + l.$

As duas primeiras dizem respeito à concavidade e à abertura da parábola e têm como unidade simbólica correspondente o coeficiente $\boldsymbol{a}$. As duas últimas correspondem aos movimentos de translação horizontal e vertical da parábola $y = x^2$ e têm como unidades simbólicas correspondentes **k** e $\boldsymbol{l}$.

Voltando ao exemplo da figura 3, os autores Moretti e Thiel (2012) usam o recurso de translação no esboço de curvas pois consideram que, desta forma, o aluno conseguirá compreender melhor a situação estabelecendo relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica.

Agora a curva $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$, é tratada globalmente e apenas um ponto se destaca: o vértice da parábola. Eles afirmam que esse procedimento traz uma grande economia da atividade do esboço, uma vez que grande parte do trabalho está fundamentada na translação de uma curva cuja forma já é conhecida. Assim, o gráfico resultante da expressão $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ pode ser vista como o deslocamento de $f(x) = 2x^2$, a saber: através do "completamento" de quadrados realiza-se um tratamento na escrita algébrica da primeira equação, obtendo-a na sua forma canônica $f(x) = 2(x-1)^2 + 4$. Seu gráfico pode ser obtido por meio de dois movimentos de translação da parábola de equação $f(x) = 2x^2$: horizontal a direita em 1 unidade e vertical para cima em 4 unidades. O vértice que tinha coordenadas (0,0) passa para (1,0) e em seguida para (1,4), conforme mostra a figura 4.

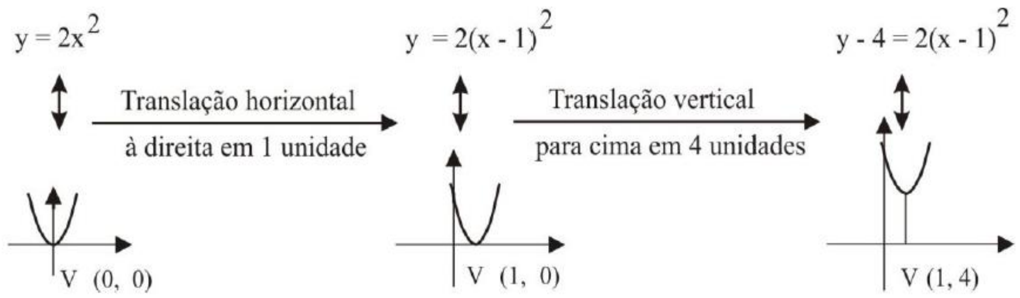


Figura 4: Esquema da representação gráfica de $\boldsymbol{y = 2x^2 - 4x + 6 \; ou \; (y - 4) = 2(x - 1)^2}$.
Fonte: Moretti e Thiel (2012, p. 390).

No esquema da figura 4, observa-se que movimentos horizontais e verticais efetuados na curva são percebidos de forma simultânea nas representações gráfica e algébrica. Assim, como sugere Duval (1988), faremos uso da translação em nosso trabalho como recurso, visando favorecer uma relação mais direta entre a expressão algébrica e o esboço da curva no plano cartesiano como um todo.

Este modo de proceder para esboçar a curva permite que modificações possam ser percebidas nos dois sentidos da conversão e isso contribui para a percepção de interpretação global de que fala Duval (2011a, *apud* MORETTI; THIEL, 2012, p 392).

2.1.1 Caracterização da atividade matemática do ponto de vista cognitivo

Uma das diferenças entre o funcionamento do pensamento em matemática e o funcionamento do mesmo em outras áreas do conhecimento científico encontra-se nos registros de representação semiótica que são utilizados. Duval (2003) destaca que a atividade cognitiva requerida no estudo da matemática é diferente daquelas requeridas em outros domínios do conhecimento. Esta diferença deve ser procurada em duas características: na importância das representações semióticas, ou seja, as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado e de que os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos; e na grande variedade de representações semióticas utilizadas na matemática, tais como sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas, representações gráficas e linguagem natural. E as conversões exigem uma operação cognitiva mais complexa do que a transformação do tipo tratamento. Para os alunos, a variação na congruência nas conversões é uma das maiores causas da incompreensão ou de erros de interpretação dos enunciados dos problemas. Segundo Duval (2011, p.103): “[...] os alunos ficam sem argumentos se as conversões a realizar não são congruentes e se os tratamentos a efetuar não são uma aplicação automática de algoritmos de cálculo” .

Ainda de acordo com Duval (2003), devemos entender a complexidade cognitiva do ensino da matemática não somente analisando os erros dos alunos, mas também procurando entender os funcionamentos cognitivos que concorrem para a compreensão e o controle da diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. Nos diz ele:

> Para ver e para ensinar a matemática de outra forma é preciso, ao contrário, ter consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático e desenvolvê-los com os alunos, mesmo que, fazendo isso, os professores tenham a impressão de não mais fazer (momentaneamente) matemática (DUVAL, 2011.p. 9).

E mais, é preciso considerar que a causa dos bloqueios de compreensão que muitos alunos possuem, podem estar nos conceitos matemáticos, por vezes, muitos abstratos; mas também podem ter origem nas complexidades epistemológicas, as quais podem ser explicadas através da história da matemática, no contexto das descobertas, dos avanços e das hesitações:

> "[...] os problemas específicos de compreensão que os alunos enfrentam na aprendizagem da matemática têm sua origem na situação epistemológica particular do conhecimento matemático, e não somente nas questões de organização pedagógica das atividades". (DUVAL, 2011, p. 9).

É interessante observar que o próprio desenvolvimento da matemática depende de sistemas de representação semiótica. É tal a importância dos sistemas que basta imaginar o que teria acontecido com o desenvolvimento dessa ciência se não tivesse surgido o sistema posicional de numeração. Além dos sistemas de numeração (decimal, binário, etc.), as figuras geométricas, as notações algébricas, os símbolos matemáticos, os gráficos e a língua materna são exemplos dessa grande variedade de representações.

No caso do estudo das funções afim e quadrática temos, naturalmente, um sistema semiótico que é de natureza algébrica e outro de natureza geométrica. Ao colocar como ponto de partida, na sequência de atividades, problemas em contexto geométrico, estaremos utilizando também o registro discursivo na forma de linguagem natural e/ou simbólica, e o registro geométrico na forma de figuras.

Nesta seção tratamos de questões teóricas que vão nos ajudar a compreender as dificuldades que se apresentam para nossos alunos do primeiro ano do Ensino Médio, no estudo das funções afim e quadrática. Com a teoria dos registros de representação de Duval fica mais clara a complexidade da atividade matemática sob o ponto de vista cognitivo.

Na próxima seção trataremos do potencial dos ambientes de Matemática Dinâmica, e para a análise a ser feita vamos considerar a teoria de registros de representação de Duval .

2.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DINÂMICOS

Todos reconhecem o papel fundamental das instituições escolares no desenvolvimento intelectual, social e afetivo do indivíduo. Assim, em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, em ritmo acelerado, não é mais possível ignorar as alterações que as tecnologias da informação e da comunicação (TICs) provocam na forma como as pessoas veem e apreendem o mundo.

Também é reconhecido que a construção de conceitos e ideias matemáticas é questão de fundamental importância nas práticas de ensino e que é um dos importantes aspectos que fazem parte do processo de aprendizagem. É com esse vínculo estreito entre ensino e aprendizagem, e agora também olhando para o potencial semiótico de software de matemática dinâmica, que vamos tratar de questões relativas à construção de conceitos e ideias, no que segue. Argumentaremos que não se pode mais desprezar o potencial pedagógico que se tem nas tecnologias, quando elas são incorporadas à educação.

Tomamos como ponto de partida para nossa reflexão as contribuições de Gravina (2001) e Gravina & Santarosa (1998). Segundo Gravina (2001), os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem. Mas o mais importante, segundo a autora, é que estes ambientes podem auxiliar os alunos a transpor as barreiras dos raciocínios empíricos para aqueles de natureza hipotético-dedutivo, estes baseados em argumentações e não mais apenas na observação e experimentação:

> Na transição do conhecimento empírico para o que tem teoria matemática, mostra-se necessária uma crucial reestruturação de forma de pensar, e a tecnologia informática pode muito bem intermediar o desenvolvimento das habilidades cognitivas que aí entram em jogo (GRAVINA, 2001, p. 5).

O software de geometria dinâmica escolhido pela autora, em seu trabalho de investigação, foi o Cabri-Geometry II. A escolha desse software justificou-se, segundo ela por ser: “um dos mais versáteis quanto a recursos de construção e de manipulação dinâmica de objetos geométricos, além de disponibilizar interface em português” (GRAVINA, 2001, p. 5). E, ela ainda destaca mais um recurso que o software permite que é a manipulação das figuras diretamente na tela do computador :

> O “desenho em movimento” torna-se revelador dos invariantes que são decorrências implícitas da construção feita. De imediato percebe-se parte da potencialidade do ambiente: ao permitir a construção e manipulação de objetos concreto-abstratos, ele desencadeia algumas das primeiras ações

> mentais características do pensar matemático- o estabelecer relações e conjecturar- e o faz de forma contundente, se comparado às possibilidades apresentadas pelo desenho estático, em papel (GRAVINA, 2001, p. 6).

O software escolhido por nós, para ser analisado e usado no momento da experiência, foi o GeoGebra. Ele possui todas as características atribuídas ao software Cabri, e também incorpora a possibilidade de trabalho em registro algébrico , sincronizado com registro geométrico e gráfico, como veremos . O próprio nome GeoGebra , Geo para geometria e Gebra para álgebra, sinaliza este potencial, e assim ele pode ser considerado um interessante e rico exemplar de software de matemática dinâmica. Além disso, ele tem as vantagens de ser um software livre e pode ser instalado em computador com qualquer sistema operacional. Outras informações e download podem ser obtidos em: http://www.geogebra.org/cms.

A interface do GeoGebra é dinâmica e interativa. Ela permite que o aluno transite, ao mesmo tempo, entre os diferentes registros de representação de um objeto; este recurso do software propicia uma constante interpretação das ações sobre as diferentes representações que se descortinam, de forma simultânea, na tela do computador .

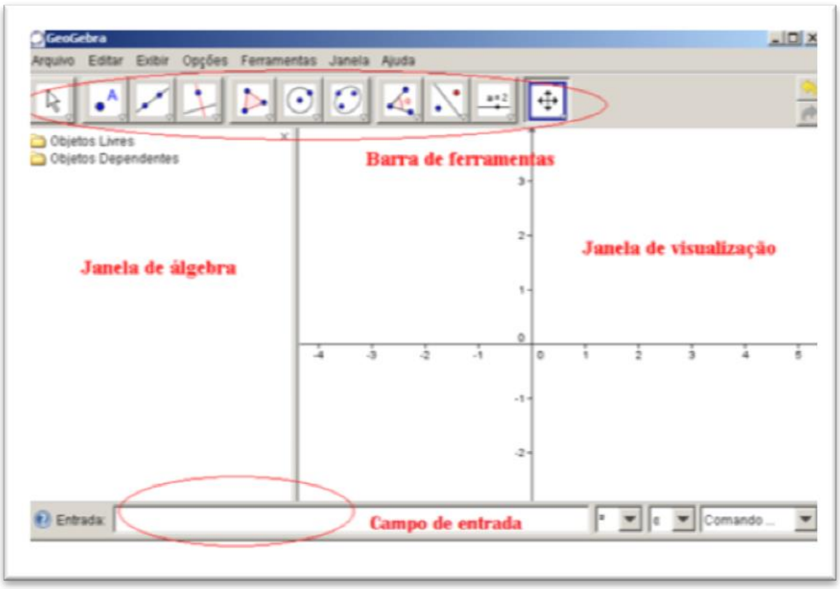


Figura 5: Interface do GeoGebra.

Conforme já discutido na seção anterior, uma exploração em que o aluno consiga visualizar e identificar o mesmo objeto em suas diferentes representações é uma das condições para a compreensão em matemática. Quanto ao potencial das múltiplas representações, nos diz Gravina:

> Considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, [...] ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. O aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema à outro, atividade que geralmente demanda tempo (GRAVINA, 2001, p. 14).

Vale aqui registrar que a autora sinaliza que o processo de construção geométrica também está relacionado com o conceito de função e que é essa relação funcional que promove o dinamismo estável das figuras: “as variáveis independentes correspondem aos objetos que podem ser movimentados e são esses que dão dinamismo à figura” (GRAVINA, 2001, p. 85). Ela nos traz um exemplo com a construção de um quadrado a partir do segmento AB. O segmento AB corresponderia à variável independente e o quadrado (construção final) à variável dependente. As figuras mostram, respectivamente, a construção do quadrado usando procedimentos geométricos e a relação funcional que existe quando fazemos essa construção:

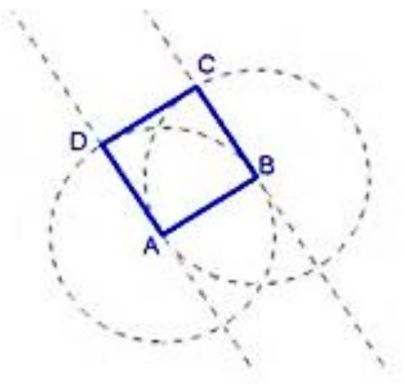


Figura 6: Desenho de quadrado com procedimento geométrico.
Fonte: Gravina (2001, p. 85).

Figura 7: Relação funcional entre objetos, armazenada pelo software.
Fonte: Gravina (2001, p. 85).

No nosso trabalho vamos propor uma experiência de ensino sobre funções afim e quadrática, na qual o software GeoGebra se torna um recurso tecnológico de fundamental importância. Isto porque ele apresenta a possibilidade de manipulação simultânea de diferentes registros de representação.

A ideia geral das atividades a serem propostas é a seguinte: ao aluno será apresentada uma construção geométrica, já pronta. É importante dizer que as construções geométricas não são o propósito da experiência, mas sim que é através delas que os alunos vão entender a ideia de variabilidade, crucial no conceito de função. Valendo-se dos recursos dinâmicos do software, os alunos vão observar/explorar, inicialmente de forma qualitativa, relações de dependência entre variáveis. Nas construções geométricas a serem propostas, vão ser exploradas variáveis que correspondem a grandezas geométricas, tipo medidas de comprimento, de área, de perímetro. Após esta exploração qualitativa da construção geométrica, será feita a construção do gráfico. E como última parte da atividade, será feito o estudo da "lei" da função.

Os recursos do GeoGebra tornam possível tal tipo de atividade. Consideramos que estamos trazendo uma abordagem inovadora, ainda pouco explorada no ensino de funções; na escola, no geral, o estudo das funções inicia com as suas "leis".

A figura 8 ilustra o "espírito" das atividades propostas. De início, os alunos exploraram qualitativamente as relações matemáticas que podem ser percebidas a partir do dinamismo da representação, de caráter visual – na figura 8, o pentágono cor de rosa muda de forma. Esse dinamismo é obtido através da manipulação direta, no caso o ponto extremo do segmento destacado em azul sobre a figura, que se apresenta na tela do computador. Com esta exploração qualitativa espera-se que os alunos percebam relações entre variáveis e que estabeleçam as características de crescimento/decrescimento entre as variáveis, que façam uma previsão de como será o gráfico, que estimem os pontos de máximo ou mínimo, etc.

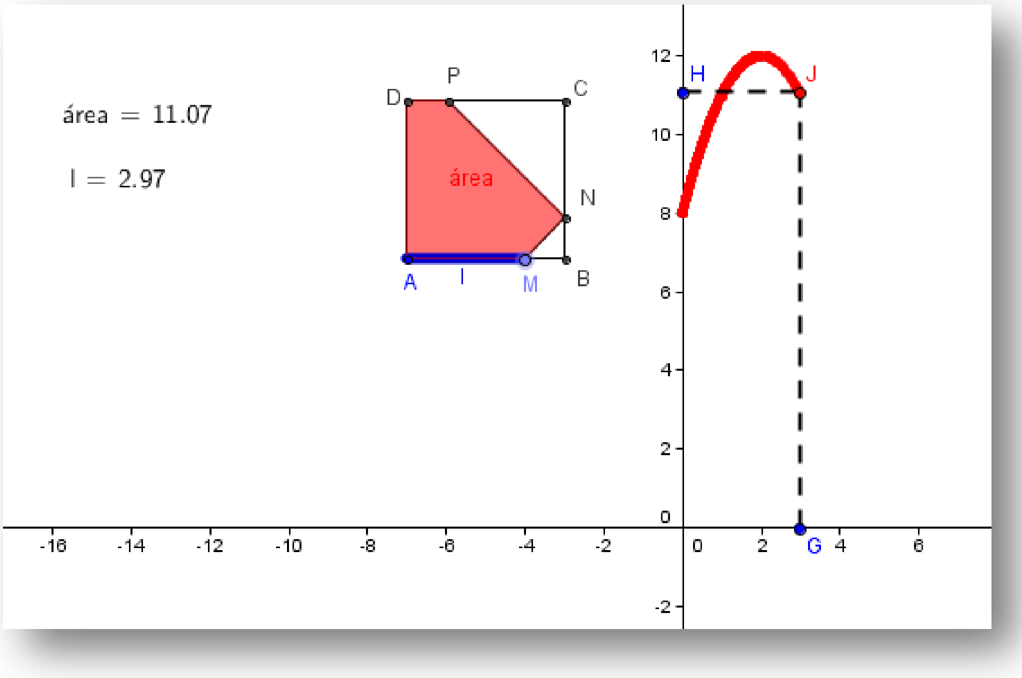
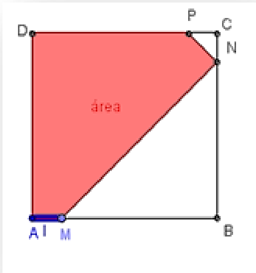
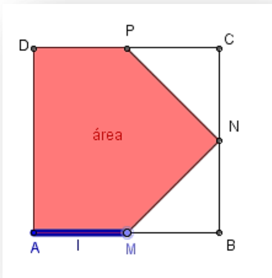


Figura 8: Gráfico da função a partir do movimento do ponto M.
Fonte: A autora

Depois desta exploração inicial, será feita a construção do gráfico sem que se tenha a necessidade da mediação de expressões algébricas ou tabelas, diferentemente do que encontramos nos livros didáticos. Nos livros, a apresentação do conceito de função é feita através da sua forma analítica, e a partir dela é construída uma tabela numérica correspondente e com estes dados é feito um esboço da representação gráfica no plano cartesiano. Com os recursos de medida de segmento e medida de área são construídos os pontos que correspondem às variáveis independente e dependente, sobre o eixos OX e OY; depois é construído o ponto que pertence ao gráfico e que poder ter seu “Rastro” habilitado – é a curva vermelha na Figura 8. O traçado[5] do gráfico vai sendo desenhado conforme o ponto M, um dos extremos do segmento azul no polígono cor de rosa, é manipulado.

A tela do GeoGebra nos dá, também, a possibilidade de observar empiricamente as mudanças nos valores numéricos das variáveis, que ocorrem quando movimentamos o ponto M. Podemos acompanhar as atualizações de valores de medida do segmento azul e de área do polígono rosa, na janela de álgebra do software, conforme muda a forma do pentágono, na janela de visualização do software, conforme ilustra a Figura 9.

Janela de Álgebra	**Janela de Visualização**
$l = 0.63$ $\text{área} = 10.11$	
$l = 2.01$ $\text{área} = 12$	

[5]Aqui usamos a função rastro do GeoGebra.

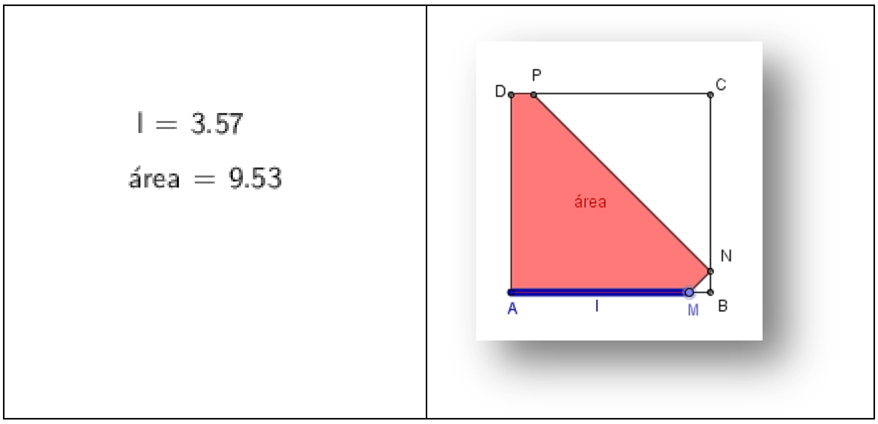


Figura 9: Registro numérico e geométrico (figura).
Fonte: A autora

Conforme já discutido na seção 2.1, para que um aluno aprenda matemática é necessário que ele tenha domínio de pelo menos dois registros de representação (DUVAL, 2003). A escolha do segundo registro é metodologicamente importante pois permite reconhecer se duas representações, pertencentes a dois registros diferentes são, ou não, representações de um mesmo objeto.

Em trabalho mais recente, Duval (2011) fala da importância de situar a contribuição que o computador, com seus softwares, proporciona aos modos de produção de representações semióticas. Ele afirma que os computadores não constituem um novo registro de representação, pois as representações que eles exibem são as mesmas que aquela que são produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Para esse mesmo autor, ver a figura geométrica no monitor ou vê-la no papel exige que nosso olhar faça a mesma desconstrução dimensional, exige que antecipemos as mesmas operações mentais de processamento da figura. Analogamente, ver gráficos em um monitor exige que sejamos capazes de reconhecer os valores visuais matematicamente pertinentes e coordená-los com os termos da equação. Sobre os ganhos que se tem com este novo suporte para representações , nos diz Duval:

> No entanto, eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto a produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

Ainda em relação ao uso do computador, Duval (2011) diz que o mais espetacular é que “as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais. Podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto” (p.137). O autor considera esse aspecto “dinâmico” apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento, ou seja, fazer transformações dentro de um mesmo registro.

Acreditamos que os softwares de matemática dinâmica podem contribuir muito para explorar a transformação de conversão, na sala de aula, pois eles possibilitam a representação de um mesmo objeto, em diferentes registros de representação. O exemplo a seguir mostra a representação de uma situação, que explora intuitivamente o conceito de função. Trata-se de uma atividade em que os alunos movimentam um ponto pré-determinado na figura e, em consequência, a forma dessa figura muda. Num primeiro momento, queremos que o aluno perceba que o valor associado à área do pentágono depende da posição desse ponto (segmento azul, nomeado de l). Através do registro numérico (janela da álgebra), o aluno pode ver a atualização de valores, provocado pelo movimento na figura e, ao mesmo tempo, ele pode, através do registro geométrico (gráfico), explorar a situação, determinando os intervalos em que a área está crescendo e/ou decrescendo e também fazer uma previsão de onde ela é máxima e/ou mínima. Conforme mostra a figura 10.

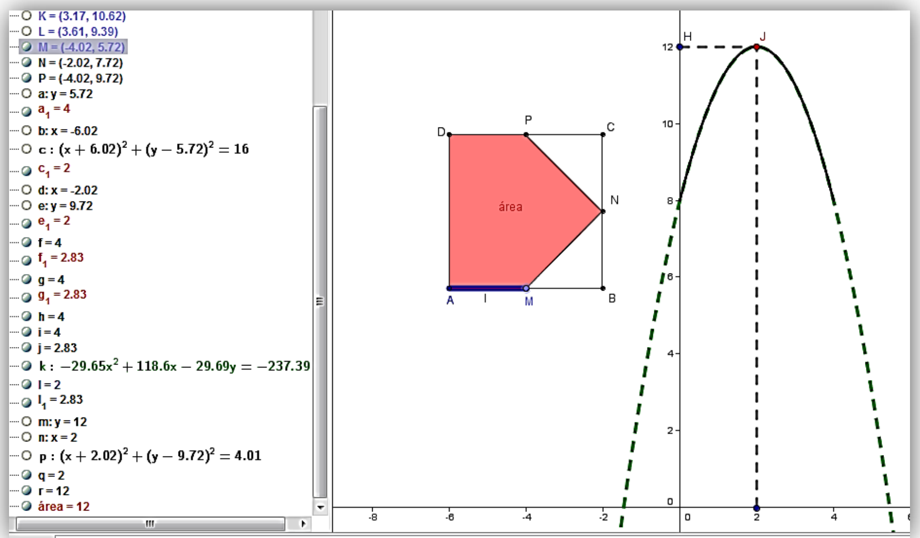


Figura 10: Área do pentágono vista nas três representações.
Fonte: A autora

Na figura 10 temos, na janela de visualização, a representação da área de um pentágono representado geometricamente (figura e gráfico) e numericamente na janela da álgebra. Neste caso, além de permitir a representação, o software de matemática dinâmica permite a interação sobre o objeto matemático através da representação geométrica (figura), representação geométrica (gráfico) e representação numérica. Este é um fato importante, pois privilegia os dois sentidos da transformação de conversão, permitindo uma compreensão mais aprofundada do objeto função.

Com o GeoGebra, também é possível partir de registro geométrico gráfico obter o registro algébrico. O gráfico obtido como a trajetória de um ponto, na figura 10 também pode ser obtido utilizando a ferramenta "Lugar Geométrico" e o menu de construção de cônicas. Para que a equação seja informada pelo GeoGebra, é necessário que se construa a cônica correspondente ao gráfico obtido como lugar geométrico. A equação do gráfico é encontrada apenas nos casos onde esse gráfico é uma reta, uma circunferência ou uma cônica.

Além disso, o dinamismo do software proporciona que a construção do conhecimento seja produzida por ações mentais, associado a ideias de exploração, estabelecimento de relações, levantamento de hipóteses e reflexão, diferente daquele conhecimento mais teórico, formal, a partir de processos empíricos ou por transmissão oral onde só o professor fala. Uma outra característica do potencial semiótico do software é a possibilidade de visualizarmos diferentes representações de um mesmo objeto, numa única tela, e com a possibilidade de articulação entre essas representações em tempo real.

É tirando proveito das representações dinâmicas que vamos propor uma sequência de atividades que pretende minimizar as dificuldades, dos alunos, no que se refere à interpretação e compreensão de situações que envolvam as distintas representações de funções afim e quadrática. O detalhamento da sequência será feito no capítulo 4. No próximo capítulo ainda vamos tratar de questões que vão nos ajudar a esclarecer as escolhas que fundamentam o desenho da sequência de atividades.

3 FUNÇÃO: REFLEXÕES SOBRE O TÓPICO DE INTERESSE

Neste capítulo, na primeira seção, fazemos uma breve reflexão sobre a história do conceito de função, com o objetivo de apresentar alguns acontecimentos no desenvolvimento da matemática que influenciaram nas suas representações. Depois tratamos de questões conceituais que podem ser origem de dificuldades no processo de aprendizagem, tomando como referência a posição crítica de Caraça (1978). Dificuldades específicas de aprendizagem são elencadas, a partir de artigos que tratam do tópico em questão.

Nos documentos oficiais, tratamos de observar como está sendo proposto o ensino de funções no Ensino Médio e nos livros didáticos escolares analisamos as abordagens de ensino que estão sendo propostas. Na última seção do capítulo elencamos algumas experiências de ensino que foram realizadas tratando do ensino de funções, e que fazem uso ou não de tecnologia.

3.1 REFLEXÕES DE NATUREZA HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA E COGNITIVA

3.1.1 Sobre a evolução do conceito de função

O conceito de função, considerado um dos mais importantes e essencial às áreas relacionadas das ciências passou por evoluções relevantes. Segundo Ponte (1990) não se trata de uma noção abstrata muito antiga; seu surgimento como conceito abstrato individualizado e como objeto de estudo em matemática remonta aos finais do século XVII.

Mas é claro que podemos encontrar aspectos simples desse conceito, como por exemplo, na mais elementar operação de contagem, em épocas anteriores. Embora haja pouco consenso sobre a origem do conceito de função, a ideia de dependência entre quantidades é atribuída aos babilônios e o uso de tabelas é atribuído aos gregos, nas suas conexões entre Matemática e a Astronomia. Segundo Zuffi (2001, p.11):

> [...] não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo. Alguns deles consideram que os Babilónios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade[...] em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas [...] que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

Youschkevitch (1976) destaca três momentos da evolução do conceito de função. Na Antiguidade, há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis, não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já na Idade Média, estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob a forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. É só no período Moderno, final do século XVI, que expressões analíticas[6] e funções começam a prevalecer. Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da História rumo à generalização e à formalização do conceito de função. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito, ao mesmo tempo, que é fator de construção desta compreensão.

Na Idade Média, Nicole Oresme (1323-1382) destacou-se entre vários estudiosos da matemática que, por quase um século antes de seu tempo, vinham discutindo a quantificação das “formas” variáveis. Segundo Boyer (1974) essas formas podiam representar a velocidade de um objeto móvel e a variação da temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não uniforme.

Para esse mesmo autor essas discussões eram muito extensas e não havia instrumentos adequados para fazer a análise de tais formas. Apesar dessa falta, os lógicos do Merton College obtiveram um teorema sobre o valor médio de uma forma “uniformemente disforme”, isto é, uma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante. Sobre esse pensamento, Oresme começou a se questionar sobre a possibilidade de traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual as coisas

---

[6] É uma expressão matemática que apresenta uma relação entre quantidades variáveis e constantes.

variam[7]. Conforme ressalta Boyer (1974, p.192): “vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções”.

De fato, temos nos estudos de Oresme a primeira representação gráfica no sentido funcional e, ainda o conceito de variação de duas quantidades está ligado à ideia de continuidade.

Para Oresme, a mensurabilidade podia ser representada de maneira contínua traçando um gráfico de velocidade versus tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Nessa perspectiva, Boyer (1974) comenta que o gráfico de Oresme foi traçado:

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendiculares à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (BOYER, 1974, p. 192).

Segundo esse mesmo autor, Oresme também percebeu que as extremidades dos segmentos, que representavam a velocidade, ficavam alinhados, formando uma reta e, ainda que, se o movimento uniformemente acelerado partisse do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade, encheria um triângulo retângulo. Apesar de não fornecer explicação para esse fato, Oresme afirmava que a área do triângulo representava a distância percorrida. De acordo com o ponto de vista de Boyer (1974, p.193), “é provável que [Oresme] pensasse na área [do triângulo] como sendo formada de muitos segmentos verticais ou indivisíveis, cada um dos quais representava uma velocidade que se mantinha por um tempo muito curto”. De acordo com Boyer (1974, p.193) “Oresme forneceu uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final.” A figura 11 ilustra a representação gráfica de Oresme.

---

[7] Mesmo havendo divergências quanto à antecipação do conceito de função por Oresme. BOYER(1974) sugere que Oresme, foi o primeiro a ter essa ideia pois, mesmo que tenha sido encontrado registros mais antigos a exposição de Oresme era superior em clareza e influência comparada ao registo anterior.

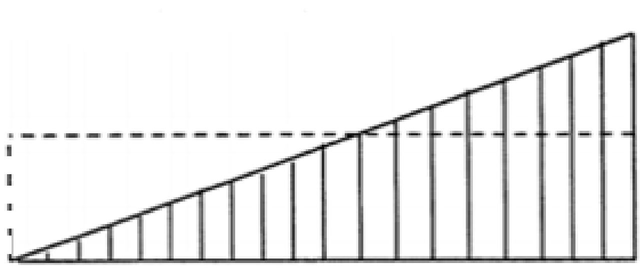


Figura 11: Representação gráfica utilizada por Oresme.
Fonte: Boyer (1974, p.193).

Essa representação gráfica, conhecida como a latitude de formas, representa por si só uma forma complexa e repleta de predicados para representação de um conceito, principalmente no que diz respeito às funções.

A lei proposta por Oresme foi estudada durante mais de duzentos anos. A demonstração que celebrizou Galileu (1564-1642), sobre a lei do movimento uniformemente variado, é a mesma que foi utilizada por Oresme. Por seu lado, Galileu estabeleceu uma lei que relacionava o tempo e o espaço percorrido por um corpo em queda livre. A lei, como sabemos, estabelece que o espaço percorrido é diretamente proporcional ao quadrado do tempo da queda, considerando também que o corpo está sujeito à ação da gravidade. A relação de proporcionalidade entre as duas quantidades, o espaço e o tempo, são relacionadas por Galileu de forma verbal, que privilegia esta representação do conceito de função. Ainda nos tempos de Galileu, tal como na antiguidade, as leis que relacionavam duas quantidades eram definidas por descrições verbais e gráficos.

Galileu apresenta a proporcionalidade de tempo em relação à velocidade geometricamente, como mostra a figura[8] 12. Ele atribui dimensões físicas de velocidade, espaço e tempo que podem descrever tanto movimentos uniformes quanto movimentos naturalmente acelerados.

[8] A notação (*) foi colocada para facilitar a compreensão das grandezas físicas representadas na mesma, segundo Ribeiro Junior et al (2012, p.4).

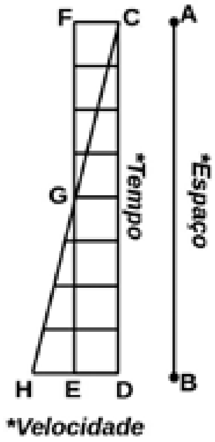


Figura 12: Comparação entre os movimentos.
Fonte: Ribeiro Junior et al (2012, p.4).

Na figura 12 acima, o movimento uniforme é descrito pelo retângulo CDEF, onde é possível notar que velocidade, segmentos de reta horizontais dentro do retângulo, não aumentam com o tempo. Já no movimento acelerado, caracterizado pelo triângulo CDH, percebe-se que a velocidade aumenta de maneira constante.

Galileu procurou reunir os diferentes conceitos com auxilio das leis inspiradas na experiência e observação. A insistência em estudar os movimentos de forma quantitativa, por intermédio da experimentação, muito contribuiu para a evolução da noção de função: lidou de forma funcional concreta com as causas e efeitos, e esta necessidade é essencial à concepção de variáveis independentes e dependentes.

Segundo Palaro (2008, p. 2), “Já no Período Moderno, mais precisamente no século XVI e especialmente no século XVII, as expressões analíticas das funções começam a prevalecer em detrimento das descrições verbais ou representações”.

A ideia de se introduzir analiticamente uma função é desenvolvida de maneira mais detalhada por Descartes (1596-1650) no terceiro apêndice de seu tratado filosófico Discours de la Méthode pour Bien Conduire la Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences, parte de sua obra intitulada La géométrie (1637). Segundo Boyer (1974), esta obra é voltada para a aplicação da Álgebra à Geometria, e nesta aproximação os elementos-chave foram a introdução de variáveis e a expressão da relação entre as variáveis através das equações. É com os trabalhos de Descartes, e também de Fermat (1602-1665), que se considera o inicio da “algebrização” da Geometria, pois é a partir deste momento que se estabelece uma relação estreita entre a representação algébrica e a representação geométrica, que culminou com a moderna Geometria Analítica. Esta aparição de novas ideias materializa uma mudança radical no desenvolvimento da Matemática, uma vez que segundo Palaro (2008) “a utilização de expressões analíticas e as operações que as produzem a partir de regras específicas, conferem ao estudo das funções um caráter de verdadeiro cálculo” (PALARO, 2008, p. 2). Além disso, conforme afirma Youschkevitch (1981, *apud* PALARO, 2008, p. 2) “o método analítico para expressar dependência funcional se tornou tão eficiente que a noção de função passou a assumir um lugar central em todas as ciências exatas”.

Nesta época, mas já no século XVII, as contribuições mais importantes ao desenvolvimento do conceito de função são dadas por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), respectivamente, com a publicação de Method of Fluxions (1736) e Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur (1684). Newton, apesar de fazer pesquisas mais voltadas para a física, contribuiu para o conceito de função, sendo o primeiro matemático a mostrar que uma função poderia ser escrita como uma série de potências. Esse matemático também criou o método dos fluxos, no qual uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser quantidades variáveis, que recebiam o nome de fluente e a taxa de variação de fluxo. (EVES, 2002).

Ponte (1990, p.3) diz que: “Newton também utilizou os termos “*relata*” para designar a variável dependente e “*genita*” para uma quantidade obtida através de outras pela utilização das quatro operações aritméticas fundamentais.

Leibniz indicava a forma de se encontrarem os máximos e os mínimos de curvas e, também, as tangentes em pontos dados (COOKE, 1974 *apud* FIGUEIREDO, 2010, p. 12). Destaca-se que foi Leibniz que pela primeira vez usou o termo “função” com o mesmo sentido que é utilizado atualmente e que as definições das funções utilizadas eram feitas a partir de equações. Tanto Newton como Leibniz utilizavam expressões algébricas (representação algébrica) para encontrar curvas (representação geométrica) e os cálculos destinavam-se a descrever e determinar aspectos gráficos das curvas em estudo. Ambos contribuíram de forma decisiva para a análise infinitesimal e diferencial através dos seus estudos de curvas e respectivas equações. Foram Leibniz e Newton que descobriram o desenvolvimento em séries infinitas, sendo esta descoberta tida como a mais notável e fecunda até a época, pois tornou possível representar analiticamente toda a relação funcional estudada até então (BOUTROX,1920, *apud* PALARO, 2008, p. 2).

Segundo Kleiner (1989) a importância das fórmulas e das equações que descrevem curvas começaram a ter uma importância cada vez maior nos finais do século XVII. Essa importância fez com que a atenção se deslocasse para o papel dos símbolos que aparecem nas equações e, por isso, nas relações que se estabelecem entre esses símbolos, independentemente da curva que esta associada à equação. A correspondência trocada entre Leibniz e Johann Bernoulli expõe a ausência de um termo geral para representar a relação que se estabelece entre quantidades que dependem de outras naquelas fórmulas e equações, fazendo surgir o uso do termo "funções" tal como aparece na definição de Bernoulli em 1718: "Chamamos função de uma variável à quantidade constituída de qualquer forma por esta variável e por constantes". Esta foi a primeira definição formal de função. (KLEINER, 1989, p.3).

Contudo, o método analítico criado para representar funções, começa a apresentar as suas debilidades e limitações. Segundo Kleiner (1989), pode-se dizer que foi com Euler que o conceito de função obteve maior notoriedade quando da publicação de *Introductio in analysin infinitorum*. No prefácio, Euler afirma que a análise matemática é a geral ciência de variáveis e suas funções. Ele define uma função como uma "expressão analítica" (isto é, uma "fórmula") da seguinte maneira: "Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer forma a partir da quantidade variável e de números ou quantidades constantes" (KLEINER, 1989, p.3).

Por comparação de definições podemos observar que Euler apenas deu um retoque final à definição de Bernoulli, trocando o termo "*quantidade*" por "*expressão analítica*" (PONTE, 1990, p. 4).

Foi com Euler (1707-1783) que o conceito de função sofreu uma ampliação no seu significado por meio do estudo de processos infinitos (BRAGA, 2009, p.28).

Também é atribuído à Euler a notação mais bem sucedida de todos os tempos: $f(x)$ como uma função de x (BOYER, 1974, p. 326-327). No campo das funções, aquelas a que Euler deu mais atenção, foram as funções exponenciais e as logarítmicas e foi com ele que as quantidades trigonométricas tiveram uma abordagem funcional, deixando de ser apenas linhas relacionadas com o círculo.

A ideia de que uma função podia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências foi sendo posta em causa, ainda no século XVIII, à medida que vários problemas da matemática aplicada mostravam o caráter restrito de tal conceito de dependência funcional.

O conceito de função continua o seu processo de evolução quando Fourier (1768-1830) afirmou que qualquer função pode ser representada por uma série trigonométrica, num intervalo apropriado (PONTE, 1990). Estes resultados foram obtidos pelo estudo da propagação do calor nos objetos materiais (em que a temperatura do corpo é função de duas variáveis, o tempo e o espaço). “Fourier conjecturou a certa altura que para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, num intervalo apropriado” (PONTE, 1990, p. 4). A prova informal que Fourier apresentou aos seus contemporâneos, inaceitável nos dias de hoje, foi a promotora do impulso dado ao conceito de função.

Lejeune Dirichlet (1805-1859), numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar a relação que Fourier tratava, chegou a seguinte formulação:

> [...] Uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição de função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (EVES, 2002, p. 661).

Repare-se que a definição de função relaciona valores numéricos, mas não impõe uma representação específica; a relação pode ser através de uma tabela numérica, de um gráfico ou de uma equação. Esta forma de definir função atinge um grau de generalidade que não tinha até então. Esta definição é a primeira a apresentar o conceito de função como uma correspondência entre valores numéricos, e não como uma fórmula. A referida definição é semelhante à utilizada hoje em dia, estabelecendo a correspondência entre dois conjuntos numéricos. No entanto, naquela época, não haviam sido estabelecidas as noções de conjunto e de número real.

Finalmente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no século XX, de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos numéricos ou não (PONTE, 1990, p. 4).

Relativamente aos fundamentos da teoria das funções reais, Cantor deu importante contribuição através do desenvolvimento da teoria de conjuntos. Contudo, o conceito de função, tal como o conhecemos hoje, deve-se a Bourbaki em 1939, tendo como suporte os desenvolvimentos da teoria de conjuntos. O seu conceito não apresenta mais um aspecto verbal, sendo apresentada simbólica e formalmente, atingindo o mais alto grau de abstração. Na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \epsilon f, (a_2, b_2) \epsilon f \; e \; a_1 = a_2,$ então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função (EVES, 2002, p.3). Segundo Zuffi (2001), essa definição de função, é formada como uma síntese de dois aspectos, a sua lei e o seu valor, acrescida dos conceitos de domínio e de contradomínio. Perde-se assim a ideia intuitiva de função apresentada por Dirichlet. Escondem-se, por meio da álgebra de conjuntos, as noções de variação e correspondência entre quaisquer entes matemáticos, e não apenas entre conjuntos.

Percebe-se nesse breve estudo histórico que o conceito de função passou por relevantes mudanças, tanto na forma como no conteúdo, desde a antiguidade até a Idade Moderna. Constata-se, também nesse processo evolutivo que: sempre existiu a necessidade de definir cabalmente o conceito de função; a definição e as representações, embora intimamente ligadas, eram pensadas e apresentadas separadamente.

Na próxima subseção apresentamos algumas considerações atuais sobre o conceito de função e as possibilidades de compreensão, quando se pensa no ensino escolar.

3.1.2 Sobre o conceito de função na escola

> *O que é uma boa definição? Para o filósofo ou para o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e aplica-se apenas a esses; é aquela que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação não é isso; é aquela que pode ser compreendida pelos alunos. (*Poincaré*)*

Dentro da educação formal instituída hoje, em nosso país, o assunto inicial dos programas de matemática na maioria das escolas de formação geral, no primeiro ano do ensino médio, é o estudo das funções.

Eves (2002), de maneira explícita e breve, apresenta a importância desse conceito:

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vem advogando seu uso como principal central e unificador na organização do cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática (EVES, 2002, p. 661).

O conceito de função vem alicerçado, segundo Caraça (1978), na ideia de correspondência, isto é, estudar um fenômeno físico ou não; é estabelecer um “[...] instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos” (p. 127). Sobre o conceito de função, Caraça elucida primeiramente a noção de variável:

> [...] a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos. [...]. Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da forma seguinte: Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A esse símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável (CARAÇA, 1978, p. 127).

Nesta transcrição percebe-se que o autor está preocupado com a noção intuitiva de função, e não com a sua formalização matemática. No caminho da definição do que vem a ser o conceito de função, Caraça exprime o que entende por domínio: “uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa - a sua substância, o seu domínio como daqui em diante diremos”. (CARAÇA, 1978, p. 113). O autor apresenta, então, a sua primeira definição de função:

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. (CARAÇA, 1978, p. 129).

Mais adiante, através de um exemplo, discute sobre o que chama de definição analítica de função:

> [...] uma igualdade como $y = 4{,}9x^2$ em que figura y igualado a uma expressão analítica em x, contém uma lei matemática ligando as duas variáveis; essa lei matemática define a correspondência que existe entre x e y e faz, portanto , o terreno de que a função vai se nutrir.(CARAÇA, 1978, p. 131).

Por fim, deparamo-nos com a definição geométrica (gráfica) de função:

> “seja um sistema de referência cartesiano e uma curva que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo $0\mathrm{y}$. Essa curva permite definir uma função $\mathrm{y}(\mathrm{x})$”. (CARAÇA ,1978, p.133).

Caraça apresenta três conceitos para um mesmo objeto: uma baseada em conjuntos numéricos em que o destaque está a cargo da correspondência unívoca de x para y; a segunda, que ele identifica como analítica e é introduzida por meio do estudo de um fenômeno físico (queda de um grave) e tem por destaque a existência de uma lei matemática para a referida correspondência; e a terceira, denominada geométrica, aborda a existência de uma representação gráfica de função. Percebe-se que o autor nos traz quase que uma metodologia para a construção do conceito de função, que vemos estar estreitamente ligada a ideia dos registros de representação de Duval.

A figura 13, ilustra um exemplo em que Caraça (1978) estabelece uma relação de correspondência entre o campo analítico e o geométrico. Trata-se do fenômeno da queda dos grave no vácuo que, no campo analítico, está representado pela lei matemática $y = 4{,}9x^2$ e, no campo geométrico, pela curva. Em outras palavras, Caraça quer nos dizer que a expressão analítica $(y = 4{,}9x^2)$ é a equação que representa o lugar que lhe corresponde (ou seja, a curva), isto é, ambas são representações do mesmo fenômeno.

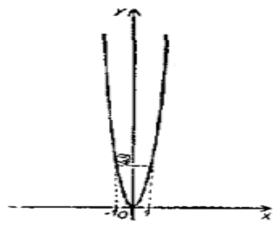
Campo analítico	Campo geométrico
$y = 4{,}9x^2$	

Figura 13:Representação analítica e geométrica da mesma função.
Fonte: Caraça (1978, p. 137).

Vê-se em Caraça a preocupação de colocar a ideia de função sob diferentes representações e assim ele nos apresenta um conceito que, para além de instrumento de estudo das correspondências, também funciona como um elo entre os campos geométrico e analítico. Diríamos que Caraça, da mesma forma que Duval, trata de realçar a pluralidade de registros de representação e de dizer que é através da coordenação de [todos os] diferentes registros (língua natural, tabelar, geométrico e algébrico) que, com tempo e trabalho, se pode alcançar a compreensão do conceito de função.

3.1.3 Sobre as dificuldades no ensino de funções

Encontramos diversas pesquisas que apontam para dificuldades no ensino de funções. Tratamos de nos concentrar nos trabalhos que apontam para dificuldades relacionadas aos diversos modos de representação que pode ter esse objeto matemático.

Conforme os resultados de investigação de Mendes (1994), para a maioria dos alunos, uma situação dada representa uma função se ela pode ser expressa por uma fórmula explícita, de preferência uma expressão analítica. Para esses alunos, da mesma forma que para os matemáticos do século XVIII, função se restringe, na verdade, a expressões analíticas.

Ao investigar as concepções de alunos do 1º ano do curso de Engenharia sobre o conceito de função, Oliveira (1997) observou que a maior parte dos estudantes: confundem função com equação; tratam uma fórmula como uma sequência de comandos para realizar um cálculo; entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função; têm dificuldade na articulação entre os registros de representação semiótica, especialmente na conversão entre as representações gráfica e algébrica de uma função.

No mesmo trabalho, com o objetivo de verificar como os professores de Matemática apresentam o conceito de função, Oliveira propôs um questionário e dos dados coletados observou que as conversões de registro mais utilizadas são da expressão algébrica para a tabela e da tabela para o gráfico. E a autora observa que, não por coincidência, estas conversões são as que mais aparecem nos livros didáticos.

Para minimizar o quadro de dificuldade identificado junto aos alunos, Oliveira elaborou uma sequência didática composta por cinco grupos de atividades e por exercícios que favoreciam as mudanças de registros de representação por acreditar que a inter-relação desses registros favorecem a construção do conceito de função.

O objetivo era fazer uma análise das funções, sem fórmulas, somente através da construção e interpretação de gráficos. Dessa forma Oliveira pretendia mostrar que função não se resumia a uma fórmula, nem a um processo de cálculo de f(x), a partir de x; ou seja, ela queria que os alunos compreendessem que um gráfico, uma tabela numérica também podem representar uma função, independentemente da existência ou do conhecimento de sua representação algébrica.

Kieran (1992), em um trabalho sobre o ensino de álgebra escolar, aponta a importância da compreensão das variáveis no estudo de funções e analisa algumas pesquisas que discorrem sobre a não compreensão de variáveis e decorrente disto, a dificuldade da apreensão do conceito de função. Citamos algumas destas pesquisas:

- Even (1988, *apud* KIERAN, 1992, p. 408) ilustra alguns efeitos de se usar as “definições conjuntistas” no ensino de funções, eliminando a ideia de dependência funcional. Aplicou um questionário que abordava a relação entre função e equação a 152 futuros professores secundários de Matemática do último ano de oito universidades americanas. A instrução que tinham recebido nas aulas, tanto no nível secundário, como no superior, havia sido baseada nos livros didáticos de álgebra, que adotam sistemas padronizados e modernos. Foram solicitados a dar uma definição de função e a indicar como esta se relaciona com a equação. Pela análise das respostas obtidas, Even concluiu que para esses futuros professores, funções só têm significado como equações. Eles não sabiam dar significado à moderna definição conjuntista de função e não eram capazes de relacionar soluções de equações com valores das funções correspondentes numa representação gráfica.

- Marckovits, Eylon e Bruckeimer (1983;1986, *apud* KIERAN, 1992, p. 409) investigaram uma possível interação do ensino de funções desenvolvido no curso de Álgebra com o das aulas de Ciências, em que são vistas como relações de dependência entre variáveis. Concluíram que estas noções não são capitalizadas no curso de Álgebra, ou seja, para a maioria dos estudantes tratavam-se de duas definições distintas em cada um dos cursos. Observaram também que os alunos apresentavam maior dificuldade em realizar uma conversão da representação gráfica de uma função para a representação algébrica.

- Dreyfus e Einsemberg (1981; 1982, *apud* KIERAN, 1992, p. 409) investigaram as bases intuitivas para o conceito de função com 440 alunos do Ensino Médio, com questões sobre imagem, domínio, crescimento, extremos e declividade nas três representações: gráficas, por diagramas e por tabelas. Concluíram que os estudantes que preferiam o registro gráfico possuíam um conhecimento melhor do conceito de função. Aqueles que preferiam o registro de tabela tinham mais dificuldades neste conceito. Observaram que a construção e a interpretação de gráficos representavam dificuldades para os alunos.

- Swan (1982, *apud* KIERAN, 1992, p. 410) constatou que a dificuldade da conversão do registro gráfico para o algébrico é, na maioria das vezes, consequência da maneira como se realiza a conversão contrária, ou seja, solicita-se aos alunos a construção de tabelas de valores que satisfaçam expressões com duas variáveis, marcarem os pontos em um gráfico cartesiano e lerem as coordenadas de um ponto no gráfico. De acordo com o autor, o fato de enfatizar apenas essas habilidades na passagem do registro algébrico para o gráfico, ocorrem dificuldades ao se converter do registro gráfico para o algébrico.

As pesquisas de Schwartz e Dreyfus (1989; 1995) analisaram a introdução do conceito de função com alunos da série inicial do Ensino Médio utilizando um ambiente computacional. Desenvolveram e avaliaram um programa intitulado "Modelo de Representação Tripla" (Triple Representation Model: TRM). Este modelo foi criado com a finalidade de ajudar os estudantes a suprirem a dificuldade de transferência de conhecimentos entre diferentes registros de representação de uma mesma função. As três representações em questão são: a algébrica, a gráfica e a tabela de valores.

Segundo os autores, apesar do conceito de função não ser teoricamente ligado a uma representação particular, para que ocorra a aprendizagem deste, há a necessidade de mudanças de diferentes representações e estas representam dificuldades para os alunos. Isto os levou a construir este ambiente computadorizado (TRM) cujas principais características são: facilitar a conversão do conceito de função entre as três representações (algébrica, gráfica e tabela de valores) bem como o relacionamento entre elas; o trabalho em cada representação é organizado em termos de operações que os estudantes têm de realizar.

Os pesquisadores utilizaram o programa em uma classe de alunos que iniciavam o estudo de funções na qual havia computadores disponíveis na razão de um para cada dois alunos e verificaram que houve um avanço na aprendizagem desse conceito, devido à prática da transferência entre estas três representações. Porém destacam também que os professores eram continuamente orientados sobre os aspectos didáticos e tecnológicos do ambiente computacional e sugerem que deve haver um grande esforço em engenharia pedagógica que possibilite aos professores dominarem atividades que contenham técnicas de trabalho em grupo, sessões de computadores e questões convencionais.

Mais na linha da nossa proposta de ensino, encontramos trabalhos que tratam das dificuldades dos alunos na resolução de problemas de máximo e mínimo.

Conforme Rezende (2003), alguns dos principais obstáculos de aprendizagem para aluno que cursa a disciplina de Cálculo "são os ditos [...]'problemas de otimização'" (p.7), também chamados de problemas de máximos e mínimos.

Segundo o autor, uma das causas para essa ocorrência pode estar relacionada ao fato de que durante o Ensino Médio, quando esse tipo de problema é abordado, se exige do aluno apenas a aplicação de regras em funções com leis já estabelecidas. Quando esse aluno chega à Universidade, na disciplina de cálculo diferencial, se depara com os "problemas de otimização" e espera-se que ele identifique as variáveis independente e dependente e a relação existente entre elas, esta uma habilidade, no geral, pouco desenvolvida nos anos escolares. Segundo o autor:

> [...] Como pode ele 'enxergar' as 'variáveis', se até agora estas eram apenas 'letras' (x e y, de modo geral) que representavam números que se relacionavam segundo uma lei de correspondência explicitada a priori? Identificar o que varia, e em função de que varia é, sem dúvida, o primeiro passo para a resolução da questão. (REZENDE, 2003, p. 8).

O trabalho de Araújo (2002), também fala da mesma dificuldade apontada acima. Novamente, se os alunos já têm a "lei" da função, então seguem os procedimentos estudados para fazer o cálculo de máximos ou mínimos. Mas se é apresentado um enunciado, a partir do qual os alunos devem identificar as variáveis e exprimir a função que as relaciona, dificuldades se apresentam. Nos diz Araújo:

> [..] Esperava-se que eles lessem um problema, dado pelo professor ou pelo livro-texto, interpretassem-no e criassem uma função que satisfizesse suas condições. Daí eles considerariam o conteúdo de Cálculo previamente estudado para responder à questão solicitada. Entretanto, os alunos não conseguiam seguir esse roteiro "de forma natural" e solicitavam ao professor uma dica, uma ajuda, para resolver os problemas. O professor, por sua vez, se desdobrava, tentando "ensinar" como um problema deveria ser tratado sem, na maioria das vezes, obter sucesso. (ARAÚJO, 2002, p. 2).

Em relação à determinação da função, espera-se que os alunos "enxerguem" as variáveis dependentes e independentes envolvidas no problema e principalmente a relação existente entre elas, mas isso não acontece conforme documentam os trabalhos de Araújo e Rezende. Para resolver o problema de cálculo os alunos, no geral, se apoiam no desenho estático da situação. No entanto, embora o desenho da figura facilite a visualização da situação, não se pode negar que esse se apresenta de maneira estática; se o aluno quiser analisar mais de uma possibilidade, deverá fazer vários desenhos. Vê-se aqui que um software de matemática dinâmica pode muito ajudar o aluno frente a essa dificuldade, este um assunto já tratado no capítulo 2.

Já no trabalho de Silva (2005) tem-se referência explícita à importância dos registros de representação, nestas situações de estudo de problemas de máximo e mínimo. Segundo o autor, o fato de não haver um trabalho de valorização dos diversos registros de representação dos conceitos estudados em cálculo, bem como das relações entre estes registros, pode explicar as dificuldades dos alunos. A escolha do tema de sua pesquisa tem origem na sua prática pedagógica e nas suas inquietações com as dificuldades dos seus alunos. O autor tratou de investigar quais os registros de representação que podem e devem ser utilizados pelos alunos na resolução de problemas de “máximos e mínimos de funções”; e também tratou de identificar possíveis dificuldades nos tratamentos e conversões dos mesmos.

Os trabalhos apresentados nesta subseção nos ajudam a evidenciar a pertinência da pergunta de pesquisa que nos propomos a responder (enunciada na página 14). Na nossa proposta de ensino estão presentes problemas de máximos e mínimos, com possibilidade de resolução que não depende de técnicas de cálculo diferencial. Mas o importante é que os problemas propostos contemplam o desenvolvimento de habilidades que são básicas quando se quer resolver problemas similares mais complexos e exigindo um maior domínio das ferramentas matemáticas.

Os resultados destas pesquisas e nossa prática docente reforça a nossa crença de que a não compreensão do conceito de função no Ensino Médio, expresse a falta de entendimento das variáveis e do relacionamento entre elas, e a não capacidade de articulação entre as diferentes representações deste conceito. Possivelmente ocorre uma aprendizagem mecânica e local em que os alunos, algumas vezes, conseguem construir tabelas de valores e gráficos a partir de expressões algébricas, sem, entretanto, compreenderem o conceito de função.

Compreender os modos pelos quais nossa cultura pensou a construção dos saberes e os legitimou, nos ajuda a pensar nos nossos modos de colocá-los em prática no âmbito escolar. Para Bkouche (1997) é a reflexão histórica e epistemológica, tanto quanto a reflexão sobre a construção individual de saberes, que permite, antes de tudo, uma reflexão pedagógica. É neste espírito que nos colocamos ao sistematizar, nesta seção 3.1, as nossas reflexões advindas de diferentes fontes de leitura.

3.2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio – PCNEM (1999) procuram dar ênfase à necessidade de transformação do ensino básico. O mesmo documento enfatiza que o ensino da Matemática no Ensino Médio não é apenas instrumental, mas que também deve contemplar o entendimento de que a matemática é uma ciência com características estruturais específicas tais com: definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos que provocam a construção de novos conceitos e estruturas. A importância desta ciência pode então ser entendida através de aplicações que resolvem problemas em outras áreas de conhecimento, onde o aspecto instrumental é de extrema importância.

Assim , segundo os PCNEM, o processo de aprendizagem do aluno deve ser ampliado para que se tenha a continuidade do desenvolvimento de capacidades como "abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade" (BRASIL, 1999, p.41). Em relação ao ensino de função o documento diz que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 1999, p.44).

Tem-se também nos PCNEM (1999) referências aos registros de representação: "[...] reconhecer representações de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações" (BRASIL, 1999, p.42).

Em 2002, o Ministério da Educação lançou um documento adicional aos PCN´s, intitulado "PCN+EM: Orientações Educacionais Complementares aos

Parâmetros Curriculares Nacionais”. Neste documento competências[9] e conhecimentos são apresentados de forma conjunta e em relação.

Para que se dê o desenvolvimento dessas competências com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias os PCN+ sugerem que se faça uma divisão dos conteúdos matemáticos em três grupos, a saber: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; Análise de dados. O primeiro deles contempla o conceito de função e sugere o vínculo deste com a álgebra, alertando, porém, que a ênfase deve estar no conceito, suas propriedades, interpretação gráfica e aplicações, ao invés, do enfoque tradicional que privilegia as manipulações algébricas e uma linguagem excessivamente formal. Assim, o estudo, poderá ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas.

Estes documentos também destacam o poder de alcance do conceito de função e a importância do mesmo para a Matemática e outros campos do conhecimento:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2002, p.121).

Recentemente, foi publicado pelo MEC outro documento com o objetivo de contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. São as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), com reflexões que alimentam a prática docente e que levam em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na Educação Básica.

Diferente dos PCN+EM, o documento apresenta uma nova divisão dos temas a serem desenvolvidas no Ensino Médio. O tema “funções” é um dos quatro blocos de conhecimento destacado no documento e é sugerido, já de inicio, que é interessante iniciar o ensino do assunto com a exploração de dependência entre duas grandezas, em situações contextualizadas e trabalhando simultaneamente as

[9] Segundo os PCN+ (Brasil, 2002), competências são qualificações humanas amplas e múltiplas e que devem articular conhecimentos, disciplinares ou não. Algumas competências são destacadas: informar e informar-se, comunicar-se, expressar-se, argumentar logicamente, aceitar ou rejeitar argumentos, manifestar preferências, apontar contradições, fazer uso adequado de diferentes nomenclaturas, códigos e meios de comunicação.

descrições algébrica e gráfica.

O documento segue enfatizando a importância do tema e que, sendo de caráter integrador, não deve ser desenvolvido isoladamente. A integração pode existir tanto nas conexões internas à própria matemática quanto na análise de fenômenos de outras áreas do conhecimento. O documento sugere que o estudo de funções seja iniciado “com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras” (p. 72). Sugerem também que os alunos sejam provocados a apresentar outras relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento. Sugere também que os alunos expressem em palavras uma função dada na forma algébrica: vê-se aqui a preocupação com a conversão de registros do algébrico para língua natural.

Quanto à representação gráfica de funções é enfatizado que a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permitirá, ao aluno, avançar na compreensão do comportamento das funções; é recomendado que o aluno trace o gráfico a partir de entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis e que relacione movimentos do gráfico com manipulações algébricas na expressão da função. Tem-se no documento:

> É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes (BRASIL, 2008; p.72).

Percebe-se novamente a importância que o documento atribui às articulações entre as representações. Na transcrição acima tem-se clara alusão às ideias de Duval, quando ele afirma que para existir a real compreensão de um conceito, deve existir o trânsito e a coordenação entre os diversos registros de representação semiótica.

Sobre ambientes informatizados, as OCEM (2008) sinalizam a sua importância no aprendizado da Matemática e também sinalizam a necessidade de redirecionamentos nos propósitos de ensino da Matemática quando se faz uso de softwares. O documento aponta para o potencial dos softwares na construção de conceitos e para a provocação que acontece de forma natural, do processo que caracteriza o “pensar matematicamente” - o aluno pode fazer experimentos, conjecturar, testar hipóteses e criar estratégias para resolver problemas.

Quanto as características dos softwares, referidos como programas de expressão, são elencadas: contêm certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; proporcionam, na mesma tela, uma visualização das diferentes representações do mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; possibilitam a expansão de sua base de conhecimento por meio de macro construções; permitem a manipulação dos objetos em tempo real. Vale aqui adiantar que o software GeoGebra, escolhido para ser utilizado em nossa proposta de ensino, está nesta categoria de programa.

Na próxima seção faremos uma análise de três livros didáticos escolares, tomando como referência as considerações que foram feitas a partir dos documentos oficiais. Em particular queremos ver como os autores abordam o tema função, função afim e quadrática, em particular quanto aos registros de representação e articulações entre eles.

3.3 COMO O ASSUNTO É TRATADO NOS LIVROS ESCOLARES

Um ponto que impulsionou a nossa análise do livro didático é o fato de que muitos professores usam este material como um manual para o ensino, e assim o livro didático muito influencia o trabalho pedagógico dos professores. Frente a esta atitude dos professores, nos diz Kieran (1992):

> Já que muitos professores dizem ensinar basicamente o que está escrito nos livros, estes podem ser um meio para assegurar que as concepções procedimentais são bem desenvolvidas e encaminhadas para concepções estruturais (KIERAN, 1992, p. 18).

Diante disso, com um olhar crítico, procuramos ver se a forma de apresentação do conteúdo nos livros pode ajudar a explicar causas das dificuldades de aprendizagem dos alunos. Escolhemos três livros didáticos, usualmente utilizados por alunos no Ensino Médio. Os livros escolhidos foram aprovados pelo

Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM)[10] e fazem parte das diretrizes propostas pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)[11].Os livros selecionados são: Matemática : Contexto e Aplicações - Dante (2010); Matemática - Paiva (2009) e Novo olhar matemática - Joamir Souza (2010). Por uma questão de praticidade, nomeamos os livros didáticos com as letras A, B e C respectivamente.

A escolha dos autores, Dante e Paiva, foi feita a partir de critérios que se justificam pelo fato dos mesmos terem suas publicações como referência no Ensino Médio, na rede Pública Estadual do Rio Grande do Sul e também privada. E de Joamir Souza, pelo fato dos alunos do colégio, onde se realiza a pesquisa, utilizarem a sua obra. Assim justifica-se a sua análise para o entendimento do ambiente onde a pesquisa está inserida.

A seguir, seguem as considerações sobre tais análises.

3.3.1 Análise do livro didático A

Na sua obra Dante, introduz a noção de função de modo intuitivo, apoiando-a nas ideias de: relação ou associação entre grandezas variáveis; dependência entre grandezas; correspondência entre elementos de dois conjuntos; “regra” ou “lei de formação” envolvendo grandezas ou números, entre outras. Depois dessa exploração intuitiva, o autor define função formalmente por meio de conjuntos, da seguinte maneira: “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$” (DANTE, 2011, p. 75). Após definir uma função, o autor apresenta a notação $f: A \rightarrow B$, evidenciando que a função f transforma x de A em y de B, escrevendo então $y = f(x)$. Na sequência, apresenta os conceitos de domínio, contradomínio e

---

[10] O Programa assegura a distribuição de livros para os alunos de escolas públicas das três séries do ensino médio de todo o país. As instituições beneficiadas são cadastradas no censo escolar que é realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Disponível em: www.inep.gov.br . Acesso em: 20/02/2014.

[11] Maiores detalhes podem ser obtidos diretamente pelo link http://www.fnde.gov.br/ . Acesso em: 20/02/2014.

imagem através de conjuntos. Nessa definição apresentada pelo autor, não ficam claras as noções de dependência, de variável dependente e independente.

A função afim é introduzida através de exemplos contextualizados para, num segundo momento, se sistematizar o assunto de maneira formal. Nessa introdução, o autor faz uso do registro na língua natural e algébrico. No estudo dessa função, é introduzido o conceito de taxa de variação, sem uma adequada atribuição de seu significado.

É por meio da abordagem ponto a ponto que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Esse tipo de abordagem é não congruente (retomando aqui conceito de Duval), pois a reta é um traçado contínuo enquanto que a tabela, por maior que seja mostra apenas certo número de pontos; a conversão no outro sentido, da reta em sua forma gráfica para a simbólica, é altamente não congruente. Dessa forma, não há articulação entre esses registros o que não contribui cognitivamente para aprendizagem do aluno, segundo Duval (2011). Depois dessa abordagem, o autor faz algumas observações sobre como traçar o gráfico da função afim dizendo que o seu gráfico é uma reta não paralela ao eixo y, e levando-se em consideração o fato de que dois pontos determinam uma reta, então basta considerar dois pontos do plano cartesiano para construir o gráfico. Tornando, a nosso ver, o processo mais mecânico ainda, sem nenhuma articulação entre registros, o que pode levar a uma não compreensão do objeto em estudo.

Ao abordar o tópico de funções quadráticas o autor inicia o capítulo com uma situação problema, como mostra a figura 14, para então definir, usando caracterização mais formal, a função quadrática.

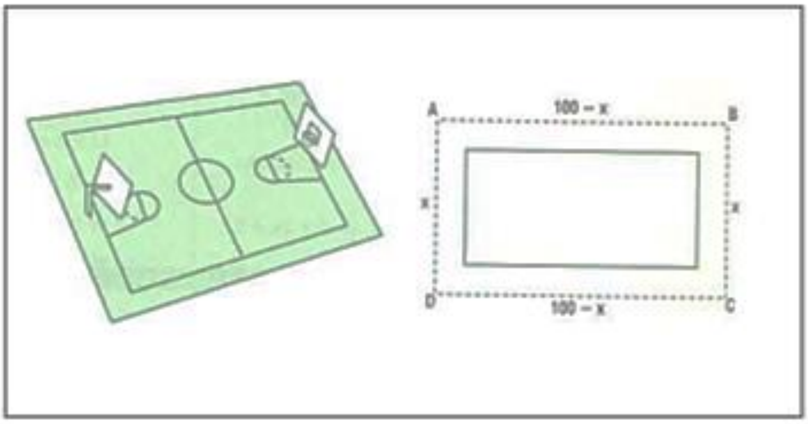


Figura 14: Modelo da situação problema.
Fonte: Dante (2011, p.150)

Dante define primeiramente o que é uma parábola utilizando-se do registro da língua natural e através do registro geométrico (gráfico) ilustra a situação. Para mostrar que o gráfico da função quadrática é uma parábola o autor, através de um exemplo, esboça o gráfico da função definida por $f(x) = x^2$, tomando alguns pontos de uma tabela, marcando-os no plano cartesiano e unindo-os, obtendo assim uma curva contínua. O autor justifica que isso pode ser feito (traçar a curva continua) pelo fato de estarem trabalhando com números reais. A seguir, ele mostra que a distância de um ponto P qualquer, tomado sobre essa curva, ao foco e a distância desse mesmo ponto a reta diretriz é a mesma, então, a curva em questão é uma parábola.

Num segundo momento, pede que se examinem os gráficos da função $f(x) = ax^2$, para alguns valores de a, como mostra a figura 15:

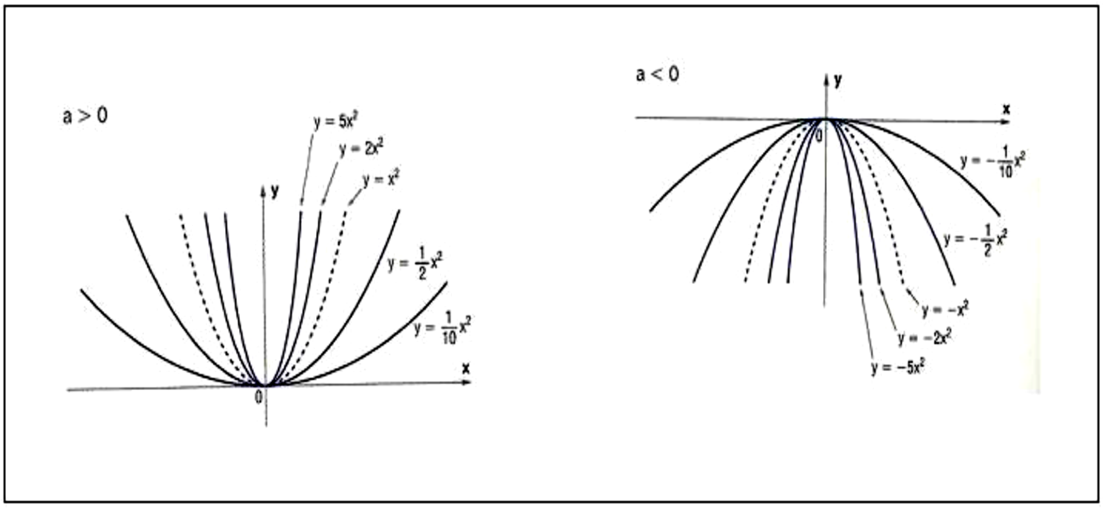


Figura 15: Gráficos da função f(x)=ax².
Fonte: Dante (2011, p.165).

O mesmo acontece com o gráfico da função definida por $f(x) = a\,x^2 + k$, como mostra a figura 16:

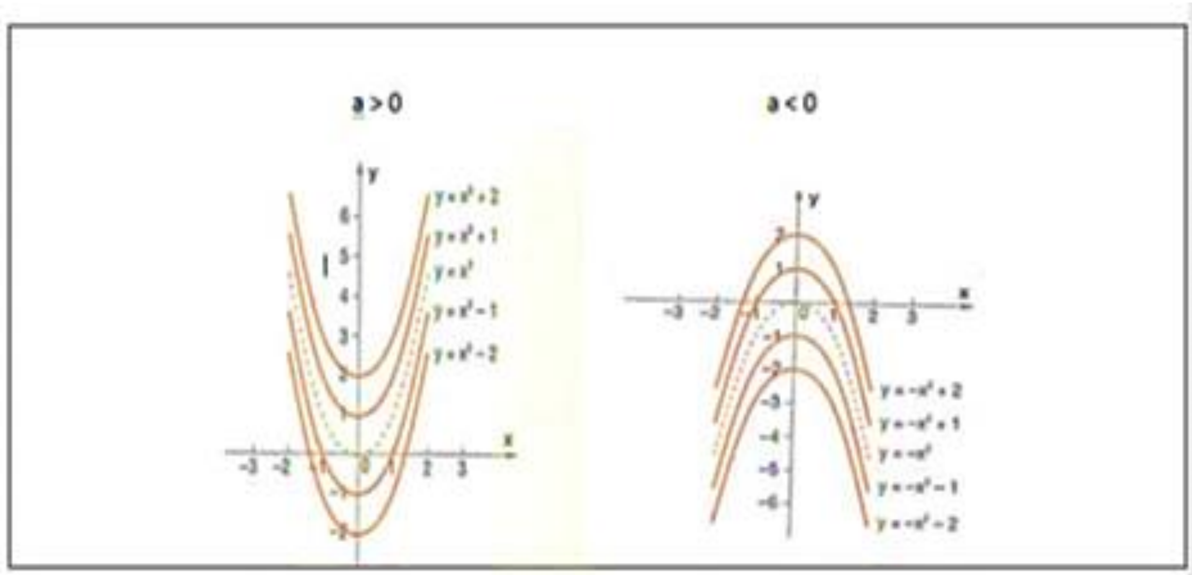


Figura 16: Gráfico da função f(x)=ax²+k.
Fonte: Dante (2011, p.167-168).

Para o gráfico da função definida por $f(x) = a\,(x - m)^2$, ele pede que se observe a tabela e os gráficos da função $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = 2\,(x-3)^2$.

Os pontos da tabela são marcados nos respectivos gráficos dessas funções, e a partir disso o autor obtém os respectivos eixos de simetria dessas parábolas e conclui ainda que o gráfico de $f(x) = 2\,(x-3)^2$ é congruente ao gráfico de $g(x) = 2x^2$, porém sua posição é 3 unidades para a direita do gráfico de $f(x) = 2x^2$. Como mostra a figura 17:

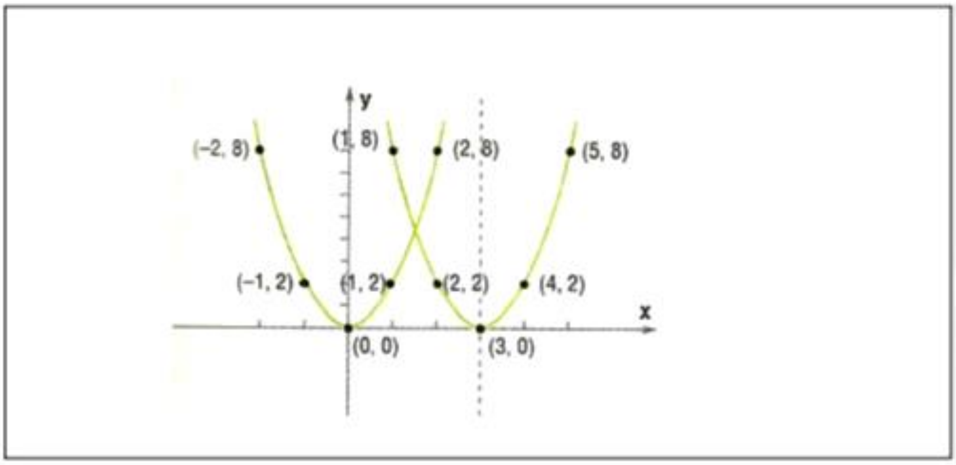


Figura 17:Gráfico de simetria da função quadrática.
Fonte: Dante (2011, p.168).

Observa-se que nesse estudo o autor se deteve a uma analise preferencialmente empírica. Vemos que não houve uma preocupação em fazer uma análise qualitativa das variáveis, que do nosso ponto de vista julgamos, promover o conhecimento do objeto em estudo. Aqui, o autor poderia ter sugerido o uso de algum recurso tecnológico como suporte. Acreditamos que isso poderia vir a contribuir com o aprendizado do ensino de funções quadráticas, levando em consideração a dinâmica que poderia existir com toda essa gama de informações, quando se percebe a família de parábolas advindas desse estudo; saindo de uma visão estática de sua representação gráfica para uma possível fase dinâmica. Um estudo feito dessa forma pode levar o aluno a fazer conjecturas através da análise dos coeficientes e também a descobrir, por si próprio, que modificações na escrita algébrica da função $f(x) = x^2$, acarretam mudanças na sua representação gráfica. É essa articulação entre registros que segundo Duval (2003) é a condição necessária para compreensão matemática.

A falta de articulação entre registros continua nos exercícios propostos, em nenhum deles é explorado a situação inversa, isto é, a partir do gráfico se obter a expressão algébrica, que como já vimos pode levar à não compreensão do conceito função.

Ao determinar os valores de máximo e/ou mínimo de uma função quadrática, o autor lembra que o vértice pode ser obtido por:

$$m = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Através de um exemplo, mostra as duas maneiras de se obter o vértice da função, ou seja, pelo uso da fórmula ou através da forma canônica.

No que segue, resolve vários exemplos e entre eles o problema que introduziu o capítulo de funções. Percebe-se, por meio das resoluções apresentadas pelo autor, que todo o tratamento dado à expressão algébrica anteriormente também foi em vão, pois em todos eles, o autor, privilegiou o uso da fórmula.

Nos exercícios propostos pelo autor, encontramos dois problemas que envolvem geometria e álgebra.

3.3.2 Análise do livro didático B

Nesse material, a ideia de relação é chamada de correspondência como uma maneira de representar função. Paiva definiu formalmente função através de sua leitura sem envolver símbolos matemáticos:

> Dizemos que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y. A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação, ou simplesmente lei entre x e y. Quando possível essa lei é expressa por uma equação. (PAIVA, 2009, p. 84).

Esta definição é mais acessível ao aluno e pode auxiliar na compreensão do conceito de função, se houver um entendimento sobre o que seja variável e sobre o significado dado à função, além da compreensão do significado de lei de associação.

Pode-se ver que o autor explora a construção do conceito a partir de experiências cotidianas, mas pouco provavelmente motivadores para alunos desse nível de escolaridade. O primeiro exemplo tirado da Física, envolvendo velocidade, tempo e distância. O segundo com dois itens, a e b, o item a, sobre temperatura e comprimento em um termômetro de mercúrio; o item b, associando o tamanho do metro de uma peça de tecido com o preço, isto é, para cada metragem de pano associa-se um único preço. Neste caso, não fica claro se a peça de tecido vai ser toda dividida em tamanhos de um metro, tendo cada metro um único preço, ou se teremos pedaços com tamanhos diferentes com o mesmo preço, o que complica seu entendimento.

Em nota de rodapé, o autor tenta clarear o significado da expressão “y é dado em função de x” e da palavra “variável”:

> 1. Podemos abreviar a expressão “y é dada em função de x” por “y é função de x”.
> 2. No contexto das funções numéricas, define-se variável como um representante genérico dos elementos de um conjunto de números. Usualmente indicamos uma variável por uma letra. Por exemplo, ao dizer que x é uma variável real, estamos afirmando que x simboliza um número real qualquer. (PAIVA, 2009, p. 84).

No primeiro caso, a impressão que fica é que nada mudou, continuamos sem saber o significado da palavra função e no segundo, surgem outros termos que precisam de esclarecimento (funções numéricas, representante genérico).

No que segue são apresentadas as diferentes maneiras de representar uma função, porém não há uma posterior relação entre estes diferentes registros de representação semiótica.

Em muitos momentos observa-se que a representação gráfica é apresentada como resultado final da ligação com outros registros de representação semiótica do objeto matemático função. Não se observa uma ligação efetuada de maneira consistente, haja vista que é praticamente durante todo o tempo em uma via de mão única e Duval (2003) nos alerta sobre esta situação:

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinado a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes (DUVAL, 2003, p. 20).

Quando aborda a função afim, Paiva usa como exemplo o funcionamento do forno de uma padaria, relacionando sua temperatura interna em graus Celsius, em função do tempo x, em minuto, a partir do momento em que o forno foi ligado, com $x = 0$ e a temperatura interna do forno igual a 30 ºC (Figura 18).

A tabela e o gráfico aqui apresentados mostram alguns valores que descrevem a temperatura *y* interna do forno, em grau Celsius, em função do tempo *x*, em minuto, a partir do instante em que o forno foi ligado ($x = 0$), quando sua temperatura interna era de 30 °C.

x	*y*
0	30
1	40
2	50
3	60
4	70
5	80

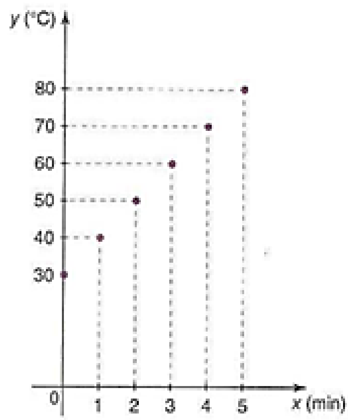


Figura 18: Representação numérica e gráfica.
Fonte: Paiva (2009, p. 117).

Aqui o autor faz uso do registro: numérico, língua natural e gráfico. Vemos que a representação gráfica, desta situação, é obtida através da abordagem ponto a ponto. Primeiramente o autor marca alguns pontos, tomados da tabela, no plano cartesiano. A partir dai, ele mostra que a variação dos valores de y é diretamente proporcional à variação dos correspondentes valores de x, no intuito de convencer o aluno que o gráfico da função $y = f(x)$ é formado por pontos de uma reta e que dessa forma quando y assume os diferentes valores da temperatura, até a temperatura máxima do forno, o gráfico será parte de uma reta.

Em seguida, o autor define a função afim da seguinte forma: “Toda função do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$, é denominada função polinomial do 1º grau ou função afim”. (PAIVA, 2009, p. 118).

Esta é uma definição, que se fosse elaborada a partir da construção pessoal dos alunos com base em experimentos práticos, poderia ser apreendida com mais facilidade e qualidade.

Passando a parte de apresentação das funções quadráticas, o livro estrutura-se apresentando um exemplo contextualizado utilizando-se do registro em língua natural e logo a seguir faz a conversão para o registro algébrico, obtendo a “lei” da função que representa a situação. Percebe-se que não há articulação entre esses registros. O gráfico de uma função quadrática é obtido usando-se o procedimento ponto a ponto, onde cada par ordenado tem um ponto assinalado no plano cartesiano, e segue dizendo que se for atribuído a x os infinitos valores reais, obteremos a curva, que denomina parábola, e diz que tal afirmação pode ser demonstrada, mas não o faz. A partir de uma curva, que chamou de parábola, localiza o seu eixo de simetria e o seu vértice. Apresenta os pontos notáveis da parábola e, traça o seu gráfico a partir desses pontos. Ele mostra, de uma maneira que não é muito usual na escola, como obteve as fórmulas para determinar o vértice da parábola. Como vemos no quadro 5:

Quadro 5: Vértice da parábola

Para determinar as coordenadas do vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, vamos indicar por k a ordenada de V. Assim, a reta r de equação $y = k$, possui um único ponto em comum com a parábola. A seguir, para determinar essas coordenadas, ele resolve o

sistema de equações.
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases}$$
Encontrando V $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Fonte: Paiva (2009, p.139).

O autor, através de um exemplo, aborda pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática. Para isso ele faz uso do registro algébrico e registro geométrico (gráfico). Para obter os pontos de máximo e/ou mínimo da função, o autor faz o uso das fórmulas, já citadas.

O gráfico da função quadrática é obtido a partir de seus pontos notáveis. Acreditamos que essa forma adotada pelo autor não contribui em nada no entendimento do conceito de função. Julgamos importante que se faça um tratamento adequado a expressão algébrica da função, pois só assim será possível fazer uma análise qualitativa das variáveis e também explorar a situação inversa com um maior entendimento. Observa-se também que, não é destacado pelo autor, o recurso tecnológico.

3.3.3 Análise do livro didático C

Joamir Souza introduz a noção de função de modo intuitivo, apoiando-a nas ideias de: correspondência entre grandezas variáveis; “regra” ou “lei de formação” envolvendo grandezas ou números. No entanto, esta apresentação, que cuidadosamente explorada nos induziria ao conceito de função como correspondência entre grandezas, é imediatamente abandonada em favor da “formalização do conceito de função”, todo baseado em relações entre conjuntos. Embora matematicamente seja possível adotar este caminho, acreditamos que ele pouco contribui para a compreensão do conceito de função.

A representação gráfica de função é obtida usando-se o procedimento ponto a ponto, em que cada par ordenado tem um ponto assinalado no plano cartesiano, e unindo-se esses pontos se obtém a curva como mostra a Figura 19.

x	$h(x)=\frac{x^2}{2}$	(x, y)
−4	$h(-4)=\frac{(-4)^2}{2}=8$	(−4, 8)
−2	$h(-2)=\frac{(-2)^2}{2}=2$	(−2, 2)
0	$h(0)=\frac{0^2}{2}=0$	(0, 0)
2	$h(2)=\frac{2^2}{2}=2$	(2, 2)
4	$h(4)=\frac{4^2}{2}=8$	(4, 8)

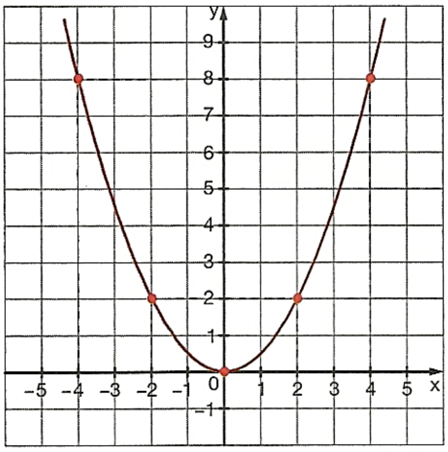
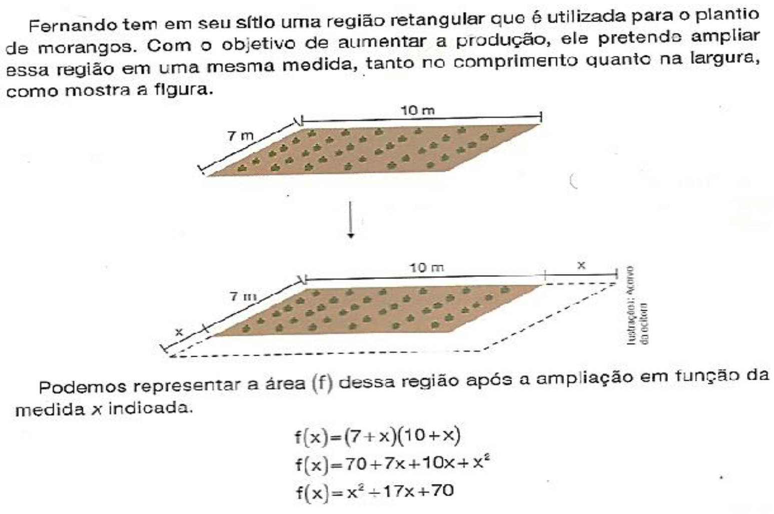


Figura 19 : Construção do gráfico da função.
Fonte: Joamir Souza (2010, p.60).

A função afim é introduzida através de um exemplo contextualizado, para num segundo momento sistematizar o assunto. Nesse exemplo, o autor faz uso das várias representações de função, tais como: a língua natural, algébrica e geométrica (gráfico), mas sem que haja uma articulação entre esses três registros. A maioria das atividades são problemas contextualizados, que em geral pedem para obter a função na sua representação algébrica e calcular o valor dessa em algum ponto.

É por meio da abordagem ponto a ponto que o autor introduz a representação gráfica da função afim. A seguir, observa-se que ele faz uma análise do papel dos coeficientes no gráfico das funções afim. Também é discutido o alinhamento dos pontos e sua relação com a proporcionalidade. Mas não há nenhuma referência ao quociente $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, que apresenta o valor constante, caracterizando esse tipo de função. Também não aparece o termo “taxa de variação” e, o autor usa o termo “coeficiente angular da função afim”, onde o mais o adequado seria “taxa de variação”. No que segue, destaca a relação de função linear e proporcionalidade. Através de uma situação contextualizada, ele mostra a relação entre a quantidade total de tinta utilizada e a quantidade de automóveis produzidos. Tomando alguns valores, naturais, de uma tabela ele obtém os pares ordenados que são marcados no plano cartesiano. O autor chama a atenção para o gráfico dessa função dizendo que ele não é uma reta, pois o domínio são números naturais. Aqui ele diz que, de modo geral, em uma função linear a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente a.

Ao abordar funções quadráticas, o autor inicia o capítulo com uma situação problema, onde faz uso do registro na língua natural e registro algébrico.


Fernando tem em seu sítio uma região retangular que é utilizada para o plantio de morangos. Com o objetivo de aumentar a produção, ele pretende ampliar essa região em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura.

Podemos representar a área (f) dessa região após a ampliação em função da medida x indicada.

$$f(x)=(7+x)(10+x)$$
$$f(x)=70+7x+10x+x^2$$
$$f(x)=x^2+17x+70$$

Figura 20: Problema que introduz função quadrática.
Fonte: Joamir Souza (2010, p. 116).

A partir dessa situação, define dentro de uma caracterização mais formal, a conceituação de uma função quadrática. Nas atividades há vários problemas relacionando a álgebra com a geometria, mas sem articulação entre os registros.

Na parte dos gráficos da função quadrática, o autor primeiramente faz uma abordagem ponto a ponto. E, no que segue, faz um estudo dos coeficientes da função quadrática. Para isso ele toma alguns exemplos de funções quadráticas na forma algébrica $y = ax^2 + bx + c$ e mostra graficamente o que acontece com esta função quando se altera o valor dos coeficientes.

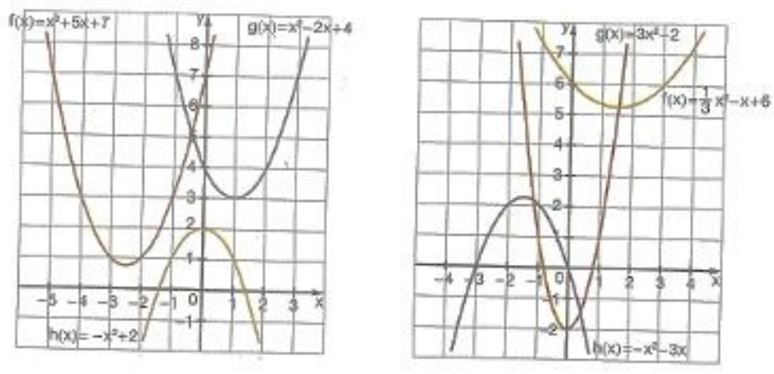


Figura 21: Parábolas com mesma abertura e com aberturas diferentes.
Fonte: Joamir Souza (2010, p.121).

No exemplo à esquerda, figura 21, o autor explica que funções que têm o mesmo valor absoluto do coeficiente (a) as parábolas relacionadas têm a mesma abertura; caso contrário, exemplo à direita, as parábolas têm aberturas diferentes. No que segue, ele diz que: quanto menor for o valor absoluto do coeficiente (a) maior será a sua abertura , como mostra a figura 22.

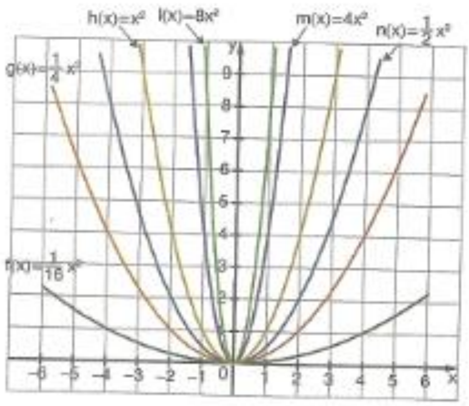


Figura 22: Abertura da parábola de acordo com o coeficiente (a).
Fonte: Joamir Souza (2010, p.121).

No próximo exemplo, para analisar o coeficiente b, o autor mostra três parábolas onde a primeira intercepta o eixo y no ramo crescente e b>0; no segundo a parábola intercepta o eixo y no ramo decrescente e b<0 e a terceira parábola intercepta o eixo y no vértice e b=0.

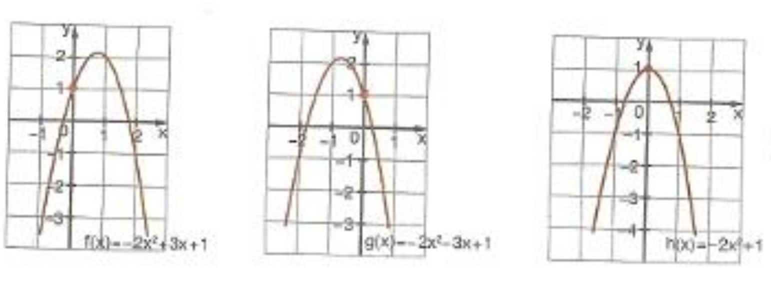


Figura 23: Análise do coeficiente b na função $y=ax^2+bx+c$.
Fonte: Joamir Souza (2010, p.121).

A função em sua forma canônica não é explorada pelo autor. Para obter as fórmulas que permitem encontrar as coordenadas do vértice da parábola, o autor toma alguns pontos que possuem a mesma ordenada, definindo pontos simétricos.

Ele mostra que o resultado da média aritmética das abscissas desses pontos é a abscissa do vértice. E que, para calcular a sua respectiva ordenada, basta substituir o resultado, dessa média, na função dada, obtendo assim as coordenadas do vértice. No que segue, ele sistematiza algebricamente esse resultado.

Os problemas contextualizados já exibe a fórmula pronta e os resultados são encontrados a partir dela. Os demais exercícios privilegiam o uso de técnicas algébricas.

Nessa análise, vimos que a abordagem utilizada pelos autores, ao introduzir o estudo de funções é através de problemas contextualizados, com aspectos interdisciplinares, com destaque na relação de dependência entre grandezas. Entretanto, no momento de definir uma função, eles fazem por meio de conjuntos, uma abordagem que nos parece desvinculada da anterior, como se não se tratasse do mesmo conceito.

Observamos também o uso constante de tabelas e/ou identificação de alguns pontos para a construção dos gráficos, ficando evidente o procedimento "ponto a ponto" na representação gráfica. Chamamos a atenção para a imprecisão do procedimento "ponto a ponto", que usa sempre números inteiros, pois em determinadas funções quadráticas, por exemplo, o vértice pode não ter coordenadas inteiras.

Também percebemos que nenhum deles destaca o recurso tecnológico como suporte ao ensino de funções. O que poderia vir a contribuir com o aprendizado, propiciando que o entendimento sobre esse conteúdo pudesse passar da visão estática de sua representação gráfica para uma possível fase dinâmica, quando se percebe a família de curvas advindas desse estudo.

Esperamos que os autores desses livros didáticos tenham um olhar mais cuidadoso para que os alunos possam tirar maior proveito do potencial de registros de representação que eles disponibilizam, e com isso haja uma diminuição dos problemas de aprendizagem de Matemática em particular, no estudo de funções afim e quadrática, pois acreditamos que para o aluno ser capaz de ativar seu sistema cognitivo para a apreensão de objetos matemáticos, é necessário articular os registros de representação semiótica. Como diz Duval "não é simplesmente o uso de diferentes registros a condição necessária para a compreensão matemática, mas a coordenação entre eles" (DUVAL, 1993, p. 371-375).

A análise dos livros didáticos nos mostra que no ensino de funções que há um forte viés algébrico e pouca exploração qualitativa de relações entre variáveis. Em nossa proposta faremos uma inversão na ordem de ensino. Nos problemas propostos inicia-se com a exploração dinâmica através da manipulação de pontos em uma construção geométrica; estabelecida as relações entre variáveis é construído o gráfico; e só então é obtida a "lei" da função. Consideramos que esse encaminhamento é um diferencial de nossa pesquisa.

3.4 ALGUMAS EXPERIÊNCIAS DE ENSINO

Nesta seção voltamos nosso olhar para algumas pesquisas, na área de Educação Matemática, que vem sendo feitas com intuito de superar e/ou amenizar as dificuldades no que diz respeito ao tema função. Entre essas destacamos os trabalhos de Maia (2007), Scano (2009) e Menk (2005).

O trabalho de Maia (2007), intitulado: "Função Quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional", apresenta a concepção e implementação de uma sequência de ensino, para o 9º ano do Ensino Fundamental. Como embasamento teórico para sua pesquisa, a autora usou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. O objetivo do seu trabalho era o de ajudar o aluno a "enxergar" o gráfico de uma função quadrática como um conjunto de variáveis visuais[12], que estão diretamente ligadas à escrita algébrica da função, para então, num segundo momento, introduzir noções como intervalo e domínio da função utilizando o aspecto lúdico e um software gráfico.

Para tal a autora utilizou a forma canônica da função quadrática, pois segundo ela, nessa forma, percebe-se facilmente que as mudanças ocorridas na representação algébrica acarretam mudanças na representação gráfica e vice versa.

Quanto ao dinamismo do software winplot, a autora relata que ele foi importante, pois propiciou aos alunos um trabalho que integrou gráficos e

---

[12] Entende-se por variáveis visuais da função quadrática: a concavidade da parábola, a abertura da parábola, a posição do vértice da parábola em relação ao eixo x e a posição do vértice da parábola em relação ao eixo y.

expressões algébricas das correspondentes funções; observando o que acontecia ao gráfico quando a sua escrita algébrica era modificada, os alunos estabeleceram relações entre tratamentos e conversões de registros. Quanto à questão da inserção do caráter lúdico através da construção de desenhos, Maia (2007) destaca o quanto isto motivou os alunos na descoberta dos intervalos de limitação para o gráfico de forma a obter o efeito desejado.

Outro aspecto observado pela autora foi que os alunos não “chutavam” mais qualquer expressão para as funções, e sim discutiam com seus colegas e argumentavam sobre qual deveria ser a melhor função para que ela se ajustasse ao desenho e se encaixasse perfeitamente.

A partir desse estudo a autora respondeu de forma positiva a sua questão da pesquisa, que tratava em investigar se era possível que os alunos se apropriassem do processo de construção gráficos da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais relacionadas as unidades simbólicas significativas[13] da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional aliado ao caráter lúdico como ferramentas de aprendizagem.

A autora ainda constatou que o referencial teórico utilizado está intimamente ligado aos resultados positivos da pesquisa. Sem a Teoria dos Registros de Representação, segundo ela, não ficaria tão clara a importância de construir uma sequência didática que permitisse que modificações na escrita algébrica acarretassem mudanças na representação gráfica e vice-versa.

No trabalho de Scano (2009), intitulado “Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com o GeoGebra” tem-se a concepção e implementação de uma sequência de ensino, para o 9º ano do Ensino Fundamental, voltada para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência entre duas variáveis de uma função afim e de reconhecer que seu gráfico é uma reta; a interpretação dos coeficientes da equação da reta nos seus significados geométricos também foi trabalhada. O autor acredita que o dinamismo do software contribuiu para uma atividade mais rica, que permitiu que os alunos compreendessem a função afim mediante investigação algébrica e gráfica de forma simultânea. Como embasamento teórico para sua pesquisa foi usada a Teoria dos

---

[13] As unidades simbólicas significativas consideradas na função quadrática são, por exemplo: parâmetro a>o, parâmetro a<0; 0<IaI<1 ou IaI=1 ou IaI>1, etc.

Registros de Representação Semiótica de Duval e a Teoria das Situações Didáticas de Brosseau e as perguntas colocadas foram: a) a sequência de ensino contribuirá para que os alunos expressem algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim; b) após a aplicação da sequência de ensino, os alunos reconhecerão que o gráfico de uma função afim é uma reta e conseguirão relacionar os coeficientes da equação da reta com o gráfico?

O autor destaca que as atividades trabalhadas na primeira etapa, junto com o desempenho dos alunos, permitiu que fosse feita a generalização e a institucionalização da representação algébrica da função, e assim foi possível responder a primeira pergunta. Ao analisar as resoluções apresentadas pelos alunos, já mais adiante na quarta etapa, viu que eles reconheceram que o gráfico da função é dado por uma reta, e que a partir da representação algébrica a maioria fez o gráfico corretamente, e assim foi também respondida a segunda pergunta.

O trabalho de Menk (2005) investiga as possíveis contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e de mínimos, principalmente daqueles que relacionam propriedades geométricas.

A motivação da pesquisa veio da leitura de um texto que discutia a importância da geometria como prontidão para o Cálculo Diferencial e Integral, especialmente nos problemas de máximos e mínimos. A partir daí, surgiram ideias a respeito da possibilidade de utilizar um software de geometria dinâmica para explorar tais problemas, o que acabou culminando na questão de pesquisa assim enunciada pela autora: *“que contribuições um software de geometria dinâmica pode oferecer aos alunos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática, ao resolverem problemas de máximos e mínimos, que de alguma forma envolvem conteúdos geométricos?”*

A autora encontrou o embasamento teórico de sua pesquisa em um artigo de Gorini (1997) que comenta a importância da visualização dinâmica no Cálculo. Seu trabalho foi desenvolvido utilizando uma metodologia baseada nos “Experimentos de Ensino” cujo foco principal é o raciocínio dos alunos.

Observa-se nesta pesquisa que o enfoque das atividades deixa de apresentar uma predominância algébrica. A resolução das atividades iniciava-se pela interpretação do enunciado: o que se pretendia descobrir, quais eram os dados do problema. Em seguida, tentar construir a figura geométrica, usando os recursos do software, e analisar a situação a partir da sua manipulação e observação avançando na construção do gráfico. Percebe-se que para encontrar a área máxima primeiramente faziam de maneira empírica e a partir dai construíam uma tabela para depois então construir o gráfico para obter estimativa de resposta. A seguir obtiveram a equação que levaria à solução do problema, através das fórmulas de área. Também usaram o recurso cônicas do software para obterem a equação. A autora comenta que o uso do software de geometria dinâmica, Cabri Géomètre, foi positivo pois ele possibilitou que, através da construção da situação geométrica, o aluno visualizasse o problema; também permitiu que ele obtivesse uma estimativa de respostas, bem como permitiu "atrelar" a figura ao gráfico e assim obter o rastro de ponto pertencente ao gráfico antes ter a expressão da função.

As reflexões de Menk vem ao encontro das nossas. Em relação às múltiplas representações, nos diz:

> [...] podemos supor que essas múltiplas representações sejam capazes de "apurar" a estimativa de resposta para um valor que, se não for o real, está muito próximo dele. A possibilidade de observar essas várias representações de uma mesma situação, todas numa mesma tela, oportunizou e deu condições para que os alunos percebessem que essas representações se complementam que são formas diferentes de analisar uma mesma situação." (MENK, 2005, p. 228- 229).

A autora julga que o diferencial de sua pesquisa está no fato de obterem-se gráfico, tabela e a expressão da função a partir de situação geométrica. Isto porque ela acredita que a apropriação do conceito de função não se funda, *à priori*, na aprendizagem de sua definição, mas sim que repousa essencialmente no domínio de atividades que envolvem noções ligadas ao conceito, tais como a noção de correspondência, de variável, de dependência, de regularidade e generalização.

Finalizamos este capitulo ressaltando a importância de se considerar as diretrizes dos documentos oficiais; elas são também referências para se pensar sobre o ensino de funções na escola.

Julgamos que é importante considerar pesquisas sobre o assunto, desenvolvidas na Educação Matemática. Tais estudos indicam as complexidades que permeiam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função e apontam algumas sugestões para o enfrentamento dessas dificuldades no Ensino Básico.

Enfim, neste capítulo fizemos reflexões e considerações sobre questões que se tornam importantes no momento de conceber uma proposta para o ensino de funções. É desta proposta e de sua implementação que vamos tratar nos próximos dois capítulos.

4 CONCEPÇÃO DE UMA EXPERIÊNCIA E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, apresentamos a concepção de uma experiência de ensino que tem como tema as funções afim e quadrática, e que faz uso do software GeoGebra. A sistematização do trabalho é inspirada nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE,1998, *apud* MACHADO, 2002). Assim sendo, vamos destacar as nossas análises prévias que serão usadas para nortear a experiência; depois apresentamos o desenho da sequência de atividades que será utilizada na experiência, acompanhado de análises prévias sobre as expectativas em relação a aprendizagem dos alunos. E no capítulo seguinte vamos tratar da experiência e das análises *a posteriori* que tratam do confronto dos resultados atingidos com as expectativas anunciadas. Iniciamos o capítulo apresentando a forma de organização de uma Engenharia Didática.

4.1 SOBRE A ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática emergiu no seio da comunidade francesa de Didática da Matemática a fim de difundir os resultados de pesquisas e de ações didáticas.

Michèle Artigue (1988) caracteriza essa metodologia da seguinte forma:

> (...) como um esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre, a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1988, *apud* MACHADO, 2002, p. 199).

Outra referência que encontramos em Machado (2002) a respeito da aplicação da Engenharia Didática, segundo a visão de Douady (1993):

> (...) uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (DOUADY, *apud* MACHADO, 2002, p. 198).

A Engenharia Didática é composta de quatro fases, e sua elaboração necessita, em alguns momentos da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases. Assim, é importante salientar que estas não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque.

Apresentamos, a seguir, uma síntese dessas quatro fases.

A primeira fase, a análise preliminar, consiste em considerações de natureza epistemológica, cognitivas e didáticas dos conteúdos a serem ensinados. Em nossa pesquisa, essa análise preliminar é feita nos capítulos dois e três. Neles tratamos das dimensões epistemológica e cognitiva, ao trazer Duval que discute o quanto os sistemas de representações semióticas são constitutivos do saber matemático e também a sua importância no processo de aprendizagem; com as reflexões sobre a história do conceito de função, nos foi possível entender um pouco as dificuldades dos alunos na compreensão desse conceito. Tratamos da dimensão didática ao referenciar os documentos oficiais e ao analisar o tratamento dado ao tema nos livros didáticos

A partir desta análise preliminar, e tendo em vista a nossa experiência docente, iniciou-se a segunda fase da Engenharia Didática. Na segunda fase, da concepção e análise *a priori* da sequência de atividades a ser usada na experiência de ensino, o investigador toma como subsídio a análise preliminar. No nosso caso, definimos como um pressuposto a necessidade de trabalhar com o conceito de função sob diferentes registros de representação. Partindo deste pressuposto, fizemos nossas primeiras escolhas globais: escolhemos retomar o conceito de função afim e introduzir o conceito de função quadrática através de problemas geométricos, fazendo uso do software GeoGebra. Observamos que, no geral o ensino começa com a "lei" da função e a partir disso é feito o traçado do gráfico, evidenciando-se um forte viés algébrico e pouca exploração qualitativa de relações entre variáveis. Conforme já mencionado essa abordagem foi constatada nos livros didáticos analisados.

Na fase de concepção da sequência, é preciso levar em consideração as diferentes maneiras de resolver um problema e os conhecimentos necessários para tanto. O objetivo da análise *a priori* é determinar de que forma as escolhas feitas podem implicar em aprendizagem. Neste trabalho, a análise *a priori* buscou predizer os comportamentos dos alunos frente às situações propostas, bem como possíveis dificuldades e facilidades na compreensão dos conceitos visados.

A terceira fase da Engenharia Didática trata do experimento. É a parte prática em que os alunos, diante das atividades que lhe são propostas, colocam em ação seus conhecimentos a fim de resolver o que foi solicitado e, com isso, adquirir novos conhecimentos. A quarta fase é a da análise *a posteriori* e validação: constitui-se do momento em que se valida a proposta efetuada através da verificação se o que foi produzido pelos alunos é condizente com o que foi anunciado na análise *a priori*.

A análise *a posteriori* se apoia no conjunto de dados recolhidos do experimento: as observações realizadas durante a sequência e as produções dos alunos.

Para Carneiro (2005, p.90), "a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico". Esta é uma das pretensões desta dissertação: disponibilizar um produto para o ensino das funções afim e quadrática, válido em experimento com turma de alunos do Ensino Médio.

4.2 AS EXPECTATIVAS QUANTO ÀS APRENDIZAGENS PRETENDIDAS

4.2.1 A Organização da Experiência

O nosso experimento vai se organizar em duas etapas. Na primeira etapa – que podemos caracterizar como de exploração - são sete encontros e o primeiro deles trata da revisão de conteúdos que são pré-requisitos. Nos demais encontros, da primeira etapa, as atividades visam retomar o conceito de função afim e introduzir o conceito de função quadrática através de problemas geométricos, fazendo-se uso do software GeoGebra. Os alunos através de manipulações de pontos de uma construção geométrica farão uma análise qualitativa das variáveis e suas relações, evidenciadas no movimento dinâmico. Depois desta exploração qualitativa, construirão o gráfico, no próprio GeoGebra. Por último, determinarão a "lei" da função. Neste encaminhamento tem-se uma inversão na ordem de ensino que é usualmente praticada no ensino de funções. No geral, o ensino começa com a “lei” da função e a partir disto é feito o traçado do gráfico, evidenciando-se um forte viés algébrico e pouca exploração qualitativa de relações entre variáveis.

Na segunda etapa são dois encontros – é a etapa da institucionalização do conhecimento e onde o conteúdo matemático é trabalhado de maneira descontextualizada. No primeiro encontro desta segunda etapa realizaremos um estudo da função quadrática sob o ponto de vista algébrico e correspondentes construções de gráficos. Partindo da expressão algébrica mais simples, chegaremos à sua forma mais geral, fazendo associação entre as operações algébricas e movimentos de gráficos. Nosso objetivo aqui é de que o aluno faça um estudo analítico mais detalhado do gráfico e, dessa forma consiga identificar e compreender a influência da variação dos parâmetros. No segundo encontro, tomando as leis algébricas das situações geométricas estudadas na etapa 1, os alunos determinarão com precisão as informações então obtidas de forma qualitativa. A sequência didática[14] ficou organizada da forma que é apresentada no quadro 6.

Quadro 6: Organização da sequência didática

Encontro 1 (2 h/a)	Realizaremos atividades para fazer uma análise das concepções do que os alunos sabem sobre os conceitos de: área, perímetro, teorema de Tales e semelhança de triângulos. Visando detectar as dificuldades da turma e os seus conhecimentos a respeito desses objetos matemáticos que, nesse trabalho, serão pré-requisitos.
Encontro 2 (2 h/a)	Resolução do problema do pentágono Resolução de uma situação problema com a professora-pesquisadora.
Encontro 3 (2 h/a)	Resolução do problema da luminária.
Encontro 4 (2 h/a)	Resolução do problema da casa com jardim.
Encontro 5 (2 h/a)	Resolução do problema da chapa metálica.
Encontro 6 (2 h/a)	Resolução do problema da vela do barco.

[14] Na primeira etapa, nos encontros três e quatro, trabalhamos com problemas dinâmicos que tratavam de função afim e nos demais função quadrática.

Encontro 7 (2 h/a)	Resolução do problema da horta.
Encontro 8 (2h/a)	Estudo das propriedades da função quadrática.
Encontro 9 (2h/a)	Calcular pontos correspondentes ao vértice nos problemas propostos.

Fonte: Elaboração da autora

4.2.2 Análise das atividades da primeira etapa

Conforme já dito anteriormente, a primeira etapa é constituída pelos encontros de um a sete. A elaboração e seleção das atividades procuram contemplar uma abordagem cognitiva, ou seja, queremos que os alunos explorem aspectos que são realçados como importantes na Teoria dos Registros de Representação. A nossa intenção, além de provocar nos alunos as articulações entre os diferentes registros semióticos, será também verificar de que forma o uso de um software de geometria dinâmica pode ajudar o processo de aprendizagem do conceito de funções.

As atividades envolvem diversas situações em contextos geométricos. Elas procuram desenvolver habilidades para resolver problemas, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático, a construção do conhecimento e não apenas a memorização e reprodução de técnicas de resolução em torno do conceito de função.

Na resolução das atividades, espera-se que o aluno converta informações entre os diferentes registros de funções, tendo como ferramenta de apoio o software GeoGebra.

Para cada atividade, têm-se três momentos bem definidos. Para tornar mais claros o propósito dos diferentes momentos, no que segue, através da análise de um dos problemas que serão usados no experimento, apresentamos as expectativas de aprendizagem correspondentes aos três momentos.

O problema é o seguinte:

> Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM* = *DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?
>
> Adaptado de Azevedo (2009)

No **Momento 1** será solicitado ao aluno que faça a interpretação do enunciado, apresentado na forma de texto, sem figura. Ele deve analisar o que "é dado" e o que é solicitado no problema; e também deve fazer um esboço da situação geométrica usando lápis e papel. Quer-se aqui provocar a conversão do registro da linguagem natural para o registro geométrico (figura).

Na situação acima, primeiramente, o aluno deverá desenhar um quadrado de lado 4 cm e com a informação de que o vértice I coincide com o ponto médio do segmento AB, ele deverá marcar este ponto na metade do segmento AB, como mostra a figura 24.

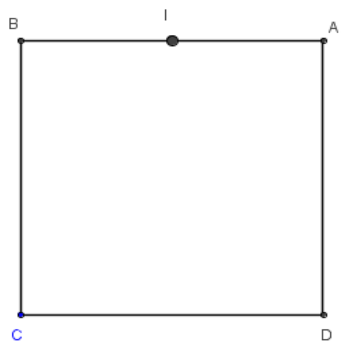


Figura 24: Quadrado ABCD e I ponto médio de AB.
Fonte: A autora

A seguir ele deverá colocar sobre os lados AD e CD do quadrado ABCD os pontos M e N. Com a informação de que AM = DN, ele deverá marcar o ponto M sobre algum lugar do segmento AD e o ponto N sobre DC, como mostra a figura 25.

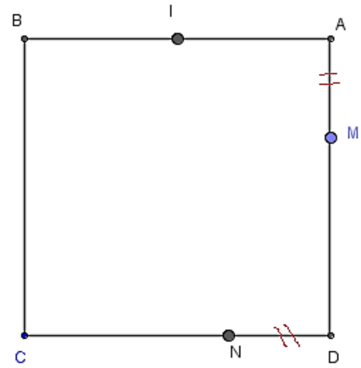


Figura 25: Mostra que AM=DN.
Fonte: A autora

Esperamos, nesse momento, que o aluno faça experimentações, utilizando-se de qualquer meio, inclusive desenhos. Com isso poderá fazer conjecturas a respeito da posição de M sobre o semento AD e perceber que, dependendo do lugar onde colocar o ponto M, a forma do triângulo IMN mudará, ou seja, a área desse triângulo. A figura 26 mostra algumas situações para IMN, conforme M muda de posição.

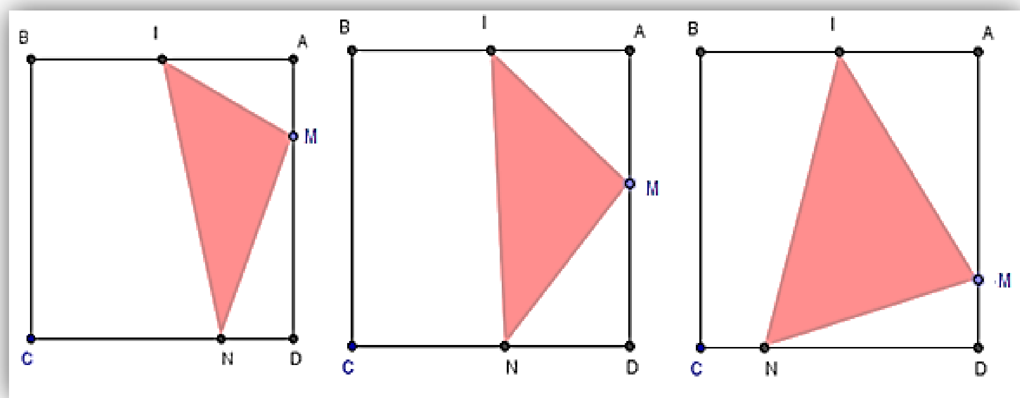


Figura 26: Representações do triângulo IMN dependendo da posição de M.
Fonte: A autora

O objetivo aqui será discutir quais são os dados do problema e o que se quer responder. Acreditamos que neste momento 1, o aluno já vai ter condições de dizer quais são as variáveis do problema e assim pretendemos identificar como o aluno faz a conversão do registro na língua natural para aquele de natureza geométrica.

No **Momento 2** será solicitado ao aluno que abra um arquivo do GeoGebra com a situação geométrica do problema proposto já construída. Agora, o aluno vai usar o dinamismo da figura e, fazendo manipulações, vai estabelecer relações entre as variáveis e comparar com aquelas já identificadas no Momento 1. Quer-se aqui provocar a definição de função e gráfico através de aspectos intuitivos de variação e dependência, dados nos diferentes registros dinâmicos de representação.

Perguntas provocativas serão colocadas para que o aluno avance na análise qualitativa das relações entre variáveis. No problema em questão, as perguntas são: se o segmento AM, com comprimento h, aumenta ou diminui o que acontece com a área do triângulo IMN?; como é a variação do segmento AM?; Para tamanhos diferentes de AM têm-se triângulos com mesma área?; qual a posição do ponto M quando o triângulo tem a menor área?.

A seguir solicita-se ao aluno que faça, no GeoGebra, a construção do gráfico da função dada pelas variáveis escolhidas na situação geométrica. Espera-se que o aluno reconheça a medida h do segmento AM como a variável independente que determina o ponto a ser marcado no eixo OX; e que reconheça o valor da área do triângulo IMN como a variável dependente que determina o ponto a ser marcado no eixo OY. No problema proposto, o ponto G associado à variação da medida do segmento tem como coordenadas (h, 0) e o ponto F associado à variação da área tem como coordenadas (0, áreaIMN). Marcados os pontos, sobre os eixos, o aluno deverá traçar a reta perpendicular a OY passando por F e a reta perpendicular a OX passando por G e então obter o ponto do gráfico como a intersecção dessas retas perpendiculares. Ao habilitar a ferramenta *Rastro* do GeoGebra, enquanto movimenta o ponto M, na situação geométrica o aluno pode ver, de forma sincronizada, o gráfico da função sendo traçado. A partir da observação do gráfico, ele pode voltar as perguntas provocativas colocadas anteriormente, e respondê-las ainda de forma qualitativa, sem preocupações com cálculos e valores exatos. A figura 27 mostra a situação geométrica do problema proposto e a sua representação gráfica.

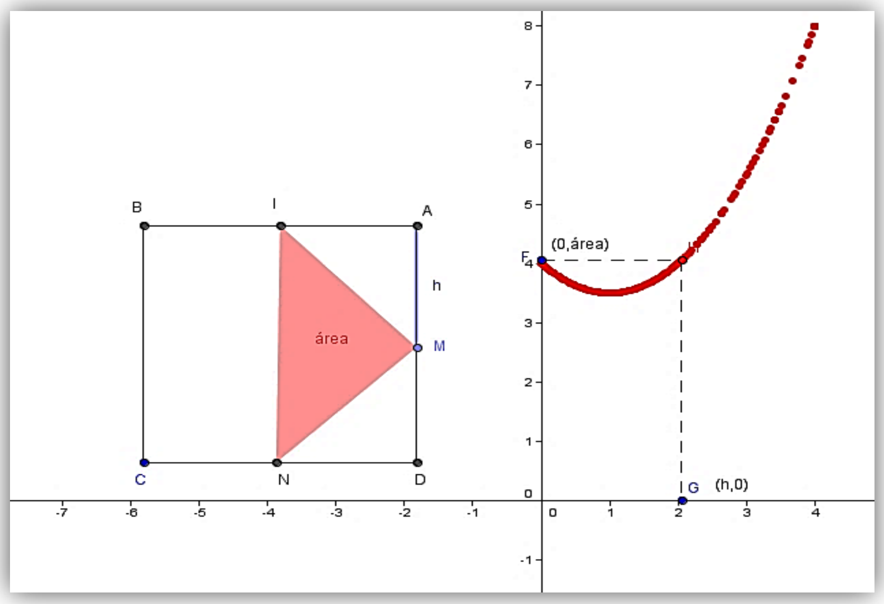


Figura 27: Traçado do gráfico conforme manipulamos o ponto M na construção.
Fonte: A autora

A figura 28 mostra as coordenadas dos pontos, que representam as variáveis da situação geométrica, sobre os eixos, e o respectivo gráfico.

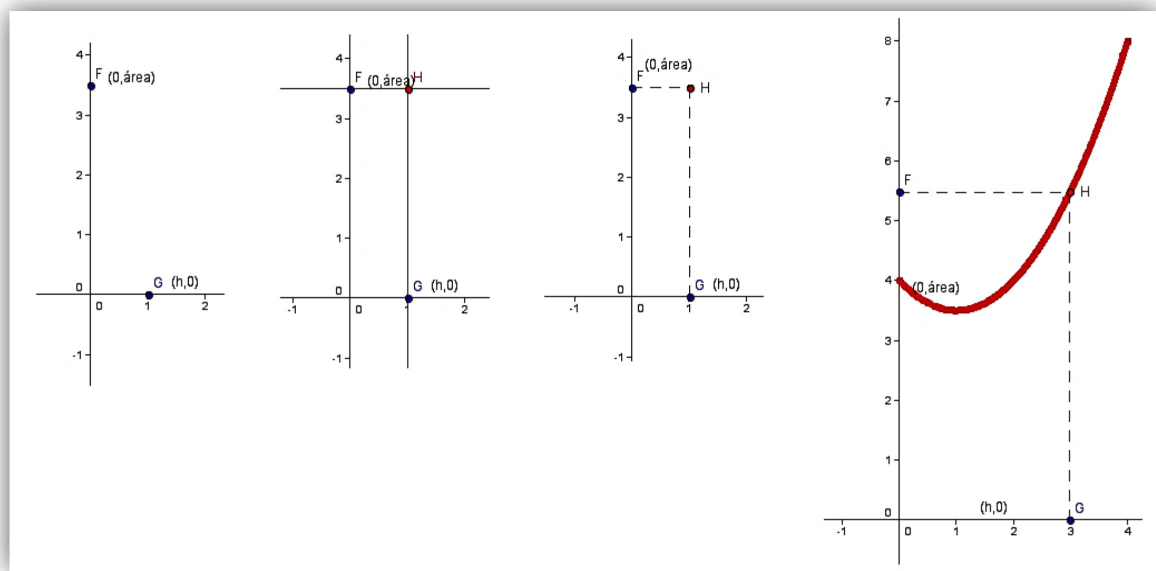


Figura 28: Passos para a construção do gráfico no GeoGebra.
Fonte: A autora

Também se pode obter o gráfico da função através do recurso Lugar Geométrico do GeoGebra. Neste caso, o gráfico aparece completo de forma instantânea. Consideramos que sob o ponto de vista da aprendizagem do aluno, o recurso Rastro é mais interessante, pois o gráfico vai sendo construído de acordo com a manipulação que o aluno faz no ponto associado à variável independente.

Neste Momento 2, os alunos farão uso intenso do dinamismo do GeoGebra para melhor compreender as relações entre variáveis que estão no problema proposto. Aqui estamos apostando que o dinamismo do software vai contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, tais como interpretação de informações, organização dos dados e construção de argumentações consistentes. A manipulação e visualização da figura dinâmica pode ajudar a identificar mais facilmente as variáveis, determinar o domínio da função correspondente e descrever características tais como crescimento, decrescimento, valores de máximo e/ou mínimo. Neste Momento 2, queremos identificar como o aluno faz a conversão do registro geométrico do tipo figura para o registro geométrico tipo gráfico em sistema de coordenadas.

No **Momento 3** será solicitado ao aluno que obtenha a lei algébrica da situação proposta. Na obtenção da lei da função, espera-se que o aluno utilize os conceitos geométricos retomados no primeiro encontro. No problema em questão, para obter a área do triângulo IMN, ele poderá subtrair a área do trapézio BINC e dos triângulos retângulos AIM e MDN da área do quadrado ABCD; aqui o aluno precisa usar suas habilidades para manipulações algébricas nas fórmulas de áreas, a fim de encontrar a lei da função. No que segue, apresentamos a dedução da lei da função.

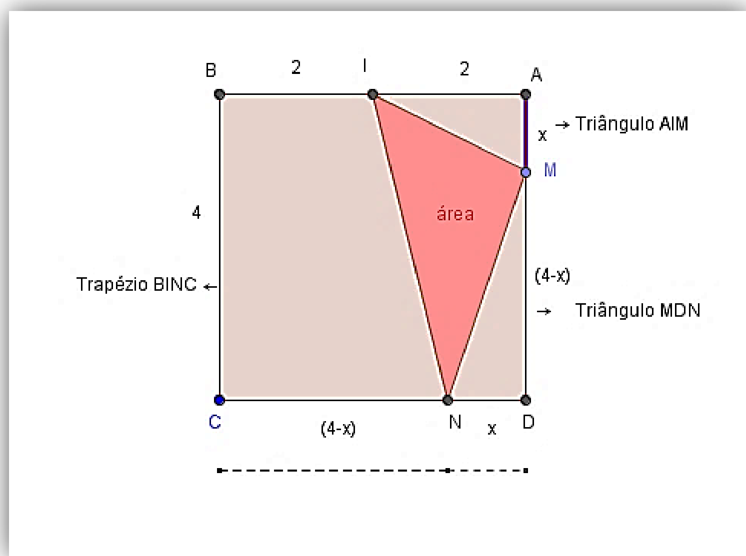


Figura 29: Mostra a área cinza a ser retirada.
Fonte: A autora

Os cálculos abaixo fazem uso da Figura 29:

- Área do quadrado ABCD: $A = 4^2 = 16\ cm^2$
- Área do trapézio BINC: $A(x) = \left[\frac{2+(4-x)}{2}\right].4$
- Área do triângulo AIM: $A(x) = \frac{2x}{2}$
- Área do triângulo MDN: $A\ (x) = \frac{(4-x)\cdot x}{2}$

Agora, somamos a área do trapézio BINC e as áreas dos triângulos retângulos AIM e MDN e subtraímos da área do quadrado ABCD. Fazendo-se as devidas manipulações algébricas, chegaremos à lei da função que informa a área do triângulo IMN:

$$A(x) = 16 - \left\{\frac{[2+(4-x)]4}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{(4-x)\cdot x}{2}\right\} = \quad A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4.$$

Nesse momento 3, queremos identificar como o aluno faz a conversão do registro geométrico para o algébrico.

Com esta forma de trabalho que faz uso de um "problema dinâmico" e das características intrínsecas do software GeoGebra, que tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica espera-se que o aluno desenvolva esquemas de uso para produzir as articulações de tratamento e conversões entre os diferentes registros semióticos. O desenvolvimento de tais atitudes serão colocadas sob nosso olhar durante o experimento.

4.2.3 Análise das atividades da segunda etapa

Espera-se que ao final da primeira etapa da experiência os alunos tenham entendido o conceito de relação funcional e representação gráfica, no contexto particular daquelas que são do tipo afim e quadrática. Na primeira etapa o estudo foi mais de natureza qualitativa; na segunda etapa vai ser de natureza quantitativa, pois cálculos serão feitos. Nessa primeira etapa foi proposta uma análise de variáveis que podem ser evidenciadas no dinamismo da figura correspondente ao problema; questões como domínio, intervalos de crescimento e/ou decrescimento, pontos de máximo e/ou mínimos na função quadrática, construção de gráfico foram tratadas de forma qualitativa. É no final da etapa 1 que é feita a dedução da “lei” da função.

O encontro oito marca o início da segunda etapa. Nele será feito um estudo sistemático da função quadrática (em outro momento, que não desta pesquisa, já havia sido realizado o estudo sistemático da função afim). As quatro primeiras atividades desse encontro são adaptações de situações elaboradas por Maia (2007).

Nosso objetivo, nesse encontro, será de que o aluno perceba o gráfico como uma fonte de informação visual que está relacionada com os coeficientes da expressão algébrica da função. Esperamos que esse procedimento de interpretação global das propriedades figurais, no qual, o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica, permita ao aluno identificar que modificações na escrita algébrica acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

As primeiras atividades conduzirão os alunos à descoberta de uma outra forma algébrica para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Realizaremos um tratamento na escrita algébrica com o intuito de observar o gráfico. Partiremos, sempre, da função f$(x) = x^2$, por ser a representação mais "simples" da função quadrática e, gradativamente, através de operações algébricas chegaremos à forma canônica $f(x) = a\,(x + k)^2 + l$.

Nas três primeiras atividades será solicitado ao aluno que construa, num mesmo plano cartesiano, o gráfico de diferentes funções quadráticas, usando o GeoGebra. Esperamos que ele faça um estudo analítico mais detalhado e que compreenda a influência da variação dos parâmetros no movimento do gráfico. Na primeira atividade é explorada a função $f(x) = ax^2$·, com o coeficiente **a** um número real. O objetivo é de que o aluno compreenda que quando o valor de **a** é alterado, a concavidade da parábola se modifica, assim como a sua abertura. Conforme mostra a figura 30.

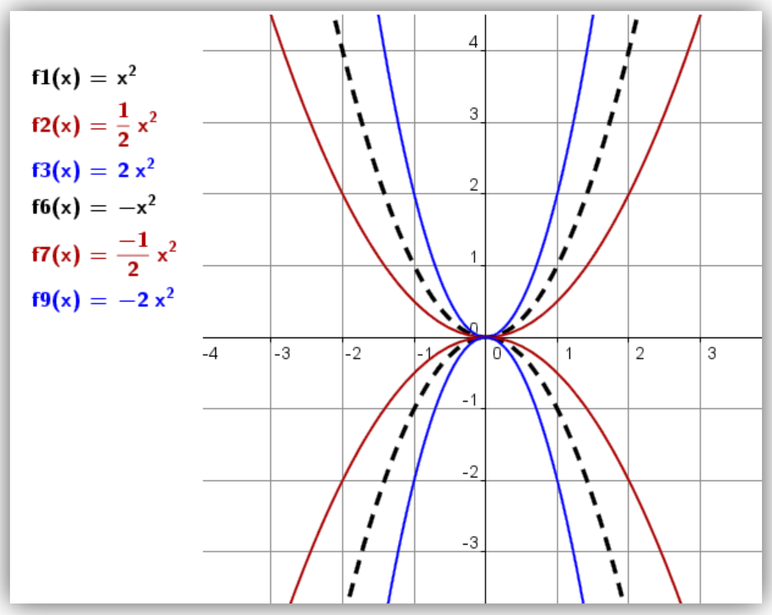


Figura 30: Movimento da curva atrelado ao parâmetro $\boldsymbol{a}$
Fonte: A autora

Na segunda atividade o propósito é observar a translação vertical que ocorre com o gráfico da função $f(x) = x^2$ quando somamos ou subtraímos uma constante.

Esperamos que o aluno compreenda o significado de vértice da parábola e que determine as coordenadas deste ponto. É esperado também que ele compreenda que a translação vertical do gráfico é resultado de alteração algébrica conveniente na expressão da função, conforme pode ser observado nas funções e correspondentes gráficos que estão na figura 31.

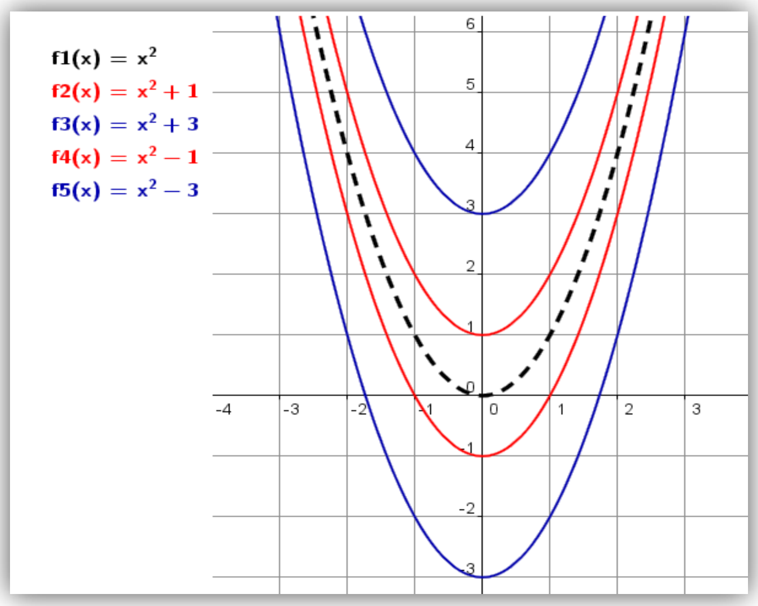


Figura 31: Movimento da curva atrelado ao parâmetro ($\boldsymbol{l}$).
Fonte: A autora

O propósito da terceira atividade é observar a translação horizontal que ocorre com o gráfico da função $f(x) = x^2$, quando somamos ou subtraímos uma constante k à variável independente x. Espera-se que o aluno determine as coordenadas do vértice da parábola determinando as coordenadas deste ponto e que também compreenda que translação horizontal do gráfico é resultado de alteração algébrica conveniente na expressão da função, conforme pode ser observado nas funções e correspondentes gráficos que estão na figura 32.

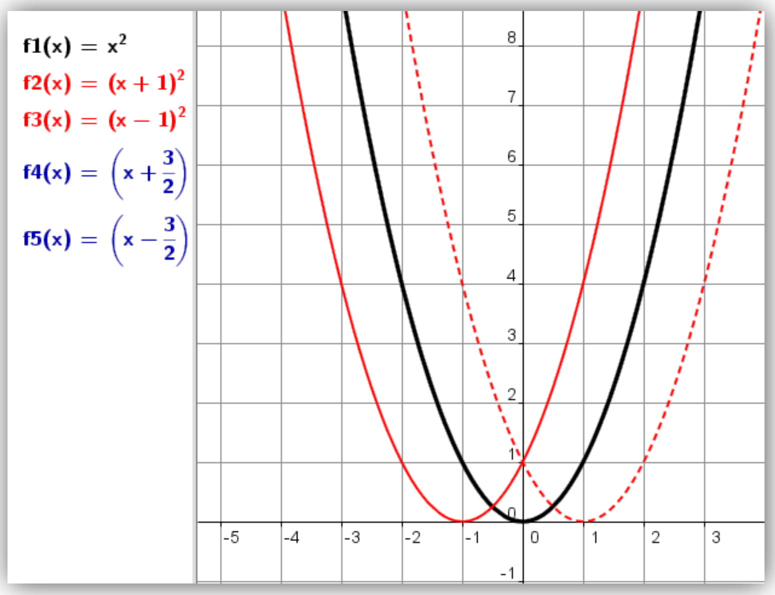


Figura 32: Movimento da curva atrelado ao parâmetro k.
Fonte: A autora

Ao final da atividade 3 acontece um momento de intervenção da professora-pesquisadora com o objetivo de sistematizar a exploração feita nos parâmetros da expressão da função e correspondentes movimentos de gráficos. Na institucionalização desse conhecimento serão usadas animações gráficas através de recursos do software GeoGebra que permite associar os parâmetros da função quadrática, a um controle deslizante[15]. Para cada mostrar cada movimento da parábola usamos um recurso dinâmico e em cada um deles criamos um controle deslizante que esta associado aos parâmetros da função em sua representação algébrica. Conforme manipulamos o controle deslizante (num intervalo determinado) o gráfico da função também vai mudando. Na figura 33 o primeiro recurso mostra o movimento de abertura ou fechamento da parábola e também a concavidade voltada para cima ou para baixo; o segundo mostra o movimento de translação vertical e o terceiro a translação horizontal.

[15] Ferramenta do GeoGebra que permite atribuir um intervalo de valores a uma variável escolhida.

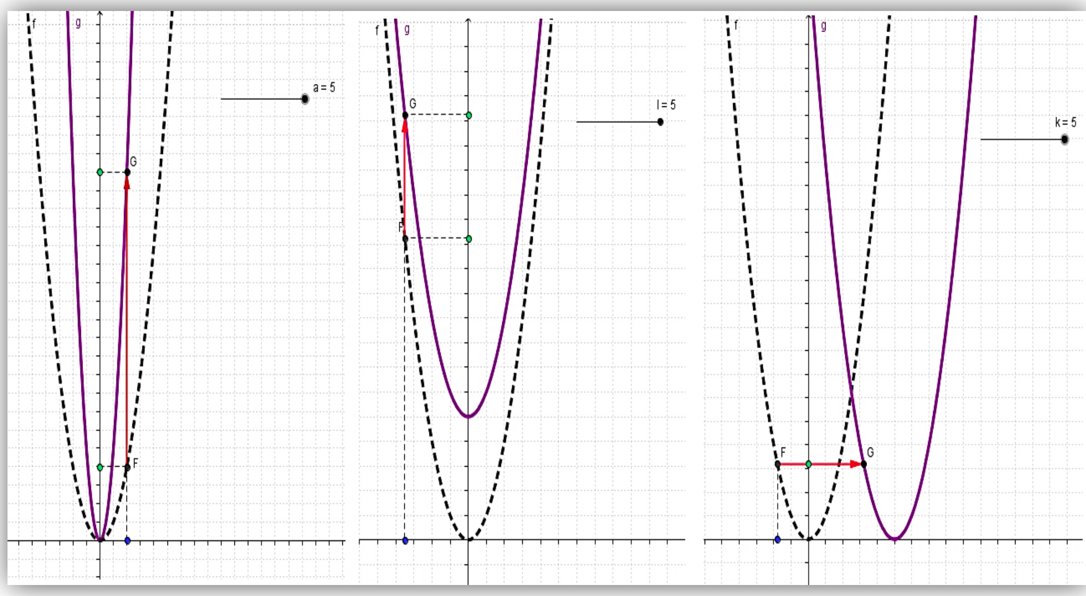


Figura 33: Recursos de animação construídos no GeoGebra.
Fonte: a autora

A quarta atividade tem por objetivo reaplicar os conhecimentos trabalhados nas atividades anteriores. Nessa atividade, os conhecimentos adquiridos são reorganizados de forma a obter-se, via movimentos, o gráfico correspondente a expressão canônica $f(x) = a\,(x + k)^2 + l$ da função quadrática. Na expressão canônica fica fácil identificar o movimento de translação horizontal, seguido da abertura/fechamento da parábola, e finalmente a translação vertical. A figura 34 ilustra os sucessivos movimentos aplicados na função $f(x) = x^2$, que é a expressão mais simples da função quadrática.

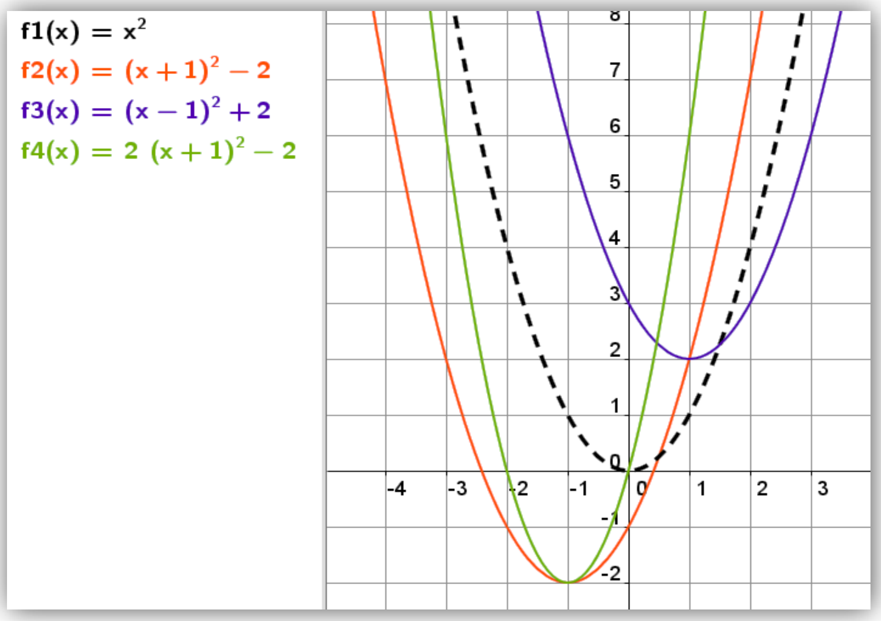


Figura 34: Representação das funções em sua forma canônica.
Fonte: A autora

No que segue, mostraremos o desenvolvimento algébrico, comparando e fazendo relações entre as duas formas da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a\,(x + k)^2 + l$,

Desenvolvendo o segundo membro:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - k)^2 + l = \ ax^2 - 2akx + ak^2 + l$$

Comparando os coeficientes,

$$a = a$$
$$b = \ -2ak$$
$$c = ak^2 + l$$

Agora, determinando k e l em função de a, b e c, temos:

$k = -\frac{b}{2a}$ e $l = c - ak^2$

$$l = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$l = c - \frac{ab^2}{4a^2}$$

$$l = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{b^2 \ - 4ac}{4a}$$

Com este procedimento, a ser apresentado para os alunos, pretendemos sistematizar o saber aprendido. Espera-se que os alunos consigam transitar entre essas duas expressões algébricas da função quadrática; ressaltamos que através da expressão canônica da função é possível determinar, com mais facilidade, as coordenadas do vértice da parábola, sem a necessidade de memorizar fórmulas. É esse tratamento de registros – transformar a expressão algébrica de forma a obter a expressão canônica – que encerra o trabalho no encontro 8 e que prepara os alunos para resolverem os problemas de cálculos de máximo ou mínimo da função quadrática.

O encontro 9 é o que finaliza o experimento. Tomando as leis algébricas das funções obtidas nos problemas propostos na primeira etapa, os alunos farão tratamentos de registro para obter a sua expressão canônica, para então obter com precisão as informações então obtidas de forma qualitativa. Para exemplificar de que forma será realizado este encontro, retomamos o problema usado para ilustrar a proposta de trabalho na primeira etapa da experiência. Agora quer-se determinar, de maneira exata, a medida h do segmento AM para que a área do triângulo IMN seja a menor possível.

O problema é:

> Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM* = *DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?

A obtenção da "lei” algébrica, na etapa 1, foi realizada no momento 3. Para obter a lei da função é preciso utilizar conceitos geométricos.

A função é: $A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4.$

Agora, faremos um tratamento algébrico a fim de obter a expressão canônica. Para isso, conhecimentos como o desenvolvimento do trinômio quadrado perfeito e completamento de quadrados serão retomados:

$$A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4 =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1 + 8) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2 - 2x + 1) + 7] =$$

$$= \frac{1}{2}\ (x-1)^2\ + \frac{7}{2}\quad .$$

Agora, com precisão exata, determina-se que quando $h = 1$ cm tem-se o menor valor da área do triângulo IMN e este valor é $\frac{7}{2}$ cm².

4.2.4 O detalhamento da sequência didática

O Encontro 1 trata de pré-requisitos. O Encontro 2 é conduzido pela professora-pesquisadora na forma de discussão coletiva com o grande grupo de alunos. Nessa discussão serão contemplados os três momentos descritos na sessão 4.2.2 . Estamos tomando como princípio que é importante introduzir os alunos no espírito do trabalho a ser feito, daí esta escolha de momento de trabalho coletivo. Nosso objetivo, nessa escolha, também é mostrar as habilidades e competências necessárias na resolução de um problema dinâmico como procurar regularidades, fazer e testar conjecturas. Nos encontros seguintes, da primeira etapa, os alunos resolverão problemas geométricos envolvendo funções afim e quadrática usando como referência a resolução feita no encontro 2. Nos demais encontros, agora da etapa 2, primeiramente faremos um estudo sistemático da função quadrática, a fim de que o aluno perceba o gráfico como uma fonte de informação visual que está relacionada com os coeficientes da expressão algébrica da função. E no último encontro, os alunos farão tratamentos de registro nas leis algébricas das funções obtidas nos problemas propostos na primeira etapa para obter as suas expressões canônicas, para então obter com precisão as informações então obtidas de forma qualitativa.

Encontro 1 – Revisão dos Pré-Requisitos

No Encontro 1 realizaremos atividades com o objetivo de fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos, necessários para resolução dos problemas a serem propostos. Estes conhecimentos são: área, perímetro, teorema de Tales e semelhança de triângulos. Em algumas atividades faremos uso do GeoGebra.

Na primeira atividade, o aluno deve observar e comparar as relações entre as áreas do retângulo e do triângulo e perceber que área do triângulo é metade da área do retângulo correspondente. Na segunda atividade esperamos que ele calcule a área, de cada uma das figuras e perceba que figuras com formas diferentes podem ter a mesma área. Na terceira atividade, o objetivo é calcular a área de cada triângulo e observar que triângulos de mesma base e mesma altura tem a mesma área. Na quarta atividade, espera-se que o aluno chegue à conclusão de que, para um mesmo valor de perímetro, podem-se associar diferentes valores de área de retângulos e que, portanto, não existe relação funcional entre perímetro e área de retângulos. A quinta e a sexta atividades têm por objetivo retomar as relações entre os elementos de triângulos semelhantes.

A seguir apresentamos as atividades do encontro 1, para tornar mais explicito este trabalho de revisão de conteúdos que são pré-requisitos nos demais encontros.

Encontro 1: Revisão dos pré-requisitos

Atividade 1:

Abra o arquivo 1, do GeoGebra, que se encontra em seu desktop e, a partir dessa construção, faça o que está sendo solicitado.

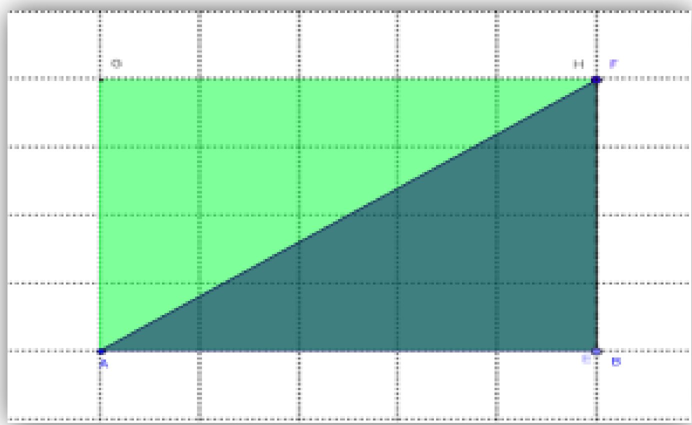


Figura 35: ilustração da atividade 1.

Movimente o ponto E o que você observa:

a) Em relação à área do retângulo ABHG?
b) Em relação à área do triângulo AEF?

Movimente o ponto F o que você observa?

a) Em relação à área do retângulo ABHG?
b) Em relação à área do triângulo AEF?
Que relação existe entre essas duas áreas?

Atividade 2:

Observe as figuras e responda:

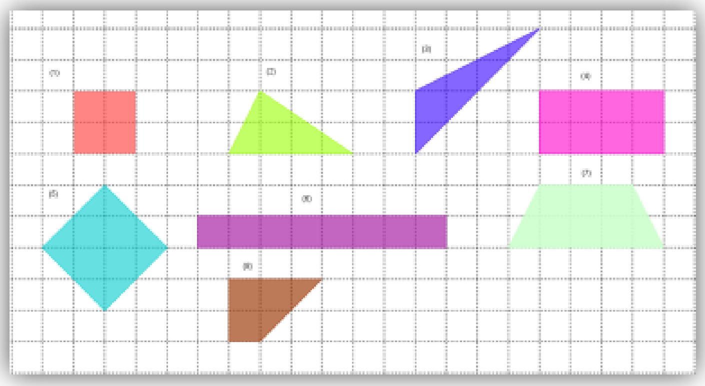


Figura 36: Ilustração da atividade 2.

Quais figuras utilizam a mesma quantidade de papel? Justifique.

Atividade 3:

Sejam r e s retas paralelas e considere os triângulos ABC, ABD e ABE, com vértices nestas retas, como mostra a figura.

Observe os três triângulos ABC, ABD e ABE.

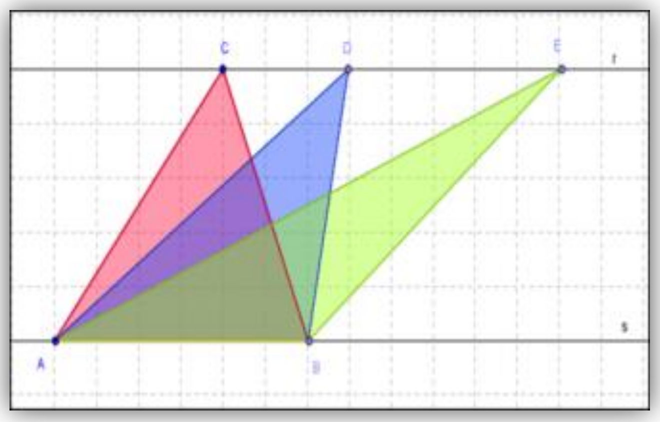


Figura 37: Ilustração da atividade 3.

a) Como você identifica a altura de cada um desses triângulos?
b) Determine a área de cada um desses triângulos. O que você observa?
c) Que relação existe entre esses triângulos?

Atividade 4:

Considere a seguinte situação:

Quero encontrar a área de um mapa de certo estado, para isso coloquei um barbante sobre o contorno do mapa, acompanhando todas as suas curvas. Logo depois amarrei as pontas do barbante e, com esse barbante, formei um retângulo. Depois foi só calcular a área do retângulo e obtive a área do meu mapa. Porém a minha ideia não funcionou. Vocês podem me explicar por quê?

1) Após a leitura, façam suas conjecturas para tentar encontrar uma solução para o problema, usando lápis e papel.
2) Abra o arquivo 2, do GeoGebra, com a construção da situação, e responda os questionamentos de modo a encontrar a solução do problema.

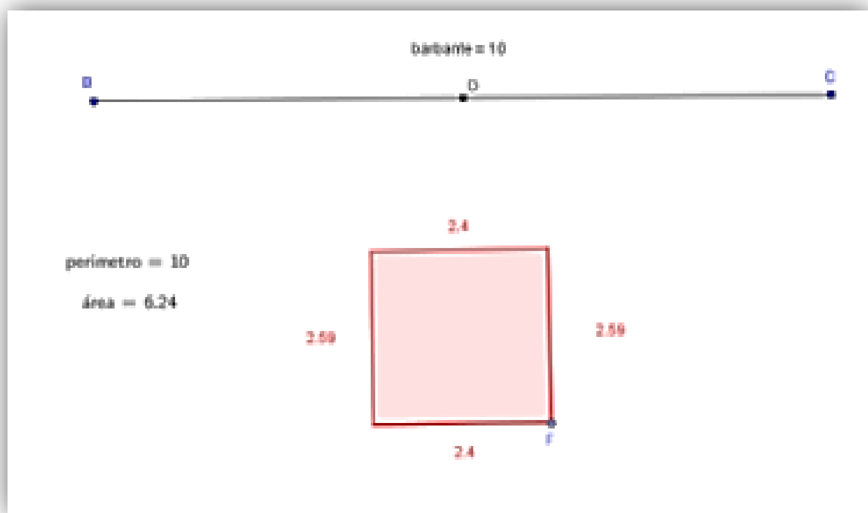


Figura 38: Ilustração da atividade 4.

- Manipulando o ponto F, o que você observa:

Com relação à área dos retângulos obtidos?
Com relação ao perímetro dos retângulos obtidos?
Existe relação funcional entre perímetro e área de retângulos?

Atividade 5:

Observe a seguinte situação:

Num terreno em declive foi construída uma rampa plana, e uma plataforma é sustentada por duas colunas paralelas. Como é possível calcular a medida h da altura coluna?

Modelo matemático para a situação

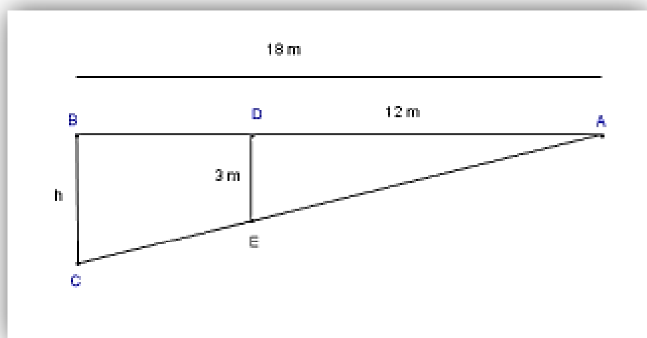


Figura 39: Ilustração da atividade 5.

Observando o modelo da figura 39:

- As colunas BC e DE são paralelas, que relação existe entre os triângulos ADE e ABC? Com relação aos lados, desses triângulos, o que podemos dizer?

Atividade 6:

Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 10 cm e AC = 15 cm. Quanto mede a área do quadrado?

- Seja AD = x a medida do lado do quadrado que queremos descobrir. Se a medida do lado AB é 10 cm, então a medida de BD é?
- O que você pode dizer a respeito da base DE do triângulo BDE com relação à base AC do triângulo ABC?
- Existe uma relação entre o triângulo ABC e o triângulo BDE? Qual?

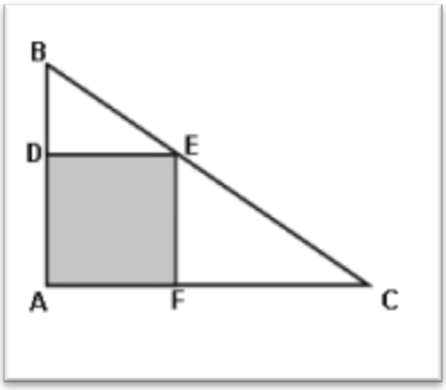


Figura 40: Ilustração da atividade 6.

Encontro 2 - O Problema do Pentágono

A situação geométrica a ser explorada é a seguinte:

> Paulo possui um pequeno pedaço de cartolina no formato de um quadrado de lado 4 cm e deseja recortar um pentágono utilizando essa cartolina de modo que esse pentágono tenha a maior área possível. Para tanto, ele pensou em nomear esse quadrado por ABCD, marcar os pontos M, N e P sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente, de modo que as medidas AM, NC e CP fossem iguais a um valor conveniente l, uma vez que há várias possibilidades para essa marcação. Ajude Paulo a encontrar a medida l de modo que, ao recortar o pentágono AMNPD, ele obtenha a figura desejada.

Momento 1 -

- Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa o pentágono AMNPD.

- Na situação do problema, como Paulo, pode recortar os cantos da cartolina para ter um melhor aproveitamento de papel?

Momento 2 –

Passando agora para a construção dinâmica, vamos através do movimento aplicado à figura, visualizar as variáveis do problema, e estabelecer relações entre as mesmas. E, para isso, a professora-pesquisadora começa manipulando o ponto M, na construção, para que os alunos percebam que o pentágono AMNPD, vai mudando a sua área conforme aumentamos ou diminuímos o tamanho do segmento azul, que foi nomeado de l, e representa um dos lados do pentágono, conforme se vê na figura 41.

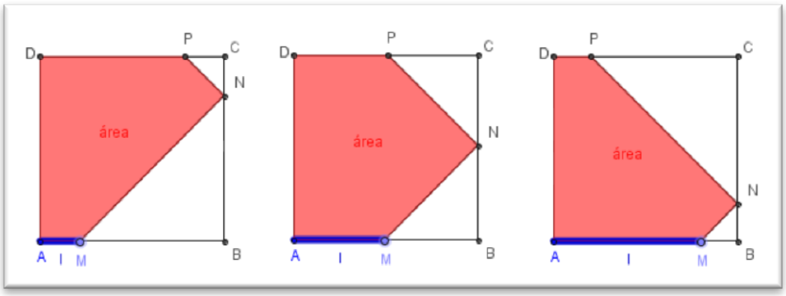


Figura 41: Algumas transformações do pentágono AMNPD.

Tendo observado quais são as variáveis do problema, definimos as variáveis independente e dependente. A professora-pesquisadora passa a fazer a análise qualitativa, dessas variáveis relacionadas, afim de responder as perguntas provocativas, que serão apresentadas, no que segue:

a) Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

Movimentando o segmento azul, pode-se perceber que ele varia de zero a quatro, ou]0,4[

Mostrar, ao aluno que, no GeoGebra, ao mesmo tempo, que: manipulamos o ponto M na figura (Janela de visualização), os valores numéricos, relativos ao tamanho do lado do pentágono e sua respectiva área, na janela da álgebra, também se modificam.

As perguntas (b) e (d) são para chamar a atenção, dos alunos, de que eles devem ter cuidado com as restrições no domínio da função. Por isso devem estar atentos para os valores nos extremos dos intervalos considerados.

b) Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor, aproximado, da área do pentágono?

Aqui a professora-pesquisadora mostra que, se o segmento azul (l) for muito pequeno, não teremos mais um pentágono e sim um triângulo. Veja na figura 42.

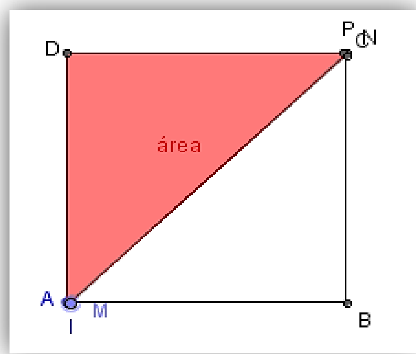


Figura 42: Situação em que l é muito pequeno.

c) Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do pentágono?

A professora-pesquisadora manipula o ponto M lentamente. Aumentando o segmento azul, percebe-se que, o valor da área do pentágono também está aumentando mas, a partir de um determinado momento, mesmo aumentando o tamanho do segmento azul, o valor da área começa a diminuir. Conforme mostra a figura 43.

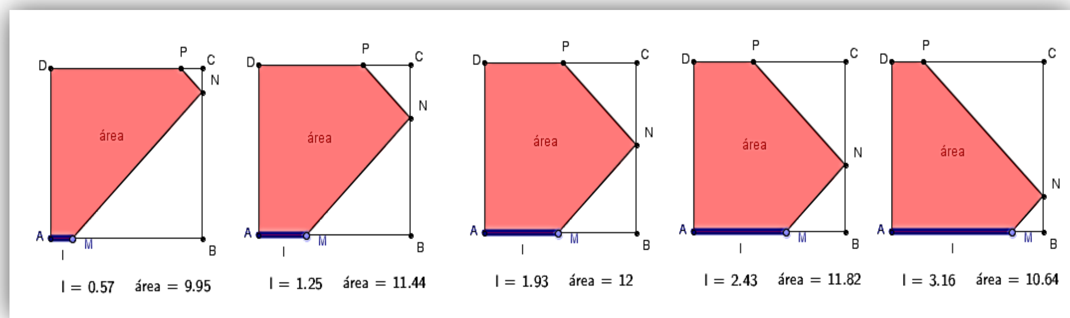


Figura 43: Mostra a variação da área conforme o segmento azul aumenta.

d) Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, o que acontece com a área do pentágono?

Aqui, a professora-pesquisadora mostra que se o segmento azul (l) for igual ao lado do quadrado não teremos mais um pentágono e sim um triângulo. Veja na figura 44.

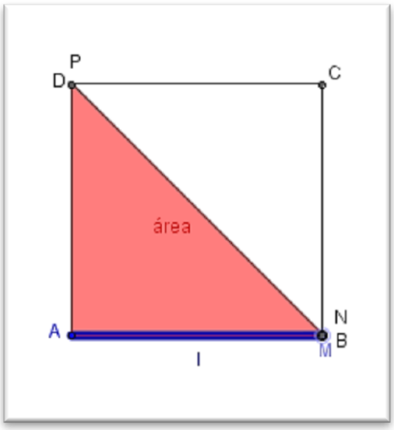


Figura 44: Situação em que l é igual ao lado do quadrado.

e) Segmentos azuis diferentes podem produzir pentágonos de mesma área?

Aqui a professora-pesquisadora chama a atenção para que percebam que durante a manipulação, em alguns instantes, aparecem valores diferentes de l com mesmo valor de área, como mostra a figura 45. Aqui, juntando com as outras informações, já podemos fazer conjecturas a respeito do traçado do gráfico. É importante que o aluno faça a previsão do gráfico da situação antes de obtê-lo com recursos do software. Nesse momento iremos analisar como ele faz a conversão do registro geométrico (figura) para o registro geométrico (gráfico).

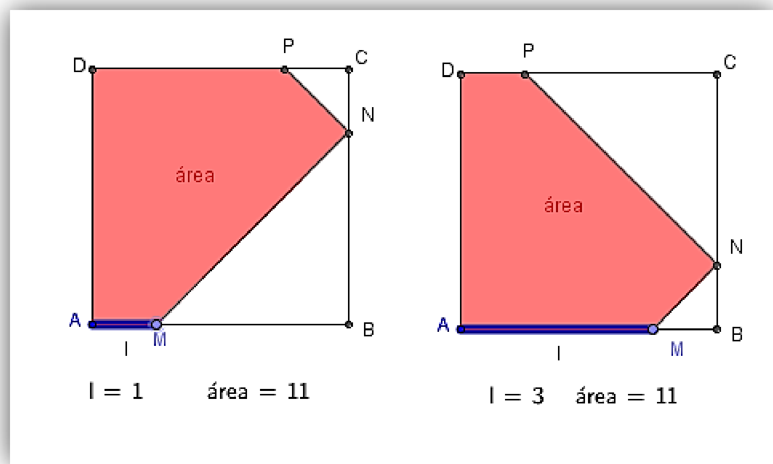


Figura 45: Pentágonos de mesma área com valores diferentes de l

f) Com auxílio das ferramentas, "rastro" e "Lugar Geométrico" obtenha o gráfico que representa a função.

As variáveis do problema são:

- l = medida do lado do pentágono
- área = área do pentágono.

Para construir o gráfico procedemos da seguinte maneira:

- A variável independente l, deve ser marcada no eixo OX, para isso:

- Criar um ponto na área de trabalho, do GeoGebra;
- Clicar com o botão direito do mouse, sobre esse ponto;
- Selecionar "**Propriedades**", na **aba básico;**
- Editar as coordenadas do ponto, G(l, 0);

- A variável dependente área, deve ser marcada no eixo OY, e para isso siga os passos acima, obtendo o ponto: H (0, área). Como mostra a figura.

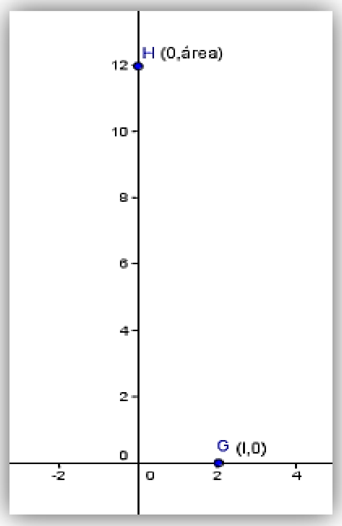


Figura 46: Representação dos pontos G e H no gráfico.

Inserir Rastro

- Traçar as retas perpendiculares aos eixos coordenados passando pelos pontos G (l, 0) e H (0, área);
- Marcar o ponto J, de intersecção destas perpendiculares;

Como mostra a figura 47.

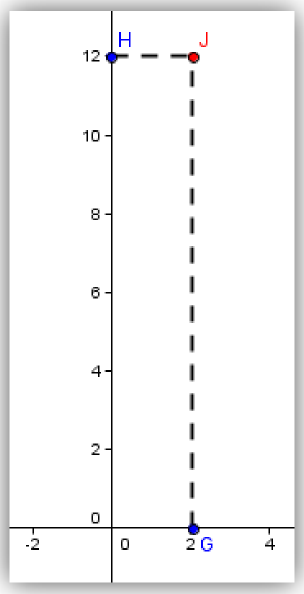


Figura 47: Representação do ponto J no gráfico.

- Clicar com o botão direito, do mouse, sobre J e selecionar: “habilitar rastro”;

Ao movimentar o ponto M, na construção geométrica, obtêm-se o gráfico da função que relaciona a variação da área do pentágono com o seu lado. Como mostra a figura 48.

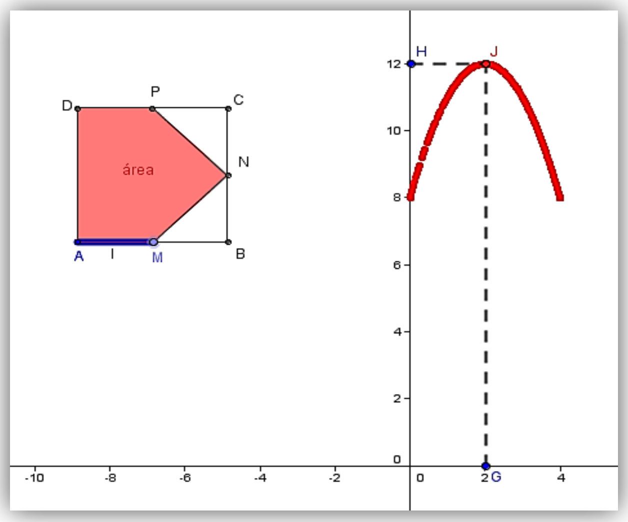


Figura 48: Rastro gerado a partir do movimento do ponto M.

Inserir Lugar Geométrico

Utilizando o recurso “Lugar Geométrico” do GeoGebra, essa trajetória surge pronta na tela e, restrita ao intervalo possível de ser percorrido pelo ponto, na figura. Para habilitar este recurso, seleciona-se “lugar geométrico” e clica-se no ponto J e depois no ponto M. A figura 49 mostra o gráfico obtido com este recurso.

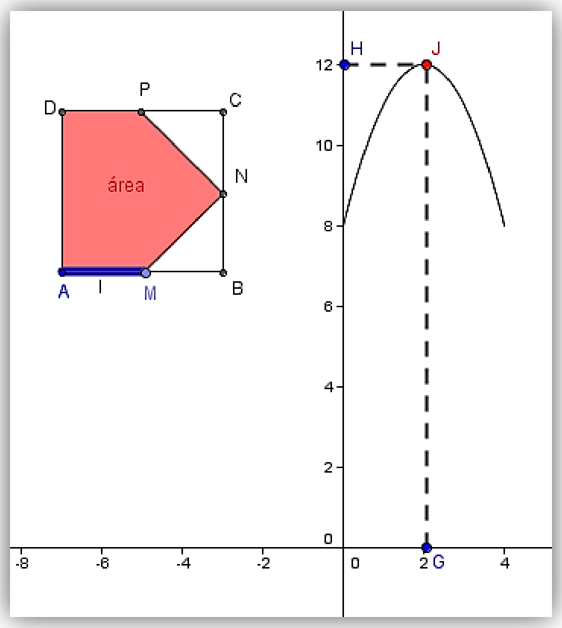


Figura 49: Gráfico gerado utilizando o recurso “lugar geométrico”.

g) Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Analisando o gráfico observamos que a função é crescente no intervalo]0,2] e decrescente no intervalo [2,4[.

h) O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

O ponto mais alto no gráfico mostra onde a área é máxima, e que este valor é $12\ cm^2$.

Devemos chamar a atenção que, esse não é um valor preciso e, no que segue, faremos esse cálculo de maneira exata.

I) Quando Paulo vai conseguir o pentágono de maior área?

O maior valor da área corresponde, ao lugar onde deverá ser colocado o ponto M, ou seja, quando o lado do pentágono for $l = 2cm$.

Momento 3 – Deduzindo a “lei” da função

Consideremos:

- área de $\mathrm{AMNPD} = y$
- lado $l = x$

Para obter a “lei” algébrica da função, usaremos os conceitos geométricos, retomados no primeiro encontro. Para obter o pentágono de maior área, vamos somar a área dos triângulos isósceles: PCN e BNM e, a seguir, subtrair da área do quadrado ABCD. Nesse momento devemos fazer uso de habilidades para fazer manipulações algébricas, nas fórmulas de áreas, a fim de encontrar a lei da função. No que segue, apresentamos o desenvolvimento algébrico, com os respectivos cálculos das áreas que envolvem o problema proposto, a fim de encontrar a lei algébrica que representa a situação:

Área do quadrado ABCD: $A = 4^2 = 16\ cm^2$

Área do triângulo PCN: $A_1 \ = \frac{x.x}{2}$

Área do triângulo BNM: $A_2 = \frac{(4-x)(4-x)}{2}$

Fazendo as operações algébricas necessárias, obtemos

$A(x) = 16 - (\frac{(4-x)(4-x)}{2} + \frac{x.x}{2}) = \ 8 + 4x - x^2$ que é a lei algébrica, da função, do problema proposto.

Encontro 3 – O problema da Luminária

A situação geométrica a ser explorada é a seguinte:

> Uma fábrica de luminárias quer produzir um modelo de abajour em forma de uma pirâmide quadrangular com aresta da base de 20 cm. O dono dessa fábrica querendo agradar seus clientes deixou que eles definissem, de acordo com as suas necessidades, o tamanho das faces laterais desse abajour. Qual será o gasto mínimo de material para fazer o abajour?

Momento 1:

Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a situação do problema.
- Como fica a planificação dessa luminária?
- O que representa cada face da luminária?

Momento 2:

Abra o arquivo 5, que se encontra no desktop do seu computador.
-Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?
- Quando o segmento azul diminui, o que acontece com a luminária?
-Para qualquer valor de h será sempre possível construir esse abajour? Existe um valor mínimo para h?
- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.
- O que representa o menor valor no gráfico?
- Qual é a quantidade mínima de material necessário para que, o dono da fábrica, possa construir um abajour desse modelo?
- Qual é o intervalo de variação da função que representa o abajour?

Momento 3:

-Com auxílio de lápis e papel obtenha a função que representa o problema. Espera-se aqui que o aluno calcule as áreas: da base da pirâmide quadrangular que será: $A_Q = 400$; das quatro faces laterais: $A_T = 4(\frac{2xh}{2})$, ou seja, $A_T = 4h$. Portanto a lei que representa a situação do problema a ser encontrada será: $A(h) = 4 + 4h$

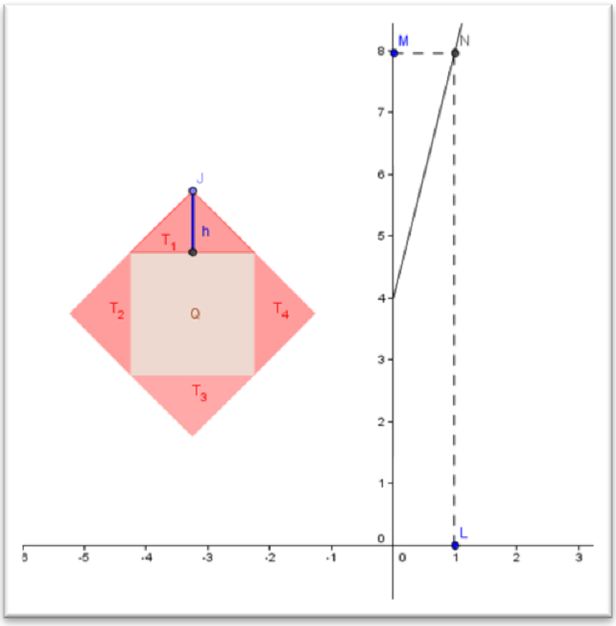


Figura 50: Apresenta a figura e o gráfico, associados a uma mesma situação.

Encontro 4 – O problema da casa com jardim

Considere a seguinte situação:

> Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma ao lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas vizinhas, teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa 2, e pelo jardim 2 seja maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1. As dimensões das casas e dos jardins estão descritos conforme a figura 51:
>
> Adaptado de Barroso (2010).

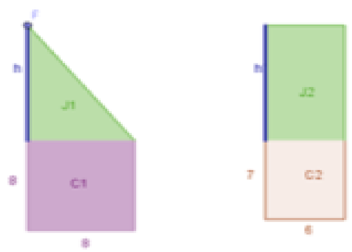


Figura 51: Planta baixa com as dimensões.
Fonte: Conexões com a Matemática (Barroso, 2010, p.119).

Momento 1:

- Quais os dados fornecidos pelo problema?
- O que o problema esta pedindo para calcular?

Momento 2:

Abra o arquivo 6, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?
-Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?
-Quando o segmento azul aumenta, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?
- À medida que o segmento azul varia, a área da planta 1 também varia na mesma proporção? E a área da planta 2?
- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.
- Existe uma situação em que essas casas com jardim terão áreas iguais?
- Em que situação a área ocupada pela casa 2 e pelo jardim 2 será maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis, papel e da fórmula da área do quadrado, área retângulo e da área do triângulo retângulo escreva a função que representa o problema. Espera-se que os alunos identifiquem que o ponto de intersecção entre as retas acontece quando as áreas das 2 situações são iguais. Então deverão encontrar a área que representa a primeira situação que será $A_1 = 64 + 4h$ e a área que representa a segunda situação que será $A_2 = 42 + 6h$, igualando essas áreas encontrarão que h=11m.

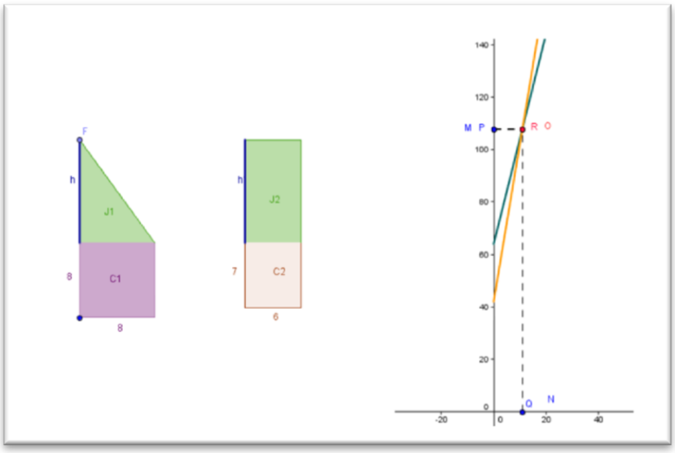


Figura 52: Apresenta a figura e o gráfico, associados a uma mesma situação.

Encontro 5 – O problema da Chapa Metálica

Considere a seguinte situação:

> Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM* = *DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?
>
> Adaptado de Azevedo (2009).

Momento 1:

-Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a chapa metálica ABCD e o triângulo IMN.

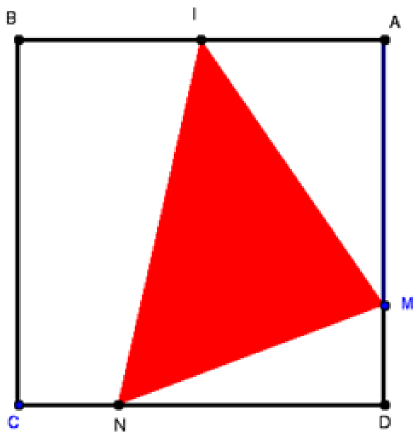


Figura 53: Construção geométrica da chapa metálica.

Momento 2:

Abra o arquivo 7, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?
- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor da área do triângulo IMN?
- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do triângulo IMN?
- Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, com fica a área do triângulo?
- Segmentos azuis diferentes podem produzir triângulos de mesma área?
- No contexto do problema quais grandezas podem variar?
- Com auxílio das ferramentas, "rastro" e "Lugar Geométrico" obtenha o gráfico que representa a função.
- O que nos informa o menor ponto do gráfico?
- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis e papel e da fórmula da área do triângulo do trapézio e do quadrado, escreva a função que representa o problema. Espera-se aqui que o aluno perceba que a área do triângulo IMN poderá ser obtida fazendo a diferença da área do quadrado de 16m² com a soma das áreas dos triângulos retângulos AIM e MDN, cujos catetos medem, respectivamente: 2 e $x;$ $(4-x)$ e x com a área do trapézio cujas bases medem: $(4-x),$ 2 e altura 4.

- a área do triângulo AIM será: $A_1\ (x) = \frac{2x}{2} = x$,

- a área do triângulo MDN será: $A_2\ (x)\ = \frac{(4-x)\cdot .x}{2} = \frac{4x-x^2}{2}$ e

- a área do trapézio será: $A_3(x)\ =\ \frac{2+(4-x)}{2}\ .4\ = 12-2x$,

Logo, a área do triângulo AIM será:

$$A(x)\ = 16-\ [\frac{4x-x^2}{2} +(12-2x)+x]\ = = \frac{x^2}{2} - x + 4.$$

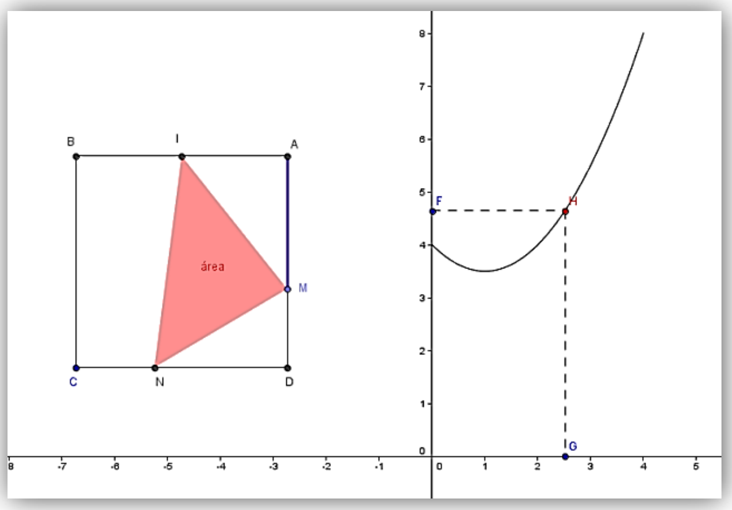


Figura 54: Apresenta a figura e o gráfico, associados a uma mesma situação**.**

Encontro 6 - O problema da vela do barco

Considere a seguinte situação:

> Paulo possui um barco à vela. A vela que o equipa tem a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 8m e 6m. Para que esta vela se veja ao longe, ele decidiu colocar-lhe no interior um retângulo vermelho e para isso ele fez diferentes estudos e o seguinte esquema:

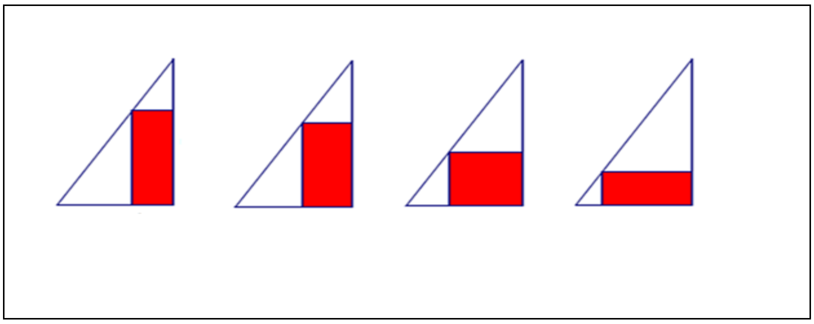


Figura 55: Esquema da vela do barco.
Fonte: Azevedo (2009).

Momento 1:

- A região de qualquer um dos retângulos acima é sempre a mesma? Justifique.

- Em qual situação Paulo gastará mais pano vermelho?

Momento 2:

Abra o arquivo 8, que se encontra no desktop do seu computador.

- Conforme muda o segmento azul o que acontece com a área do retângulo?-

- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo?

- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo?

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

No contexto do problema quais as grandezas que podem variar?

- Qual é a variação de x (domínio)?

- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.

- O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

- Quais os intervalos em que a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis e papel, escreva a função que representa o problema.

Espera-se aqui que o aluno perceba que os triângulos ADC e DEF são semelhantes, portanto, seus lados são proporcionais. Então, no triângulo retângulo DEF um dos catetos mede $(8-x)$ e o outro y; no triângulo retângulo ACD os catetos medem 8 cm e 6 cm, assim $\frac{(8-x)}{y} = \frac{8}{6}$, resolvendo esta igualdade deverá chegar que $y = \frac{(48-6x)}{8}$, encontrando assim um dos lados do retângulo. Então a área do retângulo, em função do lado x, será $A(x) = x.\left(\frac{48-6x}{8}\right)$,ou ainda, $A(x) = \frac{48x-6x^2}{8}$,que é a função quadrática que representa o problema.

-Compare a área do retângulo de maior área com soma da área dos triângulos menores. O que você observa?

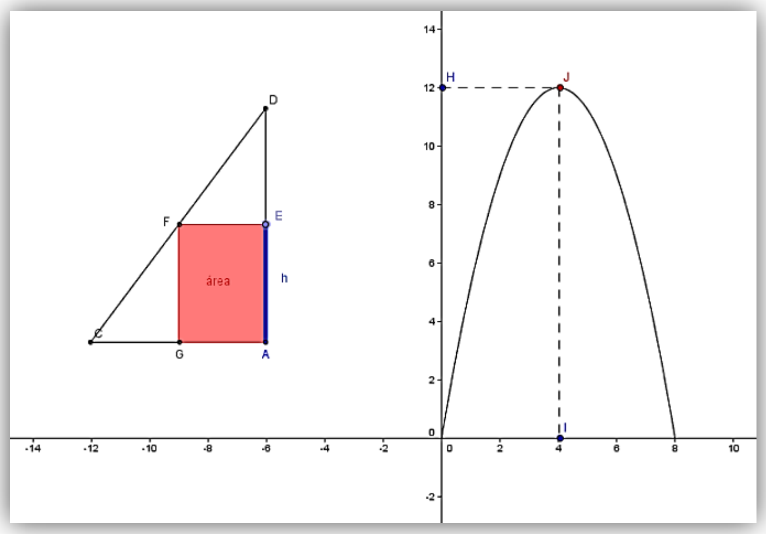


Figura 56: Apresenta a figura e o gráfico, associados a uma mesma situação.

Pode ser sugerido ao aluno pensar em outra situação em que um dos lados do retângulo encontra-se na hipotenusa.

- O que aconteceria se um dos lados do retângulo estivesse contido na hipotenusa?
- Será que o retângulo obtido seria o mesmo?
- Será que a área, desse retângulo, seria a mesma?
- Se a medidas das áreas forem diferentes, em qual das duas situações teríamos mais economia de pano vermelho.

Encontro 7 - O problema da horta

Considere a seguinte situação:

> João dispõe de 24 m de tela para cercar uma horta de formato retangular. Quais devem ser as dimensões do cercado, de modo que se possa obter maior produtividade na horta?

Momento 1:

- Usando o lápis e o papel, faça um desenho que represente o cercado na situação do problema;
- O que representa a medida 24 m, no enunciado do problema?
-Como o João deve dimensionar a sua horta para ter um melhor aproveitamento do terreno?

Momento 2:

Abra o arquivo 9, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

– Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo? qual o valor do perímetro?

-Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo? qual o valor do perímetro?

-Quando o segmento azul é igual metade da medida do perímetro, o que acontece com a área do retângulo?

- Segmentos azuis diferentes podem produzir retângulos de mesma área?

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

- Qual é a variação de x?

- Com auxílio das ferramentas, "rastro" e "Lugar Geométrico" obtenha o gráfico que representa a função.

- O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis e papel, escreva a função que representa a situação. Espera-se que o aluno perceba que ele deve estabelecer uma relação entre os lados do retângulo, que tem medidas x e y, para isso ele deverá usar a fórmula do perímetro $2x + 2y = 24$ ou ainda $x + y = 12$, deixando y em função de x então agora estando os lados em função de uma única variável ele deverá aplicar a formula para calcular a área do retângulo, ou seja, $A = x.(12 - x)$ ou ainda $A(x) = 12x - x^2$, que é a função quadrática que representa o problema.

- O aluno também deve concluir que não existe relação funcional entre perímetro e área de retângulos, ou seja, para um dado valor de perímetro podemos associar diferentes valores de área de retângulos.

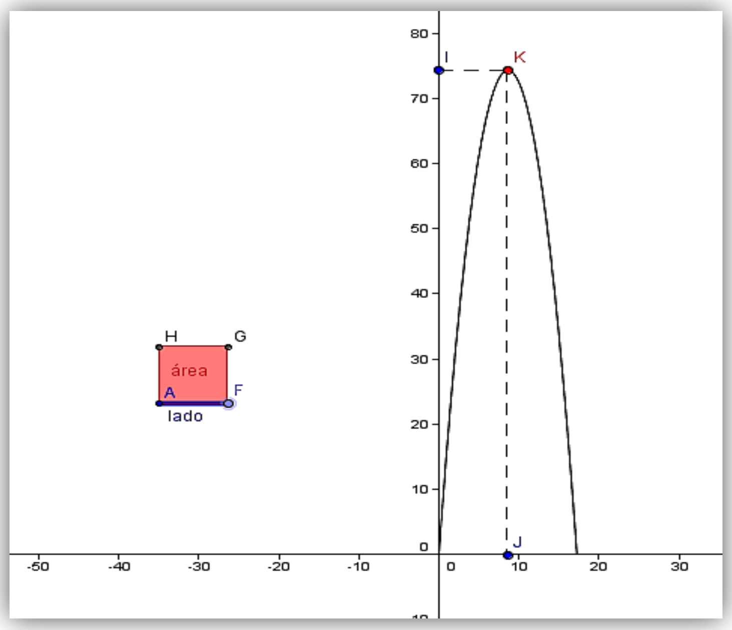


Figura 57: Apresenta a figura e o gráfico, associados a uma mesma situação.

Encontro 8 - Estudo das propriedades da Função quadrática

Esse encontro será destinado à construção e análise de gráficos da função quadrática, utilizando o GeoGebra. Os pré-requisitos necessários para resolução dessas atividades são: Plano cartesiano, coordenadas de um ponto no plano, simetria e translação. Estes conteúdos já são de conhecimento dos alunos, uma vez que já foram utilizados no estudo da função afim.

Partiremos sempre da função descrita por $f(x) = x^2$, por ser a representação mais "simples" da função. Com base nesse gráfico podemos construir os de: $y = ax^2$, $f(x) = x^2 + k$, $f(x) = (x + k)^2$ e $f(x) = (x + k)^2 + l$. O aluno deverá perceber quais modificações ocorrem em seu gráfico quando alteramos o valor dos parâmetros a, k, e l, identificar o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

É importante salientar que estas quatro primeiras atividades visam também a construção dos pré-requisitos para que os alunos determinem com precisão as informações que foram obtidas na forma qualitativa. No final das atividades (1), (2) e (3), o professor terá um momento onde ele sistematizará as propriedades envolvidas em cada atividade.

Atividade 1:

Nessa primeira atividade, esperamos que os alunos observem os gráficos obtidos e verifiquem que: todos eles são parábolas e conforme o coeficiente a positivo (ou negativo) de x^2 aumenta (a>1), o gráfico vai se "fechando" cada vez mais, de acordo com o aumento do coeficiente positivo (ou negativo) de x^2. E quando o coeficiente positivo (ou negativo) de x^2 diminui (0<a<1), o gráfico vai se "abrindo" cada vez mais, de acordo com a diminuição do coeficiente positivo (ou negativo) de x^2. Esperamos também que eles percebam que quando o coeficiente a for positivo (a>0) a parábola terá concavidade voltada para cima e quando o coeficiente a for negativo (a<0) a parábola terá concavidade voltada para baixo.

1.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o GeoGebra, o gráfico de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $f_3(x) = 2x^2$

d) $f_4(x) = \frac{1}{4}x^2$

e) $f_5(x) = 5x^2$

f) $f_6(x) = -x^2$

g) $f_7(x) = -\frac{1}{2}x^2$

h) $f_8(x) = -2x^2$

i) $f_9(x) = -\frac{1}{4}x^2$

j) $f_{10}(x) = -5x^2$

1.2) Analisando os gráficos:

a) O que podemos concluir do coeficiente de x^2 quando ele for um número maior que zero.

b) O que podemos concluir do coeficiente de x^2 quando ele for um número menor que zero.

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo?

e) Comparando os gráficos dos itens **(a)** e **(f)** o que se pode concluir?

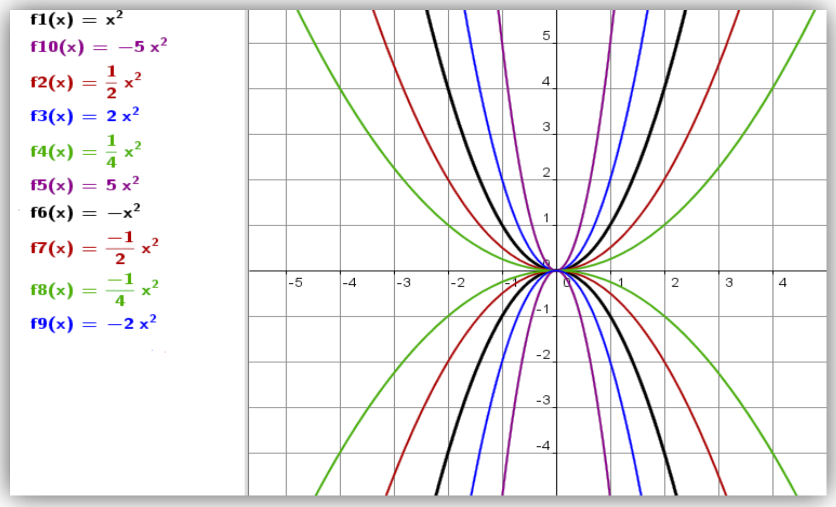


Figura 58: Funções da atividade 1(etapa 2)

Atividade 2:

Nessa atividade esperamos que os alunos observem os gráficos obtidos e verifiquem que a adição ou subtração de uma constante faz a translação vertical do gráfico de $f_1\ (x)\ =\ x^2$. Esperamos também que eles percebam que a coordenada x permanece a mesma e a coordenada y varia, pois o gráfico de $f_1\ (x)\ =\ x^2$ será transladado sobre o eixo das ordenadas.

(2.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o GeoGebra, o gráfico de:

a) $f_1(x)\ =\ x^2$

b) $f_2(x)\ =\ x^2 + 1$

c) $f_3(x)\ =\ x^2 + 2$

$d)\ f_4(x)\ =\ x^2\ - 1$

$e)\ f_5(x)\ =\ x^2 -\ 2$

2.2) O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x)=x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função ?

2.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

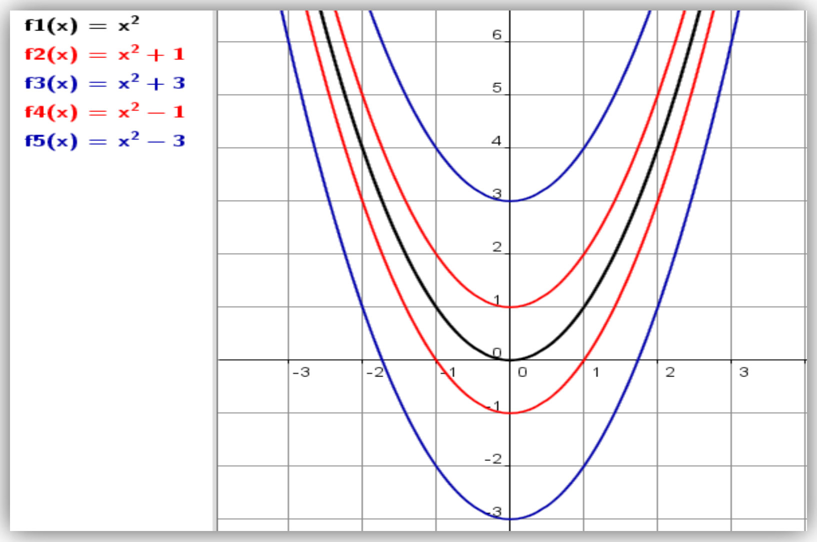


Figura 59: Funções da atividade 2 (etapa 2).

Atividade 3

Nessa atividade esperamos que os alunos observem os gráficos obtidos e verifiquem que a adição de uma constante positiva à variável x, faz a translação horizontal do gráfico de $f_1\ (x)\ =\ x^2$ para a esquerda e, que a subtração de uma constante positiva faz a translação horizontal para a direita. Esperamos também que eles percebam que a coordenada y permanece a mesma e a coordenada x varia, pois o gráfico de $f_1\ (x)\ =\ x^2$ foi transladado sobre o eixo das abscissas.

3.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o geogebra, o gráfico de:

a) $f_1(x)\ =\ x^2$

b) $f_2(x) = (x+1)^2$

c) $f_3(x) = (x-1)^2$

d) $f_4\ (x)\ =\ (x^2 + \frac{1}{2})^2$

e) $f_5\ (x)\ =\ (x - \frac{1}{2})^2$

3.2) Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x)= x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraimos uma constante positiva a variável independente x?

3.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

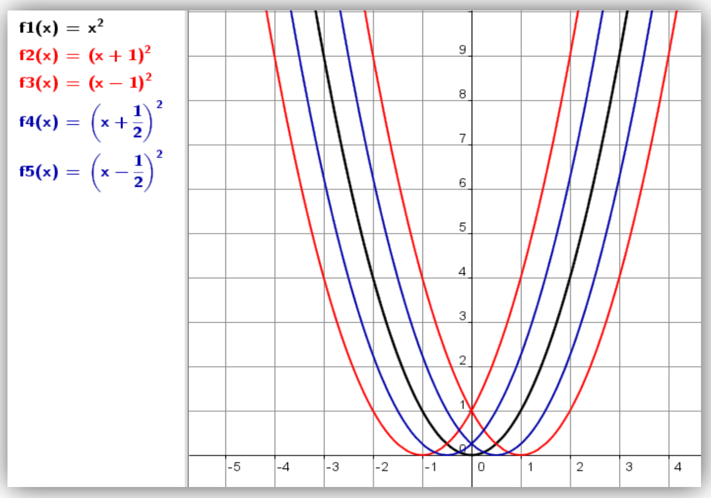


Figura 60: Funções da atividade 3 (etapa 2).

Atividade 4

Na quarta atividade esperamos que os alunos reapliquem conjuntamente os conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores. Que observem o comportamento dos gráficos da função quadrática na forma $f(x) = a(x+k)^2 + l$, façam o tratamento da escrita algébrica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, relacionem os seus coeficientes com os parâmetros k e l da forma canônica e percebam que estes representam as coordenadas do vértice da parábola.

4.1) Sem utilizar o geogebra descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo.

a) $f_1(x) = (x+3)^2 - 4$ b) $f_2(x) = 3(x+\frac{3}{4})^2 - 2$

4.2) Esboce, utilizando o geogebra, o gráfico das funções acima e responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

4.3) Você consegue prever o gráfico da função $h(x) = x^2 - 6x + 5$?

4.4) Relacione os parâmetros da função $f(x) = a(x+k)^2 + l$ com os parâmetros da função $g(x) = ax^2 + bx + c$. Que conclusões podemos tirar?

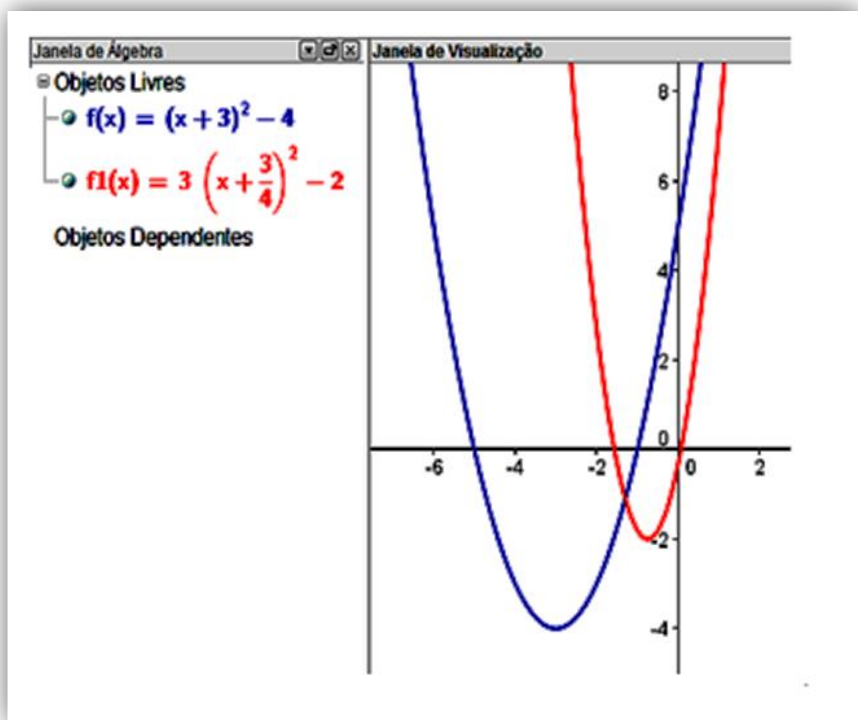


Figura 61: Funções da atividade 4.1(etapa 2).

Encontro 9 – Problemas de máximo e mínimo

Espera-se que, partindo da "lei" da função obtida na resolução dos problemas propostos na fase 1, os alunos cheguem à forma geral da função quadrática através do trinômio quadrado perfeito e completando quadrados obtenham o ponto de máximo e/ou mínimo.

As leis algébricas que representam as funções quadráticas são:

a) Problema do Pentágono cuja lei era :$A(x) = 8 + 4x - x^2$

b) Problema da chapa metálica cuja lei era: $A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$;

c) Problema da vela do barco cuja lei era: $A(x) = \frac{48x - 6x^2}{8}$;

d) Problema da horta cuja lei era: $A(x) = 12x - x^2$.

A sequência didática aqui apresentada tem a intenção de provocar no aluno a construção do conceito de função a partir de situações geométricas dinâmicas. Na medida em que o aluno começa a relacionar aspectos de variação na figura e dependência entre variáveis, ele estará construindo esse conceito. Esperamos também, com esta forma de trabalho, que faz uso de um “problema dinâmico”, propiciar ao aluno a constatação de que um texto, um gráfico e uma expressão algébrica podem estar relacionados entre si e representarem um mesmo objeto “função”.

5 REALIZAÇÃO DA EXPERIÊNCIA E ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo apresentamos a experiência de ensino que tratou da implementação e análise da sequência didática detalhada no capítulo anterior. Juntamente com os relatos de como transcorreu a aplicação da sequência didática faremos as análises *a posteriori*. Analisaremos principalmente como os alunos lidaram com registros numérico, algébrico e geométrico, e também de que forma desenvolveram habilidades de uso do software para produzir essas articulações de tratamento e conversões entre os diferentes registros.

5.1 OS PARTICIPANTES DA EXPERIÊNCIA

Participaram da experiência alunos de turma o 1º ano do Ensino Médio Politécnico[16] da Escola Estadual de Educação Básica Apeles Porto Alegre, em Porto Alegre. Essa turma era composta de vinte e oito alunos, vindos de diferentes escolas da região. No que se refere à formação em matemática, era considerada uma turma de perfil heterogêneo. Percebeu-se que alguns alunos tinham muita dificuldade em operações algébricas, resolução de equações, conceitos geométricos, e que isso poderia comprometer a aprendizagem de novos conceitos. Assim decidimos fazer um trabalho de retomada e reforço de conteúdos da matemática básica. O trabalho foi realizado com toda a turma, mas com um olhar especial para os alunos com mais dificuldade. Destacamos que os alunos já estavam familiarizados com software GeoGebra, pois já haviam realizado outras atividades com o mesmo, na série anterior, com outro professor, e também em um primeiro estudo algébrico de funções afim, com esta professora-pesquisadora.

[16] Proposta do governo que tem por base a articulação das áreas de conhecimento (Ciências Humanas, Ciências da Natureza, Linguagens e Matemática) e suas tecnologias com os eixos: cultura, ciência, tecnologia e trabalho enquanto princípio educativo, o que demanda uma formação interdisciplinar, tendo como ponto de partida o conteúdo social.

5.2 PROCEDIMENTOS GERAIS E A COLETA DE DADOS

Todas as atividades da sequência didática foram realizadas no laboratório de informática. Foi como professora e pesquisadora que a autora desta dissertação esteve presente.

Tivemos dez computadores à disposição, um deles integrado com projetor multimídia para uso do professor. Nestas condições, a turma de alunos foi organizada em nove grupos, com uma média de três alunos em cada grupo. Quanto à escolha dos integrantes de cada grupo, não adotamos critério algum, pois já havia uma organização decorrente de trabalhos anteriores.

As atividades foram sempre entregues impressas em papel, para que cada grupo fizesse seus registros de resolução. Ao final de cada encontro, este material foi recolhido pela professora-pesquisadora.

Durante alguns encontros[17] foram feitas gravações de vídeo com áudio, com a finalidade de serem utilizados em nossas análises. Esses vídeos foram de extrema importância, pois observamos as falas, as considerações e os questionamentos feitos pelos alunos durante a aplicação das atividades. Em alguns momentos das análises fazemos transcrição das "falas" dos alunos. Os vídeos também serviram para que a professora-pesquisadora fizesse uma auto avaliação de seu trabalho, revisse sua postura e seu posicionamento frente à realização das tarefas.

5.3 A EXPERIÊNCIA E A ANÁLISE A POSTERIORI

No que segue apresentamos, junto com a descrição da experiência, a análise a posteriori da produção dos alunos, em cada encontro. Devido ao grande volume de material produzido pelos alunos[18] ao longo da aplicação da sequência didática,

---

[17] Em razão dos recursos disponíveis para realizar as filmagens, elas aconteceram somente em alguns encontros e no momento em que os grupos solicitavam a ajuda do professor-pesquisador.

[18] Mesmo que todos os alunos tenham realizado as atividades, a análise dos dados dessa pesquisa foi feita a partir dos grupos que entregaram o termo de consentimento informado assinado pelos pais.

vamos fazer recortes nessa produção procurando mostrar os momentos de aprendizagem que indicam o uso de diferentes registros de representação, de conversões e de transformações.

Os encontros para a aplicação da sequência didática aconteceram nos meses de outubro e novembro de 2013. Foram onze encontros, diferentemente da expectativa inicial de nove encontros e totalizaram 22 horas de trabalho, ficando assim organizados, com mostra o quadro 7.

Quadro 7: Mostra o que foi tratado, a cada encontro, na etapa .

ETAPA 1	
Encontro 1 (2 h/a)	Pré- Requisitos
Encontro 2 (2 h/a)	O problema do pentágono - aula inaugural que tratou de função quadrática
Encontro 3 (2 h/a)	O problema da luminária - envolvendo função afim
Encontro 4 (2 h/a)	O problema da casa com jardim - envolvendo função afim
Encontro 5 (2 h/a)	O problema da chapa metálica - envolvendo função quadrática
Encontro 6 (2 h/a)	O problema da vela do barco - envolvendo função quadrática
Encontro 7 (2 h/a)	O problema da horta - envolvendo função quadrática

Quadro 8: Mostra o que foi tratado, a cada encontro, na etapa 2

ETAPA 2	
Encontro 8 (2h/a)	Estudo das propriedades da função quadrática.
Encontro 9 (2h/a)	Estudo das propriedades da função quadrática.
Encontro 10 (2h/a)	Estudo das propriedades da função quadrática.
Encontro 11 (2h/a)	Calcular pontos correspondentes ao vértice nos problemas propostos.

Em relação ao primeiro encontro, destinado à revisão de pré-requisitos, fazemos um breve comentário sobre o seu desenrolar. No segundo encontro descrevemos a discussão feita com o grande grupo, relativa a uma primeira situação-problema e que teve como propósito mostrar aos alunos o espírito do trabalho a ser feito nos demais encontros. É a partir do terceiro encontro que são apresentadas as análises a posteriori da produção dos alunos, conforme já havia sido previsto no momento de organização da sequência didática apresentada no capítulo anterior .

Na análise serão destacadas as dificuldades observadas, bem como os avanços dos alunos. O nosso objetivo é estabelecer relações das produções dos alunos com a fundamentação teórica escolhida para esta pesquisa, de forma a responder à pergunta de pesquisa enunciada na introdução, a saber:

As articulações entre os diferentes registros de representação semiótica, aliadas a situações geométricas e ao software de matemática dinâmica, podem ajudar o processo de aprendizagem do conceito de função?

Encontro1- Pré-requisitos

Este primeiro encontro teve como objetivo fazer uma análise das concepções dos alunos sobre os conceitos de área, perímetro, teorema de Tales e semelhança de triângulos. Também visou detectar as dificuldades da turma e os conhecimentos a respeito desses conteúdos.

Inicialmente, diante das questões propostas eles ficaram sem saber o que era para fazer e que forma deveriam respondê-las. À exemplo, nas questões onde era solicitado que manipulassem o ponto em destaque na figura e ao mesmo tempo observassem o que acontecia com a área, a maioria não sabia explicar o que estava acontecendo. Na primeira atividade comentaram: “Tá, estou manipulando o tal ponto, mas e dai o que eu escrevo”?; ou “O que vamos calcular aqui, se não tem número?”. Tais atitudes mostram que os alunos não estão acostumados ao tipo de trabalho que estávamos propondo com o GeoGebra, onde se exige atitudes de observar, analisar, conjecturar e argumentar. Os alunos têm uma concepção[19] de que matemática é somente cálculo, só envolve números, aplicação de fórmulas e que a isso se reduz o raciocínio lógico matemático. Acreditamos que isso está condicionado a uma multiplicidade de fatores, entre os quais: aulas centradas no conteúdo com ênfase na exposição, onde cabe ao professor transmitir a informação e cabe ao aluno recebê-la; ênfase aos aspectos mecânicos e onde os aspectos de prática são constituídos pela resolução dos exercícios repetitivos de aplicação.

Também percebemos com essas atividades iniciais que as ideias de área, perímetro e proporção não estavam bem claras para alguns. Em razão disso, na aula seguinte, estas atividades foram retomadas com o objetivo de corrigir os erros cometidos e sanar suas dúvidas em relação a esses conteúdos. Nossas expectativas iniciais a respeito do conhecimento prévio dos alunos estavam além do que foi observado no momento de trabalho.

Encontro 2 – O problema do pentágono

Neste encontro ocorreu a apresentação do primeiro problema dinâmico, e o escolhido para dar inicio às atividades foi sobre função quadrática[20]. Esclarecemos que o primeiro problema seria resolvido através de discussão coletiva, a ser conduzida pela professora-pesquisadora. E também esclarecemos que o mesmo espírito de trabalho investigativo seria, depois, feito em pequenos grupos e que então deveriam prestar atenção no desenvolvimento da atividade e esclarecer todas as dúvidas.

Para nossa surpresa eles pediram para fazer a atividade junto, pois segundo eles “se aprende melhor fazendo”. Frente ao argumento, não fizemos objeção e então deu-se início o trabalho. Foi lido o problema em voz alta e foi proposto que pensassem sobre a situação. Com lápis e papel deveriam representar geometricamente a situação proposta.

---

[19] Estas concepções refletem-se quando se exige que parta dele essa construção do conhecimento, desvalorizando com isso as finalidades associadas a um papel ativo e criador que esperamos deles.

[20] Justificamos esta escolha pelo fato de ser o nosso assunto de estudo nesse período.

Para facilitar a leitura que segue, retomamos o enunciado do problema (já apresentado no capítulo 4):

A situação geométrica a ser explorada é a seguinte:

> Paulo possui um pequeno pedaço de cartolina no formato de um quadrado de lado 4 cm e deseja recortar um pentágono utilizando essa cartolina de modo que esse pentágono tenha a maior área possível. Para tanto, ele pensou em nomear esse quadrado por ABCD, marcar os pontos M, N e P sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente, de modo que as medidas AM, NC e CP fossem iguais a um valor conveniente l, uma vez que há várias possibilidades para essa marcação. Ajude Paulo a encontrar a medida l de modo que ao recortar o pentágono AMNPD, ele obtenha a figura desejada.

Não sabiam muito bem como fazer. Então, com três folhas de papel com formato quadrado, foram criadas situações diferentes para se cortar os cantos conforme informado no problema. Com uma tesoura, cortamos os cantos das três folhas, obtendo pentágonos com formas diferentes. Tendo compreendido a situação, fizemos o seguinte questionamento: vocês constataram que para cada tamanho de AM teremos pentágonos com formas diferentes. Será que podemos dizer também que para cada tamanho de AM teremos pentágonos com áreas diferentes? Eles olharam, compararam e disseram que como todos tinham formas diferentes, a área também mudaria conforme o tamanho de AM. Nesse trabalho correspondente ao Momento 1 da resolução do problema, tratamos de provocar a conversão da linguagem natural para o registro geométrico (figura). A questão ficou em aberto e então, passamos para o arquivo do GeoGebra onde estava a construção do pentágono, aqui o Momento 2 da atividade. Nossa expectativa era a de que agora manipulando o ponto M, na situação geométrica, eles conseguissem visualizar, com mais clareza, as variáveis em relação e que são evidenciadas no movimento dinâmico. Deu-se as instruções de como deveriam proceder para responder aos questionamentos. Dissemos, a eles, que deveriam observar o que mudava na figura, no mesmo momento, em que o ponto M era manipulado na construção. Perguntas iam sendo feitas para que eles participassem daquele momento de descoberta: “Quando manipulamos o ponto M, o segmento azul (que nomeamos de l)) aumenta e /ou diminui; o que está mudando, ao mesmo tempo, na figura?” Eles observavam atentamente e se empenhavam para responder aos questionamentos. O momento de grande entusiasmo foi no traçado do gráfico, quando é ativado o recurso Rastro do GeoGebra, pois o gráfico que representa a situação vai sendo traçado conforme manipulamos o ponto M, como mostra a figura 62.

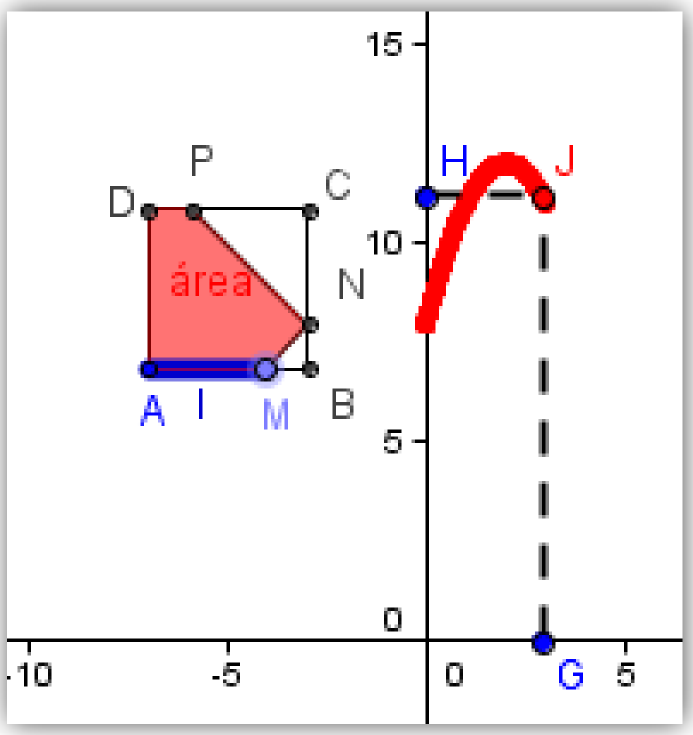


Figura 62: Traçado do gráfico utilizando o recurso rastro do GeoGebra.

Eles ficaram impressionados dizendo: “Que legal, como é que pode?”. Tendo compreendido como construir o gráfico que representava a situação, perguntou-se então se, naquele momento, já poderiam dizer qual seria a área máxima do pentágono. Eles apontaram a parte mais alta do gráfico. Dissemos que sim porém, aquele valor não era preciso mas, que numa outra fase dessa pesquisa calcularíamos esse valor com precisão.

Na parte final da atividade, o Momento 3, observamos os alunos mais apreensivos. Tiveram dificuldade em compreender o que estava sendo feito. Por exemplo, quando foi perguntado como poderiam escrever a medida de M até B, sabendo que a medida do lado do quadrado é 4cm e que AM=CP=NC = l. Esse fato sugere a dificuldade que esses alunos têm em trabalhar com situações que envolve álgebra.

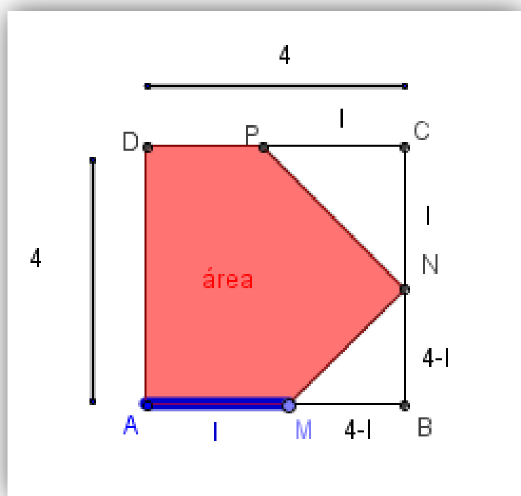


Figura 63: Medidas dos lados dos triângulos isósceles PCN e MBN.

Para que compreendessem a situação e chegassem a resposta esperada, por nós, resolvemos primeiro usar alguns exemplos numéricos e vimos que dessa forma eles respondiam corretamente. Voltamos então ao nosso problema, onde eles responderam corretamente que a distância MB era $(4 - l)$ assim como a distância de BN e DP. Feito isso, encontramos a expressão algébrica que representa área do pentágono, subtraindo da área do quadrado as áreas dos triângulos isósceles PCN e MBN. No momento 3, de encontrar a “ lei” que representava a área da função, os alunos não se mostraram muito motivados, percebemos que tinham dificuldades em fazer manipulações algébricas.E isso talvez explique a falta de motivação.

Pelo fato de os alunos terem mostrado entusiasmo na maior parte do tempo de resolução da atividade, de terem participado e respondido a todos os questionamentos feitos pela professora-pesquisadora, julgamos que os objetivos de aprendizagem pretendidos para o segundo encontro foram atingidos.

Encontro 3 – O problema da luminária

O problema proposto para este encontro foi:

> Uma fábrica de luminárias quer produzir um modelo de abajour em forma de uma pirâmide quadrangular cuja aresta da base mede 20 cm e altura desse abajour varia de acordo com o gosto do cliente. Qual será o gasto mínimo de material para fazer o abajour?

No Momento 1, os alunos fizeram um esboço da luminária. Para entender melhor os conceitos envolvidos e também os cálculos a serem feitos, eles deveriam planificá-la. Para a surpresa da professora-pesquisadora eles não sabiam como fazer e falavam “como assim planificar?”. Mostramos, então, uma pirâmide quadrangular, em acrílico, e explicamos que planificar era “abrir” a pirâmide fazendo com que as faces laterais e a base estivessem no mesmo plano. Tendo compreendido a situação, responderam as questões colocadas neste Momento 1.

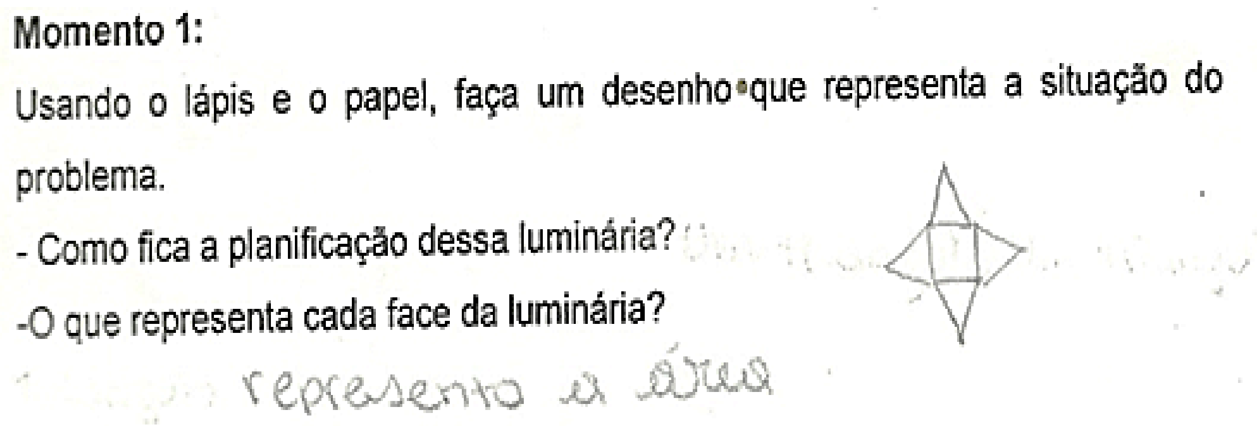

Momento 1:
Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a situação do problema.
- Como fica a planificação dessa luminária?
-O que representa cada face da luminária?
representa a área

Figura 64: Problema da Luminária (grupo 4).

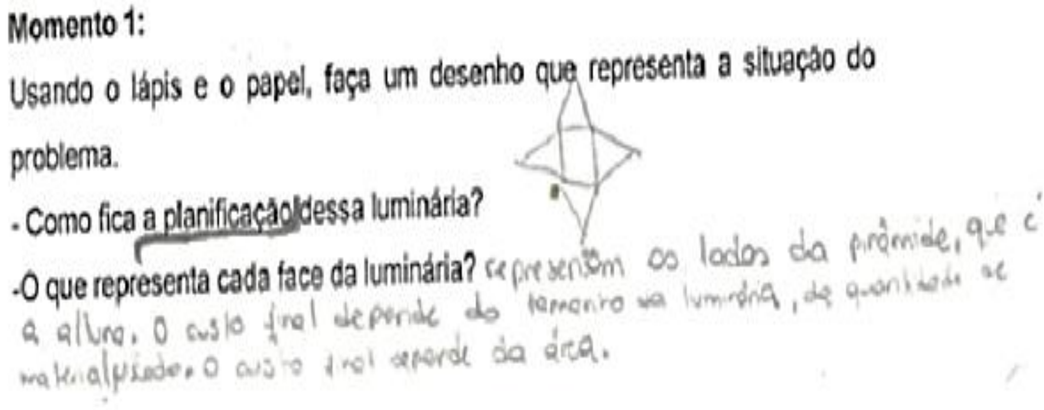
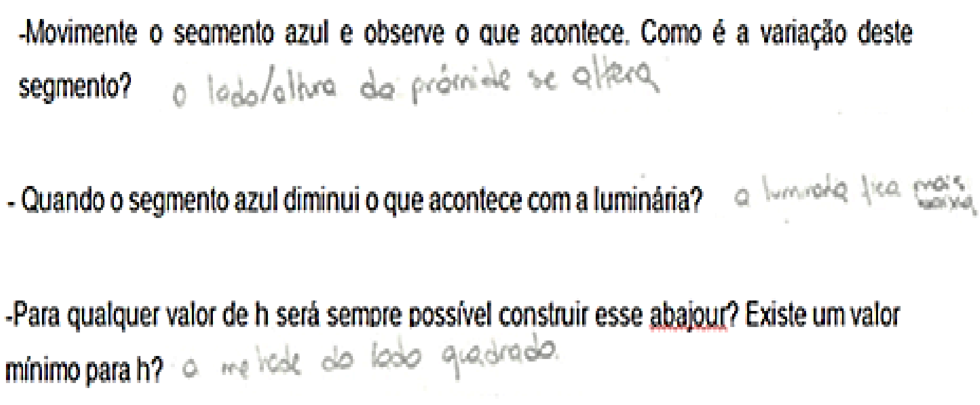

Momento 1:
Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a situação do problema.
- Como fica a planificação dessa luminária?
-O que representa cada face da luminária? representam os lados da pirâmide, que é a altura. O custo final depende do tamanho da luminária, da quantidade de material usado. O custo final depende da área.

Figura 65: Problema da Luminária (grupo 5).

Quando perguntado o que representava cada face da luminária, a resposta do grupo 4 “representa a área” estaria correta se tivessem respondido que representava a área de uma das faces da luminária, ou a área de um dos triângulos que representa a face da luminária. Deveriam ter percebido ao fazer a interpretação que a área no problema dado engloba a área das faces laterais da pirâmide mais a área da sua base. O grupo 5 respondeu que: “representam os lados da pirâmide que é a altura. O custo final depende do tamanho da luminária, da quantidade de material usado. O custo final depende da área”. Esse grupo, deu várias respostas sem focar no que estava sendo perguntado. Na primeira resposta intuímos que houve uma incompreensão do conceito de altura e também usaram de forma incorreta lados ao invés de faces laterais da pirâmide. As outras respostas mostram uma compreensão do problema mas não era isso que estava sendo perguntado. Em nossa análise *a posteriori* compreendemos que a pergunta feita não estava clara e por isso essa incompreensão. Esse fato nos conduziu a elaboração de uma nova pergunta que será contemplada no apêndice 1 deste trabalho.

O Momento 2 iniciou com o trabalho no arquivo GeoGebra. Os alunos abriram o arquivo com a planificação da luminária pronta. Manipularam os pontos na figura e identificaram as variáveis; iniciaram a análise qualitativa e estabeleceram relação de dependência entre as variáveis elencadas. Na construção da planificação da luminária não ficou estabelecido o valor mínimo de h (altura da face lateral da luminária). Queríamos que os alunos percebessem que a pirâmide (luminária) deixava de existir, quando h fosse menor do que a metade da medida do lado do quadrado (base da pirâmide). Ao passar pelos grupos, observamos que apenas um grupo percebeu este fato. Então fez-se uma intervenção, sugerindo a eles que construíssem uma pirâmide de papel, de modo a unir as quatro faces. Feito isso, sugerimos que aos poucos fossem diminuindo a altura das faces e observassem o que aconteceria com a pirâmide. Perguntou-se novamente: “será que para qualquer valor de h poderemos montar essa luminária?”. A seguir apresentamos como responderam a esse e outros questionamentos do momento 2.

O grupo 5 se manifestou, mostrando o seu modelo. Eles disseram que “o mínimo para fechar a pirâmide seria quando as quatro faces laterais preenchessem o quadrado”. E, então perguntamos sobre h, mas, não sabiam como se expressar. Assim, pedimos que comparassem a medida de h com a medida do lado do quadrado e foi então que responderam “Ah!, h é a metade do lado”. Apesar de não terem dito que deveria ser maior que a metade do lado do quadrado a resposta dada sugere que eles compreenderam a condição imposta a h para a pirâmide existir . Para responder sobre o intervalo de variação do segmento azul (h) eles usaram o registro da língua natural dizendo que: “O lado/altura da pirâmide se altera” referindo-se à face lateral da luminária. As respostas dadas por esse grupo, sugerem que ainda há uma incompreensão de certos conceitos como o de altura ou talvez uma dificuldade de “visualização” espacial, já que a construção encontrava-se planificada.


-Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento? o lado/altura da pirâmide se altera

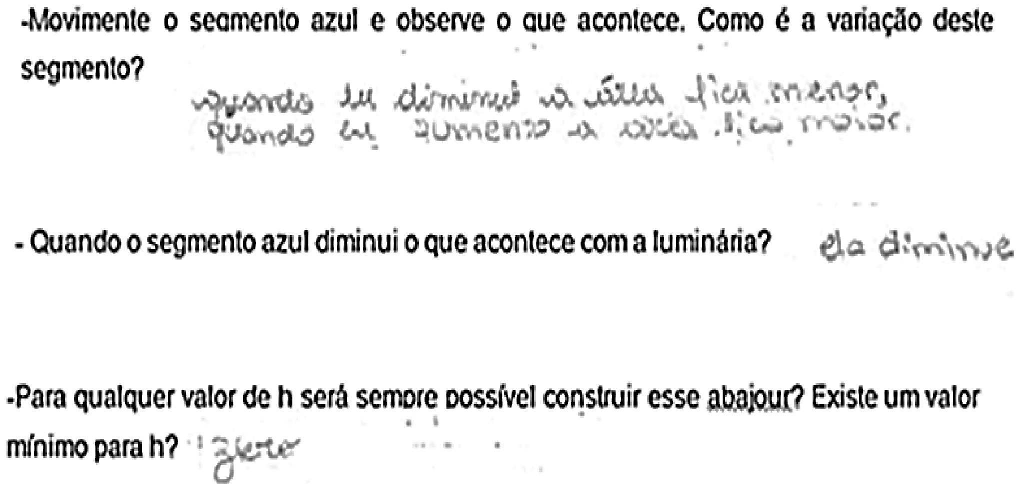
- Quando o segmento azul diminui o que acontece com a luminária? a luminária fica mais baixa

-Para qualquer valor de h será sempre possível construir esse abajour? Existe um valor mínimo para h? a metade do lado quadrado.

Figura 66: Problema da Luminária (grupo 5)

Mesmo com toda a explicação, observamos que o grupo 4 não conseguiu compreender a condição imposta a h para a pirâmide existir. Vemos isso claramente quando respondem que o valor mínimo de h é "zero”. Isso mostra que simplesmente observaram o valor de h na janela de álgebra do GeoGebra. Não perceberam que, quando h era zero, não tinham mais as faces da luminária, fato este que pode ser visto claramente na construção geométrica. Esse episódio mostrou também que eles não têm um posicionamento crítico frente a situações que exigem uma análise mais cuidadosa como a de selecionar a representação mais adequada para a resolução de situações específicas como essa do problema proposto.

Eles também fizeram uso do registro língua natural para apresentar o intervalo de variação do segmento azul, que representava a altura h da face da luminária, dizendo que: “quando eu diminuo a área fica menor, quando eu aumento a área fica maior”. Intuímos aqui que a área considerada por eles seja da face da luminária. Quando perguntamos o que acontecia com a luminária quando o segmento azul diminuía eles responderam simplesmente, que: “ela diminui”.



-Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

quando eu diminui a área fica menor, quando eu aumento a área fica maior.

- Quando o segmento azul diminui o que acontece com a luminária? ela diminue

-Para qualquer valor de h será sempre possível construir esse abajour? Existe um valor mínimo para h? zero

Figura 67: Problema da Luminária (grupo 4).

Na construção do gráfico, definimos a altura da face h, como a variável independente, e a área do quadrado e das faces, como variável dependente. Mas no momento de escrever a coordenada sobre o eixo cartesiano OY, escreveram (área, 0); é claro que o ponto não ficou sobre o eixo OY. Eles logo perguntaram porque não estava dando certo pois estavam fazendo igual ao problema do pentágono.

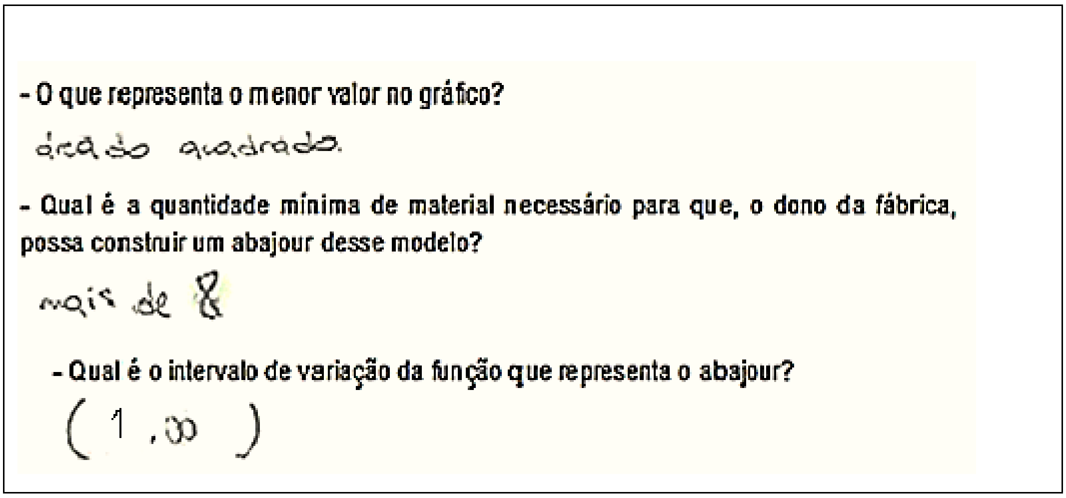
Mas antes de avançar nesta dificuldade, pedimos a eles que olhassem para a construção e observassem a área que estava sendo considerada. Eles prontamente responderam “as quatro faces da pirâmide” e então perguntou-se porque não estavam considerando a área do quadrado, pois afinal a base também estava incluída no custo. E ai se deram conta dizendo: “É verdade! mas, como iremos fazer então?” Outro grupo também pergunta: “Como vamos colocar todas essas informações no par ordenado?”.

A professora-pesquisadora dá uma ajuda orientando para que consigam escrever de modo correto essa coordenada e sinaliza comentando: “ Então, vocês já perceberam que tinham que somar as áreas das faces laterais mais a área do quadrado, certo? Agora para representar é só observar como estão nomeadas na construção, ou seja ,a área de cada face foi nomeada por: T_1,T_2,T_3,T_4 e a área do quadrado foi nomeada de Q”. Eles acompanhavam atentamente. Perguntou-se, então: “E para sabermos a quantidade de material que será usado em cada luminária faremos o que? Disseram que bastava somar todas essas áreas. Uma menina, do grupo 2, perguntou: “ o GeoGebra vai entender se eu escrever tudo isso no y?”, ou seja, ela queria saber se poderia escrever o par ordenado $(0,\ T_1+T_2+T_3+T_4+Q)$. Esclarecidas as dúvidas agora, como era de se esperar, escreveram corretamente os pares ordenados.

Mostraram compreender que, para marcar os pontos sobre os eixos, tinham que escrever a expressão da soma de áreas através dos “Rótulos” informados pelo GeoGebra. Ativaram a função Rastro do GeoGebra, e ao mesmo tempo que manipulavam a figura geométrica, iam fazendo comentários a respeito do problema tais como: “agora podemos ver que quando a altura é zero não temos luminária, só a base da luminária que é o quadrado de área quatro”. Este fato mostra a importância da articulação entre registros para a compreensão em matemática e também a contribuição do software GeoGebra no entendimento da situação, que possibilitou entre outras coisas a apropriação das ideias matemáticas envolvidas.

O grupo 5, ao responder “mais de 8” quando questionado sobre a quantidade mínima de material percebeu que se fosse exatamente 8 o dono da fábrica não conseguiria fazer a luminária, pois não teria altura suficiente. Assim a palavra “mais” , usada por eles, indica que a área deve ser maior do que 8. Responderam corretamente que o menor valor do gráfico representava a área do quadrado e também representaram de forma correta o intervalo de variação da função.

Esse grupo mostrou uma capacidade de abstração quando usaram o símbolo de ∞ e também a compreensão dos conceitos de domínio e imagem.


- O que representa o menor valor no gráfico?

área do quadrado.

- Qual é a quantidade mínima de material necessário para que, o dono da fábrica, possa construir um abajour desse modelo?

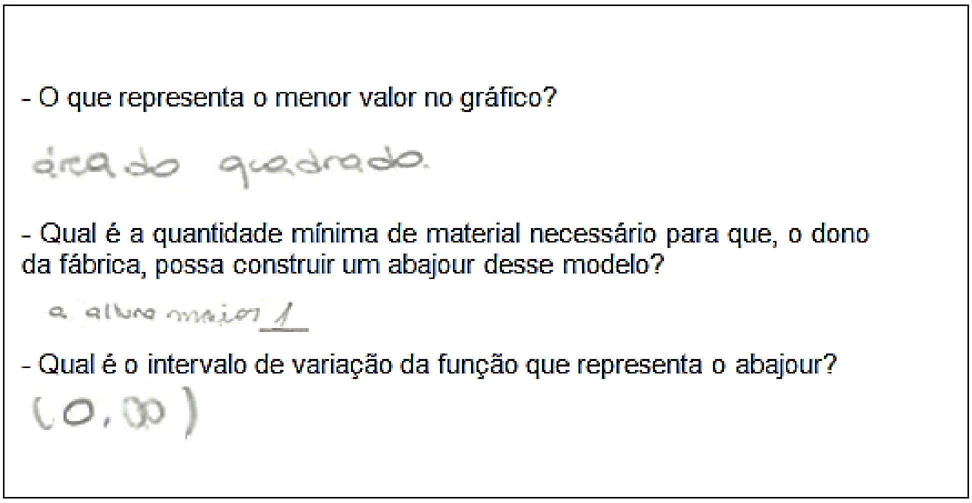
mais de 8

- Qual é o intervalo de variação da função que representa o abajour?

$(1, \infty)$

Figura 68: Problema da Luminária (grupo 5).

O grupo 5, ao responder a questão sobre a quantidade mínima de material necessário disse que a altura deveria ser maior que 1. Aqui eles levaram em conta a informação referente a variação do domínio da função, ou seja a altura deverá ser maior que um para existir a luminária. A quantidade mínima de material necessário será a soma da área do quadrado que é quatro mais a área mínima das quatro faces que também é quatro. Dessa forma, esse grupo não relacionou o conceito de área com a quantidade de material utilizado o que sugere a incompreensão do conceito de imagem da função. Também não determinaram de forma correta o intervalo de variação da função, pois para valores de h menores que 1 a luminária não existe.


- O que representa o menor valor no gráfico?

área do quadrado.

- Qual é a quantidade mínima de material necessário para que, o dono da fábrica, possa construir um abajour desse modelo?

a altura maior 1

- Qual é o intervalo de variação da função que representa o abajour?

(0, ∞)

Figura 69: Problema da Luminária (grupo 4)

No momento 3, pedimos a eles que obtivessem uma relação da altura (h) com a área de uma das faces. Onde transcrevemos o diálogo ocorrido entre alguns grupos e a professora-pesquisadora.

Grupos: Bom, se pegarmos por exemplo h=2 temos que a área da luminária é 12.

Professora-pesquisadora: E aí?

Grupos : A base da luminária é 4, certo?

Professora-pesquisadora: Sim.

Grupos: E todas as faces são iguais, então doze menos quatro é oito, quer dizer que cada face tem área igual a dois.

Grupos: Deu igual ao valor da altura. Isso pode?

Professora-pesquisadora: Tomem outro valor para h e procedam da mesma forma.

E assim o fizeram (...) manipulavam o ponto na figura e observavam, no gráfico, os valores de h e da área, faziam os seus cálculos até que chegaram a uma conclusão de que :

Grupos: Dá sempre a mesma coisa!

Professora-pesquisadora: E, por quê?

Silêncio ...

Professora-pesquisadora: Vamos escrever isso algebricamente?

Nessa conclusão precisaram de ajuda, pois segundo eles “quando entra letra na jogada, já não é mais matemática, fica impossível de se resolver”.

Percebe-se no diálogo ocorrido, que eles organizam o seu pensamento primeiro de forma empírica, através do estudo de alguns casos particulares, para só depois então generalizar. De certa forma, através da interpretação e da organização dessas informações obtidas, eles estaram mobilizando esquemas cognitivos para converter as representações em registros algébricos.

Sanadas algumas dúvidas, o terceiro momento foi realizado sem problemas, todos os grupos conseguiram chegar à expressão algébrica que representava a área da função. Isso mostra que os grupos identificaram na situação apresentada os elementos conceituais necessários para a obtenção da “lei” da função.

O grupo 4 primeiro calculou a área de um dos triângulos, e só depois é que calculou a área da função somando a do quadrado com a área dos quatro triângulos.

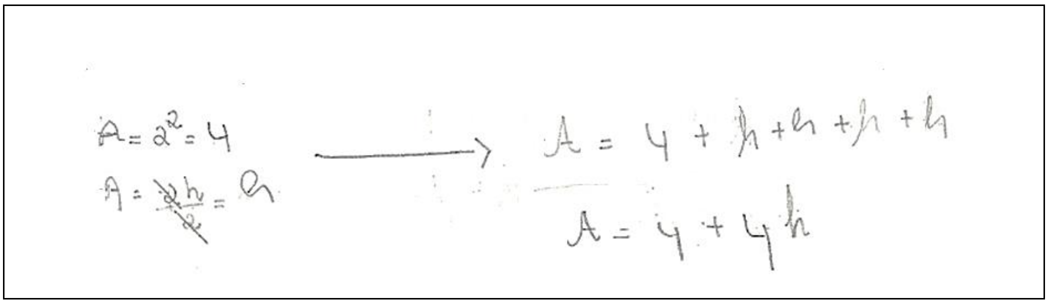


Figura 70: Problema da Luminária (grupo 4).

Já o grupo 5 somou a área do quadrado com a área dos quatro triângulos de uma só vez.

$$A = 4 + \frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}}$$

$$A = 4 + h + h + h + h$$

$$A = 4 + 4h$$

Figura 71: Problema da Luminária (grupo 5).

Encontro 4: O problema da casa com jardim

O problema trabalhado neste encontro foi o seguinte:

> Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma do lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas vizinhas, teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa 2, e pelo jardim 2 seja maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1. Nessas condições, quais são os valores possíveis para h? As dimensões das casas e dos jardins estão descritos conforme a figura 72:

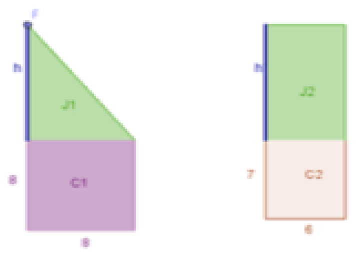
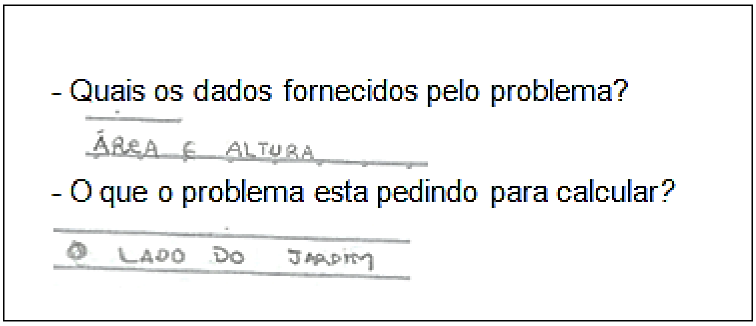


Figura 72: Planta baixa com as dimensões.
Fonte: Conexões com a Matemática (Barroso, 2010, p.119).

Nesse problema foi mostrada a planta baixa da situação e era o terceiro problema dinâmico que eles estavam trabalhando. Percebemos, através de suas atitudes, que os alunos estavam mais confiantes, até mesmo ao responderem os questionamentos. Alguns grupos mostraram autonomia para solucionarem sozinhos os questionamentos, sem precisar da ajuda da professora-pesquisadora.

No momento 1, os alunos identificaram no problema apresentado, usando o registro na língua natural, as variáveis envolvidas. Como vemos nas respostas dadas pelos grupos 3 e 4.

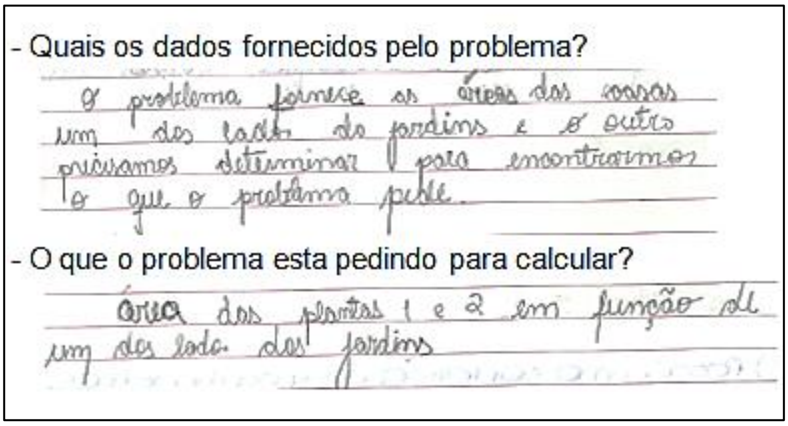

- Quais os dados fornecidos pelo problema?

ÁREA E ALTURA

- O que o problema esta pedindo para calcular?

O LADO DO JARDIM

Figura 73: Problema da casa com jardim (grupo 3).


- Quais os dados fornecidos pelo problema?

o problema fornece as áreas das casas um dos lado do jardins e o outro precisamos determinar para encontrarmos o que o problema pede.

- O que o problema esta pedindo para calcular?

área das plantas 1 e 2 em função de um dos lado dos jardins

Figura 74: Problema da casa com jardim (grupo 4).

Transcrevemos abaixo as respostas do grupo 4, referente a figura 74.

"O problema fornece as áreas das casa, um dos lados do jardins e o outro precisamos determinar para encontrarmos o que o problema pede".

"A área das plantas 1 e 2 em função de um dos lados do jardim".

Observamos através da transcrição acima que esse grupo já usa a linguagem intuitiva de funções.

Durante a realização dessa atividade, no momento 2, um aluno do grupo 4, faz o seguinte comentário: "Ah, para encontrar as variáveis envolvidas temos que mexer o ponto na construção e ver o que está mudando". Como esperávamos esse aluno compreende como deve proceder na resolução de uma problema dinâmico, mostrando que é tirando proveito do potencial semiótico do GeoGebra, através de tratamentos aplicados à figura, que ele encontrará as variáveis.

Para responder os questionamentos do momento 2, o grupo 4 utilizou as representações geométrica (figura) e numérica como ferramenta de exploração, realizando tratamentos e tirando proveito dos recursos do software GeoGebra de modo a obter informações e conjecturar soluções. Percebemos que é através das articulações entre esses registros que confirmam suas conjecturas e as registram em linguagem natural.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

a área dos jardins aumenta ou diminui conforme h aumenta ou diminui

- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?
-Quando o segmento azul aumenta, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?

3,9 | x 7 18,99 | 64 a=76,64 3,4 | 9,8 | 42 a=50,66

13 | 52,42 | 64 a=116,02 13 | 78,02 | 42 120,02

segmento azul pequeno área 1 maior que a área 2
segmento azul grande área 1 menor que a área 2

- À medida que o segmento azul varia, a área da planta 1 também varia na mesma proporção? E a área da planta 2?

sim, pois fizemos as contas e dá sempre 3,9 ou 4 e na outra 5,9 ou 6.

$\frac{17,71}{2,95} = 6$ $\frac{11,8}{2,95} = 4$

$\frac{64,29}{10,92} = 5,9 = 6$ $\frac{42,86}{10,92} = 3,9 = 4$

- Existe uma situação em que essas casas com jardim terão áreas iguais?

Sim, quando o lado do jardim for 11

- Em que situação a área ocupada pela casa 2 e pelo jardim 2 será maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1?

depois de 11

Figura 75: Problema da casa com jardim (grupo 4).

O grupo 3 também o faz usando as representações geométrica (figura) e numérica e também se beneficiaram do potencial semiótico do de GeoGebra, porém ao responderem os questionamentos o fazem em linguagem natural.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

J1 AUMENTA SE H AUMENTA
A C1 NÃO MUDA

J2 AUMENTA SE H AUMENTA
A C2 NÃO MUDA

- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?
- Quando o segmento azul aumenta, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?

SE H FOR MENOR A1 MAIOR QUE A2 ; SE H FOR MAIOR A1 MENOR A2

- A medida que o segmento azul varia, a área da planta 1 também varia na mesma proporção? E a área da planta 2?

SIM, SE H DOBRA A AREA TAMBÉM
SE H TRIPLICA A ÁREA TAMBÉM

- Existe uma situação em que essas casas com jardim terão áreas iguais?

SIM, H = 11

- Em que situação a área ocupada pela casa 2 e pelo jardim 2 será maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1?

QUANDO H FOR MAIOR DO QUE 11

Figura 76: Problema da casa com jardim (grupo 3).

Transcrevemos abaixo a resposta dada pelo grupo 3, referente ao segundo questionamento, da figura 76.

"Se h for menor A1 maior que A2". *"Se h for maior A1 menor que A2"*

Os grupos tiveram dificuldade para responder a quarta pergunta, pois não sabiam como fazer para verificar se havia relação de proporcionalidade entre as duas grandezas. Talvez alguns conceitos como o de razão, coeficiente angular precisariam ser retomados. Assim, antes de avançarmos nas atividades, a professora-pesquisadora fez uma intervenção a fim de sanar as dúvidas a esse respeito para que eles compreendessem o que estava sendo solicitado.

Destacamos a tentativa do grupo 4 em obter o domínio e a imagem da função. A partir da construção geométrica (figura) eles identificaram h como variável independente e determinaram o seu intervalo de variação; também identificaram a área como variável dependente, mas a dúvida estava em determinar a sua variação para representá-la no eixo y. Como vemos na pergunta, de um dos alunos desse grupo, transcrita do vídeo: "Professora, olhando as plantas, a variação de h vai de zero a infinito, mas estamos em dúvida para definir o intervalo de variação da imagem. Começa do zero ou a partir da área das casas?" Pedimos que lessem novamente o problema e que lá encontrariam a resposta. E assim o fizeram dizendo "ah é! devemos considerar a área da casa e do jardim". Continuamos observando o grupo para ver de que maneira escreveriam as coordenadas e podemos dizer que ficamos satisfeita com o que vimos. Comentamos que deveriam sempre analisar os enunciados dos problemas com atenção, fazendo relações com o que está escrito no texto e com a construção geométrica da situação. Neste comentário tínhamos em mente as considerações de Duval quando diz que a aprendizagem acontece quando conseguimos articular dois registros de representação de um mesmo objeto, nesse caso função.

Os alunos avançaram para o Momento 3 e obtiveram as expressões algébricas de cada situação, ou seja da casa com jardim 1 e da casa com jardim 2.

Os grupos em geral, demonstraram uma maior desenvoltura nos cálculos algébricos, aplicaram corretamente as fórmulas das áreas do triângulo, retângulo e do quadrado, identificando na situação apresentada os elementos conceituais necessários para obtenção da "lei" das funções. E também como esperávamos, compreenderam que o ponto de intersecção das retas, que visualizaram no gráfico, era o momento em que a planta 1 e a planta 2 tinham áreas iguais. Isso mostra que os grupos conseguiam transitar entre as representações e agora também obtinham significados para os cálculos que estavam fazendo.

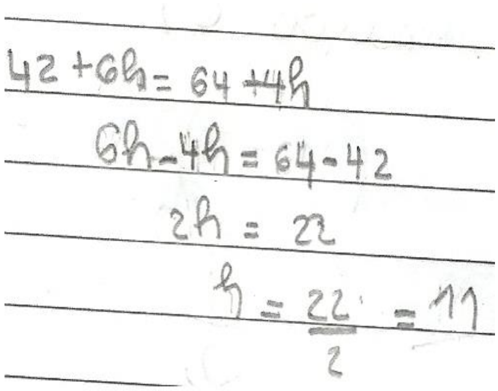


Figura 77: Problema da casa com jardim (grupo 3).

Encontro 5: O problema da chapa metálica

O problema trabalhado neste encontro foi o seguinte:

> Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM = DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?
>
> Adaptado de Azevedo (2009).

No momento 1, eles fizeram o esboço da situação como já era esperado, socializamos com o grande grupo, a fim de fazerem suas conjecturas e, quem sabe, já determinarem as variáveis do problema.

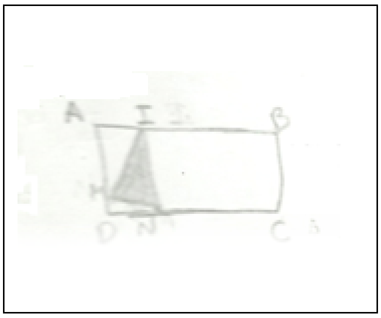


Figura 78: Problema da chapa Metálica (grupo 1).

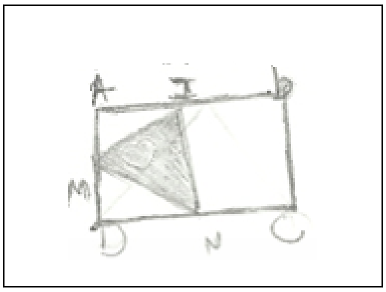


Figura 79: Problema da chapa Metálica (grupo 5).

Destaca-se o grupo 5 que, nesse primeiro momento, conseguiu visualizar as variáveis do problema, como vemos na seguinte frase transcrita do vídeo: "Quem muda nesse problema é a área em função de M que é o ponto móvel que anda sobre o lado da chapa". Eles descrevem como se já estivessem manipulando a construção no GeoGebra. Isso mostra que os conceitos de variável dependente e independente foram apropriados pelo grupo.

Abrindo o arquivo do GeoGebra com a construção pronta, eles manipularam o ponto M, segmento azul nomeado de h, confirmando que o triângulo IMN mudava a sua área. O grupo 5 foi um dos poucos que perceberam que primeiro a área diminuía enquanto o segmento azul aumentava de 0 a 1 e só a partir dai é que ela começava aumentar. Todos os grupos presentes, naquele encontro, perceberam que existiam valores diferentes de h com a mesma área.

Perguntamos se já poderiam prever como seria o gráfico. Eles manipularam o ponto M na figura e, olhando os valores de h e da área na janela da álgebra, foram descrevendo o movimento: "começa do quatro desce, vai até 3,5 e depois sobe até oito, sinalizando com gesto a forma de U. Isso mostra que já conseguiam ver o gráfico como um todo.

Os grupos se atrapalharam um pouco ao determinarem os intervalos em que a função era crescente e decrescente. Muitos deixaram a resposta em branco.

O grupo 2 tomou como extremos dos intervalos os valores que observou no gráfico, na tela do GeoGebra, mostrando que alguns conceitos ainda não estavam claros para eles. Vemos que o grupo 5 observou corretamente os extremos desses intervalos. Isso demonstra que o grupo estava atento às informações fornecidas pelo gráfico, analisando corretamente as propriedades de crescimento e decrescimento e também associando corretamente as variáveis envolvidas.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

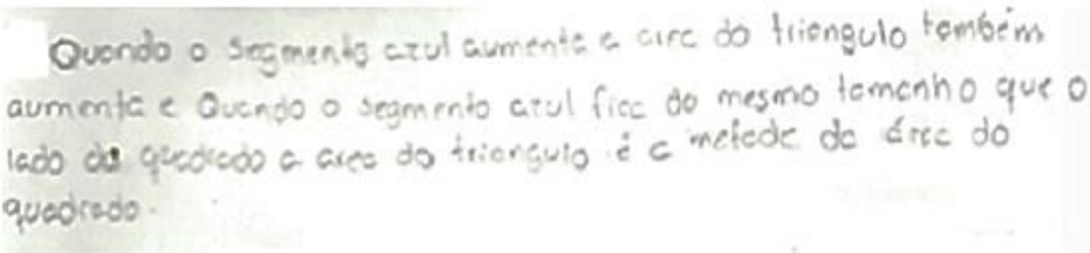

Quando alteramos a altura a area muda, varia de 0 a 4.

"Quando alteramos a altura a área muda, varia de 0 a 4".

- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor da área do triângulo IMN?


4.

- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do triângulo IMN? Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, com fica a área do triângulo?


Quando o segmento azul aumenta a area do triengulo tambem aumenta e Quando o segmento azul fica do mesmo tamanho que o lado do quadrado a area do triangulo é a metade da area do quadrado.

" Quando o segmento azul aumenta a área do triângulo também aumenta e quando o segmento azul fica do mesmo tamanho que o lado do quadrado a área do triângulo é a metade da área do quadrado".

-Segmentos azuis diferentes podem produzir triângulos de mesma área?


Sim, segmentos azuis diferentes podem criar triângulos com a mesma área.

"Sim, segmentos azuis diferentes podem criar triângulos com a mesma área".

- No contexto do problema quais grandezas podem variar?

altura e area

- O que nos informa o menor ponto do gráfico?

onde é a menor area dos triangulos

- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

C (4,1)
D (1,8)

Figura 80: Problema da chapa Metálica (grupo 2).

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

observei o ponto azul M se move ele
muda a area 0 a 4

-Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor da área do triângulo IMN?

4

- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do triângulo IMN? Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, com fica a área do triângulo?

quanto aumenta a altura a area
diminui e depois aumenta

-Segmentos azuis diferentes podem produzir triângulos de mesma área?

pode reproduzir só 2 triangulos do mesmo area

- No contexto do problema quais grandezas podem variar?

area e altura

- O que nos informa o menor ponto do gráfico?

Nos informa o menor area do triangulo: 3,5

- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

decrescente (0,1), crescente (1,4)

Figura 81: Problema da chapa Metálica (grupo 5).

No momento 3, para encontrar a "lei" algébrica que representava a situação diziam que: "para encontrar a área do triângulo vermelho, precisamos encontrar a área do quadrado menos aquelas outras três figuras que não estão pintadas. Eles identificavam os dois triângulos mas, não identificavam o trapézio BINC, como era esperado por nós. O grupo 5 se manifestou perguntando se poderia dividir aquele quadrilátero, referindo-se ao trapézio BINC, em dois triângulos. Como não tínhamos previsto resolver a questão dessa maneira, verificamos se era possível e, com muito entusiasmo respondemos que sim. Eles encontraram uma forma diferente da que tínhamos planejado para determinar a área do triângulo IMN. Isso mostrou que estavam adquirindo autonomia e, também, mostraram suas habilidades ao perceber que aquela figura (trapézio) que não é tão usual para eles, poderia ser dividida em dois triângulos, que é uma figura mais conhecida para eles. Dessa forma mostraram também que já tinham se apropriado do conceito de altura. Depois mostramos como tínhamos pensado em resolver, mas sinceramente preferíamos a deles. Esse fato deixou eles muito empolgados, sentiram-se motivados, confiantes e capazes, pois, descobriram outra maneira para encontrar a área que nós não havíamos pensado.

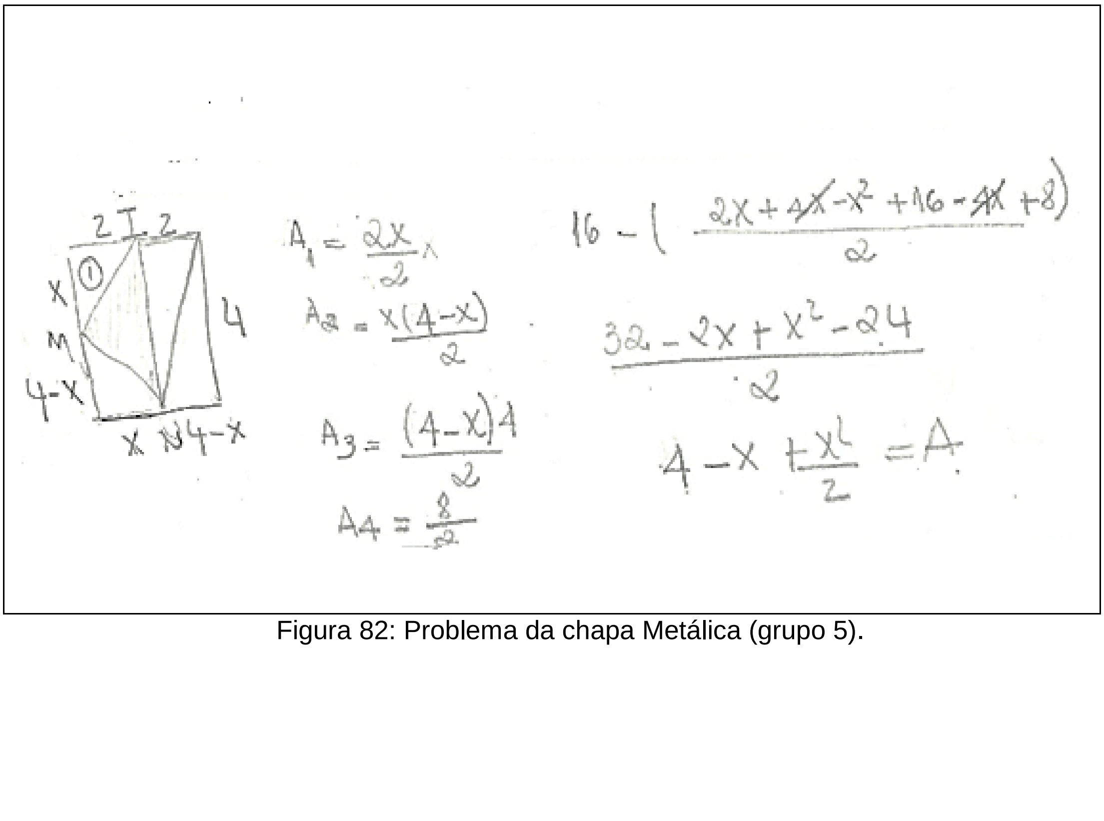


Figura 82: Problema da chapa Metálica (grupo 5).

Encontro 6: O problema da vela do barco

O problema trabalhado neste encontro foi o seguinte:

> Paulo possui um barco à vela. A vela que o equipa tem a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 8m e 6m. Para que esta vela se veja ao longe, ele decidiu colocar-lhe no interior um retângulo vermelho e para isso ele fez diferentes estudos e o seguinte esquema:

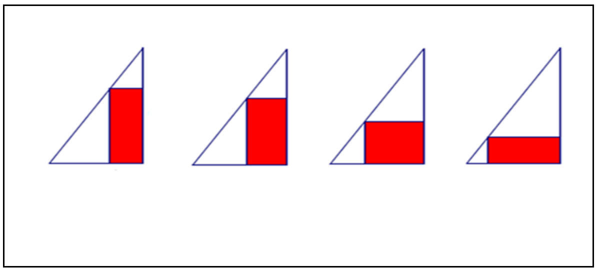


Figura 83: Esquema da vela do barco.
Fonte: adaptado de Azevedo (2009).

Como acontecia sempre em nossas aulas, receberam a folha impressa, leram o problema e começaram a responder os questionamentos. Um dos grupos observou o esquema referente à vela do barco e fez o seguinte afirmação, que transcrevemos do vídeo: “A área de todos os retângulos são iguais”. Perguntamos de que forma tinham chegado a essa conclusão, mas, não souberam como explicar. Outro grupo deu a sugestão de recortar os retângulos e sobrepô-los, pois dessa forma poderiam comparar e dizer se eram iguais ou não. E assim o fizeram, verificando que nem todos os retângulos tinham a mesma área, porém ficaram em dúvida em dois deles, que davam a impressão de ser do mesmo tamanho. Fez-se uma intervenção, nesse momento, pedindo que refletissem sobre o que seria dito: “imaginem que para diferentes valores de h sempre obtenho o mesmo valor para a área”. Fizemos um registro gráfico, em um plano cartesiano, para que entendessem melhor o que tinha sido dito, mostrando que valores diferentes do domínio (no caso h) levava sempre na mesma imagem (no caso área). Perguntamos a eles se conseguiam imaginar o traçado do gráfico dessa função. Responderam corretamente dizendo que seria uma reta paralela ao eixo dos x, ou seja, uma função constante. Com isso compreenderam que os retângulos vermelhos, não poderiam ser todos iguais, ou seja terem a mesma área. E, para completar evidenciamos que em outras situações, vistas anteriormente, poderia acontecer que, para dois valores diferentes de h obtivéssemos figuras com áreas iguais, então era possível que dois daqueles retângulos tivessem a mesma área. O grupo 2 fez a seguinte colocação: “Se para diferentes valores de x, tivermos valores diferentes para área dá uma reta inclinada e se tivermos dois valores iguais para a área dá uma curva. Através da análise qualitativa das variáveis envolvidas eles fizeram uma previsão do gráfico da função, antes mesmo de construí-lo.

A região de qualquer um dos retângulos acima é sempre a mesma? Justifique

Até pode ter 2 iguais de mesma área se o gráfico for uma curva e se não tiver é uma reta

“Até pode ter 2 iguais de mesma área se o gráfico for uma curva e se não tiver é uma reta”.

Em qual situação Paulo gastará mais pano vermelho?

No que estiver mais area sendo usado

Figura 84: Problema da vela do barco (grupo 2).

A região de qualquer um dos retângulos acima é sempre a mesma? Justifique.

a) Não, pois a base e altura estão sempre alterando.

Em qual situação Paulo gastará mais pano vermelho?

b) Quando o retângulo for o maior possível

Figura 85: Problema da vela do barco (grupo 3).

Após essas discussões, passamos para a construção no GeoGebra.

Observou-se que estavam mais cuidadosos ao responderem os questionamentos, observavam mais, alguns grupos faziam manipulações, anotavam alguns resultados da área e de h fazendo comparações. Acreditamos que tenha sido devido aos comentários anteriores. Responderam a todos os demais questionamentos, do momento 2, sem ajuda da professora-pesquisadora.

- Conforme muda o segmento azul o que acontece coma área do retângulo?

– Com o movimento do segmento azul a área muda. Ela aumenta de 0 a 4 atinge 12 e depois volta a diminuir de 4 a 8

"Com o movimento do segmento azul a área muda. Ela aumenta de 0 a 4 atinge 12 e depois volta a diminuir de 4 a 8".

– Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo?

A área é zero.

-Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo?

A área também é zero

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

- Sim, 12

No contexto do problema quais as grandezas que podem variar?

- a área e a altura
- y é a área.
- x é a altura.

Qual é a variação de x (domínio)?

De 0 a 8

O que nos informa o ponto mais alto no gráfico?

área que é 12.

Figura 86: Problema da vela do barco (grupo 2).

O grupo 2, através de tratamentos aplicados à figura, conseguiu realizar a conversão para o registro gráfico, o que possibilitou o reconhecimento dos intervalos de crescimento e decrescimento, determinou corretamente o seu domínio e também identificou o ponto mais alto do gráfico como sendo o de maior área.

- Conforme muda o segmento azul o que acontece com a área do retângulo?

-Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo?

-Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo?

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

-Quais as dimensões do retângulo de área máxima?

-No contexto do problema quais as grandezas que podem variar?

-Qual é a variação de x (domínio)?

-O que nos informa o ponto mais alto no gráfico?

Ela muda de acordo com o comprimento
Quando ele tiver área 12 e altura 4;
Quando pequeno a área e a altura tem o valor 0;
quando é grande a área é 0 e a altura é 8
Não
h = 4 área = 12
área e altura
área
altura
de 0 à 8
O ponto de máximo 12

Figura 87: Problema da vela do barco (grupo 3).

No momento 2 acreditamos que tenha sido por engano a resposta do grupo 3 quando disseram que não havia um retângulo de área máxima pois, a resposta ela não está de acordo com as demais que foram respondidas corretamente. Também foram muito sucintos quando perguntados sobre o que acontecia com a área do retângulo quando o segmento azul mudava. Reforçando que habilidades como escrever e argumentar em matemática não são práticas comuns, na sala de aula, e por isso essa dificuldade.

No momento 3, para obter a “lei” algébrica do problema do barco, eles o compararam ao problema que fizeram na fase 1- revisão dos pré-requisitos. “É igual aquele profe que temos que montar as proporções?”. Dissemos a eles que naquele exercício tínhamos um caso particular pois, se tratava de um quadrado inscrito no triângulo. E, nesse o quadrilátero era um retângulo mas, o princípio de resolução era o mesmo. Deveriam usar semelhança de triângulos a fim de encontrar os lados proporcionais. Perguntaram se poderiam usar x ao invés de h e y para o outro lado do retângulo pois, estavam mais acostumados com essas variáveis. E, então colocaram as respectivas medidas nos lados, e obtiveram a proporção. A partir dai não sabiam como deveriam proceder pois, agora, tinham duas variáveis. Lembramos, a eles, dizendo: “Se vocês tem duas variáveis então, devem ter duas equações para poder relacioná-las e encontrar x e y, não é?”. Mas, não resolveu muito, sugerimos que obtivessem a área do retângulo de lados x $e\,y$. Então, escreveram e perguntaram o que deveriam fazer agora, mostrando que não lembravam mais como resolver um sistema de equações de 1º grau. Dissemos a eles que deveriam encontrar tudo em função de x, que era a nossa variável independente. Um aluno, do grupo 3, perguntou se podia isolar o y e substituí-lo na fórmula da área. Os demais grupos precisaram de ajuda para relembrar como se resolvia um sistema de equações de primeiro grau.

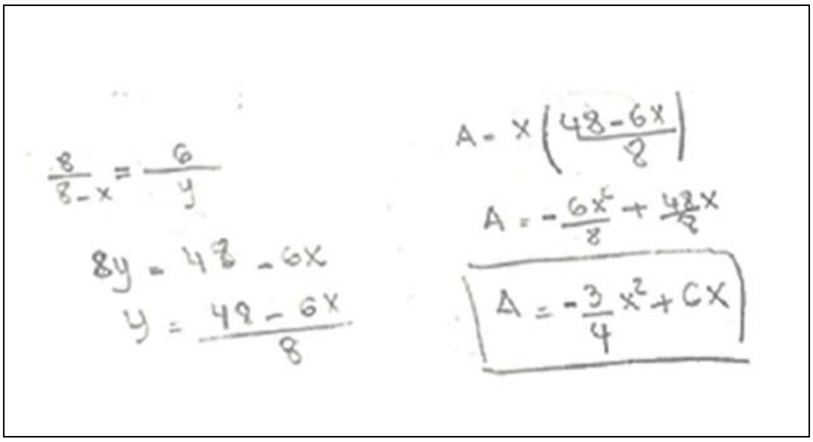


Figura 88: Problema da vela do barco (grupo 2).

O grupo 3 fez um desenho da situação da vela do barco, colocando nele as respectivas medidas. No início ficaram em dúvida de como encontrariam a “lei” da função mas, depois de alguns encaminhamentos eles compreenderam o que tinham que fazer. Isso mostra que estavam organizando melhor o pensamento matemático, produzindo esquemas para compreender o que deveria ser feito. O que chamou a atenção, nesse grupo, foi quando eles abandonaram a letra A e usaram a notação

$f(x)$ para representar a “lei” da função pois, geralmente, têm dificuldade de compreender o seu significado. Esta mudança de notação nos sugere um ou uma maior familiaridade com a notação simbólica, ou um entendimento mais abstrato do conceito de função.

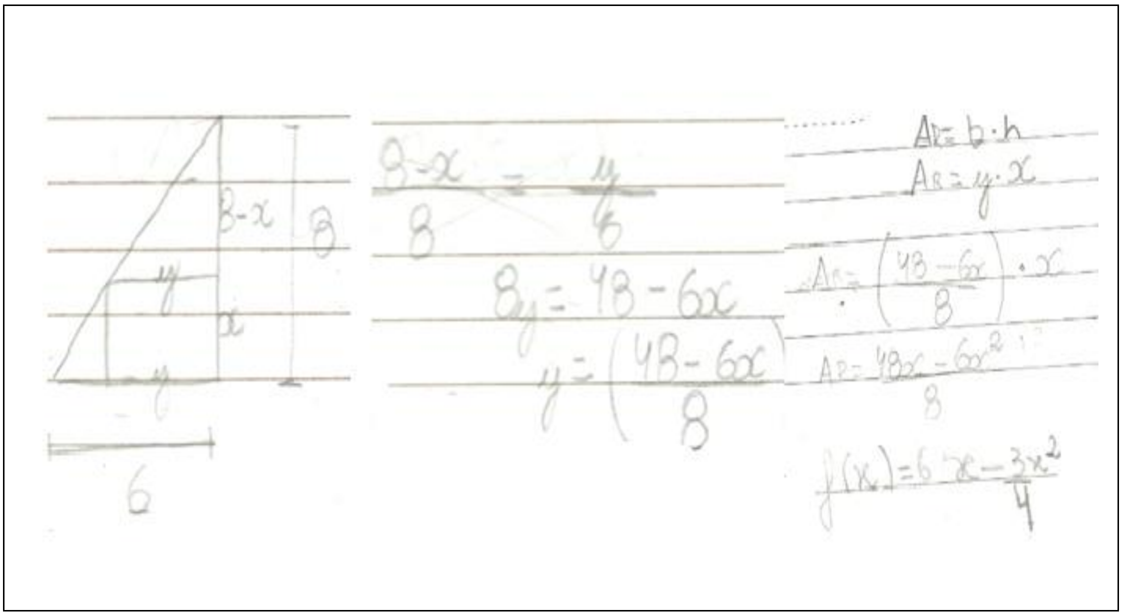


Figura 89: Problema da vela do barco (grupo 3).

Encontro 7: O problema da horta

O problema trabalhado neste encontro foi o seguinte:

> João dispõe de 24 m de tela para cercar uma horta de formato retangular. Quais devem ser as dimensões do cercado, de modo que se possa obter maior produtividade na horta?

Para responder os questionamentos do momento 1, observamos que os grupos resolviam empiricamente, testando números, de modo que o perímetro desse sempre 24 e, a seguir, calculavam a área desse retângulo. O que podemos dizer desse episódio, foi que dessa forma, eles perceberam que existem vários retângulos com áreas diferentes, porém, com o mesmo perímetro. O que observamos também foi que só usaram números naturais.

- O que representa a medida 24 m, no enunciado do problema?

-Como o João deve dimensionar a sua horta para ter um melhor aproveitamento do terreno?

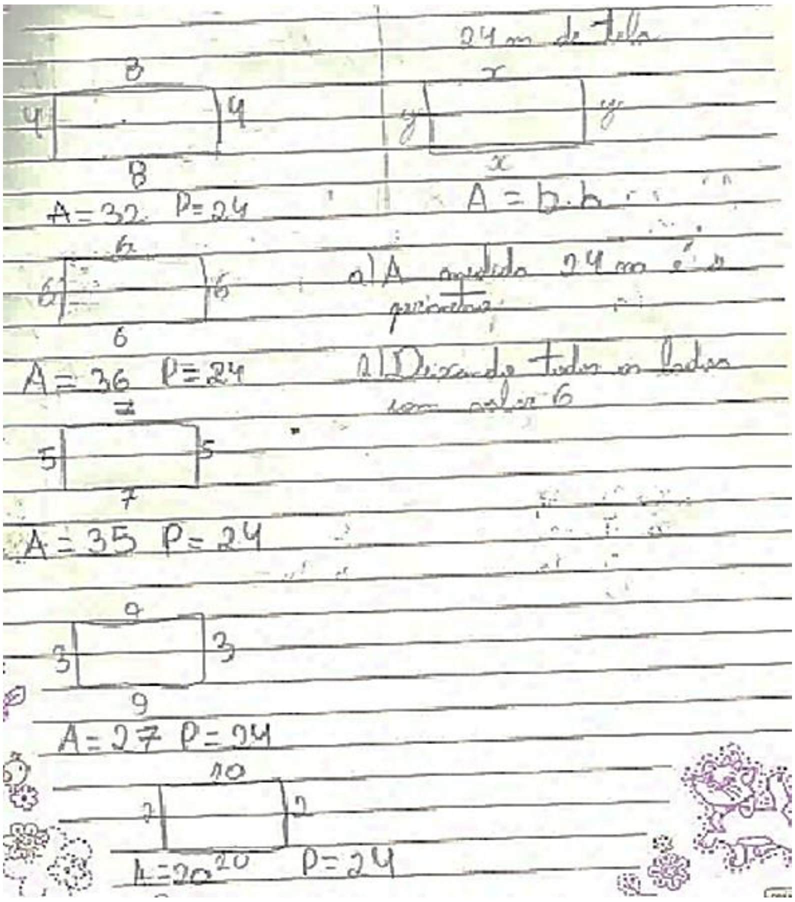
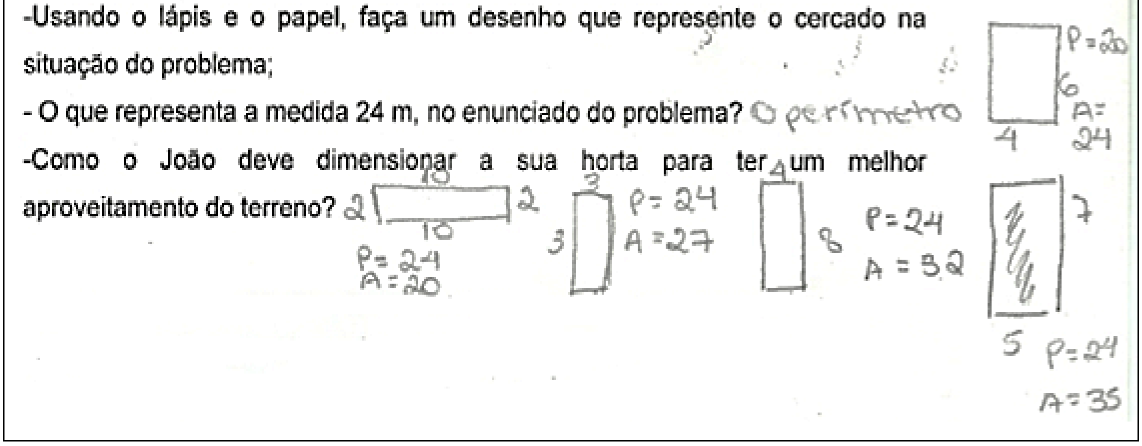


Figura 90: Problema da horta (grupo 3).



-Usando o lápis e o papel, faça um desenho que represente o cercado na situação do problema;

- O que representa a medida 24 m, no enunciado do problema? O perímetro

-Como o João deve dimensionar a sua horta para ter um melhor aproveitamento do terreno?

Figura 91: Problema da horta (grupo 4).

No momento 2, eles abriram o arquivo do GeoGebra com a construção da situação. Fizeram o seguinte comentário com relação aos questionamentos 2: “De novo a mesma pergunta, já sabemos que o perímetro é sempre 24”.

Resolveram todos os outros questionamentos do momento 2, sem ajuda da professora-pesquisadora, mostrando ter adquirido habilidades, ao resolver um problema dinâmico.

O grupo 3, ao movimentar o segmento azul, já identificou as variáveis do problema. Observou que quando o segmento azul era muito pequeno a área também o era, mas o perímetro não mudava. Perceberam também que o segmento azul aumentava e que a área era 36 mas o perímetro continuava 24. Pedimos ao grupo que justificasse o porquê desse fato. Ao reconhecerem que não havia relação funcional entre o perímetro e a área mostraram que eles compreenderam quais eram as variáveis do problema. Mostramos a resposta dada pelo grupo na figura 93. Através da análise do gráfico, eles responderam as outras perguntas corretamente e para isso fizeram uso do registro na linguagem natural.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

A área e o lado mudam.

– Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo? qual o valor do perímetro?

Quando o lado é 0 não tem área e quando o lado é 0,07 a área é 1,22.

o perímetro é 24.

-Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo? qual o valor do perímetro?

a área é 36 e o perímetro 24

-Quando o segmento azul é igual metade da medida do perímetro, o que acontece com a área do retângulo?

Não tem área e o perímetro é 24.

- Segmentos azuis diferentes podem produzir retângulos de mesma área?

Sim

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

Quando ele tiver lado 6
e área 36

- Qual é a variação de x?

0 à 12

- O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

O ponto de máximo da parábola que é área = 36

-Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Ela é crescente apartir de 0 à 6
Ela é decrescente apartir de 6 à 12.

Figura 92: Problema da horta (grupo 3).

Não existe relação funcional entre eles

Figura 93: Problema da horta (grupo 3).

As respostas dos outros grupos, no momento 2, foram parecidas com estas dadas pelo grupo 3.

Já no momento 3, que pedia para determinarem a lei algébrica, disseram: “e agora como fazemos?. Não foi dado nenhum igual a esse” ou “o retângulo não tá dentro de outra figura. Então, como vamos determinar a área?. Agora tudo se move na construção?.”

Então, fizemos algumas indagações sobre como estabelecer uma relação entre os lados do retângulo e a área. Trazemos uma transcrição do diálogo ocorrido entre a professora-pesquisadora e os grupos, que foi transcrito do vídeo:

Professora-pesquisadora: O que representa o perímetro?

Grupos: A soma dos lados do retângulo.

Professora-pesquisadora: Escrevam na linguagem matemática o que vocês acabaram de dizer.

Grupos: Assim: $p = 2x + 2y$, .

Professora-pesquisadora: Mas o perímetro não é 24?

Grupos: "Ah, é!", então podemos escrever assim: $2x + 2y = 24$.

Professora-pesquisadora: Podem simplificar a equação por 2.

Grupos: "Pra que complicar", "tá bom, vamos lá!" ".

E, então escreveram: $x + y = 12$.

Professora-pesquisadora: E agora, como calculamos a área de um retângulo?

Grupos: A área do retângulo é base vezes altura.

Professora-pesquisadora: Escrevam na linguagem matemática como fizeram no perímetro.

Grupos: $A = xy$.

Professora-pesquisadora: Observem as duas equações e lembrem o que já fizemos antes. Temos duas equações e duas variáveis, então?

Grupos: Ah! sistema não é?

Nesse dialogo tivemos o uso do registro na língua natural e o registro na língua algébrica.

E, através de tratamentos, chegaram à expressão que era esperada. Como vemos na figura 94 a resposta do grupo 3.

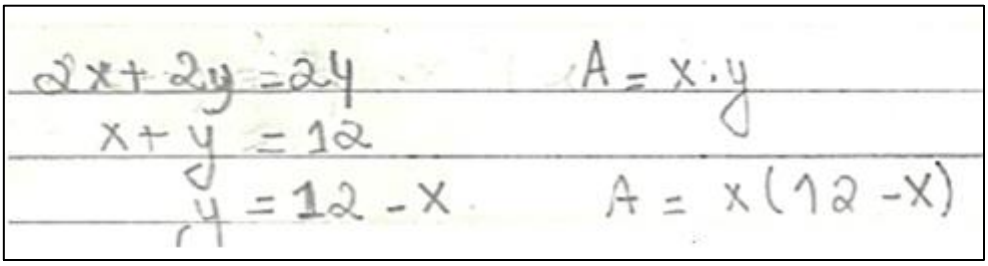


Figura 94: Problema da Horta (grupo 3).

Encontro 8:

Este encontro marca o início da segunda fase de nossa sequência, onde foi feito o estudo das propriedades da função quadrática

As atividades trabalhadas, neste encontro, foram as seguinte:

Atividade 1-

1.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o GeoGebra, o gráfico de:

$a)\ f_1(x) = x^2$

$b)\ f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$

$c)\ f_3(x) = 2x^2$

$d)\ f_4(x) = \frac{1}{4}x^2$

$e)\ f_5(x) = 5x^2$

$f)\ f_6(x) = -x^2$

$g)\ f_7(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$h)\ f_8(x) = -2x^2$

$i)\ f_9(x) = -\frac{1}{4}x^2$

$j)\ f_{10}(x) = -5x^2$

1.2) Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero.

b) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero.

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo?

e) Comparando os gráficos dos itens **(a)** e **(f)** o que se pode concluir?

Atividade 2-

2.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o GeoGebra, o gráfico de:

$a)\ f_1(x) = x^2$

$b)\ f_2(x) = x^2 + 1$

$c)\ f_3(x) = x^2 + 2$

$d)\ f_4(x) = x^2 - 1$

$e)\ f_5(x) = x^2 - 2$

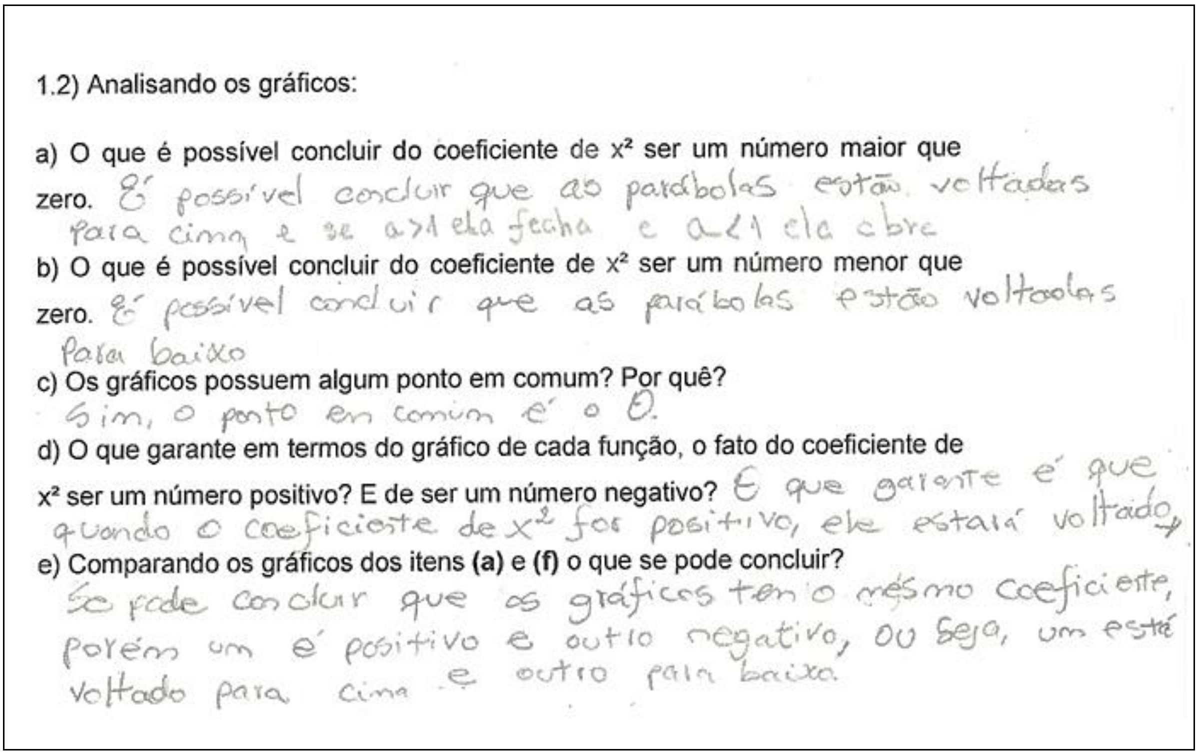
2.2) O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x)=x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função ?

2.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

Distribuímos as atividades (1) e (2), pedindo que lessem com atenção o que estava sendo solicitado. A seguir, perguntamos se eles reconheciam que funções eram aquelas. Eles reconheceram f(x) como uma função de x e que todas eram funções quadráticas.

A primeira atividade solicitava que, num mesmos par de eixos cartesianos, esboçassem os gráficos das funções dadas, usando o GeoGebra.

Alguns grupos não observaram que todas as funções estavam nomeadas com índices diferentes, pois, senão fizermos isso, quando digitamos outra função, com o mesmo nome, o gráfico da anterior desaparece. Feita essa observação, eles esboçaram os gráficos e responderam as perguntas. Observamos que alguns grupos não precisaram esboçar todos os gráficos para responder as perguntas, pois perceberam, a partir da função $f(x) = ax^2$, que o gráfico da função "fechava" ou "abria" conforme o valor de "a" variasse entre números reais positivos maiores que 1 ou menores que 1 . Um dos grupos, ao construir o gráfico da função $f(x) = -x^2$, perguntou se ele era igual ao da função $f(x) = x^2$, porém invertido, ou seja, quando **"a"** é um numero negativo o gráfico da função tem concavidade voltado para baixo. Percebendo, assim, uma outra propriedade do parâmetro **a**.



1.2) Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero. É possível concluir que as parábolas estão voltadas para cima e se a>1 ela fecha e a<1 ela abre

b) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero. É possível concluir que as parábolas estão voltadas para baixo

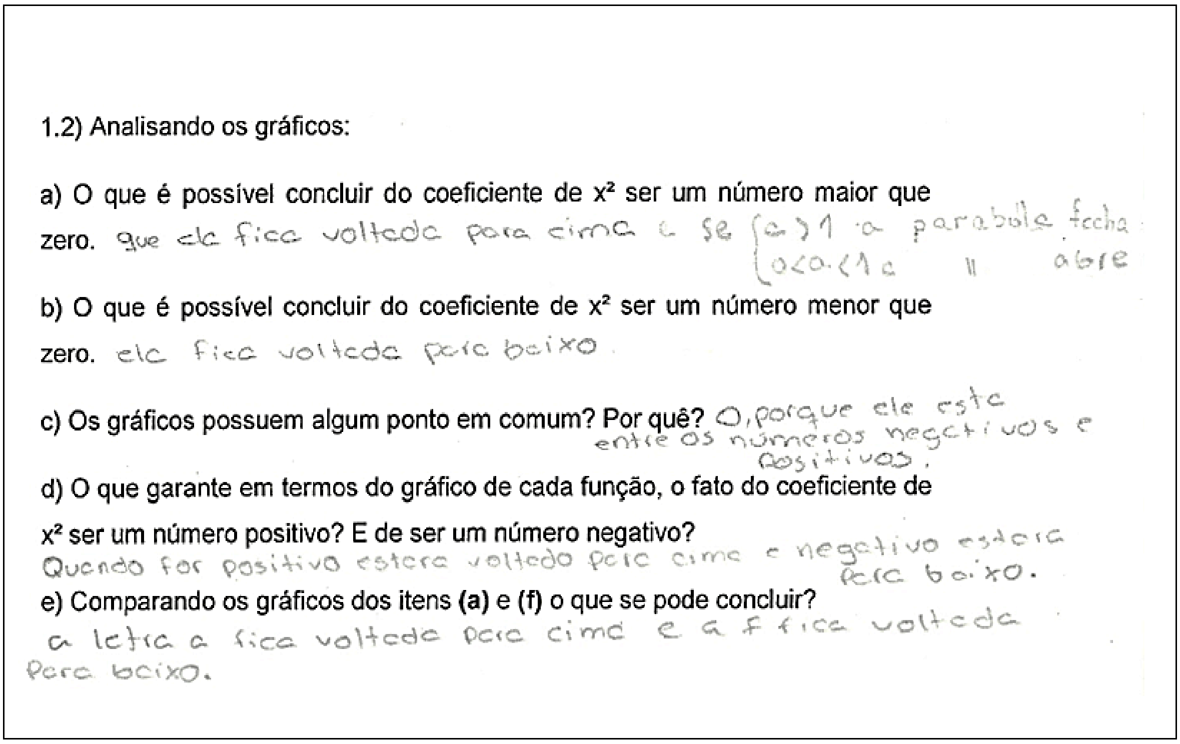
c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê? Sim, o ponto em comum é o 0.

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo? É que garante é que quando o coeficiente de x^2 for positivo, ele estará voltado

e) Comparando os gráficos dos itens **(a)** e **(f)** o que se pode concluir? Se pode concluir que os gráficos tem o mesmo coeficiente, porém um é positivo e outro negativo, ou seja, um está voltado para cima e outro para baixo.

Figura 95: Atividade 1, etapa 2 (grupo 1).

Na atividade 1.2 a resposta da letra c, dada pelo grupo 1, foi a seguinte: "O que garante é que quando o coeficiente de x^2 for positivo, ele estará voltado para cima e quando o coeficiente de x^2 for negativo ele estrá voltado para baixo".



1.2) Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero. que ele fica voltada para cima e se a>1 a parabola fecha; 0<a<1 a " abre

b) O que é possível concluir do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero. ele fica voltada para baixo

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê? O, porque ele esta entre os números negativos e positivos.

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo? Quando for positivo estara voltado para cima e negativo estara para baixo.

e) Comparando os gráficos dos itens **(a)** e **(f)** o que se pode concluir? a letra a fica voltada para cima e a f fica voltada para baixo.

Figura 96: Atividade 1, etapa 2 (grupo 2).

Observamos algumas dificuldades, embora particulares, ao determinar os pontos em comuns dos gráficos, e representá-los com duas coordenadas. Ao invés de representarem o ponto (0,0), eles escreviam somente 0, pois ao olhar para o gráfico enxergavam apenas o 0, não entendendo que o zero representava a origem dos eixos.

A professora-pesquisadora finalizou esta primeira atividade sistematizando o conteúdo trabalhado. Usando a animação dinâmica feita no GeoGebra (apresentada no capítulo anterior), foi conduzida uma discusão coletiva. Através das “falas” e gestos feitos com as mãos para indicar o movimento de “abrir ou fechar” a parábola ou de “virar para cima ou para baixo”, foi possível observar que os alunos compreenderam essas duas primeiras propriedades do parâmetro “a” da expressão da função. Um dos alunos ainda acrescentou o seguinte comentário: “agora entendi porque o “a” não pode ser zero, senão ele vira uma reta”.

Antes de passarmos para atividade 2, fizemos uma retomada do conceito de coordenadas de um ponto. No plano cartesiano do GeoGebra foram colocados vários pontos para que os alunos escrevessem as coordenadas; depois, ao contrário, foram dadas as coordenadas e os alunos localizaram os pontos no sistema de coordenadas.

Na segunda atividade foi solicitado o esboço de diferentes gráficos num mesmo plano cartesiano, para que fosse observado o efeito resultante da soma ou subtração de um parâmetro na expressão da função $f(x) = x^2$. Os alunos perceberam rápidamente que o gráfico da função “subia” quando somavam uma constante positiva e que “descia” quando a constante era negativa. Desta forma podemos dizer que os alunos atingiram o objetivo da atividade e conseguiram perceber a terceira variável visual e a relacionaram com a escrita algébrica, ou seja, verificaram a translação vertical do vértice da parábola. Perceberam também que a parábola intercepta o eixo y em $(0, l)$.

2.2) O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x)=x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante ,para obter uma nova função ?

2.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice eixo y

(0,0); (0,-1); (0,2); (0,-1); (0,-2)

2.2) Ela se move verticalmente conforme somamos ou subtraimos os números.

Figura 97: Atividade 2, etapa 2 (grupo 1).

Observamos que o grupo 2 compreendeu o movimento do gráfico, porém usou de forma inadequada a palavra "diminui" ao invés de "desce". Conforme a figura 98, o grupo disse: "Quando se soma ele sobe, quando subtrai ele diminui"

Quando foi solicitado a eles que determinassem o eixo de simetria da parábola, para nossa surpresa, eles desconheciam a palavra simetria ou não conseguiam relacioná-la à parábola. Fizemos uma intervenção a fim de esclarecer o que era simetria. Tendo compreendido essa ideia, encontraram as coordenadas do vértice corretamente.

2.2) O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x)=x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante ,para obter uma nova função ? Quando se soma ele sobe quando subtrai ele diminui

2.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice. eixo y

(0,0) (0,1) (0,2) (0,-1) (0,-2)

Figura 98: Atividade 2, etapa 2 (grupo 2).

Ao final dessa atividade, a professora-pesquisadora sistematizou o conteúdo trabalhado, usando animação dinâmica, construida no GeoGebra. E, em discusão coletiva, através de suas falas e gestos com aos mãos indicando o movimento de “subir” ou “descer” foi possível novamente observar que os alunos compreenderam a propriedade do parâmetro l.

E, assim terminou nosso encontro naquele dia, ficando as atividades (3) e (4) , que tratavam também das propriedades da função quadrática, para o próximo encontro.

Encontro 9:

Em razão dos alunos não terem realizado as atividades (3) e (4), no Encontro 8, como havíamos previsto, tivemos um encontro a mais, para realizarmos essas atividades.

Primeiramente retomamos as atividades (1) e (2), fazendo uma revisão do que havia sido estudado. Feito isso, foi colocado o seguinte questionamento: “o que aconteceria ao gráfico da função se fizéssemos alterações simultânea nos dois parâmetros “$\boldsymbol{a}$” e “$\boldsymbol{l}$” ? Os alunos responderam que dependendo do valor do “$\boldsymbol{a}$" o gráfico iria abrir ou fechar; virar para cima ou para baixo e, se referindo ao parâmetro "$\boldsymbol{l}$" responderam que o gráfico iria subir ou descer dependendo da constante l ser positiva ou negativa. Além de palavras os alunos também usavam gestos para responder aos questionamentos.

Da mesma forma como aconteceu em todas as outras atividades a professora-pesquisadora distribuiu as atividades (3) e (4) e leu em voz alta os enunciados, explicando o que deveria ser feito.

As atividades trabalhadas, neste encontro, foram as seguinte:

Atividade 3-

3.1) Num mesmo par de eixos cartesianos esboce, utilizando o GeoGebra, o gráfico de:

$a) f_1(x) = x^2$ $\quad$ $d)\ f_4\ (x) = (x^2 + \frac{1}{2})^2$

$b) f_2(x) = (x+1)^2$ $\quad$ $e)\ f_5\ (x) = (x - \frac{1}{2})^2$

$c) f_3(x) = (x-1)^2$

3.2) Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraimos uma constante positiva a variável independente x?

3.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

Atividade 4 -

4.1) Sem utilizar o geogebra descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo.

$a)\ \ f_1(x) = (x+3)^2 - 4$ b) $f_2(x) = 3(x+\frac{3}{4})^2 - 2$

4.2) Esboce, utilizando o geogebra, o gráfico da função $f(x) = (x+3)^2 - 5$.

4.3) Você consegue prever o gráfico da função $h(x) = x^2 - 6x + 5$? Explique.

4.4) Relacione os parâmetros da função $f(x) = a(x+k)^2 + l$ com os parâmetros da função $g(x) = ax^2 + bx + c$. Que conclusões podemos tirar?

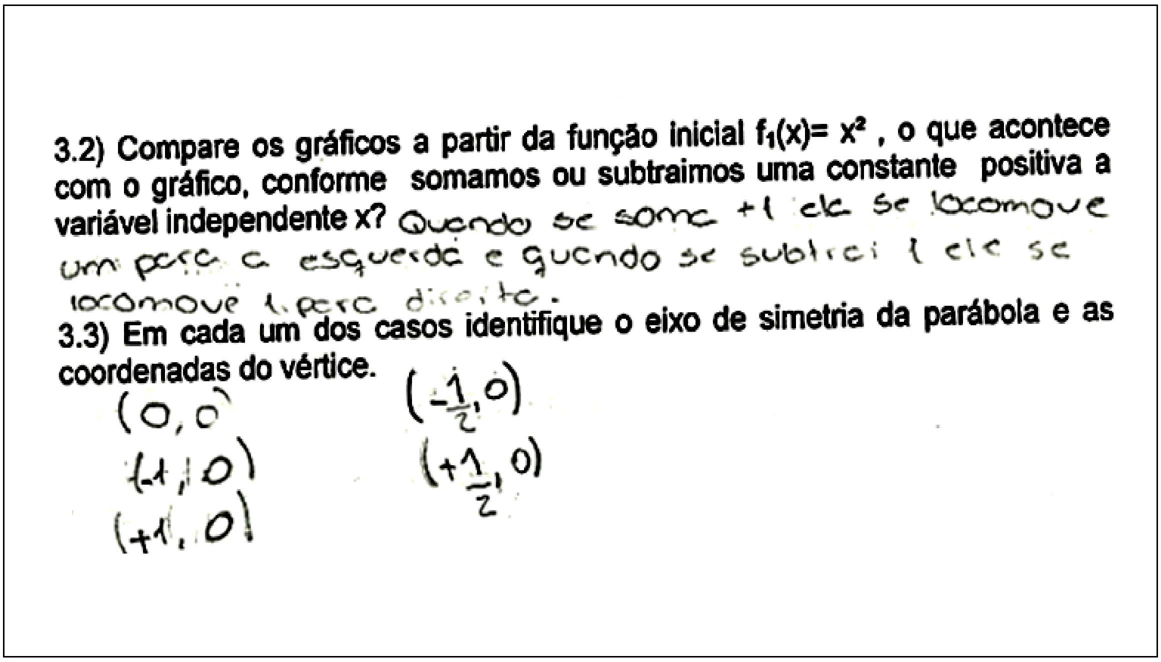
A atividade (3), realizada com o GeoGebra, foi concluída rapidamente. A professora-pesquisadora passava pelos grupos e fazia indagações a respeito do que estava acontecendo com gráfico da função $f(x) = x^2$, em relação aos gráficos das outras funções e, eles explicavam com gestos e palavras o que acontecia. As respostas dadas pelos alunos mostram que eles atingiram o objetivo da atividade e conseguiram identificar a quarta variável visual e relacioná-la à escrita algébrica, ou seja, verificaram a translação horizontal (do vértice) da parábola.

3.2) Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraimos uma constante positiva a variável independente x? Quando somamos ela vai para a esquerda, e quando subtraimos ela vai para a direita.

3.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice. $(0,0)$; $(-1,0)$; $(1,0)$; $(-\frac{1}{2},0)$; $(\frac{1}{2},0)$

O y sempre vai ser 0.

Figura 99: Atividade 3, etapa 2 (grupo 1).



3.2) Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x)= x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraimos uma constante positiva a variável independente x? Quando se soma +1 ele se locomove um para a esquerda e quando se subtrai 1 ele se locomove 1 para direita.

3.3) Em cada um dos casos identifique o eixo de simetria da parábola e as coordenadas do vértice.

$(0,0)$ $(-\frac{1}{2},0)$

$(-1,0)$ $(+\frac{1}{2},0)$

$(+1,0)$

Figura 100: Atividade 3, etapa 2 (grupo 2).

Os grupos determinaram corretamente as coordenadas do vértice. O grupo 1 acrescentou que a parábola se movia sobre o eixo x pelo vértice e por isso o y era zero, como vemos na figura 99.

No final dessa atividade a professora sistematizou esse conhecimento, usando animação dinâmica feita no GeoGebra, para verificar o comportamento da função $f(x) = x^2$. E, em forma de discusão coletiva, através de suas falas e seus gestos, com as mãos, indicando o movimento de ir para a direita se subtraímos um número a variável x e, para a esqueda se somarmos um número a variável x. Assim a professora-pesquisadora pôde perceber que eles compreenderam a propriedade do parâmetro k.

Como nenhum aluno havia questionado a respeito das atividades, começarem sempre pela função $f(x) = x^2$, então perguntamos se eles poderiam dizer algo que justificasse isso. Eles responderam dizendo: “deve ser para comparar” ou “porque é a menor”, entendemos essa resposta no sentido de ser a “lei” mais simples e, ainda “porque a partir dela é que verificamos as propriedades de abrir ou fechar, subir ou descer, virada para cima ou para baixo, para esquerda ou para a direita, acrescentando número a ela acontece alguma coisa”. Observou-se, a partir desses comentários, que eles perceberam que, para traçar o gráfico de qualquer outra função quadrática, eles precisavam de uma função de referência e também observamos que haviam compreendido as propriedades dos parâmetros $a, k\ e\ l$.

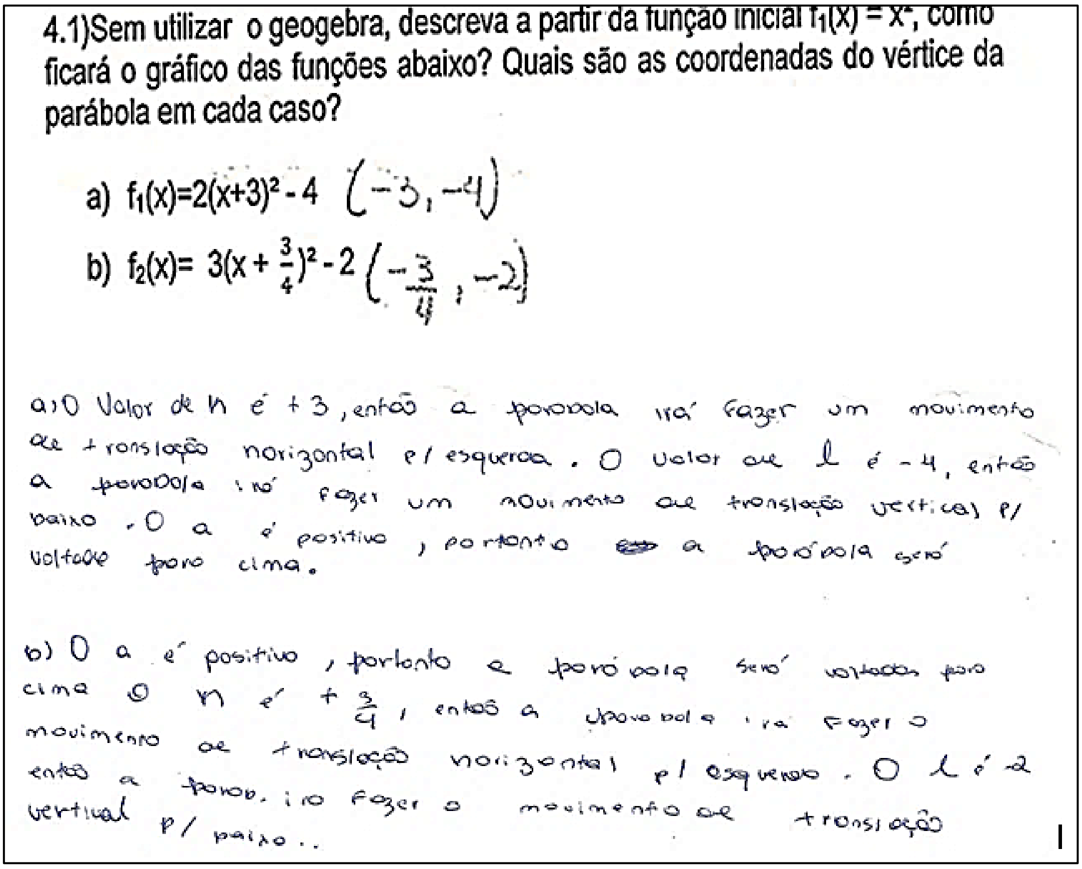
Os momentos de intervenção e sistematização do conteúdo foram importantes para esclarecer as dúvidas de alguns alunos que ainda apresentavam dificuldades de extrair e interpretar informações contidas nos gráficos e relacionar, ao mesmo tempo, com a sua escrita algébrica.

Nesse estudo da conversão entre gráfico e equação os alunos responderam corretamente os questionamentos que exploraravam relações e significados quanto à forma da curva, simetrias, etc. Identificaram também os elementos importantes para manter a ideia de conversão nos dois sentidos tais como: o sinal do coeficiente "a", que indica se a parábola está voltada para cima ou para baixo; a translação vertical e horizontal do vértice da parábola através dos parâmetros l e k e as coordenadas do vértice. Concordando com Duval (2003) que é a mobilização e coordenação dos diferentes registros que possibilita ao aluno compreender e apreender conceitos matemáticos.

Na atividade quatro, queríamos que os alunos reaplicassem o que tinham aprendido nas outras atividades, ou seja que aplicassem todos os movimentos de gráficos possíveis. Já na primeira atividade reclamaram, dizendo: "porque agora não podemos usar o GeoGebra" ou então "como vamos fazer o gráfico?". Então lembramos que da mesma forma que os exercícios anteriores, deveriam tomar como referência a função $f(x) = x^2$. A partir daí, descreveriam através dos parâmetros $a, k\ e\ l$, da função dada, o que mudava em relação a função referência. Fizeram o exercício sem maiores dificuldades.

Os protocolos abaixo mostram que eles compreenderam que, no estudo da conversão entre gráfico e equação, eles deveriam identificar os elementos semióticos que são importantes para manter a ideia de conversão nos dois sentidos. Percebemos através de seus registros gráficos que eles compreenderam a propriedade do parâmetro **a** pois, em todos eles as parábolas aparecem com a concavidade voltada para cima e percebe-se também que há uma diferença na abertura dessas curvas. Porém somente o grupo 3 justificou quanto à abertura da parábola.

Na atividade 4.1 o grupo 1 identificou corretamente as coordenadas do vértice das funções quadráticas. A seguir descreveram fazendo uso do registro da língua natural os movimentos da curva de acordo com os parâmetros k e l.



4.1)Sem utilizar o geogebra, descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo? Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?

a) $f_1(x)=2(x+3)^2 - 4$ $(-3, -4)$

b) $f_2(x)= 3(x+\frac{3}{4})^2 - 2$ $(-\frac{3}{4}, -2)$

a) O Valor de h é +3, então a parabola irá fazer um movimento de translação horizontal p/ esquerda. O valor de l é -4, então a parabola irá fazer um movimento de translação vertical p/ baixo. O a é positivo, portanto a parabola será voltada para cima.

b) O a é positivo, portanto a parabola será voltada para cima O h é $+\frac{3}{4}$, então a parabola irá fazer o movimento de translação horizontal p/ esquerda. O l é -2 então a parab. irá fazer o movimento de translação vertical p/ baixo..

Figura 101: Atividade 4.1, etapa 2 (grupo 1).

Vemos que o grupo 2 também identificou corretamente as coordenadas do vértice e através do registro geométrico (gráfico) foi mostrando os movimentos da curva e justificando através do registro da língua natural, de acordo com os valores dos parâmetros k e l.

Transcrevemos a seguir o que disseram na figura 102: com relação ao gráfico da primeira função, justificaram dizendo que “o k é positivo então fomos 3 para a esquerda” e como “o l é - 4, então descemos 4 casas”. Em relação ao gráfico da segunda função disseram que “o k é menor que 1(+), fomos 0,75 para a esquerda”, interpretamos a frase k é menor que 1 como k esta entre 0 e 1; com relação ao parâmetro l disseram "o l é -2, então descemos duas casas".

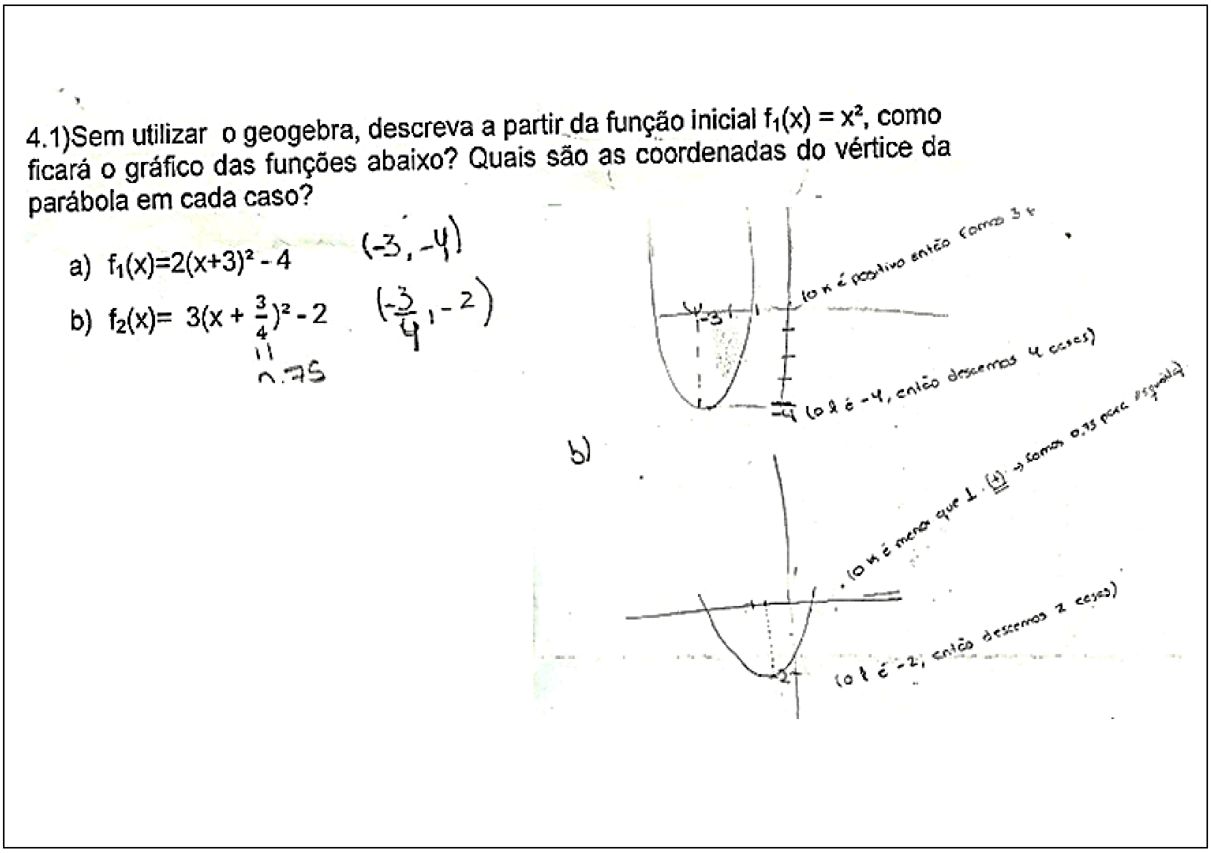
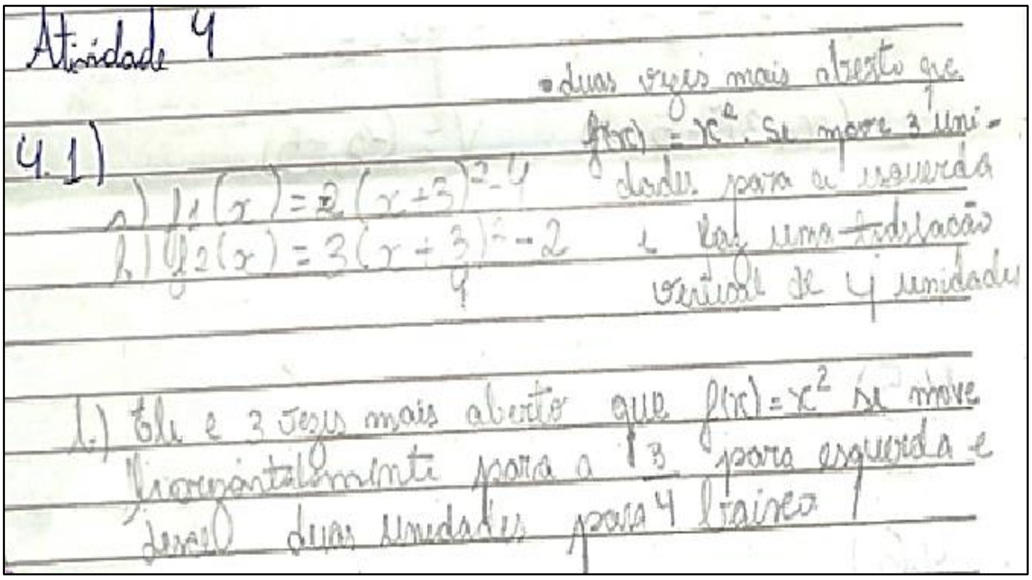


Figura 102: Atividade 4.1, etapa 2 (grupo2).

O grupo 3 não apresentou as coordenadas do vértice. Justificou, através do registro da língua natural, que a parábola era duas vezes mais aberta que $f(x) = x^2$,que se movia 3 unidades para a esquerda e fazia uma translação vertical de 4 unidades sem mencionar a direção do movimento da curva, ou seja, se era 4 unidades para "cima" ou para "baixo". Já na segunda função descreveu corretamente os movimentos da curva.



Atividade 4

4.1)

a) $f_1(x) = 2(x+3)^2 - 4$

b) $g_2(x) = 3(x+3)^2 - 2$

• duas vezes mais aberto que $f(x) = x^2$. Se move 3 unidades para a esquerda e faz uma ~~tradução~~ translação vertical de 4 unidades

b.) Ele é 3 vezes mais aberto que $f(x) = x^2$ se move horizontalmente para a 3 para esquerda e desce duas unidades para baixo

Figura 103: Atividade 4.1, etapa 2 (grupo 3).

Na atividade 4.2 solicitava-se o esboço do gráfico da função $f(x) = (x+3)^2 - 5$, para obtê-lo poderiam utilizar o geogebra. Para nossa surpresa optaram primeiro por fazer o esboço da curva sem usar o GeoGebra. Entendemos esta atitude como uma forma de mostrar que tinham compreendido a relação entre os parâmetros da função e o movimento do gráfico. Eles esboçaram corretamente o gráfico da curva. Percebemos também que eles entenderam que, para fazer o gráfico de qualquer outra função, era necessário ter uma função de referência e a partir desta construir outras, como mostra a figura 104. Era um indício de que os alunos estavam compreendendo o gráfico como um todo e não se prendendo a pontos isolados.

$f(x) = a(x-k)^2 + l$

① a faz com que vejamos se a parábola será voltada p/ cima ou p/ baixo. ② k faz com que ela se movimente horizontalmente p/ esquerda ou direita. ③ l faz com q ela se movimente na vertical, p/ cima ou p/ baixo.

$f(x) = a(x-k)^2 + l$

a = abre e fecha, U ou ∩

k = se move para os lados

l = se move para cima e para baixo.

$f(x) = (x+5)^2 - 3$

Faz com que ela se mova:

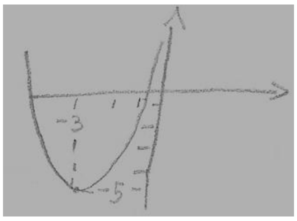
a = movimento de abrir ou fechar → se a > 1 fica [illegible]

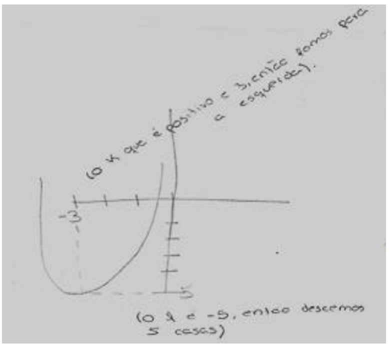
k = movimento horizontal sobre x se for + para esquerda

se for − para direita

l = movimento vertical: se + para cima e negativo para baixo

Figura 104: Sistematização dos parâmetros $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{l}$ (grupos 1, 2 e 3).





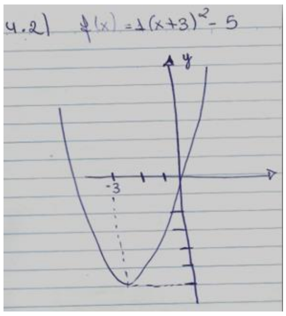


Figura 105: Esboço do gráfico referente a atividade 4.2 (grupos 1, 2 e 3).

Não conseguimos avançar na atividade 4.3, que pedia que se fizesse uma previsão do gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 4$. Percebemos que não estava evidente para eles a realização de tratamentos dentro do registro de representação algébrico. Achamos melhor então, antes de resolver esta atividade, retomar o completamento de quadrados e o trinômio quadrado perfeito. Usamos mais um período de aula para isso e também para concluir a atividade 4. Relataremos a resolução dessas atividades(4.3 e 4.4) no encontro 10.

Encontro 10:

Nesse encontro fizemos uma revisão de todos as propriedades dos parâmetros $a, k\ e\ l$. Revimos também como escrever a função na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ em sua forma canônica $f(x) = a(x+k)^2 + l$ através do "completamento" de quadrados do trinômio quadrado perfeito.

Feito isso, voltamos para a resolução das atividades 4.3 e 4.4. Ainda achavam difícil fazer o tratamento algébrico na função dada e obter a canônica, mas concordavam que depois ficava mais fácil identificar as coordenadas do vértice da função e também era mais fácil de esboçar o gráfico, pois tinham compreendido a propriedade de cada um dos parâmetros da função. Resolveram a questão 4.3 e perceberam que a função encontrada era igual a da questão 4.2, como esperávamos.

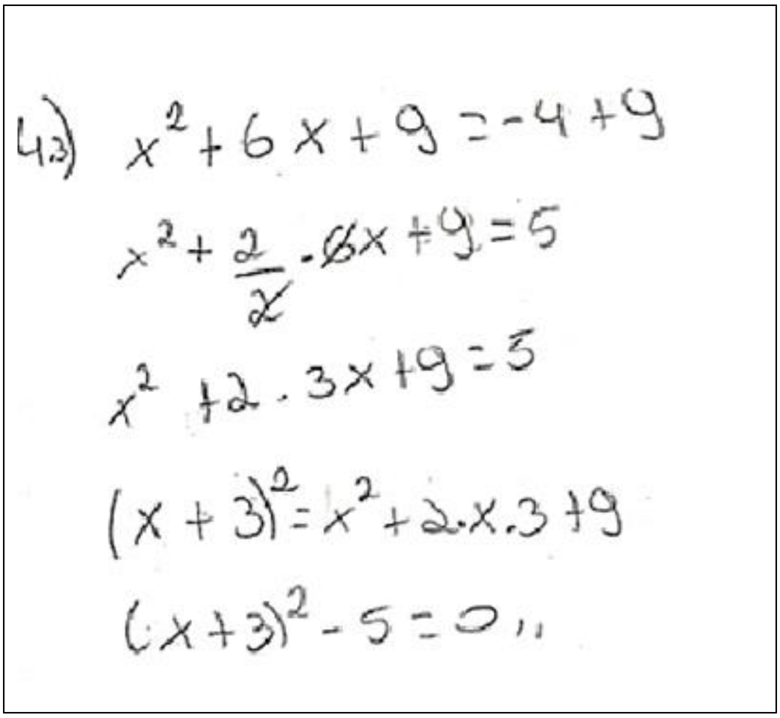


Figura 106: Atividade 4.3 (grupo 2).

O grupo 3 realizou corretamente os tratamentos na função e apresentou as coordenadas do vértice da função, como vemos na figura 107.

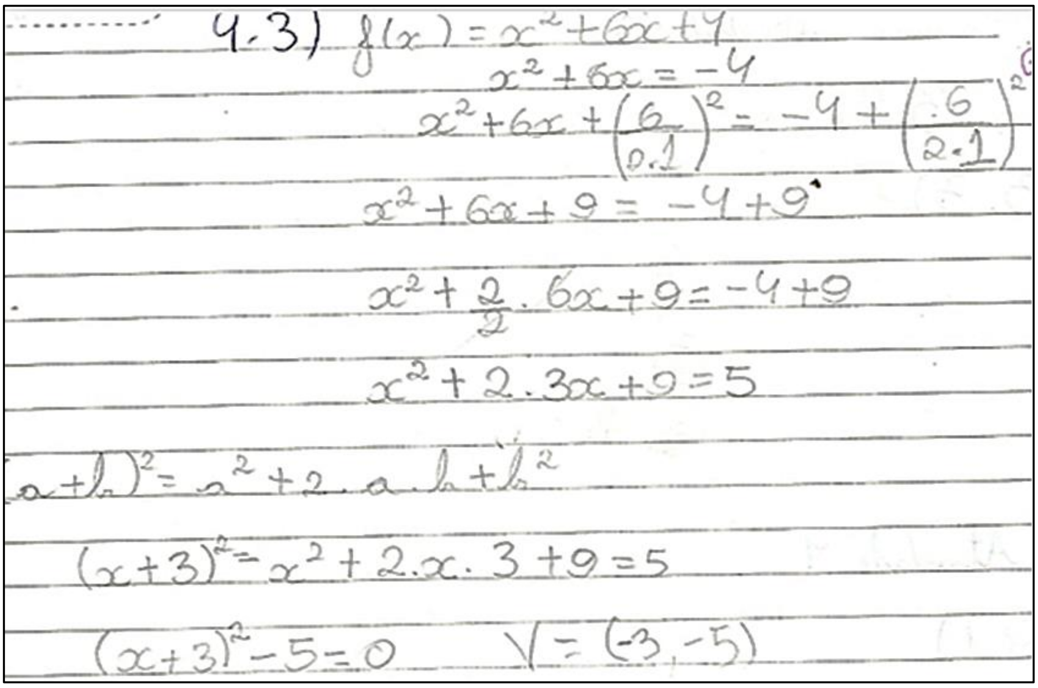


Figura 107: Atividade 4.3 (grupo 3).

Na última questão 4.4, eles não entenderam o que precisava ser feito e precisaram de ajuda. A professora-pesquisadora faz uma intervenção relembrando que uma mesma função quadrática pode ser representada algebricamente de uma maneira diferente, só mudando a maneira de escrevê-la. Já vimos anteriormente que os tratamentos realizados em uma das formas da função quadrática permite o acesso a uma outra (forma) para representar a mesma função. E cada uma delas tem sua funcionalidade, trazendo entre outras, informações que dizem respeito à sua representação gráfica. Desse modo, os tratamentos têm como finalidade acessar as diversas informações específicas (como o vértice, a concavidade, etc.) tanto no que diz respeito às escritas algébricas, quanto à representação geométrica da função quadrática. Dissemos também que tinham acabado de verificar, na questão anterior, que as funções eram iguais, porém a diferença estava na maneira de escrevê-la. Então, para relacionar os parâmetros da função em sua forma canônica e os parâmetros da função em sua forma desenvolvida, bastava que eles igualassem essas duas formas e comparassem seus parâmetros, obtendo dessa forma uma relação entre eles. Então foi colocada a igualdade no quadro para que eles usassem suas habilidades algébricas e encontrassem a relação esperada.

Depois que desenvolveram o segundo membro e juntaram os termos semelhantes, pedimos a eles que, comparassem os coeficientes $a, b\ e\ c$ com os parâmetros $a, k\ e\ l$. Aqui eles ficaram sem saber o que tinham que fazer, então nessa hora a professora-pesquisadora dá uma ajuda afim de encontrar as relações esperadas:

$$k = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad l == -\frac{b^2\ - 4ac}{4a} \ .$$

Um grupo fez o seguinte comentário:"Já que $k\ e\ l$ representam o vértice, quer dizer então que, para encontrá-los posso usar essas relações aí?". O que eles queriam saber na verdade era se dada um função quadrática na forma $y = ax^2 + bx + c$, eles poderiam aplicar as relações acima para encontrar o vértice sem ter que escrever a função em sua forma canônica.

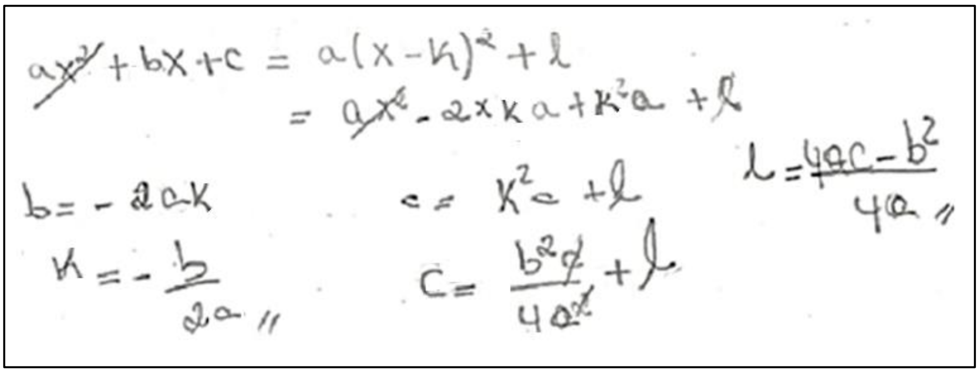


Figura 108: Atividade 4.4 (grupo 1).

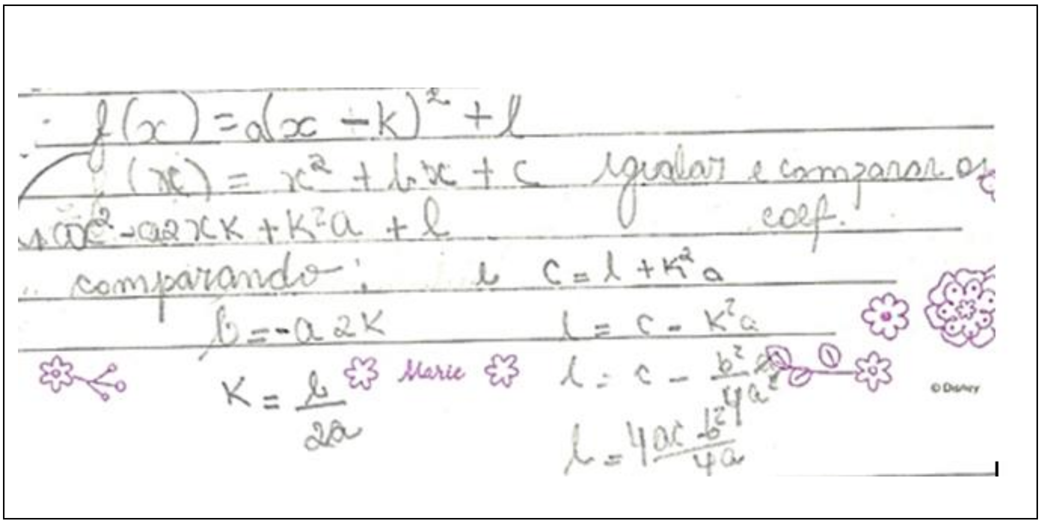


Figura 109: Atividade 4.4 (grupo 3).

Esperamos ao final dessas quatro atividades que eles tenham compreendido que, para termos acesso a certas informações, devemos privilegiar uma ou outra forma da função quadrática e são essas informações (coordenadas do vértice) que permitiram que se obtivesse com precisão as informações que foram obtidas na forma qualitativa na etapa 1.

Encontro 11: Problemas de máximo e mínimo

No último encontro, retomamos os problemas discutidos na primeira etapa da sequência didática . Nesta segunda etapa, a tarefa foi encontrar precisamente os valores de máximo e/ou mínimo das funções correspondentes aos problemas do pentágono, da chapa metálica, da vela do barco e da horta. Intencionalmente, todas as funções eram do tipo quadrática e assim foi solicitado que, a partir da expressão algébrica obtida anteriormente, obtivessem as correspondentes formas canônicas para então determinar as coordenadas dos vértices - os pontos de máximo/mínimo em questão .

As leis algébricas que representam as funções quadráticas são:

e) Problema do Pentágono cuja lei era :$A(x) = 8 + 4x - x^2$
f) Problema da chapa metálica cuja lei era: $A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$;
g) Problema da vela do barco cuja lei era: $A(x) = \frac{48x - 6x^2}{8}$;
h) Problema da horta cuja lei era: $A(x) = 12x - x^2$.

Não precisamos dizer nada sobre o que deveriam fazer. Já sabiam o que deveria ser feito para encontrar as coordenadas do vértice. Como vemos na transcrição de alguns de seus comentários: “devemos usar o completamento de quadrados e o trinômio quadrado perfeito, afim de obter a lei”. Ou “Agora faz sentido porque fizemos tudo aquilo!”, referindo-se às atividades anteriores. A partir de seus comentários, podemos ver que eles perceberam que as atividades anteriores não eram mais objeto de estudo e, sim, que se tornaram ferramentas para a resolução de outros problemas. Podemos dizer também que eles compreenderam que era a partir da forma canônica da função quadrática que teriam acesso a determinadas informações que resolvia de forma exata o problema.

Alguns alunos tiveram mais habilidades nas manipulações algébricas e encontraram rapidamente as funções nas formas canônicas nos problemas do pentágono e da horta. Já na “lei” referente ao problema da chapa metálica e da vela do barco mostraram uma certa dificuldade e precisaram de ajuda. Acredito que se deva ao fato de ter-se como parâmetro da função um número racional.

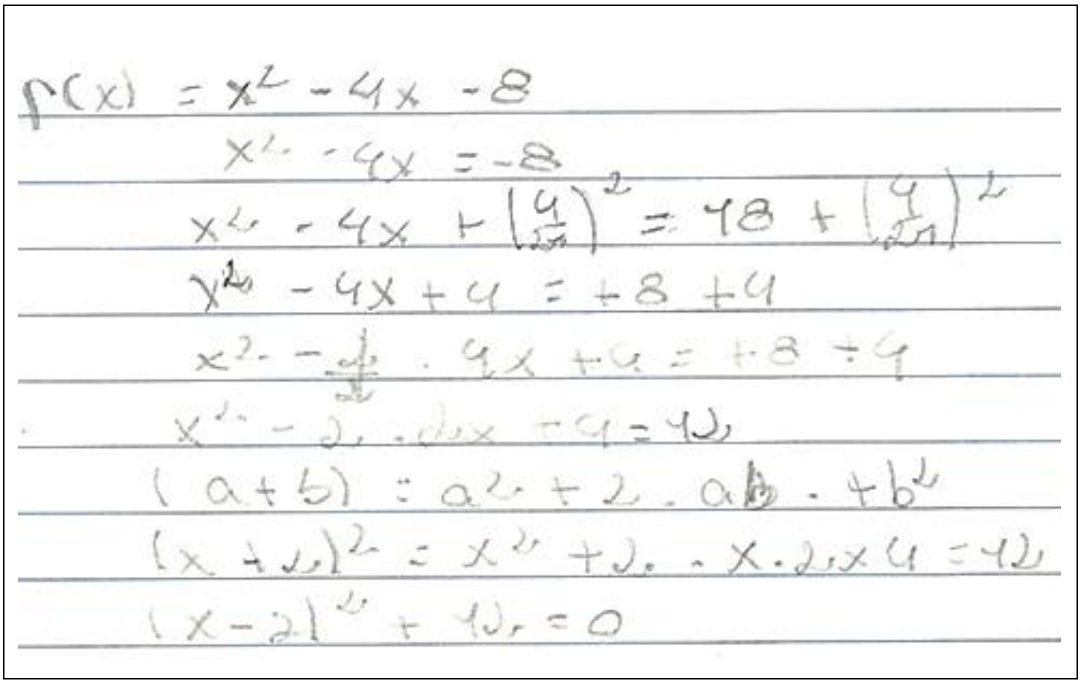


Figura 110: Atividade 1a (grupo 1).

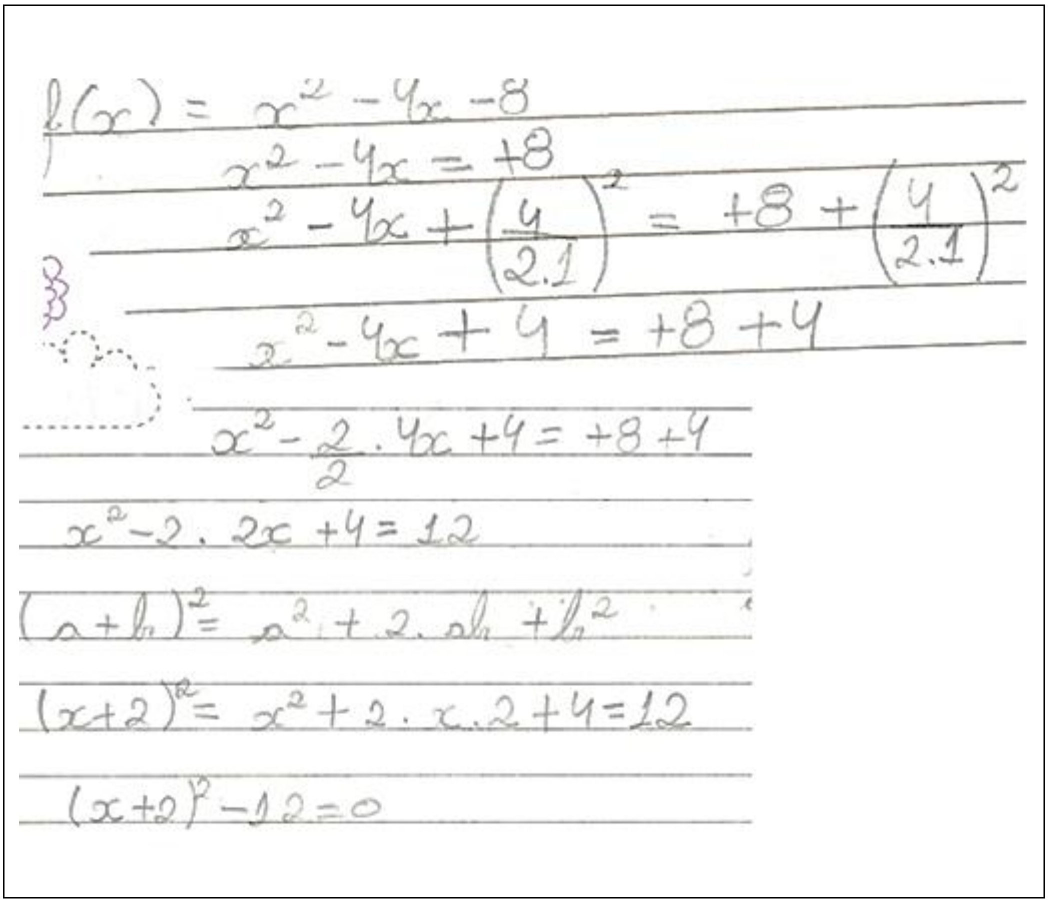


Figura 111: atividade 1a (grupo3).

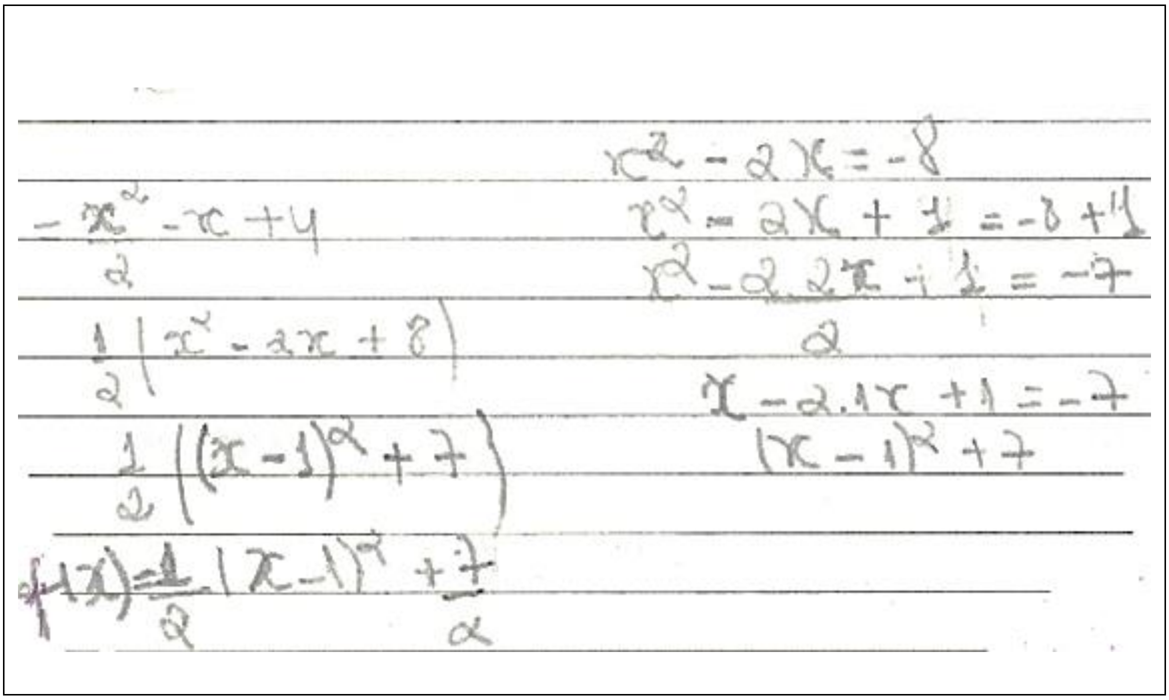


Figura 112: Atividade 1b (grupo 4).

Nossa análise dos protocolos dos alunos e também nossas observações feitas em aula, indicam que os alunos se familiarizaram com o conceito de função quadrática e que o software de matemática dinâmica, Geogebra, teve um importante papel. O potencial semiótico do software permitiu aos alunos um trabalho com diferentes registros de representação do objeto função. Eles fizeram, inicialmente, uma exploração qualitativa das relações matemáticas, a partir do dinamismo da representação; depois obtiveram o gráfico da função, sem fazer uso da expressão algébrica; e foi na última parte das atividades que trabalharam com a expressão algébrica da função.

Algumas considerações sobre o experimento que foram observados:

- compreenderam os conceito de variáveis e dependência entre variáveis.
- apesar de algumas dificuldades particulares, determinaram os intervalos de crescimento e decrescimento (aproximadamente).
- em alguns problemas, tiveram dificuldade para determinar o domínio e a imagem.

- compreenderam que os movimentos de gráficos dependem dos coeficientes da função.
- as maiores dificuldades se apresentaram na conversão de registro geométrico para algébrico e nos tratamentos na forma algébrica.
- determinaram os pontos de máximo/mínimo, mas com muitas dificuldades nas manipulações algébricas.

Em alguns momentos da aplicação da sequência, houve a necessidade da nossa intervenção como professor mediador. Mas ao longo dos encontros percebemos que os alunos foram superando suas dificuldades.

Observamos que os alunos, em quase sua totalidade, caminharam para o "limiar da compreensão em matemática" (DUVAL, 2011, p. 100), ao mostrarem gradativa desenvoltura com os diferentes registros de representação. Ao final da experiência, corroboramos o que diz Gravina (2001) sobre os softwares de matemática dinâmica: são ferramentas que "desencadeiam alguma das primeiras ações mentais características do pensar matemático - o estabelecer relações e conjecturar". Tais atitudes também foram observadas, nos momentos de trabalho dos alunos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para tratar nosso problema de pesquisa, diferentes fontes de informação, acompanhadas de muitas reflexões, se fizeram necessárias. Foi necessário considerar os princípios da Engenharia Didática, de Artigue, para entender os condicionantes da pesquisa e bem formular a questão a ser investigada. Foi preciso conhecer a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, para entender que o reconhecimento de um objeto matemático depende, também, de conversões entre os diferentes registros de representação. Também foi preciso entender sobre como fazer bom uso da tecnologia, de forma a proporcionar aos alunos as conversões de registros com um “clique de mouse”.

Organizamos nossa pesquisa a partir de uma análise preliminar do problema a ser investigado. Através de um estudo histórico, epistemológico e cognitivo, tratamos de encontrar o caminho para construção da sequência didática. A qual teve a intenção de provocar no aluno a construção do conceito de função a partir de situações geométricas dinâmicas.

A análise dos livros didáticos nos mostrou que no ensino de funções há um forte viés algébrico e pouca exploração qualitativa de relações entre variáveis. Usualmente o ensino inicia com a apresentação de uma situação-problema e é então apresentada a lei da função associada a situação; a partir da lei é construída uma tabela numérica com pares de números e é feita a representação gráfica no plano cartesiano.

Em nossa proposta fizemos uma inversão na ordem de ensino trazendo uma abordagem diferente. Escolhemos introduzir o conceito de função através de situações geométricas e concebemos uma sequência didática de forma a proporcionar aos alunos um trabalho que lhes permitissem desenvolver e/ou adquirir as noções ligadas a variável, correspondência entre variáveis, regularidades e generalização de relações. Cabe aqui reconhecer o potencial do software GeoGebra. Com o seu uso foi possível mobilizar diferentes registros semióticos, através da manipulação de elementos na tela do computador. A possibilidade de associar recursos para construções geométricas com recursos de expressões algébricas justifica a expressão “matemática dinâmica” que faz parte do titulo dessa dissertação. Na sequência didática, implementada e testada, o dinamismo na tela do computador foi de fundamental importância.

No confronto entre as análises *a priori* e a *posteriori*, das diferentes atividades realizadas, constatamos que os alunos, de um modo geral, se apropriaram do conceito de função, em particular das características de uma função quadrática. Eles também compreenderam os conceitos de domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento da função. Com as análises feitas, podemos dizer que nossa pergunta de pesquisa foi respondida de forma satisfatória, ou seja, as articulações entre os diferentes registros de representação semiótica, aliadas a situações geométricas e ao software de matemática dinâmica, podem ajudar o processo de aprendizagem do conceito de função.

Como parte do trabalho realizado estamos disponibilizando um produto didático: a coleção de atividades e os correspondentes arquivos GeoGebra, no anexo e em CD.

Na experiência realizada tratamos do estudo do conceito de função, através da conversão e a coordenação de registros do objeto em estudo. Nos concentramos no caso particular da função quadrática, onde também foi feito o estudo da concavidade e dos movimentos de translação do gráfico. Queremos deixar como sugestão, para futuros trabalhos, o desenvolvimento de sequência didática que trate dos “zeros” da função quadrática, onde o registro algébrico na forma fatorada se torna importante.

Ao final do trabalho, retomo[21] a inquietação que me motivou a desenvolver a pesquisa. As ideias aqui discutidas não faziam parte da minha prática docente, como professora de matemática. Naquele momento, meu trabalho com os alunos se concentrava em levá-los a resolver exercícios, sem questionamentos, sempre muito preocupada em cumprir o programa, sempre pensando no vestibular e no Enem. O computador até fazia parte das minhas aulas, mas como um simples atrativo para realização das atividades. Esta prática docente não me trazia um retorno satisfatório quanto a aprendizagem dos alunos. Isto me inquietava.

Hoje, tenho uma outra visão do processo de ensino e aprendizagem. Aprendi que, antes de tudo, é preciso refletir sobre o conteúdo que nos propomos a

21 Em alguns momentos, nesse texto final, foi usado a primeira pessoa do singular por tratar-se de um relato de experiência pessoal da professora pesquisadora.

ensinar. Também entendi que não se aprende Matemática de forma passiva e isto me fez valorizar as mídias digitais e suas possibilidades de uso, porque com elas é quase que de forma natural que os alunos se colocam na posição de ativos aprendizes. Hoje defendo o uso deste instrumento do avanço tecnológico, mas de forma criteriosa a fim de que realmente se promova a aprendizagem dos alunos. O meu maior desafio para usar o GeoGebra, como aliado no desenvolvimento cognitivo dos alunos, foi aprender a criar situações favoráveis à aprendizagem.

Meu amadurecimento profissional ao longo desses dois anos de mestrado foi grande. Tal amadurecimento tem reflexos diretos em minha prática, como professora. Hoje tenho a preocupação de fazer da sala de aula um ambiente de pesquisa profissional. Com essa atitude, quero avançar no desafiador processo de ensino e aprendizagem de Matemática, na direção de que nos fala Freire (1997) quando diz que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (p 52).

Esperamos que a leitura deste trabalho possa contribuir para a reflexão da prática docente dos colegas professores de Matemática e para novas pesquisas na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem**: As discussões dos alunos. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

AZEVEDO, Arminda Branquinho Godinho de. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções**: uma experiência com alunos do Ensino Secundário. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa. Portugal, 2009.

BARROSO, Juliane Matsubara (org.). **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, v.1, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher Ltda, 1974.

BKOUCHE, R. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. **The learning of mathematics**, v.17, n. 1, p.1-16, 1997.

BRAGA, E. **A compreensão dos conceitos de Função Afim e Quadrática no Ensino Fundamental com recurso da planilha**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

______ . Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio** - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

_____ . **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias/ Secretaria de Educação Básica. - Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: [s.n.], 1978.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, FE-Unicamp, v.13, n. 23, p. 87-120, jan/jun 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Ensino Médio. São Paulo: Ática, v.1, 2010.

COLOMBO. J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, v.16, n. 29, p. 41-72, jan./jun 2008.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM - ULP,1993. p. 37-65.

______. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 7-31.

______. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Universidad Del Valle. Colômbia, 2004a.

______."Graphiques et équations: l'articulation de deux registres", **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** IREM de Strasbourg, 1988, p. 235-253.

______ .**Ver e Ensinar a Matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tânia M. M. Campos (org.). São Paulo: Proem, 2011.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**., Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

FIGUEIREDO, Carlos Alberto Barros Pacheco Abrantes De**. Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional**. Tese de doutorado. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. Badajoz, 2010.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. EDUMATEC – Educação Matemática e Tecnologia Informática, Porto Alegre, 1998. Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/artigos_index.php>, Acesso em: 27 fev. 2014.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.

GRANGER, G. G. **Langages et épistémologie**. Paris: Éditions Klincksieck, 1979.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of school Algebra. In: GROWS, D. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Project of the N.C.T.M., 1992, p. 390-419.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, v. 20, n.4, p. 282-300, set. 1989.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: Machado, S. D. A. et. al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197-208.

MAIA, D. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

MENK, L. F. F. **Contribuições de um Software de Geometria Dinâmica na Exploração de Problemas de Máximos e Mínimos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2005.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In: Machado, S. D. A. (org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 149-160.

MORETTI, Méricles T.; THIEL, Afrânio A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 379-396, jul./dez. 2012.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de Função: Uma abordagem do Processo Ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1997.

PAIVA, MANOEL**. Matemática**. Ensino Médio. São Paulo: Moderna, v.1, 2009.

PALARO, L. A. Leonhard Euler e o conceito de função. In: **Seminário Educação: 20 anos de Pós Graducação em Educação, avaliação e perspectivas**. Cuiabá, 2008.

PONTE, J. P. O conceito de função do currículo de Matemática. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 15, p. 3-9, 1990.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológicas**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

RIBEIRO JUNIOR et al. Simulação de experimentos históricos no ensino de física: uma abordagem computacional das dimensões histórica e empírica da ciência na sala de aula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 4, 2012. Disponível em: <www.sbfisica.org.br>, Acesso em: 14 mai. 2014.

SCANNO,F. C. **Função Afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SILVA, J. A. M. **Educação Matemática e Exclusão Social**: tratamento diferenciado para realidades desiguais. Brasília: Plano Editora, 2002.

SILVA, José Roberto Damasceno da. **Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2005.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. Ensino Médio. São Paulo: FDT, v.1, 2010.

SCHWARTZ, B.; DREYFUS, T. Transfer between function representations: A computational model. In: G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.). **Proceedings of the International Conference for the Psycology of Mathematics Education**. Paris, France. G.R. Didactique, 1989. v.3, p. 143-150.

______News actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. **Revista Educational in Mathematics**. v. 29, n. 3, p. 259-291, 1995.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**. Revista da sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ano 8, n. 9/10, p. 10-16, 2001.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function. In: **Archive for History of Exact Sciences**. Editions Springer, 1976. v. 16, n.1, p. 37-85.

APÊNDICE 1 - A SEQUÊNCIA DIDÁTICA IMPLEMENTADA NA ESCOLA

Retomada dos pré-requisitos

Atividade 1:

Abra o arquivo 1, do GeoGebra, que se encontra em seu desktop e, a partir dessa construção, faça o que está sendo solicitado.

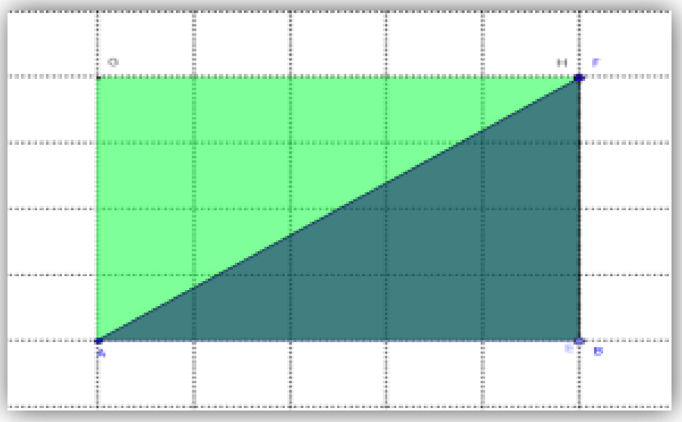


Figura 113: ilustração da atividade 1

Movimente o ponto E o que você observa:

a) Em relação à área do retângulo ABHG?

b) Em relação à área do triângulo AEF?

Movimente o ponto F o que você observa?

a) Em relação à área do retângulo ABHG?

b) Em relação à área do triângulo AEF?

Que relação existe entre essas duas áreas?

Atividade 2:

Observe as figuras:

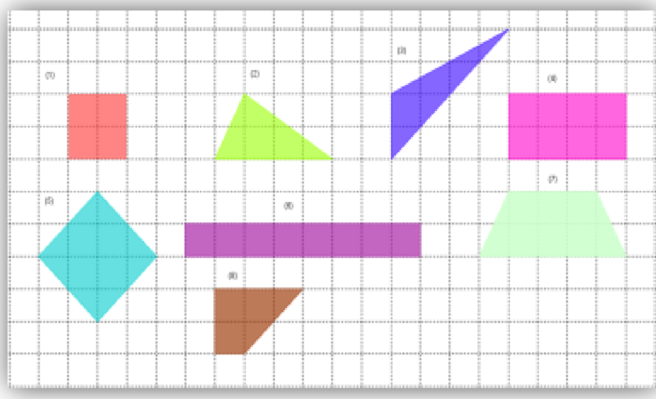


Figura 114:Ilustração da atividade 2.

E agora responda:

Quais figuras utilizam a mesma quantidade de papel? Justifique.

Atividade 3:

Sejam r e s retas paralelas e considere os triângulos ABC, ABD e ABE, com vértices nestas retas, como mostra a figura.

Observe os três triângulos ABC, ABD e ABE.

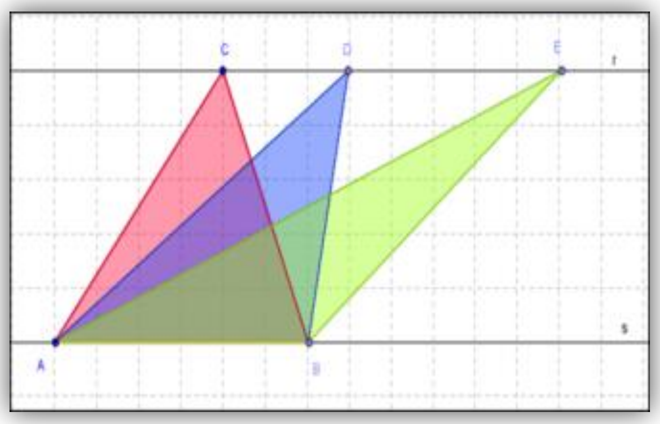


Figura 115: Ilustração da atividade 3

a) Como você identifica a altura de cada um desses triângulos?

b) Determine a área de cada um desses triângulos. O que você observa?

c) Que relação existe entre esses triângulos?

Atividade 4:

Considere a seguinte situação:

Quero encontrar a área de um mapa de certo estado, para isso coloquei um barbante sobre o contorno do mapa, acompanhando todas as suas curvas. Logo depois amarrei as pontas do barbante e, com esse barbante, formei um retângulo. Depois foi só calcular a área do retângulo e obtive a área do meu mapa. Porém a minha ideia não funcionou. Vocês podem me explicar por quê?

1) Após a leitura, façam suas conjecturas para tentar encontrar uma solução para o problema, usando lápis e papel.

2) Abra o arquivo 2, do GeoGebra, com a construção da situação, e responda os questionamentos de modo a encontrar a solução do problema.

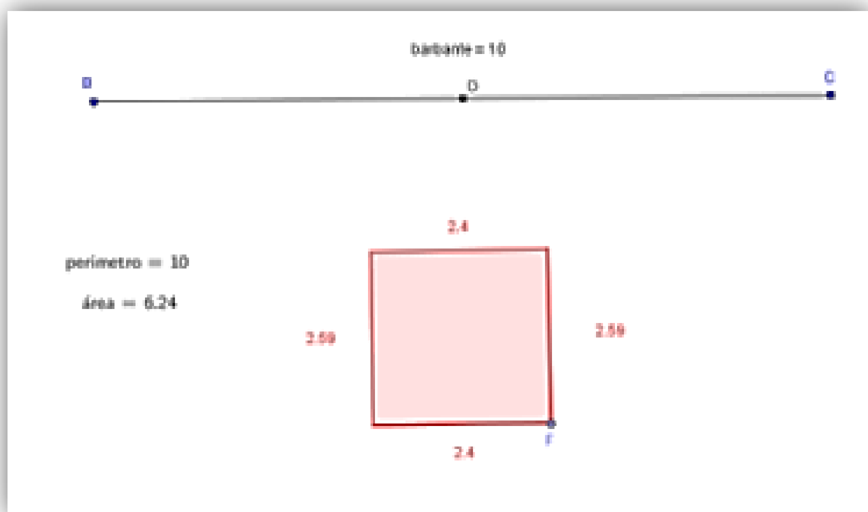


Figura 116: Ilustração da atividade 4

- Manipulando o ponto F, o que você observa:

Com relação à área dos retângulos obtidos?

Com relação ao perímetro dos retângulos obtidos?

Existe relação funcional entre perímetro e área de retângulos?

Atividade 5:

Observe a seguinte situação:

Num terreno em declive foi construída uma rampa plana, e uma plataforma é sustentada por duas colunas paralelas. Como é possível calcular a medida h da altura
da coluna?

Modelo matemático para a situação

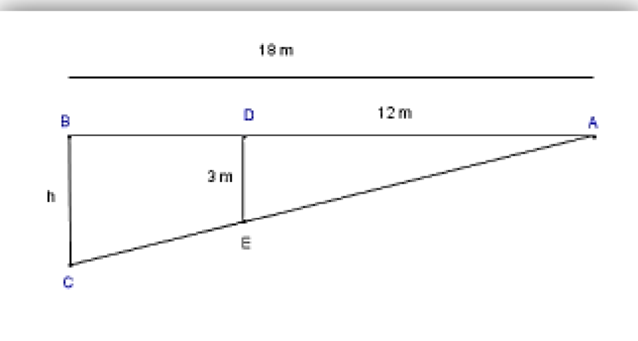


Figura 117: Ilustração da atividade 5

Observando o modelo:

- As colunas BC e DE são paralelas, que relação existe entre os triângulos ADE e ABC? Com relação aos lados, desses triângulos, o que podemos dizer?

Atividade 6:

Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB =10 cm e AC = 15 cm. Quanto mede a área do quadrado?

- Seja AD = x a medida do lado do quadrado que queremos descobrir. Se a medida do lado AB é 10 cm, então a medida de BD é?

- O que você pode dizer a respeito da base DE do triângulo BDE com relação à base AC do triângulo ABC?

- Existe uma relação entre o triângulo ABC e o triângulo BDE? Qual?

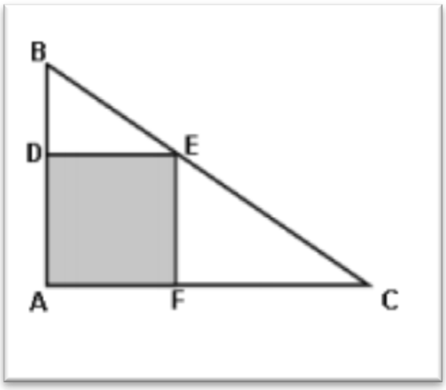


Figura 118: Ilustração da atividade 6

O Problema do Pentágono

A situação geométrica a ser explorada é a seguinte:

> Paulo possui um pequeno pedaço de cartolina no formato de um quadrado de lado 4 cm e deseja recortar um pentágono utilizando essa cartolina de modo que esse pentágono tenha a maior área possível. Para tanto, ele pensou em nomear esse quadrado por ABCD, marcar os pontos M, N e P sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente, de modo que as medidas AM, NC e CP fossem iguais a um valor conveniente l, uma vez que há várias possibilidades para essa marcação. Ajude Paulo a encontrar a medida l de modo que, ao recortar o pentágono AMNPD, ele obtenha a figura desejada.

Momento 1 -

- Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa o pentágono AMNPD.

- Na situação do problema, como Paulo, pode recortar os cantos da cartolina para ter um melhor aproveitamento de papel?

Momento 2 –

a) Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

b) Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor, aproximado, da área do pentágono?

c) Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do pentágono?

d) Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, o que acontece com a área do pentágono?

.e) Segmentos azuis diferentes podem produzir pentágonos de mesma área?

f) Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.

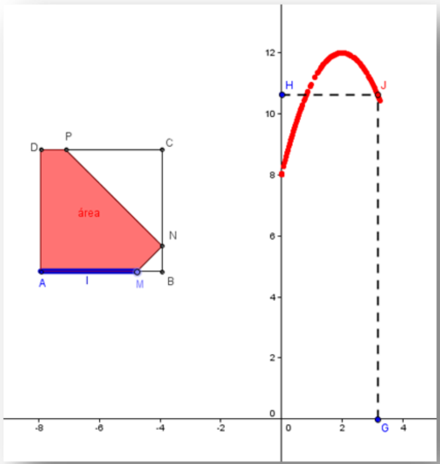
g) Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

h) O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

I) Quando Paulo vai conseguir o pentágono de maior área?

Momento 3 – Com auxílio de lápis e papel e das fórmulas do quadrado e do triângulo obtenha a função que representa o problema.

Tela do arquivo GGB:



O problema da Luminária

A situação geométrica a ser explorada é a seguinte:

> Uma fábrica de luminárias quer produzir um modelo de abajour em forma de uma pirâmide quadrangular com aresta da base de 20 cm. O dono dessa fábrica querendo agradar seus clientes deixou que eles definissem, de acordo com as suas necessidades, o tamanho das faces laterais desse abajour. Qual será o gasto mínimo de material para fazer o abajour?

Momento 1:

Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a situação do problema.

- Como fica a planificação dessa luminária?
- O que o cliente deverá levar em conta para gastar o mínimo possível de material?

Momento 2:

Abra o arquivo 5, que se encontra no desktop do seu computador.

-Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

- Quando o segmento azul diminui, o que acontece com a luminária?

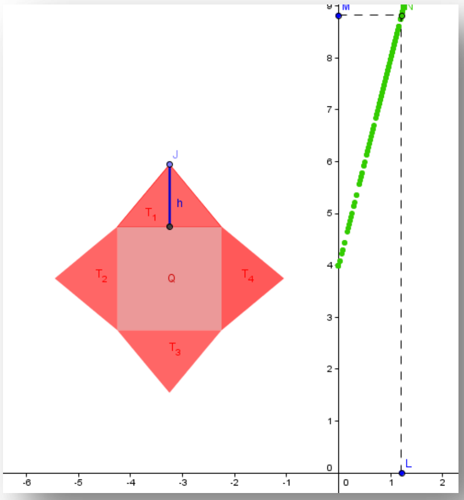
-Para qualquer valor de h será sempre possível construir esse abajour? Existe um valor mínimo para h?

- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.
- O que representa o menor valor no gráfico?
- Qual é a quantidade mínima de material necessário para que, o dono da fábrica, possa construir um abajour desse modelo?
- Qual é o intervalo de variação da função que representa o abajour?

Momento 3:

-Com auxílio de lápis e papel e das fórmulas de área do quadrado e do triângulo obtenha a função que representa o problema.

Tela do arquivo GGB:



O problema da casa com jardim

Considere a seguinte situação:

> Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma do lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas vizinhas, teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa 2, e pelo jardim 2 seja maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1. As dimensões das casas e dos jardins estão descritos conforme a figura 28:

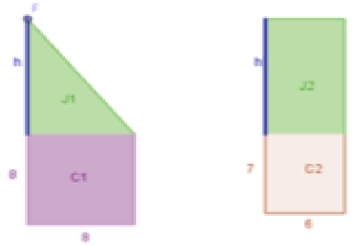


Figura 119: Planta baixa com as dimensões
Fonte: Conexões com a Matemática (Barroso, 2010, p.119).

Momento 1:

- Quais os dados fornecidos pelo problema?

- O que o problema esta pedindo para calcular?

Momento 2:

Abra o arquivo 6, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

-Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?

-Quando o segmento azul aumenta, qual o valor aproximado da área na planta 1? e na planta 2?

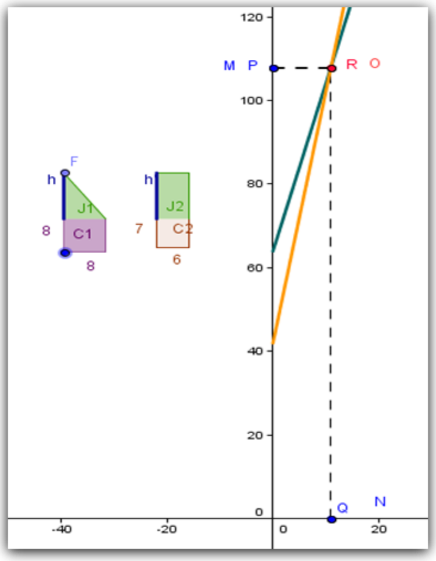
- À medida que o segmento azul varia, a área da planta 1 também varia na mesma proporção? E a área da planta 2?

- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.
- Existe uma situação em que essas casas com jardim terão áreas iguais?
- Em que situação a área ocupada pela casa 2 e pelo jardim 2 será maior que a área ocupada pela casa 1 e pelo jardim 1?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis, papel e da fórmula da área do quadrado, área retângulo e da área do triângulo retângulo escreva a função que representa o problema.

Tela do arquivo GGB:



O problema da Chapa Metálica

Considere a seguinte situação:

> Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM* = *DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?
>
> Adaptado de Azevedo (2009)

Momento 1:

-Usando o lápis e o papel, faça um desenho que representa a chapa metálica ABCD e o triângulo IMN.

- Na situação do problema como podemos recortar a chapa metálica para ter um melhor aproveitamento?

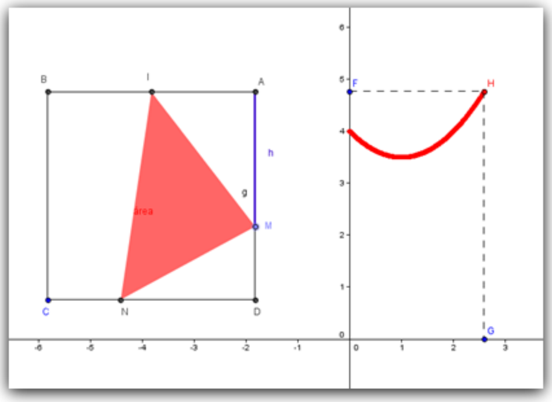
Momento 2:

Abra o arquivo 7, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?
- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor da área do triângulo IMN?
- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do triângulo IMN?
- Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, com fica a área do triângulo?
- Segmentos azuis diferentes podem produzir triângulos de mesma área?
- Quando o triângulo terá a menor área?
- Qual é a variação de x?
- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.
- O que nos informa o menor ponto do gráfico?
- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:- Com o auxílio do lápis e papel e da fórmula da área do quadrado e do triângulo escreva a função que representa o problema.

Tela do arquivo GGB:



O problema da vela do barco

Considere a seguinte situação:

Paulo possui um barco à vela. A vela que o equipa tem a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 8m e 6m. Para que esta vela se veja ao longe, ele decidiu colocar-lhe no interior um retângulo vermelho e para isso ele fez diferentes estudos e o seguinte esquema:

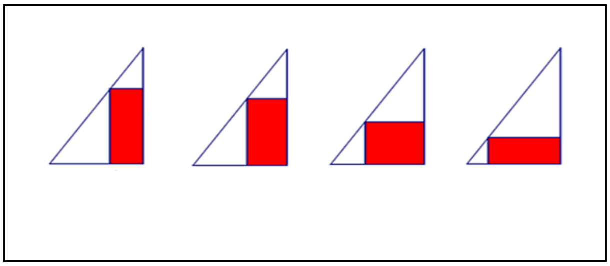


Figura 120: Esquema da vela do barco
Fonte: Azevedo (2009)

Momento 1:

- A região de qualquer um dos retângulos acima é sempre a mesma? Justifique.

- Em qual situação Paulo gastará mais pano vermelho?

Momento 2:

Abra o arquivo 8, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

- Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo?

- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo?

- Quando o segmento azul é quase igual ao lado do triângulo o que acontece com a área do retângulo?

- Segmentos azuis diferentes podem produzir retângulos de mesma área?

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

- Qual é a variação de x?

- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.

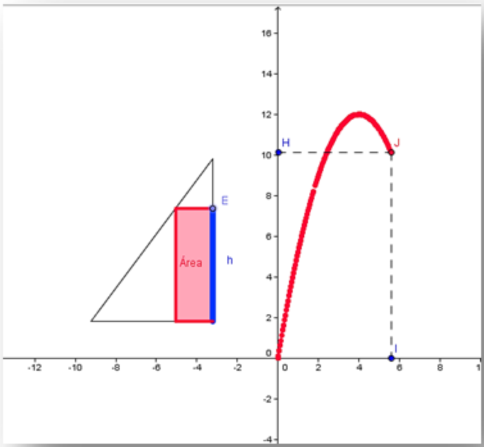
-Quais são as dimensões do retângulo de área máxima?

- O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?
- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis e papel, semelhança de triângulos e proporcionalidade escreva a função que representa o problema.

Tela do arquivo GGB:



O problema da horta

Considere a seguinte situação:

> João dispõe de 24 m de tela para cercar uma horta de formato retangular. Quais devem ser as dimensões do cercado, de modo que se possa obter maior produtividade na horta?

Momento 1:

-Usando o lápis e o papel, faça um desenho que represente o cercado na situação do problema;

- O que representa a medida 24 m, no enunciado do problema?

-Como o João deve dimensionar a sua horta para ter um melhor aproveitamento do terreno?

Momento 2:

Abra o arquivo 9, que se encontra no desktop do seu computador.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

– Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor aproximado da área do retângulo? qual o valor do perímetro?

-Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do retângulo? qual o valor do perímetro?

-Quando o segmento azul é igual metade da medida do perímetro, o que acontece com a área do retângulo?

- Segmentos azuis diferentes podem produzir retângulos de mesma área?

-Tem um retângulo onde a área é máxima?

- Qual é a variação de x?

- Com auxílio das ferramentas, “rastro” e “Lugar Geométrico” obtenha o gráfico que representa a função.

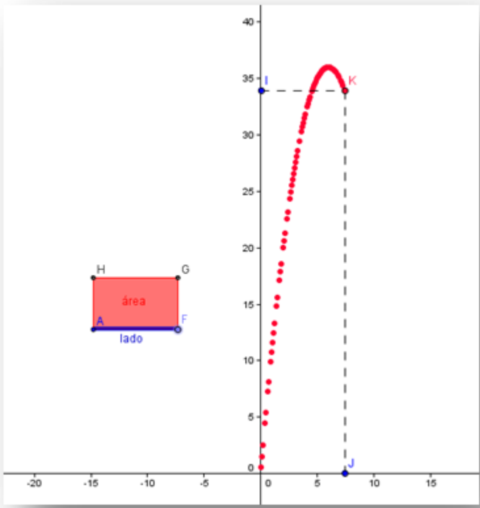
- O que nos informa o ponto mais alto do gráfico?

- Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

Momento 3:

- Com o auxílio do lápis e papel, escreva a função que representa a situação.

Tela do arquivo GGB:



Problemas de máximo e mínimo

Partindo da “lei” da função obtida na resolução dos problemas propostos na Etapa 1, os alunos devem chegar à forma geral da função quadrática através do trinômio quadrado perfeito e completando quadrados a fim de obter os ponto de máximo e/ou mínimo.

As leis algébricas que representam as funções quadráticas são:

i) Problema do Pentágono cuja lei era :$A(x) = 8 + 4x - x^2$
j) Problema da chapa metálica cuja lei era: $A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$;
k) Problema da vela do barco cuja lei era: $A(x) = \frac{48x - 6x^2}{8}$;
l) Problema da horta cuja lei era: $A(x) = 12x - x^2$.

APÊNDICE 2 - IMAGENS DOS ALUNOS TRABALHANDO DURANTE A REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO