UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Problemas de Coloração em Teoria Extremal de Conjuntos

por

Lucas de Oliveira Contiero

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, Julho de 2014.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

de Oliveira Contiero, Lucas

Problemas de Coloração em Teoria Extremal de Conjuntos / Lucas de Oliveira Contiero.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2014.

102 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2014.
Orientador: Hoppen, Carlos

Dissertação: Combinatória
Matemática Aplicada, Teoria Extremal de Conjuntos, Colorações, Hipergrafos

Problemas de Coloração em Teoria Extremal de Conjuntos

por

Lucas de Oliveira Contiero

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Combinatória

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Dr. Rudini Menezes Sampaio
Computação - UFC

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
PPGMAT - UFRGS

Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp - UFRGS

Dissertação apresentada
22/07/2014.

Profª Drª Maria Cristina Varrialle
Coordenadora

Sumário

Lista de Figuras

LISTA DE SÍMBOLOS

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$.

$2^X = \{A : A \subseteq X\}$.

$\binom{X}{k} = \{A : A \subseteq X, |A| = k\}$.

K_n é o grafo completo com n vértices.

$T_k(n)$ é o grafo de Turán com n vértices e k classes.

$\kappa(H, q, t)$ é o número de (q, t)-colorações do hipergrafo H.

$\mathrm{KC}(n, k, q, t) = \max_{H \in \mathcal{H}_{n,k}} \kappa(H, q, t)$.

$H_{C,k}(n)$ é o hipergrafo (C, k)-completo (Definição 1.9).

$H_{n,k,q,t}$ (Definição 1.9).

$\mathcal{H}_{k,q,t}(n)$ (Definição 1.10).

$S_{ij}(F)$ (Definição 2.1).

$\sigma_\ell(\mathcal{F}) = \{G : |G| = \ell, G \subseteq F, F \in \mathcal{F}\}$.

$\mathrm{SC}(H, q, t)$ (Definição 6.15).

$\mathrm{sc}(H, q, t)$ (Definição 6.15).

RESUMO

Neste trabalho de mestrado tratamos de problemas de coloração em Teoria Extremal de Conjuntos. Para números inteiros positivos n, k, q e t, uma (q,t)-coloração de um hipergrafo k-uniforme H com n vértices é uma função que associa cada hiperaresta de H a uma cor em $[q]$, onde dois elementos de mesma cor possuem intersecção de tamanho pelo menos t. Um resultado recente [1] informa qual é o hipergrafo que admite o maior número de (q,t)-colorações quando $q \in \{2,3,4\}$ ou $q \geq 5$ e $k \geq 2t-1$. No caso em que $q \geq 5$ e $k < 2t-1$, este resultado determina propriedades que um hipergrafo que atinge o número máximo de colorações deve possuir, porém não identifica os hipergrafos ótimos entre todos que satisfazem essas propriedades. A principal contribuição do nosso trabalho foi estudar uma conjectura proposta pelos autores daquele trabalho. Adaptando uma técnica clássica, demonstramos que essa conjectura é verdadeira em alguns casos. Uma outra contribuição deste trabalho foi a apresentação detalhada de demonstrações de resultados clássicos associados a este problema.

ABSTRACT

In this master's thesis we considered problems in Extremal Set Theory. For positive numbers n, k, q and t, we say that a (q, t)-coloring of an n-vertex k-uniform hypergraph H is a function such that each hyperedge from H is associated with a color in $[q]$, where two hyperedges with the same color have at least t elements in common. A recent result [1] determined the set of hypergraphs allowing the maximum number of (q, t)-colorings when $q \in \{2, 3, 4\}$ or when $q \geq 5$ and $k \geq 2t - 1$. In the case $q \geq 5$ and $k < 2t - 1$, that work found properties that a hypergraph with the maximum number of (q, t)-colorings satisfies, but did not determine which hypergraphs are extremal. The main contribution of our work is to study a conjecture proposed by the authors of [1], which further restricts the class of possible extremal hipergraphs. Using a classical technique, we prove their conjecture for $q \in \{5, 6\}$ and restrict the class of possible extremal hipergraphs in the other cases. Another contribution of this work is the presentation of detailed proofs of the classical results related to this problem.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Hoppen, pelo apoio, preocupação, dedicação e ótimo desempenho comigo e com este trabalho.

Aos professores doutores Rudini Menezes Sampaio, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Vilmar Trevisan, componentes da banca examinadora, pelo empenho em terem estudado e criticado este trabalho.

Ao Knut Odermann por toda a ajuda nas contribuições deste trabalho.

Ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela enorme competência e pelo excelente ensino.

Aos órgãos CNPq e REUNI pelo apoio financeiro.

À minha família, pelo amor, carinho e compreensão que sempre me deram.

À minha namorada Ariane, pelo amor e companheirismo durante todo o meu curso.

1 INTRODUÇÃO

Em Teoria Extremal de Conjuntos, é comum o estudo de problemas de otimização em famílias de conjuntos, como, por exemplo, encontrar a maior família de conjuntos que satisfaça uma certa propriedade. Antes de enunciar os problemas de que trataremos nessa dissertação, introduzimos a notação básica utilizada. Como de costume, denotamos $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$ para $n, i, j \in \mathbb{N}$ com $i \leq j$. Dado um conjunto X, denotamos por 2^X a família de todos os subconjuntos do conjunto X. Ainda, denotamos por $\binom{X}{k}$ a família de todos os k-subconjuntos de X, isto é, a família de todos os subconjuntos de X que possuem tamanho k. A terminologia k-conjunto, também será utilizada, e significa um conjunto de tamanho k. Duas famílias $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ de subconjuntos de $[n]$ são ditas *isomorfas* se existe uma função bijetora $f\colon [n] \longrightarrow [n]$ tal que, para todo $S \in 2^{[n]}$ vale a seguinte propriedade: $S \in \mathcal{G}$ se, e somente se, $\{f(x) : x \in S\} \in \mathcal{H}$. Escrevemos $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H}$ quando $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são isomorfas.

Em problemas de otimização de famílias de conjuntos, muitas vezes uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ ótima não é única, pois as famílias isomorfas a $\mathcal{F}$ tipicamente satisfazem as mesmas propriedades que $\mathcal{F}$ satisfaz. Portanto, neste trabalho, iremos nos referir a unicidade quando houver unicidade a menos de isomorfismos.

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ é *intersectante* se, para todos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, temos que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Facilmente, podemos obter famílias intersectantes se não nos preocuparmos com o seu tamanho. Por exemplo, qualquer família de um único conjunto é intersectante. Portanto, a dificuldade está em encontrar famílias intersectantes grandes, o que sugere a seguinte pergunta. Dados inteiros positivos $n > k$, qual é a maior família intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ que podemos construir? E qual é o seu tamanho?

Uma estratégia intuitiva para contruir famílias intersectantes é fixar um elemento de $[n]$ e escolher todos os conjuntos de tamanho k contendo esse elemento, o que gera uma família de tamanho $\binom{n-1}{k-1}$. A esta família damos o nome de *família estrela completa*, devido à representação feita na figura abaixo. Representamos os conjuntos de uma família por elipses e os elementos dos conjuntos por pontos.

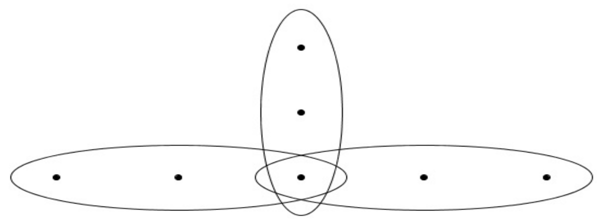

Figura 1.1: Alguns conjuntos da família estrela completa.

Porém, será que esta é a maior das famílias com esta propriedade? O Capítulo 2 desta dissertação apresentará três maneiras diferentes de demonstrar que sim, desde que tenhamos a condição $n \geq 2k$.

Note que, sem esta condição, isso não é verdade. Por exemplo, para $n = 3$ e $k = 2$, podemos construir a família $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, em que quaisquer dois conjuntos têm intersecção não vazia, porém não há um elemento que esteja em todos os conjuntos da família e, além disso, seu tamanho é maior do que $\binom{3-1}{2-1} = 2 < 3$. Note que este mesmo argumento pode ser estendido sempre que $n < 2k$, já que, com essa condição, quaisquer dois k-subconjuntos de n possuem intersecção não vazia.

Como a família estrela é uma alternativa intuitiva, e verificou-se que era máxima sempre que não estamos no caso trivial, seria natural perguntarmos qual é a maior família intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ que não é uma estrela. Hilton e Milner [2] estudaram esta questão e mostraram que a família ótima, neste caso, é a seguinte: partimos de uma família estrela completa, sem perda de generalidade centrada no elemento 1, acrescentamos o conjunto $\{2, \ldots, k+1\}$ para garantir que a família não é uma estrela, e removemos todos os conjuntos que possuem intersecção vazia com $\{2, \ldots, k+1\}$.

Podemos generalizar o conceito de famílias de conjuntos intersectantes para famílias de conjuntos t-intersectantes. Diremos que uma família $\mathcal{F}$ de k-subconjuntos de $[n]$ é *t-intersectante* se, para quaisquer dois conjuntos F_1, F_2 de $\mathcal{F}$, temos que $|F_1 \cap F_2| \geq t$. Agora, perguntamos se a maior família t-intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ é aquela composta por todos os conjuntos de $\binom{[n]}{k}$ que contêm algum conjunto fixo de tamanho t. Wilson [3], demonstrou que isto é verdade sempre que $n \geq (t+1)(k-t+1)$. Note que, se $n \leq 2k-t$, então a família $\binom{[n]}{k}$ é t-intersectante e, obviamente, é a maior destas.

A cota $n \geq (t+1)(k-t+1)$, proposta por Wilson [3], é a melhor possível, porém não foi a primeira a ser obtida. Na demonstração original do Teorema de Erdős-Ko-Rado para famílias de conjuntos t-intersectantes, Erdős, Ko e Rado [4] estabeleceram a cota $n \geq n_0(k,t)$, onde $n_0(k,t) \leq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$. No ano de 1976, Frankl [5] melhorou a cota para $n_0(k,t) = (t+1)(k-t+1)$ quando $t \geq 15$ e, em geral, para $n_0(k,t) \leq ct(k-t)$, onde c é uma constante que não depende de t. Observe que no caso $t = 1$ tínhamos a família ótima para qualquer relação entre n e k, pois todos os casos não contemplados pela família estrela completa são triviais. Já com relação a $t \geq 2$, não temos uma resposta imediata para o caso $2k-t < n < (t+1)(k-t+1)$. Buscando resolver esses casos remanescentes, Ahlswede e Khachatrian [6] definiram uma família t-intersectante, onde todos os conjuntos possuem, para um certo inteiro i, pelo menos $t+i$ elementos em $[t+2i]$. A família ótima será dada a partir de um desses inteiros i, que será escolhido a partir dos valores de n, k e t.

O foco do nosso trabalho são problemas de coloração de famílias de conjuntos. Olharemos para o número de maneiras de colorirmos os elementos de uma família $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ de modo que uma certa propriedade seja satisfeita. Para isto, associaremos as famílias de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ a hipergrafos, bem como colorações de famílias de conjuntos a colorações de hipergrafos.

Problemas de coloração em Combinatória foram inicialmente estudados em grafos. Definimos um grafo $G = (V, E)$ como sendo um par ordenado, onde V é um conjunto finito chamado de conjunto de vértices do grafo, e $E \subseteq \binom{V}{2}$ é o conjunto de arestas do grafo. Quando $E = \binom{V}{2}$, dizemos que o grafo G é completo, e denotamos por $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$, o grafo completo com n vértices. Quando existem ℓ conjuntos disjuntos $V_1, \ldots, V_\ell \subseteq V$, tais que $\bigcup_{i=1}^{\ell} V_i = V$ e qualquer par de vértices dentro de um conjunto V_i não constitui uma aresta de G, dizemos que G é um grafo ℓ-partido. Se, além disso, todos os pares de vértices formados por vértices de conjuntos diferentes forem arestas de G, dizemos que G é um grafo ℓ-partido completo. Para grafos ℓ-partidos, chamaremos os conjuntos V_i de classes do grafo G. Um hipergrafo é a generalização de um grafo no conjunto de suas arestas, isto é, um hipergrafo $H = (V, E)$ é um par ordenado, onde $V = V(H)$ é seu conjunto de vértices, finito, e $E = E(H) \subseteq 2^V$ é seu conjunto de hiperarestas. Um hipergrafo $H = (V, E)$ é dito k-uniforme quando $E \subseteq \binom{V}{k}$, de forma que grafos são hipergrafos 2-uniformes. Podemos associar, portanto, uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $[n]$ ao hipergrafo $H = ([n], \mathcal{F})$. Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$, então o hipergrafo $H = ([n], \mathcal{F})$ é k-uniforme.

Um problema clássico em Teoria dos Grafos é o de encontrar o número máximo de arestas em um grafo com n vértices sem que um certo grafo F apareça como subgrafo. Turán [7] estudou este problema para $F = K_{k+1}$, isto é, dados números inteiros positivos n, k, ele perguntou qual é o maior número de arestas que um grafo com n vértices pode ter sem que apareça o grafo K_{k+1} como subgrafo, e qual é este grafo.

Uma maneira simples de evitar K_{k+1} como subgrafo é considerar $T_k(n)$, o grafo k-partido completo com n vértices, onde o número de vértices em cada classe é o mesmo, a menos de no máximo um elemento. Este grafo é conhecido como o grafo de Turán [7]. Seja, ainda, $t_k(n) = |E(T_k(n))|$.

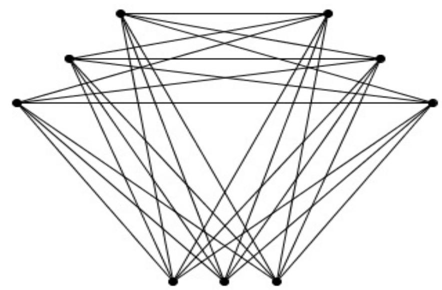

Figura 1.2: O grafo de Turán $T_3(9)$.

Turán demonstrou que, a partir de uma certa quantidade de vértices, $T_k(n)$ é o grafo que possui o maior número de arestas e não possui K_{k+1} como subgrafo.

Teorema 1.1 (Teorema de Turán [7])**.** *Dado um número inteiro positivo k, existe $n(k) > 0$ tal que se $n > n(k)$, então $T_k(n)$ é o grafo que possui o maior número de arestas e não possui K_{k+1} como subgrafo.*

Erdős e Rothschild [8] perguntaram se a resposta seria alterada se acrescentássemos cores ao Teorema 1.1, isto é, eles perguntaram qual é o número máximo de r-colorações de G que são livres de F, que são colorações das arestas do grafo G, com r cores, sem que apareça uma cópia monocromática do grafo F como subgrafo de G. Por exemplo, se há apenas uma cor disponível, os únicos grafos que admitem colorações livres de F são aqueles que não contêm F como subgrafo. Além disso, Erdős e Rothschild perguntaram qual é o grafo (ou família de grafos) que atinge este número máximo. Eles conjecturaram que o grafo $T_k(n)$ é o grafo com n vértices que possui o maior número de 2-colorações livres de K_{k+1}, de modo que teremos no máximo $2^{t_k(n)}$ colorações deste tipo. Erdős e Rothschild também perguntaram o que ocorreria no caso quando o número de cores é $r \geq 3$. É natural perguntar se $T_k(n)$ é o grafo que atinge o maior número de r-colorações livre de K_{k+1}, pois nele podemos colorir livremente as arestas de $T_k(n)$ com r cores, de modo que o número de colorações é dado por $r^{t_k(n)}$. Yuster [9] resolveu o problema para K_3 e $r = 2$, demonstrando a Conjectura de Erdős e Rothschild para K_3. Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [10] trataram desse problema para K_{k+1}, $(k \geq 2)$ e $r \geq 2$. Para $r \in \{2, 3\}$, demonstraram que $T_k(n)$ é o grafo com n vértices que atinge o número máximo de r-colorações livre de K_{k+1}. Além disso, provaram que, para $r \geq 4$, $T_k(n)$ está longe de ser o grafo ótimo.

Por exemplo, se $r = 4$ e $F = K_3$, o grafo $T_2(n)$ possui no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas, que podem ser coloridas livremente e, portanto, admite no máximo $4^{\frac{n^2}{4}}$ 4-colorações livre de K_3. Por outro lado, $T_4(n)$, possui quatro classes de vértices T_1, T_2, T_3, T_4. Considere $P = \{a, b, c, d\}$ como sendo o conjuntos das cores, e $P_1 = \{a, b, c\}, P_2 = \{b, c, d\}, P_3 = \{a, d\}$, subconjuntos de P. Considere as seguintes colorações. As arestas que vão de T_1 a T_2 e de T_3 a T_4 recebem cores de P_1, as arestas que vão de T_1 a T_3 e de T_2 a T_4 recebem cores de P_2, e as arestas que vão de T_1 a T_4 e de T_2 a T_3 recebem cores de P_3. Temos $\left(3^{\frac{n^2}{16}}\right)^4 \left(2^{\frac{n^2}{16}}\right)^2 > 4^{\frac{n^2}{4}}$ colorações deste tipo. Portanto, o número de 4-colorações livres de K_3 em $T_4(n)$ é maior do que o de $T_2(n)$ por um fator multiplicativo de c^{n^2}, onde $c > 1$. Note que é impossível que apareçam triângulos monocromáticos nestas colorações, já que $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$. A Figura 1.3 ilustra essas colorações.

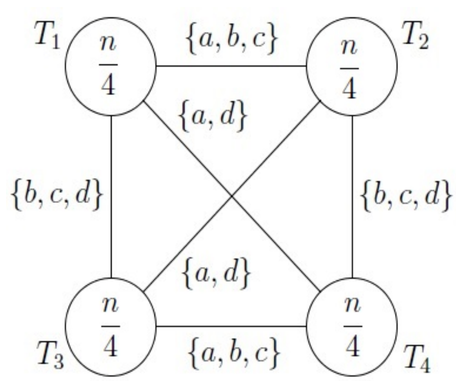

Figura 1.3: Colorações de $T_4(n)$.

Para $r \geq 4$, Pikhurko e Yilma [11] determinaram quais são as famílias de grafos com n vértices que atingem o maior número de colorações com quatro cores evitando F monocromático como subgrafo quando $F = K_3$ e $F = K_4$. Em particular, demonstraram que o grafo $T_4(n)$ é ótimo para $r = 4$ e $F = K_3$. Para os demais valores de r e F, este problema ainda não foi resolvido.

Da mesma maneira, podemos acrescentar colorações ao problema de famílias t-intersectantes, perguntando qual é o hipergrafo (ou família de hipergrafos) k-uniforme com n vértices que admite o maior número de colorações, utilizando até q cores, onde hiperarestas de mesma cor têm intersecção de tamanho pelo menos t.

Neste trabalho, apresentamos a demonstração de um teorema, feita por Hoppen, Kohayakawa e Lefmann [1], que informa precisamente quais são os hipergrafos ótimos quando $q \in \{2, 3, 4\}$ e quando $q \geq 5$ e $k \geq 2t - 1$. Quando $q \geq 5$ e $k < 2t - 1$ o teorema afirma condições que um hipergrafo ótimo deve satisfazer. Eles propuseram uma conjectura que sugere, ainda, outras propriedades que um hipergrafo ótimo deve satisfazer neste último caso. Neste trabalho, demonstramos uma parte desta conjectura, encontrando quais são os hipergrafos ótimos quando $q \in \{5, 6\}$ e $k < 2t - 1$, e restringindo ainda mais a família de hipergrafos candidatos a ótimo quando $q \geq 7$.

1.1 Resultados fundamentais e organização do trabalho

A discussão sobre a maior família intersectande de k-subconjuntos de $[n]$ levou ao seguinte teorema, demonstrado por Erdős, Ko e Rado em [12]. No Capítulo 2, apresentaremos três demonostrações desse resultado.

Teorema 1.2 (Erdős-Ko-Rado). *Sejam n, k números inteiros positivos com $n \geq 2k$. Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é intersectante, então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

No Teorema 1.2, quando $n = 2k$, temos que existem muitas famílias intersectantes diferentes que atingem a quantidade máxima de conjuntos. De fato, para cada k-conjunto F de $[n]$, podemos escolher F ou $[n] \setminus F$ para pertencer à família, de modo que seu tamanho máximo será

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2} = \frac{(2k)!}{2(k!k!)} = \frac{2k(2k-1)!}{2k(k-1!)k!} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

Quando $n > 2k$, a única família que atinge o número máximo de conjuntos, a menos de isomorfismos, é a família estrela.

Agora que sabemos que a estrela é a maior família intersectante, seria natural questionar sobre qual é a maior família intersectante que não é uma estrela, isto é, se exigirmos que a família seja intersectante e, além disso, que a intersecção entre todos os elementos da família seja vazia, será que a família ótima seria próxima de uma estrela? Será que seu tamanho seria próximo ao tamanho de uma família estrela? O Capítulo 3 desta dissertação trata justamente disso. Hilton e Milner em [2] responderam a estas perguntas com o seguinte teorema.

Teorema 1.3 (Hilton-Milner). *Se $2k < n$ e $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família intersectante tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$. A igualdade vale se e somente se $\mathcal{F} \simeq \{F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F, \{2, \ldots, k+1\} \cap F \neq \emptyset\} \cup \{\{2, \ldots, k+1\}\}$.*

O Teorema 1.3 informa que a família ótima que não é uma estrela é próxima à família estrela, porém seu tamanho não é assintoticamente próximo ao tamanho da família estrela. De fato, para k fixo, $\binom{n-1}{k-1}$ é um polinômio em n com termo de maior grau igual a $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$, enquanto que $\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$ é um polinômio de grau $k-2$ em n. A estratégia para construir a família intersectante que não é uma estrela com maior número de conjuntos é simplesmente começar pela família estrela, na qual todos os conjuntos contêm, sem perda de generalidade, o elemento 1, acrescentar o conjunto $[k+1] \setminus [1] = \{2, \ldots, k+1\}$ à família, para garantir que a intersecção entre todos os elementos da família seja vazia, e depois disso remover os $\binom{n-k-1}{k-1}$ conjuntos que possuem o 1 e não possuem intersecção com $\{2, \dots, k+1\}$.

Uma extensão natural do problema de encontrar famílias intersectantes máximas é tratar de famílias t-intersectantes.

Considere $I(n, k, t)$ como sendo a classe das famílias t-intersectantes de k-subconjuntos de $[n]$. Seja $M(n, k, t) = \max_{\mathcal{F} \in I(n,k,t)} |\mathcal{F}|$, para $1 \leq t \leq k \leq n$. Como dito anteriormente, Wilson [3] demonstrou que a estrela é a maior família t-intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ quando $n \geq (t+1)(k-t+1)$.

Teorema 1.4 (Wilson)**.** *Seja $n \geq (t+1)(k-t+1)$. Então temos que $M(n, k, t) \leq \binom{n-t}{k-t}$. Se $n > (t+1)(k-t+1)$ e $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família t-intersectante que satisfaz $|\mathcal{F}| = \binom{n-t}{k-t}$, então $\mathcal{F}$ contém todos os subconjuntos de $[n]$ de tamanho k que contêm um conjunto fixo de tamanho t.*

Não apresentarei a demonstração deste teorema dada por Wilson nesta dissertação, pois sua demonstração é por um argumento de Álgebra Linear pouco construtivo e, além disso, todos os casos foram respondidos por Ahlswede e Khachatrian [6], através do próximo teorema, cuja demonstração será apresentada no Capítulo 5.

Definição 1.5. *Para números inteiros positivos n, k, t tais que $1 \leq t \leq k \leq n$ e um número inteiro positivo i, definimos a família*

$$\mathcal{F}_i(n, k, t) = \left\{ F \in \binom{[n]}{k} : |F \cap [t+2i]| \geq t+i \right\}.$$

Temos que $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(n, k, t)$ é uma família t-intersectante, pois, dados $i \in \mathbb{N}$ e $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_i$, temos que $t + 2i \geq |(F_1 \cap [t+2i]) \cup (F_2 \cap [t+2i])| = |F_1 \cap [t+2i]| + |F_2 \cap [t+2i]| - |F_1 \cap F_2 \cap [t+2i]| \geq 2(t+i) - |F_1 \cap F_2 \cap [t+2i]|$ e isto implica que $|F_1 \cap F_2 \cap [t+2i]| \geq t$, portanto $|F_1 \cap F_2| \geq t$.

Note que podemos facilmente calcular que

$$|\mathcal{F}_i(n,k,t)| = \sum_{\ell=0}^{i} \binom{t+2i}{t+i+\ell}\binom{n-(t+2i)}{k-(t+i+\ell)},$$

onde ℓ é a quantidade de elementos que um conjunto possui em $[t+2i]$ além dos $t+i$ necessários para pertencer a $\mathcal{F}_i(n,k,t)$.

Teorema 1.6 (Ahlswede - Khachatrian)**.** *Para $1 \leq t \leq k \leq n$, valem as seguintes afirmações.*

(i) *Se $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) < n < (k-t+1)(2+\frac{t-1}{r})$ para algum $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $M(n,k,t) = |\mathcal{F}_r|$. Além disso, a família $\mathcal{F}_r$ é, a menos de isomorfismos, a única família ótima. (Por convenção, $\frac{1}{0} = \infty$).*

(ii) *Se $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) = n$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $M(n,k,t) = |\mathcal{F}_r| = |\mathcal{F}_{r+1}|$, e as famílias ótimas, a menos de isomorfismos, são $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_{r+1}$.*

Note que $r = 0$ é o caso no qual temos $n > (t+1)(k-t+1)$ e o Teorema 1.6 diz que a maior família t-intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ é $\mathcal{F}_0$, a família de todos os conjuntos de $\binom{[n]}{k}$ que contêm o conjunto $[t]$. Esta família possui tamanho $\binom{n-t}{k-t}$. Note também que $t = 1$ implica $n > 2k$ na condição $n > (t+1)(k-t+1)$.

Uma (q,t)-coloração de um hipergrafo H é uma função que associa cada elemento de $E(H)$ a uma cor em $[q]$, onde dois elementos de mesma cor possuem intersecção de tamanho pelo menos t. Seja $\kappa(H,q,t)$ o número de (q,t)-colorações do hipergrafo H. Seja $\mathrm{KC}(n,k,q,t)$ o número máximo de (q,t)-colorações de um hipergrafo k-uniforme com n vértices, isto é,

$$\mathrm{KC}(n,k,q,t) = \max_{H \in \mathcal{H}_{n,k}} \kappa(H,q,t),$$

onde $\mathcal{H}_{n,k}$ é a família de todos os hipergrafos k-uniformes com n vértices.

Para facilitar a notação, utilizaremos $V = [n]$ e, para um dado i inteiro positivo que satisfaz as condições enunciadas no Teorema 1.6, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(n, k, t)$ conforme a Definição 1.5.

Uma sugestão intuitiva para encontrar o hipergrafo k-uniforme com n vértices que possui o maior número de (q, t)-colorações seria escolher o hipergrafo $H = ([n], E)$ tal que E é uma família de conjuntos t-intersectante, pois neste hipergrafo quaisquer duas hiperarestas possuem intersecção de tamanho pelo menos t, de modo que podemos colorir livremente todas as hiperarestas do hipergrafo e $\kappa(H, q, t) = q^{|E|}$. Como vimos anteriormente, a maior família t-intersectante E que podemos pegar foi dada por Ahlswede e Khachatrian [6]. A discussão sobre (q, t)-colorações foi tratada por Hoppen, Kohayakawa e Lefmann [1], que demonstraram os próximos teoremas.

Teorema 1.7. [1] *Se $n \geq k > t$ e r são números inteiros positivos, onde r satisfaz as mesmas condições enunciadas no Teorema 1.6, então*

$$\mathrm{KC}(n, k, 2, t) = 2^{|\mathcal{F}_r|}.$$

Além disso, todo hipergrafo k-uniforme H de $[n]$ tal que $E(H) \simeq \mathcal{F}_r$ satisfaz

$$\kappa(H, 2, t) = \mathrm{KC}(n, k, 2, t)$$

e, a menos de $t = 1$ e $n = 2k$, estes são os únicos hipergrafos que atingem igualdade.

Teorema 1.8. [1] *Para quaisquer números inteiros positivos k e t, existe $n_0 > 0$ tal que, para $n > n_0$ vale que*

$$\mathrm{KC}(n, k, 3, t) = 3^{|\mathcal{F}_0|}$$

Além disso, qualquer hipergrafo que atinge igualdade é isomorfo ao hipergrafo $H = ([n], \mathcal{F}_0)$.

Assim como ocorreu no caso de grafos, o hipergrafo que atinge o maior número de (q, t)-colorações não é sempre o que possui a maior família t-intersectante de conjuntos como conjunto de hiperarestas. Apenas para $q = 2$ e para $q = 3$, no caso em que n é suficientemente grande, é que o hipergrafo que atinge o maior número de (q,t)-colorações é aquele cujo conjunto de hiperarestas é a maior família t-intersectante de conjuntos de $\binom{[n]}{k}$.

Definição 1.9. *Para números inteiros $q, k \geq 2$, $1 \leq t < k$, $c \geq 1$ e $n \geq \max\{k, ct\}$, seja C um conjunto de cardinalidade c, onde os elementos são t-subconjuntos de $[n]$. O* hipergrafo (C,k)-completo *$H_{C,k}(n)$ possui seu conjunto de vértices $[n]$ e suas hiperarestas são todos os k-subconjuntos de $[n]$ que contém algum elemento de C como subconjunto. Ainda, se $c = c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$ e os conjuntos de C são mutuamente disjuntos, então $H_{C,k}(n)$ é denotado por $H_{n,k,q,t}$.*

O motivo de considerarmos o número $c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$ vem de um problema de otimização que enunciamos no Capítulo 6 (Veja Lema 6.2).

Definição 1.10. *Para números inteiros positivos $n, k, q \geq 2$, $1 \leq t < k$, definimos a família $\mathcal{H}_{k,q,t}(n)$, de* hipergrafos candidatos*, como sendo a família de todos os hipergrafos H, k-uniformes com n vértices tais que*

(a) Se $q \in \{2,3\}$ ou se $q \geq 5$ e $k \geq 2t-1$, então H é isomorfo a $H_{n,k,q,t}$.

(b) Se $q = 4$, então H é $H_{C,k}(n)$ para $C = \{t_1, t_2\}$ com $|t_1 \cap t_2| = t-1$, onde $t_1, t_2 \in \binom{[n]}{t}$.

(c) Se $q \geq 5$ e $k < 2t-1$, então H é $H_{C,k}(n)$, para $C = \{t_1, t_2, \ldots, t_{c(q)}\}$, cada t_i pertence a $\binom{[n]}{t}$ e $|t_i \cup t_j| > k$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq c(q)$.

Teorema 1.11. [1] *Dados números inteiros positivos k, q e t, existe $n_0 > 0$ tal que para $n > n_0$, se $\kappa(H,q,t) = \mathrm{KC}(n,k,q,t)$, então $H \in \mathcal{H}_{k,q,t}(n)$.*

Apresentaremos uma demonstração dos Teoremas 1.7, 1.8 e 1.11 no Capítulo 6 desta dissertação. Note que o Teorema 1.11 informa exatamente quais são os hipergrafos que atingem o número máximo de (q,t)-colorações nos casos (a) e (b), contudo não nos informa exatamente qual é o hipergrafo que atinge o maior número de (q,t)-colorações no caso (c), quando $q \geq 5$ e $k < 2t-1$, pois muitas coberturas de hipergrafos podem satisfazer as propriedades do item (c) na Definição 1.10. Na Figura 1.4, mostramos dois exemplos de coberturas que satisfazem as condições do item (c) na Definição 1.10, quando $k=5$ e $t=4$.

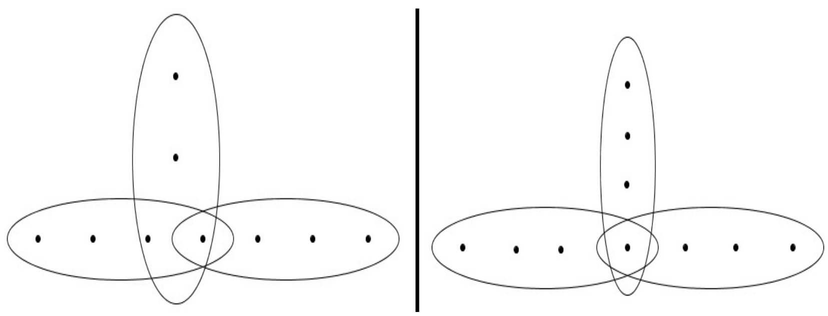

Figura 1.4: Configurações de coberturas que satisfazem o item (c) da Definição 1.10.

Apesar de não terem resolvido o problema nesses casos, os autores de [1] propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 1.12. *Se $q \geq 5$, k e t são números inteiros positivos com $t < k < 2t-1$, então existe um $n_0 > 0$, tal que, para $n > n_0$, um hipergrafo $H = H_{C,k}(n)$ que satisfaz*

$$\kappa(H,q,t) = \mathrm{KC}(n,k,q,t)$$

deve satisfazer $|C| = c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$ e $|t_i \cap t_j| = 2t-k-1$ para quaisquer $t_i, t_j \in C$ distintos.

Esta conjectura alega que o hipergrafo com maior número de (q,t)-colorações é um dos que satisfaz a seguinte propriedade: quaisquer dois conjuntos de C devem possuir a maior intersecção possível sem que uma hiperaresta do hipergrafo possa conter dois dos seus elementos. Contudo, mesmo que a conjectura seja verdadeira, ainda existem diferentes configurações para conjuntos C com essa propriedade, portanto continuaremos sem saber exatamente qual é o hipergrafo que atinge o maior número de (q,t)-colorações. Na Figura 1.5, representamos duas configurações distintas de cobertura, quando $t = 3$ e $k = 4$, que satisfazem a propriedade de que o tamanho da intersecção entre quaisquer dois conjuntos da cobertura igual a $2t - k - 1 = 1$.

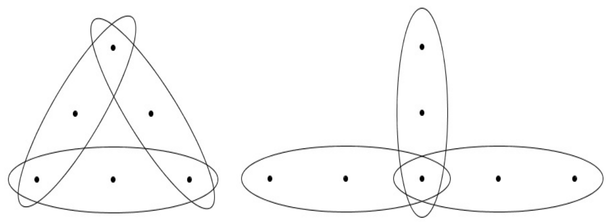

Figura 1.5: Configurações de coberturas com mesma intersecção dois a dois.

A primeira das demonstrações do Teorema 1.2, no Capítulo 2, utiliza uma técnica chamada de substituição para famílias de conjuntos. Esta técnica consiste em considerar um operador que substitui, em cada conjunto de uma família de conjuntos, um elemento j por outro elemento i, desde que isto não altere o tamanho do conjunto, nem o tamanho da família, e nem a propriedade de a família ser intersectante. Com isto, podemos partir de uma família de conjuntos qualquer e, através da operação de substituição, chegar à família estrela. Esta técnica de substituição também foi útil para demonstrar o Teorema 1.3. No Capítulo 4 desta dissertação, adaptamos essa técnica de substituição para demonstrar a Conjectura 1.12 quando $q \leq 6$, e descartar alguns hipergrafos candidatos quando $q \geq 7$. Foi possível utilizar a operação de substituição para controlar o tamanho da intersecção entre os elementos da cobertura. Com isto, conseguimos mostrar que o número de (q,t)-colorações de um hipergrafo aumenta a cada passo da substituição, enquanto esta intersecção não fica grande a ponto de uma hiperaresta poder conter dois elementos da cobertura.

2 TEOREMA DE ERDŐS-KO-RADO

Uma família de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$, para $n \geq k \geq 1$, é dita *intersectante*, se quaisquer dois conjuntos de $\mathcal{F}$ possuem intersecção não vazia.

Este capítulo tem como foco a apresentação de três demonstrações do Teorema 1.2, que afirma que toda família intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ possui tamanho no máximo $\binom{n-1}{k-1}$. As demonstração neste capítulo foram todas baseadas em [12].

Teorema 1.2 (Erdős-Ko-Rado)**.** *Sejam n, k números inteiros positivos com $n \geq 2k$. Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é intersectante, então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

A primeira das demonstrações, em [4], utiliza uma técnica chamada de substituição, encontrada em [13], que consiste em construir um operador que transforma uma família intersectante arbitrária $\mathcal{F}$ em uma outra mais organizada, sem que esta perca sua cardinalidade e a propriedade de ser intersectante. O teorema será então mostrado para esta família organizada. A segunda demonstração utiliza uma técnica chamada de *sombras*, que consiste em olhar para todos os subconjuntos de tamanho $\ell < k$ de cada conjunto da família intersectante $\mathcal{F}$. A terceira demonstração, dada por Katona em [14], consiste em apresentar duas maneiras diferentes de realizar a mesma contagem utilizando permutações cíclicas.

2.1 Demonstração do Teorema de Erdős-Ko-Rado por substituição

A demonstração apresentada aqui é a original, feita por Erdős, Ko e Rado [12].

Definição 2.1. *Para* $1 \leq i < j \leq n$ *e* $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ *definimos a função substituição para a família de conjuntos* $\mathcal{F}$ *como sendo* $S_{ij}(\mathcal{F}) = \{S_{ij}(F) : F \in \mathcal{F}\}$, *onde*

$$S_{ij}(F) = \begin{cases} (F \setminus \{j\}) \cup \{i\} = F', & \text{se } j \in F, i \notin F, F' \notin \mathcal{F} \\ F, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.1}$$

A ideia dessa função é substituir o elemento j pelo elemento i em cada um dos conjuntos da família sempre que isto não alterar as cardinalidades do conjunto e da família.

Proposição 2.2. *Sejam* $F \in \mathcal{F}$, $i, j \in [n]$. *Temos que:*

(I) $|S_{ij}(F)| = |F|$.

(II) $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$.

(III) $\mathcal{F}$ *intersectante* $\Rightarrow S_{ij}(\mathcal{F})$ *intersectante.*

Demonstração. Os itens (I) e (II) seguem diretamente da definição. Note que, na demonstração de (II), é fundamental a condição de que $F' \notin \mathcal{F}$ para que a substituição seja feita.

A demonstração de (III) é por absurdo. Suponhamos que existam conjuntos F, G na família $\mathcal{F}$ intersectante tais que $S_{ij}(F) \cap S_{ij}(G) = \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é intersectante temos que $F \cap G \neq \emptyset$ e portanto não podemos ter $S_{ij}(F) = F$ e $S_{ij}(G) = G$. Por outro lado, não podemos ter $S_{ij}(F) = F'$ e $S_{ij}(G) = G'$, pois, neste caso, teríamos $i \in S_{ij}(F) \cap S_{ij}(G)$ contradizendo a hipótese de que essa intersecção é vazia. Logo, temos que exatamente um dos conjuntos foi modificado. Sem perda de generalidade, vamos supor que $S_{ij}(F) = F$ e $S_{ij}(G) = G'$. Estamos supondo por absurdo que $S_{ij}(F) \cap S_{ij}(G) = \emptyset$, isto é $F \cap G' = \emptyset$, e como $F \cap G \neq \emptyset$, temos que $F \cap G = \{j\}$ (j é o único candidato a estar na intersecção, pois é o único elemento que foi retirado de G na construção de G').

Sabemos que i não pode pertencer a F, pois i pertence a G' e, neste caso, teríamos $F \cap G' = \{i\}$, contradizendo a hipótese de que esta intersecção é vazia. Logo F contém j, não contém i e $S_{ij}(F) = F$. Pela definição de S_{ij} temos que $F' \in \mathcal{F}$. Porém, temos que $F \cap G = \{j\}$ e i não pertence a G, já que foi possível fazer a troca de G por G'. Isso implica que $F' \cap G = \emptyset$. Com isto concluímos que $\mathcal{F}$ não é intersectante, o que é um absurdo. $\square$

Com base nessa proposição, podemos demonstrar o Teorema de Erdős-Ko-Rado.

Demonstração. Pela hipótese do teorema temos $n \geq 2k$. Mostraremos primeiro o caso em que $n = 2k$, e a seguir o caso em que $n \geq 2k$, onde utilizaremos que o primeiro caso é verdadeiro.

Para o caso $n = 2k$ temos que $F \in \mathcal{F} \subseteq \binom{[2k]}{k}$. Podemos dividir os $\binom{2k}{k}$ conjuntos em dois grupos: para cada F consideramos o conjunto $[2k] \setminus F$ (o complementar de F em $[2k]$, que também tem tamanho k). Temos que $F \in \mathcal{F} \Rightarrow ([2k] \setminus F) \notin \mathcal{F}$, pois $([2k] \setminus F) \cap F = \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é intersectante, no máximo metade dos $\binom{2k}{k}$ conjuntos pertencem a $\mathcal{F}$, portanto $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$, como queríamos.

Para o caso $n \geq 2k$, aplicamos indução em n. Começamos com a base de indução $n = 2$, que implica $k = 1$, de forma que o resultado é válido pelo item (a). Suponhamos agora que $n > 2k$ e sejam $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i = S_{in}(\mathcal{F}_{i-1})$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. A idéia é simplesmente eliminar n de $\mathcal{F}$, substituindo-o por algum outro elemento i em todos os conjuntos em que isso é possível.

Pela Proposição 2.2, temos que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_{n-1}|$, e como $\mathcal{F}$ é intersectante, então $\mathcal{F}_{n-1}$ é também intersectante.

Sejam $\mathcal{G} = \{F \in \mathcal{F}_{n-1} : n \notin F\}$, e $\mathcal{H} = \{F \setminus \{n\} : n \in F \in \mathcal{F}_{n-1}\}$. Temos que $\mathcal{G}$ é obviamente intersectante, pois $\mathcal{F}_{n-1}$ é intersectante e $\mathcal{G}$ é uma subfamília de $\mathcal{F}_{n-1}$. Na demonstração, usaremos ainda que $\mathcal{H}$ é intersectante, porém este fato será mostrado somente no final da demonstração.

Note que $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n-1]}{k}$, $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n-1]}{k-1}$ e cada uma destas famílias satisfaz as hipóteses do teorema, já que, para a família $\mathcal{H}$, $n > 2k \Rightarrow n-1 > 2(k-1)$, e, para a família $\mathcal{G}$, $n > 2k \Rightarrow n-1 \geq 2k$, e o caso $n-1 = 2k$ foi tratado no primeiro caso. Então aplicamos a hipótese de indução para estas famílias $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ e obtemos, respectivamente, $|\mathcal{G}| \leq \binom{n-2}{k-1}$ e $|\mathcal{H}| \leq \binom{n-2}{k-2}$. Obviamente temos que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}| + |\mathcal{H}|$. Portanto $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$ e pela identidade de Pascal temos que $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$, como queríamos demonstrar.

Para concluir a demonstração, veremos que $\mathcal{H}$ é intersectante. Supondo por absurdo que não seja, temos que existem H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$ tais que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Logo $|H_1 \cup H_2| = 2(k-1)$. Porém como $n-1 > 2(k-1)$, temos $|H_1 \cup H_2| < n-1$ e, como os conjuntos de $\mathcal{H}$ são subconjuntos de $[n-1]$, temos que existe um elemento $i \in [n-1]$ que não pertence a $H_1 \cup H_2$. Por definição, $F = H_1 \cup \{n\}$ pertence a $\mathcal{F}_{n-1}$ e consequentemente $F \in \mathcal{F}_j$ para todo $1 \leq j \leq n-1$. Em particular, temos que $S_{in}(F) = F \in \mathcal{F}_{i-1}$. Como $i \notin F$, então o único motivo para a substituição não ter sido feita é que $(F \setminus \{n\}) \cup \{i\}$ já pertencia à família $\mathcal{F}_{i-1}$, porém $(F \setminus \{n\}) \cup \{i\} = H_1 \cup \{i\}$ e logo $H_1 \cup \{i\} \in \mathcal{F}_{i-1}$, mas $\mathcal{F}_{i-1}$ é intersectante e $(H_1 \cup \{i\}) \cap (H_2 \cup \{n\}) = \emptyset$, uma contradição. $\square$

2.2 Demonstração do Teorema de Erdős-Ko-Rado por sombras

Esta demonstração, encontrada em [15], consiste em olhar para todos os subconjuntos de tamanho $\ell \leq k$ de cada conjunto da família intersectante $\mathcal{F}$.

Seja $\sigma_\ell(\mathcal{F}) = \{G : |G| = \ell$, e para algum $F \in \mathcal{F}$, $G \subseteq F\}$. Dizemos que $\sigma_\ell(\mathcal{F})$ é a ℓ-sombra de $\mathcal{F}$. Para obtermos uma cota superior para cardinalidade de $\sigma_\ell(\mathcal{F})$, podemos considerar todos os subconjuntos de tamanho ℓ de cada conjunto de tamanho k de $\mathcal{F}$, isto é, $|\sigma_\ell(\mathcal{F})| \leq \binom{k}{\ell}|\mathcal{F}|$. A igualdade vale se, e somente se, $|F \cap F'| < \ell$ para quaisquer $F, F' \in \mathcal{F}$. De fato, se $|F \cap F'| \geq \ell$, temos que um subconjunto de F, que também é subconjunto de F', é contado mais de uma vez.

Proposição 2.3. *Seja $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ uma família intersectante e suponhamos que $1 \leq i < j \leq n$. Então*

(I) $\sigma_{k-1}(S_{ij}(\mathcal{F})) \subseteq S_{ij}(\sigma_{k-1}(\mathcal{F}))$.

(II) Para $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i = S_{1i}(\mathcal{F}_{i-1})$, $2 \leq i \leq n$, temos que $|\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n)| \leq |\sigma_{k-1}(\mathcal{F})|$.

A demonstração desta proposição será omitida, pois o item (I) é um resultado imediato da definição de ℓ-sombra, e o item (II) segue diretamente da Proposição 2.2. Sejam $\mathcal{F}_n(1) = \{F \setminus \{1\} : 1 \in F \in \mathcal{F}\}$ e $\mathcal{F}_n(\bar{1}) = \{F \in \mathcal{F}_n : 1 \notin F\}$.

Lema 2.4. *A partir das definições acima, vale que:*

(I) $|\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n)| \geq |\mathcal{F}_n(1)| + |\sigma_{k-2}(\mathcal{F}_n(1))|$.

(II) $\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1})) \subseteq \mathcal{F}_n(1)$.

Demonstração. Para o item (I), se $F \in \mathcal{F}_n$ e $1 \in F$, então $F \setminus \{1\} \in \sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n)$. Logo $\mathcal{F}_n(1) \subseteq \sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n)$. Pelo mesmo motivo, temos que $\{\{1\} \cup G : G \in \sigma_{k-2}(\mathcal{F}_n(1))\} \subseteq \sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n)$. Como todo conjunto de $\mathcal{F}_n(1)$ não contém o elemento 1 e todo conjunto de $\{\{1\} \cup G : G \in \sigma_{k-2}(\mathcal{F}_n(1))\}$ contém 1, então estas duas famílias são disjuntas. Porém, obviamente $|\{\{1\} \cup G : G \in \sigma_{k-2}(\mathcal{F}_n(1))\}| = |\sigma_{k-2}(\mathcal{F}_n(1))|$ e, portanto, está demonstrado que o item (I) vale.

Para demonstrarmos o item (II), sejam G e H conjuntos tais que $H \in \mathcal{F}_n(\bar{1})$, $G \subseteq H$ e $|G| = k-1$. Assim, temos que $G \in \sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1}))$. Seja $i \in H \setminus G$. Como $H \in \mathcal{F}_n$, temos que $S_{1i}(H) = H$, e o único motivo para isto ter ocorrido é $(H \setminus \{i\}) \cup \{1\}$ já pertencia à família, isto é, $H' = G \cup \{1\} \in \mathcal{F}_{i-1}$. Portanto $H' \in \mathcal{F}_n$, e como $H' \setminus \{1\} = G$ temos que $G \in \mathcal{F}_n(1)$. Logo (II) vale. □

Teorema 2.5 (Kruskal-Katona). *Sejam n, k números inteiros positivos e $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ tal que $|\mathcal{F}| \geq \binom{x}{k}$ para um certo número inteiro $x \geq k$. Então $|\sigma_\ell(\mathcal{F})| \geq \binom{x}{\ell}$, para todo $0 \leq \ell \leq k$.*

Esse resultado reflete a intuição de que a pior maneira de formar sombras é economizando ao máximo a quantidade de elementos de $[n]$ utilizados em conjuntos de $\mathcal{F}$. Portanto, se formarmos os subconjuntos de tamanho k, todos como subconjuntos de um subconjunto de $[n]$ com x elementos (não usando os outros $n - x$ elementos), criaremos o menor número de sombras possível, formando então $\binom{x}{k}$ conjuntos (o mínimo que o teorema permite) e teremos pelo menos $\binom{x}{\ell}$ sombras (subconjuntos de ℓ elementos).

Demonstração. Para demonstrar o teorema basta considerar o caso $\ell = k-1$, pois obviamente $\sigma_{k-2}(\mathcal{F}) = \sigma_{k-2}(\sigma_{k-1}(\mathcal{F}))$, e se o teorema vale para $\ell = k-1$, então basta aplicar o teorema novamente nesse caso especial para demonstrá-lo para $\ell = k-2$, e assim sucessivamente.

A demonstração é por indução em k. Para $k = 1$ é fácil ver que o teorema vale. Supondo que vale para $k-1$, mostramos que vale para k usando indução em $|\mathcal{F}|$ da segunda forma. Para $|\mathcal{F}| = 1$ também é fácil ver que o teorema vale.

Temos que é absurdo termos $|\mathcal{F}_n(1)| < \binom{x-1}{k-1}$, pois se fosse verdade teríamos, junto com a hipótese do teorema, que $\binom{x}{k} \leq |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_n| = |\mathcal{F}_n(1)| + |\mathcal{F}_n(\bar{1})| < \binom{x-1}{k-1} + |\mathcal{F}_n(\bar{1})|$, e isto implica que $|\mathcal{F}_n(\bar{1})| > \binom{x}{k} - \binom{x-1}{k-1} = \binom{x-1}{k}$, que implica em $|\mathcal{F}_n(\bar{1})| \geq 1$. Logo existe um conjunto C de tamanho k que pertence a $\mathcal{F}_n(\bar{1})$, portanto, para cada elemento z de C, existe um conjunto de tamanho $k-1$ que não contém z, isto é, $|\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1}))| \geq k$, e pelo item (II) do Lema 2.4 temos que $|\mathcal{F}_n(\bar{1})| \geq k$. Logo existem pelo menos k conjuntos com k elementos, logo x tem que ser pelo menos $k+1$ para formar k conjuntos, então $x \geq k+1 \Rightarrow x-1 \geq k$. Pelo item (II) do Lema 2.4 temos que $|\mathcal{F}_n(1)| \geq |\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1}))|$, e pela hipótese da segunda indução temos que $|\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1}))| \geq \binom{x-1}{k-1}$, de modo que $|\mathcal{F}_n(1)| \geq \binom{x-1}{k-1}$, o que é um absurdo.

Sabendo que $|\mathcal{F}_n(1)| \geq \binom{x-1}{k-1}$ aplicamos como hipótese de indução o teorema para $x-1$ no lugar de x, para $k-1$ no lugar de ℓ e observando que $|\mathcal{F}| > |\mathcal{F}_n(\bar{1})| \geq \binom{x-1}{k-1}$. Assim temos $|\sigma_{k-1}(\mathcal{F}_n(\bar{1}))| \geq \binom{x-1}{k-1} \Rightarrow |\sigma_{k-1}(\mathcal{F})| \geq \binom{x-1}{k-1}$. □

Demonstração do Teorema 1.2. Supondo por absurdo que o Teorema 1.2 não vale, temos que $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família de conjuntos intersectante, com $n \geq 2k$, que satisfaz $|\mathcal{F}| > \binom{n-1}{k-1}$.

Seja $\mathcal{G} = \{[n] \setminus F : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \binom{[n]}{n-k}$. Note que $[n] \setminus F$ são conjuntos com $n-k$ elementos. Pelo Teorema de Kruskal-Katona temos que $|\sigma_k(\mathcal{G})| \geq \binom{n-1}{k}$ e, olhando para $|\mathcal{F}| + |\sigma_k(\mathcal{G})|$, temos que $|\mathcal{F}| + |\sigma_k(\mathcal{G})| > \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \Rightarrow |\mathcal{F}| + |\sigma_k(\mathcal{G})| > \binom{n}{k}$. Porém $\binom{n}{k}$ é o número máximo de conjuntos com k elementos que podemos formar a partir de um conjunto com n elementos. Como a soma foi maior do que $\binom{n}{k}$, temos que as duas famílias não podem ser disjuntas. Logo existe $F \in (\mathcal{F} \cap \sigma_k(\mathcal{G}))$ e pela definição de $\mathcal{G}$, existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq [n] \setminus F'$, isso implica que $F \cap F' = \emptyset$ e portanto $\mathcal{F}$ não é intersectante, o que é um absurdo. □

2.3 Demonstração do Teorema de Erdős-Ko-Rado por permutações cíclicas

Esta demonstração foi dada por Katona [14] e consiste em apresentar duas maneiras diferentes de realizar a mesma contagem utilizando permutações cíclicas.

Seja $\pi : a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma permutação cíclica de comprimento n. Seja também $\mathcal{F}(\pi)$ a família dos n blocos de comprimento k do ciclo π (para cada i existe um bloco de π que começa em a_i). Como um exemplo, considere a permutação cíclica $\pi : 2, 6, 3, 1, 5, 4$, de tamanho $n = 6$ de modo que, para $k = 3$, temos que $\mathcal{F}(\pi) = \{\{2, 6, 3\}, \{6, 3, 1\}, \{3, 1, 5\}, \{1, 5, 4\}, \{5, 4, 2\}, \{4, 2, 6\}\}$.

Lema 2.6. *Se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}(\pi)$ é uma subfamília intersectante, então $|\mathcal{G}| \leq k$.*

Demonstração. Mantendo a ordem de uma permutação cíclica, é possível alterar o primeiro membro e a permutação se mantém a mesma. Portanto, sem perda de generalidade, suponha que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathcal{G}$. Considere $G \in \mathcal{G}$ com $G \neq A$. Como $\mathcal{G}$ é intersectante, temos que $A \cap G \neq \emptyset$, o que implica que o primeiro ou o último elemento de $\mathcal{G}$ pertence a A.

Além de A, existem outros $2(k-1)$ conjuntos candidatos a pertencerem a $\mathcal{G}$, $k-1$ conjuntos que contêm a_1 e $k-1$ conjuntos que contêm a_k, lembrando que nenhum conjunto diferente de A contém a_1 e a_k. Dentre os $2(k-1)$ conjuntos podemos, para cada $1 \leq i \leq k-1$, formar um par de conjuntos tal que um deles termina em a_i e o outro começa em a_{i+1}. Desta forma estaremos formando $k-1$ pares de conjuntos, e como $n \geq 2k$ temos que cada par é disjunto. Logo, de cada par, apenas um deles pode pertencer a $\mathcal{G}$, já que $\mathcal{G}$ é intersectante. Portanto temos que $|\mathcal{G}| \leq 2(k-1) + 1 - (k-1) \Rightarrow |\mathcal{G}| \leq k$ (o termo 1 na soma vem do conjunto A). Com isto, temos que o Lema 2.6 vale. $\square$

Demonstração do Teorema 1.2. Seja M o número de pares (F, π) tais que π é uma permutação cíclica e $F \in \mathcal{F}(\pi)$. Para cada conjunto F de tamanho k existem $k!(n-k)!$ permutações cíclicas π com $F \in \mathcal{F}(\pi)$, pois, ao montar um ciclo que contém F como bloco, temos $k!$ permutações para os elementos de F quando colocados no bloco e, após isso, sobram $n-k$ posições para colocar os outros $n-k$ termos, e portanto $(n-k)!$ permutações destes. Portanto são $k!(n-k)!$ permutações cíclicas π com $F \in \mathcal{F}(\pi)$, e $M = |\mathcal{F}|k!(n-k)!$. Por outro lado, o Lema 2.6 garante que $M \leq k(n-1)!$ (pois $|\mathcal{F}| \leq k$ e $(n-1)!$ é o número de permutações cíclicas de n elementos), logo $|\mathcal{F}|k!(n-k)! \leq k(n-1)! \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. Com isto temos que o teorema está, mais uma vez, demonstrado. $\square$

3 TEOREMA DE HILTON-MILNER

O objetivo deste capítulo é apresentarmos a demonstração do Teorema 1.3, dada por Hilton e Milner [2].

Teorema 1.3 (Hilton-Milner). *Se $2k < n$ e $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família intersectante tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$. A igualdade vale se e somente se $\mathcal{F} \simeq \{F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F, \{2, \ldots, k+1\} \cap F \neq \emptyset\} \cup \{\{2, \ldots, k+1\}\}$.*

Antes da demonstração do Teorema 1.3, lembre que uma família $\mathcal{F}$ é definida como estrela quando existe um elemento que pertence a todos os conjuntos de $\mathcal{F}$ (isto é $\mathcal{F}$ é estrela $\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$). A demonstração foi baseada em [2].

Demonstração do Teorema 1.3. Vamos assumir que $\mathcal{F}$ tem tamanho máximo e vamos considerar o efeito de uma substituição genérica S_{ij}, para $i < j$. Pela Proposição 2.2, $S_{ij}(\mathcal{F})$ é intersectante, porém há duas possibilidades: ou $\bigcap S_{ij}(\mathcal{F}) = \emptyset$ ou $S_{ij}(\mathcal{F})$ é uma estrela. Se o primeiro for verdadeiro, poderemos continuar aplicando substituição até a família se tornar uma estrela ou até a substituição não fazer mais efeito (de modo que a família nunca se tornará uma estrela). Inicialmente vamos supor que $S_{ij}(\mathcal{F})$ é uma estrela. Sem perda de generalidade vamos supor ainda que $S_{12}(\mathcal{F})$ seja a primeira família a se tornar uma estrela. Portanto, obviamente $1 \in S_{12}(F)$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Além disso, temos que $\{1, 2\} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, pois, se F não contém 1 nem 2 como elemento, então $S_{12}(F) = F$, de forma que $1 \notin \bigcap S_{12}(\mathcal{F})$, o que é uma contradição. Pela maximidade de $\mathcal{F}$, podemos assumir que $\mathcal{G} = \{G \in \binom{[n]}{k} : \{1, 2\} \subseteq G\} \subseteq \mathcal{F}$, pois, se um conjunto A que contém 1 e 2 não pertencer a $\mathcal{F}$, poderemos acrescentá-lo à família, mantendo-a intersectante.

Agora aplicamos as operações S_{ij} sucessivamente, para $3 \leq i < j \leq n$, à família. Temos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap S_{ij}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Note que S_{ij} tira um elemento j e coloca um elemento i menor do que j, portanto, se olharmos para a soma dos elementos dos conjuntos da família, observaremos que esta soma se mantém igual ou diminui a cada aplicação de S_{ij}. Suponha que uma rodada consista em aplicar S_{ij} para quaisquer $3 \leq i < j \leq n$. A cada rodada, ou concluímos que $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, ou a soma dos elementos dos conjuntos da família é estritamente menor ao final da rodada. Portanto, este processo não pode acontecer infinitamente. Por simplicidade, denotaremos por $\mathcal{F}$ a família tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, para $3 \leq i < j \leq n$.

Observe que $B = \{i, 3, 4, \ldots, k+1\} \in \mathcal{F}$ para $i \in \{1, 2\}$, pois se B não pertencer a $\mathcal{F}$, então existirá um conjunto $C \cup T \cup \{i\}$ onde $C \subseteq \{3, 4, \ldots, k+1\}$, $|C| < k-1$, $T \subseteq \{k+2, \ldots, n\}$ e $|C \cup T \cup \{i\}| = k$ (se este conjunto não existir ao mesmo tempo que B não pertence a $\mathcal{F}$, então todos os conjuntos de $\mathcal{F}$ terão um elemento em comum: se $i = 1$ todos terão o 2, e se $i = 2$ todos terão o 1). Com $C \cup T \cup \{i\}$ posso fazer substituição e chegar no conjunto B, que já teria que estar na família ou seria colocado agora. Logo $B = \{i, 3, 4, \ldots, k+1\} \in \mathcal{F}$. Além disso, temos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, logo $\binom{[k+1]}{k} \subseteq \mathcal{F}$ e obviamente temos que $\bigcap \binom{[k+1]}{k} = \emptyset$ e portanto mantém-se $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Agora procedemos por indução em n. Seja $\mathcal{F}_i = \{F \cap [2k] : F \in \mathcal{F}, |F \cap [2k]| = i\}$, para $i \in \{0, 1, \ldots\}$.

Lema 3.1. *Se $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ é uma família intersectante e modificada pela substituição, então para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$, temos que $A \cap B \cap [2k-1] \neq \emptyset$.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que $A \cap B \cap [2k-1] = \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é intersectante, temos ainda que existem p elementos $j_1, \ldots, j_p \in (A \cap B) \setminus [2k-1]$. Como $|A| = k = |B|$, temos ainda que existem p elementos $i_1, \ldots, i_p \in [2k-1] \setminus (A \cup B)$. Porém, como $S_{ij}(A) = A$ e $S_{ij}(B) = B$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, temos que $A' = (A \cup \{i_1, \ldots, i_p\}) \setminus \{j_1, \ldots, j_p\} \in \mathcal{F}$ e $B' = (B \cup i_1, \ldots, i_p) \setminus \{j_1, \ldots, j_p\} \in \mathcal{F}$. Porém, isto é uma contradição, já que $A \cap B' = \emptyset$ e estamos supondo que $\mathcal{F}$ é intersectante. $\square$

Deste lema, podemos concluir que cada $\mathcal{F}_i$ definido acima é intersectante. Em particular, é fácil ver que $\mathcal{F}_0 = \emptyset$ e, além disso, temos ainda que $\mathcal{F}_1 = \emptyset$, pois, $\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$ se, e somente se existe algum conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $|A \cap [2k]| = 1$. Seja $a \in A \cap [2k]$. Assim, se $a \leq k+1$ temos que existe $G \in \binom{[k+1]}{k}$ tal que $a \notin G$ e logo $A \cap [2k] \cap G = \emptyset$ o que é um absurdo. Se $a > k+1$, então $A \cap [2k] \cap G = \emptyset$ para todo $G \in \binom{[k+1]}{k}$, o que é um absurdo também. Logo $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.

Proposição 3.2. *Sejam k, i números inteiros positivos, então valem as seguintes afirmações.*

(I) $|\mathcal{F}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1}$ *se* $2 \leq i < k$.

(II) $|\mathcal{F}_k| \leq \binom{2k-1}{k-1} - \binom{k-1}{k-1} + 1$.

Demonstração. Primeiro vamos supor que $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Com isto, temos que existe algum a tal que $a \in F$, para todo $F \in \mathcal{F}_i$. Levantamos a seguinte pergunta. Qual é o número máximo de conjuntos $K \in \binom{[2k]}{i}$ que podemos construir $a \in K$ e $K \setminus \{a\} \not\subset \{k+2, \ldots, 2k\}$? Esta última condição é necessária para evitar que exista um conjunto de $\binom{[k+1}{k}$ que seja disjunto desse conjunto. A estratégia é olhar para todos os conjuntos de tamanho i que contém a e tirar os conjuntos que tem os outros $i-1$ elementos em $\{k+2, \ldots, 2k\}$. Com esta estratégia temos

$$|\mathcal{F}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1},$$

o que mostra a primeira parte da proposição para o caso $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$, notando que

$$|\{k+2, \ldots, 2k\}| = 2k - (k+1) = k-1.$$

Para o caso em que $\bigcap \mathcal{F}_i = \emptyset$ aplicamos a hipótese de indução do teorema para a família $\mathcal{F}_i$, que é uma família de subconjuntos de tamanho i de $[2k]$ com $2k > 2i$ já que $k > i$. Esta hipótese de indução é $|\mathcal{F}_k| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{2k-i-1}{i-1} + 1$.

Como $2 \leq i < k$ garantimos que esta cota implica na cota desejada na primeira parte da proposição.

Para a segunda parte da proposição simplesmente observamos que no caso $i = k$ temos que, dado um conjunto da família, o seu complementar não pode pertencer a família, e portanto $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$, e facilmente podemos verificar a igualdade. Assim temos que a segunda parte da proposição está demonstrada também já que $\left(-\binom{k-1}{k-1} + 1\right) = -1 + 1 = 0$. $\square$

Agora para qualquer $S \subseteq [2k]$ existem no máximo $\binom{n-2k}{k-|S|}$ conjuntos F com $F \cap [2k] = S$. Portanto temos que

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^{k} \binom{n-2k}{k-i} |\mathcal{F}_i|,$$

pois para cada S de tamanho i existem $\binom{n-2k}{k-i}$ conjuntos de tamanho k que contêm S, e a quantidade de conjuntos S de tamanho i é $|\mathcal{F}|$ para cada i. Isto implica, pela Proposição 3.2, que

$$|\mathcal{F}| \leq 1 + \sum_{i=2}^{k} \binom{n-2k}{k-i} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right).$$

O 1 somando é referente a parcela $i = k$ que, na proposição, também tem o 1 somando (observando que $\binom{n-2k}{k-k} = 1$). A soma pode começar em 2 porque $|\mathcal{F}_1| = 0$. Com isto, temos que

$$|\mathcal{F}| \leq 1 + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1}.$$

Lema 3.3. *Para dados números inteiros $n \geq k$, temos que*

$$\sum_{i=2}^{k} \binom{n-2k}{k-i} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right) = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1}.$$

Note que, para concluirmos a demonstração do Teorema de Hilton-Milner, basta demonstrarmos a veracidade do Lema 3.3. Para tal, resolveremos um problema de duas maneiras diferentes.

Demonstração. Considere então o seguinte problema. Quantos conjuntos $K \in \binom{[n]}{k-1}$ podemos construir com $2k \notin K$ e $K \cap A \neq \emptyset$, onde $A = \{k, \ldots, 2k-1\}$?

Para a primeira maneira de resolver este problema, note que $|A| = 2k - 1 - (k-1) = k$. Contando os conjuntos com exatamente 1 elemento em A, mais os conjuntos com exatamente 2 elementos em A e, assim sucessivamente, obtemos como resposta

$$\sum_{i=2}^{k} \binom{n-2k}{k-i} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right),$$

pois existem $\binom{2k-1}{i-1}$ conjuntos com exatamente $i-1$ elementos de $[2k-1]$ sem o $2k$. A quantidade de conjuntos sem elementos em A é a mesma quantidade de conjuntos de tamanho $i-1$ dentre os elementos de 1 a $k-1$, e isto é $\binom{k-1}{i-1}$. Para cada destes conjuntos que restaram existem $\binom{n-2k}{k-i}$ maneiras de completá-los de modo a ficarem com $k-1$ elementos, mas exatamente $i-1$ elementos de $[2k-1]$.

Para a segunda maneira de resolver este problema, olhamos para todos os conjuntos de tamanho $k-1$ que não contêm o elemento $2k$ e removemos aqueles conjuntos de tamanho $k-1$ que não possuem nenhum elemento de A e não possuem o elemento $2k$, isto nos dá a resposta

$$\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1-k}{k-1}.$$

□

Logo temos a igualdade desejada e a demonstração do Teorema de Hilton-Milner está completa para o caso em que é possível transformar a família em uma estrela, após uma quantidade finita de substituições. Agora analisaremos o caso em que, após uma certa quantidade de substituições, a operação de substituição não faz mais efeito e a família nunca se tornará uma estrela. Neste caso temos que $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$. Por absurdo, se $|\mathcal{F}| > \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$, e $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ para todos $i, j \in [n]$, então podemos mostrar que a família $\mathcal{A} = \{F : 1 \in F, F \cap \{2, \ldots, k+1\} \neq \emptyset\} \cup \{\{2, \ldots, k+1\}\}$, do teorema, está contida em $\mathcal{F}$. Porém temos justamente que $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$.

Seja então, $G \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{A}$. Como $\mathcal{F}$ é intersectante, então para todo $F \in \mathcal{F}$, temos que $F \cap G \neq \emptyset$. Logo, existe $j \in \{2, \ldots, k+1\}$ tal que $j \in G$. Temos ainda que $1 \notin G$, pois todos os conjuntos que contêm o elemento 1, estão em $\mathcal{A}$ e $G \notin \mathcal{A}$. Além disso $S_{1j}(G) = G$, pois $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ para todos $i, j \in [n]$. Logo temos que, o único motivo para a substituição não ter sido realizada é $G \cup \{1\} \setminus \{j\} = G' \in \mathcal{F}$.

Considere agora o conjunto H, que é formado pelos k primeiros elementos de $[n]$ que não estão em G. Assim temos que $H \cap G = \emptyset$. Note que $1 \in H$, pois $1 \notin G$. Temos também que $H \cap \{2, \ldots, k+1\} \neq \emptyset$, pois caso contrário teríamos $G = \{2, \ldots, k+1\}$ que implicaria $G \in \mathcal{A}$. Logo, temos que, $1 \in H$, $H \cap \{2, \ldots, k+1\} \neq \emptyset \Rightarrow H \in \mathcal{A}$. Porém $H \cap G = \emptyset$, o que é uma contradição. $\square$

4 DEMONSTRAÇÃO DE ALGUNS CASOS DA CONJECTURA

Dados um hipergrafo H e números inteiros positivos q e t, uma (q,t)-coloração do hipergrafo H é uma coloração das hiperarestas do hipergrafo H, utilizando até q cores, onde quaisquer duas hiperarestas de mesma cor possuem pelo menos t elementos em comum. O Teorema 1.11 afirma que, para n suficientemente grande e $k \geq t$, o hipergrafo k-uniforme que atinge o maior número de (q,t)-colorações deve ser do tipo (C,k)-completo, onde C é uma t-cobertura (todos os seus conjuntos possuem tamanho igual a t) de tamanho $c(q) = \lceil q/3 \rceil$ (Veja a Definição 1.9). Além disso, o Teorema 1.11 afirma que, para $k < 2t-1$ e $q \geq 5$, devemos ter, para quaisquer $t_1, t_2 \in C$, $|t_1 \cup t_2| > k$. A Conjectura 1.12 alega que devemos ter, ainda, $|t_1 \cup t_2| = k+1$, isto é, a união deve ser a menor possível.

Conjectura 1.12. *Se $q \geq 5$, k e t são números inteiros positivos com $t < k < 2t-1$, então existe um $n_0 > 0$, tal que, para $n > n_0$, um hipergrafo $H = H_{C,k}(n)$ que satisfaz*

$$\kappa(H,q,t) = \mathrm{KC}(n,k,q,t)$$

deve satisfazer $|C| = c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$ e $|t_i \cap t_j| = 2t-k-1$ para quaisquer $t_i, t_j \in C$ distintos.

Neste capítulo, adaptamos a técnica de substituição, utilizada para demonstrar os Teoremas 1.2 e 1.3, para demonstrar que a conjectura é verdadeira quando $q \in \{5,6\}$ e restringir a família de hipergrafos candidatos quando $q \geq 7$. Mostraremos que o número de (q,t)-colorações de um hipergrafo aumenta a cada passo da substituição enquanto tivermos $|t_1 \cup t_2| > k+1$, sendo que a substituição faz com que a intersecção entre os elementos da cobertura aumente.

Definição 4.1. *Para números inteiros $n \geq k \geq t \geq 1$ e uma família de conjuntos $C \subseteq \binom{[n]}{t}$, definimos a família de conjuntos*

$$\mathcal{F}_C(n,k) = \mathcal{F}_C = \left\{ e \in \binom{[n]}{k} : \exists T \in C,\, T \subseteq e \right\}.$$

Definição 4.2. *Para números inteiros $n \geq k \geq t \geq 1$, seja $C = \{t_1, \ldots, t_c\} \subseteq \binom{[n]}{t}$, uma família de conjuntos tal que, para quaisquer $t_u, t_v \in C$ temos que $|t_u \cup t_v| > k$ e, além disso, existem conjuntos distintos $t_i, t_j \in C$ e elementos x, y tais que $x \in \left(\bigcap_{z \neq i} t_z\right) \setminus t_i$, $y \in \left(\bigcap_{z \neq j} t_z\right) \setminus t_j$ e $|t_i \cup t_j| > k+1$. Considere $t_i' = (t_i \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ e $C' = (C \setminus \{t_i\}) \cup \{t_i'\}$. Definimos a função substituição para hipergrafos $\varphi_{xy} \colon \mathcal{F}_C \longrightarrow \mathcal{F}_{C'}$ por*

$$\varphi_{xy}(e) = \begin{cases} (e \setminus \{y\}) \cup \{x\}, & x \notin e, y \in e \\ e, & x \in e \text{ ou } y \notin e \end{cases} \tag{4.1}$$

Lema 4.3. *Considere $n \geq k \geq t$ números inteiros. Sejam t_i', C, C', e elementos x, y como descritos na Definição 4.2. Seja $e \in \mathcal{F}_C$. Temos que:*

(a) $|e| = |\varphi_{xy}(e)|$.

(b) A função $\varphi_{xy} \colon \mathcal{F}_C \longrightarrow \mathcal{F}_{C'}$ da Definição 4.2 é bijetora.

(c) $|\mathcal{F}_C| = |\mathcal{F}_{C'}|$.

(d) Se, para $e_1, e_2 \in \mathcal{F}_C$ temos $|e_1 \cap e_2| \geq t$, então $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| \geq t$.

Demonstração. Para mostrarmos o item (a), observe que, se um conjunto $e \in \mathcal{F}_C$ contém x ou não contém y, então ele se mantém inalterado durante a substituição, e portanto seu tamanho é preservado. Se e não contém x e contém y, então y será substituído por x e seu tamanho se manterá inalterado.

Para o item (b), provaremos primeiro que a função é injetora, e depois que a função é sobrejetora. Por absurdo, suponhamos que existam dois conjuntos $e_1, e_2 \in \mathcal{F}_C$, distintos, tais que $\varphi_{xy}(e_1) = \varphi_{xy}(e_2)$. Neste caso, pela definição de φ_{xy}

temos que apenas um dos conjuntos e_1, e_2 foi alterado. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\varphi_{xy}(e_1) = e_1$ e $\varphi_{xy}(e_2) = e_2' = (e_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$. Como necessariamente a única coisa feita foi substituir y por x em exatamente um dos conjuntos, temos que $|e_1 \cap e_2| = k-1$, o que equivale a $|e_1 \cup e_2| = k+1$. Como $\varphi_{xy}(e_2) = e_2'$, temos que $x \notin e_2$, porém, o único conjunto de C que não contém x é t_i, de modo que $t_i \subseteq e_2$. Como $e_1 = e_2'$, temos que $y \notin e_1$, portanto $t_j \subseteq e_1$. Porém, $|e_1 \cup e_2| = k+1$, o que implica em $|t_i \cup t_j| \leq k+1$ o que é uma contradição. Logo φ_{xy} é uma função injetora.

Agora, para mostrarmos que φ_{xy} é uma função sobrejetora, seja $f \in \mathcal{F}_{C'}$. Se $t_i' \subseteq f$, então $x \in f$ e consideraremos os casos em que $y \in f$ e $y \notin f$. Se $y \in f$, então $t_i \subseteq f$, o que implica que $f \in \mathcal{F}_C$, de modo que $\varphi_{xy}(f) = f$. Se $y \notin f$, então o conjunto $(f \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ contém t_i e, portanto, pertence a $\mathcal{F}_C$, de modo que $\varphi_{xy}((f \setminus \{x\}) \cup \{y\}) = f$. Se $t_i' \nsubseteq f$, então temos que $f \in \mathcal{F}_C$ e consideraremos primeiro o caso $x \in f$ e a seguir o caso $x \notin f$. Se $x \in f$, então temos que $\varphi_{xy}(f) = f$. Se $x \notin f$, então $t_z \nsubseteq f$ para todo $z \neq i$, o que é uma contradição com $f \in \mathcal{F}_{C'}$.

O item (c) é uma consequência imediata do item (b). Para demonstrarmos o item (d), considere $e_1, e_2 \in \mathcal{F}_C$, tais que $|e_1 \cap e_2| \geq t$. Se $x \in e_1 \cap e_2$, então $\varphi_{xy}(e_1) = e_1$ e $\varphi_{xy}(e_2) = e_2$, de modo que $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| \geq t$. Se $x \in e_1 \setminus e_2$, então temos que $t_i \subseteq e_2$, o que implica $y \in e_2$. Logo, temos que $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| \geq t$ se $y \in e_1$ e $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| \geq t+1$ se $y \notin e_1$. A demonstração é análoga quando $x \in e_2 \setminus e_1$. Se $x \notin e_1 \cup e_2$, então $t_i \subseteq e_1, e_2$, de modo que $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| \geq t$. $\square$

Lema 4.4. *Considere números inteiros $k \geq t$, $q \geq 5$ e n suficientemente grande. Sejam t_i', C, C', e elementos x, y como descritos na Definição 4.2 com a restrição adicional de que $|C| \leq q-1$. Então*

$$\kappa(\mathcal{H}', q, t) > \kappa(\mathcal{H}, q, t),$$

onde $\mathcal{H} = ([n], \mathcal{F}_C)$ e $\mathcal{H}' = ([n], \mathcal{F}_{C'})$.

Demonstração. O Lema 4.4 afirma que o número de (q,t)-colorações aumenta após a aplicação da função substituição φ_{xy} em $\mathcal{F}_C$. Para demonstrarmos que isto é verdade, consideraremos a seguinte correspondência natural entre as (q,t)-colorações das hiperarestas de $\mathcal{H}$ e as (q,t)-colorações das hiperarestas de $\mathcal{H}'$. Para cada (q,t)-coloração das hiperarestas de $\mathcal{H}$, a cor que nós atribuímos para a hiperaresta $\varphi_{xy}(e)$ em $\mathcal{H}'$ é a cor de e em $\mathcal{H}$. O item (b) do Lema 4.3 garante que toda hiperaresta de $\mathcal{F}_{C'}$ recebe uma cor através desta correspondência. Além disso, o item (d) do Lema 4.3 garante que a correspondência leva (q,t)-colorações de $\mathcal{H}$ em (q,t)-colorações de $\mathcal{H}'$. Logo, a correspondência descrita acima está bem definida.

Obviamente, temos que esta correspondência é injetora. Mostraremos que esta correspondência não é sobrejetora. Para tal, mostraremos a existência de duas hiperarestas e_1 e e_2 tais que $t_j \subseteq e_1$, $t_i \subseteq e_2$, e $|e_1 \cap e_2| = t-1$ bem como $|e_1 \cap \varphi_{x,y}(e_2)| = t$. Para construirmos e_1 e e_2, primeiro colocamos os elementos de t_j em e_1, e os elementos de t_i em e_2, de modo que $t_j \subseteq e_1$, $t_i \subseteq e_2$ e $t_j \cap t_i \subseteq e_1 \cap e_2$. Para que tenhamos $|e_1 \cap e_2| = t-1$, adicionamos a e_1 e e_2, elementos de $t_i \setminus t_j$ e de $t_j \setminus t_i$, respectivamente, evitando x e y, e de modo que $||t_j \setminus (e_1 \cap e_2)| - |t_i \setminus (e_1 \cap e_2)|| \leq 1$ (isto é, selecionando aproximadamente a mesma quantidade de cada um). Note que isto é possível uma vez que $t-1 \leq |(t_j \setminus \{x\}) \cup (t_i \setminus \{y\})|$. Após, acrescentamos elementos fora dos conjuntos de C a e_1 até que fique com tamanho k, e elementos diferentes, também fora dos conjuntos de C, a e_2 até que fique com tamanho k. Após a aplicação da substituição φ_{xy}, temos $|\varphi_{xy}(e_1) \cap \varphi_{xy}(e_2)| = |e_1 \cap ((e_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\})| = t$. Assim, considere a seguinte (q,t)-coloração Δ de $\mathcal{H}'$, onde $[q]$ é o conjunto das cores: para cada $t_z \neq t_i, t'_j$ as hiperarestas que contêm t_z possuem cor z, $\varphi_{xy}(e_1)$ e $\varphi_{xy}(e_2)$ possuem cor q, todas as demais hiperarestas que contêm t'_j possuem cor j e todas as demais hiperarestas que contêm t_i possuem cor i. Note que esta coloração é possível, uma vez que $|C| \leq q-1$. Com isto, temos que não existe uma (q,t)-coloração de $\mathcal{H}$ que seja levada a Δ através da correspondência, pois em qualquer (q,t)-coloração de $\mathcal{H}$, e_1 e e_2 possuem cores diferentes, já que $|e_1 \cap e_2| = t-1$.

Logo, esta correspondência não é sobrejetora e, portanto, temos que $\mathcal{H}'$ possui mais (q,t)-colorações do que $\mathcal{H}$.

□

4.1 Demonstração da conjectura para $q \in \{5,6\}$

Agora demonstraremos a Conjectura 1.12 para $q \in \{5,6\}$.

Demonstração. Considere $q \in \{5,6\}$, k e t números inteiros positivos com $t < k < 2t-1$ e um hipergrafo $H = H_{C,k}(n)$ que satisfaz

$$\kappa(H,q,t) = \mathrm{KC}(n,k,q,t).$$

Como $q \in \{5,6\}$, então $\lceil \frac{q}{3} \rceil = 2$. Seja $C = \{t_1,t_2\}$ a cobertura. Sabemos, pelo Teorema 1.11, que $|t_1 \cup t_2| > k$, o que é equivalente a $|t_1 \cap t_2| \leq 2t-k-1$. Por absurdo, vamos supor que $|t_1 \cup t_2| > k+1$ de forma que existem elementos $x \in t_1 \setminus t_2$ e $y \in t_2 \setminus t_1$. Assim, o Lema 4.4, aplicado para $\mathcal{H} = H$ e $\mathcal{H}'$ correspondente, garante que $\kappa(\mathcal{H}',q,t) > \kappa(\mathcal{H},q,t)$, o que é uma contradição, pois estamos supondo que $\kappa(H,q,t) = \mathrm{KC}(n,k,q,t)$. Logo temos que $|t_1 \cap t_2| = 2t-k-1$. □

4.2 Avanços na demonstração da conjectura para $q \geq 7$

O Teorema 1.11 informa que, para números inteiros positivos $n, k \geq 2$, $t \geq 1$, com $k < 2t-1$, o hipergrafo H que atinge o maior número de (q,t)-colorações é o $H_{C,k}(n)$, para $C = \{t_1, t_2, \ldots, t_{c(q)}\}$, onde cada t_i pertence a $\binom{[n]}{t}$ e $|t_i \cup t_j| > k$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$. Para $q \in \{5,6\}$, mostramos que para um hipergrafo H atingir o número máximo de (q,t)-colorações, este deve satisfazer ainda que $|t_i \cup t_j| = k+1$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq c(q)$.

No caso quando $q \geq 7$ e existem $t_i, t_j \in C$ e elementos x, y tais que $x \in \left(\bigcap_{z\neq i} t_z\right) \setminus t_i$, $y \in \left(\bigcap_{z\neq j} t_z\right) \setminus t_j$ e $|t_i \cap t_j| > k+1$, o Lema 4.4 garante que $\kappa(H, q, t) < \kappa(\mathcal{H}', q, t) \leq \mathrm{KC}(n, k, q, t)$ e, portanto, H não é um hipergrafo candidato a atingir o número máximo de (q, t)-colorações.

Além disso, para $q \in \{7, 8, 9\}$, temos que $|C| = 3$, e se C não é do tipo descrito acima, então sabemos propriedades que necessariamente C satisfaz.

Lema 4.5. *Dados, números inteiros positivos n, t, e conjuntos distintos $t_1, t_2, t_3 \in \binom{[n]}{t}$, onde $|t_1 \cap t_2| \leq \min\{|t_1 \cap t_3|, |t_2 \cap t_3|\}$ temos que pelo menos um dos dois casos abaixo é verdade.*

(A) Existem elementos x, y tais que $x \in t_1 \setminus (t_2 \cup t_3)$ e $y \in t_2 \setminus (t_1 \cup t_3)$.

(B) Existem elementos x, y tais que $x \in (t_1 \cap t_3) \setminus t_2$ e $y \in (t_2 \cap t_3) \setminus t_1$.

Demonstração. Para demonstrarmos este lema, suponhamos, por absurdo, que ambos os casos (A) e (B) não sejam verdadeiros. Nós dividiremos em casos.

(a) $t_1 \setminus t_3 \subseteq t_2$.

(b) $(t_3 \setminus t_1) \cap t_2 = \emptyset$.

(c) $t_1 \setminus t_3 \not\subseteq t_2$ e $(t_3 \setminus t_1) \cap t_2 \neq \emptyset$.

Para o caso (a), como $t_1 \neq t_2$, temos que existe algum elemento $x \in (t_1 \cap t_3) \setminus t_2$. Logo, por (B), temos que $(t_2 \cap t_3) \setminus t_1 = \emptyset$, o que implica em $t_2 \cap t_3 \subseteq t_1 \cap t_2 \cap t_3 \subseteq t_1 \cap t_2$. Porém, como $t_1 \setminus t_3 \neq \emptyset$ e $t_1 \setminus t_3 \subset t_2$, temos que $t_1 \cap t_2 \cap t_3 \subset t_1 \cap t_2$, o que implica em $t_2 \cap t_3 \subset t_1 \cap t_2$, o que é uma contradição, já que $|t_1 \cap t_2| \leq \min\{|t_1 \cap t_3|, |t_2 \cap t_3|\}$.

No caso (b) temos que $(t_3 \setminus t_1) \cap t_2 = \emptyset$, o que implica que $t_2 \cap t_3 \subseteq t_1 \cap t_2 \cap t_3 \subseteq t_1 \cap t_2$, mas como $|t_1 \cap t_2| \leq \min\{|t_1 \cap t_3|, |t_2 \cap t_3|\}$, temos que

$t_2 \cap t_3 = t_1 \cap t_2 \cap t_3 = t_1 \cap t_2$. Por outro lado, podemos escrever t_2 da seguinte forma $t_2 = (t_2 \cap t_1) \cup (t_2 \cap (t_3 \setminus t_1)) \cup (t_2 \setminus (t_1 \cup t_3))$, porém como $t_2 \not\subseteq t_1$ e $(t_3 \setminus t_1) \cap t_2 = \emptyset$, temos que $t_2 \setminus (t_1 \cup t_3) \neq \emptyset$, o que implica, pelo caso (A), que $t_1 \setminus (t_2 \cup t_3) = \emptyset$, do qual segue que $t_1 = (t_1 \cap t_2) \cup (t_1 \cap t_3)$. Porém, como $t_2 \cap t_3 = t_1 \cap t_2$, temos que $t_1 = (t_2 \cap t_3) \cup (t_1 \cap t_3)$, o que implica que $t_1 \subseteq t_3$, levando a uma contradição.

No caso (c), como $t_1 \setminus t_3 \not\subseteq t_2$, então existe um elemento $x \in t_1 \setminus (t_2 \cup t_3)$, pelo caso (A), temos que $t_2 \setminus (t_1 \cup t_3) = \emptyset$, o que implica em $t_2 \subset t_1 \cup t_3$. Logo temos que $t_2 = (t_1 \cap t_2 \cap t_3) \cup (t_2 \cap (t_3 \setminus t_1)) \cup (t_2 \cap (t_1 \setminus t_3))$. Porém, pela hipótese deste caso, temos que $(t_3 \setminus t_1) \cap t_2 \neq \emptyset$, o que implica que existe algum elemento $y \in (t_3 \cap t_2) \setminus t_1$, e por (B), temos que $(t_1 \cap t_3) \setminus t_2 = \emptyset$, o que implica em $t_1 \cap t_3 \subseteq t_2$, logo $t_1 \cap t_3 \subseteq t_1 \cap t_2$. Porém como $|t_1 \cap t_2| \leq \min\{|t_1 \cap t_3|, |t_2 \cap t_3|\}$, temos que $t_1 \cap t_3 = t_1 \cap t_2$, o que implica em $t_2 \cap (t_1 \setminus t_3) = \emptyset$. Assim, temos que $t_2 = (t_1 \cap t_2 \cap t_3) \cup (t_2 \cap (t_3 \setminus t_1))$, o que implica que $t_2 \subseteq t_3$, o que é uma contradição. $\square$

Para $q \in \{7, 8, 9\}$ o Lema 4.5 garante que ou o caso (A), ou o caso (B) é satisfeito. Quando o caso (A) é satisfeito, este lema sugere que poderíamos definir, para elementos x e y como descritos no caso (A), uma outra função de substituição ψ_{xy}, análoga à função φ_{xy}. Porém, a função ψ_{xy} não seria injetora e nem sobrejetora, pois para um conjunto e tal que $t_3 \subseteq e$, $y \in e$ e $x \notin e$, teríamos que $e \in \mathcal{F}_C$, $e' = (e \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_C$ e $\psi_{xy}(e) = e' = \psi_{xy}(e')$, de modo que a função não é injetora. Além disso, temos que $e \in \mathcal{F}_{C'}$, e obviamente não existe um conjunto de $\mathcal{F}_C$ que possua e como imagem pela função ψ_{xy}, de modo que a função ψ_{xy} não é sobrejetora.

5 TEOREMA DE AHLSWEDE-KHACHATRIAN

Até agora estudamos que o tamanho máximo que uma família de k-subconjuntos de $[n]$ pode ter com a propriedade de ser intersectante é $\binom{n-1}{k-1}$, para $n \geq 2k$. Estudamos também que a família intersectante que atinge este tamanho máximo é a família estrela. Além disso, determinamos qual é a maior família intersectante que não é do tipo estrela e qual o seu tamanho. Agora, veremos a demonstração do Teorema 1.6, que nos informa o tamanho da maior família t-intersectante de k-subconjuntos de $[n]$ que pode ser construída, em cada condição de n, k e t, e qual família é esta.

Teorema 1.6 (Ahlswede - Khachatrian)**.** *Para $1 \leq t \leq k \leq n$, valem as seguintes afirmações.*

(i) *Se $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) < n < (k-t+1)(2+\frac{t-1}{r})$ para algum $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $M(n,k,t) = |\mathcal{F}_r|$. Além disso, a família $\mathcal{F}_r$ é, a menos de isomorfismos, a única família ótima. (Por convenção, $\frac{1}{0} = \infty$).*

(ii) *Se $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) = n$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $M(n,k,t) = |\mathcal{F}_r| = |\mathcal{F}_{r+1}|$, e as famílias ótimas, a menos de isomorfismos, são $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_{r+1}$.*

Para tal, definiremos uma operação parecida com a substituição, que chamaremos de *compressão à esquerda*. Esta operação consiste em acrescentar, à uma família de conjuntos, todos os conjuntos B que, para algum conjunto A da família, satisfizerem a propriedade de que, comparando elemento a elemento em ordem crescente, os elementos de B são menores do que ou iguais aos de A. esta operação mantém a propriedade de a família ser t-intersectante. Com isto provaremos que podemos supor, sem perda de generalidade, que uma família de conjuntos é comprimida à esquerda, isto é, contém todos os conjuntos que estão à esquerda de algum conjunto da família.

Definição 5.1. *Para* $A_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \in \binom{[n]}{s}$ *com* $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ *e* $A_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_s\} \in \binom{[n]}{s}$ *com* $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$, *escrevemos*

$$A_1 \preceq A_2 \text{ se } i_\ell \leq j_\ell \text{ para todo } 1 \leq \ell \leq s$$

Quando isto ocorre dizemos que A_1 pode ser obtido *comprimindo à esquerda* o conjunto A_2. Além disso, dados um conjunto A e uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ sejam $\mathcal{L}(A) = \{A' : A' \preceq A\}$ e $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{L}(A)$. Diremos que uma família $\mathcal{A}$ é *comprimida à esquerda* se $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Definimos ainda $LI(n,k,t) \subset I(n,k,t)$ como sendo a classe de todas as famílias comprimidas à esquerda.

Pelo que já vimos das propriedades de substituição, é natural conjecturar que

$$M(n,k,t) = \max_{\mathcal{A} \in I(n,k,t)} |\mathcal{A}| = \max_{\mathcal{A} \in LI(n,k,t)} |\mathcal{A}|.$$

Para provar que isto é verdade, considere a seguinte proposição.

Proposição 5.2. *Seja uma família* $\mathcal{A} \in I(n,k,t)$, *que, após uma quantidade finita de substituições, torna-se a família* $\mathcal{F}_r$, *para algum* $0 \leq r \leq \frac{n-t}{2}$. *Então temos que* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{F}_r$ *são isomorfas em cada um dos casos abaixo.*

$n \geq 2k - t + 2$, *para* $t \geq 2$,

$n = 2k - t + 1$, *para* $t \geq 2$ *e* $k \in \{t + r, t + r + 1\}$,

$n \geq 2k + 1$, *para* $t = 1$ *e* $r \in \{0, 1\}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $S_{ij}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_r$, isto é, S_{ij} é o último passo para $\mathcal{A}$ se tornar $\mathcal{F}_r$. Se tivermos que $i, j \in [t+2r]$ ou $i, j \notin [t+2r]$, então já tínhamos $\mathcal{A} = \mathcal{F}_r$, pois não estaremos alterando a intersecção entre $[t+2r]$ e os elementos de $\mathcal{A}$. Portanto, podemos supor que $i \in [t+2r]$ e $j \notin [t+2r]$. Note ainda que, pela definição da família $\mathcal{F}_r$, podemos supor que $i = t+2r$ e $j = n$. Considere agora as famílias

$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : j \in A, i \notin A, ((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \notin \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A} : j \notin A, i \in A, ((A \setminus \{i\}) \cup \{j\}) \notin \mathcal{A}\}.$$

Observe que $\mathcal{A}_1$ é a família dos elementos de $\mathcal{A}$ que serão modificados com a substituição S_{ij}, e $\mathcal{A}_2$ é a família dos elementos de $\mathcal{A}$ que já foram modificados pela substituição S_{ij}. Queremos mostrar que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{F}_r$, e com isto teremos que então não poderemos ter um último passo da substituição, o que será absurdo. Obviamente, se $\mathcal{A}_1 = \emptyset$, então $\mathcal{A} = \mathcal{F}_r$. Suponhamos agora que $\mathcal{A}_2 = \emptyset$, como a substituição não altera o tamanho de uma família, para mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{F}_r$ basta provarmos que existe uma função injetora que mapeia os elementos de $\mathcal{A}$ nos elementos de $\mathcal{F}_r$. Considere, então, $A \in \mathcal{A}$.

Se $i, j \in A$ ou $i, j \notin A$, então temos que $S_{ij}(A) = A$. Se $i \in A$ e $j \notin A$, então $S_{ij}(A) = A$. Porém, temos ainda que, para cada conjunto A deste tipo, $(A \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}_2 = \emptyset$, contudo, $S_{ij}((A \setminus \{i\}) \cup \{j\}) = (A \setminus \{i\}) \cup \{j\}$, pois $A \in \mathcal{A}$, o que implica que $(A \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{F}_r = S_{ij}(\mathcal{A})$. Se $i \notin A$, $j \in A$ e $S_{ij}(A) = A$ temos que $A \in \mathcal{F}_r$ e que $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{A}$. Se $i \notin A$, $j \in A$ e $S_{ij}(A) = (A \setminus \{i\}) \cup \{j\}$, então, para cada um destes conjuntos, existe um conjunto $(A \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ citados no caso quando $i \in A$ e $j \notin A$. Assim considere S_{ij} como sendo a função injetora desejada. Com isto temos que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{F}_r$.

Logo, vamos supor que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Neste caso mostraremos que $\mathcal{A} \notin I(n,k,t)$.

Considere a família

$$\mathcal{H} = \left\{ H \in \binom{[n] \setminus \{i,j\}}{k-1} : |H \cap [t+2r-1]| = t+r-1 \right\},$$

que não é necessariamente intersectante. Afirmamos que, para qualquer $B \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, temos que $|B \cap [t+2r-1]| = t+r-1$, pois se $B \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ então $B \in \mathcal{A}_1$ ou $B \in \mathcal{A}_2$. Disto segue que $(B \cup \{i\}) \setminus \{j\} \in \mathcal{F}_r$, o que implica que $|B \cap [t+2r-1]| \geq t+r-1$, porém, se isto não valer com igualdade, teremos uma contradição com o fato de que $S_{ij}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_r$.

Além disso, vamos mostrar que, para todo $H \in \mathcal{H}$, temos que ou $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}_1$ ou $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}_2$. Quando $H \cup \{j\} \notin \mathcal{A}_1$, temos dois casos. Se $H \cup \{j\} \notin \mathcal{A}$, então neste caso, temos, pela definição de $\mathcal{H}$, que $H \cup \{i\} \in \mathcal{F}_r$, logo $H \cup \{i\}$ deve ter vindo de algum conjunto de $\mathcal{A}$ através da substituição, porém este conjunto não pode ser $H \cup \{j\}$, pois este não pertence a $\mathcal{A}$, logo veio dele mesmo, isto é, $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}$, e portanto $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}_2$, pela definição de $\mathcal{A}_2$. Se $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, então neste caso $((H \cup \{j\}) \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{A}$, o que implica que $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}$, e portanto $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}_2$, pela definição de $\mathcal{A}_2$.

Quando $H \cup \{i\} \notin \mathcal{A}_2$, também temos dois casos. Se $H \cup \{i\} \notin \mathcal{A}$, então neste caso, como novamente temos que $H \cup \{i\} \in \mathcal{F}_r$, temos que este conjunto deve ter vindo de algum conjunto da família $\mathcal{A}$ através da substituição. Porém, como $H \cup \{i\} \notin \mathcal{A}$, temos que $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, e portanto $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}_1$, pela definição de $\mathcal{A}_1$. Se $H \cup \{i\} \in \mathcal{A}$, então neste caso $((H \cup \{i\}) \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, o que implica que $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, e portanto $H \cup \{j\} \in \mathcal{A}_1$, pela definição de $\mathcal{A}_1$.

Considere agora, o grafo $G = (\mathcal{H}, \{\{H_1, H_2\} \in \binom{\mathcal{H}}{2} : |H_1 \cap H_2| = t-1\})$. Queremos mostrar que este grafo G é conexo, pois com isto, teremos que, entre quaisquer dois vértices de G, existe um caminho que vai de um vértice ao outro, de modo que, como $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset \neq \mathcal{A}_2$, poderemos escolher $B_1 \cup \{j\} \in \mathcal{A}_1$ e $B_2 \cup \{i\} \in \mathcal{A}_2$, de modo que B_1 e B_2 serão vértices de H e, assim, teremos que existe um caminho que vai de B_1 até B_2. Com isto, temos que neste caminho haverá dois vértices B_1', B_2' que serão adjacentes e satisfarão $B_1' \cup \{j\} \in \mathcal{A}_1$ e $B_2' \cup \{i\} \in \mathcal{A}_2$. Porém $|B_1' \cap B_2'| = t-1$, o que implicará $|(B_1' \cup \{i\}) \cap (B_2' \cup \{j\})| = t-1$, o que será uma contradição, já que $\mathcal{A} \in I(n,k,t)$ e $B_1' \cup \{i\}, B_2' \cup \{j\} \in \mathcal{A}$, e a proposição estará demonstrada.

Lema 5.3. *G é conexo se valem as condições da Proposição 5.2.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que existam dois vértices em componentes diferentes de G. Sejam E e F dois vértices de componentes diferentes de G que possuam a menor intersecção possível. Note que, como $|E \cap [t+2r-1]| = t+r-1 = |F \cap [t+2r-1]|$ temos que $|E \cap F| \geq t-1$, porém esta intersecção não pode ser igual a $t-1$, já que neste caso teríamos uma aresta entre E e F, logo $|E \cap F| \geq t$.

Primeiro consideramos o caso $n \geq 2k-t+2$, para $t \geq 2$. Portanto, temos que o número de elementos fora de $E \cup F$, lembrando que $i = t+2r$ e $j = n$ não estão sendo contados, é $n-2-|E \cup F| = n-2-(2(k-1)-|E \cap F|) = n-2k+|E \cap F| \geq 2k-t-2k+2+t = 2$. Além disso, é verdade que $|(E \cap [t+2r-1]) \cup (F \cap [t+2r-1])| = 2(t+r-1) - |E \cap F \cap [t+2r-1]|$. Logo temos que $|[t+2r-1] \setminus (E \cup F)| = |[t+2r-1]| - |[t+2r-1] \cap (E \cup F)| = t+2r-1-2(t+r-1)+|E \cap F \cap [t+2r-1]| = |E \cap F \cap [t+2r-1]| - (t-1)$. Com isto, dividimos em três casos.

Se $|E \cap F \cap [t+2r-1]| \geq t+1$, temos que $|[t+2r-1] \setminus (E \cup F)| \geq t+1-(t-1) = 2$. Assim, temos que existem elementos x, y, z tais que $x, y \in [t+2r-1] \setminus (E \cup F)$ e $z \in E \cap F$. Deste modo, considere $E' = (E \setminus \{z\}) \cup \{x\}$ e $F' = (F \setminus \{z\}) \cup \{y\}$. Temos que $|E' \cap F| = |E \cap F'| < |E \cap F|$, o que implica que E' e F estão na mesma componente, assim como E e F' estão na mesma componente. Porém temos também que $|E' \cap F'| < |E \cap F|$, o que implica que E' e F' estão na mesma componente, o que é uma contradição.

Se $|E \cap F \cap [t+2r-1]| = t$, então $|[t+2r-1] \setminus (E \cup F)| = t-(t-1) = 1$. Logo, temos que existem elementos x, y, z tais que $x \in [t+2r-1] \setminus (E \cup F)$ e $y, z \in E \cap F$, já que $t \geq 2$. Considere $E' = (E \setminus \{z\}) \cup \{x\}$ e $F' = (F \setminus \{y\}) \cup \{x\}$.

Assim, novamente temos $|E' \cap F| = |E \cap F'| < |E \cap F|$ e $|E' \cap F'| < |E \cap F|$, o que implica em uma contradição.

Se $|E \cap F \cap [t+2r-1]| = t-1$, temos que $|[t+2r-1] \setminus (E \cup F)| = t-1-(t-1) = 0$. Porém, como $|E \cap F| \geq t$, temos que existe pelo menos um elemento $x \in (E \cap F) \setminus [t+2r-1]$. Além disso, $|[n] \setminus (E \cup F \cup [t+2r-1]) \cup \{t+2r, n\}| = |[n] \setminus (E \cup F \cup \{t+2r, n\})| \geq 2$, como visto anteriormente. Sejam $y, z \in [n] \setminus (E \cup F \cup [t+2r-1] \cup \{t+2r, n\})$. Considere $E' = (E \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ e $F' = (F \setminus \{x\}) \cup \{z\}$. Assim, novamente temos $|E' \cap F| = |E \cap F'| < |E \cap F|$ e $|E' \cap F'| < |E \cap F|$, o que implica em uma contradição.

No caso quando $n = 2k - t + 1$, $t \geq 2$ e $k \in \{t+r, t+r+1\}$, temos que o número de elementos fora de $E \cup F$ é exatamente 1 e, novamente, temos que $|[t+2r-1] \setminus (E \cup F)| = |E \cap F \cap [t+2r-1]| - (t-1)$. Os casos em que $|E \cap F \cap [t+2r-1]| \geq t$ são análogos aos anteriores. Suponhamos então que $|E \cap F \cap [t+2r-1]| = t-1$. Se $k = t+r$, então $|E| = t+r-1 = |F|$, o que implica que $E, F \subset [t+2r-1]$, já que $|E \cap [t+2r-1]| = t+r-1 = |F \cap [t+2r-1]|$. Porém, como $|E \cap F \cap [t+2r-1]| = t-1$, temos que $|E \cap F| = t-1$, o que é uma contradição, já que $|E \cap F| \geq t$. Se $k = t+r+1$, podemos resolver de maneira semelhante aos anteriores.

Finalmente, quando temos $n \geq 2k+1$, $t = 1$ e $r \in \{0, 1\}$, novamente o único caso a se preocupar é quando $E \cap F \cap [t+2r-1]| = t-1$. Consideramos primeiro o caso quando $r = 0$. Neste caso, temos $t+2r-1 = 0$, $|E \cap F| \geq 1$ e, portanto, os elementos fora de E, F e do intervalo $[t+2r-1]$ são os elementos fora de E e de F, e a quantidade destes, lembrando que não podemos contar $i = t+2r$ e $j = n$ é $n-2-|E \cup F| = n-2-2k+2+|E \cap F| \geq 2k+1-2k+1 = 2$. Assim, existem elementos x, y, z, tais que $x \in E \cap F$ e $y, z \in [n] \setminus (E \cup F \cup \{t+2r, n\})$, de modo que podemos contruir um caminho que vai de E até F como nos casos anteriores. Se $r = 1$, então $t+2r-1 = 2$ e, neste caso, $|E \cap F \cap [2]| = 0$, $|E \cap [2]| = 1 = |F \cap [2]|$, o que implica que E e F não podem possuir o mesmo elemento em [2]. Porém, a quantidade de elementos fora de $E \cup F$ e fora de [2], sem contar com $t + 2r$ e n, é $n - 2 - |E \cup F| = n - 2 - 2k + 2 + |E \cap F| \geq 2$, e resolvemos como no caso anterior. $\square$

Com este lema demonstrado a demonstração da proposição segue como mencionado anteriormente. $\square$

Com esta proposição, temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{F}_r$ são isomorfas sob as condições descritas na proposição. Com isto temos que

$$\max_{\mathcal{A} \in I(n,k,t)} |\mathcal{A}| = \max_{\mathcal{A} \in LI(n,k,t)} |\mathcal{A}|,$$

e, portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que a família $\mathcal{A}$ é comprimida à esquerda.

Definição 5.4. *Para todo conjunto finito de números naturais B definimos*

$$\mathcal{U}(B) = \{B' : B \subseteq B'\},$$

e dada uma família de conjuntos $\mathcal{B}$, definimos $\mathcal{U}(\mathcal{B}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{U}(B)$.

Com isto vemos que $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ é a família de todos os conjuntos que contêm algum conjunto de $\mathcal{B}$.

Definição 5.5. *Para qualquer $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{k}$ um conjunto $g(\mathcal{B}) \subseteq \bigcup_{i \leq k} \binom{[n]}{k}$ é chamado família geradora de $\mathcal{B}$, se $\mathcal{U}(g(\mathcal{B})) \cap \binom{[n]}{k} = \mathcal{B}$. Além disso, $G(\mathcal{B})$ é a família de todas as famílias geradoras de $\mathcal{B}$.*

Note que $G(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, pois $\mathcal{B} \in G(\mathcal{B})$. A família geradora nada mais é do que uma família $g(\mathcal{B})$ de conjuntos com a propriedade de que, se pegarmos cada conjunto B de $g(\mathcal{B})$ e acrescentarmos, de todas as maneiras possíveis, elementos em B até obter conjuntos com tamanho k, obteremos a família $\mathcal{B}$.

Como exemplo, considere o caso em que $n = 6$, $k = 4$ e $g(\mathcal{C}) = \{\{1,2\},\{2,3,4\}\}$, temos que $\{1,2\}$ dará origem aos conjuntos $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,4,6\}$ e $\{1,2,5,6\}$, enquanto que o conjunto $\{2,3,4\}$ dará origem aos conjuntos $\{1,2,3,4\}$, $\{2,3,4,5\}$ e $\{2,3,4,6\}$ e portanto teremos que os conjuntos

$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,4,5\},$$

$$\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\}$$

formam a família $\mathcal{C}$ gerada por $g(\mathcal{C})$, isto é, $\mathcal{U}(g(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.

Esta é uma ideia parecida com a de bases que geram espaços vetoriais em Álgebra Linear, porém aqui não sabemos a quatidade de elementos do gerador de uma família, nem o tamanho de cada conjunto do gerador. Diremos que um gerador é minimal, se não existe um conjunto do gerador que está contido em outro conjunto do gerador. Por exemplo $\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ é um gerador que não é minimal, pois o conjunto $\{1,2\}$ está contido em $\{1,2,3\}$. Note que o fato de dois geradores serem minimais para a mesma família não implica que eles tenham a mesma quantidade de conjuntos, enquanto que em Álgebra Linear sabemos que todos os conjuntos geradores minimais, ou bases, de um espaço vetorial têm a mesma cardinalidade, o que leva à noção de dimensão do espaço.

Lema 5.6. *Para $\mathcal{A} \in I(n,k,t)$, $n > 2k - t$ temos*

$$|E_1 \cap E_2| \geq t,$$

para quaisquer E_1, $E_2 \in g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$.

Demonstração. Por absurdo, sejam $E_1, E_2 \in g(\mathcal{A})$ com $|E_1 \cap E_2| = e < t$. Em $[n]$, ainda existem $n - |E_1 \cup E_2| = n - |E_1| - |E_2| + e$ elementos que estão fora de $E_1 \cup E_2$. Destes, escolhemos $k - |E_1|$ para gerar um conjunto F_1 de tamanho k a partir de E_1. Logo restam $n - |E_1| - |E_2| + e - k + |E_1| = n - k + e - |E_2|$ elementos fora de F_1 e de

E_2. Escolhendo todos eles e mais os elementos de E_2 para formar F_2, ainda faltarão $k - |E_2| - (n - k + e - |E_2|) = 2k - n - e$ elementos para F_2 ter tamanho k. Se esta quantidade não for positiva, então $|F_2| \geq k$ e $|F_1 \cap F_2| = |E_1 \cap E_2| < t$, que é absurdo. Se esta quantidade for positiva, então seremos obrigados a pegar estes elementos de $F_1 \setminus E_1$, fazendo com que tenhamos $|F_1 \cap F_2| = |E_1 \cap E_2| + 2k - n - e = 2k - n < t$, o que é absurdo também. □

Logo, se uma família é t-intersectante, então sabemos que qualquer gerador dessa família também é t-intersectante.

Definição 5.7. *Para $B = \{b_1, \ldots, b_{|B|}\} \in \binom{[n]}{|B|}$ com $b_1 < \cdots < b_{|B|}$, definimos $s^+(B)$ como sendo o maior elemento $b_{|B|}$ de B. Além disso, para uma família de conjuntos $\mathcal{B}$, definimos $s^+(\mathcal{B}) = \max_{B \in \mathcal{B}} s^+(B)$.*

Definição 5.8. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ com $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Definimos $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))$ como sendo o gerador minimal da família $\mathcal{A}$ no sentido de inclusão de conjuntos, isto é, $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))$ é $\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$ sem os conjuntos que contêm estritamente algum conjunto $\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$. Definimos também $G_*(\mathcal{A}) = \{g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A}) : \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})) = g(\mathcal{A})\}$ como sendo a família de todos os geradores minimais da família $\mathcal{A}$.*

Para cada conjunto de $\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$ podemos perguntar se este cojunto contém algum outro conjunto de $\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$, em caso afirmativo, removemos este do gerador, em caso negativo, mantemos este no gerador. Com isto temos que o gerador minimal sempre existe e é único.

Note que, por definição, $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$, e se esta relação for estrita, então $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})$ pode não ser comprimido à esquerda. Note ainda que, como $\mathcal{A}$ gera si mesmo, temos que $\mathcal{A} \in G_*(\mathcal{A})$.

Lema 5.9. *Para qualquer $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ comprimido à esquerda e $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$ temos* *(i)* $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})) \in G(\mathcal{A})$, *isto é, a compressão à esquerda de um gerador de uma família comprimida à esquerda é um gerador minimal da família.*

(ii) $s^+(\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))) \leq s^+(g(\mathcal{A}))$, *isto é, o maior elemento do gerador comprimido à esquerda é menor ou igual ao maior elemento do gerador.*

(iii) *Para* $A \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))$ *e* $B \preceq A$, *temos que, ou* $B \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))$, *ou existe um* $B' \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A}))$ *com* $B' \subset B$.

Demonstração. Para demonstrarmos o primeiro item, basta mostrarmos que

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))) \cap \binom{[n]}{k} = \mathcal{U}(g(\mathcal{A})) \cap \binom{[n]}{k},$$

pois a aplicação $\mathcal{L}_*$ por definição remove somente os elementos que não alteram a família gerada.

Pela definição de compressão à esquerda temos que $g(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$, e isto implica que $\mathcal{U}(g(\mathcal{A})) \cap \binom{[n]}{k} \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))) \cap \binom{[n]}{k}$. Por outro lado, dado um elemento $B \in (\mathcal{U}(\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))) \cap \binom{[n]}{k}) \setminus \mathcal{A}$, temos que $B = S \cup T$, onde $S \in \mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$. Como $B \notin \mathcal{A}$, temos que $S \notin g(\mathcal{A})$, logo existe um elemento $V \in g(\mathcal{A})$ tal que $S \neq V$, $|S| = |V|$ e $S \preceq V$, e isto implica que $S \cup T \preceq V \cup T$. Porém $V \cup T \in \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A}$ não é comprimia à esquerda, o que é um absurdo.

Para o segundo item, se supusermos que existe um conjunto $B \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})) \setminus g(\mathcal{A})$ tal que $s^+(B) > s^+(g(\mathcal{A}))$, então não existe elemento $A \in g(\mathcal{A})$ tal que $B \preceq A$.

O terceiro item é imediato da nossa definição de minimal, uma vez que $\mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$ é a família de todos os conjuntos que estão à esquerda de algum conjunto de $g(\mathcal{A})$, e como $A \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$, então existe algum conjunto $A' \in g(\mathcal{A})$ tal que $A \preceq A'$, e como $B \preceq A$, pela transitividade temos que $B \preceq A'$, o que implica que $B \in \mathcal{L}(g(\mathcal{A}))$. Portanto a real preocupação é com o fato de o item (iii) estar afirmando algo sobre $\mathcal{L}_*$ ao invés de $\mathcal{L}$, isto é, ou B contém algum elemento de $\mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})$ ou $B \in \mathcal{L}_*(g(\mathcal{A})$. □

Lema 5.10. *Para uma família $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ comprimida à esquerda, e $g(\mathcal{A}) \in G_*(\mathcal{A})$ temos que $\mathcal{A}$ é uma união disjunta da forma*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{E \in g(\mathcal{A})} \mathcal{D}(E). \tag{5.1}$$

onde $\mathcal{D}(E) = \left\{B \in \binom{[n]}{k} : B = E \cup B_1, B_1 \subseteq [s^+(E)+1, n], |B_1| = k - |E|\right\}$. Além disso se escolhermos $E \in g(\mathcal{A})$ tal que $s^+(E) = s^+(g(\mathcal{A}))$ e considerarmos o conjunto $\mathcal{A}_E = (\mathcal{U}(E) \setminus \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus E)) \cap \binom{[n]}{k}$ dos elementos de $\mathcal{A}$ que são gerados somente por E, então $\mathcal{A}_E = \mathcal{D}(E)$ e $|\mathcal{A}_E| = \binom{n-s^+(E)}{k-|E|}$.

Note que, com este lema, temos que a família $\mathcal{A}$ comprimida à esquerda pode ser escrita como a união das famílias dos conjuntos gerados só por E para cada E do gerador.

É fácil ver que $\mathcal{A}_E = \mathcal{D}(E)$. Para mostrarmos que a união (2) é de fato disjunta, vamos supor por absurdo que esse não seja o caso. Então existiriam conjuntos $E_1, E_2 \in g(\mathcal{A})$ tais que $\mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2) \neq \emptyset$, portanto vamos supor $F = E_1 \cup B_1 = E_2 \cup B_2$ com $B_1 \subseteq [s^+(E_1)+1, n]$, $B_2 \subseteq [s^+(E_2)+1, n]$, $|B_1| = k - |E_1|$ e $|B_2| = k - |E_2|$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $s^+(E_1) \leq s^+(E_2)$. Como todos os elementos de E_1 pertencem ao conjunto F, então dado um elemento x de E_1, temos que $x \in E_2$, pois não pode pertencer a B_2, já que $s^+(E_1) \leq s^+(E_2)$, logo $E_1 \subseteq E_2$, o que é absurdo, pois $g(\mathcal{A}) \in G_*(\mathcal{A})$.

Lema 5.11. *Sejam $\mathcal{A} \in LI(n,k,t)$ e $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$, e considere $E_1, E_2 \in g(\mathcal{A})$ com as propriedades*

$$i \notin E_1 \cup E_2 \text{ e } j \in E_1 \cap E_2$$

para $i, j \in [n]$ com $i < j$. Então $|E_1 \cap E_2| \geq t+1$.

Demonstração. Como temos que $i \notin E_1, j \in E_1, i < j, \mathcal{A} \in LI(n,k,t)$, então $E_1^* = (E_1 \cup \{i\}) \setminus \{j\} \in g(\mathcal{A})$ e isto implica que $|E_1^* \cap E_2| \geq t$, que implica em $|((E_1 \cup \{j\}) \setminus \{i\}) \cap E_2| \geq t+1$. Logo $|E_1 \cap E_2| \geq t+1$. $\square$

Definição 5.12. *Para $\mathcal{A} \in LI(n,k,t)$ seja*

$$s_{min}(G(\mathcal{A})) = \min_{g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})} s^+(g(\mathcal{A})).$$

Lema 5.13. *Seja $n > 2k-t, \mathcal{A} \in LI(n,k,t)$ com $|\mathcal{A}| = M(n,k,t)$ e seja*

$$n > \frac{(k-t+1)(t+2r+1)}{r+1} = (k-t+1)\left(2 + \frac{t-1}{r+1}\right)$$

para algum $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então

$$s_{min}(G(\mathcal{A})) \leq t+2r.$$

Este é o lema que realmente nos fornece uma grande informação para a demonstração do Teorema 1.6, pois ele estipula, não somente uma cota superior para o menor dos maiores elementos de cada gerador, como também que esta cota superior é $t+2r$, o que, se olharmos para a definição da família $\mathcal{F}_r$, é exatamente o que precisamos que seja verdade.

Para demonstrarmos este lema, iremos supor, por contradição, que $s_{\min}(g(\mathcal{A})) = t+2r+\delta$, com $\delta > 0$, e como consequencia disto, que existe uma família $\mathcal{A}'$, que satisfaz as mesmas hipóteses que a família $\mathcal{A}$ e que além disso satisfaz $|\mathcal{A}'| > |\mathcal{A}|$

Para tal, particionaremos os elementos de $g(\mathcal{A})$ que possuem o elemento máximo $t+2r+\delta$, de acordo com seus tamanhos i, onde $t \leq i \leq t+2r+\delta$ e mostraremos que todos estes conjuntos devem ser vazios. Após isto, o resultado seguirá, construindo geradores convenientes para cada caso quando quando $i \neq (2t+2r+\delta)/2$ e para o caso contrário.

Demonstração. Podemos assumir que $n \geq 2k - t + 2$, pois quando $n = 2k - t + 1$ temos que $r \geq k - t + 1$ pelas contas abaixo, e portanto o lema vale.

$n > \frac{(k-t+1)(t+2r+1)}{r+1} = (k-t+1)(2 + \frac{t-1}{r+1})$ e $n = 2k - t + 1$

$\Rightarrow 2k - t + 1 > \frac{(k-t+1)(t+2r+1)}{r+1}$

$\Rightarrow 2rk + r(-t+1) + 2k - t + 1 - 2rk - 2r(-t+1) > (k-t+1)(t+1)$

$\Rightarrow r(t-1) > (k-t+1)(t-1) + 2k + 2(-t+1) - 2k + (t-1)$

$\Rightarrow r \geq k - t + 1$

$\Rightarrow t + 2r \geq 2k - t + 2 > n = 2k - t + 1$

Portanto vamos supor $n \geq 2k - t + 2$.

Seja $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{S})$ tal que $s^+(g(\mathcal{A})) = s_{\min}(G(\mathcal{A}))$.

Vamos supor por contradição que $s^+(g(\mathcal{A})) = t + 2r + \delta$ para algum $\delta > 0$. Mostraremos que existe uma família $\mathcal{A}' \in I(n,k,t)$ tal que $|\mathcal{A}'| > |\mathcal{A}| = M(n,k,t)$, o que é uma contradição.

Para isto, começaremos particionando o gerador como a união disjunta

$$g(\mathcal{A}) = g_0(\mathcal{A}) \cup g_1(\mathcal{A}),$$

onde $g_0(\mathcal{A}) = \{B \in g(\mathcal{A}) : s^+(B) = t + 2r + \delta\}$ e $g_1(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) \backslash g_0(\mathcal{A})$. Pelo Lema 5.6, temos que, dados $B_1 \in g_0(\mathcal{A})$ e $B_2 \in g_1(\mathcal{A})$ vale que

$$|B_1 \backslash \{t + 2r + \delta\} \cap B_2| \geq t.$$

Propriedade 5.14. *Para uma família $\mathcal{A}$ t-intersectante e quaisquer $E_1, E_2 \in g_0(\mathcal{A})$, com $|E_1 \cap E_2| = t$, necessariamente temos que $|E_1| + |E_2| = 2t + 2r + \delta$.*

Demonstração. Como $|E_1 \cap E_2| = t$, não podem valer todas as hipóteses do Lema 5.11, porém temos que existe um j tal que $j \in E_1 \cap E_2$, pois $t + 2r + \delta \in E_1 \cap E_2$, logo não pode existir um $i < t+2r+\delta$ tal que $i \notin E_1 \cup E_2$, logo para todo $i \in [t+2r+\delta]$ temos que $i \in E_1 \cup E_2$. Logo temos que $|E_1| + |E_2| = |E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| \Rightarrow |E_1| + |E_2| = t + 2r + \delta + t = 2t + 2r + \delta$. $\square$

Agora, vamos particionar $g_0(\mathcal{A})$ de acordo com as cardinalidades de seus elementos.

$$\mathcal{R}_i = g_0(\mathcal{A}) \cap \binom{[n]}{i},\ g_0(\mathcal{A}) = \bigcup_{t \leq i \leq t+2r+\delta} \mathcal{R}_i.$$

Note que esta união é obviamente disjunta e que a desigualdade que a determina é estrita, pois os casos $\mathcal{R}_t \neq \emptyset \neq \mathcal{R}_{t+2r+\delta}$ são fáceis de resolver, como veremos abaixo.

Se temos $\mathcal{R}_t \neq \emptyset$, então existe um conjunto $\alpha = \{i_1, \ldots, i_t\} \in \mathcal{R}_t$, logo $\alpha \in g(\mathcal{A})$, que é comprimido à esquerda, portanto $[t] \in g(\mathcal{A})$, porém $g(\mathcal{A})$ é, ainda, t-intersectante, portanto $\alpha = [t]$. Logo temos que t é o elemento máximo de $g(\mathcal{A})$, e isto implica $r = 0 = \delta$, o que é absurdo, pois estamos supondo $\delta > 0$.

Agora, se $\mathcal{R}_{t+2r+\delta} \neq \emptyset$, como $t + 2r + \delta$ é o elemento máximo de $g(\mathcal{A})$, então o único conjunto em $\mathcal{R}_{t+2r+\delta}$ é $[t + 2r + \delta]$. Logo $\{[t + 2r + \delta]\} = g_0(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A})$. Portanto vale que $|\mathcal{A}| = \binom{n-(t+2r+\delta)}{k-(t+2r+\delta)}$, porém como $|\mathcal{A}|$ é máxima, temos que $r = 0 = \delta$, o que é novamente absurdo.

Portanto, vamos supor que

$$\mathcal{R}_t = \emptyset = \mathcal{R}_{t+2r+\delta},$$

logo $g_0(\mathcal{A}) = \bigcup_{t<i<t+2r+\delta} \mathcal{R}_i$.

Agora consideramos a família dos conjuntos de $\mathcal{R}_i$ só que sem o elemento máximo $t + 2r + \delta$:

$$\mathcal{R}'_i = \{E \subseteq [t + 2r + \delta - 1] : E \cup \{t + 2r + \delta\} \in \mathcal{R}_i\}.$$

Com isto, temos $|\mathcal{R}_i| = |\mathcal{R}'_i|$ e também $|E'| = i-1$ para $E' \in \mathcal{R}'_i$. Pela Propriedade 5.14, temos que, para quaisquer $E'_1 \in \mathcal{R}'_i$, $E'_2 \in \mathcal{R}'_j$, com $i+j \neq 2t+2r+\delta$,

$$|E'_1 \cap E'_2| \geq t,$$

pois $|E'_1| = i-1 \Rightarrow |E_1| = i$, $|E'_2| = j-1 \Rightarrow |E_2| = j$, e se tivéssemos $|E'_1 \cap E'_2| = t-1$, teríamos que $|E_1 \cap E_2| = t$ e a Propriedade 5.14 garantiria que $|E_1| + |E_2| = 2t + 2r + \delta \Rightarrow i + j = 2t - 2 + 2r + \delta$, e isto é uma contradição.

Para concluir a demonstração, mostraremos que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $t < i < t + 2r + \delta$ temos $\mathcal{R}_i = \emptyset$. Por absurdo, vamos supor que isto não é verdade.

Primeiramente note que, se temos que $|E_1| + |E_2| = 2t + 2r + \delta$ para $E_1 \in g_0(\mathcal{A})$ e $E_2 \in g_0(\mathcal{A})$, então temos que $|E_j| > k - (n - t - 2r - \delta)$, para $j = 1$ e $j = 2$, caso contrário, sem perda de generalidade, teríamos $|E_1| \leq k - (n - t - 2r - \delta)$, o que implicaria $|E_2| = 2t + 2r + \delta - |E_1| \geq 2t + 2r + \delta - (k - (n - t - 2r - \delta)) = 2t + 2r + \delta - (k - n + t + 2r + \delta) = 2t + 2r + \delta - k + n - t - 2r + \delta = n - k + t$. Como $|E_2| \leq k$, temos que $k \geq |E_2| \geq n - k + t$, de onde deduzimos $2k - t \geq n$, o que é um absurdo.

Portanto, se para todo i, temos $i \leq k - (n - t - 2r - \delta)$, nós temos também que $\mathcal{R}_i = \emptyset$. Logo $\mathcal{H} = (g(\mathcal{A}) \setminus g_0(\mathcal{A})) \cup (\bigcup_{t<i<2t+2r+\delta} \mathcal{R}'_i)$ é t-intersectante, $s^+(\mathcal{H}) < s^+(g(\mathcal{A}))$, pois $\mathcal{H}$ não possui o elemento máximo $2t + 2r + \delta$, e por esse mesmo motivo $|\mathcal{U}(\mathcal{H}) \cap \binom{[n]}{k}| \geq |\mathcal{A}|$, o que é uma contradição, já que estamos supondo que $\mathcal{A}$ é a maior família t-intersectante.

Suponhamos então que, para i com $k - (n - t - 2r - \delta) < i < t + 2r + \delta$, temos $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$, e portanto $\mathcal{R}'_i \neq \emptyset$. Distinguimos dois casos:

Caso (a) $i \neq (2t + 2r + \delta)/2$

Considere as seguintes famílias.

$$f_1 = g_1(\mathcal{A}) \cup (g_0(\mathcal{A}) \setminus (\mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i})) \cup \mathcal{R}'_i.$$

$$f_2 = g_1(\mathcal{A}) \cup (g_0(\mathcal{A}) \setminus (\mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i})) \cup \mathcal{R}'_{2t+2r+\delta-i}.$$

Observe que f_1 e f_2 são t-intersectantes, pois $g_0(\mathcal{A})$ é t-intersectante, logo removendo elementos continua t-intersectante, unindo com $g_1(\mathcal{A})$ se mantém t-intersectante porque $g(\mathcal{A})$ é t-intersectante, e unindo com $\mathcal{R}'_i$, ou com $\mathcal{R}'_{2t+2r+\delta-i}$ continua t-intersectante porque $\mathcal{R}'_i$ e $\mathcal{R}'_{2t+2r+\delta-i}$ são t-intersectantes.

Além disso, para $i = 1,\ 2$, temos que também são t-intersectantes as famílias

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{U}(f_i) \cap \binom{[n]}{k}.$$

Considere agora a família $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1$. Note que esta família é formada pelos conjuntos de $\mathcal{A}$ sem os conjuntos gerados por $g_1(\mathcal{A})$, sem os conjuntos gerados por $\mathcal{R}'_i$ e sem os conjuntos gerados por $g_0(\mathcal{A})$, a menos dos de tamanho i e de tamanho $2t + 2r + \delta - i$; porém, estes conjuntos gerados pelos de tamanho i são gerados também por $\mathcal{R}'_i$, e portanto foram retirados de $\mathcal{A}$ também. Logo $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1$ são os conjuntos que são gerados somente por $\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}$. Este mesmo raciocínio nos informa também que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_2$ é a família dos conjuntos que são formados somente por $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{A}$ é a família dos conjuntos gerados somente por $\mathcal{R}_i$ que não possuem o elemento $2t + 2r + \delta$ e $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{A}$ é a família dos conjuntos gerados somente por $\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}$ que não possuem o elemento $2t+2r+\delta$. Note que, aqui, estamos usando $i \neq (2t + 2r + \delta)/2 \Rightarrow 2i \neq 2t + 2r + \delta \Rightarrow i \neq 2t + 2r + \delta - i$.

Assim,

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1 = (\mathcal{U}(\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}) \setminus \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{2t+2r+\delta})) \cap \binom{[n]}{k}.$$

Isto implica que

$$|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1| = \left| (\mathcal{U}(\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}) \setminus \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{2t+2r+\delta})) \cap \binom{[n]}{k} \right|.$$

Agora, utilizaremos este fato para determinar $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1|$. Note que, para cada conjunto de $\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}$, existem $\binom{n-t-2r-\delta}{k-2t-2r-\delta+i}$ maneiras de completá-lo e, pelo Lema 5.10, temos que

$$|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1| = |\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}|\binom{n-t-2r-\delta}{k-2t-2r-\delta+i}.$$

Dado $B_1 \in \mathcal{R}'_i$, sabemos que $|B_1| = i-1$. Claramente temos que $B_1 \notin g(\mathcal{A})$, já que $g(\mathcal{A}) \in G_*(\mathcal{A})$ e $B_1 \cup \{t+2r+\delta\} \in \mathcal{R}_i \subseteq g(\mathcal{A})$.

Portanto, para todo $A \in \binom{[n]}{k}$ com $A = B_1 \cup B_2$, $|B_2| = k-(i-1)$ e $B_2 \subseteq [t+2r+\delta+1, n]$, temos que $A \in \mathcal{B}_1$, pois $B_1 \in \mathcal{R}'_i$, o que implica

$$(B_1 \cup B_2) \in \left(\mathcal{U}(\mathcal{R}'_i) \cap \binom{[n]}{k}\right) \subseteq \left(\mathcal{U}(f_1) \cap \binom{[n]}{k}\right) = \mathcal{B}_1,$$

e temos também que $A \notin \mathcal{A}$, já que A não pode ter sido gerado por B_1, pois $B_1 \notin g(\mathcal{A})$, e qualquer outro conjunto de $g(\mathcal{A})$ que tenha gerado A manteria seus elementos em A, o que é absurdo, pois os únicos elementos de $[t+2r+\delta]$ que estão em A são os elementos de B_1, e um conjunto contido em B_1 também não pode pertencer a $g(\mathcal{A})$, pois $g(\mathcal{A}) \in G_*(\mathcal{A})$.

Além disso, note também que, para $B_1, B'_1 \in \mathcal{R}'_i$ com $B_1 \neq B'_1$, temos que $B_1 \cup B_2 \neq B'_1 \cup B'_2$ para todos $B_2, B'_2 \subseteq [t+2r+\delta+1, n]$, pois $B_1 \cap [t+2r+\delta] \neq B'_1 \cap [t+2r+\delta]$.

Logo temos

$$|\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{A}| \geq |\mathcal{R}'_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1} = |\mathcal{R}_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1},$$

pois, para cada B_1 existem $\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1}$ conjuntos B_2. Na verdade, como explicado anteriormente, temos que $\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}(g(\mathcal{R}'_i))$ e portanto temos igualdade acima.

Com raciocínio análogo, temos

$$|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_2| = |\mathcal{R}_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i},$$

$$|\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{A}| = |\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}|\binom{n-t-2r-\delta}{k-2t-2r-\delta+i+1}.$$

Como $\max|\mathcal{B}_i| \leq \mathcal{A}$, temos

$$|\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{A}| = |\mathcal{R}_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1} \leq |\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}|\binom{n-t-2r-\delta}{k-2t-2r-\delta+i} = |\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1|$$

e

$$|\mathcal{B}_2\setminus\mathcal{A}| = |\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i}|\binom{n-t-2r-\delta}{k-2t-2r-\delta+i+1} \leq |\mathcal{R}_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i} = |\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_2|.$$

Com a primeira equação podemos supor que $\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{R}_{2t+2r+\delta-i} = \emptyset \Rightarrow |\mathcal{R}_i|\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1} \leq 0 \Rightarrow |\mathcal{R}_i| = 0 \Rightarrow \mathcal{R}_i = \emptyset$, e estamos assumindo $\mathcal{R}_i \neq \emptyset$.

Com as duas equações podemos ver que $\binom{n-t-2r-\delta}{k-i+1} \leq \binom{n-t-2r-\delta}{k-i}$, o que implica $(n+t-k-i)(n-t-2r-\delta-k+i) \leq (k-i+1)(k-2t-2r-\delta+i+1)$.

Porém isto é falso, pois para $n = 2k-t+2$ isto já não é verdade, e temos que $n \geq 2k-t+2$, sendo que o único lado que depende de n é o esquerdo, que pode ser visto como uma função crescente em n, e portanto não valerá também para todo $n \geq 2k-t+2$.

Portanto temos que $\mathcal{R}_i = \emptyset$ para todo $i \neq (2t+2r+\delta)/2$.

Caso (b) $i = (2t+2r+\delta)/2$

Para este caso precisaremos do Princípio da Casa dos Pombos, enunciado abaixo.

Lema 5.15 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** *Dados números naturais n e p, considere os conjuntos $A_1, \ldots, A_p \subseteq 2^{[n]}$, com $\sum_{i\in[p]} |A_i| > np$. Então existe um $i \in [p]$ tal que $|A_i| > n$.*

Necessariamente temos que δ é par. Consideramos o conjunto $\mathcal{R}'_{t+r+\delta/2}$ e consideramos que, para $B \in \mathcal{R}'_{t+r+\delta/2}$, $|B| = t + r + \delta/2 - 1$ e $B \subseteq [t + 2r + \delta - 1]$. Pelo Lema 5.15, existem $i \in [t+2r+\delta-1]$ e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}'_{t+r+\delta/2}$ tais que $i \notin B$ para todo $B \in \mathcal{T}$ e o tamanho de $\mathcal{T}$ é maior que a média dos tamanhos de todas as famílias, isto é,

$$|\mathcal{T}| \geq \frac{r+\delta/2}{t+2r+\delta-1}|\mathcal{R}'_{t+r+\delta/2}| = \frac{r+\delta/2}{t+2r+\delta-1}|\mathcal{R}_{t+r+\delta/2}|.$$

Pelo Lema 5.11, aplicado para $E_1 = B_1 \cup \{t + 2r + \delta\}$ e $E_2 = B_2 \cup \{t + 2r + \delta\}$, temos que $|E_1 \cap E_2| \geq t + 1$, e portanto $|B_1 \cap B_2| \geq t$ para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$. Uma vez que, pelo caso (a), $\mathcal{R}_j = \emptyset$ para $j \neq t + r + \delta/2$, temos que $f' = (g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{t+r+\delta/2}) \cup \mathcal{T}$ é t-intersectante, pois

$$g_0(\mathcal{A}) = \bigcup_{t<i<t+2r+\delta} \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{t+r+\delta/2} \Rightarrow g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{t+r+\delta/2} = g_1(\mathcal{A}).$$

Agora mostraremos que

$$\left|\mathcal{U}(f') \cap \binom{[n]}{k}\right| > |\mathcal{A}|.$$

Considere agora a união disjunta

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(g(\mathcal{A})) \cap \binom{[n]}{k} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \tag{5.2}$$

onde $\mathcal{D}_1 = \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{t+r+\delta/2}) \cap \binom{[n]}{k}$ (gerados por $g_1(\mathcal{A})$), e $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{U}(\mathcal{R}_{t+r+\delta/2}) \setminus \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{t+r+\delta/2})) \cap \binom{[n]}{k}$ (gerados somente por $\mathcal{R}_{t+r+\delta/2} = g_0(\mathcal{A})$). Considere também a união disjunta

$$\mathcal{U}(f') \cap \binom{[n]}{k} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3, \tag{5.3}$$

uma união disjunta onde $\mathcal{D}_3 = (\mathcal{U}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{U}(g(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{R}_{t+r+\delta/2})) \cap \binom{[n]}{k}$ (gerados por $\mathcal{T}$ que não são gerados por $g_1(\mathcal{A})$).

Note que, por (5.2) e (5.3) temos que

$$\left|\mathcal{U}(f') \cap \binom{[n]}{k}\right| > |\mathcal{A}| \Leftrightarrow |\mathcal{D}_3| > |\mathcal{D}_2|.$$

Portanto mostraremos que $|\mathcal{D}_3| > |\mathcal{D}_2|$.

Aplicando o Lema 5.10 obtemos facilmente que

$$|\mathcal{D}_2| = |\mathcal{R}_{t+r+\delta/2}|\binom{n-t-2r-\delta}{k-t-r-\delta/2}.$$

Considere, então, qualquer $B \in \mathcal{T}, |B| = t+r+\delta/2-1$. Claramente $B \notin g(\mathcal{A})$, pois $B \cup \{t+2r+\delta\} \in g(\mathcal{A})$ e $g(\mathcal{A}) \in G_*(\mathcal{A})$. Portanto, pelo Lema 5.10, para todo $A \in \binom{[n]}{k}$ da forma $A = B \cup C_1$, onde $|C_1| = k - |B|$ e $C_1 \subseteq [t+2r+\delta, n]$, temos $A \in \mathcal{D}_3$.

Note também que, para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$, $B_1 \neq B_2$, temos $B_1 \cup C_1 \neq B_2 \cup C_2$ para todo $C_1, C_2 \subseteq [t+2r+\delta, n]$.

Portanto, para cada elemento B de $\mathcal{T}$, podemos escolher $\binom{n-t-2r-\delta+1}{k-t-r-\delta/2+1}$ conjuntos C_1 para formar conjuntos $A = B \cup C_1 \in \mathcal{D}_3$. Logo

$$|\mathcal{D}_3| \geq |\mathcal{T}|\binom{n-t-2r-\delta+1}{k-t-r-\delta/2+1}.$$

Olhando para estas desigualdades e para a equivalência, podemos ver que

$$\frac{r+\delta/2}{t+2r+\delta-1}\binom{n-t-2r-\delta+1}{k-t-r-\delta/2+1} > \binom{n-t-2r-\delta}{k-t-r-\delta/2} \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow \left(r+\frac{\delta}{2}\right)(n-t-2r-\delta+1) > \left(k-t-r-\frac{\delta}{2}+1\right)(t+2r+\delta-1)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{(k-t+1)(t+2r+\delta-1)}{r+\delta/2}. \tag{5.5}$$

E como δ é um número inteiro par e positivo, temos que $\delta \geq 2$, de forma que

$$\frac{t+2r+1}{r+1} \geq \frac{t+2r+\delta-1}{r+\delta/2}.$$

Logo (5.5) vale, o que implica que (5.4) vale, o que implica $\delta = 0$ e o lema está provado. $\square$

Antes da demonstração do Teorema 1.6, veremos a demonstração da Conjectura $4m$, que possui uma estratégia muito semelhante à utilizada para demonstrar o Teorema 1.6, que é uma generalização da Conjectura $4m$. Para esta demonstração precisaremos de um Corolário, que seguirá diretamente do Lema 5.13, e de mais um lema.

Conjectura 5.16 (Conjectura 4m)**.** *Dado um número inteiro positivo m, temos que*

$$M(4m, 2m, 2) = |\mathcal{F}_{m-1}| = \frac{1}{2}\left(\binom{4m}{2m} - \binom{2m}{m}^2\right)$$

Corolário 5.17. *Seja $\mathcal{A} \in LI(4m, 2m, 2)$ tal que $|\mathcal{A}| = M(4m, 2m, 2)$. Então*

$$s_{min}(G(\mathcal{A})) \leq 2m.$$

Demonstração. Basta escolhermos $r = m - 1$ e observarmos que

$$4m^2 > 4m^2 - 1 \Rightarrow 4m^2 > (2m-1)(2m+1) \Rightarrow 4m > \frac{(2m-1)(2m+1)}{m}$$

para aplicarmos o Lema 5.13. □

Lema 5.18. *Para qualquer $\mathcal{A} \in I(n, k, t)$ consideremos qualquer família geradora $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$. Além disso, consideremos a família complementar $\bar{\mathcal{A}} \in I(n, n-k, n-2k+t)$, e seja $f(\bar{\mathcal{A}})$ a família geradora de $\bar{\mathcal{A}}$ em $G(\bar{\mathcal{A}})$. Então, para todo $A \in g(\mathcal{A})$ e $B \in f(\bar{\mathcal{A}})$, temos*

$$|A \cup B| \geq n - k + t.$$

Antes da demonstração, note que o motivo de $\bar{\mathcal{A}} \in I(n, n-k, n-2k+t)$, é simplesmente que, os conjuntos complementares aos conjuntos de $\mathcal{A}$ têm tamanho $n-k$, e o tamanho da intersecção é fácil de calcular, pois, dados $A, B \in \mathcal{A}$ temos $|A \cap B| \geq t$. Dos n elementos para formar $\bar{A}$ e $\bar{B}$, existem t que não podem ser escolhidos. Logo, para cada um, serão escolhidos $n-k$ elementos dentre os $n-t$ que restaram, portanto é necessário que $(n-k) + (n-k) - |\bar{A} \cap \bar{B}| \leq n - t \Rightarrow n - 2k + t \leq |\bar{A} \cap \bar{B}|$.

Demonstração. Vamos supor por absurdo que $|A \cup B| \leq n - k + t - 1$.

Escolhemos qualquer conjunto F de tal modo que $A \cup B \subseteq F$, e $|F| = n - k + t - 1$. Sabemos que

$$\mathcal{U}(A) \cap \binom{[n]}{k} \subseteq \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{U}(B) \cap \binom{[n]}{n-k} \subseteq \bar{\mathcal{A}}.$$

Uma vez que $n > 2k - t$, temos que $n - k + t > k \Rightarrow n - k + t - 1 \geq k$. Além disso, $n - k + t - 1 \geq n - k$ já que $t \geq 1$. Logo, temos que $n - k + t - 1 \geq \max\{k, n-k\}$.

Portanto podemos escolher $A^* \in \mathcal{U}(A) \cap \binom{[n]}{k}$ e $B^* \in \mathcal{U}(B) \cap \binom{[n]}{n-k}$ de tal modo que $A^* \subseteq F$ e $B^* \subseteq F$.

Consideremos agora $\bar{B}^* \in \mathcal{A}$ e observemos que $|\bar{B}^*| = n - (n-k) = k = |A^*|$, e como $A^* \cap \bar{B}^* \subseteq F \cap \bar{B}^*$, temos que $|A^* \cap \bar{B}^*| \leq |F \cap \bar{B}^*| = |F| - |F \cap B^*|$, pois $B^* \subseteq F$, e isto ainda implica que $|A^* \cap \bar{B}^*| \leq (n - k + t - 1) - (n - k) = t - 1$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{A} \in I(n, k, t)$. $\square$

Agora demonstraremos a Conjectura-4m, apesar de esta ser um caso particular do Teorema 1.6, que será mostrado mais tarde.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \in I(4m, 2m, 2)$, onde $|\mathcal{A}| = M(4m, 2m, 2)$. Seja também $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$ de tal modo que $s^+(g(\mathcal{A})) = s_{min}(G(\mathcal{A}))$.

Lembremos da definição da família $\mathcal{F}_i$, que nesta demonstração será usada para $n = 4m$, $k = 2m$, $t = 2$ e $i = m - 1$, isto é $\mathcal{F}_{m-1} = \{F \in \binom{[4m]}{2m} : |F \cap [2m]| \geq m + 1\}$.

Do corolário acima temos que $s_{min}(G(\mathcal{A})) = s^+(g(\mathcal{A})) \leq 2m$, isto é, para $B \in g(\mathcal{A})$, temos $B \subseteq [2m]$.

Consideremos o complementar de $\mathcal{A}$

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \subseteq [4m] : [4m] \setminus A \in \mathcal{A}\}.$$

Claramente temos que $\bar{\mathcal{A}} \in I(4m, 2m, 2), |\bar{\mathcal{A}}| = M(4m, 2m, 2), \mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \emptyset$ e $\bar{\mathcal{A}}$ é comprimido à direita. Logo existe uma família geradora $f(\bar{\mathcal{A}})$ tal que, para todo $B \in f(\bar{\mathcal{A}})$, nós temos $B \subseteq [2m+1, 4m]$.

Agora podemos dividir em três casos:

Se, para todo $B_1 \in g(\mathcal{A})$, temos que $|B_1| \geq m+1$ e que $B_1 \subseteq [2m]$, então, pela definição de $\mathcal{F}_{m-1}$, temos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{m-1}$, e pela maximidade da família $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{m-1}$. Logo $|\bar{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}| = |\mathcal{F}_{m-1}|$.

Se, para todo $B_2 \in f(\bar{\mathcal{A}})$ nós temos $|B_2| \geq m+1$, então concluímos também que $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{m-1} \Rightarrow |\bar{\mathcal{A}}| = |\mathcal{A}| = |\mathcal{F}_{m-1}|$.

Se nenhum dos casos acima acontece, então temos que existem $B_1 \in g(\mathcal{A}), B_2 \in f(\bar{\mathcal{A}})$ com $|B_1| \leq m$ e $|B_2| \leq m$. Logo existe um conjunto A tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq A$, que implica que $A \in \mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}}$, o que é um absurdo.

No último caso ainda poderíamos ter argumentado que $|B_1 \cup B_2| \leq 2m < 2m+2 = n-k+t$, o que contradiz o Lema 5.18. $\square$

Já que a família é conhecida, podemos calcular seu tamanho, isto é, podemos mostrar que

$$M(4m, 2m, 2) = \frac{1}{2}\left(\binom{4m}{2m} - \binom{2m}{m}^2\right).$$

Começamos separando os $4m$ elementos em um conjunto A com os primeiros $2m$ elementos, e um conjunto B com os últimos $2m$ elementos. Precisamos contar a quantidade de conjuntos de tamanho $2m$, que possuem mais do que m

elementos de A. Dentre todos os conjuntos de $\binom{[4m]}{2m}$ vamos retirar aqueles que possuem exatamente m elementos em cada conjunto, isto é,

$$\binom{4m}{2m} - \binom{2m}{m}\binom{2m}{m}.$$

Agora precisamos retirar desta quantidade, a quantidade de conjuntos de tamanho $2m$ que possuem menos do que m elementos de A. Porém, para cada i, a quantidade de conjuntos com $m-i$ elementos de A e $m+i$ elementos de B é a mesma quantidade de conjuntos que possuem $m+i$ elementos de A e $m-i$ elementos de B. Logo, metade dos conjuntos que sobraram têm mais do que m elementos de A, e a outra metade têm menos do que m elementos de A. Portanto basta dividir a quantidade acima por dois e chegar no resultado esperado

$$M(4m, 2m, 2) = \frac{1}{2}\left(\binom{4m}{2m} - \binom{2m}{m}^2\right).$$

Finalmente demonstraremos o Teorema 1.6.

Demonstração. Consideraremos os dois casos a seguir:

Caso (i)

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) < n < (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r}\right).$$

Caso (ii)

$$n = (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right).$$

Para o primeiro caso, escolhemos $\mathcal{A} \in LI(n, k, t)$ com $|\mathcal{A}| = M(n, k, t)$, e seja $g(\mathcal{A}) \in G(\mathcal{A})$ com $s^+(g(\mathcal{A})) = s_{min}(G(\mathcal{A}))$.

Pelo Lema 5.13, sabemos que $s^+(g(\mathcal{A})) \leq t + 2r$. Sabemos ainda que $\bar{\mathcal{A}} \in I(n, n-k, n-2k+t)$, o complementar de $\mathcal{A}$, é uma família comprimida à direita que satisfaz $|\bar{\mathcal{A}}| = M(n, n-k, n-2k+t)$. Queremos agora encontrar os valores de k', t' e r' para esta família complementar $\bar{\mathcal{A}}$.

Pela hipótese deste caso, temos que $k \geq t + r$, pois

$2k - t < n < (k-t+1)\left(2 + \frac{t-1}{r}\right)$

$\Rightarrow r(2k-t) < rn < (k-t+1)(2r+t-1)$

$\Rightarrow r(2k-t) + 1 \leq rn$, e $rn + 1 \leq (k-t+1)(2r+t-1)$

$\Rightarrow r(2k-t) + 2 \leq (k-t+1)(2r+t-1)$

$\Rightarrow r(2k-t) \leq 2kr + kt - k - 2rt - t^2 + t + 2r + t - 3$

$\Rightarrow 2rt + t^2 - 2t - 2r + 3 \leq k(t-1)$

$\Rightarrow (t-1)(2r+t-1) + 2 \leq k(t-1)$, sendo que, pela hipótese deste caso temos $t \geq 2$, logo

$\frac{2}{t-1} > 0$, e isto implica que

$k \geq t + 2r + (\frac{2}{t-1} - 1) > t + 2r - 1$

$\Rightarrow k \geq t + 2r$.

A partir de manipulações algébricas, podemos verificar que, para $k > t + r$, é verdade que

$$(k-t+1)\left(2 + \frac{n-2k+t-1}{k-t-r+1}\right) < n < (k-t+1)\left(2 + \frac{n-2k+t-1}{k-t-r}\right).$$

Por outro lado, para $k = t + r$ temos que

$$(k-t+1)(n-2k+t+1) < n.$$

Considere, agora, $k' = n - k$ e $t' = n - 2k + t$. Podemos calcular r' como segue abaixo.

Como, $k \geq t+r$, temos que $k-t-r+1>0$, portanto

$-1 < \frac{(k-t-r+1)(t-1)}{r+1}$

$\Rightarrow 2k-t-2k+t-1 < \frac{(k-t-r+1)(t-1)}{r+1}$

$\Rightarrow n-2k+t-1 < \frac{(k-t-r+1)(t-1)}{r+1}$, pois $n > 2k-t$

$\Rightarrow \frac{n-2k-t+1}{k-t-r+1} < \frac{t-1}{r+1}$

$\Rightarrow (k-t+1)(2+\frac{n-2k+t-1}{k-t-r+1}) < (k-t+1)(2+\frac{t-1}{r+1}) < n.$

Assim, concluímos que $r' = k-t-r$.

Portanto obtemos, respectivamente, que

$$(k'-t'+1)\left(2+\frac{t'-1}{r'+1}\right) < n < (k'-t'+1)\left(2+\frac{t'-1}{r'}\right)$$

e

$$(k'-t'+1)(t'+1) < n.$$

Note que $k'-t' = k-t$.

Com isto obtemos um gerador $f(\bar{\mathcal{A}}) \in G(\bar{\mathcal{A}})$ com a seguinte propriedade.

$$B \in f(\bar{\mathcal{A}}) \Rightarrow B \subseteq [n-(t'+2r')+1, n] = [t+2r+1, n].$$

Agora, assim como na demonstração da Conjectura-4m, dividimos em três casos.

(a) Se, para todo $B_1 \in g(\mathcal{A})$, nós temos $|B_1| \geq t+r$, então pela definição da família $\mathcal{F}_r$, temos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_r$, e pela maximidade da família $\mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A} = \mathcal{F}_r$.

(b) Se, para todo $B_2 \in f(\bar{\mathcal{A}})$, temos $|B_2| \geq t'+r'$, então claramente temos também $\mathcal{A} = \mathcal{F}_r$

(c) Se nenhum dos casos acima ocorre, então temos $B_1^* \in g(\mathcal{A}), B_2^* \in f(\bar{\mathcal{A}})$ com $|B_1^*| \leq t + r - 1$ e $|B_2^*| \leq t' + r' - 1 = n - k - r - 1$ e, pelo Lema 5.18, chegamos em uma contradição devido a $|B_1^* \cup B_2^*| \leq n - k - t + 2$.

Omitimos a demonstração do segundo caso, pois os passos realizados são exatamente os mesmos. A única diferença é que teremos duas configurações diferentes que gerarão famílias de mesmo tamanho.

$\square$

6 UM TEOREMA DE ERDŐS-KO-RADO COM CORES

Este capítulo tem por objetivo demonstrar o Teorema 1.11.

Teorema 1.11. *Dados números inteiros positivos k, q e t, existe $n_0 > 0$ tal que para $n > n_0$, se $\kappa(H, q, t) = \mathrm{KC}(n, k, q, t)$, então*

(a) Se $q \in \{2, 3\}$ ou se $q \geq 5$ e $k \geq 2t - 1$, então H é isomorfo a $H_{n,k,q,t}$.

(b) Se $q = 4$, então H é $H_{C,k}(n)$ para $C = \{t_1, t_2\}$ com $|t_1 \cap t_2| = t - 1$, onde $t_1, t_2 \in \binom{[n]}{t}$.

(c) Se $q \geq 5$ e $k < 2t - 1$, então H é $H_{C,k}(n)$, para $C = \{t_1, t_2, \ldots, t_{c(q)}\}$, cada t_i pertence a $\binom{[n]}{t}$ e $|t_i \cup t_j| > k$, para quaisquer $1 \leq i < j \leq c(q)$.

Para tal precisaremos de alguns resultados prévios. Todas as demonstrações deste capítulo são baseadas em [1].

Lema 6.1. *Sejam k e t, números inteiros positivos que satisfazem $t < k$. Considere um número inteiro positivo n, que satisfaz a restrição adicional $n > 2k$ se $t = 1$, e um número inteiro não negativo s que satisfaz as condições de r no enunciado do Teorema 1.6, e a família $\mathcal{F}_s$ definida na Definição 1.5. Se $e \in \binom{[n]}{k}$ e existe um elemento de $\mathcal{F}_s$ que possui intersecção menor do que t com e, então existem pelo menos dois elementos de $\mathcal{F}_s$ que possuem intersecção menor do que t com e.*

Demonstração. Começaremos dividindo a demonstração em casos.

(a) $t = 1$ e $n > 2k$.

(b) $t > 1$.

(b.1) $t > 1$ e $k \leq t + 2s - a$.

(b.1.1) $t > 1$, $k \leq t + 2s - a$ e $t + s < k$.

(b.1.2) $t > 1$, $k \leq t + 2s - a$, $k < t + 2s$.

(b.2.1) $t > 1$, $t + 2s - a < k$ e $t + 2s - a \geq t + s$.

(b.2.2) $t > 1$, $t + 2s - a < k$ e $t + 2s - a < t + s$.

No caso (a), como $t = 1$ e $n > 2k$, então temos que $s = 0$. Pelo Teorema 1.6, sabemos que $\mathcal{F}_0$ é a maior família 1-intersectante que existe, isto é, a família de todos os conjuntos de $\binom{[n]}{k}$ que contêm o elemento 1 é a maior família 1-intersectante que existe. Portanto, por hipótese, temos que e não contém o elemento 1. Digamos que F seja o conjunto que, por hipótese, pertence a $\mathcal{F}_0$, mas $F \cap e = \emptyset$, assim $|F \cup e| = 2k < n$, que implica em $|[n] \setminus e| \geq k + 1$, e isto significa (lembrando que os conjuntos de $\mathcal{F}_0$ contém o elemento 1) que existem pelo menos $\binom{k}{k-1} = k \geq 2$ conjuntos de $\mathcal{F}_0$ que são disjuntos de e.

Para o caso (b), temos que $s \leq k - t$, e o Teorema 1.6 garante que

$$n \geq (k - t + 1)\left(2 + \frac{t-1}{s+1}\right) \geq (k - t + 1)\left(2 + \frac{t-1}{k-t+1}\right) = 2k - t + 1.$$

Seja $a = |e \cap [t + 2s]|$. Dentre os $t + 2s - a$ elementos em $[t + 2s] \setminus e$, escolhemos $\min\{t + 2s - a, k\}$.

Para o caso (b.1), como $k \leq t + 2s - a$, então obtemos um elemento $f \in \mathcal{F}_s$ que é disjunto de e e está contido em $[t + 2k]$, portanto $t + s \leq k \leq t + 2s$. Porém uma destas desigualdades deve ser estrita, pois caso contrário teríamos $s = 2s \Rightarrow s = 0 \Rightarrow t = k$, o que é uma contradição.

No caso (b.1.1), temos $t + s < k$, então a substituição de qualquer elemento de f por um elemento de e gera um elemento de $\mathcal{F}_s$ que não possui intersecção pelo menos t com e, já que $t > 1$.

No caso (b.1.2), é verdade que $k < t + 2s$, então a substituição de qualquer elemento de f por um elemento de $[t+2s] \setminus f$ gera um elemento de $\mathcal{F}_s$ que possui intersecção no máximo 1 com e.

Para o caso (b.2.1), como $t+2s-a \geq t+s$, então escolhemos elementos de e para colocarmos em g até que g fique com tamanho k ou $|g \cap e| = t-1$ (isto pode ser feito de mais de uma maneira, já que pelo menos um elemento deve ser colocado em g). Agora, se ainda faltam elementos para que g tenha tamanho k, então temos que $k - |G| = k - 2t - 2s + a + 1 \geq 1$, neste caso ainda podemos pegar $b = n-(t+2s)-(k-a)$ elementos que não estão em $e \cup [t+2s]$, de fato $n \geq 2k-t+1$ implica em $b \geq k - 2t - 2s + a + 1$.

No caso (b.2.2), como $t + 2s - a < t + s$, então acrescentamos $a - s$ elementos de $e \cap [t + 2s]$ a g, e como anteriormente, podemos escolher elementos de e para colocar em g até sua intersecção ficar $t - 1$, ou se isto for insuficiente, novamente pegamos b elementos de fora de $e \cup [t + 2s]$. $\square$

Agora demonstraremos o Teorema 1.7.

Demonstração. Dado um hipergrafo $H = ([n], E)$, considere $F \subseteq E \subseteq \binom{[n]}{k}$ como sendo a maior família t-intersectante de E. Note que existem $2^{|F|}$ (q,t)-colorações para estas hiperarestas. Depois de determinadas as cores destas hiperarestas é fácil ver que as cores das demais hiperarestas ficam unicamente determinadas, pois para cada hiperaresta e de $E \setminus F$, existe uma hiperaresta de F com intersecção menor do que t com e, que deve ter cor diferente da cor de e, contudo, como temos apenas duas cores, é possível que não haja cor disponível para esta hiperaresta. Logo

$$\kappa(H, 2, t) \leq 2^{|F|} \leq 2^{|\mathcal{F}_r|}.$$

Por outro lado, sabemos que $I = ([n], \mathcal{F}_r)$ é o hipergrafo com maior conjnuto t-intersectante de hiperarestas de $\binom{[n]}{k}$ isto é,

$$\mathrm{KC}(n, k, 2, t) \geq \kappa(I, 2, t) = 2^{|\mathcal{F}_r|}.$$

Porém, note que, pelo Teorema 1.6, I é o único hipergrafo, a menos de isomorfismos, que atinge a quantidade máxima de hiperarestas. Por absurdo, vamos supor que exista uma hiperaresta e em H tal que $e \in E \setminus \mathcal{F}_r$. Pelo Lema 6.1, temos que H possui pelo menos duas hiperarestas $f, g \in \mathcal{F}_r$ distintas tais que $|f \cap e| < t$ e $|g \cap e| < t$. Logo, em qualquer $(2, t)$-coloração das hiperarestas de H, f e g devem ter a mesma cor. Isto torna o número de $(2, t)$-colorações das hiperarestas de H no máximo $2^{|\mathcal{F}_r|-1}$, o que é uma contradição. Logo $H = I$. $\square$

Para o caso em que $n = 2k$ e $t = 1$, note que o Lema 6.1 não vale, de fato $[2k] \setminus [k]$, é o único conjunto que possui intersecção vazia com $[k]$. O Teorema 1.6 afirma que, neste caso, o melhor conjunto de hiperarestas seria $\mathcal{F}_0$. Porém toda (q, t)-coloração das hiperarestas de $H = ([n], \mathcal{F}_0)$ corresponde a uma (q, t)-coloração das hiperarestas de $H' = ([n], \mathcal{F}_0 \cup ([2k] \setminus [k]))$, onde $[2k] \setminus [k]$ recebe cor oposta a cor de $[k]$. Logo H' e H atingem igualdade no número máximo de (q, t)-colorações com duas cores.

Com esta idéia, de que para cada conjunto de $\binom{[2k]}{k}$ existe outro conjunto de $\binom{[2k]}{k}$ que é disjunto deste, é fácil ver que, para $q \geq 2$ cores, com $n = 2k$ e $t = 1$, temos que

$$\mathrm{KC}(2k, k, q, 1) = q^{\binom{2k-1}{k}} (q-1)^{\binom{2k-1}{k}} = (q(q-1))^{\binom{2k-1}{k}}.$$

Lema 6.2. *Seja $q \geq 2$ um inteiro. Todas as soluções ótimas $s = (s_1, \ldots, s_c) \in \mathbb{N}^c$ para o problema de maximização*

$$\max_{s_1 + \cdots + s_c \leq q} \prod_{i=1}^{c} s_i,$$

têm a seguinte forma.

(a) *Se* $q \equiv 0 \pmod 3$, *então* $c = \frac{q}{3}$ *e* $s_i = 3$ *para todo* $i \in [c]$.

(b) *Se* $q \equiv 1 \pmod 3$, *então ou* $c = \lceil \frac{q}{3} \rceil$, *onde dois componentes de* s *são iguais a* 2 *e os outros componentes são iguais a* 3, *ou* $c = \lfloor \frac{q}{3} \rfloor$, *onde um componente de* s *é igual a* 4 *e os outros componentes são iguais a* 3.

(c) *Se* $q \equiv 2 \pmod 3$, *então* $c = \lceil \frac{q}{3} \rceil$, *onde um componente de* s *é igual a* 2 *e os outros componentes são iguais a* 3.

Além disso, $\max_{s_1+\cdots+s_c \leq q} \prod_{i=1}^{c} s_i$ *é igual a* $3^{\frac{q}{3}}$ *se* $q \equiv 0 \ (\bmod\ 3)$, $4 \cdot 3^{\lceil \frac{q}{3} \rceil}$ *se* $q \equiv 1 \pmod 3$, *e* $2 \cdot 3^{\lceil \frac{q}{3} \rceil}$ *se* $q \equiv 2 \pmod 3$. *Definimos ainda* $S(q)$ *como sendo o conjunto de todas as soluções ótimas deste problema de maximização.*

Demonstração. Para $q \geq 2$ fixo, suponhamos que $s = (s_1, \ldots, s_c) \in \mathbb{N}^c$ seja uma solução ótima para o problema de maximização. Obviamente devemos ter $s_1 + \cdots + s_c = q$. Além disso, devemos ter que $s_i > 1$ para todo $i \in [c]$, pois se, sem perda de generalidade, tivermos $s_c = 1$, então $(s_1, \ldots, s_{c-1})$ também será uma solução ótima, contradizendo o fato de que a soma dos componentes deve ser igual a q. Se existisse um componente $s_j \geq 5$, poderíamos particioná-lo em 3 e $s_j - 3$, o que seria uma contradição, pois $3(s_j - 3) > s_j$. Portanto, os componente de s devem ser todos pertencentes a $\{2, 3, 4\}$. Porém cada componente 4 pode ser particionado em 2 e 2 sem alterar o valor do problema de maximização, contudo três componentes iguais a 2 poderiam ser substituídos por dois componentes iguais a 3, aumentando o valor do problema de maximização, logo existem no máximo dois componentes iguais a 2. Concluindo, basta escolhermos o maior número de componentes iguais a 3 e completarmos com até dois componentes iguais a 2 ou um componente igual a 4 conforme a congruência de q em módulo 3. $\square$

Definição 6.3. *Para um número inteiro positivo* t, *definimos uma família de conjuntos* C *como sendo uma* t-cobertura *de um hipergrafo* $H = (V, E)$, *quando* $C \subseteq \binom{V}{t}$

e todo elemento de E contém algum elemento de C. Esta t-cobertura C será dita mínima, quando $|C|$ for a menor possível.

Lema 6.4. *Sejam k, q e t números inteiros positivos com $t < k$ e $H = (V, E)$ um hipergrafo k-uniforme tal que $\kappa(H, q, t) \geq 1$. Então H possui uma t-cobertura C que satisfaz $|C| \leq q\binom{k}{t}$.*

Demonstração. Como $\kappa(H, q, t) \geq 1$, temos que H possui no máximo q hiperarestas onde as intersecções duas a duas são todas menores do que t. Portanto, seja $S \subseteq E$ um conjunto máximo com essa, assim $|S| \leq q$. Temos que toda hiperaresta de H possui intersecção pelo menos t com algum elemento de S. Portanto a maior família que podemos pegar para ser uma t-cobertura de H é a família $C = \bigcup_{s \in S} \binom{s}{t}$ de todos os t-subconjuntos de cada hiperaresta de S. Assim temos que $|C| \leq |S|\binom{|s|}{t} \leq q\binom{k}{t}$. $\square$

Definição 6.5. *Para q um número inteiro positivo e $c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil$, definimos as funções $N(q)$ e $D(q)$:*

$$\begin{cases} N(q) = \frac{q!}{6^{c(q)}}, D(q) = 3^{c(q)}, & q \equiv 0 \pmod 3 \\ N(q) = \binom{c(q)}{2}\frac{q!}{4 \cdot 6^{c(q)-2}}, D(q) = 4 \cdot 3^{c(q)-2}, & q \equiv 1 \pmod 3 \\ N(q) = c(q)\frac{q!}{2 \cdot 6^{c(q)}}, D(q) = 2 \cdot 3^{c(q)}, & q \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \tag{6.1}$$

Teorema 6.6. *Sejam $k \geq 2$ e $q \geq 3$ número inteiros positivos, $t \in [k-1]$ e r que satisfaz as propriedades enunciadas no Teorema 1.6.*

(a) Para $q = 3$, existe $n_0 > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\mathrm{KC}(n, k, 3, t) \leq 3^{\binom{n-t}{k-t}}.$$

Além disso, para $n \geq n_0$ a igualdade é atingida, a menos de isomorfismos, somente pelo hipergrafo $I = ([n], \mathcal{F}_r)$.

(b) Para $q \geq 4$ existe $n_0 > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\mathrm{KC}(n, k, q, t) \leq N(q) q^{\binom{tc(q)}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}} D(q)^{\binom{n-t}{k-t}},$$

onde $c(q)$, $N(q)$ e $D(q)$ vêm da Definição 6.5.

Note que o item (a) do Teorema 6.6 é justamente o Teorema 1.8.

Para demonstrarmos o Teorema 6.6, mostraremos que a maior parte das (q,t)-colorações são colorações E-K-R (Erdős-Ko-Rado), isto é, colorações onde distribuímos as cores entre os elementos da cobertura, de modo que cada hiperaresta somente pode ser colorida com algum cor atribuída ao elemento da cobertura que está contido nesta hiperaresta. Primeiro calcularemos uma certa constante L, tal que se, para um elemento t_i da cobertura, o hipergrafo H possuir mais do que L hiperarestas de cor σ contendo t_i, então toda hiperaresta de cor σ em H necessariamente contém t_i. As cores que satisfazem isto serão chamadas substanciais. Após isto, mostraremos que, se toda cor σ é substancial para um único i, então para todo i, existe alguma cor σ que é substancial para este i. A seguir consideraremos que, para cada i, teremos s_i cores substanciais para t_i, e para uma quantidade j de cores, olharemos para o vetor $s = (s_1, \ldots, s_c)$, de modo que $\sum_{i=1}^{c} s_i = j$. Isto será útil para calcularmos uma cota superior para a quantidade de (q,t)-colorações deste tipo. A seguir, olharemos para o caso quando $q \not\equiv 1 \pmod 3$, onde o Lema 6.2 nos informará precisamente o tamanho da cobertura, e o caso quando $q \equiv 1 \pmod 3$, onde teremos dois possíveis tamanhos de cobertura.

Demonstração. Sejam k, q e t como no enunciado do teorema, e seja $H = (V, E)$ um hipergrafo k-uniforme com n vértices tal que $\kappa(H, q, t) \geq 1$. Considere $C = \{t_1, \ldots, t_c\}$ uma t-cobertura mínima de H. Pelo Lema 6.4, sabemos que $|C| \leq q\binom{k}{t}$ de forma que o tamanho da cobertura não depende de n. Seja $V_c = \bigcup_{i=1}^{c} t_i$ e considere o conjunto de hiperarestas de H particionado $E = E' \cup F$ onde $e \in E'$ se, e somente se, $|e \cap V_c| = t$, e $e \in F$ se, e somente se, $|e \cap V_c| > t$. É claro que nenhuma hiperaresta satisfaz $|e \cap V_c| < t$.

De acordo com o que foi dito acima, temos que

$$|F| \leq \binom{|V_c|}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}$$

e

$$|E'| \leq \binom{|V_c|}{t}\binom{n-|V_c|}{k-t}.$$

Porém, como o tamanho máximo de F é assintoticamente menor do que o tamanho máximo de E', consideraremos as colorações das hiperarestas de F como uma margem de erro, e daremos foco, portanto, às colorações das hiperarestas do hipergrafo $H' = H[E'] = (V, E \setminus F)$.

O objetivo é mostrar que o número máximo de (q,t)-colorações das hiperarestas de H' somente pode ser atingido quando temos $|C| = c(q)$. Para isto, mostraremos que as colorações precisam ter cores que aparecem “muitas vezes", e que estas devem ser do tipo “quase estrela", no sentido de que, para toda cor σ, deve existir um elemento da cobertura tal que toda hiperaresta de cor σ contém este elemento da cobertura. Então isto será usado, juntamente com o Lema 6.2, para mostrar que a melhor distribuição de cores para os elementos de C ocorre quando $|C| = c(q)$.

Definição 6.7. *Para cada t-conjunto $t_i \in C$ definimos H_i, como sendo o hipergrafo $(k-t)$-uniforme, com conjunto de vértices $V' = V \setminus \bigcup_{i=1}^{c} t_i$ tal que um $(k-t)$-conjunto e' de V' é uma hiperaresta de H_i se, e somente se, $e' \cup t_i$ é uma hiperaresta de H.*

Note que o número de (q,t)-colorações das hiperarestas de F é no máximo

$$q^{|F|} \leq q^{\binom{|V_c|}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}} \leq q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}}, \tag{6.2}$$

sendo que, para esta conta, foi usado que o valor máximo de $|V_c|$ é ct, quando os elementos de C são mutuamente disjuntos.

Definição 6.8. *Em uma (q,t)-coloração de H', considere, para cada t-conjunto $t_i \in C$ e cada cor $\sigma \in [q]$, o hipergrafo $(k-t)$-uniforme $H_{i,\sigma}$, como sendo o hipergrafo H_i induzido pelas hiperarestas de cor σ. Definimos $H_{i,\sigma}$ como sendo* substancial, *quando sua quantidade de hiperarestas é maior do que*

$$L = \max_{0 \leq m \leq t-1} \binom{k-t}{t-m}\binom{n-2t+m}{k-2t+m}.$$

Além disso, definimos H_i como sendo s-influente, quando existem exatamente s cores σ para as quais $H_{i,\sigma}$ é substancial.

A Definição 6.8 formaliza a noção dita acima de que uma cor σ aparece "muitas vezes".

Lema 6.9. *Considere que $H_{i,\sigma}$ é substancial e que e é uma hiperaresta de H com cor σ, então $t_i \subseteq e$.*

Note que o Lema 6.9 informa que, se H_i possui mais do que L hiperarestas na cor σ, então H_i possui todas hiperarestas com cor σ de H. Para demonstrarmos este lema, utilizaremos o fato de que uma combinação $\binom{a}{b}$, com b constante, pode ser vista como um polinômio de grau b na variável a, já que $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b!} \leq \frac{1}{b!}a^b + O(a^{b-1})$.

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que exista uma hiperaresta $e \in E$ com cor σ que não contém t_i. Considere então $t_i \neq t_i' \subseteq e$. Por definição, o número de hiperarestas h em $H_{i,\sigma}$ cuja intersecção com e tem tamanho pelo menos t é no máximo

$$U = \binom{k-t}{t-|t_i \cap t_i'|}\binom{n-2t+|t_i \cap t_i'|}{k-(t+|t_i \setminus t_i'|)},$$

pois devemos escolher primeiro $t-|t_i \cap t_i'|$ elementos dentre os $k-t$ elementos de $e \setminus t_i'$, e após isto, escolher os $k-t-(t-|t_i \cap t_i'|) = k-t-|t_i \setminus t_i'| = k-(t+|t_i \setminus t_i'|)$ elementos restantes dentre os $n-2t+|t_i \cap t_i'|$ elementos fora de $t_i \cup t_i'$.

Deste modo, para n suficientemente grande temos que

$$U \leq \max_{0 \leq m \leq t-1} \binom{k-t}{t-m}\binom{n-2t+m}{k-2t+m} = (k-t)\binom{n-t-1}{k-t-1} = L, \tag{6.3}$$

e neste caso, quando comparamos isto a um polinômio, atingimos o valor máximo quando seu grau tiver valor máximo, isto é, quando tivermos $m = t-1$.

Logo e não possui intersecção pelo menos t com todas as hiperarestas de $H_{i,\sigma}$, o que é uma contradição, pois todas as hiperarestas de cor σ devem ter intersecção pelo menos t com as outras hiperarestas de cor σ. □

Lema 6.10. *Se $C = \{t_1, \ldots, t_c\}$ é uma t-cobertura mínima de H tal que existe uma (q,t)-coloração Δ das hiperarestas de H onde o hipergrafo H_{i_j} é s_{i_j}-influente, com $s_{i_j} \geq 1$ para todo $j \in [m]$ e $s_{i_1} + \cdots + s_{i_m} = q$, então $m = c$*

Em outras palavras, o Lema 6.10 afirma que, se, para toda cor σ, existe um único índice i tal que $H_{i,\sigma}$ é substancial, então para todo índice i, existe pelo menos uma cor σ, tal que $H_{i,\sigma}$ é substancial.

Demonstração. Por absurdo, vamos supor que $m < c$. Deste modo, por ter menos do que c elementos, o conjunto $C' = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\}$ não é uma t-cobertura de $H = (V, E)$. Portanto existe uma hiperaresta $e \in E$ que não contém nenhum elemento de C'. Sem perda de generalidade, assumiremos que e possui cor q na coloração Δ. Porém o Lema 6.9 implica que para esta cor q, deve existir um $j \in [m]$ tal que $H_{i_j,\sigma}$ é substancial e todas as hiperarestas com cor q devem conter t_{i_j}, o que é uma contradição. □

Contaremos a quantidade de colorações de H' de acordo com sua distribuição de cores substanciais. Dado $j \in [q] \cup \{0\}$, seja ℓ_j o conjunto de todas as soluções ótimas da equação $s_1 + \cdots + s_c = j$, onde cada parcela deve ser um número inteiro não negativo. Para um vetor $s = (s_1, \ldots, s_c)$, seja $\Delta_s(H')$ o conjunto de todas as (q,t)-colorações de H' tais que H_i é s_i-influente para cada $i \in [c]$. A desigualdade (6.2) e o Lema 6.9 garantem que

$$\kappa(H,q,t) \leq q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}} \sum_{j=0}^{q} \sum_{s \in \ell_j} |\Delta_s(H')|, \tag{6.4}$$

pois o número máximo de (q,t)-colorações das hiperarestas de H é o número máximo de (q,t)-colorações das hiperarestas em F, multiplicado pelo número máximo de (q,t)-colorações das hiperarestas de H', e este segundo número pode ser contado olhando, dado j, para cada vetor s com soma de coordenadas igual a j.

Agora limitaremos $|\Delta_s(H')|$. Claramente, as j cores que contribuem para $H_1, \ldots, H_c$ serem influentes podem ser escolhidas de $\binom{q}{j}$ maneiras. Além disso, estas cores podem ser distribuídas entre estes hipergrafos de no máximo $\binom{j}{s_1}\binom{j-s_1}{s_2}\cdots\binom{j-(s_1+\cdots s_{c-1})}{s_c} \leq \frac{j!}{s_1!\cdots s_c!}$ maneiras. Seja $N = |\bigcup_{m=1}^{c} t_m|$. Após as j cores terem sido distribuídas, o número de (q,t)-colorações das hiperarestas de H_i, para $s_i \geq 1$, é no máximo

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{q-j})} \left(\prod_{z=1}^{q-j} \binom{\binom{n-N}{k-t}}{a_z} \right) s_i^{\binom{n-N}{k-t}},$$

onde cada a_z está entre 0 e L. Isto ocorre porque podemos escolher a_1 hiperarestas (dentre $\binom{n-N}{k-t}$) para serem coloridas com a primeira cor que não é substancial para nenhum elemento da cobertura, após isso, escolhemos a_2 hiperarestas (dentre $\binom{n-N}{k-t} - a_1 \leq \binom{n-N}{k-t}$) para serem coloridas com a segunda cor que não é substancial para nenhum elemento da cobertura, e assim por diante. As demais hiperarestas podem ser coloridas com qualquer uma das s_i cores que tornam H_i s_i-influente.

Utilizando que $\binom{n-N}{k-t} \geq 2$ e que $\frac{x^{t+1}-1}{x-1} \leq 2x^t$, para $x \geq 2$, temos que

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{q-j})} \left(\prod_{z=1}^{q-j} \binom{\binom{n-N}{k-t}}{a_z} \right) s_i^{\binom{n-N}{k-t}} \leq \sum_{(a_1,\ldots,a_{q-j})} \binom{n-N}{k-t}^{\left(\sum_{z=1}^{q-j} a_z\right)} s_i^{\binom{n-N}{k-t}},$$

pois, se considerarmos $\binom{n-N}{k-t} = B$, teremos

$$\binom{B}{a_1} \cdots \binom{B}{a_{q-j}} \leq B^{a_1} \cdots B^{a_{q-j}}.$$

Porém

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{q-j})} B^{\left(\sum_{z=1}^{q-j} a_z\right)} s_i^B = \left(\sum_{p=0}^{L} B^p\right)^{q-j} s_i^B \leq 2^{q-j} B^{L(q-j)} s_i^B. \tag{6.5}$$

Se $s_i = 0$, então nenhuma cor é substancial, logo H_i possui no máximo $L(q-j)$ hiperarestas, e o número de (q,t)-colorações destas hiperarestas é no máximo

$$(q-j)^{L(q-j)}. \tag{6.6}$$

De (6.3), (6.5) e (6.6), com log em base 2 e observando que s possui no máximo c componentes, temos, para n suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in\ell_j} |\Delta_s(H')| &\leq \binom{q}{j} 2^{q-j} B^{L(q-j)} (q-j)^{cL(q-j)} \sum_{s\in\ell_j} \frac{j!}{s_1!\cdots s_c!} \prod_{i=1,s_i\neq 0}^{c} s_i^B \\
&= \binom{q}{j} 2^{(q-j)+L(q-j)\log B + cL(q-j)\log(q-j)} \sum_{s\in\ell_j} \frac{j!}{s_1!\cdots s_c!} \prod_{i=1,s_i\neq 0}^{c} s_i^B \\
&\leq \binom{q}{j} 2^{(q-j)+(q-j)(k-t+c)\frac{(k-t)^2}{n-t}\binom{n-t}{k-t}\log n} \sum_{s\in\ell_j} \frac{j!}{s_1!\cdots s_c!} \prod_{i=1,s_i\neq 0}^{c} s_i^B.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Observe que, para q fixo, o valor máximo de $\prod_{i=1,s_i\neq 0}^{c} s_i^B$ é atingido quando os componentes não nulos de s são os componentes de um vetor que é solução ótima para o problema de maximização do Lema 6.2. Considere agora $D(q)$ como sendo precisamente o valor ótimo do problema de maximização e considere $s = (s_1,\ldots,s_c)$ tal que $s \notin S(q)$. Seja $\gamma > 0$ tal que

$$\prod_{i=1,s_i\neq 0}^{c} s_i < D(q)^{1-3\gamma} < D(q). \tag{6.8}$$

A existência de γ é garantida pelo fato de que os componentes de s não números inteiros e $s \notin S(q)$, Mostraremos que o número máximo de (q,t)-colorações está associado às soluções ótimas do problema de maximização.

Lema 6.11. *Sejam $k \geq 2$, $q \geq 3$ e t números inteiros positivos com $t < k$. Existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, a seguinte propriedade vale. Seja H um hipergrafo*

k-uniforme com n vértices e com uma t-cobertura C de cardinalidade c onde a união de seus elementos tem tamanho N, que não depende de n. Então

$$q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}}\sum_{j=0}^{q}\sum_{s\in\ell_j\setminus S(q)}|\Delta_s(H')| \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)},$$

onde $S(q)$ é o conjunto das soluções ótimas do problema de maximização do Lema 6.2. Em particular, se $\Delta_s(H')=\emptyset$ para todo $s=(s_1,\ldots,s_c)$ onde os componentes não nulos estão em um vetor de $S(q)$, então $\kappa(H,k,q)\leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}$.

Demonstração. Seja H um hipergrafo k-uniforme e n_0 tal que, para todo $n\geq n_0$ temos que

$$q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}} < D(q)^{\gamma\binom{n-N}{k-t}}$$

e

$$(q+1)!\binom{q+c-1}{c-1}2^{2q+q(k-t+c)\frac{(k-t)^2}{n-t}\binom{n-t}{k-t}\log n} < D(q)^{\gamma\binom{n-N}{k-t}}.$$

Além disso, (6.7) e (6.8) garantem que

$$\begin{aligned} & q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}}\sum_{j=0}^{q}\sum_{s\in\ell_j\setminus S(q)}|\Delta_s(H')| \leq \\ & D(q)^{\gamma\binom{n-N}{k-t}}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}2^{(q-j)+(q-j)(k-t+c)\frac{(k-t)^2}{n-t}\binom{n-t}{k-t}\log n}\binom{j+c-1}{c-1}j!D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-3\gamma)} \\ & \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

que era o que queríamos. Para verificar isto, estamos usando que $|\ell_j|=\binom{j+c-1}{c-1}$, que $\binom{q}{j}2^{q-j}\leq 2^{2q}$ e que $\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\leq(q+1)!$

Quando $\Delta_s(H')=\emptyset$ para todo $s=(s_1,\ldots,s_c)$ onde os componentes não nulos são os componentes de um vetor de $S(q)$ temos que, por (6.4)

$$\kappa(H,k,q)\leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}.$$

□

Para demonstrarmos o item (a) do Teorema 6.6, seja $H = (V, E)$ um hipergrafo k-uniforme com $|V| = n$ e $\kappa(H, 3, t) \geq 1$ e seja $C = \{t_1, \ldots, t_c\}$ um t-cobertura mínima de H.

Se $c = 1$, então, de imediato, temos que $\kappa(H, 3, t) \leq 3^{|E|} \leq 3^{\binom{n-t}{k-t}}$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, H é isomorfo ao hipergrafo $I = ([n], \mathcal{F}_r)$ visto anteriormente.

Se $c > 1$, então pelo Lema 6.4, e por $\kappa(H, 3, t) \geq 1$, temos que $c < 3\binom{k}{t}$. Ainda, o Lema 6.10 implica que $|\Delta_s(H')| = 0$ para todo vetor $s = (s_1, \ldots, s_c)$ com uma das coordenadas igual a 3. Além disso, o Lema 6.11 com $k + 1 \leq N \leq 3k$ implica que $\kappa(H, 3, t) \leq D(3)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)} < 3^{\binom{n-t}{k-t}}$ para n suficientemente grande.

Para demonstrarmos o item (b) do Teorema 6.6 consideremos primeiro o caso quando $q \not\equiv 1 \pmod 3$. Neste caso, fixamos novamente um hipergrafo k-uniforme com n vértices e com $\kappa(H, q, t) \geq 1$ e uma t-cobertura $C = \{t_1, \ldots, t_c\}$ de H. Pelo Lema 6.4, temos que $c \leq q\binom{k}{t}$. Novamente considere por $S(q)$ o conjunto das soluções ótimas $s = (s_1, \ldots, s_c)$ do problema de maximização no Lema 6.2. Pelos Lemas 6.10 e 6.11, se $c \neq c(q)$, temos que

$$\kappa(H, q, t) \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}. \tag{6.10}$$

Se $c = c(q)$, temos, por (6.4), que

$$\kappa(H, q, t) \leq q^{\binom{c(q)t}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}} \sum_{j=0}^{q} \sum_{s \in \ell_j} |\Delta_s(H')|$$

$$= q^{\binom{c(q)t}{t+1}\binom{n-(t+1)}{k-(t+1)}} \left(\sum_{s \in S(q)} |\Delta_s(H')| + \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{s \in \ell_j} |\Delta_s(H')| + \sum_{s \in \ell_q \setminus S(q)} |\Delta_s(H')| \right).$$

Por outro lado podemos utilizar (6.7), com $j = q$ e com a soma restrita a $S(q)$, para concluir que

$$\sum_{s \in S(q)} |\Delta_s(H')| \leq \sum_{s \in S(q)} \frac{q!}{s_1! \cdots s_c!} \prod_{i=1, s_i \neq 0}^{c} s_i^{\binom{n-N}{k-t}} = N(q) D(q)^{\binom{n-N}{k-t}}. \tag{6.11}$$

Por outro lado, com cálculos similares aos feitos para obter (6.9), concluímos que, para $\epsilon > 0$ fixo e n suficientemente grande

$$\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{s\in\ell_j}|\Delta_s(H')| + \sum_{s\in\ell_q\setminus S(q)}|\Delta_s(H')| \leq D(q)^{(1-\gamma)\binom{n-N}{k-t}} < \epsilon D(q)^{\binom{n-N}{k-t}}. \qquad (6.12)$$

Por (6.11) e (6.12), segue que

$$\mathrm{KC}(n,k,q,t) = \max_{H}\kappa(H,q,t) \leq q^{\binom{c(q)t}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}}N(q)D(q)^{\binom{n-t}{k-t}}.$$

Se $q \equiv 1(\bmod 3)$, então existem dois vetores diferentes em $S(q)$ com $c(q)-2$ componentes iguais a 3, um com dois componentes iguais a 2 e o outro com um componente igual a 4.

Como no caso anterior, obtemos que $\kappa(H,q,t) \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}$ sempre que $|C| = c \notin \{c(q)-1, c(q)\}$, já que estes dois valores do conjunto correspondem às soluções ótimas do problema de maximização. Se $c = c(q)-1$, repetimos os argumentos utilizados anteriormente com $s(q)$ substituído pelo conjunto das soluções ótimas do problema de maximização do Lema 6.2 que possuem uma coordenada igual a 4 e $N(q)$ substituído por

$$N'(q) = \left\lfloor\frac{q}{3}\right\rfloor\frac{q!}{4!6^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor-1}}.$$

□

Agora demonstraremos o Teorema 1.11, para $q \geq 4$. Para tal, novamente olharemos para o caso quando $q \not\equiv 1\,(\bmod 3)$, onde o Lema 6.2 nos informará precisamente o tamanho da cobertura, e o caso quando $q \equiv 1\,(\bmod 3)$, onde teremos dois possíveis tamanhos de cobertura. Mostraremos primeiramente que $\mathrm{KC}(n,q,k,t) \geq D(q)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}}$. Após isto, consideraremos que, se o tamanho da cobertura for diferente de $c(q)$, então para todo $\delta > 0$ teremos que, a partir de uma certa quantidade de vértices, $\kappa(H,q,t) < \delta\,\mathrm{KC}(n,q,k,t)$. A seguir veremos que o hipergrafo extremal, no sentido de que atinge o número máximo de (q,t)-colorações, a partir de um certo número de vértices deve ser do tipo (C,k)-completo, isto é, para cada t-conjunto t_i da cobertura C, todo k-conjunto que contém t_i é uma hiperaresta do hipergrafo. Após isto, particionaremos o conjunto de cores em c conjuntos $P_1,\ldots,P_c$ de acordo com os vetores $s=(s_1,\ldots,s_c)$ que são solução ótima do problema de maximização do Lema 6.2, colocaremos s_i cores no conjunto P_i. Deste modo iremos colorir o hipergrafo utilizando as s_i cores do conjunto P_i para colorir as hiperarestas que contêm t_i, estas colorações serão chamadas colorações estrela. A seguir veremos que as colorações estrelas são a grande maioria das (q,t)-colorações e portanto calcularemos uma cota superior e uma inferior para a quantidade destas. Então começaremos a argumentar sobre o tamanho das intersecções entre os elementos da cobertura, que quando for positiva, a união deve ser maior do que k para o hipergrafo ser extremal. Feito isto, mostraremos que o número de colorações estrela aumenta ao passo que alteramos os elementos dos conjuntos da cobertura para que a intersecção dois a dois fique correta. Então dividiremos nos casos $k<2t-1$ e $k\geq 2t-1$, para concluir a demonstração.

Demonstração do Teorema 1.11 para $q\geq 4$. Fixamos números inteiros $q\geq 5$, $k\geq 2$ e $1\leq t<k$. Dado um número inteiro positivo n, seja H^* um- hipergrafo k-uniforme com n vértices que satisfaz $\kappa(H^*,q,t)=\mathrm{KC}(n,k,q,t)$.

Assim como na demonstração do Teorema 6.6, primeiro consideraremos o caso onde $q\not\equiv 1 \pmod 3$ e a demonstração do caso $q\equiv 1 \pmod 3$ será uma adaptação desta. Considere $D(q)$, $c(q)$ e $S(q)$ como na Definição 6.5 e no Lema 6.2.

Lema 6.12.

$$\mathrm{KC}(n,k,q,t)\geq \kappa(H_{n,q,k,t},q,t)\geq \left(\prod_{i=1}^{c(q)} s_i\right)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}} = D(q)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}}.$$

Demonstração. Sejam $t_1, \ldots, t_{c(q)}$, conjuntos mutuamente disjuntos pertencentes à t-cobertura C de $H_{n,q,k,t}$. Considere as colorações E-K-R que seguem a seguinte distribuição. Seja $s = (s_1, \ldots, s_{c(q)}) \in S(q)$ e considere uma partição dos conjuntos das q cores nos conjuntos S_i com $|S_i| = s_i$ e $i \in [c(q)]$. Temos s_1 possibilidades de cor para as hiperarestas que contém t_1, s_2 possibilidades de cor para as hiperarestas que contém t_2, ..., $s_{c(q)}$ possibilidades de cor para as hiperarestas que contém $t_{c(q)}$. Logo

$$\mathrm{KC}(n,k,q,t) \geq \kappa(H_{n,q,k,t}, q, t) \geq \left(\prod_{i=1}^{c(q)} s_i\right)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}} \geq D(q)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}}.$$

□

Seja $\gamma > 0$ como definido em (6.8). Como $s \in S(q)$, temos que nenhum componente de s é nulo. Os Lemas 6.10 e 6.11 garantem que, para n suficientemente grande, temos que $c = c(q)$ é uma condição necessária para que um hipergrafo k-uniforme com n vértices satisfaça $\kappa(H,q,t) \geq D(q)^{\binom{n-ct}{k-t}(1-\gamma/2)}$. Note que o Lema 6.11 afirma sobre coisas para $s \in S(q)$, enquanto que aqui temos γ escolhido para $s \notin S(q)$, o que justifica estarmos utilizando $\gamma/2$ em nossas contas. Logo o Lema 6.12 garante que $c(q)$ é o tamanho da t-cobertura C de H^*.

Observação 6.13. *Para inteiros positivos $q > t$ e $q \not\equiv 1 \pmod 3$, temos que para todo $\delta > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que qualquer hipergrafo H k-uniforme com conjunto de vértices $[n]$, $n > n_0$, com t-cobertura mínima de tamanho $c \neq c(q)$ satisfaz $\kappa(K,q,t) < \delta \cdot \mathrm{KC}(n,k,q,t)$.*

Lembre da Definição 1.9, onde é definido que um hipergrafo H é (C,k)-completo quando todos os k-conjuntos que contém algum elemento da cobertura C forem uma hiperaresta de H.

Lema 6.14. *Para $q, k \geq 2$ e $1 \leq t < k$, seja $H^* = (V,E)$ um hipergrafo k-uniforme com n vértices com uma t-cobertura mínima C que satisfaz $\kappa(H^*,q,t) =$*

KC(n,q,k,t). *Então existe* n_0*, tal que, para todo número inteiro* $n > n_0$ *o* H^* *é completo.*

Demonstração. Por absurdo, consideremos as hipóteses do lema e suponhamos ainda que exista algum hipergrafo $H = (V, E)$ que não seja completo. Seja $U = \bigcup_{i=1}^{c} t_i$ e $N = |U|$. Consideremos o caso em que existe algum elemento em C que cobre no máximo qL hiperarestas não cobertas por outro elemento de C, lembrando que, para n suficientemente grande, $L = (k-t)\binom{n-t-1}{k-t-1}$. Para cada i, seja E_i o conjuntos das hiperarestas que são cobertas somente por t_i. Cada E_i é não vazio, já que C é uma t-cobertura mínima. Seja H' o hipergrafo obtido de H pela remoção das hiperarestas de E_i. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das (q,t)-colorações das hiperarestas de H, e sejam $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}'$ os conjuntos das (q,t)-colorações das hiperarestas dos hipergrafos (V, E_i) e H' respectivamente.

Claramente temos que

$$\kappa(H,q,t) = |\mathcal{C}| \leq |\mathcal{C}_i||\mathcal{C}'| \leq q^{qL}|\mathcal{C}'|.$$

Por outro lado, dada uma coloração $\Delta \in \mathcal{C}$, existe uma cor σ_i, que é a cor de alguma hiperaresta de E_i em Δ, uma vez que E_i é não vazio. Em prticular, o Lema 6.9 garante que H_{j,σ_i} não pode ser substancial para $j \neq i$. Além disso, como cada cor é substancial somente para um conjunto t_i, temos que existem no máximo $q-1$ cores σ para as quais $H'_{j,\sigma} = H_{j,\sigma}$ é substancial. Portanto, pelo Lema 6.11, se n é suficientemente grande, então $|\mathcal{C}'| < D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}$. Além disso, para n suficientemente grande também temos que $q^{qL} = q^{q(k-t)\binom{n-t-1}{k-t-1}} < D(q)^{\gamma/2\binom{n-N}{k-t}}$. Logo

$$\kappa(H,q,t) \leq |\mathcal{C}'|q^{qL} < D(q)^{(1-\gamma/2)\binom{n-N}{k-t}},$$

o que implica, pelo Lema 6.12, que o número de (q,t)-colorações das hiperarestas de H não pode ser máximo.

Agora, suponhamos que todo elemento de C cobre mais do que qL hiperarestas que não são cobertas por outros elementos de C. Seja $e \notin E$ um k-

subconjunto de V contendo $t_i \in C$. Definimos E_i como antes. É verdade que este e definido acima existe, pois estamos supondo por contradição que o hipergrafo H não é completo. Seja Δ como antes. Pelo Lema 5.15, temos que pelo menos uma cor, digamos σ, aparece mais do que L vezes em E_i. Pelo Lema 6.9, todas as hiperarestas que possuem cor σ em Δ devem conter t_i. Deste modo, Δ pode ser estendido a uma (q,t)-coloração de $H \cup \{e\}$, simplesmente atribuindo a cor σ a e.

Existe pelo menos uma (q,t)-coloração das hiperarestas de H que usa exatamente c cores. Sem perda de generalidade, suponhamos que as hiperarestas que contêm t_1 possuam a cor 1, e as hiperarestas que contêm t_i e não contêm nenhum elemento de $\{t_1, \ldots, t_{i-1}\}$, para $i = 2, \ldots, c$ possuam a cor i. Uma vez que $c = c(q) = \lceil \frac{q}{3} \rceil \leq q - 1$, para $q \geq 3$, temos pelo menos duas opções de cor para a aresta e, uma utilizando uma cor já utilizada anteriormente e outra utilizando uma nova cor. Logo $H \cup \{e\}$ possui mais (q,t)-colorações do que H, de modo que, novamente, o número de (q,t)-colorações das hiperarestas de H não pode ser máximo. $\square$

Pelo Lema 6.14, temos que H deve ser um hipergrafo (C,k)-completo para atingir o número máximo de (q,t)-colorações, portanto, a partir de agora, estamos supondo que H é completo. Note que quando $q \equiv 1 \pmod 3$, com um argumento similar podemos concluir que o hipergrafo H também deve ser completo para que tenha chances de atingir o número máximo de (q,t)-colorações de suas arestas, porém quanto ao tamanho c de sua cobertura C nós apenas sabemos que $c \in \{c(q) - 1, c(q)\}$.

Definição 6.15. *Seja $s = (s_1, \ldots, s_c)$ uma solução ótima para o problema de maximização do Lema 6.2 e seja $P(s)$ uma partição do conjunto $[q]$ de cores de modo que $|P_i| = s_i$, para todo $i \in [c]$. Definimos uma coloração como sendo de tipo $(s, P(s))$-estrela, quando esta consiste em todas as colorações Δ das hiperarestas de um hipergrafo H tais que, se σ é uma cor de P_i e $\Delta(e) = \sigma$, então $t_i \subseteq e$. Definimos*

$\mathrm{SC}(H, P(s), q, t)$ *como sendo o conjunto das colorações* $(s, P(s))$*-estrela. Considerando* $\mathcal{P}_s$ *como sendo a família de todas as partições* $P(s) = (P_1, \ldots, P_c)$ *de* $[q]$ *tais que* $|P_i| = s_i$*, para todo* $i \in [c]$*, definimos*

$$\mathrm{SC}(H, q, t) = \bigcup_{s \in S(q)} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_s} \mathrm{SC}(H, P, q, t).$$

Além disso, $\mathrm{sc}(H, q, t) = |\,\mathrm{SC}(H, q, t)|$.

Em outras palavras, as colorações estrela são aquelas onde as hiperarestas que contém t_i são coloridas com as s_i cores de P_i. Para definirmos cotas para $\mathrm{sc}(H, q, t)$, seja $|U| = |\bigcup_{i=1}^{c} t_i| = N$.

Lema 6.16. *Sejam* q, t, k *números inteiros positivos com* $t < k$*. Então existe um* n_0 *tal que, para todo hipergrafo* k*-uniforme* H *com* $n \geq n_0$ *vértices com* t*-cobertura* C *de tamanho* $c = c(q)$*, temos*

$$\kappa(H, q, t) - D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)} \leq \mathrm{sc}(H, q, t) \leq \kappa(H, q, t).$$

Note que o Lema 6.16 informa que para aproximar o número de (q, t)-colorações de um hipergrafo, basta calcularmos o número de colorações estrela deste hipergrafo.

Demonstração. Obviamente toda coloração estrela é uma (q, t)-coloração, logo

$$\mathrm{sc}(H, q, t) \leq \kappa(H, q, t).$$

Para demonstrarmos a outra desigualdade do lema, basta mostrarmos que o número $|\bar{S}|$ de colorações que não são do tipo estrela é no máximo $D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}$. Seja $\mathcal{C}$ a família das (q, t)-colorações das hiperarestas de H que satisfazem.

(a) Para toda cor σ existe um $i \in [c]$ tal que $H_{i,\sigma}$ é substancial.

(b) Para $s_i = |\{\sigma : H_{i,\sigma} \text{ é substancial}\}|$, para cada $i \in [c]$, temos que $(s_1, \ldots, s_c) \in S(q)$.

Agora, note que a desigualdade (6.4), em combinação com o Lema 6.11, garante sobre a família $\bar{\mathcal{C}}$ das colorações de H que não estão em $\mathcal{C}$ que, para n suficientemente grande,

$$|\bar{\mathcal{C}}| \leq q^{\binom{ct}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}} \sum_{j=0}^{q} \sum_{s \in \ell_j \setminus S(q)} |\Delta_s(H')| \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}.$$

Por outro lado, o Lema 6.10 estabelece que, se Δ é uma (q,t)-coloração e σ é uma cor para a qual $H_{i,\sigma}$ é substancial com relação a algum conjunto t_i na cobertura, então Δ pode atribuir cor σ somente para as hiperarestas que contêm t_i. Logo, toda coloração de $\mathcal{C}$ é uma coloração estrela. Portanto, para n suficientemente grande, temos que $|\bar{\mathcal{S}}| \leq |\bar{\mathcal{C}}| \leq D(q)^{\binom{n-N}{k-t}(1-\gamma)}$. $\square$

Note que, com isto, temos que se H é um hipergrafo ótimo, no sentido de que atinge o número máximo de (q,t)-colorações. Então $\frac{\mathrm{sc}(H,q,t)}{\kappa(H,q,t)}$ tende a 1 à medida que n aumenta.

Lema 6.17. *Sejam q, t e k números inteiros positivos com $t < k$. Existe $n_0 > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, o hipergrafo completo $H_{C,k}(n)$ satisfaz, para alguma cobertura C fixa e alguma constante $A = A(q) > 0$, que*

$$\left(1 - A\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}\right) \sum_{s \in S(q)} \sum_{P \in \mathcal{P}_s} \prod_{e \in E} \left(\sum_{t_i \subset e} s_i\right)$$
$$\leq \mathrm{sc}(H,q,t) \leq \sum_{s \in S(q)} \sum_{P \in \mathcal{P}_s} \prod_{e \in E} \left(\sum_{t_i \subset e} s_i\right).$$

Demonstração. A desigualdade da direita segue diretamente da definição 6.15. Para a desigualdade da esquerda, contaremos o número de colorações que aparecem em muitos termos da união $\bigcup_{s \in S(q)} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_s} \mathrm{SC}(H,P,q,t)$. Seja Δ uma coloração que está em $\mathrm{SC}(H, P, q, t) \cap \mathrm{SC}(H, P', q, t)$, onde $P = (p_1, \ldots, p_c) \in \mathcal{P}_s$ e $P' = (p'_1, \ldots, p'_c) \in \mathcal{P}_{s'}$, para $s, s' \in S(q)$ não necessariamente distintos. Então existe uma cor $\sigma \in [q]$ tal que $\sigma \in P_i \cap P_j$, $i \neq j$, e toda hiperaresta com cor σ na coloração Δ deve conter t_i e t_j, pois a coloração Δ teria sido contada duas vezes, uma devido a $t_i \subset e$ e outra devido a $t_j \subset e$.

Para s, s', P, P', i, j fixos, e como $\sum_{t_m \subset e} s_m \leq q$, temos que o número $M(s, s', P, P', i, j)$ de colorações com a propriedade acima satisfaz

$$M(s, s', P, P', i, j) \leq \min\{s_i, s'_j\} \prod_{e \in E \setminus \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right) \prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} (s_m - 1) \right),$$

onde $\mathcal{S}_{i,j}$ é o conjunto das hiperarestas de H que contêm t_i e não contêm t_j, pois, após escolhida a cor σ, para cada hiperaresta $e \in E \setminus \mathcal{S}_{i,j}$ temos $\sum_{t_m \subset e} s_m$ possibilidades de cor para utilizar, e para cada hiperaresta de $\mathcal{S}_{i,j}$ temos esta mesma quantidade de possibilidades de cor, a menos da cor σ. Note que $\min\{s_i, s_j\}$ é o número máximo de maneiras de escolhermos uma cor σ e, de acordo com o Lema 6.2, este máximo é $\min\{4, 4\} = 4$. Portanto, com mais algumas manipulações algébricas, concluímos que

$$\begin{aligned}
M(s, s', P, P', i, j) &\leq \min\{s_i, s'_j\} \prod_{e \in E \setminus \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right) \prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} (s_m - 1) \right) \\
&\leq 4 \frac{\prod_{e \in E} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right)}{\prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right)} \prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \left(\sum_{t_m \subset e} (s_m - 1) \right) \\
&\leq 4 \left(\prod_{e \in E} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right) \right) \left(\prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \frac{\sum_{t_m \subset e} (s_m - 1)}{\sum_{t_m \subset e} s_m} \right) \\
&\leq 4 \left(\prod_{e \in E} \left(\sum_{t_m \subset e} s_m \right) \right) \left(\prod_{e \in \mathcal{S}_{i,j}} \frac{q-1}{q} \right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o hipergrafo H é completo, podemos concluir que $|\mathcal{S}_{i,j}| \geq \binom{n-|t_i\cup t_j|}{k-|t_i\cup t_j|} \geq \binom{n-2t}{k-t}$. Logo

$$M(s,s',P,P',i,j) \leq 4\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}} \prod_{e\in E}\left(\sum_{t_m\subset e} s_m\right).$$

Agora, como existem no máximo $\binom{|S(q)|+1}{2}$ maneiras de escolhermos um ou dois elementos de $S(q)$, no máximo $\binom{q!}{2}$ maneiras de escolhermos duas dentre as partições do conjunto $[q]$ de cores em $P_1,\ldots,P_c$, e no máximo $\binom{c}{2}q$ maneiras de escolhermos dois elementos t_i, t_j na cobertura e uma cor σ, então temos que

$$\mathrm{sc}(H,q,t) \geq \left(1 - A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}\right) \sum_{s\in S(q)} \sum_{P\in\mathcal{P}_s} \prod_{e\in E}\left(\sum_{t_m\subset e} s_m\right),$$

com $A(q) = 4\binom{|S(q)|+1}{2}\binom{q!}{2}\binom{c}{2}q$. $\square$

Lema 6.18. *Sejam $q \geq 5$ e $C = \{t_1,\ldots,t_c\}$ uma t-cobertura tal que existem $i,j \in [c]$, $i \neq j$, com $|t_i \cap t_j| \geq 1$. Se $|t_i \cup t_j| \leq k$, então existe $n_0 > 0$ tal que, para $n \geq n_0$ temos $\kappa(H_{C,k}(n),q,t) < \mathrm{KC}(n,k,q,t)$.*

Demonstração. Fixamos i,j que satisfazem $t_i \cap t_j \neq \emptyset$ e $|t_i \cup t_j| = 2t - |t_i \cap t_j| \leq k$.

Considere $U = \bigcup_{m=1}^{c} t_m$ e considere vértices $v \in t_i \cap t_j$ e $w \in [n] \setminus U$. Definimos $t_i' = (t_i \setminus \{v,w\}) \cup (\{v,w\} \setminus t_i)$ e $C' = (C \setminus \{t_i, t_i'\}) \cup (\{t-i, t_i'\} \setminus C)$. Para ordenarmos o conjunto C', consideramos que t_i' é o i-ésimo elemento do conjunto, e os demais elementos ocupam a mesma posição em que estavam em C.

Note que esta operação t_i' é parecida com a substituição que vimos anteriormente. Neste caso, se nem v nem w pertencem a t_i, então os dois são acrescentados ao conjunto t_i, se um pertence e o outro não, então é substituído um pelo outro, e se os dois pertencem ao conjunto t_i, então eles são removidos do conjunto.

Afirmamos que existem $\delta > 0$, $\xi \in (0,\gamma)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mathrm{sc}(H_{C,k}(n),q,t) \leq \mathrm{sc}(H_{C',k}(n),q,t) - \delta D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} \tag{6.13}$$

para todo $n \geq n_0$. Lembrando que γ está definido em (6.8). Note que (6.13) demonstra o lema, pois, pelo Lema 6.16, temos que

$$\kappa(H_{C,k}(n),q,t) \leq \mathrm{sc}(H_{C,k}(n),q,t) + D(q)^{(1-\gamma)\binom{n-N}{k-t}}$$

e, como $\mathrm{sc}(H_{C,k}(n),q,t) \leq \kappa(H_{C',k}(n),q,t)$, podemos reescrever isto como

$$\kappa(H_{C,k}(n),q,t) \leq \kappa(H_{C',k}(n),q,t) - \delta D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} + D(q)^{(1-\delta)\binom{n-N}{k-t}}, \tag{6.14}$$

e para n suficientemente grande vale que $\delta D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} > D(q)^{(1-\delta)\binom{n-N}{k-t}}$.

Agora, para concluirmos a demonstração do lema basta mostrarmos que (6.13) vale. Considere $E = E(n)$ e $E' = E'(n)$ o conjunto das hiperarestas de $H = H_{C,k}(n)$ e $H' = H'_{C',k}(n)$, respectivamente. Considere $s = (s_1,\ldots,s_c)$ uma solução ótima do problema de maximização do Lema 6.2 e $P = P(s) = (P_1,\ldots,P_c)$ uma partição do conjunto de cores $[q]$ tal que $|P_i| = s_i$, para todo $i \in [c]$. Considere a função $\beta\colon E \longrightarrow \mathbb{N}$, onde, para $e \in E$, $\beta(e) = \beta_e = \sum_{t_j \subset e} s_i$. Analogamente definimos a função $\beta'\colon E' \longrightarrow \mathbb{N}$ para $H_{C',k}(n)$. Considere as seguintes famílias de k-subconjuntos de $[n]$.

$$F_0 = \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t_i \cup t'_i \subseteq e\} \cup \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t_i, t'_i \not\subset e, \exists g \neq i, t_g \subset e\},$$

$$F_1 = \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t_i \subset e, w \notin e, t_g \not\subset e, \forall g \neq i\},$$

$$F'_1 = \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t'_i \subset e, v \notin e, t_g \not\subset e, \forall g \neq i\},$$

$$F_2 = \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t_i \subset e, w \notin e, \exists g \neq i, t_g \subset e\},$$

$$F'_2 = \{e \in \tbinom{[n]}{k} : t'_i \subset e, v \notin e, \exists g \neq i, t_g \subset e\}.$$

Podemos verificar facilmente que $E \cap E' = F_0 \cup F_2 \cup F'_2$, onde a união é disjunta. Podemos facilmente verificar também que $E \setminus E' = F_1$ e $E' \setminus = F'_1$. Além disso, pelas definições de β e de β' temos que

$\beta_e = s_i$, se $e \in F_1$,

$\beta'_e = s_i$, se $e \in F'_1$,

$\beta'_e = \beta_e - s_i \geq 2$, se $e \in F_2$,

$\beta'_e = \beta_e + s_i \geq 2 + s_i$, se $e \in F'_2$,

$\beta'_e = \beta_e$, se $e \in F_0$.

Por definição temos que

$$|\operatorname{SC}(H, P, q, t)| = \prod_{e \in E} \beta_e$$

e que

$$|\operatorname{SC}(H', P, q, t)| = \prod_{e' \in E'} \beta'_{e'},$$

de modo que, utilizando ainda as equações acima,

$$\begin{aligned} \frac{|\operatorname{SC}(H', P, q, t)|}{|\operatorname{SC}(H, P, q, t)|} &= \frac{\left(\prod_{e' \in F'_1} s_i\right)\left(\prod_{e \in E \cap E'} \beta'_e\right)}{\left(\prod_{e \in F_1} s_i\right)\left(\prod_{e \in E \cap E'} \beta_e\right)} \qquad (6.15) \\ &= \frac{s_i^{|F'_1| - |F_1|}\left(\prod_{e \in F_0} \beta'_e\right)\left(\prod_{e \in F'_2} \beta'_e\right)\left(\prod_{e \in F_2} \beta'_e\right)}{\left(\prod_{e \in F_0} \beta'_e\right)\left(\prod_{e \in F'_2} \beta_e\right)\left(\prod_{e \in F_2} \beta_e\right)} \\ &= \frac{s_i^{|F'_1| - |F_1|}\left(\prod_{e \in F'_2} \beta'_e\right)\left(\prod_{e \in F_2} \beta'_e\right)}{\left(\prod_{e \in F'_2} \beta'_e - s_i\right)\left(\prod_{e \in F_2} \beta'_e + s_i\right)}. \end{aligned}$$

Considere a função $\phi\colon F_1 \cup F'_1 \cup F_2 \cup F'_2 \longrightarrow F_1 \cup F'_1 \cup F_2 \cup F'_2$ dada por $\phi(e) = (e \setminus \{v, w\}) \cup (\{v, w\} \setminus e)$. Facilmente podemos ver que esta função é injetora. Além disso, $w \notin U$ implica que $\phi(F_1) \subseteq F'_1$ e $\phi(F'_2) \subseteq F_2$. Finalmente, a função ϕ é uma bijeção entre $F'_1 \setminus \phi(F_1)$ e $F_2 \setminus \phi(F'_2)$. De fato, considere $f' \in F'_1 \setminus \phi(F_1)$ e $f = \phi(f')$. Pela nossa escolha de f' temos que $f \notin F_1$, portanto $f \in F_2$. Temos que $f \notin \phi(F'_2)$, pois $\phi(f) = f' \in F'_1$, de modo que $f \in F_2 \setminus \phi(F'_2)$ como afirmado. Com isto temos que

$$|F_2| - |F'_2| = |F_2| - |\phi(F'_2)| = |F'_1| - |\phi(F_1)| = |F'_1| - |F_1|. \qquad (6.16)$$

Utilizando (6.15) e (6.16) temos que

$$\frac{|\operatorname{SC}(H', P, q, t)|}{|\operatorname{SC}(H, P, q, t)|} = \frac{s_i^{|F_2|-|F_2'|}\left(\prod_{e\in F_2'}\beta_e'\right)\left(\prod_{e\in F_2}\beta_e'\right)}{\left(\prod_{e\in F_2'}\beta_e' - s_i\right)\left(\prod_{e\in F_2}\beta_e' + s_i\right)}. \tag{6.17}$$

Lema 6.19. *Considere os conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ de números inteiros positivos, e sejam $m \in \{2, 3, 4\}$ e M números inteiros positivos. Suponhamos que $m+2 \le a_i \le M$, $2 \le b_j \le M$ para quaisquer i, j onde $q \ge \max\{p, 1\}$. Seja $\phi\colon [p] \longrightarrow [q]$ uma função injetora tal que $a_i \le b_{\phi(i)} + m$, para todo $i \in [p]$. Então*

$$\frac{m^{q-p}\prod_{i\in A} a_i \prod_{j\in B} b_j}{\prod_{i\in A}(a_i - m)\prod_{j\in B}(b_j + m)} \ge 1. \tag{6.18}$$

Se $a_i < b_{\phi(i)}$, então o lado direito da desigualdade pode ser substituído por $1+\frac{m}{M^2-m^2}$. Se $p < q$ e $\max\{m, b_j : j \in [q]\} \ge 3$, então o lado direito da desigualdade pode ser substituído por $\frac{6}{5}$.

Pelo Lema 6.19, temos que

$$\frac{|\operatorname{SC}(H', P, q, t)|}{|\operatorname{SC}(H, P, q, t)|} \ge 1.$$

Precisamos mostrar que esta desigualdade é estrita.

Considere $\hat{s} \in S(q)$ uma solução ótima particular do problema de maximização do Lema 6.2 tal que $\hat{s}_i = 3$ para algum i que existe, pois $q \ge 5$. Considere $P(\hat{s})$ uma partição do conjunto de cores como antes. O objetivo é mostrar que, ou $|B| = |F_2| > |F_2'| = |A|$, ou existe algum $e' \in F_2'$ tal que $a_e' < b_{\phi(e')} + \hat{s}_i$.

Seja f um k-subconjunto de $[n]$ tal que $f \cap (U \cup \{w\}) = t_i \cup t_j$, que existe, já que estamos supondo que $|t_i \cup t_j| \le k$ e já que n pode ser escolhido suficientemente grande para garantir isto. Temos que $f \in F_2$, pois $f \cap (U \cup \{w\}) = t_i \cup t_j$, o que implica que $t_i \cup t_j \subset f$ e se tivéssemos que $w \in f$, teríamos que $w \in t_i \cup t_j$. Considere, como antes, $f' = (f \setminus \{v, w\}) \cup (\{v, w\} \setminus f) \in F_1' \cup F_2'$. Separamos agora em dois casos:

Se $f' \in F_2'$, então $\beta'_{f'} + \hat{s}_j - \hat{s}_i \leq \beta'_f$, o que implica que $\beta'_{f'} < \beta'_f + \hat{s}_i$. Isto é verdade pelo fato de que $t_i' \subset f'$, $t_j \subset f$, mas $t_i' \not\subset f$ e $t_j \not\subset f'$ e também que nossa escolha de w garante que, para $g \neq i$, não pode existir um t_g tal que $t_g \subset f'$, mas $t_g \not\subset f$.

Se $f' \in F_1'$, então $|F_1'| > |F_1|$, pois $\phi(f') = f$ não está em F_1. Por (6.16) temos que $q = |F_2| - |F_2'| = |F_1'| - |F_1| > 0$. Além disso, $\max\{m, b_e : e \in B\} \geq \hat{s}_i \geq 3$.

Com isto, podemos aplicar o Lema 6.19 em (6.17) e obter, para todo $q \geq 5$, que

$$\frac{|\operatorname{SC}(H', P, q, t)|}{|\operatorname{SC}(H, P, q, t)|} \geq \min\left\{\frac{6}{5}, 1 + \frac{2}{q^2 - 16}\right\} > \frac{q^2 - 14}{q^2 - 15}. \tag{6.19}$$

Agora, pelo Lema 6.17, temos que

$$\begin{aligned} &\operatorname{sc}(H', q, t) - \operatorname{sc}(H, q, t) \geq \\ &\left(1 - A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}\right) \sum_{s \in S(q)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_s'} |\operatorname{SC}(H', P', q, t)| \\ &- \sum_{s \in S(q)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_s'} |\operatorname{SC}(H, P', q, t)| \end{aligned} \tag{6.20}$$

Se aplicarmos a distributividade em (6.20) veremos que, por (6.19) temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{s \in S(q)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_s'} |\operatorname{SC}(H', P', q, t)| - \sum_{s \in S(q)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_s'} |\operatorname{SC}(H, P', q, t)| \geq \\ &\frac{1}{q^2 - 15} |\operatorname{SC}(H', P(\hat{s}), q, t)| \geq \frac{1}{q^2 - 15} D(q)^{\binom{n-ct}{k-t}}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Note que, dados $\xi > 0$ arbitrário e n suficientemente grande, temos que

$$D(q)^{\binom{n-c(q)t}{k-t}} \geq D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}}. \tag{6.22}$$

De (6.20), (6.21) e (6.22) temos que

$$\begin{aligned} &\operatorname{sc}(H', q, t) - \operatorname{sc}(H, q, t) \\ &\geq \frac{1}{q^2 - 15} D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} - A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}} \sum_{s \in S(q)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_s'} |\operatorname{SC}(H', P', q, t)|. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Fixamos agora $\xi < \min\left\{\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{3}\log_{D(q)}\frac{q}{q-1}\right\}$. Pelos Lemas 6.16 e 6.17, temos que, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
&A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}} \sum_{s\in S(q)}\sum_{P'\in\mathcal{P}'_s} |\operatorname{SC}(H',P',q,t)| \\
&\le \frac{A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}}{1-A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}}\operatorname{sc}(H',q,t) \le 2A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}}\kappa(H',q,t) \\
&\le 2A(q)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\binom{n-2t}{k-t}} N(q)q^{\binom{tc(q)}{t+1}\binom{n-t-1}{k-t-1}}D(q)^{\binom{n-t}{k-t}} \\
&\le D(q)^{(1-2\xi)\binom{n-t}{k-t}}, \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

onde no último passo aplicamos a parte (ii) do Teorema 6.6.

Combinando (6.23) com (6.24) temos que, para $q \ge 5$ e n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sc}(H',q,t) - \operatorname{sc}(H,q,t) \\
&\ge \frac{1}{q^2-15}D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}}D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} - D(q)^{(1-2\xi)\binom{n-t}{k-t}} \\
&\ge \delta D(q)^{(1-\xi)\binom{n-t}{k-t}} \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$ e $\xi < \gamma$. Isto prova (6.13) e, portanto, o Lema 6.18. □

Lema 6.20. *Se $H_{C,k}(n)$ é um hipergrafo (C,k)-completo, mas C não satisfaz as condições da Definição 1.10, então, para $q \ge 5$, existem $\delta > 0$ e $n_0 > 0$ tais que, para $n > n_0$,*

$$\kappa(H_{C,k}(n),q,t) < (1-\delta)\operatorname{KC}(n,k,q,t).$$

Demonstração. De fato, considere $H_{C',k}(n)$ um hipergrafo extremal obtido modificando a cobertura C indutivamente como na demonstração do Lema 6.18, até que a união de quaisquer dois elementos da cobertura seja maior do que k, ou disjunta. Assim, temos que $|\operatorname{SC}(H_{C',k}(n),P,q,t)|$ é igual para qualquer solução ótima do problema de maximização do Lema 6.2 $s \in S(q)$ e para qualquer $P \in \mathcal{P}_s$. Em particular, os Lemas 6.16 e 6.17, aplicados para $H_{C',k}(n)$ implicam que

$$\begin{aligned}|\operatorname{SC}(H_{C',k}(n), P, q, t)| &\geq \frac{1}{N(q)}\left(\kappa(H_{C',k}(n), q, t) - D(q)^{(1-\gamma)\binom{n-N}{k-t}}\right)\\ &\geq \frac{1}{2N(q)}\kappa(H_{C',k}(n), q, t),\end{aligned}$$

já que, pelo Lema 6.12, temos $\kappa(H_{C',k}(n), q, t) \geq D(q)^{\binom{n-tc(q)}{k-t}}$, onde n é suficientemente grande e γ é a constante positiva definida em (6.8). Com isto, podemos realizar manipulações algébricas em (6.21) para chegarmos em

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in S(q)}\sum_{P'\in\mathcal{P}'_s}|\operatorname{SC}(H', P', q, t)| - \sum_{s\in S(q)}\sum_{P'\in\mathcal{P}'_s}|\operatorname{SC}(H, P', q, t)|\\ &\geq \frac{1}{2(q^2-15)N(q)}\kappa(H_{C',k}(n), q, t).\end{aligned}$$

De (6.25), podemos concluir que

$$\operatorname{sc}(H_{C',k}(n), q, t) - \operatorname{sc}(H_{C,k}(n), q, t) \geq \frac{1}{4(q^2-15)N(q)}\kappa(H_{C',k}(n), q, t),$$

e portanto temos que

$$\begin{aligned}\kappa(H_{C,k}(n), q, t) &\leq \operatorname{sc}(H_{C,k}(n), q, t) + D(q)^{(1-\gamma)\binom{n-N}{k-t}}\\ &\leq \left(1 - \frac{1}{8(q^2-15)N(q)}\right)\kappa(H_{C',k}(n), q, t) \leq (1-\delta)\operatorname{KC}(n, k, q, t)\end{aligned}$$

para todo $\delta \leq \frac{1}{8(q^2-15)N(q)}$. □

Agora, para concluirmos o caso quando $q \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, conforme o Lema 6.2, precisamos determinar se o melhor tamanho para a t-cobertura é $c(q)$ ou $c(q)-1$. Utilizando os Lemas 6.16 e 6.17, mostraremos que o número de (q,t)-colorações de um hipergrafo definido a partir de uma cobertura de tamanho $c(q)$ é substancialmente maior do que o de tamanho $c(q)-1$. Para tal, dividiremos em dois casos e compararemos assintoticamente as quantidades de colorações estrela para descobrirmos qual tamanho de cobertura é melhor.

Se $k < 2t-1$, seja $H_0^* = H_{C,k}(n)$ um hipergrafo k-uniforme completo com n vértices e com uma t cobertura $C = \{t_1, \ldots, t_{c(q)}\}$ tal que $|t_i \cup t_j| > k$, para quaisquer $i, j \in [c(q)]$, com $i \neq j$. Seja $H_1^* = H_{C',k}(n)$ um hipergrafo análogo ao anterior, mas com t-cobertura $C' = \{t'_1, \ldots, t'_{c(q)-1}\}$. Como $k < 2t - 1$ temos que qualquer hiperaresta de qualquer um dos dois hipergrafos é coberta por exatamente um elemento de sua cobertura, isto é, dado $s \in S_0 \subset S(q)$, onde S_0 é o conjunto de todas as soluções ótimas do problema de maximização do Lema 6.2 tais que dois elementos de s são iguais a 2 e os demais são iguais a 3, e dada uma partição qualquer $P \in \mathcal{P}_s$, é verdade que

$$|\operatorname{SC}(H_0^*, P, q, t)| = 2^{2\binom{n-t}{k-t}} 3^{(c(q)-2)\binom{n-t}{k-t}},$$

já que cada elemento da t-cobertura cobre exatamente $\binom{n-t}{k-t}$ e nenhuma hiperaresta é coberta por mais do que um elemento da cobertura. De maneira análoga, para algum $s' \in S_1 \subset S(q)$, onde S_1 é o conjunto de todas as soluções ótimas do problema de maximização do Lema 6.2 tais que um dos elementos de s' é igual a 4, e os demais são iguais a 3, e para qualquer partição $P' \in \mathcal{P}_{s'}$ temos que

$$|\operatorname{SC}(H_1^*, P', q, t)| = 4^{\binom{n-t}{k-t}} 3^{(c(q)-2)\binom{n-t}{k-t}} = |\operatorname{SC}(H_0^*, P, q, t)|.$$

Além disso, para $s \in S_0$ e $s' \in S_1$, temos que

$$|S_0||\mathcal{P}_s| = \binom{c(q)}{2} \frac{q!}{2.2.6^{c(q)-2}}$$

e

$$|S_1||\mathcal{P}_{s'}| = (c(q) - 1)\frac{q!}{4!.6^{c(q)-2}},$$

porém, o Lema 6.16 garante que, para n suficientemente grande, temos que

$$\frac{\kappa(H_0^*, q, t)}{\kappa(H_1^*, q, t)} > \frac{\operatorname{sc}(H_0^*, q, t)}{2\operatorname{sc}(H_1^*, q, t)} \geq \frac{|S_0||\mathcal{P}_s|}{|S_1||\mathcal{P}_{s'}|} = \frac{3c(q)}{2} > 1, \tag{6.26}$$

o que implica que o tamanho de uma t-cobertura de um hipergrafo que atinge o número máximo de (q, t)-colorações deve ser $c(q)$.

Se $k \geq 2t - 1$, utilizaremos o Princípio de Inclusão-Exclusão enunciado abaixo.

Lema 6.21 (Princípio de Inclusão-Exclusão)**.** *Dado um número natural n e p conjuntos $A_1, \ldots, A_p \subseteq 2^{[n]}$, temos que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{r=1}^{p} \left((-1)^{r-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq[p]} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| \right).$$

Definimos H_0^*, H_1^* como antes, onde os elementos de suas coberturas são mutuamente disjuntos. Como no caso anterior, para $s \in S_0$, $s' \in S_1$, $P \in \mathcal{P}_s$ e $P' \in \mathcal{P}_{s'}$, temos que $|\operatorname{SC}(H_1^*, P', q, t)| = |\operatorname{SC}(H_0^*, P, q, t)|$. Para facilitar a notação, considere $c(q) = c$. Para calcularmos o número de colorações estrela de H_0^*, considere, sem perda de generalidade, que t_c e t_{c-1} correspondam aos elementos iguais a 2 em s. Seja $X = \{t_1, \ldots, t_{c-2}\}$. Qualquer hiperaresta e que contenha t_c e t_{c-1} ao mesmo tempo e mais $|I| = |\{i : t_i \in \binom{e}{t} \cap X\}|$ elementos da cobertura pode ser colorida com $4 + 3|I|$ cores, três cores para cada $i \in I$, duas cores devido ao conjunto t_c e duas cores devido ao conjunto t_{c-1}. Além disso, para cada conjunto I de índices, temos, pelo Lema 6.21, que o número $A(I)$ de hiperarestas que contêm t_c, t_{c-1} e $|I|$ outros elementos da cobertura é

$$A(I) = \sum_{i=0}^{c-2-|I|} (-1)^i \binom{n - t(|I| + 2 + i)}{k - t(|I| + 2 + i)} \binom{c - 2 - |I|}{i},$$

pois basta contarmos a quantidade de hiperarestas que possuem exatamente t_c, t_{c-1} e outros $|I|$ conjuntos, descontarmos a quantidade de hiperarestas que contêm exatamente t_c, t_{c-1} e outros $|I|+1$ elementos, acrescentamos a quantidade de hiperarestas que contêm exatamente t_c, t_{c-1} e mais outros $|I|+2$ elementos da cobertura, e assim sucessivamente.

De maneira análoga, as hiperarestas que contêm exatamente um dentre t_c e t_{c-1} e $|J|$ outros elementos da cobertura podem ser coloridas com $2 + 3|J|$ cores e a quantidade destas hiperarestas é

$$B(J) = \sum_{i=0}^{c-1-|J|} (-1)^i \binom{n - t(|J| + 1 + i)}{k - t(|J| + 1 + i)} \binom{c - 1 - |J|}{i}.$$

Também de maneira análoga existem

$$C(K) = \sum_{i=0}^{c-|K|} (-1)^i \binom{n - t(|K|+i)}{k - t(|K|+i)} \binom{c-|K|}{i}$$

hiperarestas que não contêm nem t_c nem t_{c-1} e contêm $|K|$ outros elementos da cobertura, e estas podem ser coloridas com $3|K|$ cores.

Assim, dada uma partição P, o número de colorações estrela de H_0^* é

$$\begin{aligned} &\mathrm{sc}(H_0^*, P, q, t) = \\ &\left(\prod_{x=1}^{m_a} \prod_{I \in \binom{X}{x}} (4+3x)^{A(x)} \right) \left(\prod_{y=1}^{m_b} \prod_{J \in \binom{X}{y}} (2+3y)^{B(y)} \right)^2 \\ &\left(\prod_{z=1}^{m_c} \prod_{K \in \binom{X}{z}} (3z)^{C(z)} \right) 4^{A(0)} 2^{B(0)}, \end{aligned}$$

onde $w = \lfloor \frac{k}{t} \rfloor$, $m_a = \min(c-2, w-2)$, $m_b = \min(c-2, w-1)$ e $m_c = \min(c-2, w)$.

Por outro lado, vamos supor que t_{c-1} corresponde ao elemento 4 em s'. Assim como antes, calculamos que existem

$$D(I) = \sum_{i=0}^{c-2-|I|} (-1)^i \binom{n - t(|I|+1+i)}{k - t(|I|+1+i)} \binom{c-2-|I|}{i}$$

hiperarestas que contêm t_{c-1} e outros $|I|$ elementos da cobertura, e estas podem ser coloridas com $4 + 3|I|$ cores, e

$$E(K) = \sum_{i=0}^{c-1-|K|} (-1)^i \binom{n - t(|K|+i)}{k - t(|K|+i)} \binom{c-1-|K|}{i}$$

hiperarestas que não contêm t_{c-1} e contêm $|K|$ outros elementos da cobertura, e estas podem ser coloridas com $3|K|$ cores.

Com isto obtemos que, para uma dada partição P', o número de colorações estrela de H_1^* é

$$\mathrm{sc}(H_1^*, P', q, t) = 4^{D(0)} \left(\prod_{x=1}^{m_b} \prod_{I \in \binom{X}{x}} (4+3x)^{D(x)} \right) \left(\prod_{z=1}^{m_c} \prod_{K \in \binom{X}{z}} (3z)^{E(z)} \right).$$

De maneira análoga ao caso anterior, podemos mostrar que, de fato,

$$\mathrm{sc}(H_0^*, P, q, t) \geq \mathrm{sc}(H_1^*, P', q, t),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Agora iremos demonstrar que, no caso $q = 4$, o tamanho da cobertura deve ser igual a 2.

Demonstração. Sabemos, pelo Lema 6.14, que o hipergrafo k-uniforme com n vértices que atinge o número máximo de $(4, t)$-colorações deve ser da forma $H_{C,k}(n)$, onde C é uma t-cobertura de tamanho 1 ou 2. Primeiramente consideraremos que C possui tamanho igual a 2.

Considere $C = \{t_1, t_2\}$, onde $C \subseteq \binom{V_0}{t}$, para o hipergrafo k-uniforme $H_0^* = H_{C,k}(n) = (V_0, E_0)$ com n vértices. Considere que $y = |t_1 \cap t_2|$. Temos que existem $\binom{4}{2}$ maneiras de distribuirmos as 4 cores entre os conjuntos t_1 e t_2. O número de k-subconjuntos de V_0 que contêm t_1 e não contêm t_2 é $\binom{n-t}{k-t} - \binom{n-2t+y}{k-2t+y}$, que é também o número de k-subconjuntos de V_0 que contêm t_2 e não contêm t_1. O número de k-subconjuntos que contêm t_1 e t_2 é $\binom{n-2t+y}{k-2t+y}$, e estes conjuntos podem ser coloridos com qualquer uma das 4 cores. Logo, o número de colorações estrela de H_0^* é dado por

$$\binom{4}{2} 2^{2(\binom{n-t}{k-t} - \binom{n-2t+y}{k-2t+y})} 4^{\binom{n-2t+y}{k-2t+y}} = 6.4^{\binom{n-t}{k-t}}, \tag{6.27}$$

que não depende de y.

Por outro lado, considere $H_1^* = H_{C',k}(n) = (V_1, E_1)$ como sendo o hipergrafo k-uniforme com n vértices e com t-cobertura $C' = \{t_1'\}$, para algum $t_1' \in \binom{V_1}{t}$. Neste caso, toda hiperaresta pode ser colorida com qualquer uma das 4 cores. Logo, o número de colorações estrela de H_1^* é $4^{\binom{n-t}{k-t}}$. Utilizando (6.27) e o

Lema 6.16, temos que, para n suficientemente grande,

$$\frac{\kappa(H_0^*, 4, t)}{\kappa(H_1^*, 4, t)} > \frac{\mathrm{sc}(H_0^*, 4, 1)}{\mathrm{sc}(H_1^*, 4, 1)} = \frac{6}{2} > 1,$$

implicando que, para $q = 4$, o hipergrafo que atinge o número máximo de $(4, t)$-colorações é o que possui t-cobertura de tamanho 2. $\square$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A principal contruibuição do trabalho foi estudar a aplicabilidade da substituição para demonstrar a Conjectura 1.12. Estudamos (q,t)-colorações de hipergrafos e vimos que já era conhecido que o hipergrafo que possui o maior número de (q,t)-colorações, quando $2 \leq q \leq 4$ ou quando $q \geq 5$ e $k \geq 2t-1$, é isomorfo a $H_{C,k}(n)$, formado a partir de uma cobertura disjunta C de tamanho $\lceil q/3 \rceil$. No caso em que $q \geq 5$ e $k < 2t-1$, já era conhecido que os hipergrafos ótimos são isomorfos a $H_{C,k}(n)$, para alguma cobertura C tal que $|C| = \lceil q/3 \rceil$ e a união entre quaisquer dois conjuntos de C possui mais do que k elementos. Em outras palavras, nenhuma hiperaresta pode conter dois elementos da cobertura. Foi conjecturado que, neste caso, para um hipergrafo ser ótimo, este deve satisfazer, além do que já foi dito, que a união entre quaisquer dois conjuntos da cobertura C possui tamanho igual a $k+1$. Conseguimos demonstrar que a conjectura é verdadeira, para $q \leq 6$ adaptando a técnica de substituição, utilizada para demonstrar os Teoremas 1.2 e 1.3, e mostrando que o número de (q,t)-colorações de um hipergrafo aumenta a cada aplicação da substituição na cobertura do hipergrafo. Quando $q \geq 7$, temos que a cobertura deve possuir tamanho $|C| \geq \lceil 7/3 \rceil = 3$ e conseguimos utilizar esta mesma técnica para restringir a família de hipergrafos candidatos. Mostramos que, neste caso, se a cobertura satisfaz a propriedade de que existem dois conjuntos $t_1, t_2 \in C$, onde $|t_1 \cup t_2| > k+1$, e elementos x e y tais que x pertence a todos os conjuntos de C, exceto t_1, e y pertence a todos os conjuntos de C, exceto t_2, então este hipergrafo não é ótimo. Quando $q \in \{7,8,9\}$, temos que $|C| = 3$ e conseguimos mostrar que, ou a propriedade citada acima é satisfeita, ou existem conjuntos $t_1, t_2 \in C$, onde $|t_1 \cup t_2| > k+1$, e elementos x, y tais que x pertence somente a t_1 e y pertence somente a t_2. Futuramente, pretendo mostrar que, se um hipergrafo H satisfaz esta propriedade, então H não é ótimo.

Além disso, pretendo investigar outras técnicas que permitam demonstrar a Conjectura 1.12 para todo número inteiro positivo q. Porém, como foi dito anteriormente, mesmo se provarmos que conjectura é verdadeira, e que portanto a intersecção dois a dois entre os elementos da cobertura deve ser igual a $2t - k - 1$, não saberemos qual configuração de cobertura é a melhor dentre as que satisfazem a Conjectura 1.12, nem que existe uma única configuração que é a melhor, como ilustra a Figura 7.1. Assim, pretendo procurar por configurações de coberturas que levam um hipergrafo a ser ótimo e investigar a unicidade destas configurações.

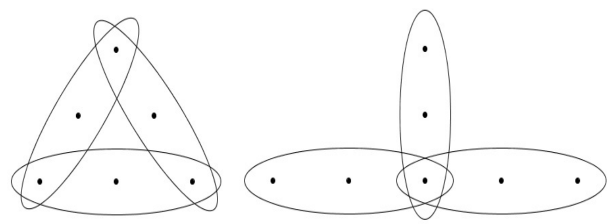

Figura 7.1: Configurações de coberturas com mesma intersecção dois a dois.

Uma outra direção de pesquisa seria realizar uma espécie de Teorema de Hilton-Milner para (q,t)-colorações, isto é, analisar o que acontece com o número de (q,t)-colorações quando proibimos os hipergrafos gerados a partir de uma cobertura de tamanho $c(q)$ de serem candidatos. Será que o hipergrafo deste tipo que atinge o maior número de (q,t)-colorações é semelhante ao ótimo, formado a partir de uma cobertura com outro tamanho? Será que o número de (q,t)-colorações do melhor hipergrafo deste tipo é próximo ao número de (q,t)-colorações do hipergrafo ótimo? Será que existirá um único deste tipo com esta propriedade? No caso em que $q \equiv 1 \pmod 3$, para termos um número grande de colorações, o tamanho da cobertura podia ser $c(q)$ ou $c(q) - 1$, conforme o Lema 6.2. Porém, demonstramos que o tamanho da cobertura de um hipergrafo ótimo é $c(q)$. Portanto, sabemos que o hipergrafo que não é gerado a partir de uma cobertura de tamanho $c(q)$ e que atinge o maior número de (q,t)-colorações, quando $q \equiv 1 \pmod 3$, é o hipergrafo formado a partir de uma cobertura de tamanho igual a $c(q) - 1$, e partição de cores dentre os elementos da cobertura conforme as $c(q) - 1$ coordenadas do vetor s no Lema 6.2.

Referências Bibliográficas

[1] HOPPEN, C., KOHAYAKAWA, Y., LEFMANN, H. Hypergraphs with many Kneser colorings. *European Journal of Combinatorics*, 33(5):816 – 843, 2012.

[2] HILTON, A. J. W., MILNER, E. C. Some intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser*, (2) 18:369 – 384, 1967.

[3] WILSON, R. M. The exact bound on the Erdos-Ko-Rado Theorem. *Combinatorica*, 4:247 – 257, 1984.

[4] ERDŐS, P., KO, C., RADO, R. Intersection theorem for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford*, 12 2:313 – 320, 1961.

[5] FRANKL, P. The Erdos-Ko-Rado theorem is true for n=ckt. *Combinatorics, Proc. Fifth Hungarian Coll Combinatorics, Keszthely*, pages 365 – 375, 1976.

[6] AHLSWEDE, R., KHACHATRIAN, L. H. The complete intersection theorem for systems of finite sets. *European Journal of Combinatorics*, 18(2):125 – 136, 1997.

[7] TURÁN, P. On an extremal problem in graph theory. *Math. Fiz. Lapok*, 48:436 – 452, 1941.

[8] ERDŐS, P. Some new applications of the probability methods to combinatorial analysis and graph theory. *Poceedings of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic Univ., Boca Raton, fla. 1974, Winnipeg, Man*, Congressus Numeratium, No. X.:39 – 51, 1974.

[9] YUSTER, R. The number of edge colorings with no monochromatic triangle. *J. Graph Theory*, 21 (4):441 – 452, 1996.

[10] ALON, N., BALOGH, J., KEEVASH, P., SUDAKOV, B. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. *Journal of the London Mathematical Society*, (2)70(2):273 – 288, 2004.

[11] PIKHURKO, O., YILMA, Z. B. The maximum number of k_3-free and k_4-free edge 4-colorings. *J. Lond. Math. Soc.*, (2) 85 (3):593 – 615, 2012.

[12] FRANKL, P., GRAHAM, R. L. Old and New proofs of the Erdos-Ko-Rado Theorem. *Journal of Sichuan University Natural Science Edition*, 26:112 – 122, 1989.

[13] FRANKL, P. The shifting technique in extremal set theory. *Journal of the London Mathematical Society*, 123:81 – 110, 1987.

[14] KATONA, G. O. H. A simple proof of the Erdos-Ko-Rado theorem. *Journal of Combinatorics*, B. 13:183 – 184, 1974.

[15] DAYKIN, D. E. Erdos-Ko-Rado from Kruskal-Katona. *Journal of Combinatorics*, A. 17:254 – 255, 1974.