

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise numérica de flexão em Lajes Nervuradas com a  
consideração dos efeitos de fissuração no concreto**

**Bruno Ramón Blanc Recalde**

Porto Alegre  
2014

BRUNO RAMÓN BLANC RECALDE

**ANÁLISE NUMÉRICA DE FLEXÃO EM LAJES  
NERVURADAS COM A CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE  
FISSURAÇÃO NO CONCRETO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Porto Alegre  
2014

**BRUNO RAMÓN BLANC RECALDE**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE FLEXÃO EM LAJES NERVURADAS COM  
A CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE FISSURAÇÃO NO CONCRETO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 30 de maio de 2014

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal  
Ph.D., N.C.S.U./EUA  
orientador

Prof. Virginia Maria Rosito d'Avila Bessa  
Dra., PPGEC/UFRGS  
orientador

Prof. Armando Miguel Awruch  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)**  
Ph.D. Univ. of Leeds

**Prof. Mauro de Vasconcelos Real (UCPEL)**  
Dr, PPGEC-UFRGS

**Prof. Jean Marie Desir (UFRGS)**  
Dr, COPPE-UFRJ

**Prof. Paulete Fridman Schwetz (UFRGS)**  
Dra, PPGEC-UFRGS

Dedico este trabalho a meus pais.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus.

A meus familiares.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro, indispensável para a conclusão deste trabalho.

À Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

À comissão do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e membros administrativos.

Agradeço aos Profs. Francisco Gastal e Virgínia Bessa, orientadores deste trabalho pela dedicação, atenção, confiança.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Agradeço à Dra. Paulete Schwetz pela amizade, dedicação, colaboração, confiança, e por contagiar o interesse pelas “lajes nervuradas”.

Agradeço ao Prof. Rubem López pela motivação antes e durante o curso de mestrado e a Diego Fuster pelo apoio durante o todo o curso.

Ao LEME, Laboratório de Ensaios e Modelos Experimentais, e aos seus responsáveis, por terem me acolhido e dado suporte durante minha pesquisa de Pós-Graduação.

Aos colegas do curso de Pós-Graduação, pela valiosa troca de conhecimentos e amizade.

Ao diretor e os residentes do centro cultural e residência universitária Mirador por haver me acolhido durante a minha estadia em Porto Alegre.

Agradeço também a Guadalupe, Toni, Isidoro e em especial ao engenheiro de caminho Álvaro.

## RESUMO

RECALDE, B.R.B. **Análise numérica de flexão em lajes nervuradas com a consideração dos efeitos de fissuração no concreto.** 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Lajes nervuradas modeladas computacionalmente são geralmente analisadas por metodologias simplificadas, tanto para a geometria da seção (convertendo em lajes maciças ou grelhas) como para as propriedades mecânicas dos materiais (regime elástico-linear). Estes estudos teóricos apresentam grandes diferenças quando comparados com ensaios experimentais, mesmo para baixos níveis de carregamento. Isto se deve principalmente pela não consideração da excentricidade entre os eixos da nervura e da capa, como também à simplificação do comportamento mecânico do concreto à tração.

Modelos numéricos chamados realísticos consideram o efeito da excentricidade entre os eixos da capa e nervura da seção transversal. Pode-se, ainda, introduzir a não-linearidade física do concreto armado nestes modelos, obtendo resultados mais próximos do real.

O objetivo deste trabalho é estabelecer um modelo numérico realístico, para a seção típica de laje nervurada, atendendo às indicações descritas acima. Para a consideração da excentricidade entre os eixos da capa e nervura empregam-se elementos de casca, em posição horizontal para a capa e vertical para a nervura. A não-linearidade física do concreto à tração é representada através do modelo de fissuração distribuída proposto por D'AVILA (2003).

Para as análises não-lineares empregou-se o programa computacional de elementos finitos SAP2000 versão 16, onde os elementos de casca permitem discretizar o concreto armado em camadas, ao longo da espessura.

Um bom desempenho do modelo numérico proposto foi verificado pela validação deste a partir de modelos experimentais, assim como da análise numérica de outros autores. Realizaram-se, por último, análises de algumas lajes nervuradas com solicitações de carregamentos excessivos, a fim de prever seus desempenhos frente a estados limites de flexão. Os resultados obtidos nestas análises mostraram, também, um bom desempenho do modelo proposto.

**Palavras-chave:** *laje nervurada; concreto armado; modelo numérico; análise não-linear.*

## ABSTRACT

RECALDE, B.R.B. **Numerical analysis of flexion waffle slabs with consideration of the effects of cracking in concrete.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Waffle slab structures simulated by computational models are generally analyzed by simplified methods, both for section geometry (converting into solid slabs) and the material mechanical properties (linear elastic regime). The results obtained by such theoretical studies show large differences when compared to experimental tests, even at low loading levels. This is mainly due to non-consideration of the eccentricity between the rib and cover axes and simplification of the concrete tensile strength mechanical behavior.

The so called realistic numerical models consider the effect of eccentricity between the axes of hood and ribs of the cross section. One may also introduce physical nonlinearity of reinforced concrete in these models, obtaining results closer to real.

The objective of this work is to establish a realistic numerical model for the typical section of a waffle slab, considering the physical nonlinearity of concrete and its collaboration between cracks, by the smeared crack model proposed by D'AVILA (2003).

The computational finite element program SAP2000 version 16 is used for the non-linear analysis. The shell element discretization enabled the heterogeneous characteristics of reinforced concrete to be considered through layers along the thickness. The numerical model was validated based on the analysis of experimentally tested slabs. Finally, some waffle slabs were numerically analyzed under a uniformly distributed and incrementally growing load. The proposed model was able to predict their overall behavior and some local aspects could also be observed.

**Key-word:** *waffle slab, reinforced concrete, numerical model, non-linear analysis.*

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
1.1 OBJETIVOS .....	19
1.2 JUSTIFICATIVA .....	20
1.3 DELIMITAÇÕES .....	21
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	21
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>23</b>
2.1 A CONSTRUÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS PARA LAJES NERVURADAS .....	23
2.1.1 Método simplificado .....	24
2.1.2 Métodos realísticos .....	26
2.1.2.1 Modelos que consideram a capa e a nervura concêntricas .....	30
2.1.2.2 Modelos que consideram a excentricidade entre a capa e a nervura .....	31
2.2 CONSIDERAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO ARMADO .....	33
2.2.1 Material homogêneo .....	33
2.2.2 Material discretizado .....	34
2.3 TIPOS DE ANÁLISES .....	34
2.3.1 Análise linear .....	34
2.3.2 Análise não linear .....	34
2.4 MODELOS EXPERIMENTAIS DE LABORATÓRIO E SUAS ANÁLISES NUMÉRICAS .....	36
2.4.1 Laje experimental de AJDUKIEWICZ e KLISZCZEWICZ (1986) .....	36
2.4.2 Laje nervurada experimental de KLEIN e SELISTRE (1997) .....	38
2.4.3 Estudo experimental de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) .....	41
2.4.4 Laje nervurada experimental de SCHWETZ (2005) .....	44



2.4.5 Laje nervurada experimental de REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)	46
2.4.6 Estudos experimentais de peças de lajes nervuradas BORGES(2009)	49
2.5 AVALIAÇÕES EXPERIMENTAIS DE LAJES NERVURADAS EM TAMANHO REAL .....	53
<b>3 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO ARMADO EM APLICAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>57</b>
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	57
3.2 MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA PROPOSTO POR D'AVILA (2003) .....	58
3.3 O PROGRAMA SAP2000 - MODELAGEM DO CONCRETO ARMADO .....	62
3.3.1 Definição dos materiais .....	62
3.3.1.1 Modelo para concreto .....	62
3.3.1.2 Modelo para armaduras .....	64
3.3.2 Definição da Seção Transversal .....	65
3.3.3 Formulação para os elementos <i>Shell Layered</i> .....	68
3.3.4 Esforços no elemento Casca Espessa .....	69
3.3.5 Propriedades para a Análise não linear no programa SAP2000 .....	70
3.4 VALIDAÇÃO DO MODELO DE FISSURAÇÃO IMPLEMENTADO NO PROGRAMA SAP2000 .....	72
3.4.1 Viga isostática ET1 .....	73
3.4.1.1 Parâmetros dos materiais empregados .....	74
3.4.1.2 Análises numéricas .....	76
3.4.2 Viga hiperestática HH5 .....	77
3.4.2.1 Parâmetros dos materiais empregados .....	79
3.4.2.2 Análises numéricas .....	80

<b>4 MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISES DE LAJES NERVURADAS .....</b>	<b>82</b>
4.1 CONTRIBUIÇÕES DE ESTUDOS ANTERIORES .....	82
4.1.1 Tipo de elemento.....	82
4.1.2 Tipo de análise .....	83
4.2 O MODELO NUMÉRICO E SEUS RESULTADOS DE ANÁLISE ....	84
4.2.1 O elemento finito .....	84
4.2.2 A análise numérica e seus resultados .....	85
4.3 ANÁLISE NUMÉRICA DAS LAJES NERVURADAS DE ABDULWAHAB e KHALIL (2000) .....	85
4.3.1 Dados para as análises numéricas .....	87
4.3.2 Comparação de resultados .....	89
4.4 ANÁLISE NUMÉRICA DA LAJE NERVURADA DE BORGES (2009).....	91
4.4.1 Dados para análise numérica .....	92
4.4.2 Comparação de resultados .....	94
<b>5 ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS .....</b>	<b>97</b>
5.1 ANÁLISES NUMÉRICAS DOS CASOS DE ESTUDO DE SCHWETZ (2011).....	97
5.1.1 Analise numérica do Caso de Estudo 1 de SCHWETZ (2011) .....	98
5.1.1.1 Resultados das análises numéricas para CE1 .....	101
5.1.2 Analise numérica do Caso de Estudo 2 de SCHWETZ (2011) .....	102
5.1.2.1 Resultados das análises numéricas para CE2 .....	104
5.1.3 Analise numérica do Caso de Estudo 3 de SCHWETZ (2011) .....	105
5.1.3.1 Resultados das análises numéricas para CE3 .....	108

5.2 ANÁLISES NUMÉRICAS DE LAJES EM ESTADO DE DEFORMAÇÕES EXCESSIVA .....	109
5.2.1 Caso de estudo 1 de SCHWETZ (2011) .....	110
5.2.2 Caso de estudo 2 de SCHWETZ (2011) .....	112
5.2.3 Laje S2 de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) .....	115
5.2.3.1 Resultados das análises numéricas .....	116
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>119</b>
6.1 O MODELO NUMÉRICO .....	119
6.2 APLICAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO .....	121
6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	121
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>122</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estrutura em laje nervurada de concreto armado .....	18
Figura 2: Geometria típica da seção de laje nervurada .....	24
Figura 3: Representação esquemática de analogia da placa .....	25
Figura 4: Representação esquemática de analogia de grelha .....	26
Figura 5: Modelo apresentado por NAVARRA (1995) .....	29
Figura 6: Representação esquemática do Modelo 01 de DIAS e PAIVA (2007) .....	31
Figura 7: Representação esquemática do Modelo 3 de SCHWETZ (2011) .....	31
Figura 8: Representação esquemática do Modelo 02 de DIAS e PAIVA (2007) .....	32
Figura 9: Representação esquemática do Modelo 2 de SCHWETZ (2011) .....	32
Figura 10: Representação esquemática do Modelo 04 de DIAS e PAIVA (2007) .....	33
Figura 11: Diagrama Momento-Curvatura tri-linear [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]	36
Figura 12: Geometria da laje experimental, em mm [Fonte: AJDUKIEWICZ (1986)]	37
Figura 13: Etapas de ensaios [Fonte: AJDUKIEWICZ (1986)] .....	37
Figura 14: Geometria do modelo experimenta em cm [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]	38
Figura 15: (a) Seção transversal da região nervurada, (b) região maciça [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)] .....	39
Figura 16: Curvas Carga-Deslocamento, em kN e mm, dos modelos lineares, no ponto 121 – Figura 14 [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)] .....	40
Figura 17: Curvas Carga-Deslocamento, em kN e mm, dos modelos teóricos não- lineares, no ponto 121 – Figura 14 [Fonte: OLIVERA et al (2000)] .....	40
Figura 18: Figura 18: Geometria básica das lajes nervuras, em cm .....	41
Figura 19: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos analíticos numéricos e experimentais das lajes S1 a S4 [Fonte: ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)] .....	42
Figura 20: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos numéricos e o experimental da laje S2 [Fonte: DIAS e PAIVA (2007)] .....	43
Figura 21: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos numéricos e experimentais das lajes S1 a S4 [Fonte: ARAÚJO (2003)] .....	44
Figura 22: Geometria básica da laje reduzida [Fonte: SCHWETZ (2005)] .....	44

Figura 23: Modelo da laje reduzida em elementos finitos [Fonte: SCHWETZ (2011)]	45
Figura 24: Elástica do plano A-A da laje reduzida [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	46
Figura 25: Dimensões da laje ensaiada, em cm [Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)] .....	46
Figura 26: Curvas Carga-Deslocamentos utilizando a analogia de placa [Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)] .....	47
Figura 27: Curvas Carga-Deslocamentos utilizando a analogia de grelha [Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)] .....	48
Figura 28: Curvas Carga-Deslocamento com diferentes tensões para o modelo de não linearidade física [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	48
Figura 29: Geometria básica das lajes experimentais, em mm [Fonte: BORGES (2009)]	50
Figura 30: Seção transversal do plano A-A, em mm [Fonte: BORGES (2009)] .....	50
Figura 31: Sistema de ensaio utilizado [Fonte: BORGES (2009)] .....	51
Figura 32: Esquema de posicionamentos dos deflectômetros [Fonte: BORGES (2009)]	51
Figura 33: Esquema de posicionamentos dos EERs na laje [Fonte: BORGES (2009)]	52
Figura 34: Geometria básica do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	53
Figura 35: Geometria básica dos Casos de Estudo 2 e 3 [Fonte: SCHWETZ (2011)] ...	54
Figura 36: Elástica do plano A-A do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)] ....	55
Figura 37: Deformações específicas adotadas: (a) Experimental Estádio I es inferido, (b) Experimental Estádio I es medido e (c) Experimental Estádio II [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	56
Figura 38: Diagrama Momento Fletor A–A, Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	56
Figura 39: Modelo de fissuração distribuída proposto por D’AVILA (2003) .....	59
Figura 40: Deformação média do modelo proposto por D’AVILA (2003) .....	60
Figura 41: Deformação média CEB-FIP .....	60
Figura 42: Interface do SAP2000 de parâmetros do material para concreto .....	63
Figura 43: Interface do SAP2000 de parâmetros da não linearidade física no concreto	64
Figura 44: Interface do SAP2000 de parâmetros do material de armadura .....	65

Figura 45: Elemento <i>Shell Layered</i> de quatro camadas [Fonte: CSI (2013)] .....	65
Figura 46: Interface do SAP2000 dos parâmetros de <i>Shell Layered</i> .....	66
Figura 47: Eixos de elemento <i>Shell Layered</i> .....	67
Figura 48: Elemento tipo <i>Membrane</i> .....	68
Figura 49: Elemento tipo <i>Plate</i> .....	68
Figura 50: Elemento tipo <i>Shell</i> .....	68
Figura 51: Forças no plano do elemento <i>Shell Layered</i> [Fonte: CSI (2013)] .....	69
Figura 52: Momentos no elemento <i>Shell Layered</i> [Fonte: CSI (2013)] .....	70
Figura 53: Interface do caso de carga do tipo Estático não linear [Fonte:CSI (2013)]	71
Figura 54: Interface dos parâmetros de não linearidade [Fonte: CSI (2013)] .....	72
Figura 55: Representação da viga ET1, em cm [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1962)] .....	73
Figura 56: Secção da viga ET1, em cm [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1962)]	73
Figura 57: Discretização adotada para a análise numérica da viga ET1 .....	73
Figura 58: Digrama de Tensão-Deformação do MFD para a viga ET1 .....	74
Figura 59: Diagrama de tensão-deformação para o concreto do modelo SAP2000-AS	75
Figura 60: Diagrama de tensão-deformação para o concreto do modelo SAP2000-MFD	75
Figura 61: Curvas Carga-Deslocamento vertical utilizando SAP2000, viga ET1 .....	76
Figura 62: Curvas Carga-Deslocamento vertical, viga ET1 .....	77
Figura 63: Parte simétrica da viga HH5 [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1965)]	78
Figura 64: Seção da viga HH5 [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1965)] .....	78
Figura 65: Discretização adotada para a análise numérica da viga HH5 .....	78
Figura 66: Diagrama Tensão-Deformação do MFD para a viga HH5 .....	79
Figura 67: Curvas Carga-Deslocamento vertical, viga HH5 .....	80
Figura 68: Curvas Carga-Tensão na armadura no ponto C - Figura 63 - viga HH5 .....	81
Figura 69: Curvas Carga-Tensão na armadura no ponto B - Figura 63 - viga HH5 .....	81
Figura 70: Modelo numérico da seção de lajes .....	82

Figura 71: Elemento <i>Shell Layered</i> com duas camadas para aço [Fonte: CSI (2013)]	84
Figura 72: (a) Geometria básica das lajes nervuradas em cm, (b) placa rígida para transmissão da carga e (c) detalhe das armaduras .....	86
Figura 73: Diagrama tensão-deformação do MFD para a nervura – S2 .....	87
Figura 74: Discretização adotada para a capa, lajes S2, S5 e S6 .....	88
Figura 75: Discretização adotada para as nervuras, lajes S2, S5 e S6 .....	89
Figura 76: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S2 .....	89
Figura 77: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S5 .....	90
Figura 78: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S6 .....	90
Figura 79: Curvas Carga-Deslocamento máximo das lajes S2, S5 e S6 por SAP2000-MFD .....	91
Figura 80: (a) Dimensões da laje REF em mm (b) Detalhamento das armaduras da placa [Fonte: BORGES (2009)] .....	91
Figura 81: Diagrama tensão-deformação do MFD para a nervura – LMP-REF .....	93
Figura 82: Discretização adotada para a capa, laje LMP-REF .....	93
Figura 83: Discretização adotada para as nervuras, laje LMP-REF .....	94
Figura 84: Esquema de posicionamentos dos deflectômetros [Fonte: BORGES (2009)]	94
Figura 85: Posicionamento do extensômetro na armadura [Fonte: BORGES (2009)] ...	95
Figura 86: Curvas Carga-Deslocamento vertical – ponto R1 - LMP-REF .....	95
Figura 87: Curvas Carga-Tensão na armadura – ponto EA – LMP-REF .....	96
Figura 88: Curva tensão-deformação de concreto armado tracionado MFD .....	98
Figura 89: Geometria da laje do CE1, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	99
Figura 90: Detalhe da seção típica do CE1, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	99
Figura 91: Planta de locação dos pontos de instrumentação CE1 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	100
Figura 92: Malha em elementos finitos da laje CE1 .....	101
Figura 93: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 91 .....	101
Figura 94: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 91 .....	102
Figura 95: Detalhe da seção típica, CE2, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	102

Figura 96: Geometria básica da laje CE2 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	103
Figura 97: Planta de locação dos pontos de instrumentação e área de carregamento da laje CE2 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	103
Figura 98: Modelo das lajes CE2 e CE3 em elementos finitos .....	104
Figura 99: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 96 .....	105
Figura 100: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 96 .....	105
Figura 101: Detalhe da seção típica, CE3, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	106
Figura 102: Geometria básica da laje CE3, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	106
Figura 103: Planta de locação dos pontos de instrumentação CE3 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	107
Figura 104: Planta de carregamento aplicado para CE3, em kN/cm <sup>2</sup> para as cargas distribuídas e kN para as concentradas [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	107
Figura 105: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 102 .....	108
Figura 106: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 102 .....	108
Figura 107: Geometria básica do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)] .....	110
Figura 108: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 107 .....	111
Figura 109: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 107 .....	111
Figura 110: Curva Carga-Deslocamento vertical para o ponto D2 .....	112
Figura 111: Curva de Carga aplicada-Tensão na armadura tracionada para o ponto E1 .....	112
Figura 112: Geometria básica da laje CE2 .....	113
Figura 113: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 112 .....	113
Figura 114: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 112 .....	114
Figura 115: Curva Carga aplicada-deslocamento vertical do ponto P2 da Figura 112 .....	114
Figura 116: Curva de Carga-Tensão na armadura tracionada do P2 da Figura 112 .....	115
Figura 117: Curva tensão deformação de concreto armado tracionado para D = 6,3 mm .....	116
Figura 118: Curvas de Carga-Deslocamento vertical dos modelos para a laje S2 .....	117
Figura 119: Curvas de Carga-Tensão na armadura tracionada para a laje S2 .....	117
Figura 120: Curva de Carga-Momento fletor no vão central para a laje S2 .....	118



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Etapas de carregamento no modelo experimental .....	39
Tabela 2: Características geométricas das lajes ensaiadas experimentalmente .....	42
Tabela 3: Valores da tensão máxima à tração das curvas do concreto .....	49
Tabela 4: Parâmetros de amolecimento do concreto armado fissurado, viga ET1 .....	74
Tabela 5: Parâmetros de amolecimento do concreto armado fissurado, viga HH5 .....	79
Tabela 6: Dimensões de seção das lajes nervuradas ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) .....	86
Tabela 7: Valores de tensão-deformação para o diagrama tri-linear para lajes de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) .....	88
Tabela 8: Parâmetros dos elementos <i>Shell Layered</i> utilizados .....	88
Tabela 9: Valores de tensão-deformação para o diagrama tri-linear para a laje LMP-REF .....	92

# 1 INTRODUÇÃO

Lajes nervuradas podem ser definidas como elementos estruturais, bidimensionais, formados por uma placa sobreposta e unida a um conjunto de vigas, denominadas nervuras, colocadas em um padrão rítmico de arranjo, como ilustrado na Figura 1.



Figura 1: Estrutura em laje nervurada de concreto armado

Alguns autores definem a laje nervurada como uma evolução natural das lajes maciças, devido à eliminação da maior parte do concreto abaixo da linha neutra, procurando otimizar o uso das características de seus materiais componentes.

Atualmente, é cada vez maior o uso de lajes nervuradas de concreto armado em edificações do tipo residencial e comercial devido às suas vantagens, que são várias, como se expõe a seguir:

- a) Proporcionam maiores vãos entre pilares, maior altura útil por andar e maior liberdade na disposição de paredes internas;
- b) Introduzem maior versatilidade na distribuição de cargas e na ocupação de espaços;
- c) Permitem o uso de peças pré-fabricadas para as nervuras e placas, assim como o uso de fôrmas recuperáveis, fazendo com que as montagens dos escoramentos imprimam maior velocidade na execução de obra;

d) Utilizam menor quantidade de concreto no volume total da obra.

Em contrapartida à todas as vantagens acima citadas e ao avanço tecnológico já existente com relação a suas características construtivas, as lajes nervuradas ainda não apresentam um adequado estágio de desenvolvimento científico com relação à sua análise. Dada a complexidade existente na distribuição de esforços internos, se comparadas às lajes maciças, ainda não há o completo entendimento do seu comportamento estrutural.

Por este motivo, as lajes nervuradas ainda são objeto de muitas pesquisas científicas, de caráter experimental e numérico, que visam contribuir para o avanço no conhecimento de várias de suas características.

O presente trabalho pretende somar-se à estas pesquisas, contribuindo, ainda que modestamente, para este avanço.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal estabelecer um modelo numérico que possa analisar, de maneira realística, o comportamento mecânico à flexão de lajes nervuradas com variadas condições geométricas e diferentes níveis de carregamentos estáticos.

Este modelo deve ser de uso relativamente simples e versátil, deve levar em consideração as características dos materiais envolvidos e utilizar uma adequada representação de suas propriedades mecânicas. O comportamento do concreto fissurado deve ser cuidadosamente considerado, uma vez que é fator preponderante na análise à flexão destas estruturas.

Para que este objetivo seja atingido, as tarefas listadas abaixo deverão ser desenvolvidas:

- 1- Revisão bibliográfica dos estudos existentes sobre lajes nervuradas, de caráter experimental, analítico e numérico;
- 2- Escolha de um adequado modelo de comportamento mecânico para o concreto fissurado;
- 3- Utilização de um Software em Elementos Finitos, já estabelecido e confiável, compatível com o modelo de fissuração pretendido;
- 4- Construção do modelo numérico;

5- Validação do modelo, através da comparação com resultados de avaliações experimentais e de análises numéricas de outros autores;

6- Verificação do desempenho do modelo proposto, pela análise de lajes nervuradas sob diferentes condições de carregamento.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Lajes nervuradas foram, por longo tempo, analisadas por processos clássicos utilizados para lajes maciças, considerando alterações geométricas que objetivavam a obtenção de um comportamento equivalente. Existem, entretanto, significativas diferenças nas rigidezes, à flexão e torção, entre estas duas estruturas, que não podem ser menosprezadas.

Devido a estas diferenças, lajes nervuradas tem sido estudadas sob um enfoque experimental, analítico e numérico.

Os ensaios experimentais, na sua maioria, foram desenvolvidos em modelos reduzidos, utilizando microconcreto e armaduras de pequeno diâmetro. Com essas condições, extrapolam-se os resultados para a comparação com os estudos teóricos.

Estudos mais recentes, entretanto, apresentam programas experimentais suficientemente precisos, desenvolvidos em lajes reais em prédios de uso comercial, que fornecem dados tecnicamente confiáveis, servindo de suporte para a validação de modelos numéricos em desenvolvimento, como é o caso de BORGES (2009) e SCHWETZ (2011).

Mesmo tendo resultados de modelos experimentais que sirvam para validação, muitos estudos teóricos baseados na análise de lajes maciças e na análise de grelhas, ainda mostram grandes diferenças com relação às rigidezes, em função da metodologia aplicada. Para contornar este problema, é comum usar como artifício, a alteração das espessuras ou das rigidezes, na representação destas lajes.

Com relação aos estudos numéricos, que utilizam o Método dos Elementos Finitos, a maioria destes ainda contempla análises de lajes de concreto armado com a consideração de um material homogêneo e funcionando em regime elástico-linear. Entretanto, a discretização destes materiais, que todavia funcionam em conjunto, precisa ser considerada, sob pena de não refletir seu adequado funcionamento.

O comportamento não linear do concreto à compressão e, principalmente, seu comportamento sob tração, em estado fissurado, são de extrema importância para a modelagem do desempenho destas lajes, mesmo para cargas de serviço. Para a análise destas estruturas em condições de carregamentos extremos, sua importância é vital.

É, portanto, de extrema valia que um modelo que contemple estas características seja desenvolvido para a análise de lajes nervuradas em concreto armado.

### 1.3 DELIMITAÇÕES

O modelo numérico proposto neste trabalho está desenvolvido para a análise de lajes nervuradas sob os efeitos de cargas estáticas. Não são aqui considerados os efeitos de carregamentos dinâmicos ou que imprimam impacto.

Nas análises que seguem, serão avaliadas somente lajes nervuradas com nervuras em disposição bidirecional. O modelo, todavia, poderá ser utilizado ou adaptado para a análise de lajes com outras disposições geométricas de nervuras.

Existem estudos numéricos com relação à lajes nervuradas com aberturas, segundo IBRAHIM et al (2011). O modelo proposto tem aplicabilidade nestas situações, contudo, tais análises fogem do escopo deste trabalho.

Outro tema de estudo não abordado por este trabalho são os efeitos de puncionamento existentes nas regiões de ligação entre os pilares e os maciços. Há, sabidamente, inclusive no Brasil, vários estudos experimentais que avaliam os efeitos de diferentes dimensões da região maciça e de sua união com as nervuras e pilares.

### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

No seguinte capítulo, apresenta-se uma Revisão Bibliográfica dos trabalhos mais importantes sobre lajes nervuradas encontrados na literatura, organizados em função de sua natureza e metodologia: Experimentais, analíticos e numéricos.

Considerando que o modelo proposto busca ser do tipo realístico, apresenta-se, no Capítulo 3, os modelos constitutivos utilizados para a representação do concreto armado e sua aplicação via Elementos Finitos.

No Capítulo 4, então, apresenta-se o desenvolvimento do modelo numérico proposto e sua validação.

O Capítulo 5 mostra uma série de análises numéricas efetuadas sobre modelos e lajes reais testados experimentalmente. Ali são desenvolvidos estudos sobre o comportamento destas lajes quando submetidas às cargas de ensaio e à carregamentos uniformemente distribuídos e incrementalmente crescentes.

No Capítulo 6, expõem-se as considerações mais relevantes deste trabalho e suas conclusões. Também, encontram-se ali, algumas sugestões de estudos que possam dar continuidade a esta linha de pesquisa sobre lajes nervuradas.

Por último, são apresentadas as Referências Bibliográficas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para um melhor entendimento do comportamento mecânico dos sistemas estruturais de lajes nervuradas muitas vezes é necessário fazer ensaios experimentais. Estes estudos experimentais podem ser divididos em duas classes: comportamento global da estrutura e comportamento local, para um ponto da estrutura.

Em laboratório, consegue-se melhores condições de infraestrutura para os ensaios, melhores equipamentos e controle das propriedades mecânicas dos materiais, todavia, muitas vezes é importante avaliar uma estrutura completa em suas reais proporções, como demonstra o trabalho apresentado por SCHWTEZ (2011), em seus estudos experimentais em laboratório e em canteiro de obra.

Os resultados destes ensaios tornam-se base para a validação de metodologias analíticas e numéricas, nos estudos de sistemas estruturais de lajes nervuradas.

As análises numéricas, por outro lado, evoluíram muito em relação ao processamento de dados e outros recursos disponíveis em diferentes *softwares* comerciais, sendo o método de elementos finitos o mais utilizado atualmente.

Os estudos analíticos e as análises numéricas dos sistemas de lajes nervuradas, entretanto, ainda apresentam diferenças significativas na comparação de métodos. Portanto é importante entender como foram concebidas as metodologias, para obtenção de esforços e deslocamentos, e suas formulações.

Pode-se encontrar na literatura a evolução dos ensaios experimentais, dos estudos analíticos e numéricos, que definem características próprias do comportamento das lajes nervuradas. Neste capítulo expõem-se alguns trabalhos importantes sobre o assunto.

### 2.1 A CONSTRUÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS PARA LAJES NERVURADAS

Baseado em DIAS (2003), a construção de modelos numéricos para uma seção típica de laje nervurada pode ser dividida em dois métodos, em função de como são consideradas a capa e as nervuras da seção da laje, em método simplificado e método realístico.

### 2.1.1 Método simplificado

O método simplificado considera o modelo para representar uma seção típica de laje nervurada, de forma que capa e nervura estão integradas em um mesmo elemento. Os elementos finitos utilizados no método simplificado podem ser elementos de área ou de barra, e as análises desenvolvidas como:

#### a) Analogia de placa

Esta analogia é baseada na teoria clássica da placa ortótropa e consiste em associar a laje nervurada a uma laje maciça, de espessura constante, com rigidez à flexão equivalente à do sistema nervurado.

A espessura da laje maciça equivalente pode ser determinada considerando a equivalência do momento de inércia à flexão entre os dois sistemas estruturais, pela expressão:

$$h_{eq} = \left( \frac{12I}{a_1} \right)^{1/3} \quad (1)$$

sendo  $h_{eq}$  a espessura da laje maciça equivalente,  $I$  o momento de inércia à flexão da seção transversal T da nervura em relação ao eixo baricêntrico horizontal e  $a_1$  a distância entre os eixos das nervuras, como se indica na Figura 2.

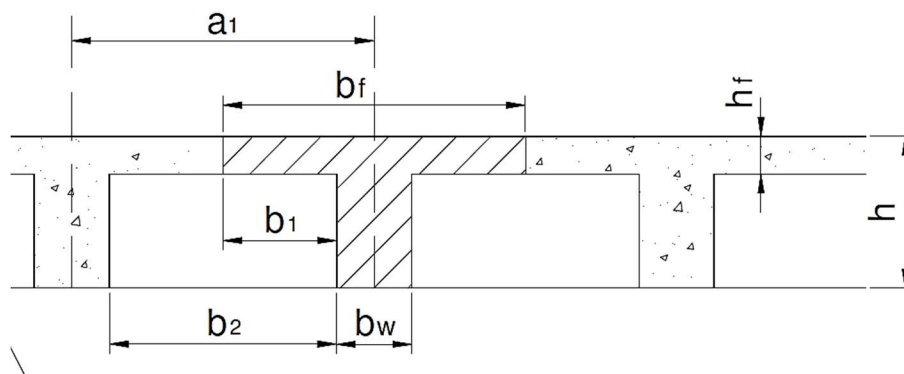


Figura 2: Geometria típica da seção de laje nervurada

DONIN (2007) apresenta dois modelos por analogia de placa, em função do cálculo da rigidez: método da equivalência do momento de inércia a flexão e método da rigidez média da laje. A descrição completa, com as formulações da analogia de placa e sua aplicação para lajes nervuradas, pode ser encontrada de forma extensa em DIAS (2003) e DONIN (2007).



A modelagem de uma placa nervurada via elementos finitos, através desta analogia, geralmente utiliza elementos de área, como ilustra a Figura 3.

Além destes, outros estudos que utilizam a mesma analogia foram desenvolvidos por OLIVEIRA et al (2000), ARAÚJO (2005) e REBÊLO e DUARTE FILHO (2007).

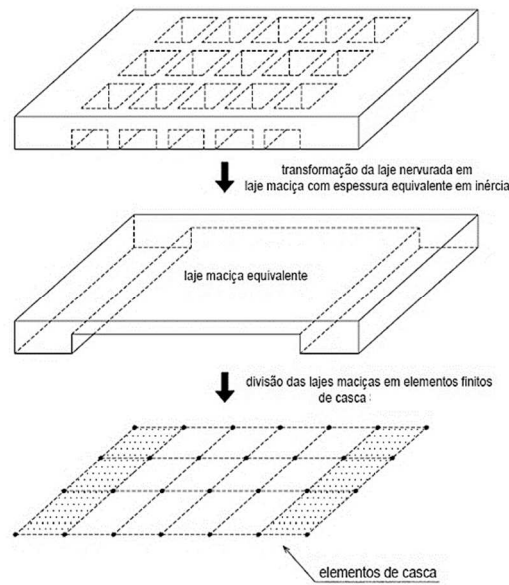


Figura 3: Representação esquemática de analogia da placa

#### b) Analogia de grelhas

A análise matricial de grelhas consiste em transformar a estrutura em um sistema reticulado, estudando o comportamento individual de cada barra e estabelecendo as relações entre as suas forças externas e deslocamentos nodais. Estas relações são escritas em forma matricial e correspondem à matriz de rigidez da barra.

O comportamento global da estrutura é obtido a partir da consideração da inter-relação de cada barra com as demais, formando um sistema global de equações.

Este processo permite que a laje nervurada seja associada a uma grelha e analisada com elementos de barra, compreendendo três graus de liberdade por nó (uma translação perpendicular ao seu plano e duas rotações em torno dos eixos contidos no mesmo) e três esforços de extremo de barra (força cortante, momento torçor e um momento fletor).

Uma descrição completa com as formulações pertinentes à analogia de grelhas e suas aplicações para lajes nervuradas pode ser encontrada em DIAS (2003) e STRAMANDINOLI (2003).

Alguns estudos que apresentam modelos baseados na analogia de grelhas são: OLIVEIRA et al (2000), STRAMANDINOLI (2003), DIAS e PAIVA (2007), REBÊLO e DUARTE FILHO (2007) e, também, os realizados com o programa TQS, de KLEIN e SELISTRE (1997) e SCHWETZ (2011). A Figura 4 mostra uma representação esquemática de um modelo para analogia de grelhas.

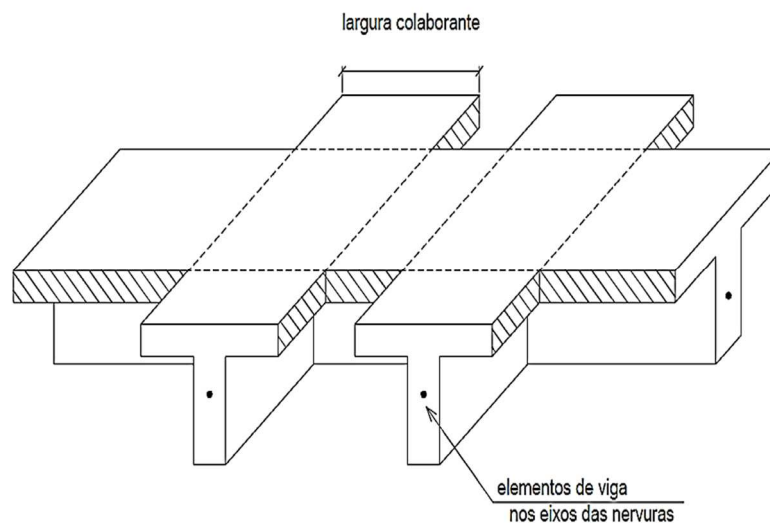


Figura 4: Representação esquemática de analogia de grelha

Existem, ainda, outros métodos simplificados, baseados na analogia de Pórticos Virtuais Múltiplos e Pórticos Equivalentes, que podem ser encontrados em DIAS (2003).

### 2.1.2 Métodos realísticos

Os métodos realísticos são baseados na consideração do comportamento integrado de elementos individuais, para a representação da capa e das nervuras de uma laje nervurada.

A seguir, são brevemente descritos nove importantes estudos que enfocam diferentes considerações sobre a excentricidade existente entre os eixos das nervuras e o plano da placa.

ROSSOW (1978) apud DIAS (2003) apresentaram um processo denominado Método da Restrição, para a análise estática, via elementos finitos analisando lajes com a consideração de nervuras excêntricas e concêntricas. Encontraram diferenças elevadas entre os deslocamentos

ortogonais ao plano das placas, pelas duas considerações, A maior diferença, de 233%, para laje quadrada com uma nervura e de 173% para laje retangular com duas nervuras.

KANOK-NUKULCHAI (1981) apud DIAS (2003) apresentaram algumas lajes nervuradas por meio de uma série de análises tridimensionais envolvendo o conceito de “macroelemento”, ou seja, a consideração de cada célula de laje nervurada como um elemento finito. Apresentaram o comportamento da laje nervurada mostrando a contribuição dos componentes individuais na rigidez total da estrutura.

A resposta de uma laje nervurada submetida a carregamentos transversais é resultado de uma participação mútua de seus distintos componentes estruturais. Para entender a ação integrada desses componentes analisaram, numericamente, uma laje nervurada por um modelo tridimensional via MEF. A análise foi dividida em três partes:

- a) análise da grelha de vigas;
- b) elementos no estado plano de tensão no nível da placa, tendo uma percepção da interação viga-membrana e do mecanismo de rigidez adicional conferida;
- c) a rigidez à flexão da placa foi superposta ao elemento em estado plano de tensão para uma completa compatibilização do modelo tridimensional.

Os autores verificaram que há um aumento considerável na rigidez total da estrutura com a adição do efeito de membrana da placa à grelha de vigas. Atribuíram isso a grande rigidez no plano da placa, que impede as fibras do topo de cada viga de movimentarem-se livremente no plano horizontal, limitando, dessa forma, a flexão e a torção da grelha de vigas tridimensionais.

DEB e BOOTON (1987) apud DIAS (2003) apresentaram dois modelos em elementos finitos baseados na Teoria de Placa de MINDLIN (1951), para a análise de lajes enrijecidas excentricamente e sujeitas a cargas transversais:

- a) Um modelo geral, em que a laje enrijecida é discretizada como placas e vigas;
- b) Um modelo restrito, onde as nervuras são pouco espaçadas e a laje é substituída por uma placa com altura equivalente.

O primeiro modelo, como esperado, fornece resultados mais precisos. O segundo, conforme os autores, pode todavia ser preferível, especialmente em uma análise não-linear física, pelo baixo tempo de processamento computacional, bem como pela simplicidade na entrada de dados.

DEB et al. (1990) apud DIAS (2003) aplicaram uma formulação ortótropa da analogia da placa com nervuras excêntricas baseada na Teoria de MINDLIN (1951), comparando os resultados com aqueles obtidos por um modelo discreto de placa-viga via elementos finitos. Concluíram que o parâmetro de excentricidade  $h/h_f$ , onde  $h$  = altura da nervura e  $h_f$  = espessura da placa (Figura 2), tem um efeito significativo nos resultados. Observaram que os deslocamentos diminuem com o aumento da relação da excentricidade, como esperado.

Concluíram também que para baixos níveis de carga as tensões não parecem variar muito com a relação de excentricidade  $h/h_f$ . Entretanto, para altas cargas, as diferenças são significativas.

PALANI et al. (1992) apud DIAS (2003) propuseram dois elementos finitos isoparamétricos (elementos com formas arbitrárias que utilizam as mesmas funções de interpolação para representar a geometria do elemento e os deslocamentos no seu domínio) para a análise estática de placas com nervuras excêntricas.

Foram feitos estudos para a análise de lajes com nervuras excêntricas e concêntricas com a placa. O deslocamento ortogonal ao plano da placa apresentou grande diferença entre os resultados.

NAVARRA (1995) analisou, via elementos finitos, painéis de placas enrijecidas por vigas, considerando o efeito da excentricidade da viga. Utilizou uma formulação geral de elementos de lâmina plana e de elementos de viga tridimensional, como elementos de placas de Mindlin e de vigas de Timoshenko.

Os seguintes modelos foram apresentados em um estudo comparativo:

- a) elementos de placa de quatro nós para discretizar a placa e as vigas;
- b) elementos de placa de quatro nós, rigidamente conectados a elementos de viga tridimensionais de Timoshenko, considerando assim a excentricidade;
- c) elementos de placa de quatro nós, rigidamente conectados a elementos de viga de Timoshenko de dois nós, com largura colaborante de laje, incluindo os efeitos de

torção, lançados de forma concêntrica no pavimento. Não foi considerada a excentricidade, contudo as vigas tinham inércias referentes à seção com largura colaborante de laje (ou seção “T”), de acordo com a Figura 5.

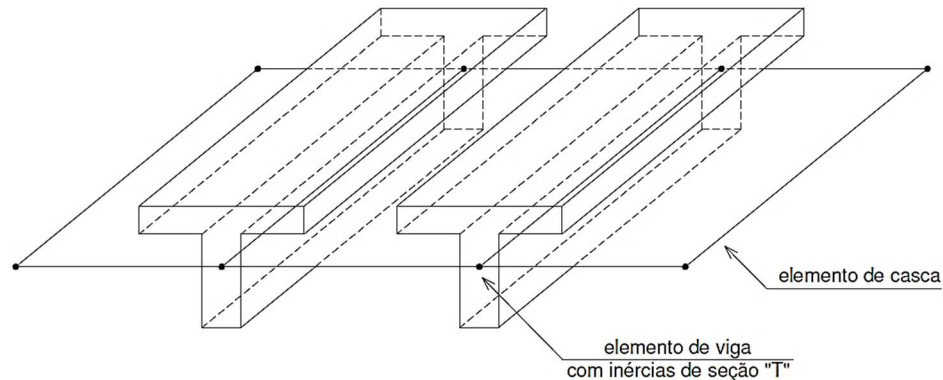


Figura 5: Modelo apresentado por NAVARRA (1995)

No estudo, verificou que, em termos de tensões, os resultados mais simplificados gerados pelo modelo c) não variam mais do que 20% dos obtidos com os outros modelos.

BEDAIR (1997) apud DIAS (2003) apresentou uma metodologia para a solução de placas nervuradas submetidas a carregamento transversal que considera a estrutura como placas e vigas rigidamente conectadas, e apresentou as seguintes análises:

- a) Placa quadrada, simplesmente apoiada, tendo uma única nervura central, considerando ou não a excentricidade entre eixos. A diferença entre deslocamentos nas duas análises chegou a 265%;
- b) Placa retangular, simplesmente apoiada, com nervuras ortogonais, submetidas a cargas distribuída e concentrada. A diferença entre valores de deslocamentos nas análises com a consideração de eixos concêntricos e excêntricos chegou a 200%.

TANAKA e BERCIN (1998) apresentaram uma formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise estática de flexão de placas enrijecidas por vigas de arbitrária seção transversal aberta, modelando as estruturas como placas e vigas rigidamente conectadas.

Afirmaram que a melhor análise é aquela em que a placa e a nervura são analisadas separadamente, aplicando-se condições de equilíbrio e continuidade ao longo da linha de união entre a placa e a viga.

Apresentaram comparações de modelos, entre eles uma placa simplesmente apoiada conectada com uma nervura retangular. A estrutura foi analisada considerando as nervuras como excêntricas e concêntricas, sendo que a diferença entre os dois modelos foi de 233% nos resultados de deslocamentos ortogonais ao plano da placa.

SIDDIQI e KUKRETI (1998) apud DIAS (2003) apresentaram uma solução pelo Método da Quadratura Diferencial para a análise de flexão de placas enrijecidas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas transversais. Foram consideradas as forças no plano da placa, para levar em conta a rigidez axial da placa e a interação com as vigas excêntricas, além das rigidezes à torção e ao cisalhamento das vigas.

Foram avaliados dois exemplos, um com uma nervura central excêntrica e outro com duas nervuras centrais perpendiculares excêntricas. Os resultados foram comparados com os disponíveis na literatura e concluído que quando as nervuras são poucas e bem espaçadas a estrutura age como painéis de placa apoiadas em vigas.

Pelo acima exposto, fica patente que existe uma significativa diferença nos resultados de uma análise de laje nervurada, quando esta leva em consideração a excentricidade existente entre os eixos da placa e da nervura. Neste sentido, os modelos numéricos serão divididos naqueles que consideram esta excentricidade e naqueles que não a consideram.

#### 2.1.2.1 Modelos que consideram a capa e a nervura concêntricas

Nestes modelos, para a capa utilizam-se elementos de área. Para representar as nervuras, podem ser utilizados elementos de barra, como o Modelo 01 de DIAS e PAIVA (2007), Figura 6, ou elementos de casca, como o Modelos 3 de SCHWETZ (2011) mostrado na Figura 7.

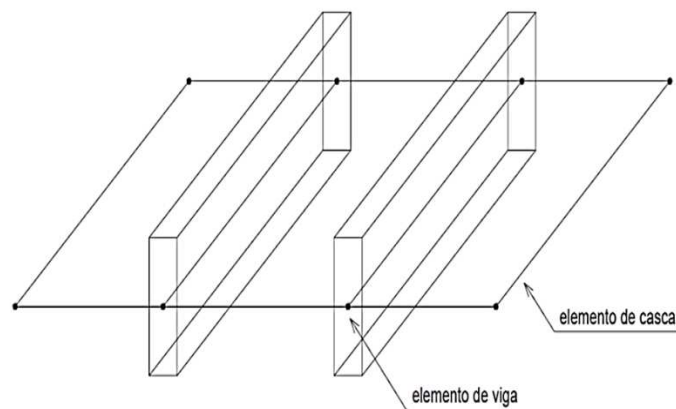


Figura 6: Representação esquemática do Modelo 01 de DIAS e PAIVA (2007)

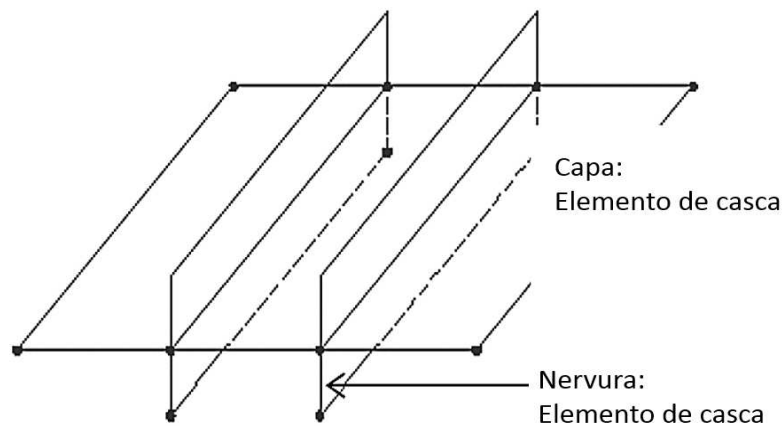


Figura 7: Representação esquemática do Modelo 3 de SCHWETZ (2011)

#### 2.1.2.2 Modelos que consideram a excentricidade entre a capa e a nervura

Estes modelos podem ser separados em função dos elementos utilizados, e divididos em três tipos:

##### 1. Elementos sólidos

DONIN (2007) apresenta o Modelo MEF-3D, composto de elementos sólidos para a capa e nervura, utilizando o programa ANSYS 5.5.

##### 2. Elementos de área e de barra

Os Modelos 02 e 03 de DIAS e PAIVA (2007) utilizam para a capa elementos de área e para as nervuras elementos de barra situados no mesmo plano, mas que consideram uma excentricidade fora do próprio eixo, como mostra a Figura 8. Também, o Modelos 2 de SCHWETZ (2011), Figura 9, utiliza elementos de barra, onde a excentricidade se dá pela ligação de barra rígida existente entre a capa e a nervura.

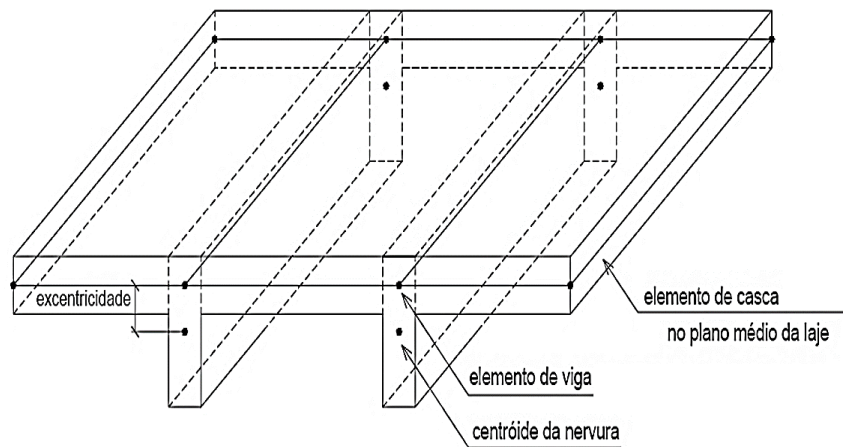


Figura 8: Representação esquemática do Modelo 02 de DIAS e PAIVA (2007)

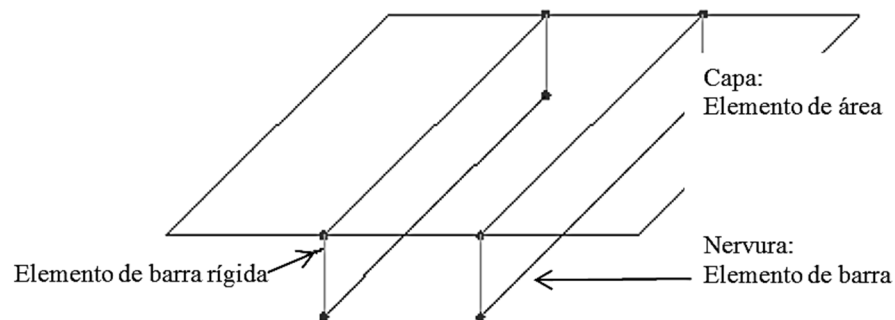


Figura 9: Representação esquemática do Modelo 2 de SCHWETZ (2011)

### 3. Elementos de área

O Modelo 04 de DIAS e PAIVA (2007), ilustrado na Figura 10 e o Modelo 4 de SCHWETZ (2011) usam, ambos, a capa e as nervuras representadas por elementos de área.

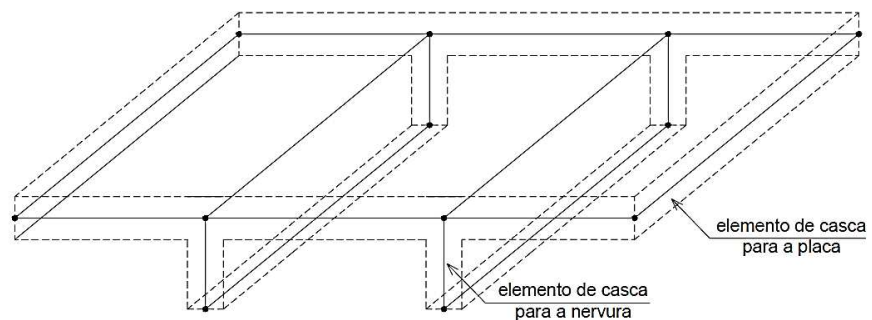


Figura 10: Representação esquemática do Modelo 04 de DIAS e PAIVA (2007)



## 2.2 CONSIDERAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO ARMADO

As propriedades mecânicas do concreto armado podem ser classificado em dois grupos, material homogêneo e material discretizado como se mostra a seguir.

### 2.2.1 Material homogêneo

Este tipo de modelo considera o concreto armado como um só material onde a curva do diagrama tensão-deformação pode ser:

a) Elástico-linear.

Modelos de consideram o diagrama de tensão-deformação do concreto armado como uma reta, onde encontram-se todos os modelos de DIAS e PAIVA (2007), os modelos de STRAMANDINOLI (2003), ARAÚJO (2005), DONIN (2007) e os modelos de placas de OLIVEIRA et al (2000);

b) Não linear:

Modelos que consideram o diagrama tensão-deformação do concreto armado como uma curva ou conjunto de linhas de forma simplificada. Como exemplos tem-se o método de BRANSON e o método MOMENTO CURVATURA, considerados por OLIVEIRA et al (2000) e apresentados mais adiante neste capítulo.

### 2.2.2 Material discretizado

Modelo que considera os elementos subdivididos em camadas, que representam, separadamente, o concreto e o aço com suas respectivas propriedades mecânicas.

A curva de tensão-deformação do concreto não fissurado, pode ser simplificada ou considerada de forma realística, através de resultados experimentais

Para o comportamento do concreto fissurado em tração, utilizam-se representações lineares, bi- e tri-lineares. Também, pode incluir a contribuição de concreto entre fissuras, denominada Tension-Stiffening.

## 2.3 TIPOS DE ANÁLISES

As análises numéricas que levam a consideração do comportamento físico do material podem ser classificadas em dois grupos, análises linear e análise não linear.

### 2.3.1 Análise linear

As análises lineares consideram que os deslocamentos sejam diretamente proporcionais ao carregamento aplicado permite analisar separadamente os efeitos de diferentes carregamentos superpostos utilizando o Princípio da Superposição de Efeitos.

Análises lineares foram apresentadas por STRAMANDINOLI (2003), ARAÚJO (2005), DIAS e PAIVA (2007) e DONIN (2007).

### 2.3.2 Análise não linear

Uma análise não linear física de uma estrutura de concreto considera a não linearidade da relação constitutiva deste material assim como os efeitos de sua fissuração, o que se traduz na perda de rigidez da estrutura durante o carregamento. No caso do concreto armado, as propriedades dos dois materiais envolvidos podem-se alterar durante o carregamento da estrutura, gerando uma resposta não linear da mesma.

A não linearidade física pode ser solucionada numericamente através de um procedimento incremental-iterativo. Para cada incremento do carregamento aplicado, o equilíbrio da estrutura é verificado, a partir de ciclos de aproximações iterativas, até que a solução das equações de equilíbrio atinjam uma precisão satisfatória. Este procedimento considera que, em cada incremento de carga, existe linearidade entre esforços e deslocamentos, sendo a rigidez da estrutura atualizada a cada etapa de carga.

OLIVEIRA et al (2000) ressalta duas vantagens da consideração da não linearidade: a primeira sendo a possibilidade de uma avaliação mais realista sobre os efeitos da perda de rigidez dos elementos estruturais por fissuração e escoamento das armaduras longitudinais tracionadas. A segunda, é o fato de se poder considerar a perda de rigidez ocorrida em determinadas partes da estrutura, e com isso, por exemplo, uniformizar os esforços no pavimento através da eliminação de valores de pico de momento fletor concentrados no entorno dos apoios. Estes autores utilizam os seguintes métodos simplificados para a não linearidade física:

a) Formulação Empírica Proposta por BRANSON

A formulação proposta por BRANSON caracteriza-se pela redução progressiva do momento de inércia médio ( $I_m$ ) da seção (entre os Estádios I, não fissurado e II, totalmente fissurado), em função do momento fletor atuante ( $M$ ). BRANSON propôs uma função interpoladora que aproxima o momento de inércia do elemento estrutural para o valor mais provável que esse elemento fletido deveria apresentar para cada valor de solicitação por momento fletor acima do relativo à fissuração da peça ( $M_r$ ), como colocado na expressão a seguir,

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M}\right)^4 \cdot I_1 + \left\{1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^4\right\} \cdot I_{II,0} \quad (2)$$

b) Método momento-curvatura

Método que relaciona a curvatura de uma seção com o momento fletor atuante na mesma, utilizando a seguinte expressão:

$$M = (EI) \times \frac{1}{r} \quad (3)$$

onde,  $M$  é o momento fletor atuante na seção,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto,  $I$  é o momento de inércia da seção e  $\frac{1}{r}$  é a curvatura da seção.

Quando a relação momento-curvatura é definida para diferentes intensidades de solicitação, e considerada a taxa de armadura empregada na seção, obtém-se um diagrama momento-curvatura tri-linear, como o ilustrado na Figura 11.

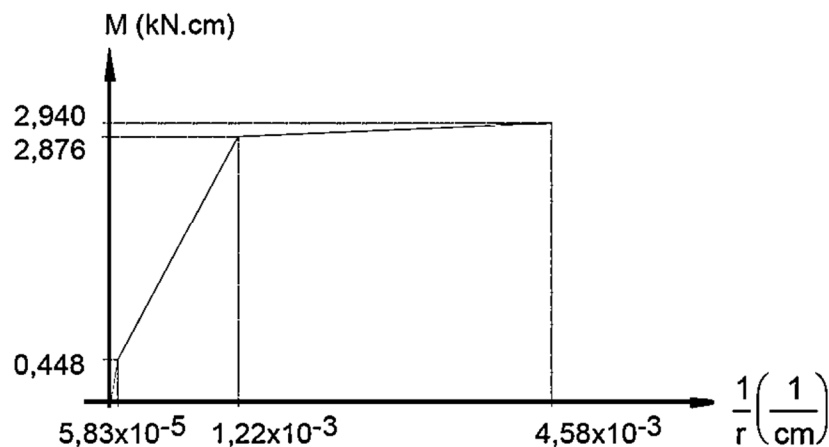


Figura 11: Diagrama Momento-Curvatura tri-linear [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]

O primeiro trecho, cuja inclinação indica a rigidez da seção, que permanece constante, representa o estado no qual o concreto ainda não atingiu o momento de fissuração ( $M_r$ ), ou seja, a estrutura permanece no Estádio I;

O segundo trecho representa a transição gradativa entre o Estádio I (seção não fissurada) e o Estádio II puro (seção fissurada). Esta região é delimitada pelo momento de fissuração e pelo momento fletor que provoca o escoamento da armadura tracionada;

O terceiro trecho é caracterizado pelo grande aumento de curvatura para um pequeno acréscimo de momento. Esta região é delimitada pelo momento de escoamento da armadura tracionada e pelo momento último ( $M_u$ ), que indica o estado limite último da estrutura.

OLIVEIRA et al (2000) conclui que os modelos não-lineares abordados não são capazes de atingir resultados confiáveis do comportamento das lajes próximo à ruptura. Entretanto, para condições de serviço, esses modelos se apresentam suficientemente precisos para a aplicação na previsão de deslocamentos e de esforços em projetos usuais de engenharia.

## 2.4 MODELOS EXPERIMENTAIS DE LABORATÓRIO E SUAS ANÁLISES NUMÉRICAS

Apresentam-se neste item vários estudos experimentais de lajes nervuradas através de modelos reduzidos realizados em laboratório e suas correspondentes análises numéricas.

### 2.4.1 Laje experimental de AJDUKIEWICZ e KLISZCZEWICZ (1986)

Este estudo apresenta o ensaio experimental de um modelo reduzido de laje nervurada, suportada por 12 colunas, em capitéis maciços, como mostra a Figura 12. Os carregamentos foram realizados em etapas e aplicados em diferentes zonas da placa, como ilustra a Figura 13.

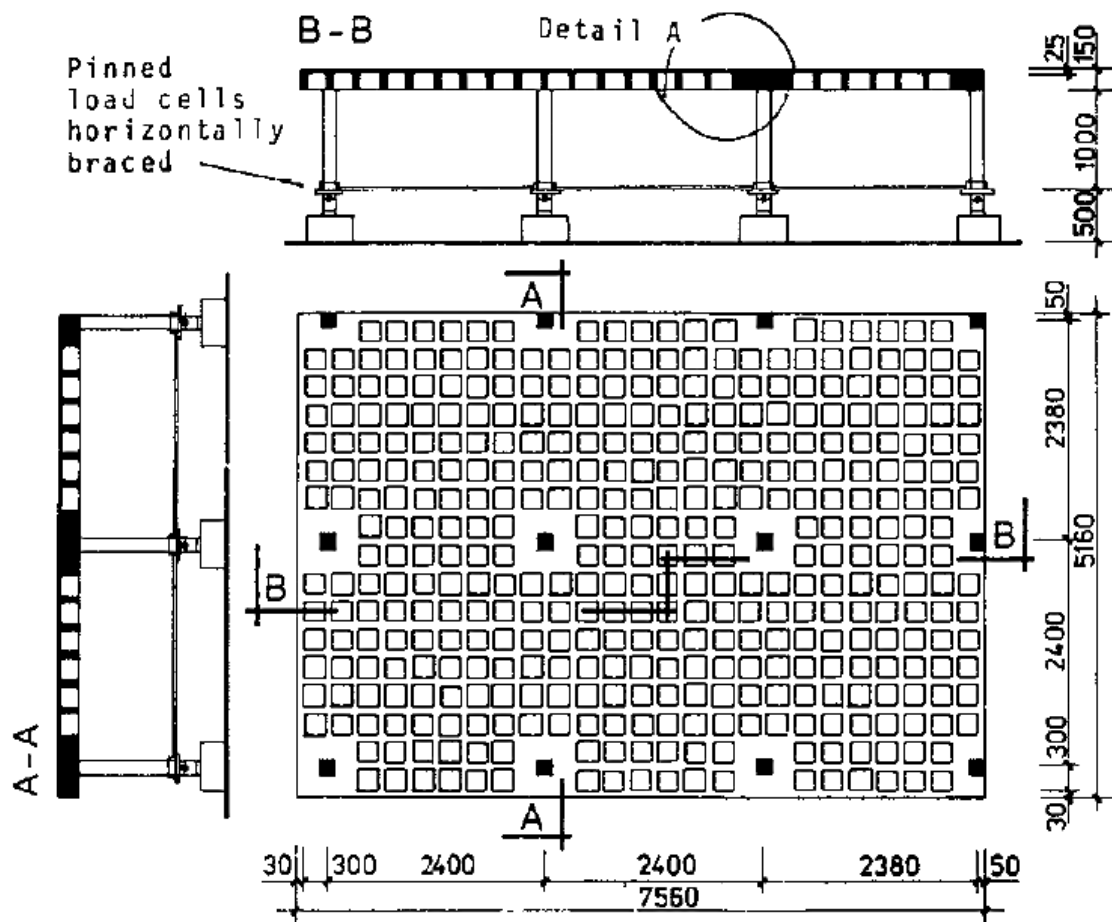


Figura 12: Geometria da laje experimental, em mm [Fonte: AJDUKIEWICZ (1986)]

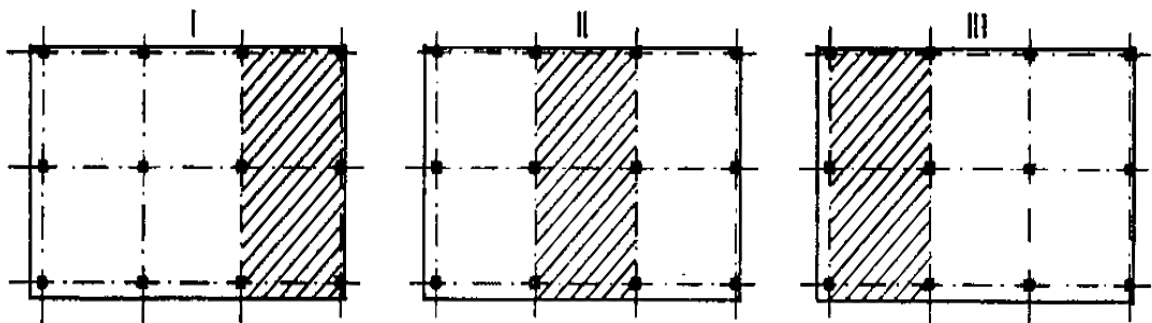


Figura 13: Etapas de ensaios [Fonte: AJDUKIEWICZ (1986)]

Os autores realizaram estudos analíticos, através do método da analogia de placas, por inércia à flexão equivalente e compararam com os resultados experimentais. Nestes estudos, verificaram a diferença entre deslocamentos das placas internas e externas e compararam com os de lajes maciças não foram conseguidos resultados satisfatórios.

### 2.4.2 Laje nervurada experimental de KLEIN e SELISTRE (1997)

O estudo foi realizado no Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais da Universidade Federal Rio Grande do Sul (LEME-UFRGS), apresentando o comportamento experimental de uma laje nervurada construída em modelo reduzido, na escala 1:7,5 semelhante a um projeto de edifício. Utilizaram os materiais microconcreto e arame galvanizado. No ensaio foi aplicada uma carga uniformemente distribuída em toda a laje e medidos os deslocamentos ortogonais ao plano da placa e deformações do microconcreto. Os resultados foram apresentados na forma de curvas carga-deslocamento e momentos fletores em seções transversais.

A Figura 14 apresenta a geometria do modelo experimental e a Figura 15 a seção para as regiões maciça e das nervuras, armação das nervuras e capitéis do pavimento (bitolas dos arames: BWG). As etapas de carregamento encontram-se na Tabela 1.

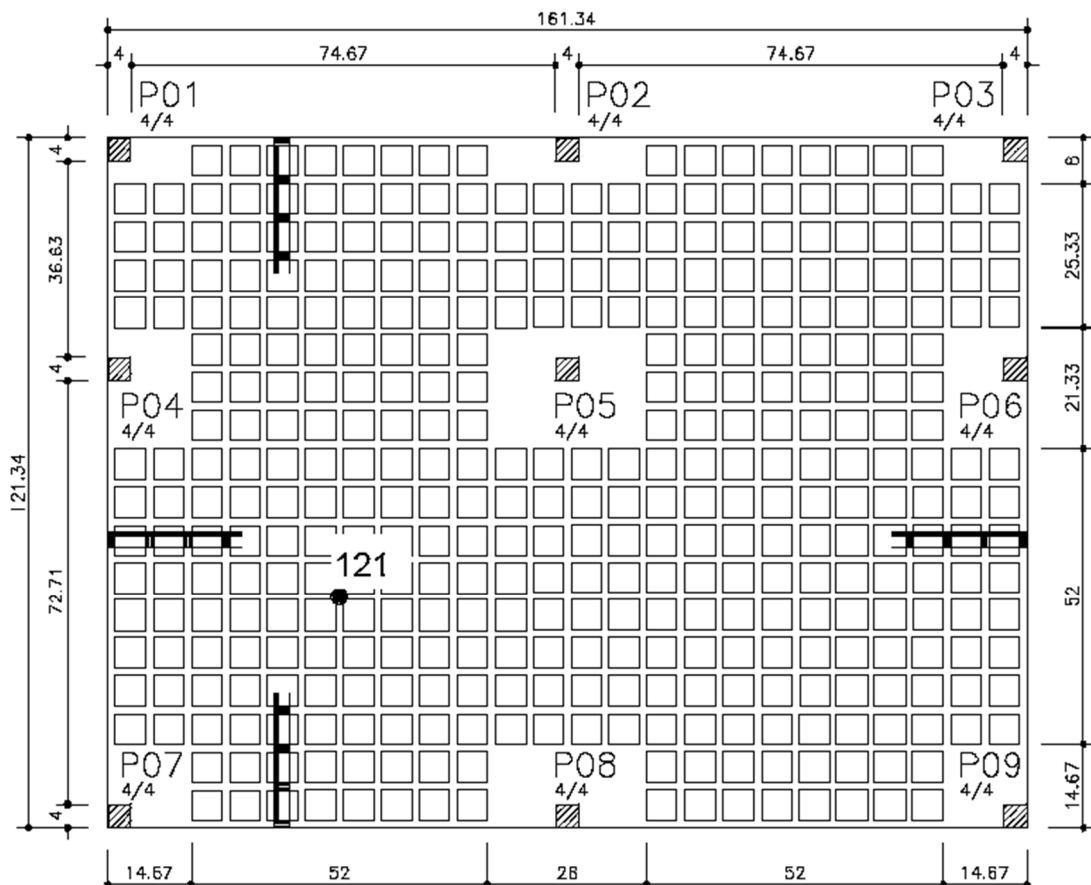


Figura 14: Geometria do modelo experimental em cm [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]



Figura 15: (a) Seção transversal da região nervurada, (b) região maciça

[Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]

Tabela 1: Etapas de carregamento no modelo experimental

Etapa de carregamento	Carga aplicada [kN/m <sup>2</sup> ]
0	0,00
1	2,50
2	3,75
3	5,00
4	6,25
5	7,50

Os autores compararam resultados experimentais com métodos teóricos, através da analogia de grelhas, utilizando o programa TQS, e de pórticos equivalentes. As análises foram elásticas, razão pela qual não acompanharam o comportamento do concreto fissurado. Para a correção dos deslocamentos, buscando um comportamento de não linearidade física, utilizaram a proposta do *Comité Euro-Internacional du Béton*, CEB, resultando em deslocamentos maiores que os experimentais, em pontos de menor área de aço.

OLIVEIRA et al (2000) realizaram estudos teóricos sobre este modelo experimental, por analogia de placa, considerando uma laje maciça de altura equivalente igual a 1,95 cm e por analogia de grelha, utilizando o programa TQS.

Para as análises lineares consideraram a redução de inércia à flexão, com o intuito de obter resultados mais flexíveis. Na Figura 16, apresentam-se os resultados destes estudos teóricos comparados com o experimental e com o teórico de KLEIN e SELISTRE (1997), no ponto 121 da Figura 14.

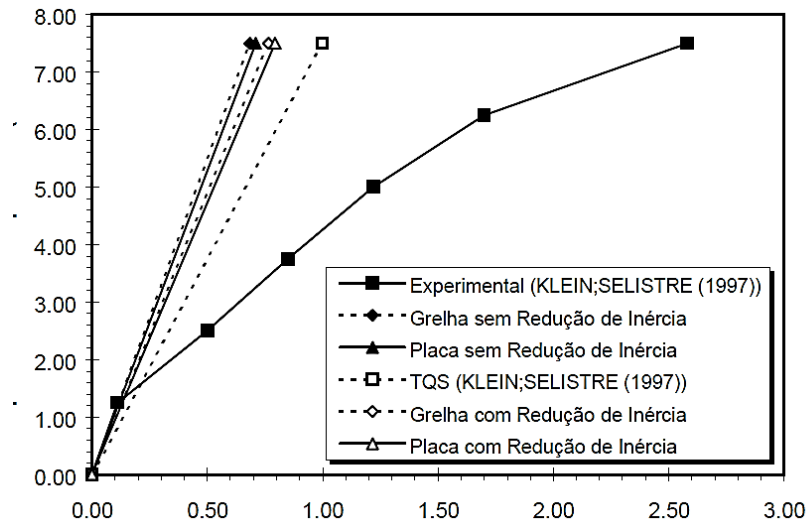


Figura 16: Curvas Carga-Deslocamento, em kN e mm, dos modelos lineares, no ponto 121 – Figura 14 [Fonte: OLIVEIRA et al (2000)]

Para as análises não lineares foram implementados os métodos simplificados descritos no item 2.3.2, para o modelo por analogia de grelhas. Na Figura 17, mostra-se uma comparação destes resultados teóricos com o experimental.

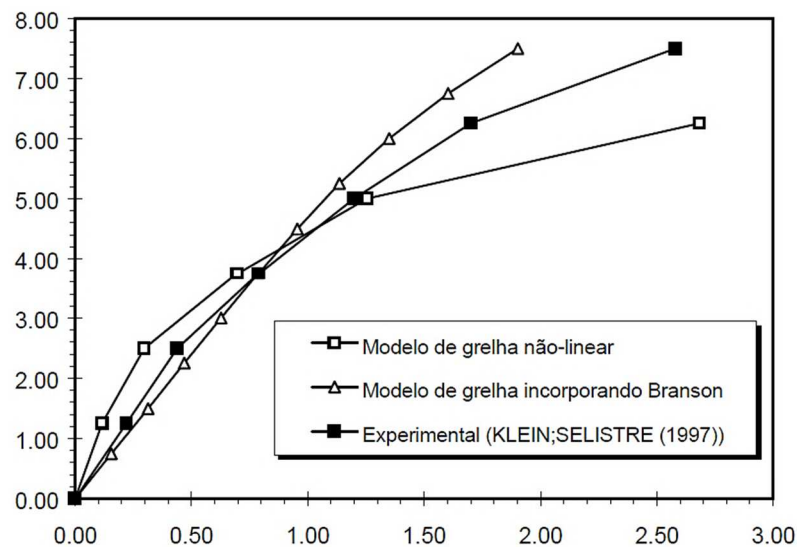


Figura 17: Curvas Carga-Deslocamento, em kN e mm, dos modelos teóricos não-lineares, no ponto 121 – Figura 14 [Fonte: OLIVERA et al (2000)]

Foi concluído que, em regime linear, tanto o modelo de grelha quanto o de laje maciça equivalente apresentaram resultados similares. Já nas análises não lineares, o modelo de grelha incorporando de Branson apresentou deslocamentos mais próximos aos experimentais.



### 2.4.3 Estudo experimental de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

O estudo experimental apresentado por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000) consiste em oito lajes quadradas, simplesmente apoiadas, com 1540 mm de lado e alturas variáveis, ensaiadas com carregamento centrado.

Das oito lajes, seis são nervuradas, S1a S6 e duas maciças, S7 e S8. A laje principal de estudo é a S2, as outras são modificações desta laje, tanto na variação de espaçamento entre as nervuras, como nas dimensões das nervuras. Das lajes maciças, S7 tem uma altura equivalente e S8 altura igual à de S2.

Para ajudar à compreensão do estudo, apresenta-se na Figura 18 a sua geometria básica, indicando a placa quadrada de 30 cm de lado que serve para a aplicação de uma carga centrada na laje. A Tabela 2 contém os dados correspondentes a cada laje.

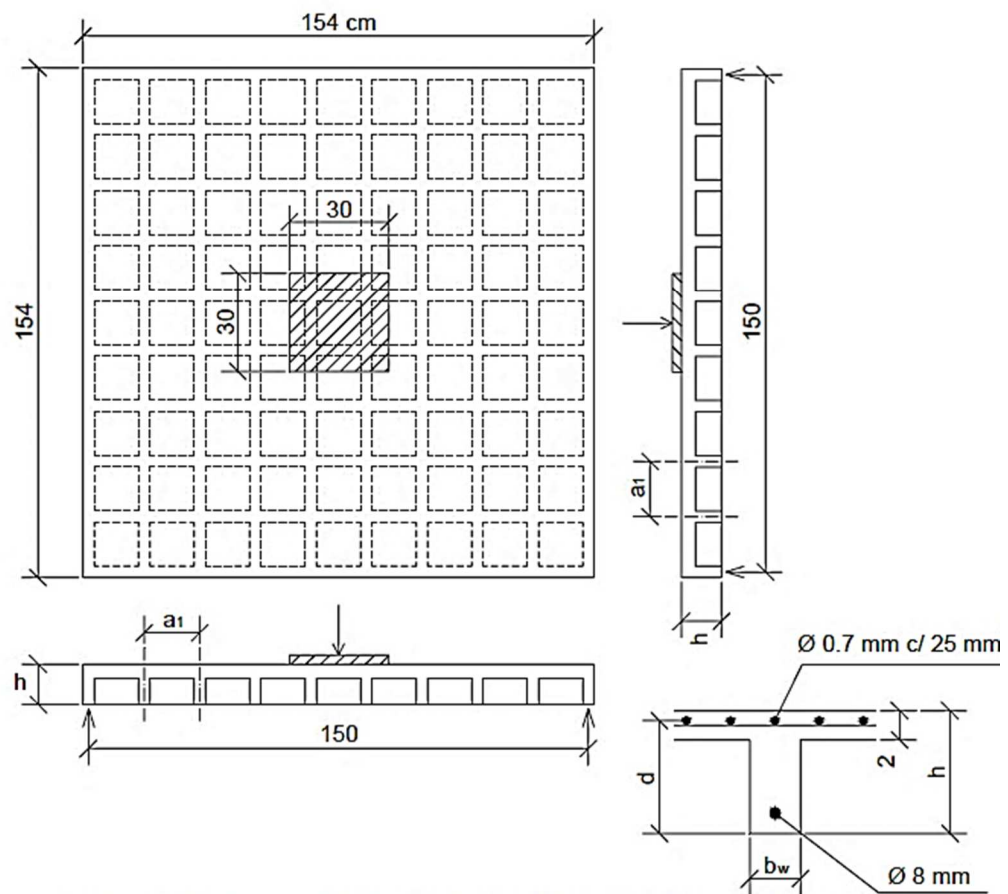


Figura 18: Geometria básica das lajes nervuradas, em cm

Tabela 2: Características geométricas das lajes ensaiadas experimentalmente

Laje	Vazios	a1 (mm)	bw (mm)	h (mm)
S1	11x11	136	52	95
S2	9x9	167	52	95
S3	7x7	214	52	95
S4	5x5	300	52	95
S5	9x9	167	52	125
S6	9x9	167	47	65
S7	Maciça	-	-	75
S8	Maciça	-	-	95

Os autores apresentam um estudo teórico, por analogia de placa, que varia as rigidezes para o concreto não fissurado e fissurado, obtendo um diagrama bi-linear. Foram três métodos realizados:

1. *Equivalent thickness* (Método de espessura equivalente): consiste na altura equivalente por rigidez à flexão;
2. *Exact* (Método da espessura equivalente modificado): considera a rigidez à torção;
3. *Effective modulus of elasticity* (Módulo de Elasticidade Efetivo).

Na Figura 19, mostram-se os resultados analíticos e experimentais das lajes S1 a S4 apresentados por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000).

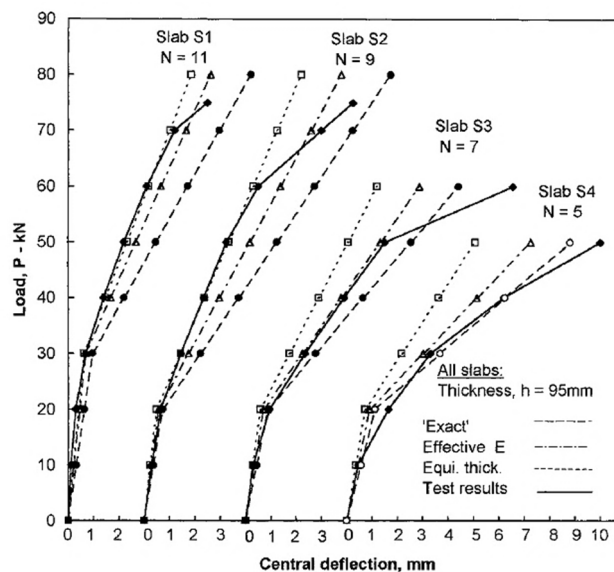


Figura 19: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos analíticos numéricos e experimentais das lajes S1 a S4 [Fonte: ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)]

As comparações dos modelos analíticos com os experimentais, da Figura 19, mostram que o método *Exact* é o mais rígido, dando resultados bem próximos para a laje S1 e S2; Para as lajes S3 e S4, não são predominantes as rigidezes à torção, tendo os métodos *Effective modulus of elasticity* e *Equivalent thickness* mostrado resultados próximos ao experimental.

Os estudo numéricos desenvolvidos por outros autores apresentam análises lineares e não lineares, como se descreve a seguir.

Análises numéricas do tipo linear, desenvolvidas por ARAÚJO (2005), DIAS e PAIVA (2007) e DONIN (2007), consideraram diferentes modelos com as seguintes hipóteses: material concreto armado homogêneo, elástico-linear e isótropo, sem considerar rigidez torcional. Uma comparação destes pode ser observada na Figura 20.

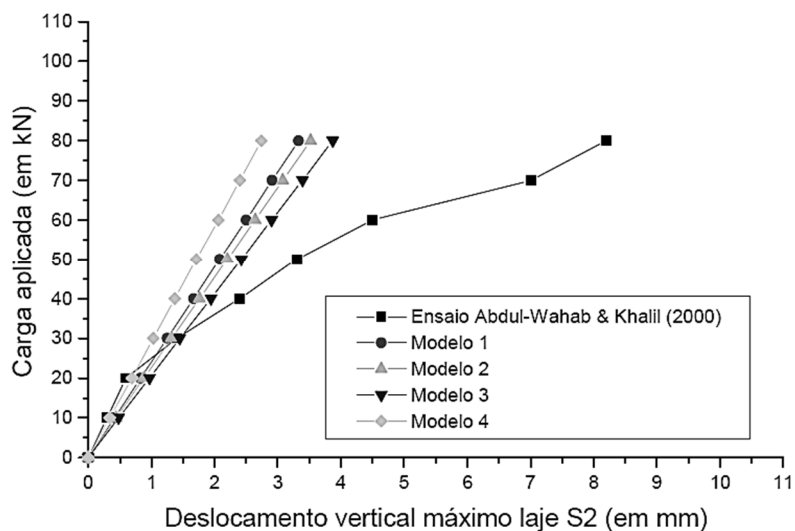


Figura 20: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos numéricos e o experimental da laje S2

[Fonte: DIAS e PAIVA (2007)]

Para o estudo realizado por análise numérica não linear, ARAÚJO (2003) apresenta um modelo de elementos finitos isoparamétricos quadráticos de oito nós, sendo para cada nó cinco graus de liberdade. O autor utilizou a teoria de placa de Midlin, para considerar os efeitos da deformação por esforços de corte, e os materiais, concreto e aço, foram discretizados por camadas. O modelo leva em conta o valor de resistência à tração no comportamento pós-fissuração do concreto.

Os resultados das análises das lajes S1 a S4 foram próximos aos experimentais, como visto na Figura 21.

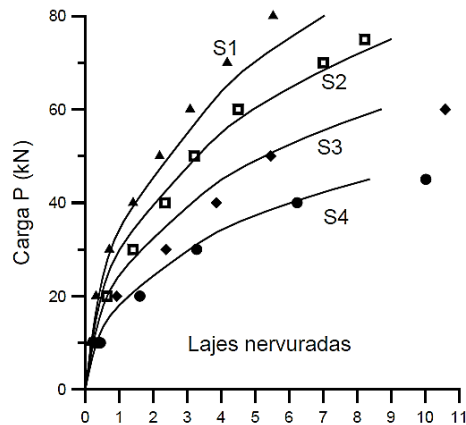


Figura 21: Curvas Carga-Deslocamento dos modelos numéricos e experimentais das lajes S1 a S4 [Fonte: ARAÚJO (2003)]

#### 2.4.4 Laje nervurada experimental de SCHWETZ (2005)

Este estudo, também realizado no laboratório LEME-UFRGS, apresenta um modelo reduzido de laje nervurada construído em escala 1:7,5, utilizando microconcreto e arame galvanizado. O carregamento foi distribuído por toda a laje sobre a capa.

A geometria da laje, Figura 22, as propriedades dos materiais, instrumentação, procedimentos de carregamentos e resultados experimentais se encontram detalhadas em SCHWETZ (2005).

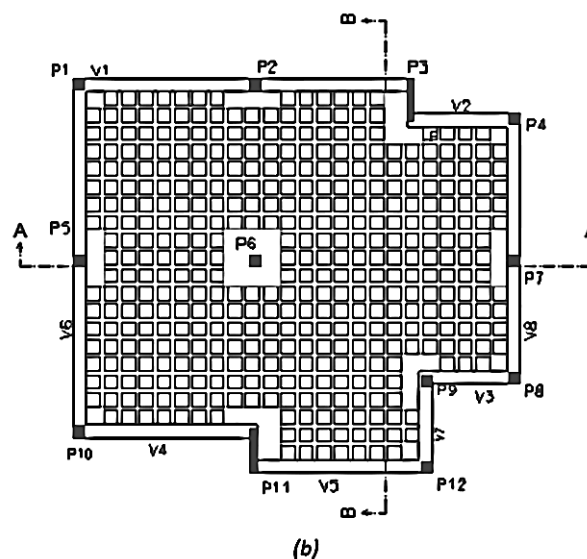


Figura 22: Geometria básica da laje reduzida [Fonte: SCHWETZ (2005)]

SCHWTEZ (2011) apresenta estudos numéricos para este modelo experimental, por analogia de grelha utilizando o programa TQS e por elementos finitos no programa SAP2000 versão 14, Figura 23.

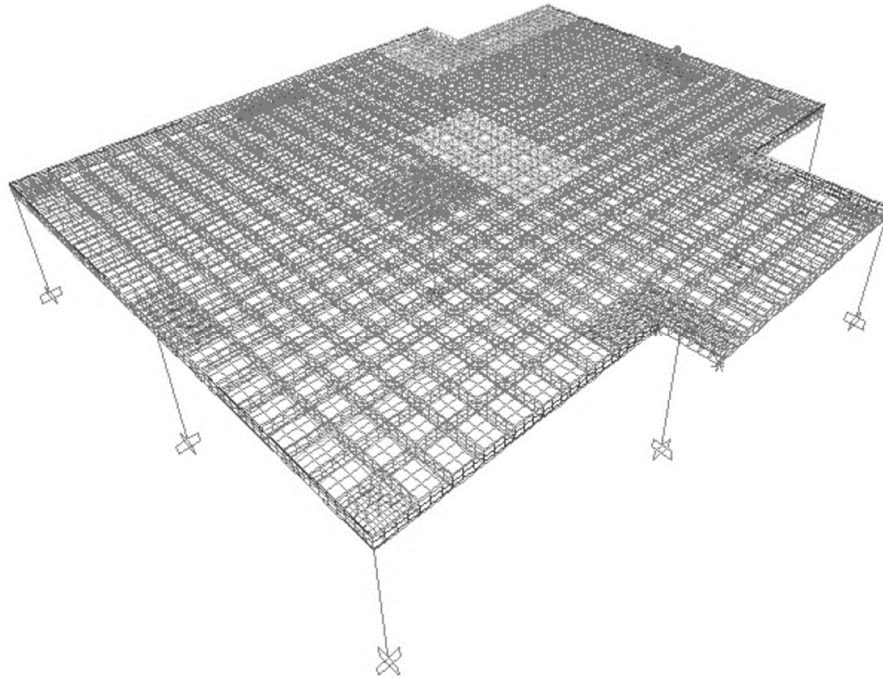


Figura 23: Modelo da laje reduzida em elementos finitos [Fonte: SCHWETZ (2011)]

Para modelar a região maciça da laje nervurada SCHWETZ (2011) apresentou quatro alternativas, utilizando elementos de área (*Shell Layered*) e sólido (*Solid*) do programa SAP2000, com as seguintes denominações:

1. Shell – 1 camada: elemento de área colocado na altura média da nervura com espessura igual a altura total de laje;
2. Shell – 3 camadas: três elementos de área, colocados o primeiro na parte superior, o segundo no meio e o terceiro na parte inferior da nervura, sendo o segundo de maior espessura;
3. Sólido + Shell: elemento de área colocado na parte superior da nervura e na altura restante é colocado o elemento sólido;
4. Sólido: elemento sólido de altura igual a nervura.

Na comparação dos resultados, apresentou melhor desempenho a alternativa Shell – 1 camada, como se mostra na Figura 24, tendo sido o adotado para a modelagem dos maciços.

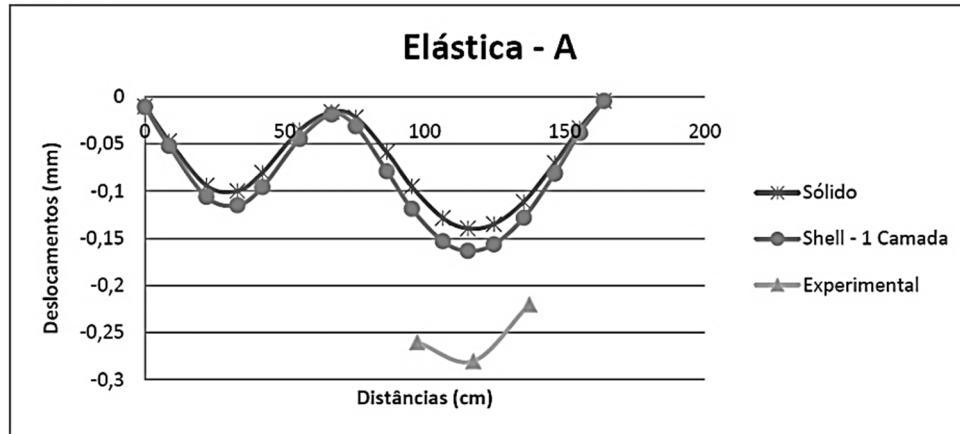


Figura 24: Elástica do plano A-A da laje reduzida [Fonte: SCHWETZ (2011)]

#### 2.4.5 Laje nervurada experimental de REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)

Trata-se de um modelo experimental de laje nervurada quadrada, como na Figura 25, ensaiada com carregamento uniformemente distribuído, onde foram registradas medições de deslocamentos verticais no centro da laje.

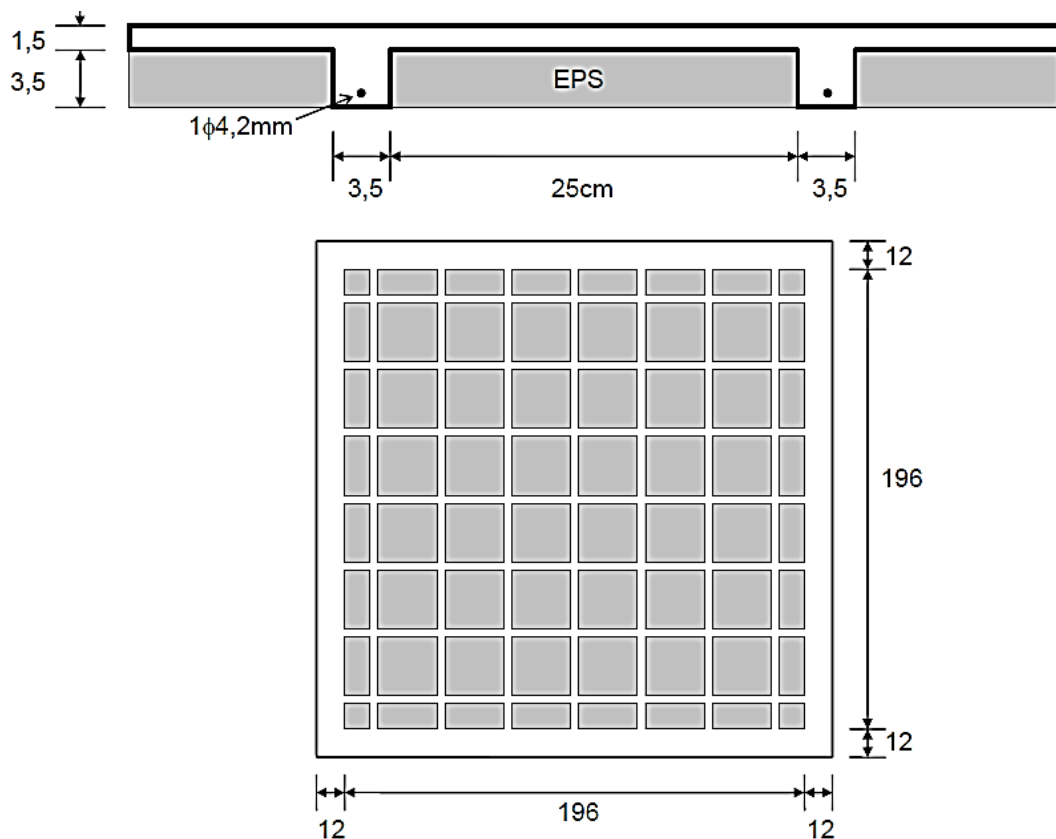


Figura 25: Dimensões da laje ensaiada, em cm  
[Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)]

O procedimento experimental consistiu em duas etapas. Na primeira, a laje foi carregada até uma sobrecarga de  $3,25 \text{ kN/m}^2$  e então descarregada. Na segunda etapa, o carregamento seguiu até uma carga próxima ao valor de ruptura,  $7,75 \text{ kN/m}^2$ , obtendo-se um deslocamento máximo de  $2,5 \text{ cm}$

Através dos ensaios verificaram que o comportamento da estrutura permaneceu linear até aproximadamente  $3,0 \text{ kN/m}^2$  (Estádio I). A partir deste valor observaram a formação de pequenas fissuras e, conseqüentemente, perda rigidez (Estádio II).

Os resultados experimentais foram comparados com resultados teóricos, obtidos da seguinte maneira:

- a) Analogia de placa: A laje maciça equivalente utiliza uma inércia à flexão para o concreto não fissurado (Estádio I) e outra inércia para o concreto fissurado (Estádio II). Apresenta-se também outros processos simplificados descritos pelos autores (Processo simplificado seção T e Processo simplificado seção maciça equivalente). Estes resultados encontram-se na Figura 26;

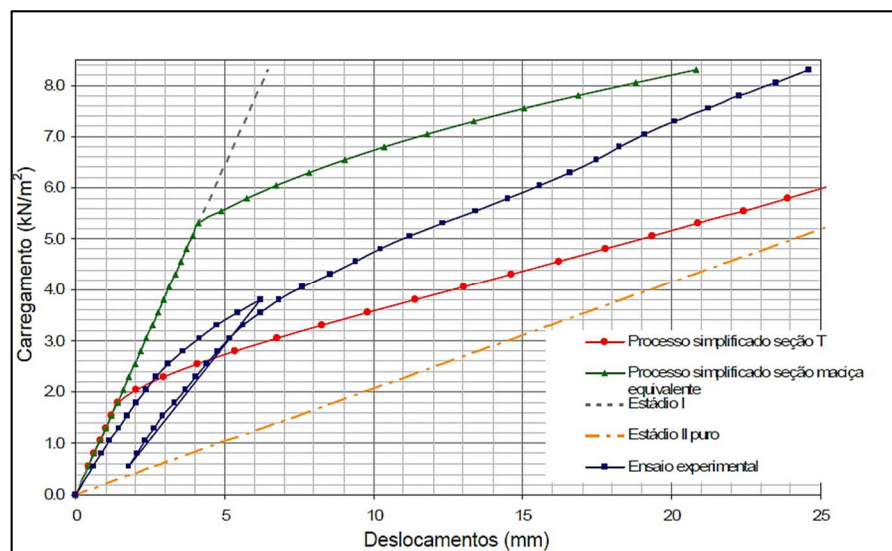


Figura 26: Curvas Carga-Deslocamentos utilizando a analogia de placa

[Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)]

- b) Analogia de grelha: Utilizando método que considera modificações da inércia polar  $J_p$ . Sendo  $J_p=4I_c$ , quatro vezes a inércia à flexão, e  $J_p=4I_{eq}$ , quatro vezes a inércia equivalente determinada pela fórmula de Branson no estágio II. Os resultados encontram-se na Figura 27.

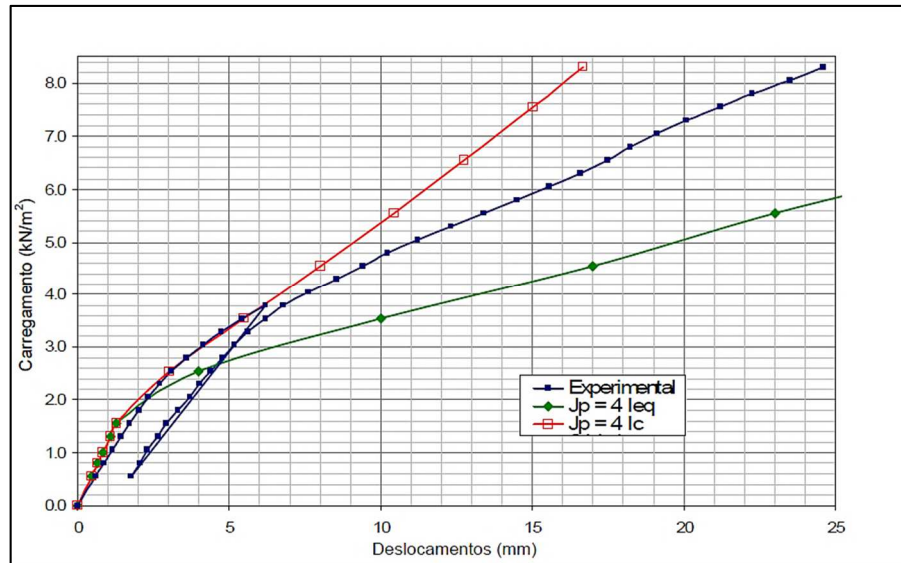


Figura 27: Curvas Carga-Deslocamentos utilizando a analogia de grelha  
[Fonte: REBÊLO e DUARTE FILHO (2007)]

SCHWETZ (2011), também realizou análises numéricas não lineares sobre esta laje, utilizando diferentes valores de resistência à tração na curva tensão-deformação do concreto. Seis diferentes tensões máximas de tração foram definidas, como mostradas na Tabela 3, e a comparação dos resultados das análises encontra-se na Figura 28.

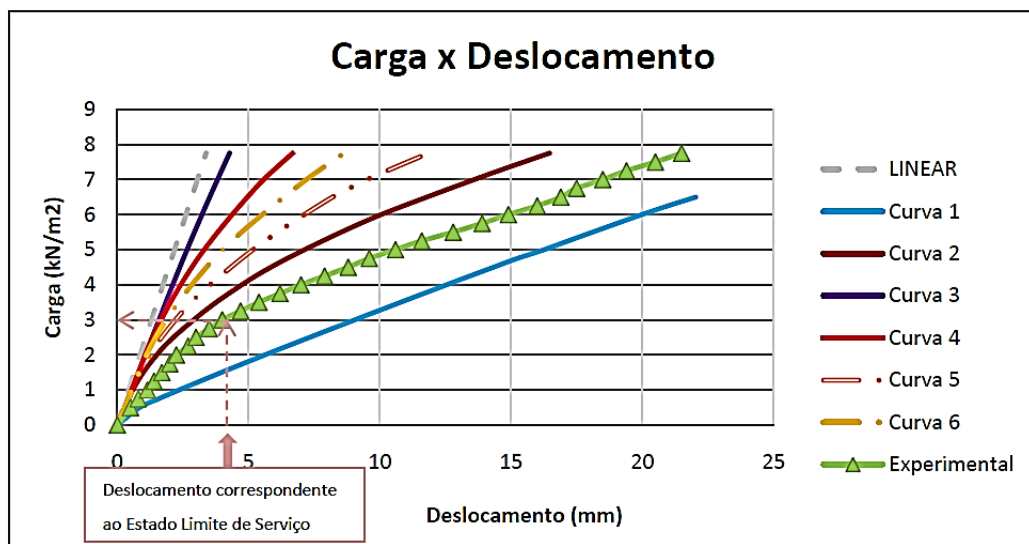


Figura 28: Curvas Carga-Deslocamento com diferentes tensões para o modelo de não linearidade física [Fonte: SCHWETZ (2011)]



Tabela 3: Valores da tensão máxima à tração das curvas do concreto

Curva	Tração Máx
Curva 1	$0,033.f_{ct,m}$
Curva 2	$0,33.f_{ct,m}$
Curva 3	$f_{ct,m}$
Curva 4	$f_{ct,m}$
Curva 5	$0,5.f_{ct,m}$
Curva 6	$0,75.f_{ct,m}$

As Curvas 3 e 4 apresentam a mesma tensão máxima de tração. Porém, na Curva 3, procura-se desconsiderar totalmente a contribuição do concreto após o início da fissuração, interrompendo a curva neste ponto, enquanto que na Curva 4, o valor da resistência máxima de tração é mantido constante com o aumento da deformação específica até que a mesma atinja o valor 0,2%. (SCHWETZ, 2011)

Observa-se que este método simplificado, proposto por SCHWETZ (2011), apresenta dificuldade em estabelecer parâmetros para a relação constitutiva do concreto em tração, que leve a obtenção de uma resposta mais próxima à experimental. Dentre as testadas, a Curva 2, com  $0,33 f_{ct,m}$ , apresentou o melhor desempenho.

#### 2.4.6 Estudos experimentais de peças de lajes nervuradas - BORGES (2009)

O estudo apresenta quatro modelos de lajes nervuradas bidirecionais, concretadas *in loco* e com capas pré-fabricadas. São lajes quadradas, de 1800 mm de lado e 150 mm de altura, com quatro nervuras em cada direção. A capa tem 40 mm de espessura e as nervuras tem seção retangular com 70x150 mm, Entre os quatro modelos, o que varia é a seção de armadura à flexão das nervuras. A laje considerada para o estudo é a concretada *in loco*, denominada LMP-REF.

A geometria básica da laje LMP-REF é mostrada na Figura 29, e a seção transversal do plano A-A na Figura 30.

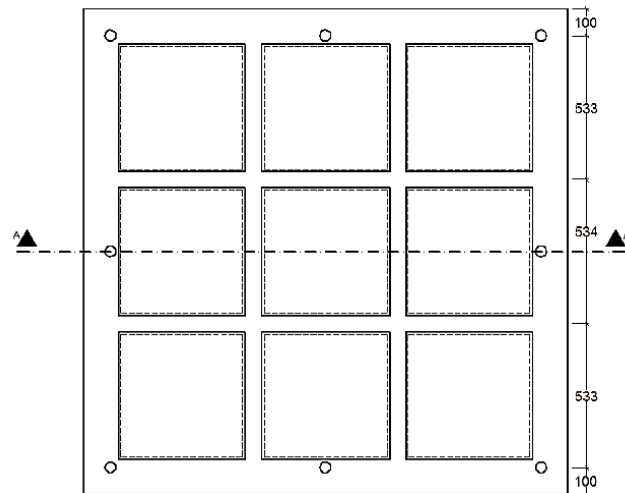


Figura 29: Geometria básica das lajes experimentais, em mm [Fonte: BORGES (2009)]

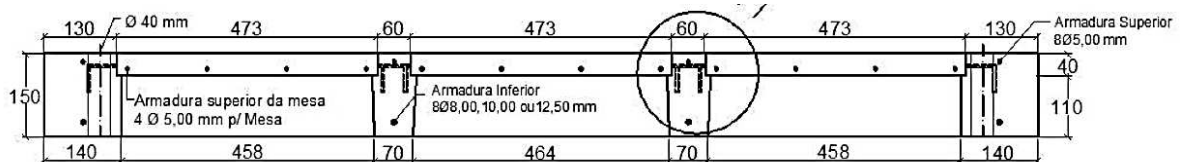


Figura 30: Seção transversal do plano A-A, em mm [Fonte: BORGES (2009)]

Para a construção dos modelos levaram em consideração as prescrições da norma NBR 6118 (2007). Esta norma estabelece, para projetos de estruturas de lajes nervuradas, que pode ser dispensado o uso de armadura transversal e a verificação das nervuras ao cisalhamento, desde que a distância entre os eixos das nervuras não seja maior que 650 mm e o esforço cortante seja menor do que máximo definido pela norma.

As propriedades mecânicas dos materiais foram determinadas pelas normas técnicas brasileiras do concreto: a resistência à compressão do concreto (NBR 5739), resistência à tração (NBR 7222) e módulo de elasticidade longitudinal (NBR 8522). Para a resistência à tração do aço foi utilizada a NBR 6152.

A laje LMP-REF foi simplesmente apoiada em todas as bordas, através de quatro vigas metálicas de reação, simulando apoios contínuos. O sistema de apoio foi fixado à laje de reação servindo de transmissão da carga.

O carregamento aplicado aos modelos foi na direção ortogonal à laje, adotando-se um incremento de carga de aproximadamente 5 kN distribuído nos quatro nós de interseção da

nervura. Os detalhes do sistema de ensaio são mostrados na Figura 30. Os ensaios realizaram-se até atingir as cargas últimas.

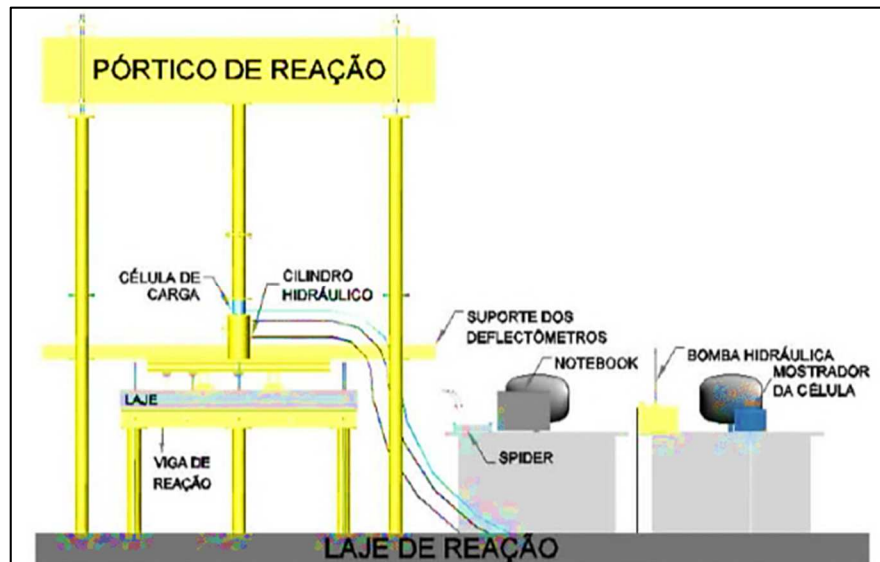


Figura 31: Sistema de ensaio utilizado [Fonte: BORGES (2009)]

Para cada incremento de carga foram medidos os deslocamentos verticais, através de cinco defletores, como na Figura 32, e as deformações no concreto (EM e EN) e no aço (EA), como indicado na Figura 33.

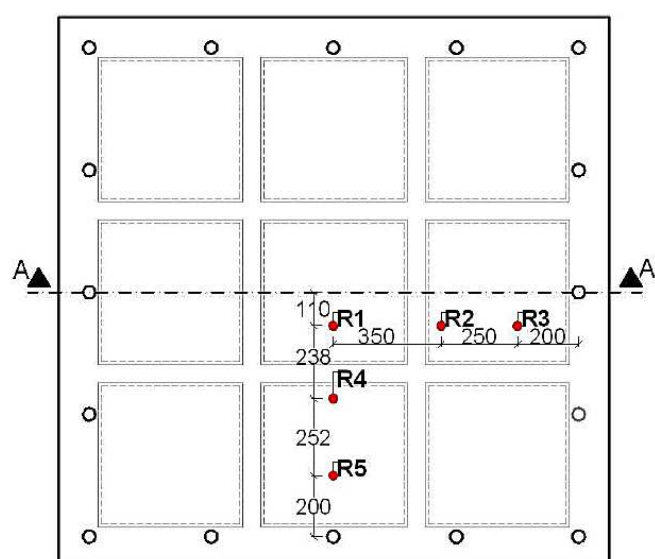


Figura 32: Esquema de posicionamentos dos defletores [Fonte: BORGES (2009)]

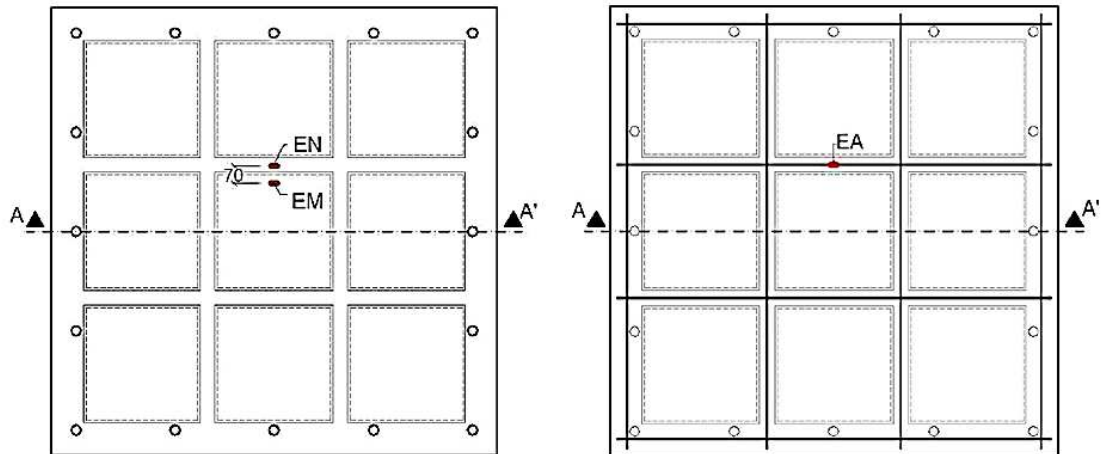


Figura 33: Esquema de posicionamentos dos EERs na laje [Fonte: BORGES (2009)]

## 2.5 AVALIAÇÕES EXPERIMENTAIS DE LAJES NERVURADAS EM TAMANHO REAL

SCHWETZ (2011) apresenta estudos experimentais e numéricos de três estruturas em escala natural, aqui denominados Casos de Estudo 1, 2 e 3, todos submetidos a cargas estáticas em níveis de serviço.

Na Figura 34 mostra-se a geometria do Caso de Estudo 1 e na Figura 35 dos Casos 2 e 3, que pertencem a uma mesma edificação.

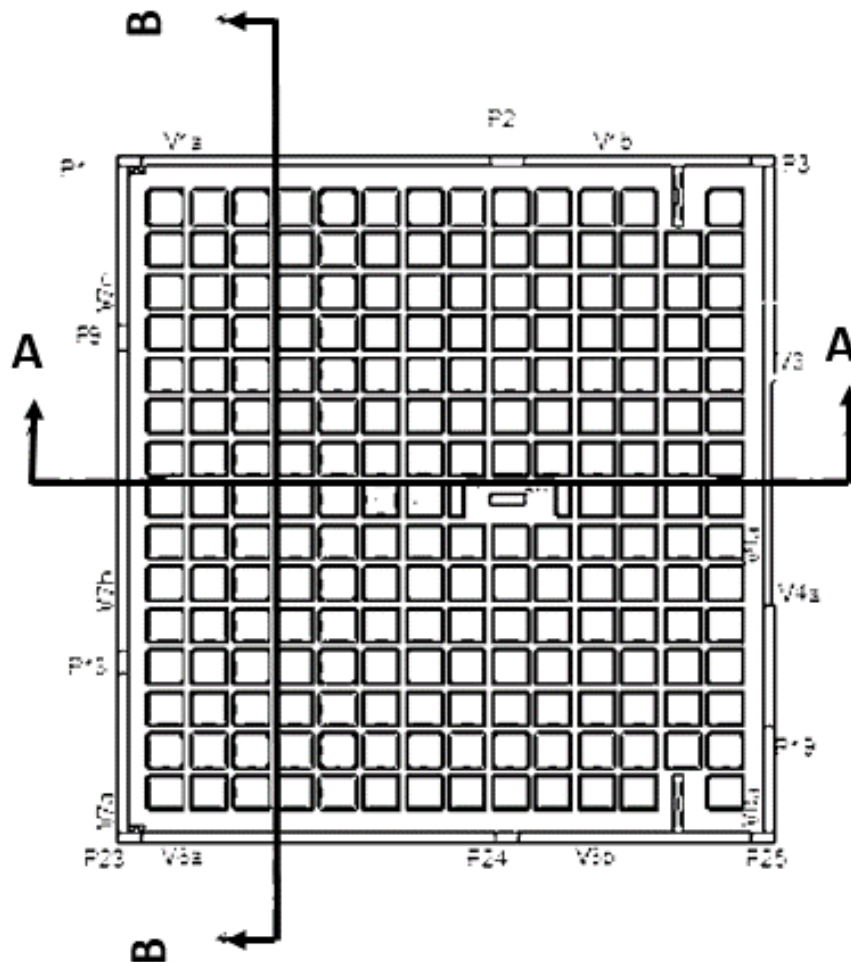


Figura 34: Geometria básica do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

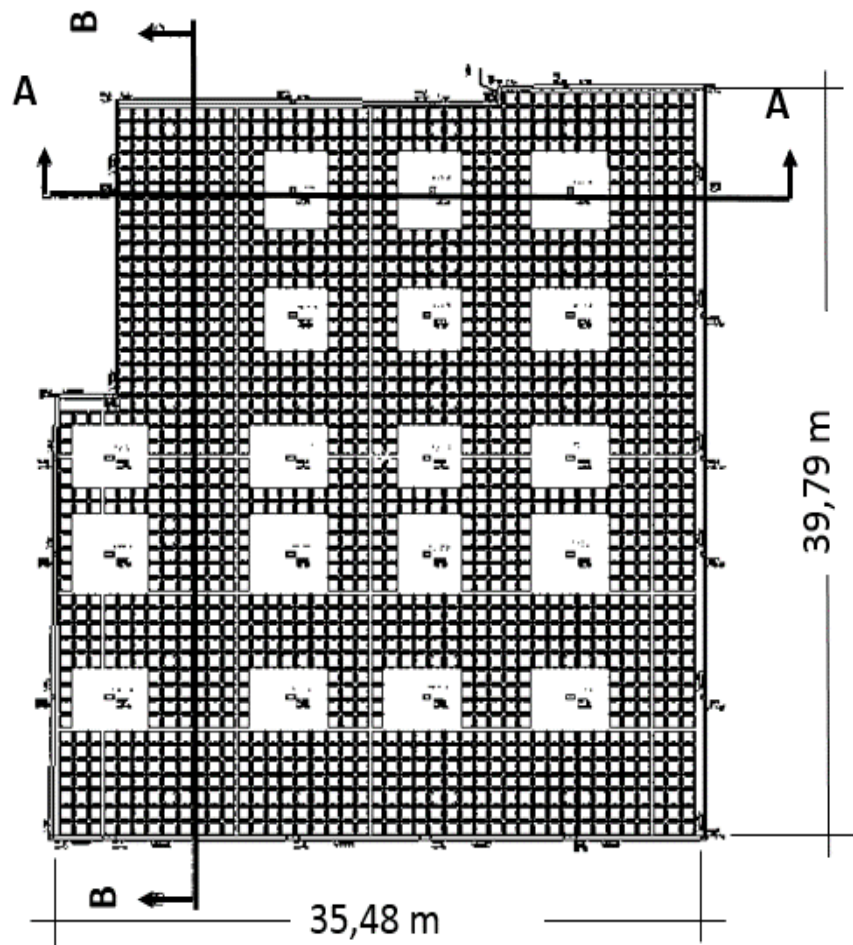


Figura 35: Geometria básica dos Casos de Estudo 2 e 3 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

SCHWETZ (2011) realizou o estudo teórico apresentando modelos por analogia de grelha, utilizando o programa TQS, e por elementos finitos, com o programa SAP2000 versão 14.

Para modelar a região maciça das lajes foi realizado o mesmo procedimento utilizado para a laje reduzida de SCHWETZ (2005), item 2.4.4 deste capítulo.

A Figura 36 mostra, como exemplo, a comparação de resultados de deslocamentos para uma carga de baixo nível de carregamento no Caso de Estudo 1.

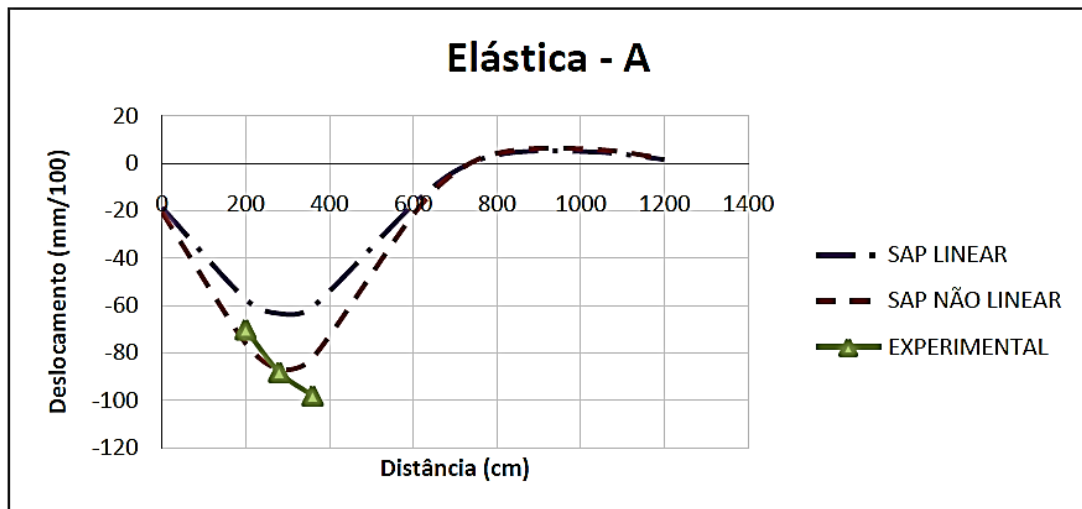


Figura 36: Elástica do plano A-A do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

Além das curvas elásticas, foram também comparados momentos fletores obtidos nas análises numéricas e experimentais. O cálculo de momento fletor experimental realizou-se a partir dos valores de deformação específica medidos experimentalmente.

O momento fletor foi determinado através do equilíbrio interno de forças, referidas ao centroide da seção tipo “T”, considerando as situações de seção não fissurada (Estádio I) e seção fissurada (Estádio II).

Foram calculados três valores para o momento fletor em cada seção:

- O primeiro foi definido considerando-se a seção não fissurada (Estádio I) e a deformação específica da armadura foi inferida, a partir do valor da deformação específica medida experimentalmente no concreto (Figura 37-a). Este momento fletor foi denominado Experimental Estádio I  $\epsilon_s$  inferido;
- O segundo, denominado Experimental Estádio I  $\epsilon_s$  medido, também foi determinado com a consideração da seção no Estádio I e foi utilizada a deformação específica medida na armadura experimentalmente (Figura 37-b);
- O terceiro (Figura 37-c), denominado Experimental Estádio II, foi definido considerando-se a seção fissurada (Estádio II).

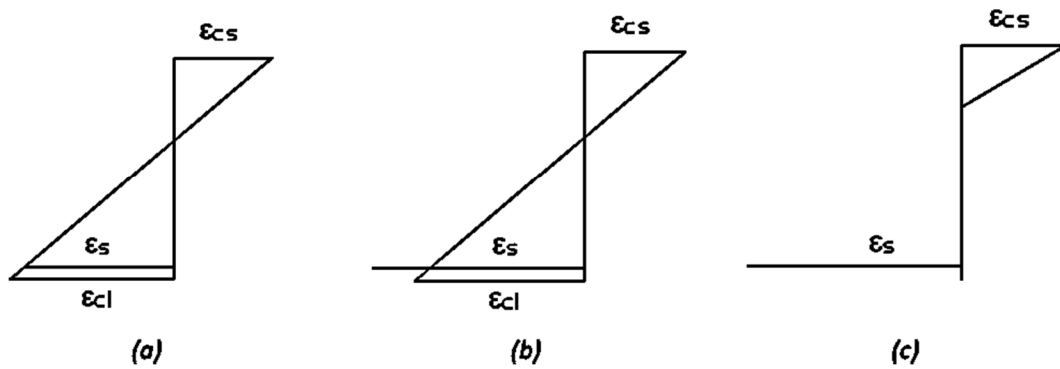


Figura 37: Deformações específicas adotadas: (a) Experimental Estádio I  $\epsilon_s$  inferido, (b) Experimental Estádio I  $\epsilon_s$  medido e (c) Experimental Estádio II [Fonte: SCHWETZ (2011)]

Como exemplo da comparação dos momentos fletores, a Figura 38 mostra o diagrama de momento fletor para o plano de corte A-A da Figura 34, com os três momentos fletores calculados como indicado acima.

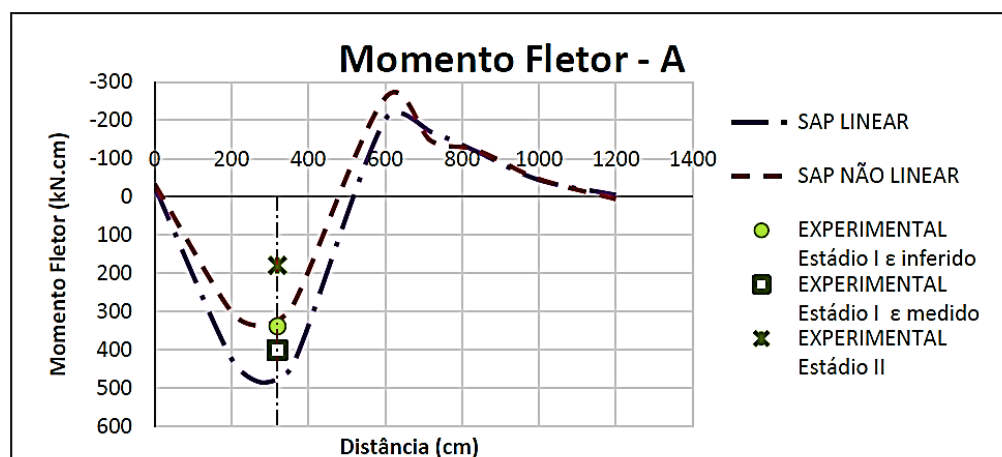


Figura 38: Diagrama Momento Fletor A–A, Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

SCHWETZ (2011) concluiu adequadas as análises numéricas efetuadas através do programa SAP2000, para representar o comportamento de lajes nervuradas.

Estes trabalhos encontram-se descritos com mais detalhes no Capítulo 5, onde são avaliados com o modelo numérico proposto nesta Dissertação.



### 3 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO ARMADO EM APLICAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS

Modelos constitutivos que bem representem o comportamento do concreto armado são essenciais para uma análise realística de lajes nervuradas, como indica o item 2.2.2. Assim, este capítulo apresenta um modelo do comportamento mecânico para o concreto fissurado e sua implementação em um programa de Elementos Finitos, que será utilizado para a análise numérica destas lajes.

Existe, na literatura, uma grande diversidade de modelos para o concreto fissurado e suas diferentes aplicações via elementos finitos. Neste trabalho, é inicialmente estabelecido o critério da escolha do modelo a ser utilizado, no item 3.1, e as características do mesmo, no item 3.2.

O programa de elementos finitos escolhido para este estudo é o SAP2000 na versão 16, pela sua versatilidade e reconhecido desempenho em análises estruturais as mais variadas. No item 3.3 apresentam-se algumas características do software, o elemento a ser utilizado, sua representação para uma seção de concreto armado e a implementação do modelo constitutivo acima citado.

O adequado desempenho do modelo constitutivo no *software* SAP2000, é verificado através da análise de algumas vigas, pela comparação de resultados com os de seus programas experimentais, assim como, também, com resultados numéricos das análises de outros autores.

#### 3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nas estruturas de concreto armado ocorrem fissuras, em função da baixa resistência a esforços de tração do concreto. Este fenômeno provoca uma redução da rigidez da estrutura, o que modifica a distribuição interna de tensões, de modo que a mesma começa a apresentar comportamento não linear.

Uma das formas de análise simplificada do comportamento do concreto pós-ruptura à tração é a que emprega modelo do tipo frágil, no qual a tensão passa a ser nula quando se alcança o valor de ruptura do concreto, ou do tipo tensão constante, no qual a tensão mantém-se em um valor menor que o máximo, mas constante ao longo da deformação. Por outro lado os modelos realistas consideram um decréscimo gradual da tensão do concreto até chegar à tensão nula.

Sabe-se, entretanto, que o concreto intacto entre fissuras é ainda capaz de absorver esforços. A consideração desta contribuição leva a um incremento na rigidez da estrutura chamado *Tension-Stiffening*.

Na literatura há diversos modelos de fissuração distribuída que podem ser classificados, conforme MENIN et al (2009), da seguinte forma:

- a) Amolecimento da curva tensão-deformação por meio de valores experimentais;
- b) Modelos baseados na Mecânica da Fratura;
- c) Modelos baseado no modelo de plasticidade.

Algumas peças, como é o caso de estruturas de concreto simples, podem apresentar comportamentos em que uma fissura predomina (localizada) e abre excessivamente. Nestas situações de fraturas localizadas os modelos de fissuração distribuídas podem apresentar algumas deficiências. (MENIN et al, 2009).

Os modelos de fissuração distribuída de tipo amolecimento da curva tensão-deformação podem ser calibrados por meio de valores experimentais. A aplicação destes modelos apresentam bons resultados na modelagem de peças de concreto armado com padrão de fissuração bem distribuída, principalmente em vigas e lajes.

O modelo de fissuração proposto por D'AVILA (2003), do tipo distribuído, foi o escolhido para ser empregado neste trabalho. Este modelo já foi implementado pela autora no programa DIANA, conseguindo bom desempenho nas análises de vigas, razão pela qual foi aqui selecionado.

### 3.2 MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA PROPOSTO POR D'AVILA (2003)

Conforme D'AVILA (2003), este é um modelo de fissuração distribuída para o concreto armado pós-ruptura à tração baseado no Código Modelo CEB-FIP-90 (1992).

Os modelos constitutivos unidimensionais, após a ruptura, são:

- a) Para o concreto comprimido, utiliza-se o modelo proposto pelo código modelo CEB-FIP-90 (1992);
- b) Para o concreto tracionado intacto, o modelo é elástico linear;

- c) Para o concreto tracionado fissurado, utiliza-se o modelo de amolecimento multilinear proposto D`AVILA (2003).

O modelo de amolecimento multilinear proposto D`AVILA (2003), que a partir do momento da fissuração passa a ser o modelo constitutivo do concreto armado, considera a contribuição do concreto armado tracionado fissurado, conhecido por *Tension-Stiffening*.

O modelo é de amolecimento multilinear com três trechos como se mostra na Figura 39.

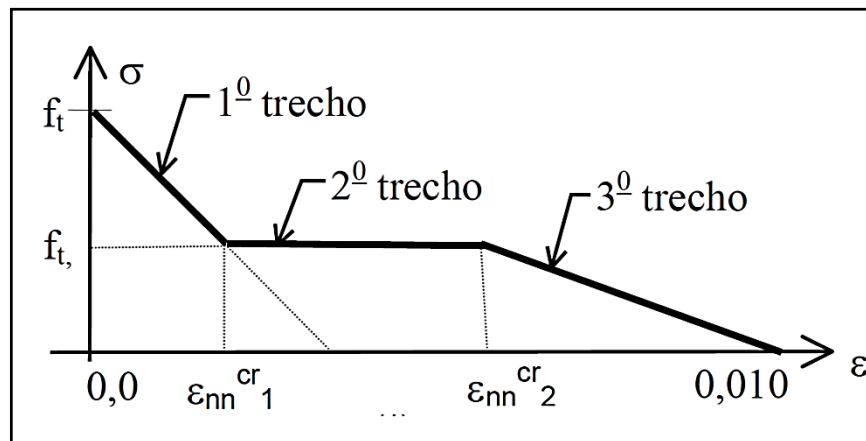


Figura 39: Modelo de fissuração distribuída proposto por D`AVILA (2003)

Cada trecho do modelo representa uma etapa do comportamento no concreto armado fissurado:

1º trecho: relativo ao período de formação de fissuras, ocorrendo uma redução gradual da tensão com o aumento da deformação;

2º trecho: relativo ao período de fissuração estabilizada, caracterizado pelo aumento de deformação com tensão constante;

3º trecho: relativo ao período de pós-escoamento da armadura, novamente com diminuição da tensão com o aumento da deformação.

A determinação dos parâmetros de cada trecho é feita segundo o código modelo CEB-FIP-1990.

A deformação de fissura calculada pelo modelo é dada pela equação 4,

$$\varepsilon_{nn}^{cr} = \frac{N}{E_s A_s + E^* A_c} = \frac{\varepsilon_{s2}}{1 + \frac{E^*}{E_{sp}}} \quad (4)$$

sendo  $E^*$ , equação 5, o módulo de elasticidade do concreto fissurado levando em consideração o amolecimento do concreto simples e a contribuição do concreto entre fissuras, ver Figura 40.

$$E^* = f_t \left( \frac{\varepsilon_{ult}^{cr} / \varepsilon_{nn}^{cr} - 1}{\varepsilon_{ult}^{cr} - \varepsilon_{s1r}} \right) \quad (5)$$

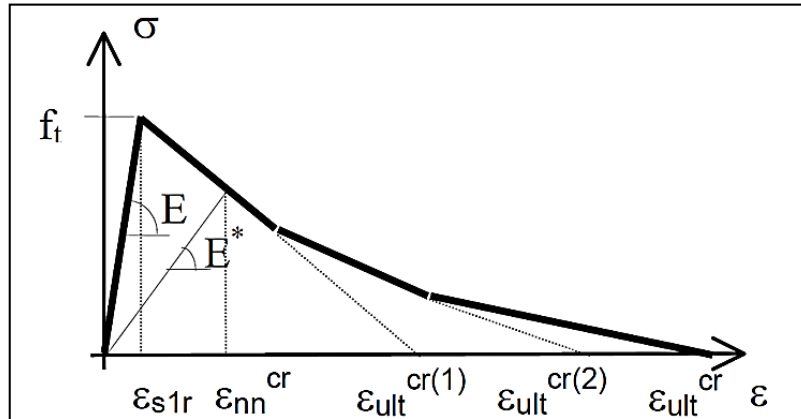


Figura 40: Deformação média do modelo proposto por D'AVILA (2003)

Substituindo-se (5) em (4), chega-se à equação 6,

$$\varepsilon_{nn}^{cr} = \varepsilon_{s2} + f_t \left( \frac{\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{ult}^{cr}}{E_s \rho (\varepsilon_{ult}^{cr} - \varepsilon_{s1r}) - f_t} \right) \quad (6)$$

Segundo o Código Modelo CEB-FIP-1990 (Figura 41) a deformação média é determinada pela equação 7,

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - A(\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r}) \quad (7)$$

sendo  $A=0,4$

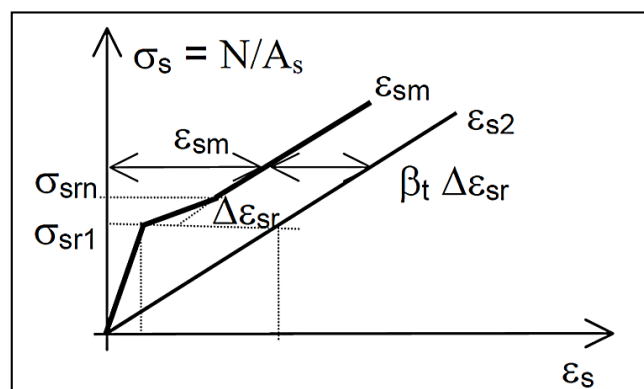


Figura 41: Deformação média CEB-FIP

Para se determinar a deformação última do trecho, a deformação calculada pelo modelo é igualada à deformação média proposta pelo CEB, resultando a equação 8,

$$\varepsilon_{ult}^{cr} = \frac{-f_t \varepsilon_{s2} + (E_s \rho \varepsilon_{s1r} + f_t) A (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r})}{-f_t + E_s \rho A (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r})} \quad (8)$$

onde:

- $\sigma_{sr1}$  - tensão na armadura imediatamente após a formação da primeira fissura
- $\sigma_{srn}$  - tensão na armadura no instante da formação da última fissura -  $\sigma_{srn} = 1,3 \sigma_{sr}$
- $\varepsilon_{s2}$  - deformação da armadura calculada no estágio II (totalmente fissurado)
- $\varepsilon_{s1r}$  - deformação da armadura correspondente à tensão  $\sigma_{sr}$  no estágio I
- $\varepsilon_{s2r}$  - deformação da armadura correspondente à tensão  $\sigma_{sr}$  no estágio II
- $A_s$  - áreas da seção da armadura
- $A_{cr}$  - área de concreto tracionado
- $\rho$  - taxa de armadura na zona tracionada -  $\rho = A_s / A_{cr}$
- $E_s$  - módulo de deformação do aço
- $f_t$  - resistência à tração do concreto
- $f_y$  - tensão de escoamento do aço

Conforme a expressão anterior, a deformação última na fissura para cada trecho é função da taxa de armadura na zona tracionada. Em tirantes, a zona tracionada é igual à seção transversal; em vigas, segundo o Código Modelo CEB-FIP-90, a altura efetiva da zona tracionada é dada pela equação 9,

$$h_{ef} = 2,5(h - d) < (h - x) / 3 \quad (9)$$

Sendo “h” a altura total da viga, “d” a altura útil e “x” a altura da zona comprimida.

A determinação dos parâmetros  $f_{t,i}$  e  $\varepsilon_{nni}^{cr}$  para cada trecho do diagrama, Figura 39, é feita através da análise de tirantes de concreto armado com taxas de armaduras iguais às taxas de armaduras nas zonas tracionadas das vigas.

Os parâmetros dos dois primeiros trechos são determinados através da análise dos tirantes. A deformação última do primeiro trecho,  $\varepsilon_{ult}^{cr(1)}$ , e a tensão  $f_{t,i}$  correspondem ao final do período

de formação de fissuras. No segundo trecho, fissuração estabilizada, a tensão permanece constante enquanto a deformação cresce até a valor último de  $\varepsilon_{ult}^{cr(2)}$  correspondente ao escoamento da armadura. Para a deformação última do terceiro trecho, correspondente ao período pós-escoamento da armadura, foi imposto o valor de 10‰.

### 3.3 O PROGRAMA SAP2000 - MODELAGEM DO CONCRETO ARMADO

SAP2000 (*Software Integrate for Structural Analysis & Design*) desenvolvido pela empresa CSI (*Computer and Structure, Inc.*) em Berkeley, California, USA é um programa de Elementos finitos que pode ser empregado na análise de estruturas civis e será utilizado ao longo deste trabalho como ferramenta de análise.

Na sequência, apresenta-se o procedimento adotado, com o programa SAP2000 - versão 16, para a construção de uma seção transversal de concreto armado, utilizando o modelo constitutivo acima definido.

#### 3.3.1 Definição dos materiais

Na interface gráfica de definição dos materiais (*Define Materials*) o programa contém uma biblioteca de diversos tipos de materiais de construção civil. Cada material, por sua vez, apresenta uma gama de especificações técnicas.

Para definir um material basta escolher um presente na sua biblioteca. Nestes materiais pode-se modificar os parâmetros da curva constitutiva.

##### 3.3.1.1 Modelo para Concreto

Para considerar o concreto como material isotrópico, definem-se os parâmetros, segundo dados experimentais, como: módulo de Elasticidade, resistência à compressão, peso, massa específica e coeficiente de Poisson. Não se considera efeitos térmicos, nem propriedades de amortecimento. A seguir, na Figura 42, mostram-se a interface gráfica com os parâmetros citados acima.

Figura 42: Interface do SAP2000 de parâmetros do material para concreto

Para estabelecer os parâmetros de não linearidade utiliza-se a interface gráfica de não linearidade do material (*Nonlinear Material Data*). Esta interface permite a definição da curva tensão-deformação, pelo usuário, em (*User Define*) que possibilita a colocação das coordenadas da curva.

Outros parâmetros, para o material não linear, são o tipo de histerese Takeda e os parâmetros de Drucker-Prager. As especificações destes parâmetros se encontram no manual do programa, CSI Analysis Reference Manual (2013).

A seguir a Figura 43 apresenta a interface gráfica dos parâmetros de não linearidade.

Nonlinear Material Data

Edit

Material Name:  Material Type:

Hysteresis Type:

Drucker-Prager Parameters: Friction Angle:  Dilatational Angle:

Units:

Stress-Strain Curve Definition Options:  Parametric  User Defined

User Stress-Strain Curve Data

Number of Points in Stress-Strain Curve:

	Strain	Stress	Point ID
23	-9,375E-04	-23,206	
24	-8,203E-04	-20,999	
25	-7,031E-04	-18,605	
26	-5,859E-04	-16,019	
27	-4,688E-04	-13,235	
28	-3,516E-04	-10,248	
29	-2,344E-04	-7,05	
30	-1,172E-04	-3,636	
31	0,	0,	
32	8,684E-05	2,78	
33	6,797E-04	1,112	
34	2,449E-03	1,112	
35	0,0117	0,	

Figura 43: Interface do SAP2000 de parâmetros da não linearidade física no concreto

### 3.3.1.2 Modelo para armaduras

Para as armaduras, a biblioteca do SAP2000 apresenta os materiais tipo *rebar*, que são barras de aço uniaxiais, cujos parâmetros a definir são: módulo de elasticidade, peso, massa específica, tensão mínima e efetiva de escoamento, tensão mínima e efetiva da ruptura.

A Figura 44 mostra a interface gráfica do material aço.





Figura 44: Interface do SAP2000 de parâmetros do material de armadura

### 3.3.2 Definição da Seção Transversal

Para uma análise não linear de lajes nervuradas de concreto armado, como exposto no item 2.2.2, são apropriados os elementos de casca.

Dos elementos de área encontrados no programa SAP2000, o apropriado para concreto armado é do tipo *Shell Layered*, por ser este o único que permite diferentes camadas de áreas superpostas, fundamental para a representação das armaduras. Também, o elemento permite uma análise não linear física, em função dos materiais componentes.

Na Figura 45 mostra-se um exemplo de elemento *Shell Layered* de camadas *Layer A* a *D*.

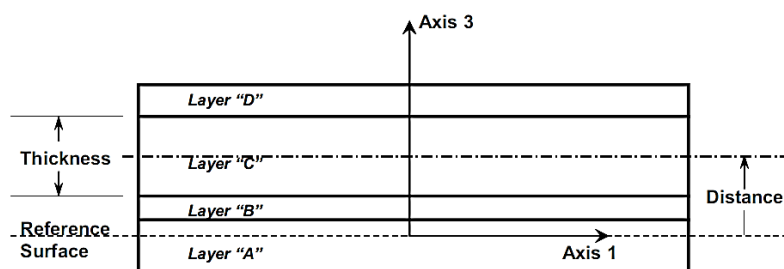


Figura 45: Elemento *Shell Layered* de quatro camadas [Fonte: CSI (2013)]

Para um melhor entendimento das características do elemento *Shell Layered*, apresenta-se na Figura 46 sua interface gráfica, seguida pela descrição de cada parâmetro.

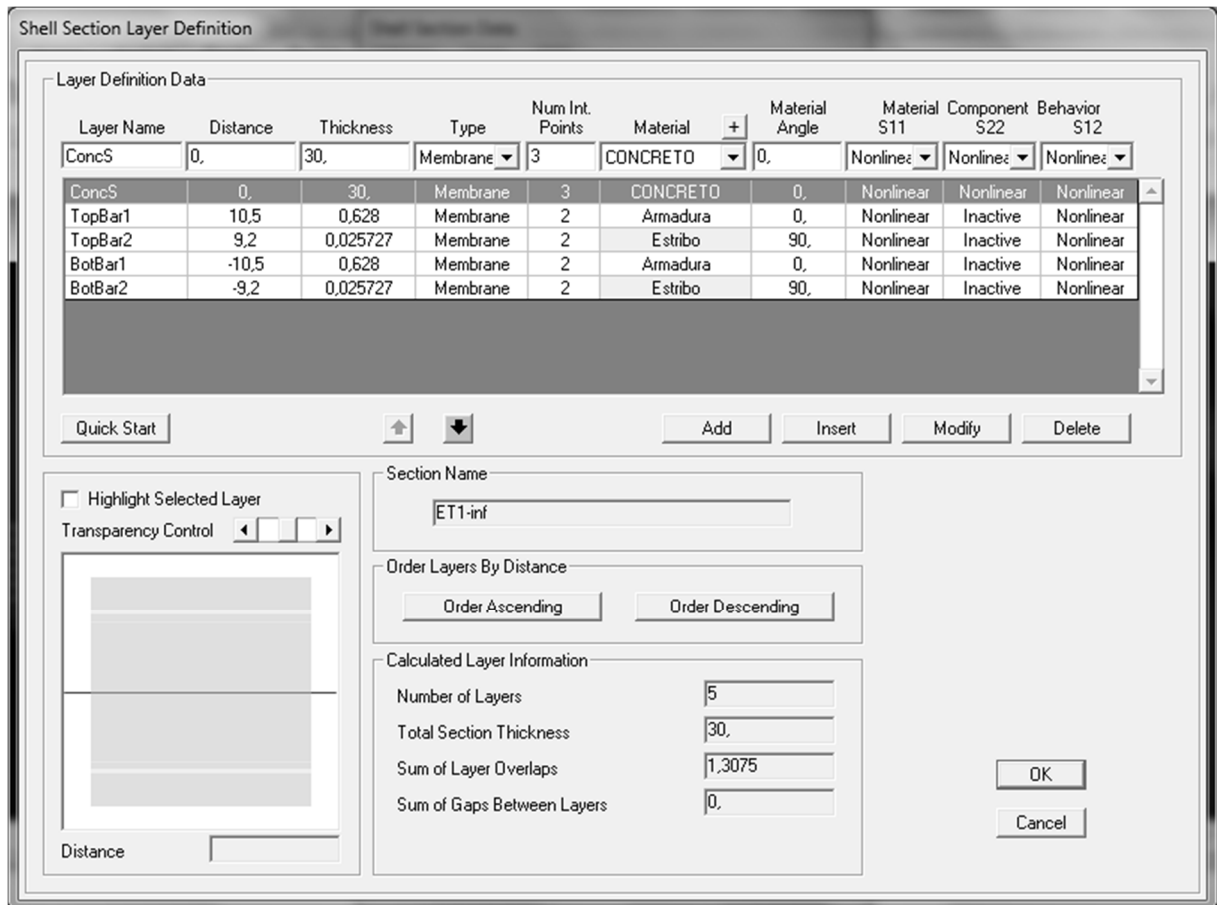


Figura 46: Interface do SAP2000 dos parâmetros de *Shell Layered*

Os parâmetros do elemento *Shell Layered* a ser definido são os seguintes:

- Layer Name*: é o nome de cada camada, arbitrário. Não pode se repetir o nome entre camadas de um mesmo elemento;
- Distance*: representa a distância da camada em relação ao centro do elemento *Shell Layered*. É definida pelo usuário, no sentido positivo do eixo local 3 do elemento, como se indica na Figura 47;
- Thickness*: representa a espessura de cada camada medida na direção do eixo local 3 do elemento, como se indica na Figura 47;
- Type*: Tipo de elemento segundo seus graus de liberdade. Sendo três tipos de elementos *shell*, *membrane*, *plate*. Adiante serão detalhados os tipos de elementos;
- Number of thickness integration points*: Número de pontos de integração, que podem ser escolhidos de 1x1 a 5x5 pontos para cada *layer*. A posição dos pontos segue o

procedimento padrão da integração gaussiana. O comportamento não linear pode exigir mais pontos de integração ou um maior número de camadas para obter um melhor desenvolvimento;

- f) *Material*: Parâmetro que associa o material a cada camada, cujas propriedades estão definidas no *Define Material*;
- g) *Material Angle*: Ângulo do material, que é utilizado para material uniaxial quando o elemento de área trabalha numa direção diferente da axial, como é o caso de estribos perpendiculares ao eixo da barra, formando assim um ângulo de 90°;
- h) *Material Component Behavior*: Comportamento de tensão do material, para cada componente de tensão na camada ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ). O usuário pode escolher se o comportamento será linear, não linear ou inativo. Para o caso de armaduras que são de comportamentos uniaxiais, somente as tensões  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{12}$  são significativos, razão pela qual a componente  $\sigma_{22}$  fica sempre inativa. As componentes de tensão definidas com comportamento não linear utilizam as relações não lineares de tensão-deformação definidas nas propriedades do material da camada.

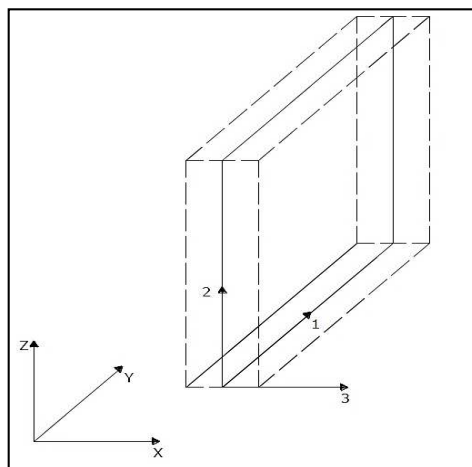


Figura 47: Eixos de elemento *Shell Layered*

Abaixo apresentam-se os três tipos de elementos *Shell Layered* correspondentes ao item d) citado anteriormente.

- I. *Membrane*: Membrana, que contém dois graus de liberdade (deslocamentos lineares nas direções do plano da área), onde as cargas estão contidas no plano da área, como na Figura 48.

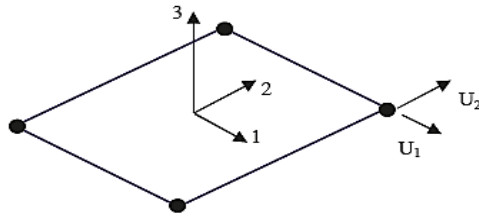


Figura 48: Elemento tipo *Membrane*

- II. *Plate*: Placa, que contém três graus de liberdade (deslocamento perpendicular ao plano da área e giros nas direções do plano da área), onde as cargas são perpendiculares ao plano da área, como na Figura 49.

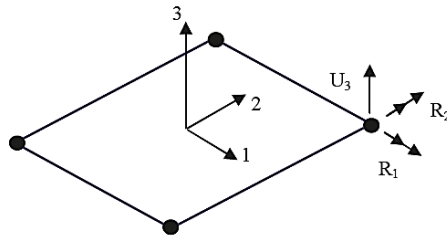


Figura 49: Elemento tipo *Plate*

- III. *Shell*: Casca, que contém 5 graus de liberdade (deslocamentos nas três direções e giros nas direções do plano da área), onde as cargas podem ser nos três eixos, como na Figura 50.

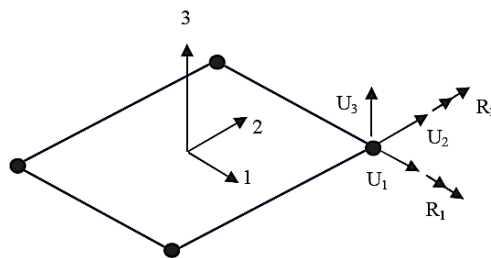


Figura 50: Elemento tipo *Shell*

### 3.3.3 Formulação para os elementos *Shell Layered*

A formulação de tensões para os elementos *Shell Layered* é baseada nas teorias de placas. Duas são as teorias que o programa SAP2000 emprega para os elementos *Shell Layered*: a Teoria

clássica de *Kirchoff*, que não considera o efeito do esforço de corte, e a Teoria de *Mindlin*, que considera o efeito da deformação cisalhante.

O critério de utilização das fórmulas correspondentes a cada uma das teorias é definido pela relação “L/t”, sendo L o comprimento e t a espessura do elemento de área. Desta forma dividem-se os elementos *Shell Layered* em Casca fina e Casca espessa:

- a)  $L/t > 20$ , Casca Fina, que utiliza a formulação *Kirchoff*;
- b)  $L/t < 20$ , Casca Espessa, que utiliza a formulação *Mindlin*.

Para as análises numéricas efetuadas consideraram-se os efeitos do esforço cortante, com a formulação de *Mindlin*, razão pela qual a malha de elementos finitos respeita a relação  $L/t < 20$ .

### 3.3.4 Esforços no elemento Casca Espessa

Os esforços a serem utilizados são baseados na teoria de *Mindlin*, MINDLIN (1951), apresentados por CSI ANALYSIS REFERENCE MANUAL (2013).

As forças no plano, vistas na Figura 51, são determinadas pelas equações 10 a 12,

$$F_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11} dx_3 \quad (10)$$

$$F_{22} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{22} dx_3 \quad (11)$$

$$F_{12} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{12} dx_3 \quad (12)$$

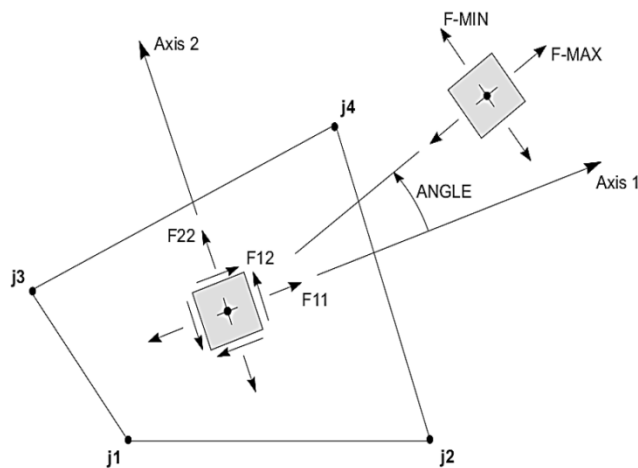


Figura 51: Forças no plano do elemento *Shell Layered* [Fonte: CSI (2013)]

as forças cortantes, perpendicular ao plano da área, pelas equações 13 e 14,

$$V_{13} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{13} dx_3 \quad (13)$$

$$V_{23} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{23} dx_3 \quad (14)$$

e os momentos fletores, vistos na Figura 52, pela equações 15 a 17,

$$M_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} t\sigma_{11} dx_3 \quad (15)$$

$$M_{22} = \int_{-t/2}^{t/2} t\sigma_{22} dx_3 \quad (16)$$

$$M_{12} = \int_{-t/2}^{t/2} t\sigma_{12} dx_3 \quad (17)$$

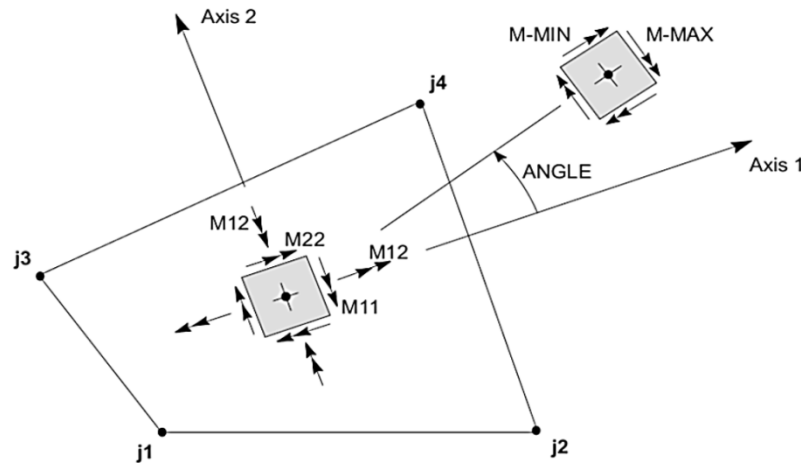


Figura 52: Momentos no elemento *Shell Layered* [Fonte: CSI (2013)]

### 3.3.5 Propriedades para a Análise não linear no programa SAP2000

O programa SAP2000 contém ferramentas para análises não lineares. Para o usuário, são permitidas as opções de análises como se indicam nas definições dos carregamentos e os parâmetros de análises não lineares.

A interface para esta definição é mostrada na Figura 53, tendo como exemplo o carregamento CARGA\_P, do tipo estático, e análise não linear (*Analysis Type: Nonlinear*) sem considerar a

não linearidade geométrica. A CARGA\_P é um caso aplicado depois da carga DEAD (peso próprio).

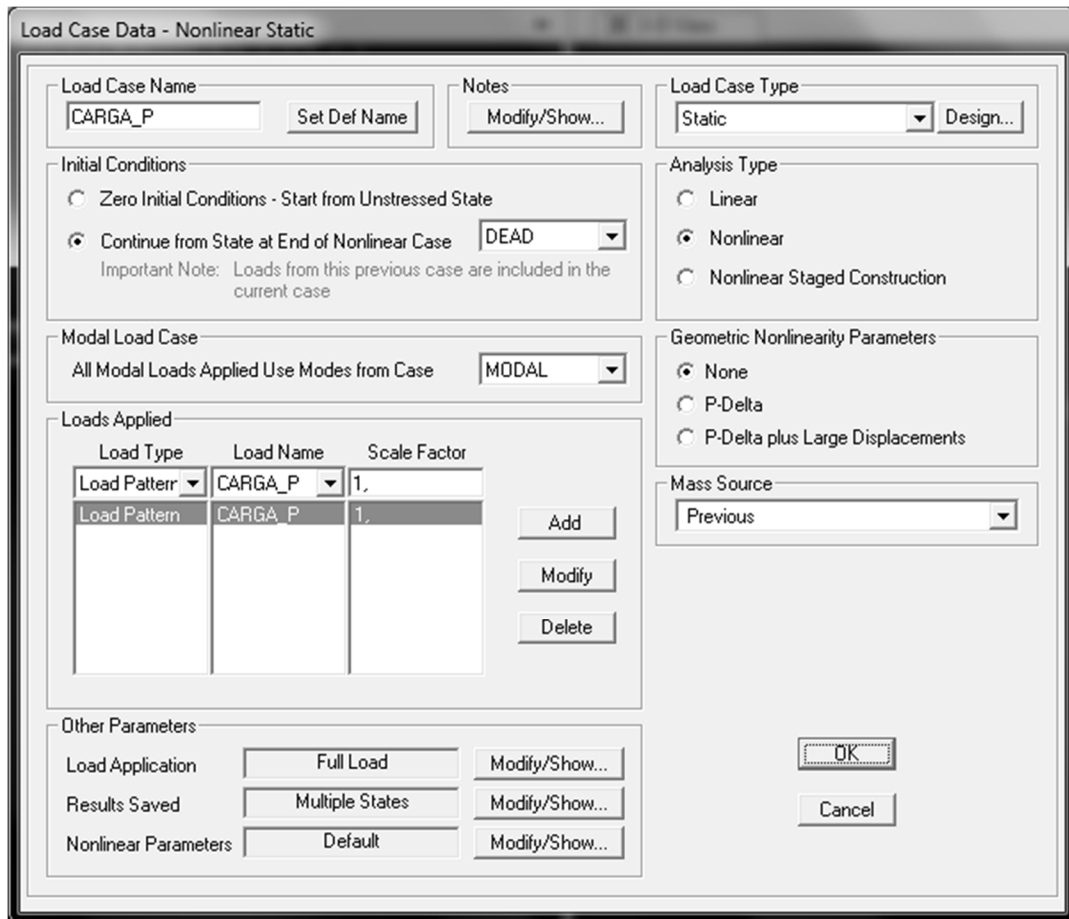


Figura 53: Interface do caso de carga do tipo Estático não linear [Fonte: CSI (2013)]

As etapas do carregamento são definidas no quadro “outros parâmetros” (*Other Parameters*), mostrado na Figura 53 e descritos a seguir:

- a) *Load Application*: Aplicação da carga. Escolhe-se a opção de carga completa (*Full Load*) para que o carregamento seja aplicado em sua totalidade;
- b) *Results Saved*: É utilizado para dividir a carga por etapas, (*Multiple States*);
- c) *Nonlinear Parameters*: Parâmetros não lineares.

Os Parâmetros de Não Linearidade Física são estabelecidos na interface gráfica *Nonlinear Parameters*, mostrado na Figura 54.

Os quadros *Solution Control*, *Target Force Iteration* e *Hinge Unloading Method* da Figura 54, apresentam os parâmetros das iterações a serem definidos pelo usuário. As especificações destes parâmetros se encontram no manual do programa, CSI Analysis Reference Manual (2013).

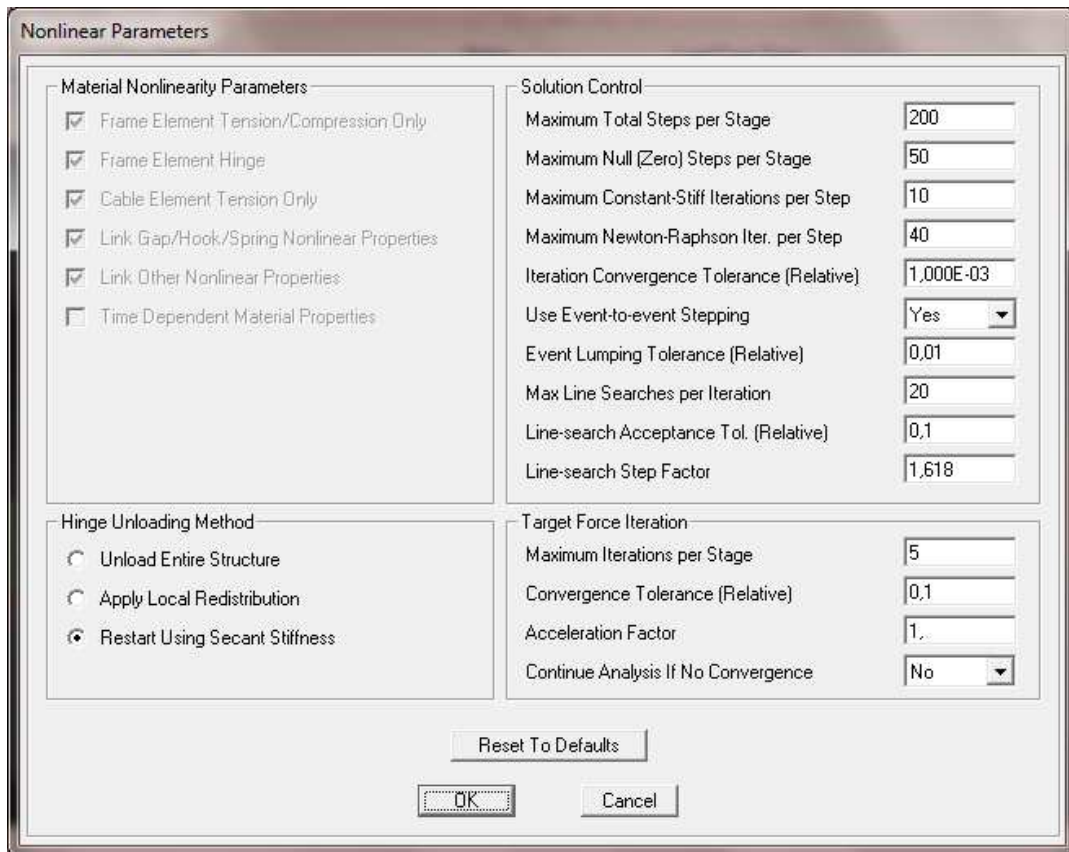


Figura 54: Interface dos parâmetros de não linearidade [Fonte: CSI (2013)]

O procedimento de análise não linear é realizada por intermédio do método da rigidez inicial e pelo método de Newton-Raphson, quando não houver convergência com o primeiro.

### 3.4 VALIDAÇÃO DO MODELO DE FISSURAÇÃO IMPLEMENTADO NO PROGRAMA SAP2000

Para a validação do adequado desempenho deste modelo foram utilizadas as seguintes vigas, ensaiadas experimentalmente: Viga ET1 de LEONHARTD e WALTHER (1962) e viga HH5 de LEONHARTD e WALTHER (1965).

Também foram utilizadas na validação as análises numéricas das vigas mencionadas acima, efetuadas por D'AVILA (2003), quando da implementação deste modelo no programa DIANA (Displacement method ANALyser) - software de elementos finitos baseado no método dos deslocamentos para análise não linear de estruturas de concreto.

Ressalta-se que nas análises de D'AVILA (2003) foi considerado o modelo constitutivo de OTTOSEN (1988), para o concreto não fissurado, tanto em tração como em compressão.



### 3.4.1 Viga isostática ET1

A viga ET1 consiste em uma viga simplesmente apoiada de 340 cm de comprimento e seção transversal retangular de 30x35 cm, com cargas pontuais simétricas.

A Figura 55, mostra a representação da viga ET-1 de LEONHARTD e WALTHER (1962) e sua seção transversal está na Figura 56. A malha de elementos finitos, com 182 elementos de casca, encontra-se na Figura 57.

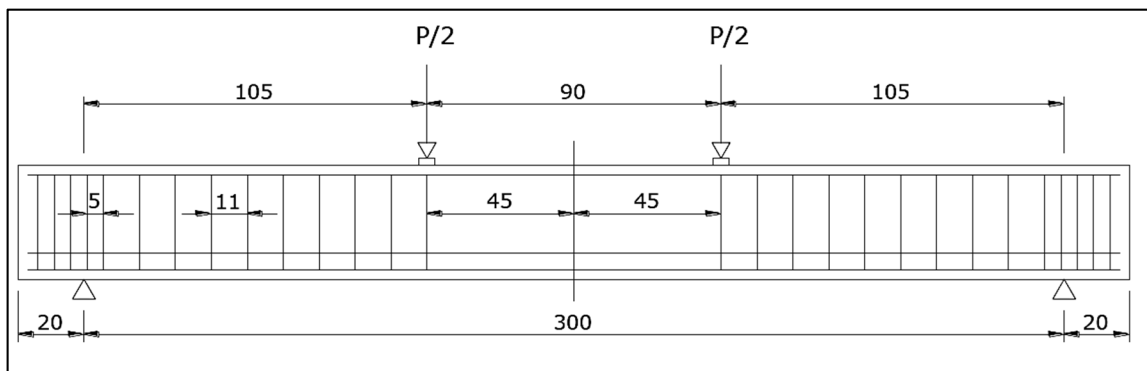


Figura 55: Representação da viga ET1, em cm [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1962)]

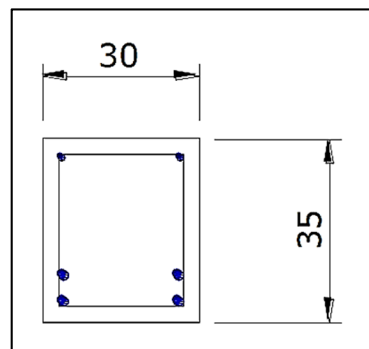


Figura 56: Secção da viga ET1, em cm [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1962)]

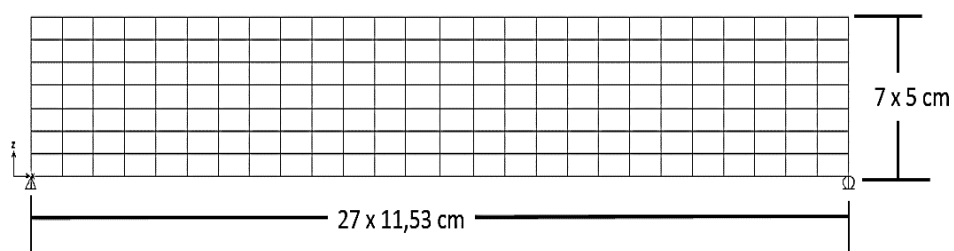


Figura 57: Discretização adotada para a análise numérica da viga ET1

### 3.4.1.1 Parâmetros dos materiais empregados

A resistência medida experimentalmente foi a resistência cúbica  $f_{cub}=28,5$  MPa e, no programa SAP2000, os valores utilizados foram:

Módulo de elasticidade:  $E_c= 32,00$  GPa; Resistência à compressão:  $f_c=24,23$  MPa; Resistência a tração:  $f_t=2,10$  MPa; Peso específico  $w=25,00$  kN/m<sup>3</sup>.

Para o concreto armado fissurado por tração, empregou-se o modelo de fissuração distribuída (SAP2000-MFD), Figura 58, com os valores dos pontos da curva de amolecimento mostrados na tabela 4.

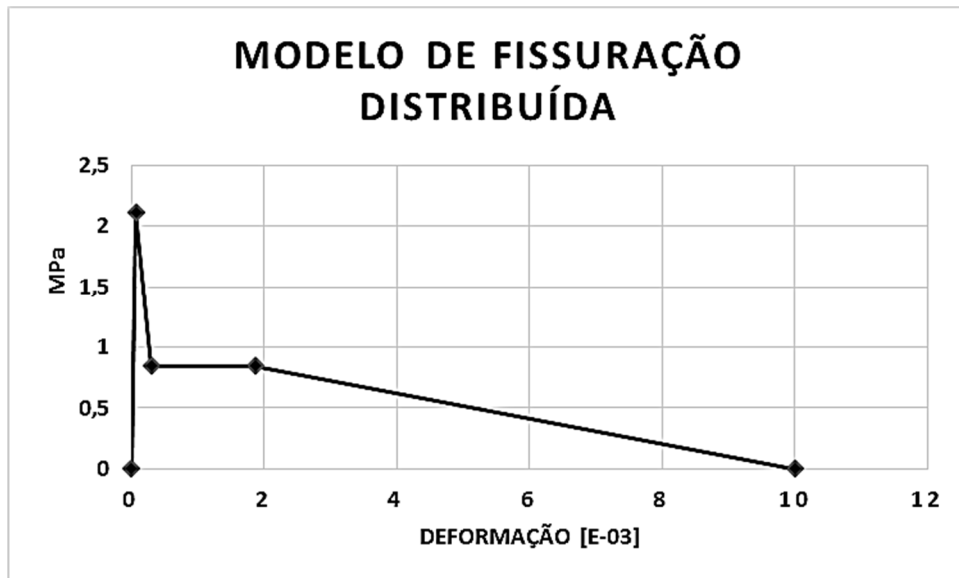


Figura 58: Digrama de Tensão-Deformação do MFD para a viga ET1

Tabela 4: Parâmetros de amolecimento do concreto armado fissurado, viga ET1

Deformação	Tensão (MPa)	MFD
7,00E-5	2,10	
3,06E-4	0,84	Primeiro trecho
2,21E-3	0,84	Segundo trecho
1,00E-2	0	Terceiro trecho

A viga ET1 foi simulada no SAP2000 com dois modelos de amolecimento:

- SAP2000-AS: com amolecimento linear do concreto simples;
- SAP2000-MFD: com o modelo de fissuração proposto por D'AVILA (2003).

Nas Figuras 59 e 60 mostram-se os diagramas de tensão-deformação para o concreto segundo o modelo SAP2000-AS e SAP2000-MFD respectivamente.

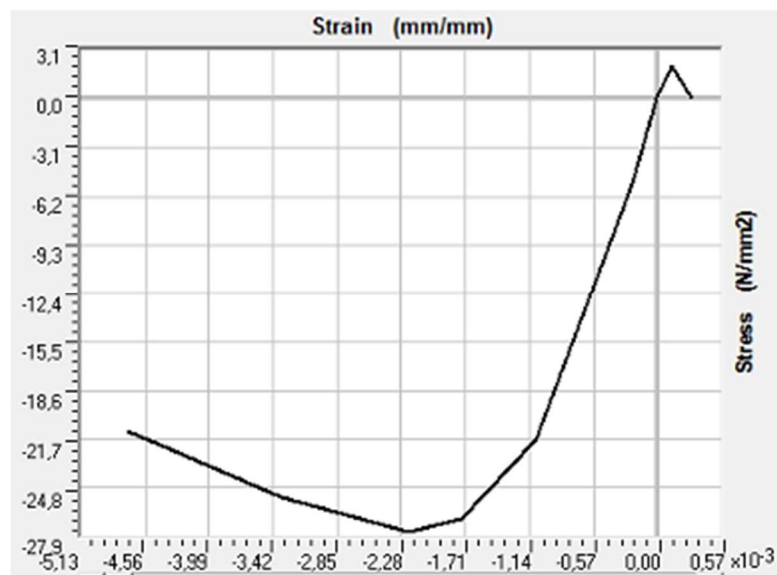


Figura 59: Diagrama de tensão-deformação para o concreto do modelo SAP2000-AS

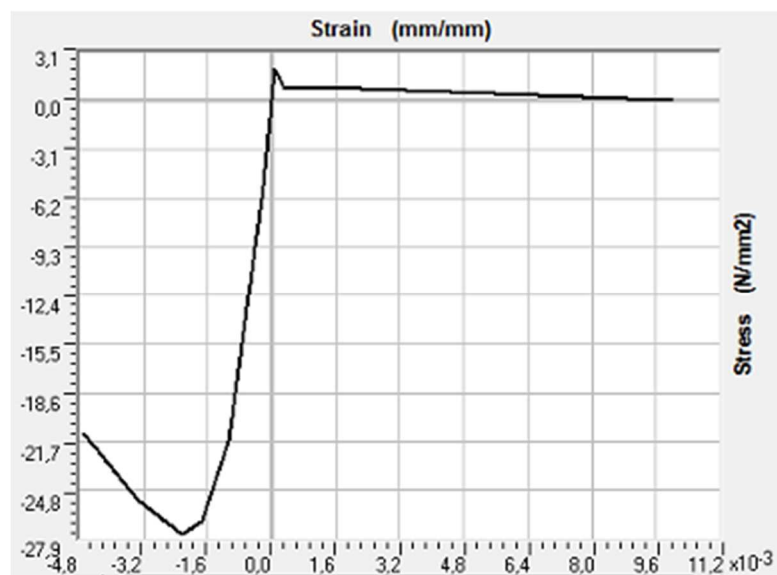


Figura 60: Diagrama de tensão-deformação para o concreto do modelo SAP2000-MFD

As armaduras longitudinais inferiores consistem em quatro barras de 20mm de diâmetro ( $f_y = 428$  MPa, aço classe B) e as superiores de duas barras de 8mm de diâmetro ( $f_y = 465$  MPa, aço classe B). Os estribos verticais são barras de 6 mm de diâmetro ( $f_y = 320$  MPa, aço classe A). Cujos espaçamento podem ser visualizados na Figura 55.

#### 3.4.1.2 Análises numéricas

Foram realizadas análises de carga-deslocamento vertical no vão central. Na Figura 61 têm-se a comparação de resultados dos dois modelos constitutivos para o concreto pós-fissuração.

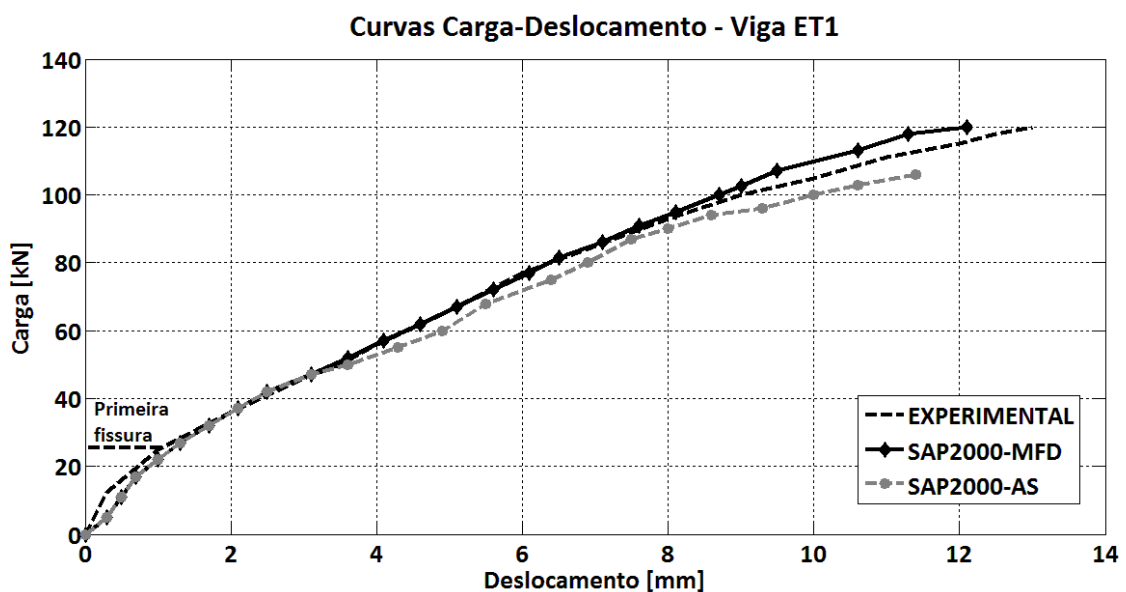


Figura 61: Curvas Carga-Deslocamento vertical utilizando SAP2000, viga ET1

O modelo SAP2000-MFD apresenta um comportamento na deflexão bastante próximo ao experimental se comparando com o SAP2000-AS que mostra ser mais flexível.

A seguir, a Figura 62 mostra a curva Experimental, a curva DIANA realizado por D'AVILA (2003) e a curva da análise SAP2000-MFD.

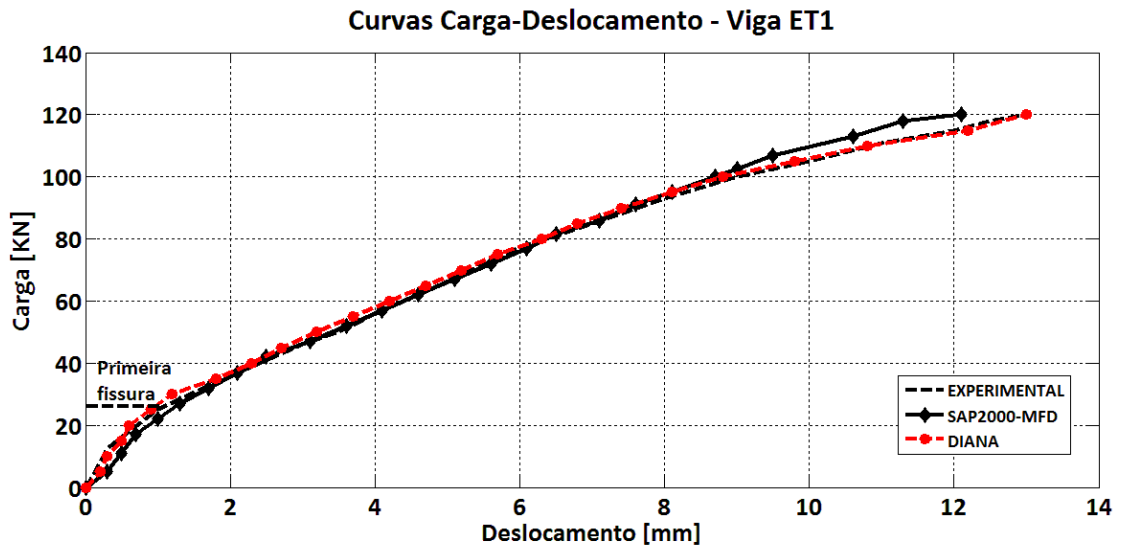


Figura 62: Curvas Carga-Deslocamento vertical, viga ET1

Os resultados das curvas dos modelos numéricos mostrados na Figura 62 indicam o bom comportamento de ambos, se comparados com o experimental. As diferenças não são significativas, mas ressalta-se que o modelo DIANA foi bastante próximo ao resultado Experimental.

### 3.4.2 Viga hiperestática HH5

Continuando com as análises que visam testar o desenvolvimento do modelo de fissuração proposto por D'AVILA (2003), realizaram-se análises utilizando a viga hiperestática HH5, ensaiada por LEONHARTD e WALTHER (1965). Nesta, determinou-se a curva carga-deslocamento vertical máximo e tensão da armadura-carga aplicada.

A viga HH5 possui 650 cm de comprimento e consiste em uma viga contínua de dois vãos iguais, e cargas concentradas e simétricas.

Na Figura 63 mostra-se a viga HH5.

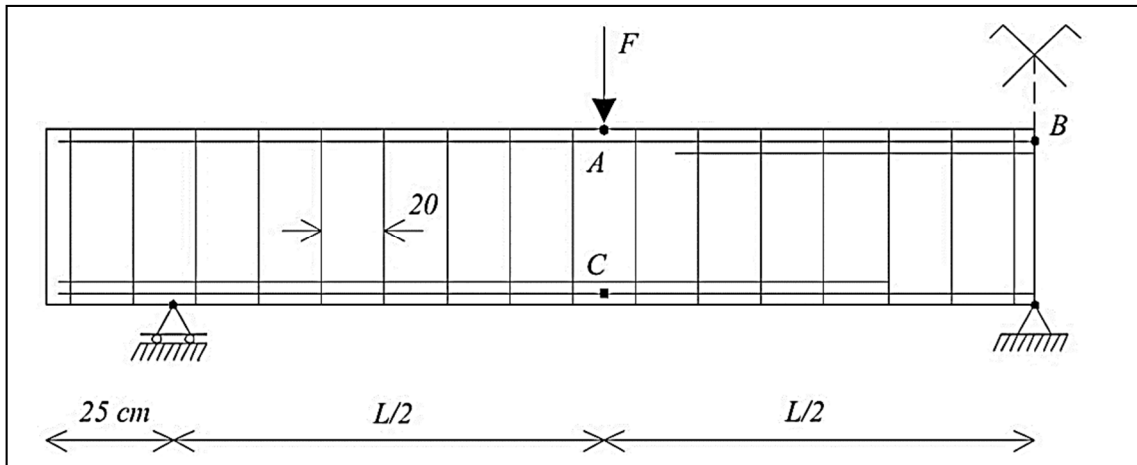


Figura 63: Parte simétrica da viga HH5 [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1965)]

Os valores para a viga HH5 são: L de 300 cm, diâmetros das armaduras longitudinais de 14mm e das transversais de 6mm.

Na Figura 64 é mostrada a seção transversal da viga HH5. A malha de elementos finitos, com 288 elementos de casca, encontra-se na Figura 65.

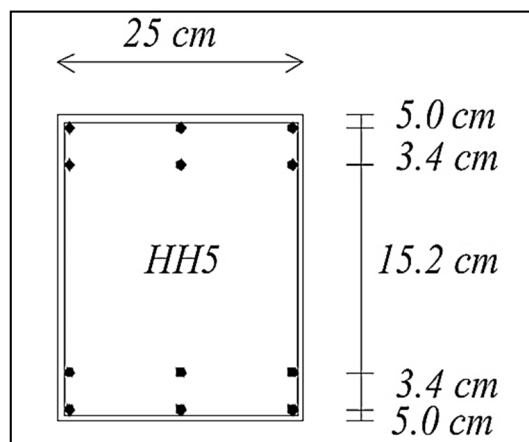


Figura 64: Seção da viga HH5 [Fonte: LEONHARTD e WALTHER (1965)]

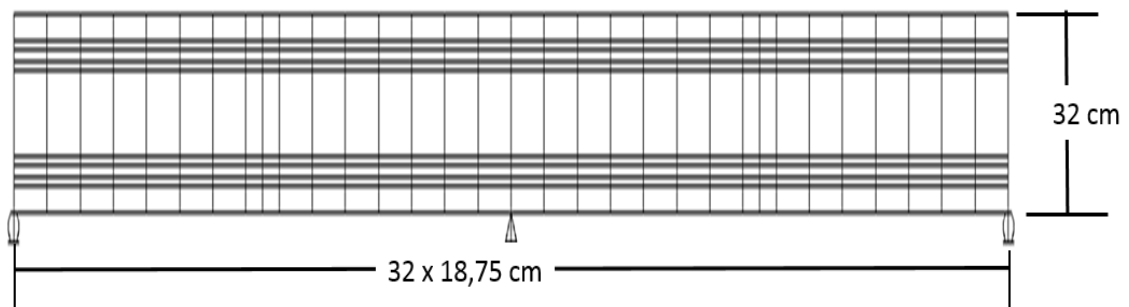


Figura 65: Discretização adotada para a análise numérica da viga HH5

### 3.4.2.1 Parâmetros dos materiais empregados

A resistência medida experimentalmente foi a resistência cúbica  $f_{cub}=36,3$  MPa e, no programa SAP20000, os valores utilizados foram:

Módulo de elasticidade:  $E_c= 34,00$  GPa; Resistência à compressão:  $f_c=30,8$  MPa; Resistência a tração:  $f_t=3,45$  MPa; Peso específico  $w=25,00$  kN/m<sup>3</sup>.

Para concreto armado fissurado emprega-se o modelo de fissuração distribuída (SAP2000-MFD), Figura 66, com os valores dos pontos da curva de amolecimento mostrado na tabela 5 a seguir.

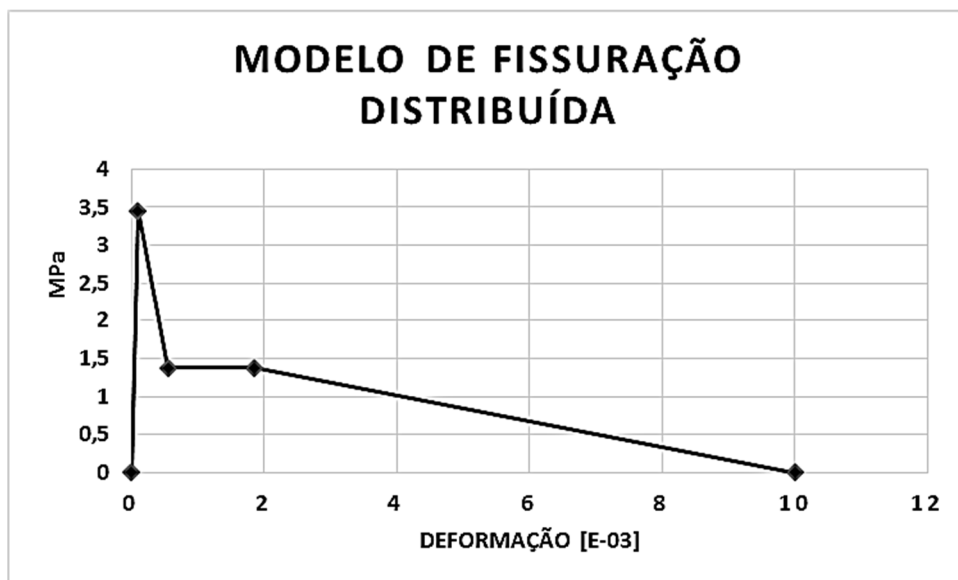


Figura 66: Diagrama Tensão-Deformação do MFD para a viga HH5

Tabela 5: Parâmetros de amolecimento do concreto armado fissurado, viga HH5

Deformação	Tensão (MPa)	MFD
1,01E-4	3,45	
5,50E-4	1,38	Primeiro trecho
2,12E-3	1,38	Segundo trecho
1,00E-2	0	Terceiro trecho

As armaduras longitudinais, superior e inferior, consistem em seis barras de 14 mm de diâmetro ( $f_y = 417$  MPa, aço classe B). Os estribos verticais têm 8 mm de diâmetro ( $f_y = 371$  MPa, aço classe A) e são espaçados de 20 cm.

#### 3.4.2.2 Análises numéricas

Os resultados das análises numéricas, realizadas com o modelo de fissuração distribuída, encontram-se, na Figura 67, definidos como SAP2000-MFD. Nesta, apresenta-se a curva experimental relativa à carga-deslocamento vertical máximo, juntamente com os resultados obtidos pelo programa DIANA, conforme D'AVILA (2003).

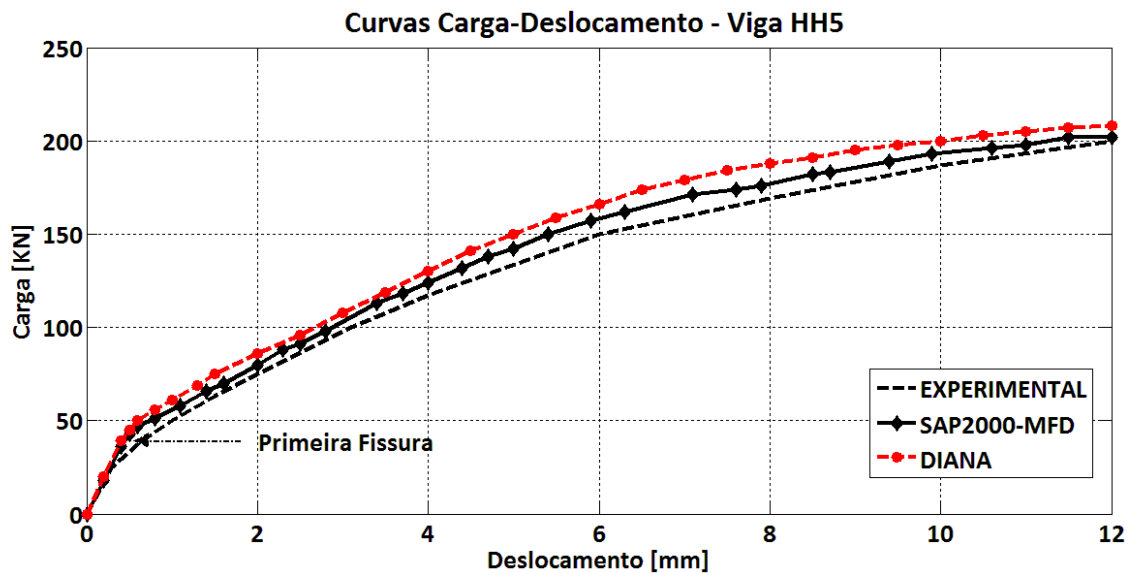


Figura 67: Curvas Carga-Deslocamento vertical, viga HH5

Na figura acima, observa-se que resultados numéricos de DIANA e SAP2000-MFD representam adequadamente o comportamento experimental da viga. Nota-se, todavia, que os resultados do SAP2000-MFD são um pouco mais flexíveis se comparados com os resultados do programa DIANA.

Comparam-se, também, as tensões em dois pontos de maior concentração das armaduras tracionadas. As curvas de tensão na armadura-carga aplicada, referentes ao ponto C (armadura inferior sob a carga), encontram-se na Figura 68, e referentes ao ponto B (armadura superior sobre o apoio) na Figura 69.



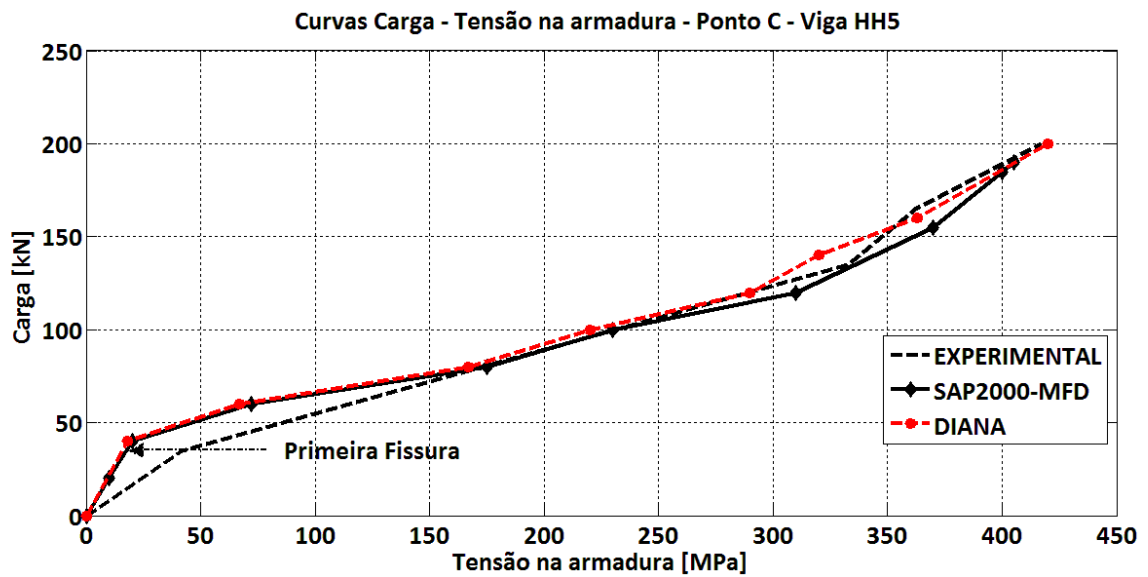


Figura 68: Curvas Carga-Tensão na armadura no ponto C - Figura 63 - viga HH5

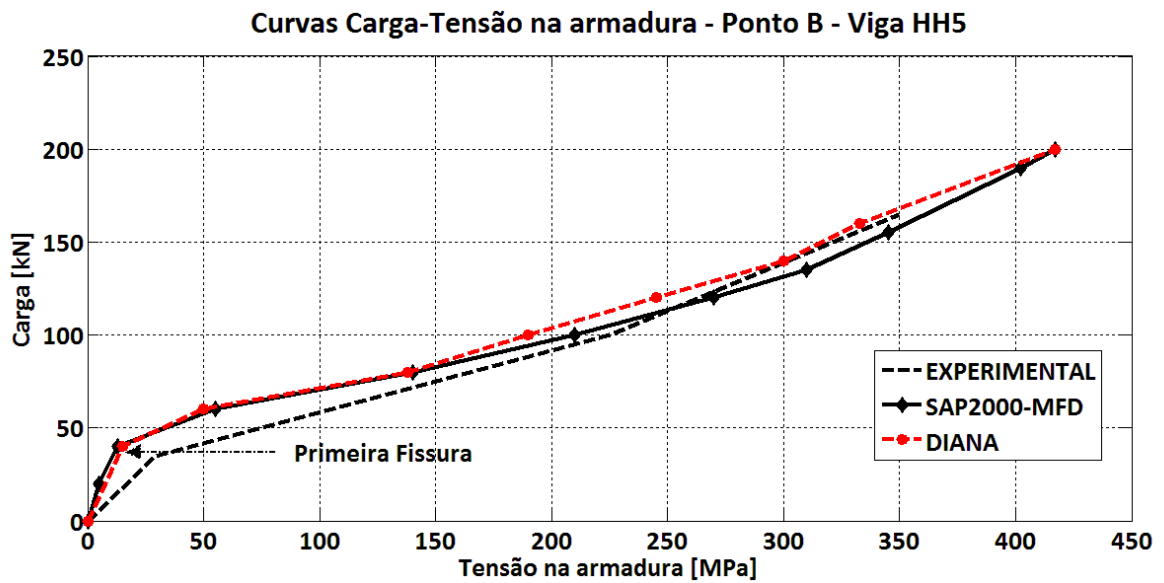


Figura 69: Curvas Carga-Tensão na armadura no ponto B - Figura 63 - viga HH5

Os resultados mostrados acima indicam que ambos os modelos apresentam uma boa resposta na representação do comportamento experimental destas vigas.

## 4 MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS

Neste capítulo são estabelecidas as características do modelo numérico, a ser utilizado para representar uma seção transversal de laje nervurada, que permitem analisar de forma realística os efeitos de flexão em sistemas estruturais desta natureza. Ao longo do mesmo, são efetuadas validações do modelo, pela comparação de seus resultados com os de algumas lajes nervuradas testadas experimentalmente em laboratório.

### 4.1 CONTRIBUIÇÕES DE ESTUDOS ANTERIORES

Na revisão bibliográfica do Capítulo 2, encontram-se os estudos de OLIVEIRA et al (2000), ARAÚJO (2003), DIAS e PAIVA (2007), DONIN (2007) e SCHWETZ (2011) que realizaram análises numéricas de lajes nervuradas via elementos finitos, mas todos com diferentes considerações para seus modelos numéricos. As considerações sobre a geometria adotada, tipo de elemento, comportamento dos materiais e métodos de análise, são de particular interesse para o presente trabalho.

#### 4.1.1 Tipo de elemento

Os elementos de casca utilizados por DIAS e PAIVA (2007) e SCHWETZ (2011), para representar a capa e também as nervuras, mostraram-se adequados para a construção de seções de lajes nervuradas. Na Figura 70 mostra-se a geometria típica da seção a ser utilizada.

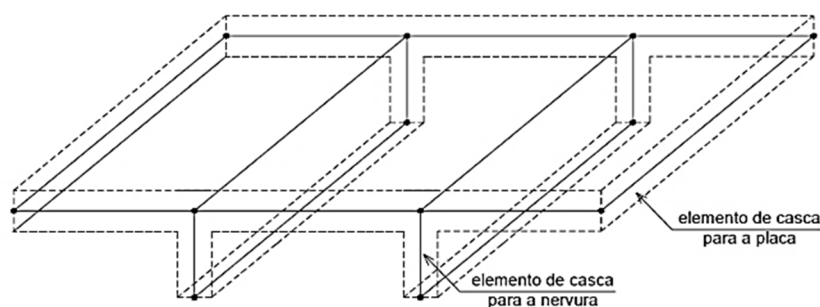


Figura 70: Modelo numérico da seção de lajes

Podem-se ressaltar como principais propriedades do modelo numérico construído com estes elementos de área: a consideração da excentricidade entre os eixos da capa e da nervura; formulação para a determinação de esforços pela teoria de placas de MINDLIN (1951) e a consideração da heterogeneidade dos materiais dentro do elemento, permitindo introduzir o

concreto e o aço separadamente por camadas, com suas respectivas dimensões na seção transversal, SCHWETZ (2011).

#### 4.1.2 Tipo de análise

A utilização de uma análise não-linear física permite a consideração de uma curva tensão-deformação que represente de forma mais realística a relação constitutiva do concreto, o que influencia consideravelmente a determinação de esforços e deslocamentos em uma estrutura.

Esta análise pode se fazer necessária mesmo quando as estruturas estão submetidas a baixos níveis de carregamento, o que se traduz em resultados mais próximos ao comportamento real, se comparado com as análises lineares efetuadas em DIAS e PAIVA (2007) e DONIN (2007).

Nas análises do tipo não linear, OLIVEIRA et al (2000) e REBÊLO e DUARTE FILHO (2007) utilizam métodos clássicos: Formulação empírica proposta por BRANSON e MOMENTO-CURVATURA, ambos descritos no item 2.3.2, sendo estes métodos aplicáveis para material homogêneo. Ambos alcançaram desempenhos bastante limitados para as análises pós-fissuração.

Outro método simplificado é apresentado por SCHWETZ (2011), que considera a análise não linear a partir da curva tensão-deformação do concreto. Definindo a tração do concreto por um coeficiente de redução do valor máximo de resistência à tração, que é mantido constante ao longo da deformação. A principal dificuldade está em obter o coeficiente apropriado para cada caso de análise.

ARAÚJO (2003) utilizou o método incremental-iterativo para o modelo de fissuração distribuído do concreto, baseado no Código Modelo CEB-FIP-90 (1992). Os resultados das análises atingiram bom desempenho para o estado do concreto fissurado (Estádio II).

Ressalta-se, ainda, que análises que consideram um modelo de fissuração mais elaborado e que, inclusive, levem em conta a colaboração do concreto intacto entre fissuras são de grande relevância. Por conta disso, neste trabalho, optou-se pela consideração de análises não lineares físicas com o modelo de fissuração apresentado no item 3.2.

## 4.2 O MODELO NUMÉRICO E SEUS RESULTADOS DE ANÁLISE

A partir das contribuições de estudos anteriores apresentadas no item acima, é construído um modelo numérico que pretende simular o comportamento de lajes nervuradas de concreto armado, utilizando as características destacadas no Capítulo 3.

### 4.2.1 O elemento finito

Os elementos que compõem a seção transversal do modelo numérico proposto são elementos de casca *Shell Layered*, descritos no item 3.3.2, do tipo Casca Espessa, com a formulação de esforços apresentada no item 3.3.4. Este elemento permite considerar o concreto armado através de camadas como se indica na Figura 71.

Dentre as diversas categorias disponíveis, optou-se pelo tipo *Shell* que permite cinco graus de liberdade em cada nó, tendo todos os deslocamentos e giros possíveis para o elemento de casca.

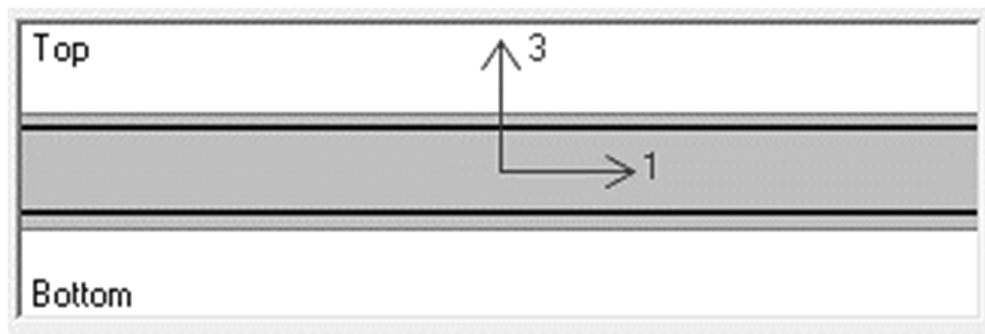


Figura 71: Elemento *Shell Layered* com duas camadas para aço [Fonte: CSI (2013)]

A geometria básica de uma seção transversal de laje nervurada, como mostra a Figura 70, é representada por elementos *Shell Layered* dispostos na horizontal para a capa e na vertical para as nervuras.

Os elementos *Shell Layered* utilizados foram de quadrangulares. Na integração numérica foram utilizados 3x3 pontos de Gauss para a camada de concreto e 2x2 para as camadas de armadura.

As propriedades utilizadas para a representação dos materiais componentes, concreto e aço, são as descritas no item 3.3.1.

#### 4.2.2 A análise numérica e seus resultados

Análises não lineares físicas são realizadas pelo programa SAP2000, cujas características estão apresentadas no item 3.3.5.

A apresentação dos resultados, na forma de gráficos, é feita para características pontuais ou para seções transversais, como:

- I. Curva Carga-deslocamento vertical;
- II. Curva Carga-Tensão na armadura;
- III. Curva Carga-Momento fletor da seção;
- IV. Curva Elástica.

#### 4.3 ANÁLISE NUMÉRICA DAS LAJES NERVURADAS DE ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

Do estudo experimental de lajes nervuradas de concreto armado apresentado por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), três modelos, S2, S5 e S6 foram escolhidos com o propósito de validar análises numéricas obtidas a partir do modelo numérico proposto.

Estas três lajes são quadradas, simplesmente apoiadas nos quatro bordos e todas com 154 cm de lado. Possuem uma capa de espessura constante de 2 cm e um igual número de oito nervuras internas, equidistantes, por direção. As lajes diferem entre si apenas com relação às dimensões das seções das nervuras, que se indicam mais adiante

Na Figura 72, apresentam-se os seguintes itens:

- a) A geometria básica das lajes. No plano de corte B-B (Section B-B) a distância S é de 167 mm;
- b) A placa rígida centrada na laje, de dimensões 300x300mm que serve para a transmissão da carga aplicada no centro da placa rígida sobre a laje;
- c) O detalhamento das armaduras (*Reinforcement detail*) indica nas nervuras uma barra longitudinal de 8mm de diâmetro com recobrimento de 8mm da superfície inferior e para a capa uma grelha formada por barras de 0,7mm de diâmetro separados cada

25mm em ambas direções. Os valores  $h$  da altura e  $w$  da base da nervura se mostra na tabela 6.

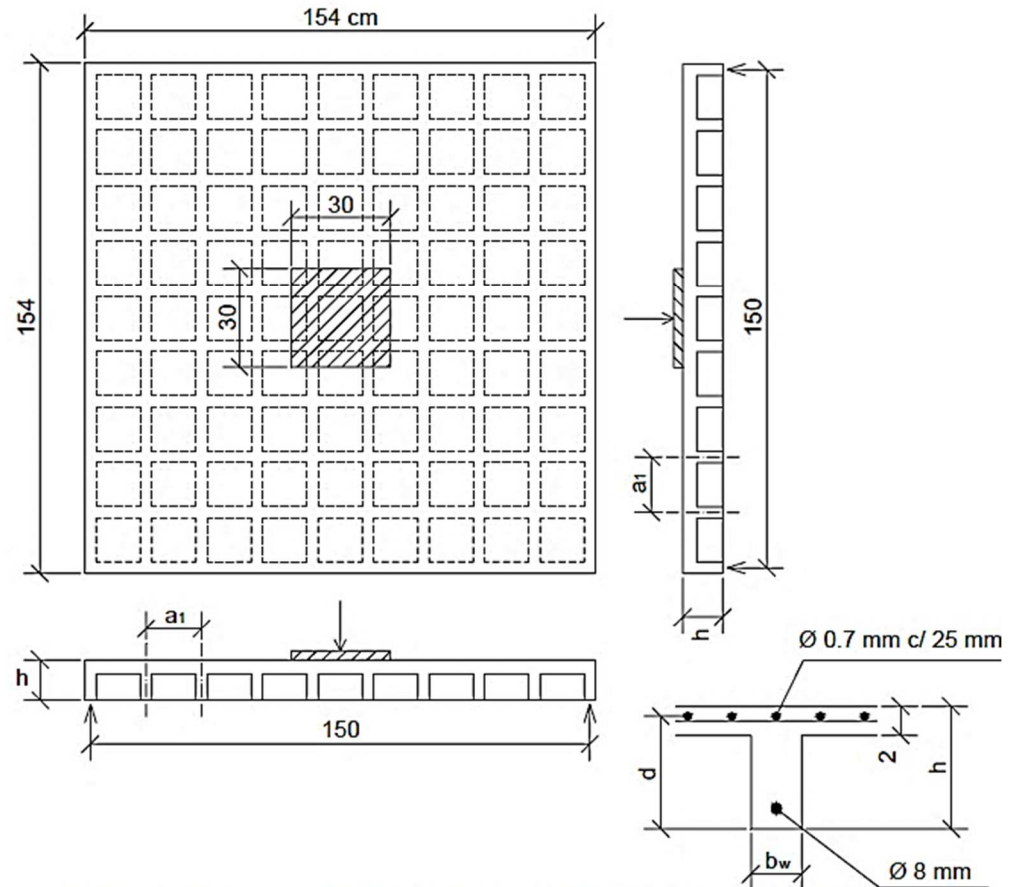


Figura 72: (a) Geometria básica das lajes nervuradas em cm, (b) placa rígida para transmissão da carga e (c) detalhe das armaduras

Tabela 6: Dimensões de seção das lajes nervuradas ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

Dimensões de seção das lajes de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)		
	Largura da nervura	Altura da total da laje
Laje	w	h
	mm	mm
S2	52	95
S5	57	125
S6	47	65

### 4.3.1 Dados para as análises numéricas

Os dados de entrada para as análises não lineares, utilizando o programa SAP2000, são apresentados e divididos da seguinte forma:

#### a) Materiais

Para o concreto fissurado os valores de tensão-deformação correspondem ao diagrama tri-linear do modelo de fissuração distribuída proposto por D'AVILA (2003) e mostrado na tabela 7. A Figura 73 mostra o digrama tensão-deformação do modelo utilizado na nervura S2;

Os valores de Módulo de Elasticidade e Resistência à tração são obtidos utilizando as formulações presentes na NBR 6118:2007, a partir da resistência caraterística do concreto,  $f_{ck}=30$  MPa. Para os três modelos têm-se as seguintes caraterísticas:

$E_{ci}$  - Módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto, equação 15,

$$E_{ci} = 5600 \cdot (f_{ck})^{\frac{1}{2}} = 30672,46 \text{ MPa} \quad (15)$$

$E_c$  - Módulo de elasticidade secante do concreto, equação 16,

$$E_c = 0,85 \cdot E_{ci} = 26071,6 \text{ MPa} \quad (16)$$

Resistência à tração segundo a NBR 6118:2007, equação 17,

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} = 2,90 \text{ MPa} \quad (17)$$

As propriedades do aço utilizado foram: Módulo de elasticidade  $E_s=210000$  MPa; Tensão de escoamento  $f_{y,s}=400$  MPa e Tensão última de 420 MPa.

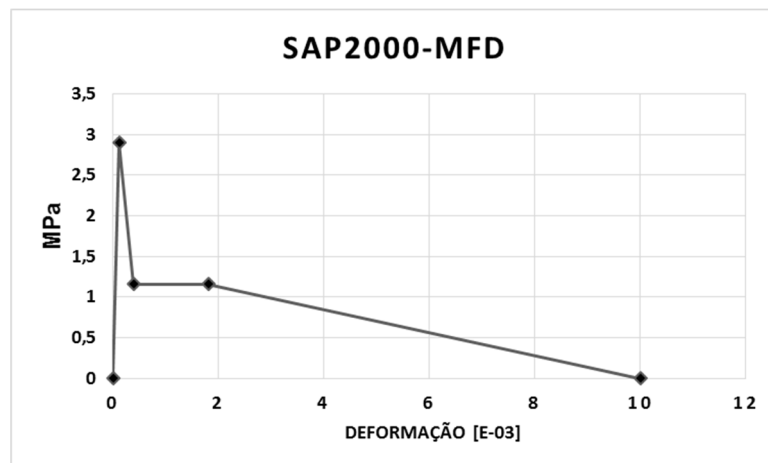


Figura 73: Diagrama tensão-deformação do MFD para a nervura – S2

Tabela 7: Valores de tensão-deformação para o diagrama tri-linear para lajes de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

Laje Nervurada S2		Laje Nervurada S5		Laje Nervurada S6		
Deformação	Tensão	Deformação	Tensão	Deformação	Tensão	
	MPa		MPa		MPa	
1,11E-04	2,90	1,11E-04	2,90	1,11E-04	2,90	
3,86E-04	1,16	4,98E-04	1,16	2,81E-04	1,16	1°Trecho
1,80E-03	1,16	1,75E-03	1,16	1,84E-03	1,16	2°Trecho
1,00E-02	0	1,00E-02	0	1,00E-02	0	3°Trecho

Tabela 8: Parâmetros dos elementos *Shell Layered* utilizados

Elemento de área	Número de malhas	Número de elementos	Nome por camada	Espesura mm	Tipo	Pontos de Gauss	Material	Ângulo
Capa	1	324	ConcretoC	20	Shell	3	Concreto	0
			Rebar1C	0,0145	Shell	2	Aço	0
			Rebar2C	0,0145	Shell	2	Aço	90
Nervura	20	216	ConcretoN1	*	Shell	3	Concreto	0
			RebarN	**	Shell	2	Aço	0
	* Variável em função as dimensões da Tabela 6							
	** Valor em função a taxa da armadura							

A seguir, nas Figuras 74 e 75, mostram-se as malhas de elementos finitos para a capa e as nervuras respectivamente.

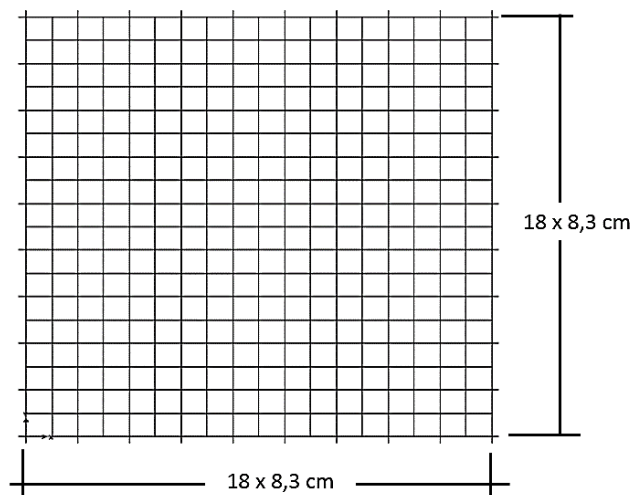


Figura 74: Discretização adotada para a capa, lajes S2, S5 e S6



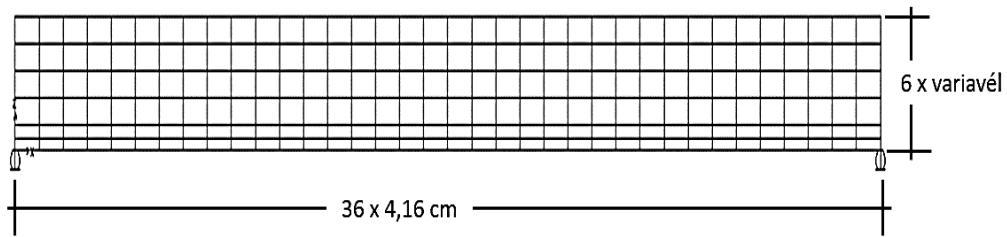


Figura 75: Discretização adotada para as nervuras, lajes S2, S5 e S6

#### b) Carregamento

A aplicação da carga foi feita por etapas, com incremento de 5 kN por etapa, distribuída pela placa rígida centrada na laje.

#### 4.3.2 Comparação de resultados

Os resultados das análises de cada uma das três lajes são apresentados nas Figuras 76 a 78. Nestas figuras encontram-se comparadas as seguintes curvas:

- Valores experimentais apresentados por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), representados pela curva Experimental;
- Valores do modelo numérico realizado por ARAÚJO (2003), representado pela curva ARAUJO;
- SAP2000 Valores obtidos através das análises do modelo numérico utilizando o programa, representados pela curva SAP2000-MFD.

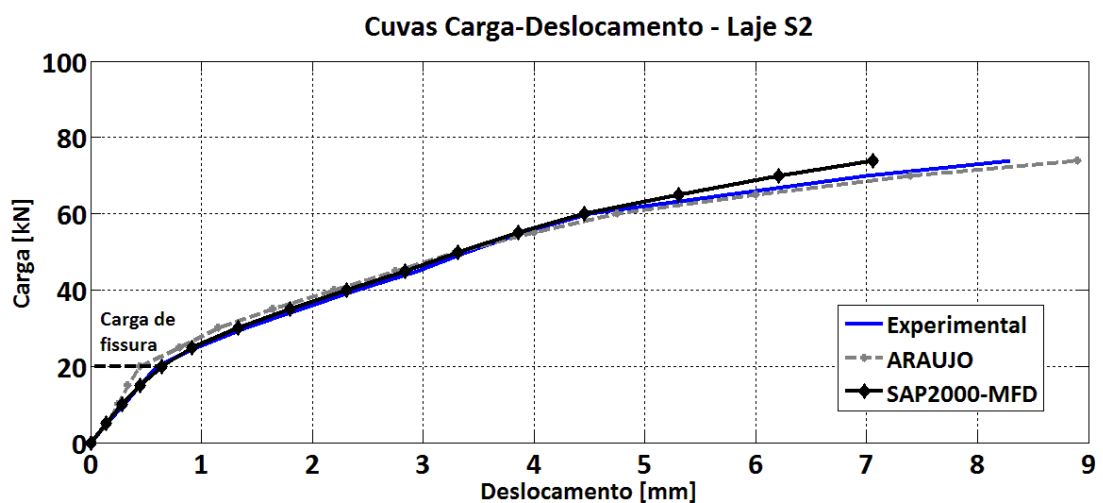


Figura 76: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S2

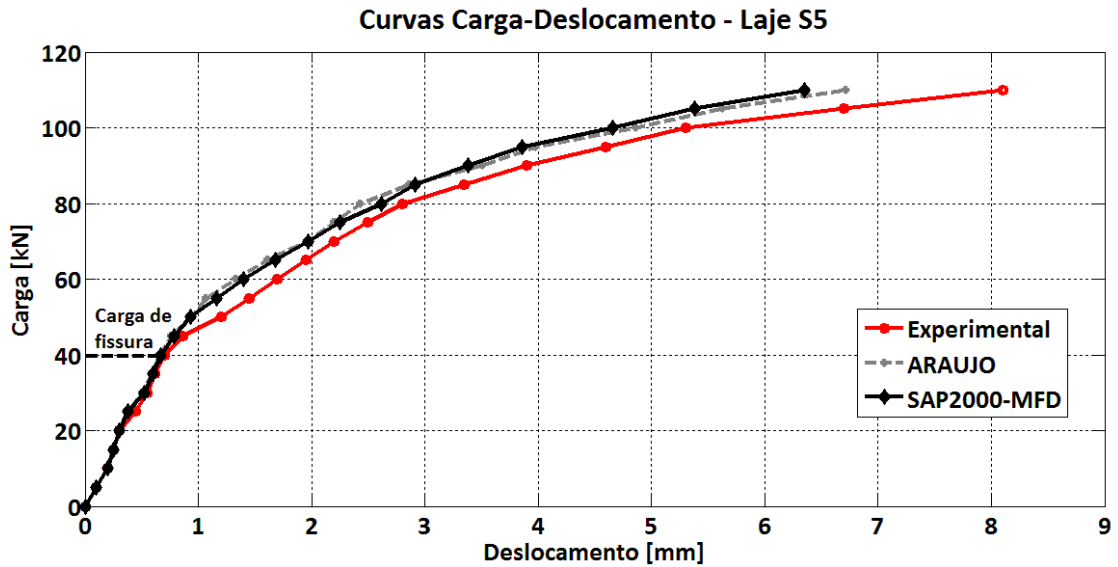


Figura 77: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S5

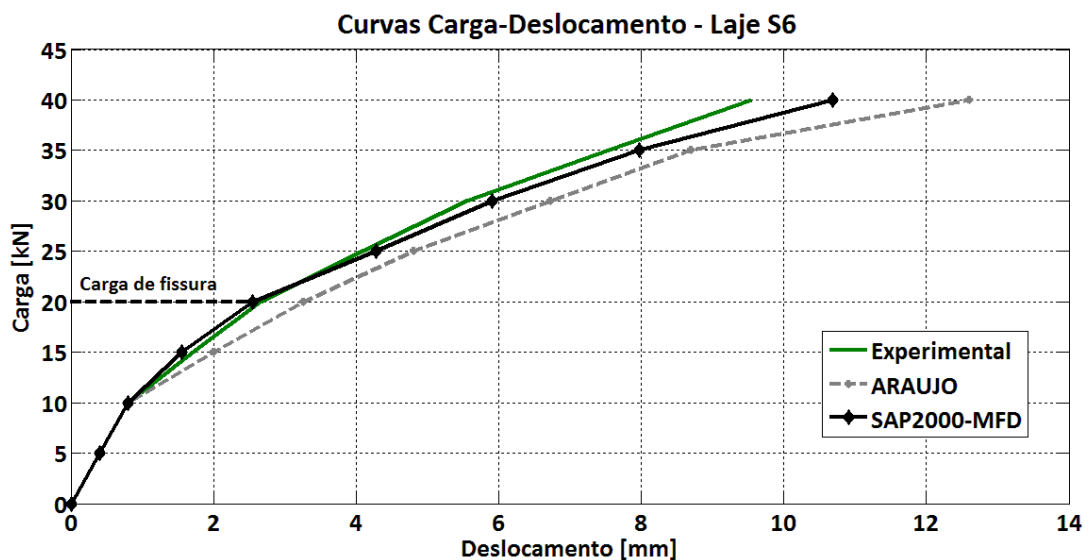


Figura 78: Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo da laje S6

Em todas as curvas mostradas nas Figuras 76 a 78 observa-se que, para cada laje nervurada, os resultados apresentados pelo modelo SAP2000-MFD tem o mesmo comportamento observado pela resposta EXPERIMENTAL e pela análise de ARAUJO.

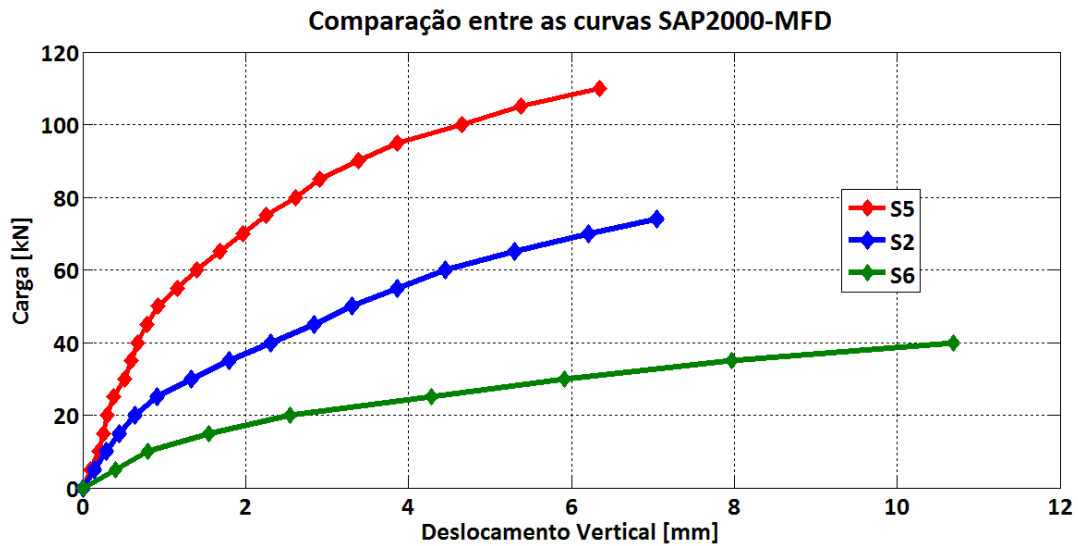


Figura 79: Curvas Carga-Deslocamento máximas das lajes S2, S5 e S6 por SAP2000-MFD

Por último, na Figura 79, apresentam-se os valores de análises com o modelo SAP2000-MFD para as três lajes, entre as quais varia apenas a área de concreto das nervuras. Verifica-se que o modelo representa adequadamente o esperado crescimento de rigidez entre as lajes, em função de suas diferentes dimensões geométricas, ainda que com mesmas armaduras.

#### 4.4 ANÁLISE NUMÉRICA DA LAJE NERVURADA DE BORGES (2009)

A laje experimental de referência (LMP-REF) de BORGES (2009) consiste em uma laje quadrada de 1800 mm de lado. A capa da laje tem espessura de 40 mm e as quatro nervuras, em cada direção, têm largura média 70 mm e altura de 150 mm, distanciadas de 533 mm, como mostra a Figura 80 (a) a seguir.

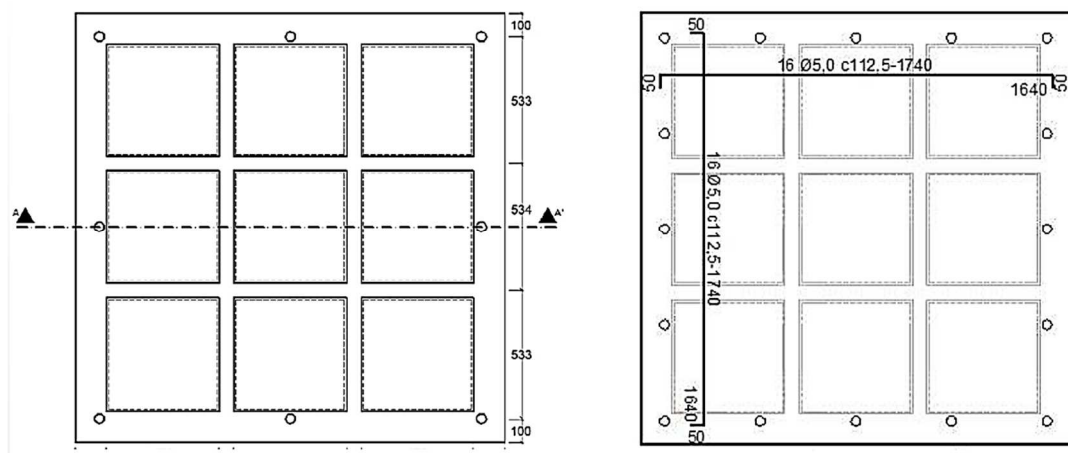


Figura 80: (a) Dimensões da laje REF em mm (b) Detalhamento das armaduras da placa

[Fonte: BORGES (2009)]

As armaduras da laje são as seguintes: a capa contém uma malha de armadura positiva para a flexão, de aço CA 60 de Ø5 mm, a cada 150 mm, em ambas direções como se indica na Figura 80 (b). As armaduras para as nervuras, aço CA 50 de Ø10 mm, são posicionadas na parte inferior das nervuras, sendo uma barra por nervura. Não há armaduras para cisalhamento.

#### 4.4.1 Dados para a análise numérica

Os dados de entrada para as análises não lineares, utilizando o programa SAP2000, são apresentados e divididos da seguinte forma:

##### a) Materiais

Para o concreto, as propriedades mecânicas utilizadas no programa SAP2000 foram determinadas a partir dos valores experimentais citados a seguir:

Resistência à compressão:  $f_c=33,8$  MPa; Módulo de elasticidade:  $E_c=26100$  MPa e resistência a tração média:  $f_{t,m}=3,0$  MPa.

Os valores de tensão-deformação para o diagrama tri-linear foram obtidos empregando o modelo de fissuração distribuída proposto por D'AVILA (2003) e estão apresentados na Tabela 9. Na Figura 81 mostra-se o Diagrama tensão-deformação do MFD para as nervuras.

Tabela 9: Valores de tensão-deformação para o diagrama tri-linear para a laje LMP-REF

Valores do MFD para a nervura		Valores do MFD para a capa	
Deformação	Tensão	Deformação	Tensão
	MPa		MPa
1,15E-04	3,00	1,15E-04	3,00
4,35E-04	1,20	7,83E-04	1,20
2,19E-03	1,20	2,04E-03	1,20
1,00E-02	0	1,00E-02	0

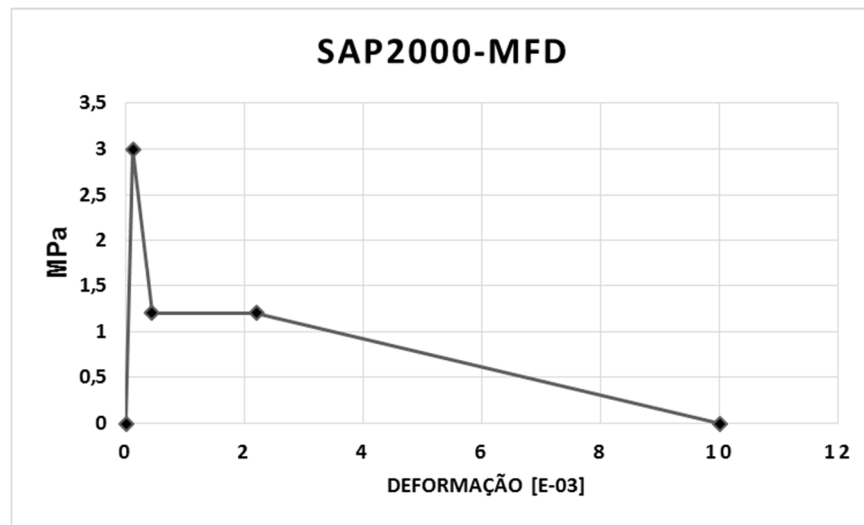


Figura 81: Diagrama tensão-deformação do MFD para a nervura – LMP-REF

As características do aço como apresentadas por BORGES (2009) são adotadas para o programa SAP2000:

Para a armadura de 5 mm de diâmetro os valores são: Módulo de elasticidade  $E_s = 261$  GPa; Tensão de escoamento  $f_{y,s} = 548$  MPa e Tensão última:  $f_u = 685$  MPa.

Para a armadura de 10 mm de diâmetro os valores são: Módulo de elasticidade  $E_s = 256$  GPa; Tensão de escoamento  $f_{y,s} = 579,2$  MPa e Tensão última:  $f_u = 726,2$  MPa.

A seguir, nas Figuras 82 e 83, mostram-se as malhas de elementos finitos para a capa, 324 elementos de casca, e nervuras, com 72 elementos de casca, respectivamente.

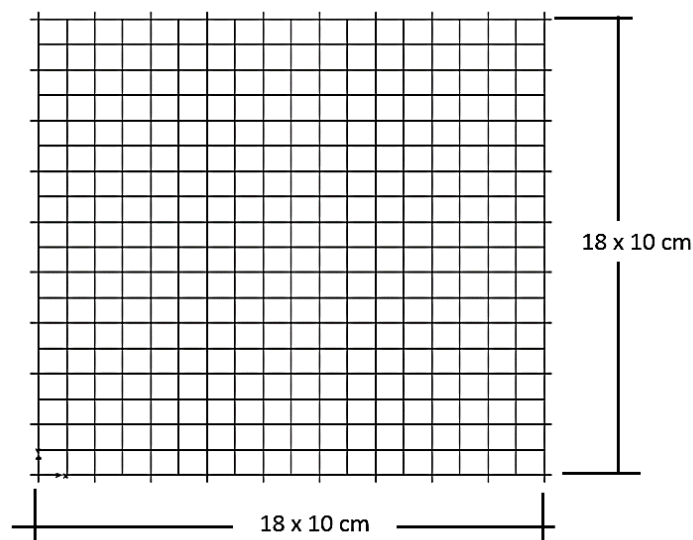


Figura 82: Discretização adotada para a capa, laje LMP-REF

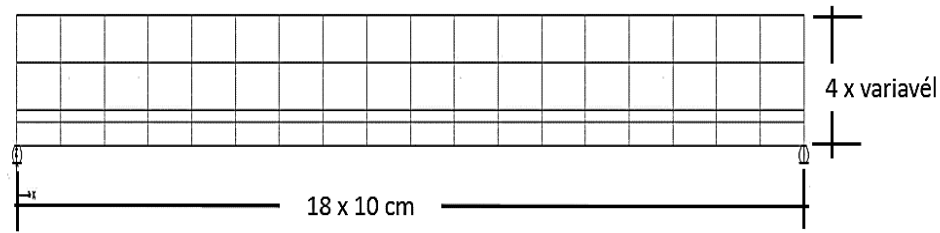


Figura 83: Discretização adotada para as nervuras, laje LMP-REF

#### b) Carregamento

O sistema de ensaio consistiu em uma laje apoiada em todos os bordos, através de quatro vigas metálicas fixadas em uma laje de reação. A carga foi aplicada por um sistema hidráulico e de forma incremental, com intervalos de 5 kN e dividida em quatro partes iguais aplicadas nos quatro pontos de interseção das nervuras.

#### 4.4.2 Comparação dos resultados

Os ensaios da laje LMP-REF apresentados por BORGES (2009) foram utilizados para a comparação com os resultados numéricos. Estes são: Carga-Deslocamento vertical no ponto R1, ver Figura 84 e Carga-Tensão na armadura tracionada, medida no ponto EA mostrado na Figura 85.

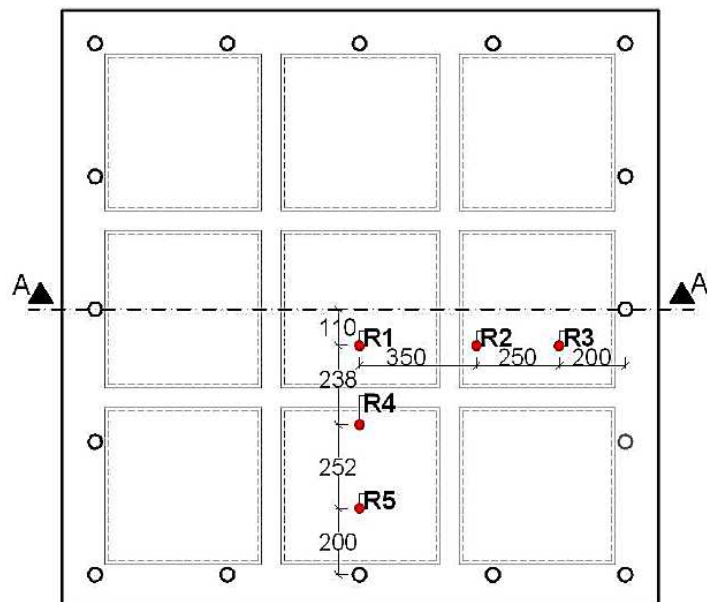


Figura 84: Esquema de posicionamentos dos deflectômetros [Fonte: BORGES (2009)]

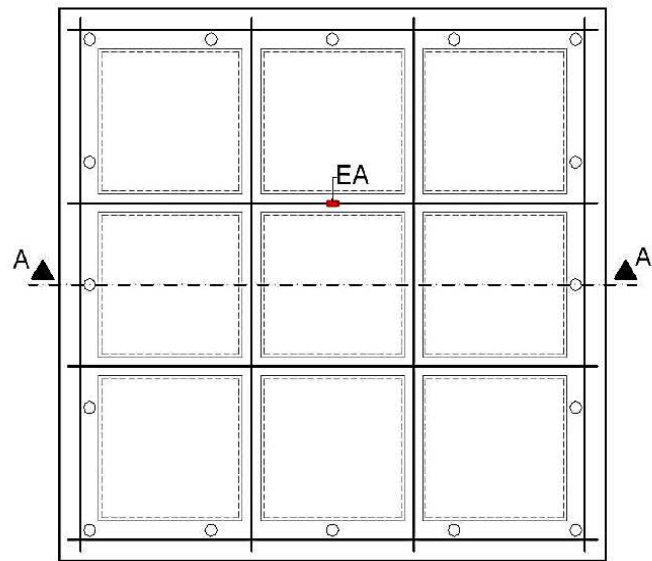


Figura 85: Posicionamento do extensômetro na armadura [Fonte: BORGES (2009)]

A seguir, nas Figuras 86 e 87, mostram-se os resultados numéricos comparados com os experimentais.

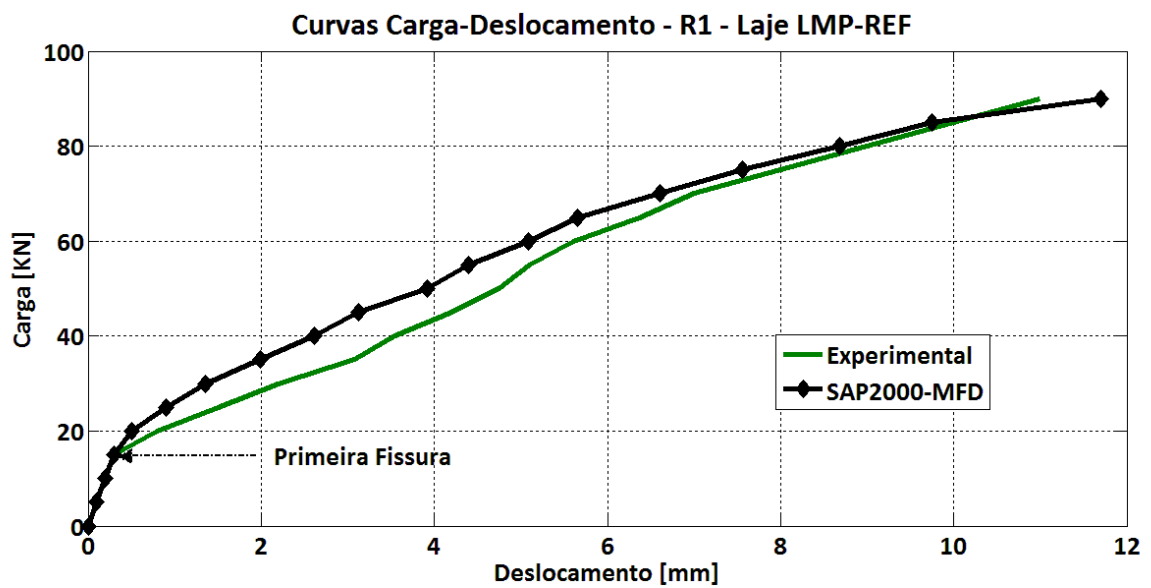


Figura 86: Curvas Carga-Deslocamento vertical – ponto R1 - LMP-REF

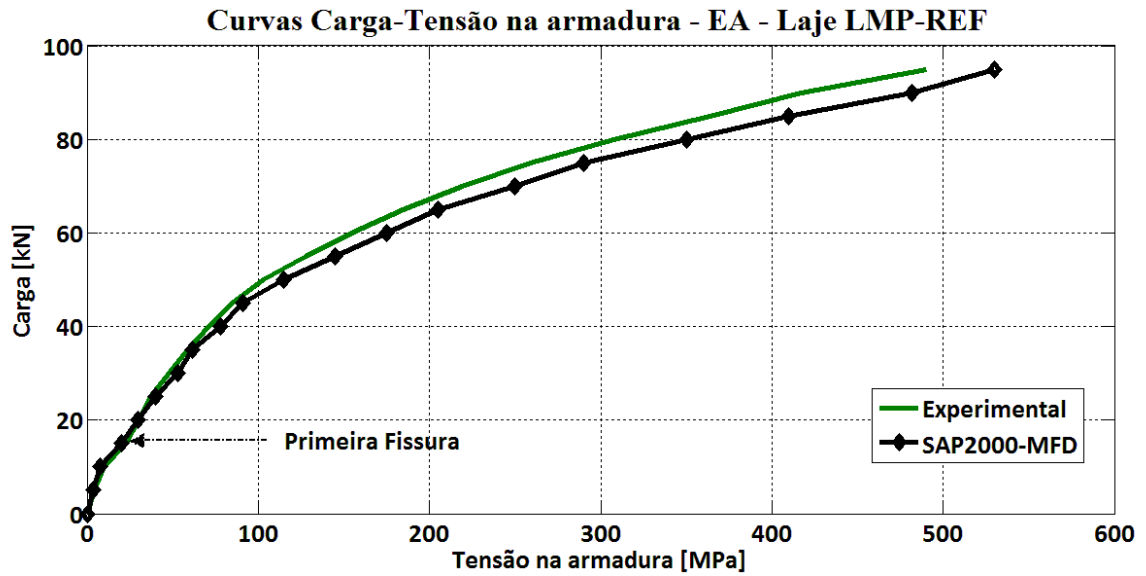


Figura 87: Curvas Carga-Tensão na armadura – ponto EA – LMP-REF

Os resultados apresentados nos dois estudos mostrados acima, tiveram o intuito de promover uma validação do comportamento do modelo numérico proposto. Pela análise destes resultados, conclui-se este capítulo com a certeza de que o modelo é adequado para representar o comportamento à flexão de lajes nervuradas, tanto para carregamentos em níveis de serviço como para situações de carregamentos excessivos.



## 5 ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS

O modelo numérico definido no capítulo 4 é empregado para a análise de lajes nervuradas ensaiadas experimentalmente, a fim de comparar os resultados obtidos nos ensaios com os da previsão numérica. Além disso, objetiva-se também verificar o comportamento destas lajes frente à grandes deflexões, examinando o desempenho do modelo nestas situações.

Primeiramente, no item 5.1, realizam-se as análises dos casos de estudo de SCHWETZ (2011), já apresentados no item 2.5, permitindo a comparação dos resultados numéricos com os experimentais.

No item 5.2 são apresentadas análises numéricas considerando a aplicação de carregamentos estáticos, crescentes e uniformemente distribuídos, com o intuito de alcançar grandes deflexões nas lajes de estudo. Neste caso, são avaliadas duas das lajes nervuradas monitoradas experimentalmente por SCHWETZ (2011) e o modelo experimental S2 de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), apresentado no item 2.4.3.

### 5.1 ANÁLISES NUMÉRICAS DOS CASOS DE ESTUDO DE SCHWETZ (2011)

No trabalho de SCHWETZ (2011) realizaram-se ensaios de estruturas sob carregamentos estáticos de serviço, comparando-se as medições dos ensaios com resultados de análise numérica via elementos finitos. Nesta comparação ficou evidente a necessidade da consideração da não-linearidade física do concreto, razão pela qual avalia-se aqui o desempenho do modelo proposto procurando fornecer resultados mais realísticos.

Neste trabalho, a análise numérica de cada caso de estudo foi realizada a partir das malhas de elementos finitos apresentadas por SCHWETZ (2011), considerando, entretanto, o modelo numérico estabelecido no capítulo 4.

Sendo que os parâmetros utilizados para o modelo constitutivo do concreto variam em função das características do material e condições geométricas da estrutura, apresentam-se a seguir as propriedades dos materiais consideradas como dados de entrada.

Para todos os casos de estudo a resistência característica do concreto é de 30 MPa. Para obter a resistência à tração utiliza-se a formulação estabelecida na NBR 6118, apresentada na equação (17), obtendo-se, desta forma, o valor da resistência à tração de 2,90 MPa.

A resistência do concreto à tração é o parâmetro que estabelece a sua tensão de fissuração, e função da qual é definido seu comportamento pelo modelo de fissuração distribuído (MFD).

O MFD, modelo de amolecimento tri-linear proposto por D'AVILA (2003), como se mostra na Figura 88, utiliza para todos os três casos de estudo o mesmo valor de resistência à tração, sendo que os valores das deformações variam de acordo com as dimensões e taxas de armadura que apresentam cada nervura.

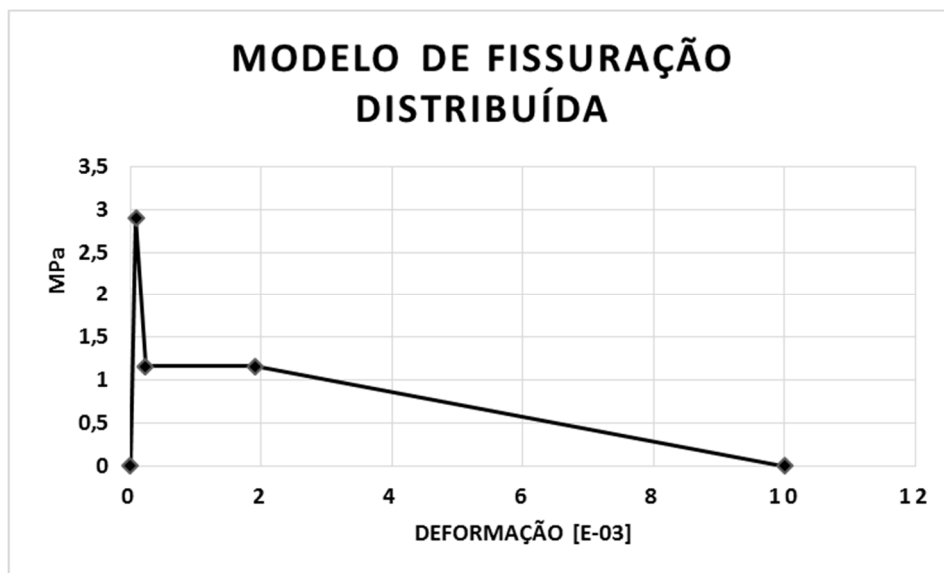


Figura 88: Curva tensão-deformação de concreto armado tracionado MFD

Neste subcapítulo, apresentam-se separadamente as análises numéricas de cada um dos três casos de estudo, como visto a seguir.

### 5.1.1 Análise numérica do Caso de Estudo 1 de SCHWETZ (2011)

A laje do Caso de Estudo 1 (CE1) consiste em uma laje retangular para uso comercial. A Figura 89 apresenta sua geometria, o pilar P11 de apoio no seu interior e a área utilizada para o carregamento, ilustrada como um retângulo de cor cinza.

O carregamento consistiu em quatro etapas de carga, uniformemente distribuída na área definida, atingindo um total de 6,67 kN/m<sup>2</sup>.

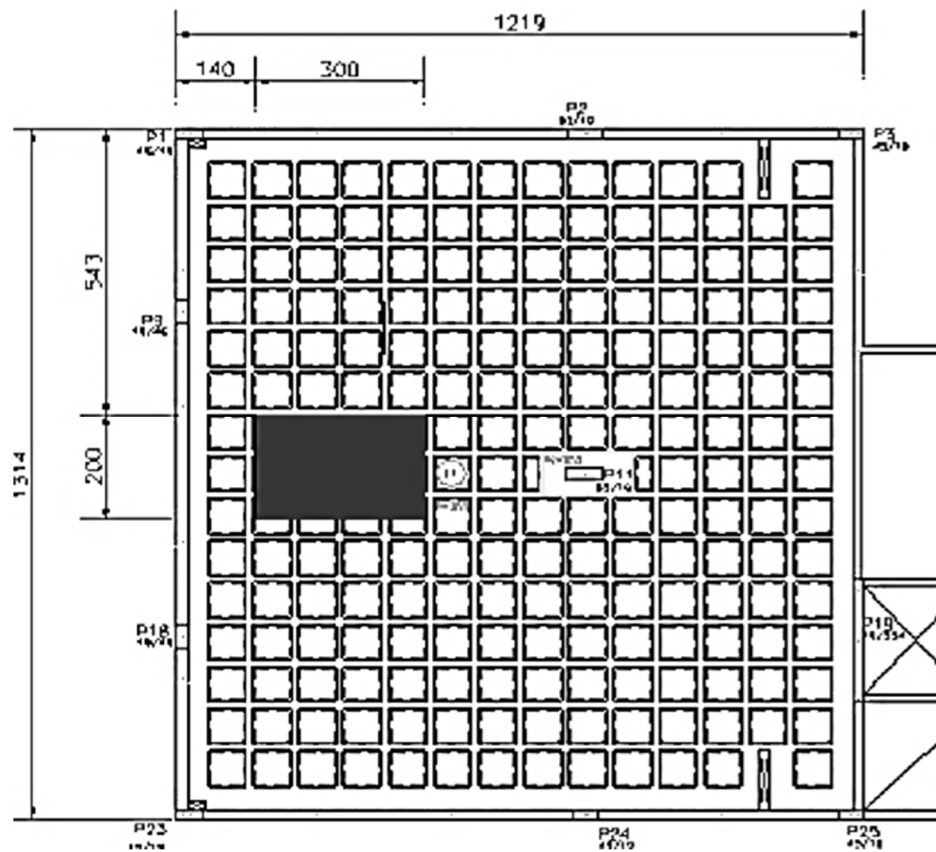


Figura 89: Geometria da laje do CE1, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)]

As dimensões do módulo típico para CE1 são mostradas na Figura 90.

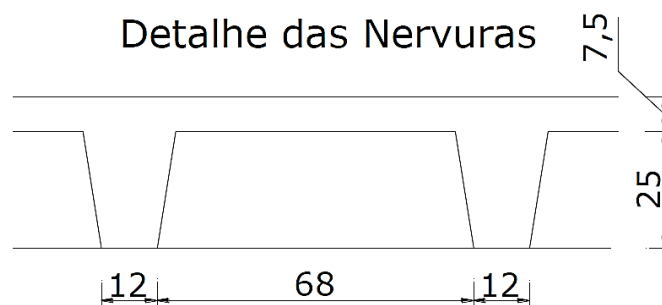
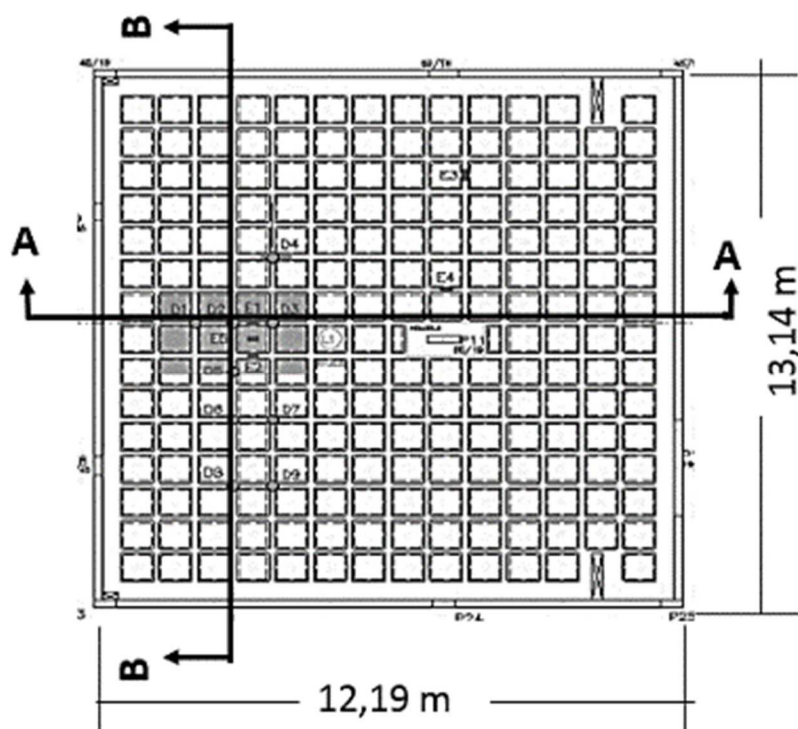


Figura 90: Detalhe da seção típica do CE1, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)]

O plano de instrumentação, Figura 91, mostra a localização dos deflectômetros (D1 a D9) utilizados para a medição dos deslocamentos verticais durante o monitoramento do ensaio.



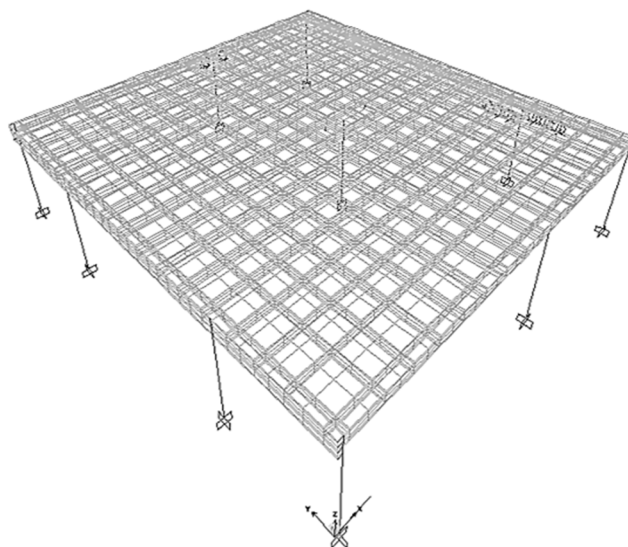


Figura 92: Malha em elementos finitos da laje CE1

#### 5.1.1.1 Resultados das análises numéricas para CE1

Nos resultados mostrados a seguir, a análise numérica não-linear, utilizando as condições de monitoramento experimental, é denominada SAP2000-MFD. Esta é comparada com uma análise linear, com a análise numérica Non-Linear-SCHWETZ e com a Experimental, conforme dados obtidos em SCHWETZ (2011).

As curvas elásticas que se apresentam nas Figuras 93 e 94 refletem somente os efeitos do carregamento de ensaio.

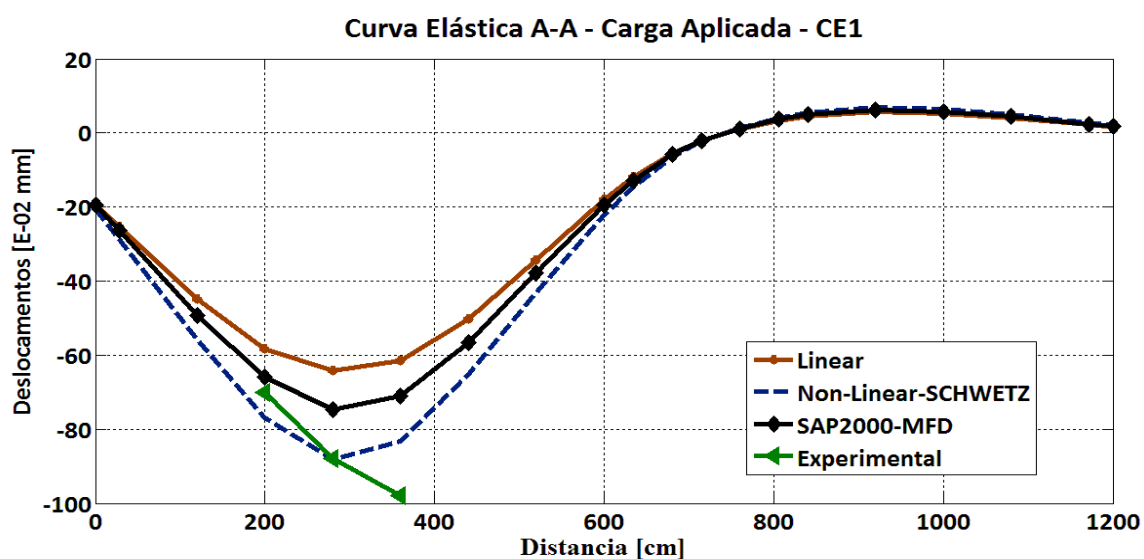


Figura 93: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 91

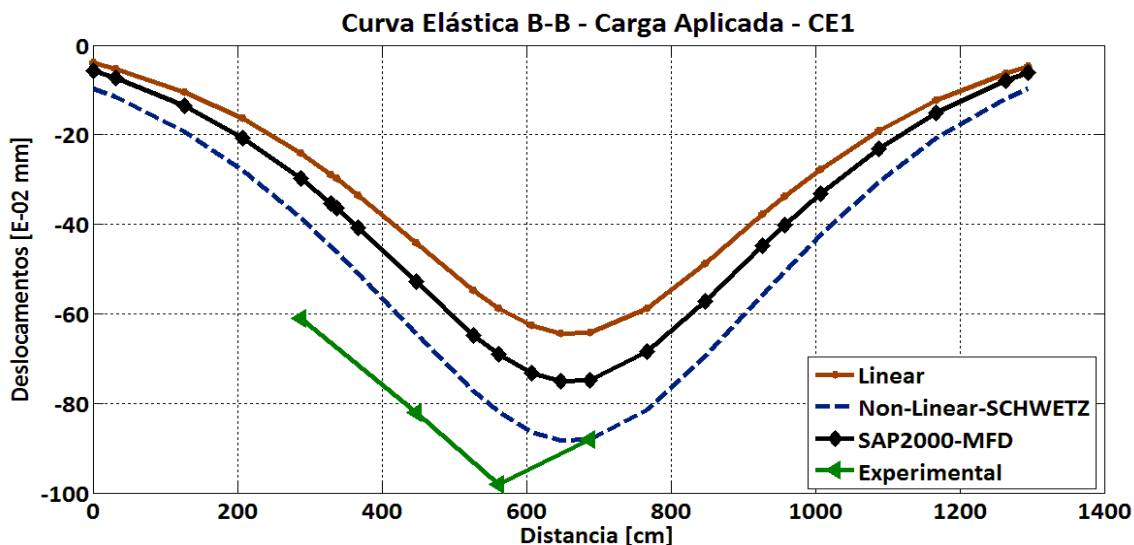


Figura 94: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 91

Nestes resultados, ainda que fruto de um carregamento em níveis de serviço, fica evidente a importância de uma análise não-linear, dada a distância que separa os resultados de uma análise linear dos obtidos experimentalmente.

Observa-se, também, entre os resultados das duas análises não-lineares, a diferença decorrente da consideração do modelo de fissuração distribuída, comparada ao modelo simplificado utilizado por SCHWETZ (2011).

### 5.1.2 Análise numérica do Caso de Estudo 2 de SCHWETZ (2011)

A laje CE2, utilizada como estacionamento para um edifício comercial, tem dimensões externas de 39,79 m por 35,48 m. A Figura 95 apresenta as dimensões de seu módulo típico e a Figura 96 sua geometria básica.

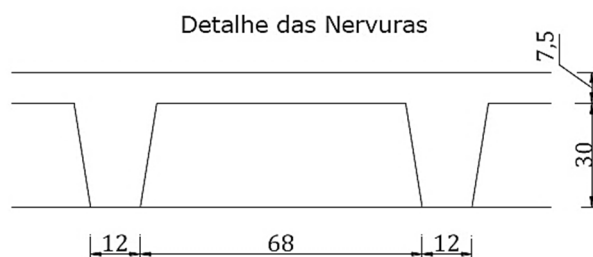


Figura 95: Detalhe da seção típica, CE2, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)]

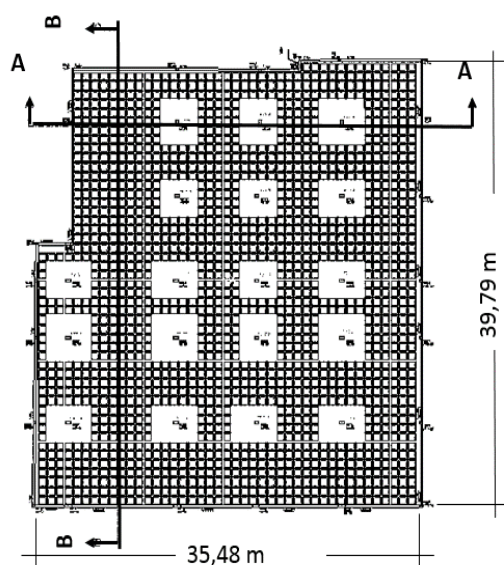


Figura 96: Geometria básica da laje CE2 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

Na planta de instrumentação, Figura 97, observa-se a posição dos pontos de controle (P1 a P13) onde foram posicionados os deflectômetros.

O carregamento realizou-se em quatro diferentes etapas, sendo de interesse a última, que consiste em uma carga uniformemente distribuída de valor  $1,49 \text{ kN/m}^2$ , aplicada na área de cor cinza da Figura 97.

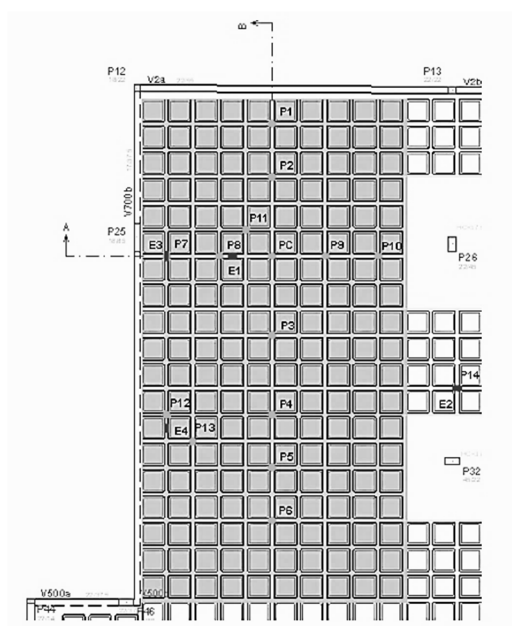


Figura 97: Planta de localização dos pontos de instrumentação e área de carregamento da laje CE2 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

O modelo constitutivo do concreto não fissurado foi estabelecido no programa SAP2000 segundo o item 3.3.1.1, utilizando valores presentes em SCHWETZ (2011), que se expõem a seguir:

- a) Módulo de Elasticidade:  $E_{cm}=32,01$  GPa;
- b) Resistência à compressão:  $f_{cm}=35,9$  MPa;
- c) Resistência à tração:  $f_{ct,m}=2,9$  MPa.

A Figura 98 mostra a malha das lajes CE2 e CE3, com 23.431 elementos de casca.

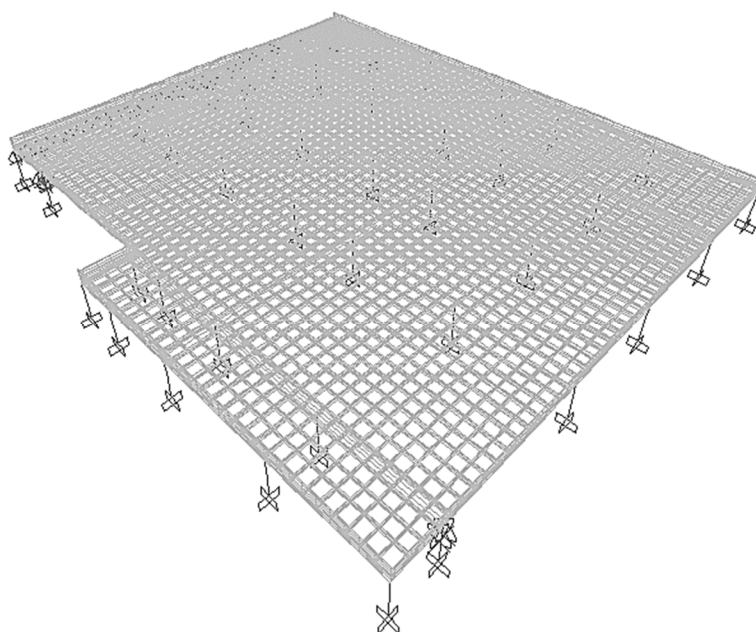


Figura 98: Modelo das lajes CE2 e CE3 em elementos finitos

#### 5.1.2.1 Resultados das análises numéricas para CE2

Analogamente ao item anterior, nos resultados mostrados a seguir a análise numérica não-linear, utilizando as condições de monitoramento experimental, é denominada SAP2000-MFD. Esta é comparada com uma análise linear, com a análise numérica Non-Linear-SCHWETZ e com a Experimental, conforme dados obtidos em SCHWETZ (2011).

As curvas elásticas que se apresentam nas Figuras 99 e 100 refletem somente os efeitos do carregamento de ensaio.



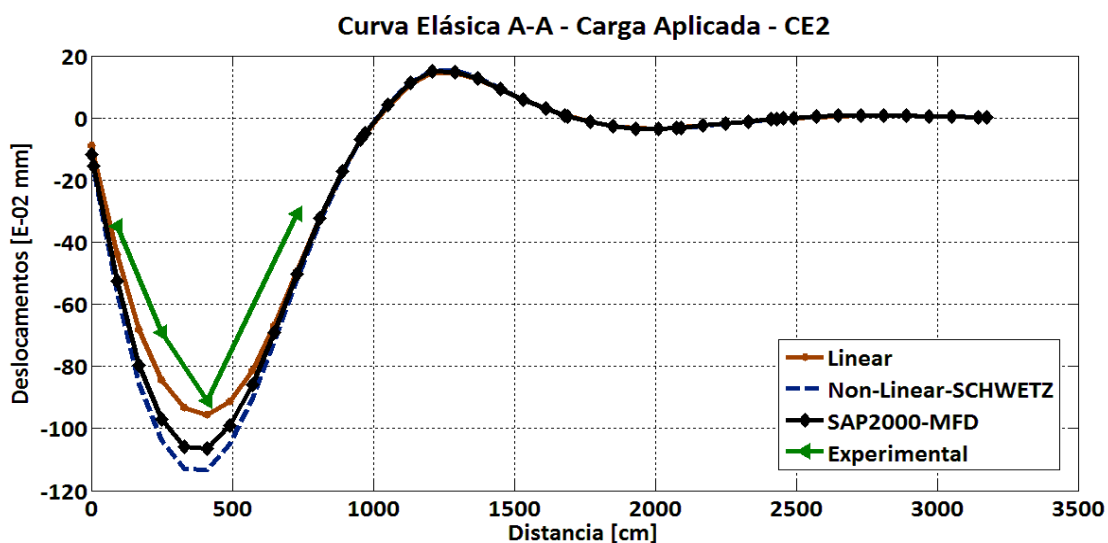


Figura 99: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 96

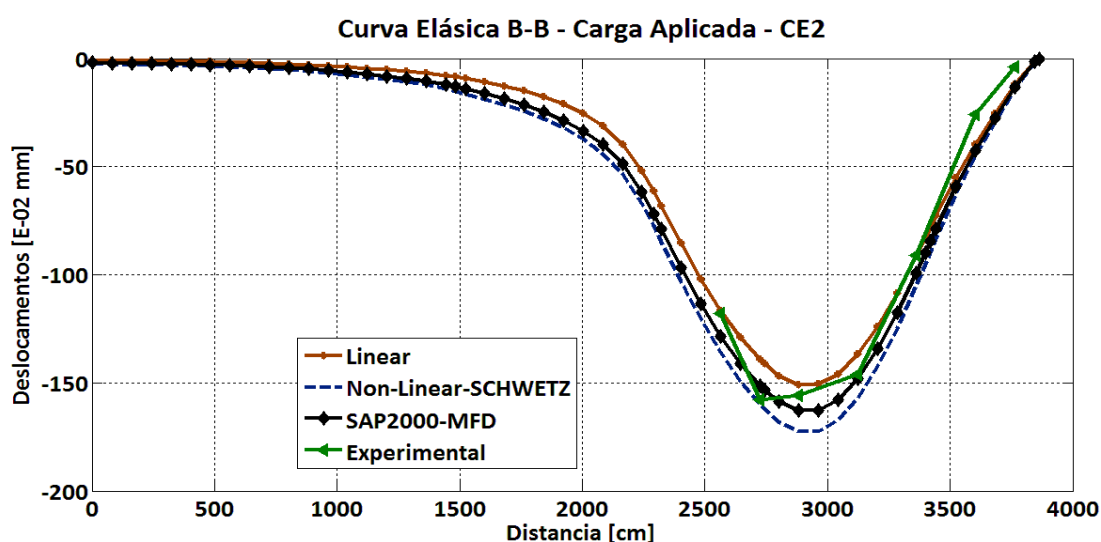


Figura 100: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 96

Estes resultados suscitam conclusões semelhantes às obtidas no caso de estudo CE1.

### 5.1.3 Análise numérica do Caso de Estudo 3 de SCHWETZ (2011)

A laje CE3, localizada no mesmo prédio porém no andar superior ao da laje CE2, com as mesmas dimensões em planta, é utilizada como base de quadras de tênis, como apresentado em SCHWETZ (2011).

Na Figura 101 as dimensões do módulo típico e na Figura 102 apresenta-se a geometria da planta.

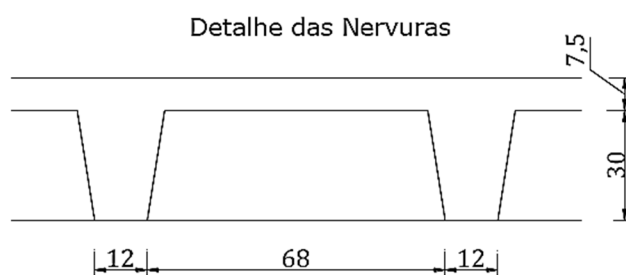


Figura 101: Detalhe da seção típica, CE3, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)]

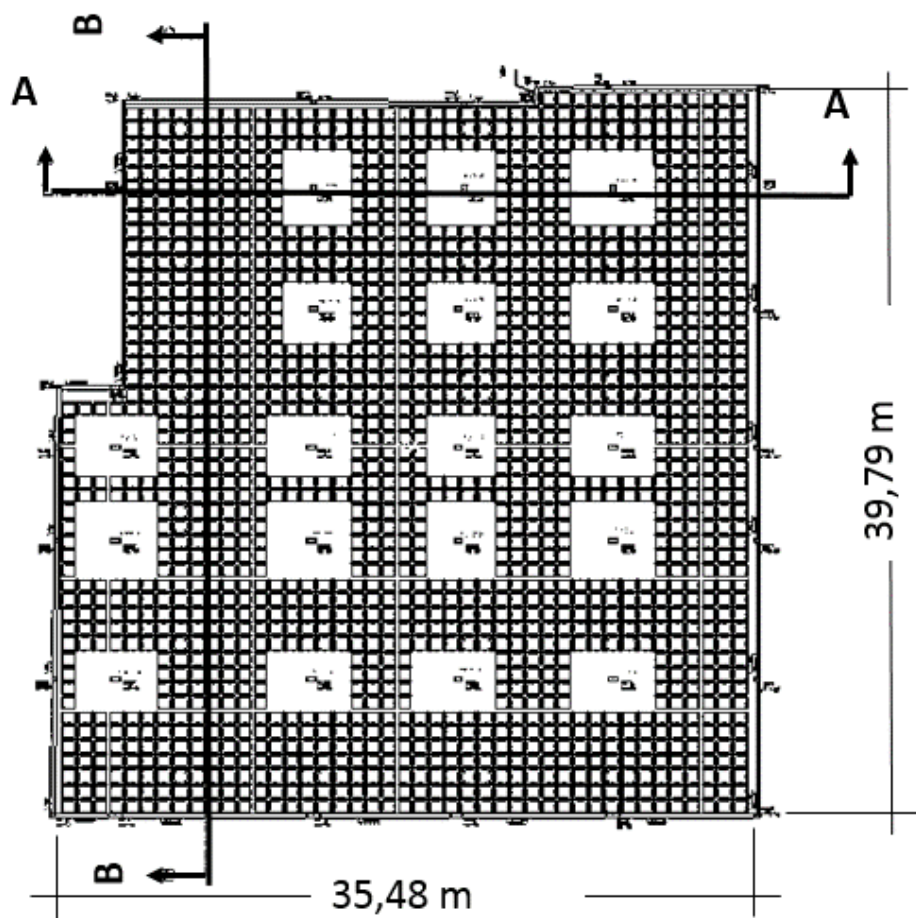


Figura 102: Geometria básica da laje CE3, em cm [Fonte: SCHWETZ (2011)]

No plano de locação dos pontos de instrumentação, Figura 103, ressalta-se os pontos de controle (P1 a P17) para a medição dos deslocamentos verticais utilizando régua graduada.

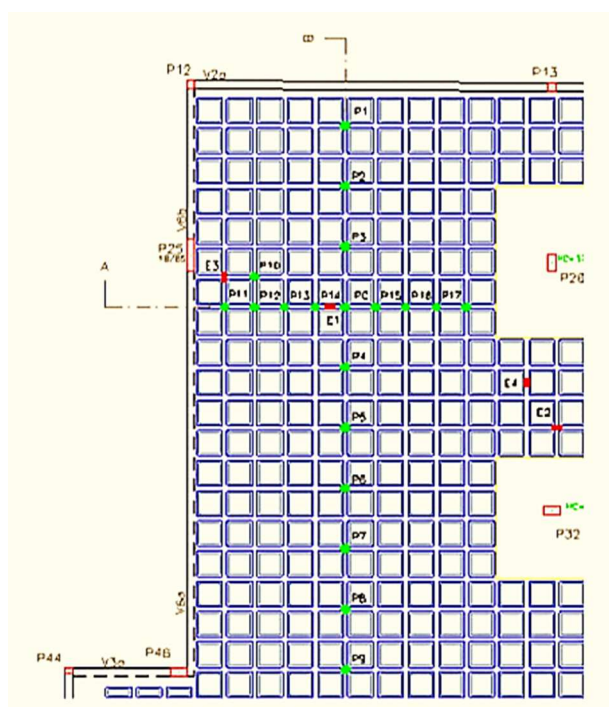


Figura 103: Planta de localização dos pontos de instrumentação CE3 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

O carregamento, que consistiu na disposição dos materiais a serem utilizados pela construtora para a confecção dos embasamentos das canchas de tênis, foi constituído de cargas distribuídas e concentradas conforme a Figura 104.

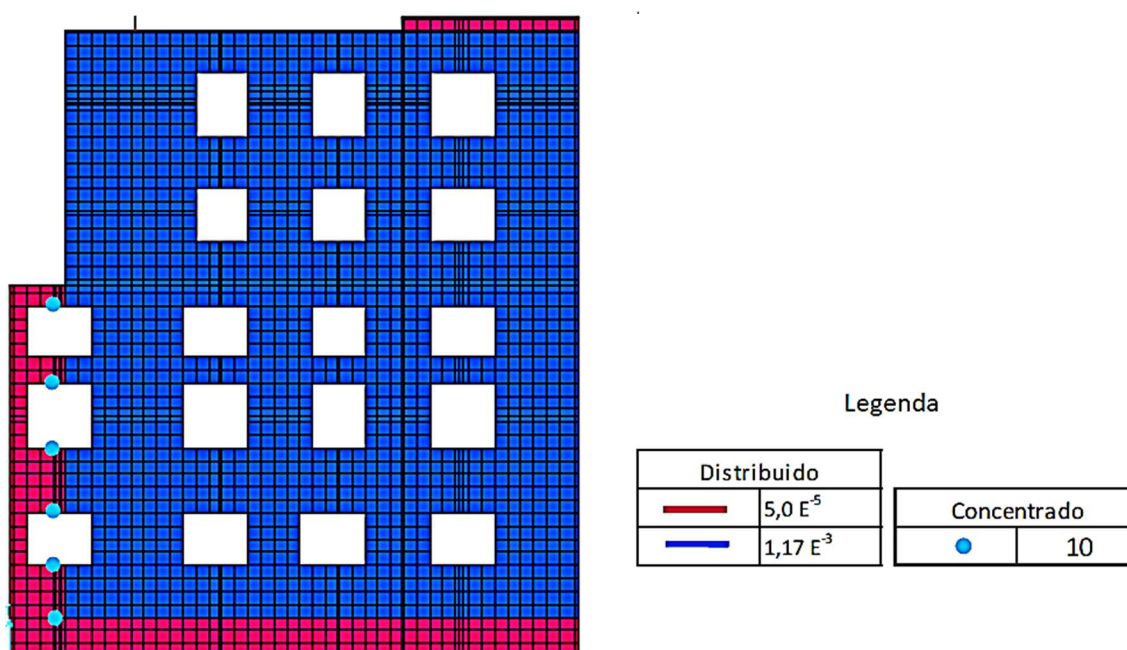


Figura 104: Planta de carregamento aplicado para CE3, em  $\text{kN}/\text{cm}^2$  para as cargas distribuídas e kN para as concentradas [Fonte: SCHWETZ (2011)]

### 5.1.3.1 Resultados das análises numéricas para CE3

Para esta laje utilizam-se as mesmas considerações de análise e apresentação de resultados das duas lajes anteriores.

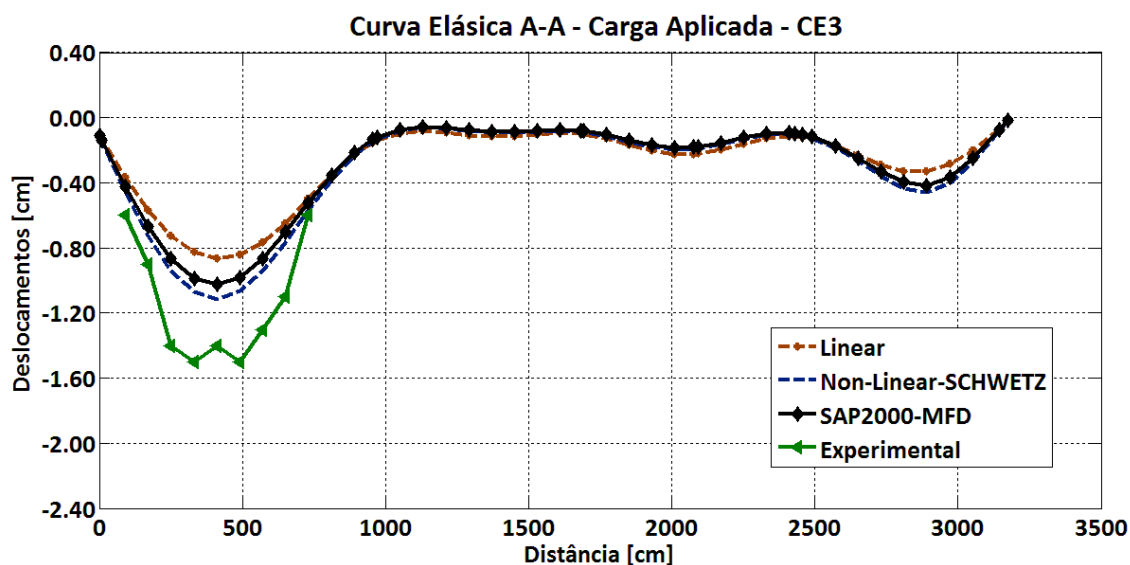


Figura 105: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 102

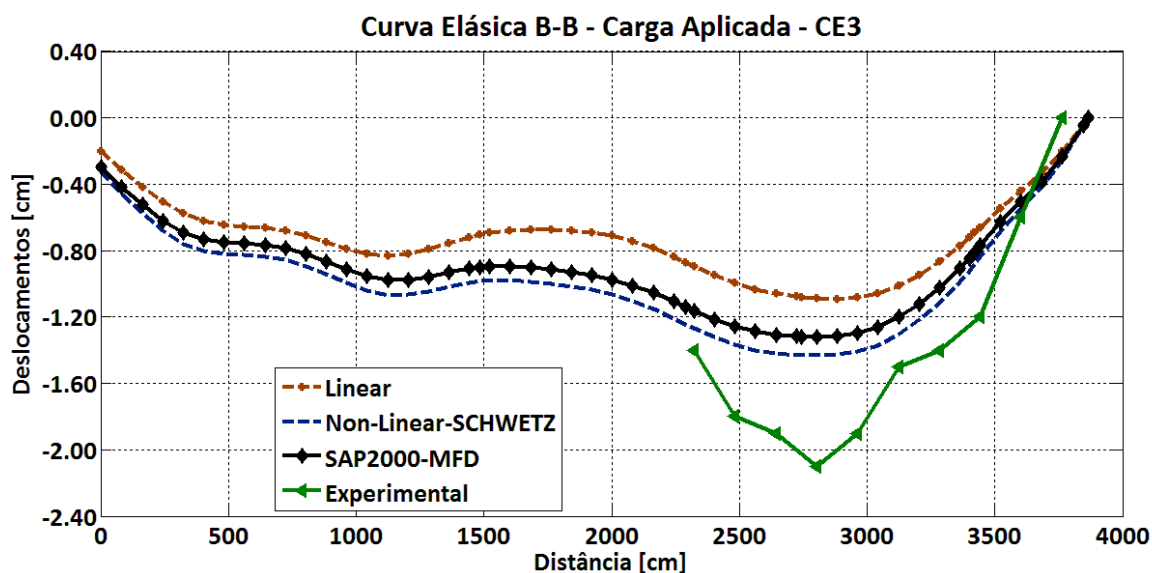


Figura 106: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 102

As conclusões obtidas para as duas lajes anteriores podem ser aqui também consideradas.

As Figuras 105 e 106 mostram, entretanto, neste caso, que a curva Experimental apresenta comportamento muito flexível se comparada com as demais, contrário ao mostrado na laje CE2.

Nesta laje, o carregamento aqui considerado era parte integrante do material de base e de cobertura utilizado na própria obra e ali depositado pela construtora, durante uma das fases da obra. Não foi portanto um carregamento aplicado e controlado pela equipe de ensaio. Este foi apenas estimado em função dos volumes e pesos específicos dos materiais presentes. Considera-se, portanto, a possibilidade de uma estimativa inadequada do carregamento considerado nestas análises.

É importante ainda a observação de que, por uma questão de logística de ensaio, as metodologias utilizadas para as medições experimentais foram diferentes nos três casos apresentados. Na laje CE1 foram utilizados deflectômetros fixos em bases sólidas, na laje CE2 deflectômetros de haste móvel e na CE3 nível ótico com régua graduada. Estes instrumentos, sabidamente, apresentam diferentes níveis de precisão, fato que pode ter contribuído para os resultados acima observados.

Todavia, observa-se que o modelo proposto produz resultados consistentes com as demais análises numéricas e que evidenciam a consideração da contribuição do concreto entre fissuras.

## 5.2 ANÁLISES NUMÉRICAS DE LAJES EM ESTADO DE DEFORMAÇÕES EXCESSIVAS

Neste item, são efetuadas as análises de três lajes sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos com valores crescentes de zero até a capacidade última das lajes. O objetivo é examinar o desempenho do modelo proposto com relação ao comportamento global das lajes assim como com relação a comportamentos localizados de deslocamentos e tensões nas armaduras.

Nos itens 5.2.1 e 5.2.2 são analisadas as lajes CE1 e CE2 de SCHWETZ (2011) respectivamente, escolhidas devido às diferenças geométricas que apresentam entre si.

Por fim, no item 5.2.3, apresentam-se várias análises da laje experimental S2 de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), também considerando o mesmo tipo de carregamento distribuído e crescente e, ainda, avaliando a influência de diferentes taxas de armadura para as nervuras.

### 5.2.1 Caso de estudo 1 de SCHWETZ (2011)

A laje do CE1, Figura 107, é analisada sob os efeitos de um carregamento estático, uniformemente distribuído e crescente, até que seja atingida sua capacidade última.

A máxima carga suportada pela laje durante esta análise foi de  $10,73 \text{ kN/m}^2$ . Tendo em consideração que o peso próprio da laje é de  $4,10 \text{ kN/m}^2$ , resulta que a carga máxima suportada pela mesma seja de  $6,63 \text{ kN/m}^2$ . Este resultado parece certamente adequado, uma vez que o projeto previa uma carga permanente de  $1,5 \text{ kN/m}^2$  e uma carga variável de  $1,0 \text{ kN/m}^2$ .

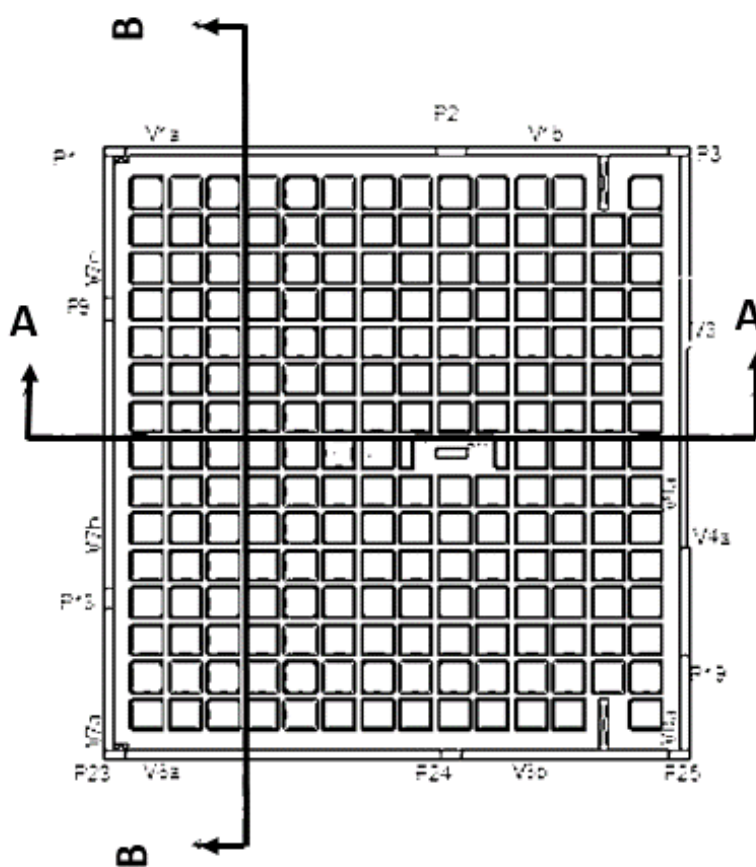


Figura 107: Geometria básica do Caso de Estudo 1 [Fonte: SCHWETZ (2011)]

Nas Figuras 108 e 109 apresentam-se as curvas elásticas do CE1 para as cargas do peso próprio e a máxima atingida.

Observa-se nitidamente a grande distância que separa estas elásticas, o que denota o forte comportamento não-linear da laje quando submetida à cargas superiores às de projeto, como ressaltado na Figura 110.

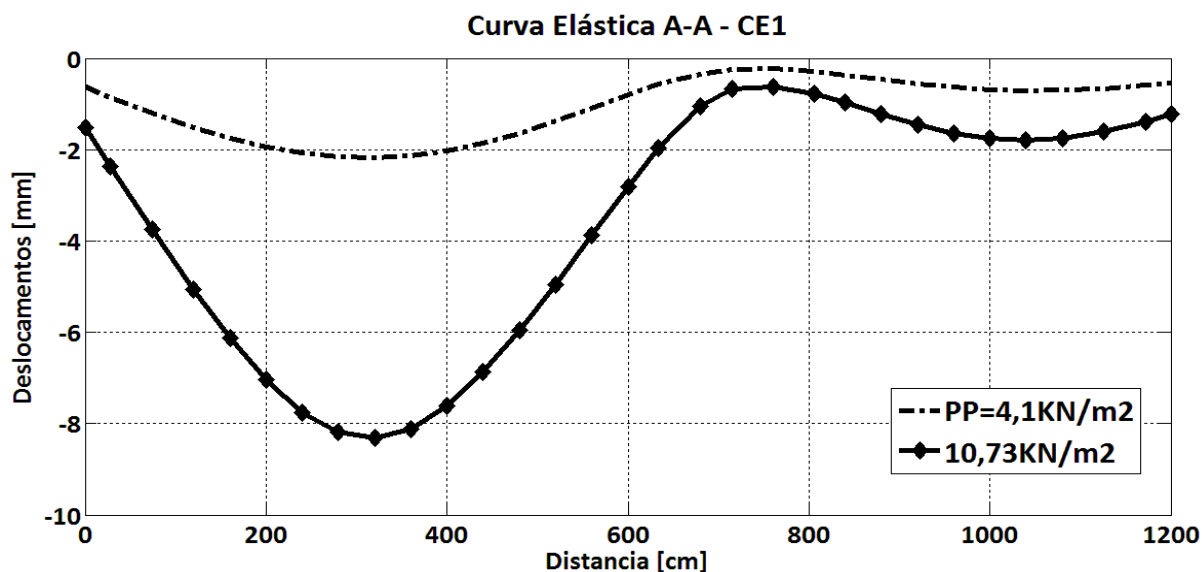


Figura 108: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 107

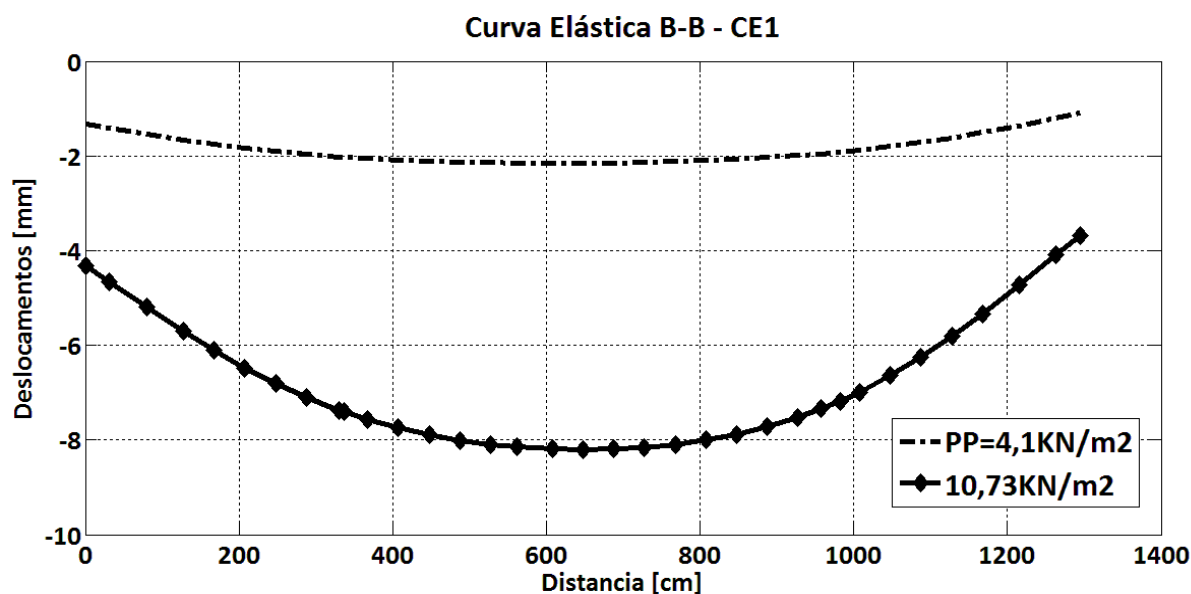


Figura 109: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 107

Para uma análise de comportamento local, é considerado o ponto de maior deslocamento vertical, ponto D2, que encontra-se na interseção dos dois planos de corte das curvas elásticas. Nas Figuras 110 e 111 apresentam-se, respetivamente, as curvas Carga-Deslocamento no ponto D2 e Carga-Tensão na armadura tracionada no ponto E1. Ambos os pontos estão situados na planta de localização de instrumentação da Figura 91.

Observa-se, claramente, nestes resultados o comportamento fortemente não-linear da laje quando submetida à cargas expressivas, assim como o fato de as armaduras já apresentarem estados de tensão muito avançados.

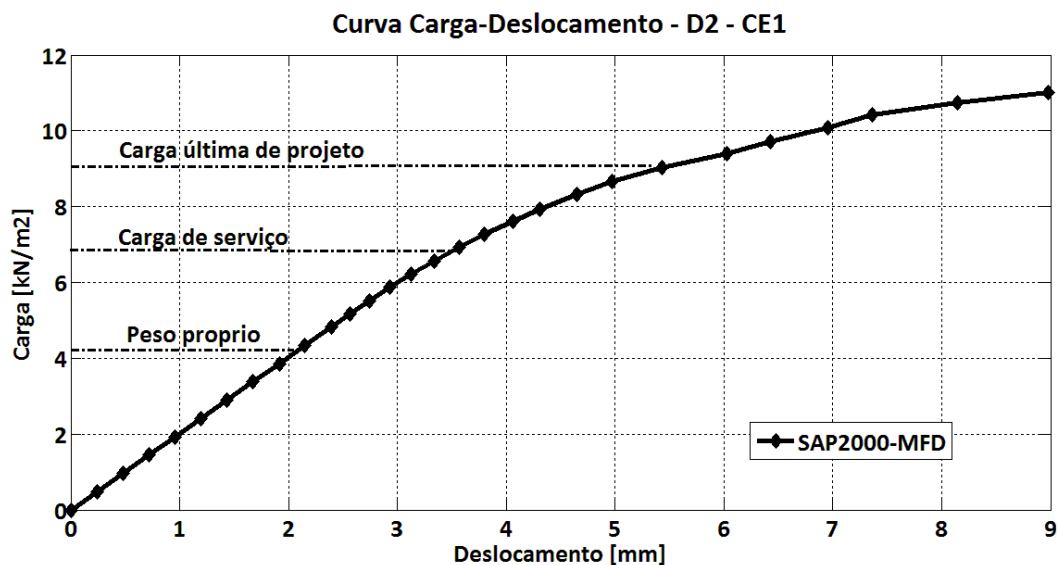


Figura 110: Curva Carga-Deslocamento vertical para o ponto D2

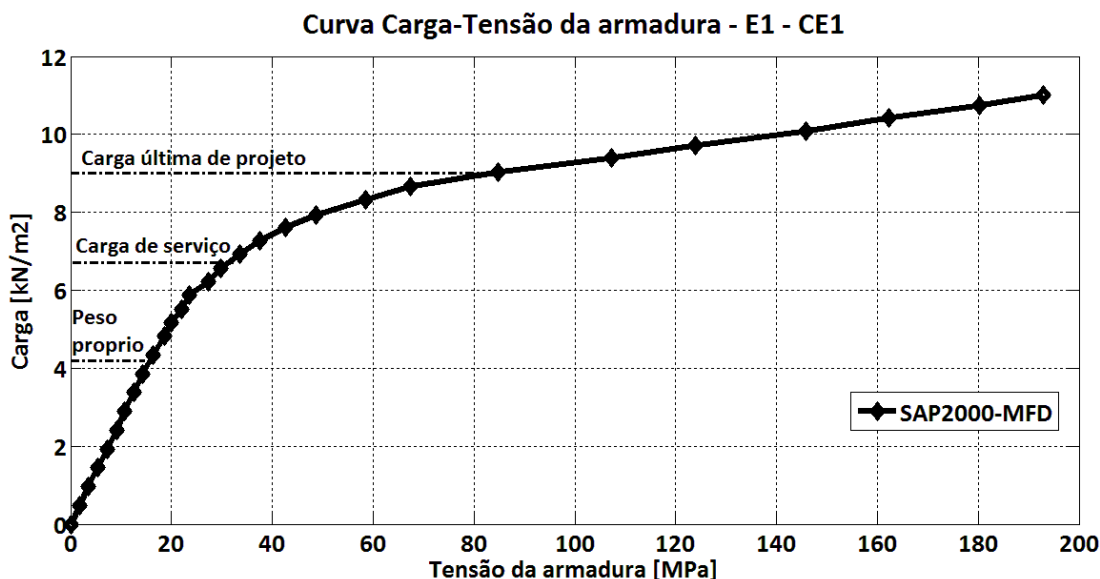


Figura 111: Curva de Carga aplicada-Tensão na armadura tracionada para o ponto E1

### 5.2.2 Caso de estudo 2 de SCHWETZ (2011)

Analogamente ao CE1, realizou-se também na laje CE2 uma análise com carregamento uniformemente distribuído e crescente, até atingir sua capacidade última.



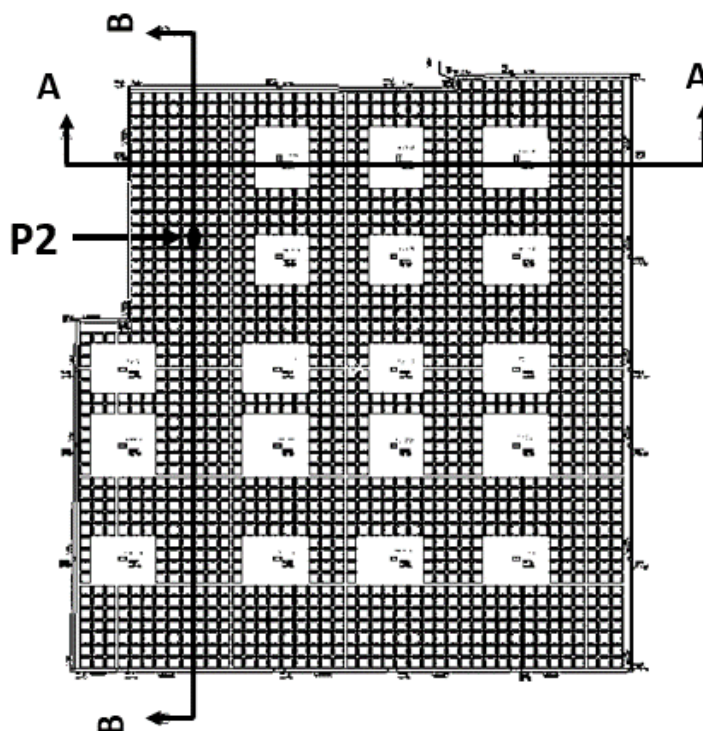


Figura 112: Geometria básica da laje CE2

As Figuras 113 e 114 apresentam as curvas elásticas avaliadas nos planos de corte A e B da Figura 112. Em ambas as figuras mostram-se as elásticas correspondentes ao peso próprio, de  $4,80 \text{ kN/m}^2$  e à carga máxima atingida, de  $15,80 \text{ kN/m}^2$ . A partir desses valores verifica-se que a capacidade última da laje corresponde a uma sobrecarga de  $11,00 \text{ kN/m}^2$ . Nos dados de projeto, entretanto, encontra-se que esta laje deveria suportar uma carga permanente de  $1,0 \text{ kN/m}^2$  e uma sobrecarga de  $3,0 \text{ kN/m}^2$ .

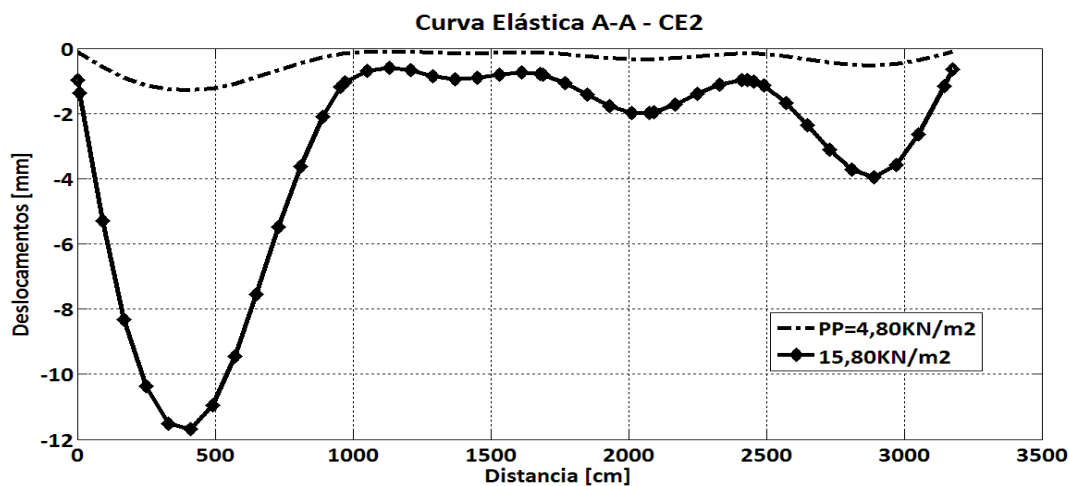


Figura 113: Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 112

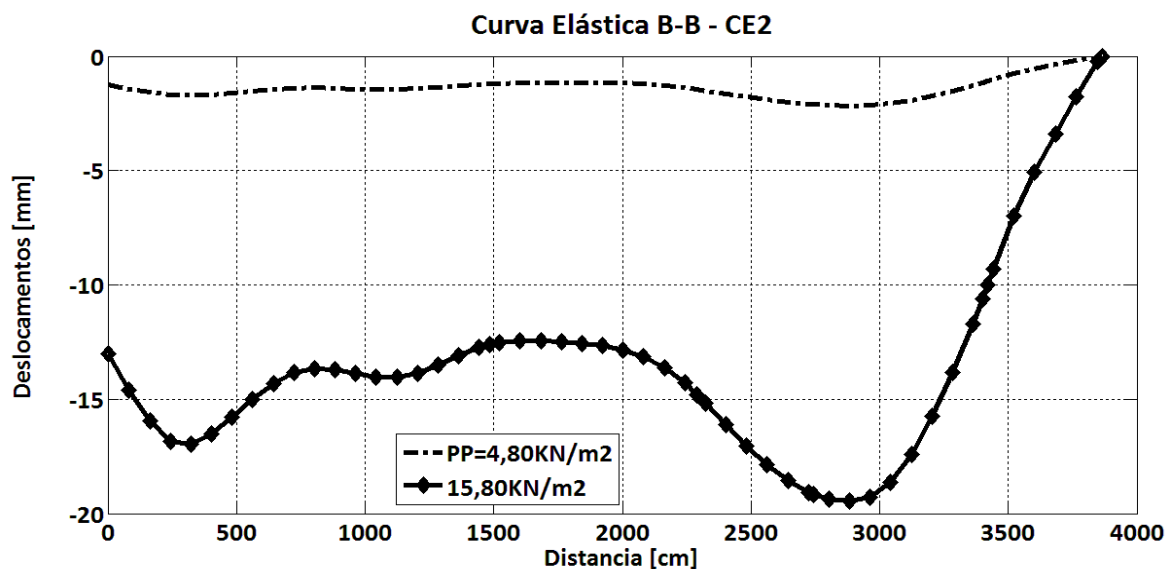


Figura 114: Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 112

Para uma análise de comportamento local, considera-se o ponto de maior deslocamento vertical, que encontra-se na interseção dos dois planos de corte das curvas elásticas. Nas Figuras 115 e 116 apresentam-se, respetivamente, as curvas Carga-Deslocamento e Carga-Tensão na armadura tracionada.

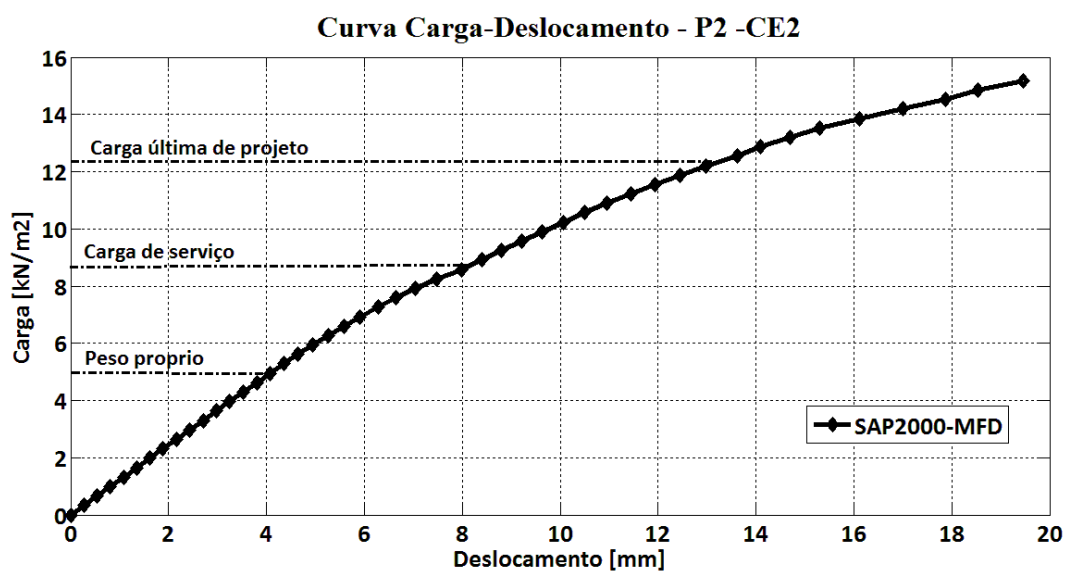


Figura 115: Curva Carga aplicada-deslocamento vertical do ponto P2 da Figura 112

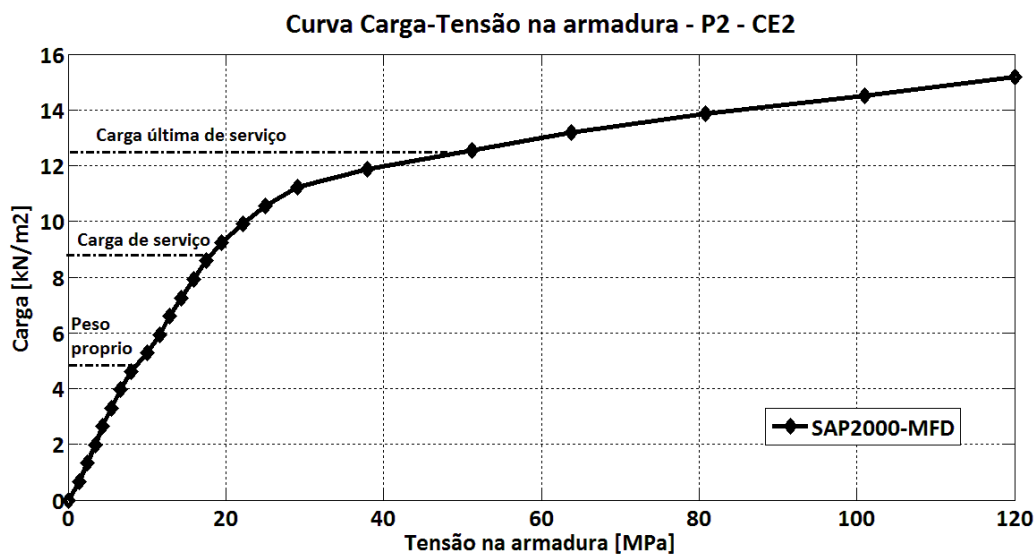


Figura 116: Curva de Carga-Tensão na armadura tracionada do ponto P2 da Figura 112

### 5.2.3 Laje S2 de ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)

A laje S2 já foi apresentada no item 2.4.3, Figura 18 e utilizada para a validação deste modelo numérico. Agora, esta laje será utilizada para a análise de seu comportamento frente a cargas excessivas, assim como para avaliar a influência de diferentes taxas de armadura nas nervuras.

Nas análises a seguir o carregamento será aplicado de forma uniformemente distribuída e crescente até que seja atingida a capacidade última da laje. Além disso, será variada a taxa de armadura à tração das nervuras, obtendo-se portanto diferentes valores dos parâmetros do modelo de fissuração distribuída.

A armadura da laje original é composta por barra de 8mm de diâmetro (S2-8). Alternativamente, serão também analisadas as situações de armadura de 6,3mm e 10mm de diâmetro, respectivamente S2-6 e S2-10.

A seguir apresentam-se os valores dos parâmetros a serem considerados no modelo:

a) MODELO S2-6

Caraterísticas da armadura: Diâmetro da seção: 6,3 mm; Área: 0,315 cm<sup>2</sup>; As/Ac: 0,0295

Caraterísticas do concreto:  $E_{cm}=26,07$  GPa;  $f_{cm}=32$  MPa;  $f_{ct,m}=2,9$  MPa.

b) MODELO S2-8

Caraterísticas da armadura: Diâmetro da seção: 8 mm; Área: 0,500 cm<sup>2</sup>; As/Ac: 0,0515

Caraterísticas do concreto:  $E_{cm}= 26,07$  GPa;  $f_{cm}=32$  MPa;  $f_{ct,m}=2,9$  MPa.

c) MODELO S2-10

Caraterísticas da armadura: Diâmetro da seção: 10 mm; Área:  $0,800$  cm<sup>2</sup>;  $A_s/A_c$ : 0,0616

Caraterísticas do concreto:  $E_{cm}= 26,07$  GPa;  $f_{cm}=32$  MPa;  $f_{ct,m}=2,9$  MPa.

Todos os três casos apresentam, portanto, o mesmo valor de tensão de tração para o concreto, diferenciando entretanto os valores das deformações. A figura 117 apresenta o diagrama tri-linear para o Modelo S2-6 como exemplo.

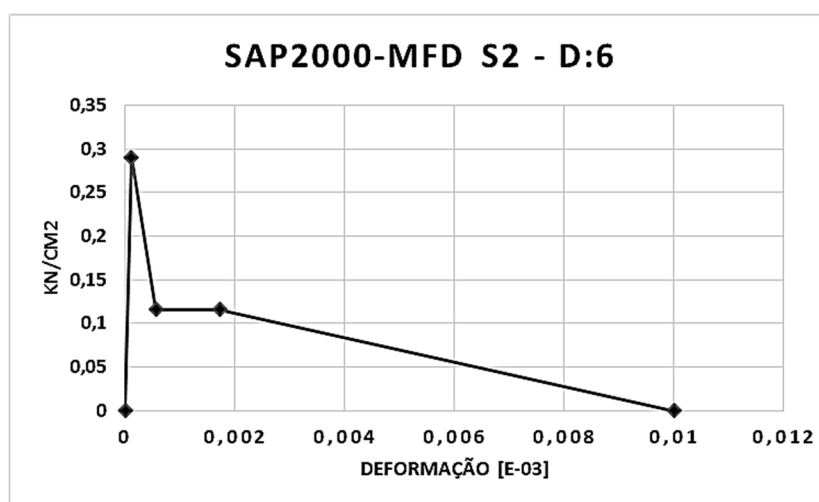


Figura 117: Curva tensão deformação de concreto armado tracionado para  $D = 6,3$  mm

### 5.2.3.1 Resultados das análises numéricas

Como resultados destas análises, apresentam-se as curvas: Carga-Deslocamento, Carga-Tensão na armadura tracionada e Carga-Momento fletor na seção, todos referentes ao centro do vão. Estes resultados encontram-se, respectivamente, nas Figuras 118, 119 e 120.

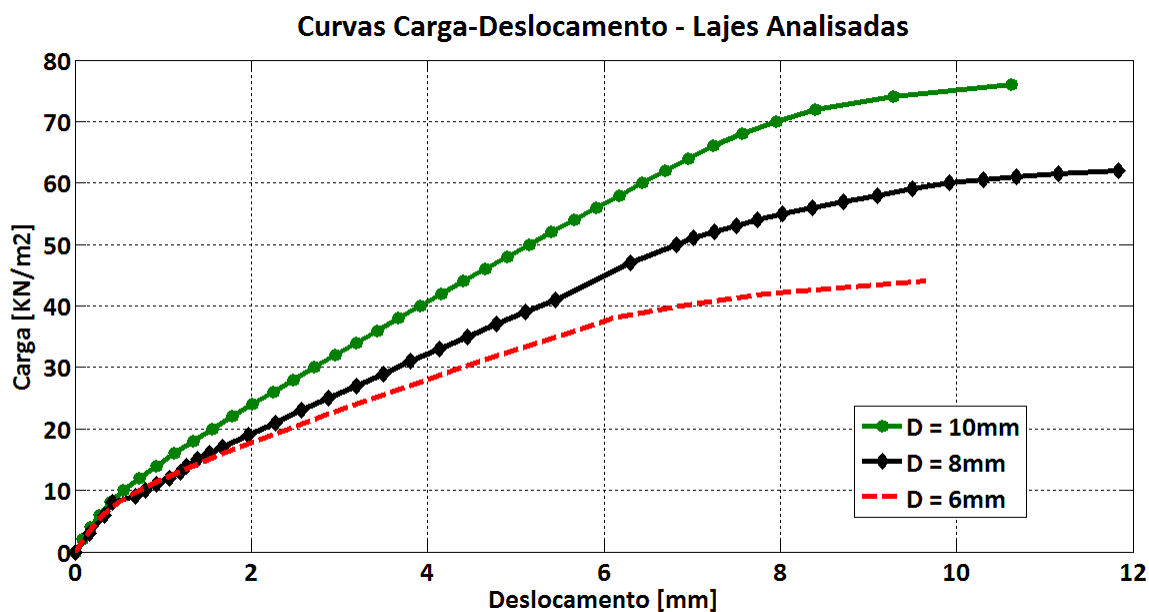


Figura 118: Curvas de Carga-Deslocamento vertical dos modelos para a laje S2

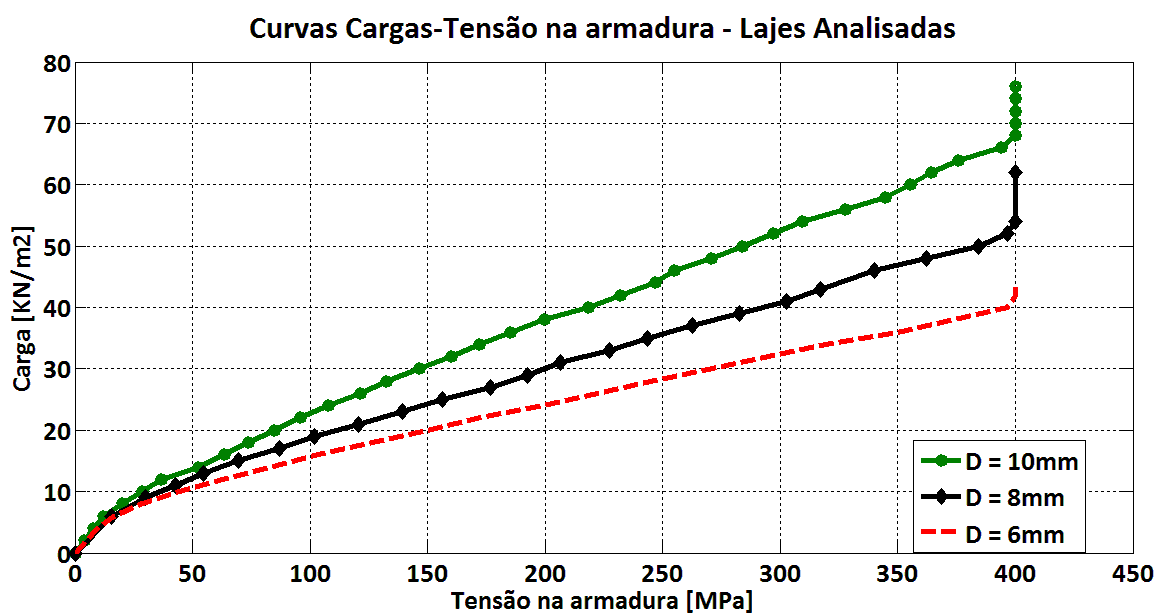


Figura 119: Curvas de Carga-Tensão na armadura tracionada para a laje S2

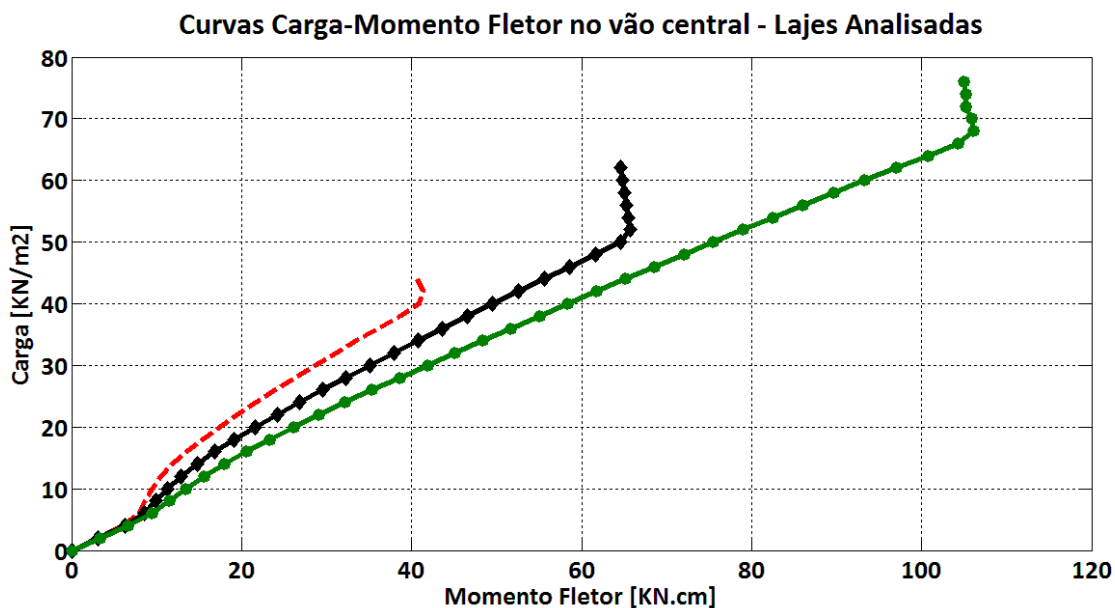


Figura 120: Curva de Carga-Momento fletor no vão central para a laje S2

Os resultados acima mostram um bom desempenho do modelo de fissuração distribuída utilizado, sendo capaz de evidenciar claramente as diferenças de comportamento entre as lajes com variadas taxas de armadura.

Verifica-se, na Figura 118, que com o aumento da taxa de armadura das nervuras, cresce, correspondentemente, a rigidez da estrutura assim como sua capacidade de carga. O mesmo pode ser verificado na Figura 120, com relação à capacidade de absorver momento da seção.

A Figura 119 mostra que a tensão na armadura tracionada cresce na proporção inversa da taxa de armadura, estando, entretanto, esta tensão, limitada à tensão de escoamento da armadura de 400 MPa, para todos os casos.

## 6 CONCLUSÕES

A partir da revisão bibliográfica desenvolvida no Capítulo 2, pode-se resumir as principais características necessárias a um modelo numérico para que apresente bom desempenho na análise de lajes nervuradas de concreto armado:

- a) Consideração da excentricidade existente entre os eixos da capa e nervuras;
- b) Utilização de elementos de casca para a modelagem da capa e das nervuras;
- c) Representação da heterogeneidade dos materiais envolvidos;
- d) Modelos constitutivos adequados para a representação das propriedades mecânicas dos materiais.

### 6.1 O MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico proposto está baseado nestas premissas e contempla todas as características citadas acima. Utiliza um elemento tipo *Shell-Layered*, através de um programa computacional amplamente estabelecido como o SAP2000. Isto permite a representação da excentricidade entre eixos das diferentes seções das peças estruturais, assim como a consideração da heterogeneidade entre os materiais aço e concreto.

As propriedades mecânicas do aço e do concreto em compressão foram representadas por modelos constitutivos realísticos, facilmente introduzidos na análise. O concreto em tração é representado pelo modelo constitutivo de fissuração distribuída proposto por D'AVILA (2003), compatível com a aplicação no programa SAP2000. Este modelo, que considera a contribuição do concreto intacto entre fissuras, apresenta a vantagem de permitir o estabelecimento de diferentes parâmetros para cada elemento de concreto, onde mudem as dimensões da seção e ou a taxa de armadura.

Este modelo numérico proposto foi inicialmente validado pela análise de casos encontrados na literatura e apresentou um ótimo desempenho. Foram modelados e analisados os protótipos experimentais de BORGES (2009) e ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), resultando em representações adequadas de seus comportamentos estruturais. Também, outras análises numéricas destes protótipos, como a de ARAÚJO (2003), foram utilizadas nesta validação.

Ainda, casos reais de lajes nervuradas, em verdadeira grandeza, foram analisados, com o intuito de verificar o desempenho do modelo numérico proposto em representar seus comportamentos estruturais. Três lajes nervuradas avaliadas experimentalmente por SCHWETZ (2011), aqui denominadas de casos de estudo CE1, CE2 e CE3, e submetidas a cargas de ensaio, em níveis de serviço, foram modeladas. Os resultados, apresentados no Capítulo 5, demonstraram que o modelo proposto foi capaz de representar adequadamente o comportamento global de deslocamentos destas lajes. Também, ficou evidente a necessidade da consideração de uma análise não-linear, muito embora as estruturas tenham sido submetidas à cargas de nível não elevado, dentro dos limites de serviço.

Com o objetivo de testar o desempenho do modelo na representação do comportamento de lajes em grande estado de fissuração e deformação, três lajes nervuradas foram avaliadas, como exposto no Capítulo 5.

As lajes CE1 e CE2 de SCHWETZ (2011), foram numericamente submetidas à cargas superiores às de projeto, aplicadas de forma uniformemente distribuída e incrementalmente crescente. Os resultados obtidos para deslocamentos, através das curvas elásticas das lajes, mostraram mais uma vez um ótimo desempenho do modelo proposto. Também, com este procedimento, foi possível observar o caráter fortemente não-linear de seus comportamentos, assim como permitiu a determinação de suas capacidades últimas de carga. Avaliações pontuais, tais como a determinação da tensão nas armaduras ou o momento fletor em uma determinada seção, são também possíveis, como demonstrado nos resultados apresentados.

Além das duas anteriores, a laje S2 de ADBUL-WAHAB e KHALIL (2000) foi utilizada para testar o desempenho do modelo em representar a influência de diferentes características geométricas da estrutura em seu comportamento pós-fissuração. Para tanto, também esta laje foi numericamente submetida à cargas uniformemente distribuídas e incrementalmente crescentes.

Neste caso, todavia, foram consideradas três diferentes taxas de armadura nas nervuras. Os parâmetros do modelo de fissuração são determinados de acordo com as armaduras consideradas e as análises desenvolvidas. Os resultados demonstraram, claramente, a capacidade do modelo em considerar tais características e a forte influência que elas representam no comportamento pós-fissuração das lajes. É possível visualizar seu comportamento global, determinar sua capacidade última e, ainda, observar detalhes como o desenvolvimento da tensão



em determinada armadura ou a capacidade de absorver momento fletor em uma determinada seção.

## 6.2 APLICAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO

O modelo proposto pode ter inúmeras aplicações, listadas a seguir:

A avaliação de lajes nervuradas onde pretenda-se verificar a influência da variação nas taxas de armadura das nervuras mais solicitadas, objetivando verificar o melhor comportamento frente à cargas que levem a um estado limite de deformação e, conseqüentemente, otimizando o projeto estrutural.

A verificação do comportamento de lajes nervuradas sujeitas a alteração de armaduras, por necessidade de reforço estrutural. Tais armaduras podem ser agregadas externamente ou inseridas em uma nova seção transversal.

A avaliação de lajes nervuradas onde pretenda-se efetuar cortes em planta, proporcionando áreas vazadas para, por exemplo, a colocação de escadas rolantes ou elevadores. Nestas, reforços de armadura podem tornar-se também necessários.

## 6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Uma variedade de temas de pesquisa pode resultar da aplicação do modelo numérico estabelecido, como por exemplo:

a) Aberturas em lajes

Avaliação da influência de aberturas no comportamento de lajes nervuradas. Pode-se efetuar uma avaliação paramétrica que considere o tipo de abertura, sua posição, forma e dimensões;

b) Tipos de Nervuras

Avaliação da influência das características geométricas de disposição das nervuras: unidirecionais, bidirecionais e tridirecionais, circulares concêntricas ou radiais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDUL-WAHAB, H.M.S.; KHALIL, M.H. **Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs**. Journal of Structural Engineering, v. 126, n. 2, Feb., p. 219-227, 2000.

AHMED IBRAHIM A.; SALIM, H.; EL-DIN, H.S. **Moment coefficients for design of waffle slabs with and without openings**. Engineering Structures 33 (2011) 2644–2652 journal homepage: [www.elsevier.com/locate/engstruct](http://www.elsevier.com/locate/engstruct). 2011.

AJDUKIEWICZ, A; KLISZCZEWIECZ, A. **Experimental analysis of limit states in a six-panel waffle flat-slab structure**. ACI Journal, v.83, n.6, p. 909-915, nov. 1986.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2007**: projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 2007.

ARAÚJO, J. M. **Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 52, p.43-52, Lisboa, Setembro, 2003.

ARAÚJO, J. M. **Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.7, p.1-8, Setembro, 2005.

BORGES, A. R.; **ANÁLISE EXPERIMENTAL DE LAJES DE CONCRETO ARMADO NERVURADAS COM MESAS PRÉ-FABRICADAS**. Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade de Engenharia Civil, da Universidade Federal do Pará, 2009.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information n.213/214, Lausanne: CEB, mar. 1993.

COMPUTER AND STRUCTURES, INC. **CSI Analysis Reference Manual**. Berkeley: University Avenue, 2013.

D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finito**. (Tese de Doutorado) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

DIAS, R. H.; PAIVA, J. R. **Modelagens de lajes nervuradas considerando a excentricidade entre as nervuras e a capa**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 9, n. 37, p. 1-26, 2007.

DONIN, C. **ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES NERVURADAS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**. Dissertação Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Concentração em Construção Civil, da Universidade Federal de Santa Maria, 2007.

KLEIN, D.L.; SELISTRE, S.L.C. (1997). **Análise numérico-experimental de lajes nervuradas submetidas a cargas uniformemente distribuídas**. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28, São Carlos, 1997.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton- und Stahlbetonbau**, v.57, n.7, p.161-173, Berlin, 1962.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton- und Stahlbetonbau**, v.60, n.2. p.35-42, Berlin, 1965.

MENIN, R.C.G.; TRAUTWEIN, L.M.; BITTENCOURT T.N. **Modelos de Fissuração Distribuída em Vigas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos**. Revista IBRACON de estrutura e materiais, Volume 2, Number 2, June, 2009.

MINDLIN, R.D. **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates**. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 18, No. 1, 1951.

NAVARRA, E.O.I. **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis estático lineal**. 2.ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. 1995.

OLIVEIRA, R. S.; ARAÚJO, D. L.; RAMALHO, M. A. **Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais**. e-Artigo ABECE. São Paulo, 2000.

OTTOSEN, N.S. Material Models for Concrete, Steel and Concrete-Steel interaction. **Bulletin d'Information** n.194, Lausanne: CEB, 1988.

REBÊLLO R.R.; DUARTE F<sup>o</sup>L.A. **Análise numérica e experimental de laje nervurada bidirecional em concreto armado.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO,49. Bento Gonçalves, 2007.

SCHWETZ, P.F. **Análise teórico-experimental de uma Laje nervurada em modelo reduzido sujeita a um carregamento linear.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SCHWETZ, P.F. **Análise Numérico-Experimental de Lajes Nervuradas Sujeitas a Cargas Estáticas de Serviço.** Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

STRAMANDIONOLI, J.S.B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

TANAKA, M.; BERCIN, A. N. **Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 1998.