

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

---

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE COM APROXIMAÇÃO NÃO-HIDROSTÁTICA

---

**Leonardo Romero Monteiro**

**Orientador: Profa. Dra. Edith Beatriz Camaño Schettini**

**Co-orientador: Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel

Profa. Dra. Rejane de César Oliveski

Prof. Dr. Walter Collischonn

Abril, 2014.

*Dedico aos meus pais. O amor incondicional. Dar inteira liberdade ao mesmo tempo que se ama, capacidade conferida apenas a pais de verdade.*

# Resumo

Na prática da engenharia existem diversos problemas relacionados a escoamentos com superfície livre, como escoamentos evoluindo sobre obstáculos de fundo, com recirculação ou ondas, entre outros. No presente trabalho, derivado das Equações de Navier-Stokes e de Continuidade, foi desenvolvido um código utilizando um equacionamento semi-implícito em diferenças finitas, com a finalidade de simular escoamentos com superfície livre e com aproximação não-hidrostática de pressão. O tratamento numérico é realizado com o passo de tempo fracionado em dois subpassos: no primeiro são calculados as velocidades e o desnível com condição de pressão hidrostática e no segundo subpasso é calculada a pressão dinâmica e corrigidas as velocidades e o desnível. Este código foi verificado para casos com resultados analíticos e numéricos e validado para casos com resultados experimentais. Por fim, o código desenvolvido foi aplicado a um caso hipotético que representa esquematicamente o caso de um emissário submarino. A consideração da aproximação não hidrostática da pressão se mostrou fundamental para o ajuste dos resultados com os dados experimentais e analíticos.

# Abstract

In engineering practice there are a lot of problems related to free-surface flow, like flows with bottom obstacles, separation and waves, among others. In the present work, derived from Navier-Stokes and Continuity Equations, a code was developed with semi-implicit finite differences equations in order to simulate non-hydrostatic pressure approximation free-surface flows. The numerical treatment is performed with split time step into two substeps: at the first velocities and free-surface are calculated with hydrostatic pressure condition and at the second substep dynamic pressure is calculated and the velocities and free-surface are corrected. This code was verified with analytical and numerical cases and validated with experimental cases results. Furthermore, this code was applied to a hypothetical case which represents a marine outfall case. The non-hydrostatic pressure consideration are very important for the adjustment of the results with the experimental and analytical data.

# Agradecimentos

Agradeço à equipe de pesquisa do Núcleo de Transição e Turbulência (NETT), principalmente à Professora Edith Beatriz Camaño Schettini e ao Professor Jorge Hugo Silvestrini, que me auxiliaram muito no entendimento desde a mecânica dos fluidos geral até problemas específicos da modelagem numérica. À Professora Nara Maria Luzzi Rosauero que com ânimo me recebeu e forneceu os dados de seus experimentos. Ao Professor Cláudio Freitas Neves ao abrir os meus olhos na problemática complexa das ondas de superfície. Aos meus novos amigos de Porto Alegre pelo convívio único e pelos momentos inesquecíveis, e aos meus antigos amigos que a distância não foi capaz de encurtar a amizade. A minha namorada Edilena Reis Sperb, pelo carinho e compreensão. Ao CNPq pelo apoio financeiro, viabilizando a minha estada em Porto Alegre, assim como, à CAPES e ao IPH pelo apoio para a pesquisa. Agradecimento especial a minha família, que sempre esteve disposta a me ajudar e compreendeu os meus longos períodos de ausência.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Relevância . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Estrutura do Trabalho . . . . .	4
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Equacionamento de Escoamentos Incompressíveis . . . . .	5
2.1.1 Pressão hidrostática e não-hidrostática . . . . .	6
2.1.2 Superfície Livre . . . . .	8
2.2 Escoamento em Canais Abertos . . . . .	11
2.2.1 Efeitos Viscosos . . . . .	11
2.2.2 Efeitos Gravitacionais . . . . .	11
2.2.3 Ondas Superficiais . . . . .	12
2.2.4 Obstáculos de Fundo . . . . .	14
2.3 Métodos Numéricos para Simulação de Escoamentos . . . . .	16
2.3.1 Discretização Espacial . . . . .	16
2.3.2 Discretização Temporal . . . . .	18
2.4 Métodos para Solução da Superfície Livre . . . . .	21
2.5 Técnicas de Soluções Numéricas . . . . .	22
2.6 Condições limite e camada esponja . . . . .	25
2.7 Estabilidade, Verificação e Validação . . . . .	27
2.7.1 Estabilidade . . . . .	27
2.7.2 Verificação e Validação . . . . .	30
<b>3 Metodologia Matemática e Numérica</b>	<b>31</b>
3.1 Modelo Matemático . . . . .	32
3.1.1 Condições de Contorno . . . . .	33

---

3.2	Método Numérico . . . . .	34
3.2.1	O Método Semi-implícito de Diferenças Finitas . . . . .	34
3.2.2	Desenvolvimento do Método Numérico . . . . .	37
3.2.3	Discretização Euleriana-Lagrangiana . . . . .	44
3.2.4	Aplicação Método do Gradiente Conjugado . . . . .	47
3.3	Resumo Passo-a-passo . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>50</b>
4.1	Verificação . . . . .	51
4.1.1	Caso 1: Bacia Oscilante 2D . . . . .	51
4.1.2	Caso 2: Bacia Oscilante 3D . . . . .	59
4.1.3	Caso 3: Ondas Sequenciais Não-Lineares . . . . .	64
4.2	Validação . . . . .	67
4.2.1	Caso 4: Propagação de ondas sobre uma barra . . . . .	67
4.2.2	Caso 5: Propagação de ondas sobre barras com diferentes configurações . . . . .	70
4.2.3	Caso 6: Canal com cavidade de fundo e degrau . . . . .	73
4.2.4	Caso 7: Propagação de ondas sobre um fundo com deformação circular . . . . .	77
4.3	Caso 8: Emissário Submarino . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Conclusões e Recomendações</b>	<b>85</b>
5.1	Conclusões . . . . .	85
5.2	Recomendações . . . . .	87
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama esquemático mostrando a variação das escalas no oceano relacionada com o tipo de pressão (Adaptado de Marshall et al., 1997)[38]. . . . .	8
2.2	Visualização transversal do problema de superfície livre. . . . .	9
2.3	Comporta demonstrando um escoamento com diferentes Números de Froude (Çengel e Cimbala, 2007).[11]. . . . .	12
2.4	Limites de linearidade da onda (Adaptado de Kamphuis, 1988)[31]. . . . .	13
2.5	Diagrama profundidade-energia específica e escoamentos supercríticos e subcríticos para casos com obstáculos de fundo (Adaptado de Çengel e Cimbala, 2007).[11]. . . . .	15
2.6	Exemplos hipotéticos do desenvolvimento de uma onda sobre um obstáculo: (a) o obstáculo não altera a onda, (b) o obstáculo altera significativamente a onda e (c) o obstáculo altera a onda a ponto dela quebrar durante sua passagem. . . . .	15
2.7	Características do obstáculo de fundo. . . . .	16
2.8	Classificação dos Métodos quanto a Flexibilidade e a Precisão (Adaptado de Laurien e Oertel, 2011).[34]. . . . .	17
2.9	Exemplo dos pontos da grade para a formulação explícita (Adaptado de Hoffman e Chiang, 2000)[29] . . . . .	19
2.10	Exemplo dos pontos da grade para a formulação implícita (adaptado de Hoffman e Chiang, 2000)[29] . . . . .	20
2.11	Volume de controle e planos de demonstração das condições de contorno . . . . .	26
2.12	Sistema de controle tridimensional . . . . .	29
3.1	Representação do domínio computacional. . . . .	35
3.2	Sistema cartesiano de grades com arranjo deslocado onde: a) refere-se aos planos $xz$ ; b) refere-se aos planos $yz$ . . . . .	35
3.3	Sistema cartesiano de grades deslocadas em um plano $xz$ próximo à superfície livre. . . . .	36
3.4	Representação dos diferentes tipos de $\Delta z$ . . . . .	37
3.5	A malha euleriana-lagrangiana (Casulli 1990)[5]. . . . .	46
4.1	Volume de controle e condições iniciais para a bacia oscilante 2D. . . . .	52

4.2	Comparação entre os níveis deste trabalho, o de Casulli e Stelling (1998)[9] e o do resultado analítico, utilizando os modelos com aproximação hidrostática, para o caso da bacia oscilante. . . . .	53
4.3	Comparação entre os níveis deste trabalho, o de Casulli e Stelling (1998)[9] e o do resultado analítico, utilizando os modelos com aproximação não-hidrostática, para o caso da bacia oscilante. . . . .	53
4.4	Distribuição das velocidades para as aproximações hidrostática (à esquerda) e não-hidrostática (à direita) nos tempos a) 1, 05s (vale hidrostático), b) 1, 78s (vale não-hidrostático), c) 2, 10s (pico hidrostático) e d) 3, 60s (pico não-hidrostático). . . . .	55
4.5	Comparação para diferentes $\Delta t$ , caso com aproximação hidrostática. . . . .	56
4.6	Comparação para diferentes $\Delta t$ , caso com aproximação não-hidrostática. . . . .	56
4.7	Comparação para diferentes $\Delta x$ e $\Delta z$ , caso com aproximação hidrostática. . . . .	57
4.8	Comparação para diferentes $\Delta x$ e $\Delta z$ , caso com aproximação não-hidrostática. . . . .	57
4.9	Superfície livre inicial para a bacia oscilante 3D. . . . .	59
4.10	Comparação entre a superfície livre dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho no ponto ( $x = 0, 25, y = 0, 25m$ ). . . . .	60
4.11	O formato da superfície livre em três tempos diferentes. . . . .	61
4.12	Comparação entre as velocidades horizontais ( $u$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0, 25, y = 0, 25m, z$ ). . . . .	61
4.13	Comparação entre as velocidades horizontais ( $v$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0, 25, y = 0, 25m, z$ ). . . . .	62
4.14	Comparação entre as velocidades verticais ( $w$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0, 25, y = 0, 25m, z$ ). . . . .	62
4.15	Configuração da simulação do canal e das condições de entrada do caso de ondas sequenciais. . . . .	65
4.16	Comparação entre as alturas das ondas: a), e entre as hodógrafas: b) $z = 1, 0m$ , c) $z = 3, 5m$ e d) $z = 6, 5m$ . . . . .	66
4.17	Comparação entre o perfil das velocidades extremas: a) velocidade horizontal - $u$ , b) velocidade vertical - $w$ . . . . .	66
4.18	Geometria do canal experimental em escala distorcida e pontos de medição de desnível. . . . .	67
4.19	Resultados dos desníveis para o experimento e para o modelo a) estação 1 (10, 5m), b) estação 2 (12, 5m), c) estação 3 (13, 5m), d) estação 4 (14, 5m), e) estação 5 (15, 7m), f) estação 6 (17, 3m) . . . . .	69
4.20	Configuração do canal experimental, escala distorcida. a) C1, b) C2 e c) C3 . . . . .	71
4.21	Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C1: a) $x = 7, 2m$ (Estação 3), b) $x = 8, 2m$ (Estação 4) e c) $x = 9, 5m$ (Estação 5). . . . .	72
4.22	Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C2: a) $x = 7, 2m$ (Estação 3), b) $x = 8, 2m$ (Estação 4) e c) $x = 9, 5m$ (Estação 5). . . . .	72

4.23	Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C3: a) $x = 7,2m$ (Estação 3), b) $x = 8,2m$ (Estação 4) e c) $x = 11,3m$ (Estação 5). . . . .	72
4.24	Geometria do canais e suas seções de medição (escalas distorcidas) para a) Configuração $F1$ , b) Configuração $F2$ , c) Configuração $F3$ . . . . .	73
4.25	Perfil de velocidade horizontal da configuração $F1$ em a) Seção 1, b) Seção 5, c) Seção 7 e d) Seção 9. . . . .	75
4.26	Perfil de velocidade horizontal da configuração $F2$ em a) Seção 1, b) Seção 4, c) Seção 6 e d) Seção 9. . . . .	76
4.27	Perfil de velocidade horizontal da configuração $F3$ em a) Seção 1, b) Seção 3, c) Seção 5 e d) Seção 7. . . . .	76
4.28	Linha de corrente do escoamento para a) $F1$ , b) $F2$ , c) $F3$ . . . . .	77
4.29	Configuração do caso 7 e suas seções de medição, escala distorcida. . . . .	78
4.30	Comparação entre os desníveis analítico e deste modelo para a) $x = 6,2m$ ; b) $x = 7,9m$ , c) $x = 12,3m$ e d) $y = 9,0m$ . . . . .	79
4.31	Desnível do Caso 7 em $t = 40s$ , escala distorcida. . . . .	80
4.32	Configuração do caso hipotético e seções de medição para: a) E1: Situação com $7,2m$ de profundidade b) E2: Situação com $3,6m$ de profundidade. . . . .	81
4.33	Resultados dos campos de velocidades no plano $y = 4,5m$ em: a) E1 e b) E2 . . . . .	82
4.34	Resultados dos campos de velocidades no plano $y = 6,0m$ em: a) E1 e b) E2 . . . . .	82
4.35	Resultados dos campos de velocidades no plano $z = 1,2m$ em: a) E1 e b) E2. . . . .	83
4.36	Desníveis nos planos $y = 4,5$ e $y = 6,0$ para E1 . . . . .	83
4.37	Desníveis nos planos $y = 4,5$ e $y = 6,0$ para E2 . . . . .	84
4.38	Desníveis em: a) E1 e b) E2 (escala distorcida). . . . .	84

# Lista de Tabelas

2.1	Aplicações de métodos de cálculo de escoamentos com superfícies livres. . . . .	23
3.1	Diferentes tipos de $\Delta z$ e suas obtenções. . . . .	36
4.1	Casos onde o código é utilizado. . . . .	50
4.2	Análise de estabilidade em função da discretização temporal para o caso com aproximação hidrostática ( $\Delta t$ variável e $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ constantes). . . . .	58
4.3	Análise de estabilidade em função da discretização temporal para o caso com aproximação não-hidrostática ( $\Delta t$ variável e $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ constantes). . . . .	58
4.4	Análise de estabilidade em função da discretização espacial para o caso com aproximação hidrostática ( $\Delta t$ e $\Delta y$ constantes e $\Delta x = \Delta z$ variáveis). . . . .	58
4.5	Análise de estabilidade em função da discretização espacial para o caso com aproximação não-hidrostática ( $\Delta t$ e $\Delta y$ constantes e $\Delta x = \Delta z$ variáveis). . . . .	59
4.6	Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em $x$ . . . . .	63
4.7	Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em $y$ . . . . .	63
4.8	Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em $z$ . . . . .	63
4.9	Análise de estabilidade para o caso da bacia 3D com aproximação não-hidrostática. . . . .	64
4.10	Características da simulação do Caso 3. . . . .	65
4.11	Análise de estabilidade para o caso das ondas sequenciais. . . . .	65
4.12	Análise de estabilidade para o caso de propagação da ondas sobre uma barra. . . . .	69
4.13	Análise de estabilidade para o caso da propagação da ondas sobre diferentes barras. . . . .	73
4.14	Característica das diferentes configurações do Caso 6. . . . .	74
4.15	Análise de estabilidade para o caso dos canais com recirculação com maior viscosidade. . . . .	75
4.16	Análise de estabilidade para o caso dos da propagação de ondas sobre um fundo com deformação circular . . . . .	80
4.17	Característica das diferentes configurações do caso do emissário submarino. . . . .	82
4.18	Análise de estabilidade para o caso de Emissário Submarino. . . . .	83

# Lista de Símbolos

$A$	Amplitude da onda	$(m)$
$A_r$	Área	$(m^2)$
$a$	Número de Courant para o eixo $x$	$(-)$
$b$	Número de Courant para o eixo $y$	$(-)$
$C$	Coefficiente de atrito de Chezy	$(m^{1/2} s^{-1})$
$c$	Variável auxiliar que pode tomar forma de outras	$(-)$
$d$	Número de Courant para o eixo $z$	$(-)$
$fr$	Frequência de oscilação	$(s^{-1})$
$Fc$	Operador de diferenças finitas não-linear para variável indefinida	$(m^1 s^{-1})$
$Fr$	Número de Froude	$(-)$
$Fu$	Operador de diferenças finitas não-linear para as velocidades $u$	$(m^1 s^{-1})$
$Fv$	Operador de diferenças finitas não-linear para as velocidades $v$	$(m^1 s^{-1})$
$Fw$	Operador de diferenças finitas não-linear para as velocidades $w$	$(m^1 s^{-1})$
$g$	Aceleração da gravidade	$(m^1 s^{-2})$
$H$	Altura do escoamento total (com desnível)	$(m)$
$h$	Batimetria (altura do escoamento sem desnível)	$(m)$
$h_{onda}$	Altura da onda	$(m)$
$h^*$	Profundidade afetada pelo movimento	$(m)$
$k$	Número de onda	$(m^{-1})$
$L$	Comprimento característico	$(m)$
$L_{x,y,z}$	Tamanho do domínio para determinado eixo	$(-)$
$l_i$	Comprimento da camada esponja	$(m)$
$N_i$	Número de elementos em uma dimensão da matriz	$(-)$
$N_{x,y,z}$	Número total de elementos em uma malha para determinado eixo	$(-)$
$O$	Erro da aproximação de primeira ordem da Série de Taylor	$(-)$
$p$	Pressão	$(Pa)$
$q$	Pressão dinâmica (não hidrostática)	$(m^2 s^{-2})$
$Re$	Número de Reynolds	$(-)$
$R_N$	Resto da série de Taylor	$(-)$
$SC$	Superfície de controle	$(m^2)$
$T$	Período da onda	$(s)$

$t$	Tempo	(s)
$u$	Velocidade referente ao eixo $x$	( $m^1 s^{-1}$ )
$V$	Velocidade da direção do fluxo	( $m^1 s^{-1}$ )
$VC$	Volume de Controle	( $m^3$ )
$v$	Velocidade referente ao eixo $y$	( $m^1 s^{-1}$ )
$vol$	Volume referente ao volume de controle	( $m^3$ )
$w$	Velocidade referente ao eixo $x$	( $m^1 s^{-1}$ )
$x$	Coordenada horizontal longitudinal	(m)
$x_{i0}$	Ponto inicial da camada esponja para o eixo $x$	(m)
$y$	Coordenada horizontal transversal	(m)
$z$	Coordenada vertical do plano cartesiano	(m)
$\alpha$	Constante na transformação da derivada temporal para derivada espacial	(-)
$\beta$	Coefficiente de amortecimento da camada esponja	(-)
$\zeta$	Celeridade da onda	( $m^1 s^{-1}$ )
$\lambda$	Comprimento da onda	(m)
$\mu$	Viscosidade dinâmica	( $N^1 s^1 m^{-2}$ )
$\eta$	Desnível da superfície livre	(m)
$\theta$	<i>Implicitness Parameter</i>	(-)
$\rho$	Massa específica do fluido	( $kg^1 m^{-3}$ )
$\nu$	Viscosidade cinemática	( $m^2 s^{-1}$ )
$\tau_x$	Tensão de cisalhamento do fundo na direção do eixo $x$	( $N^1 m^{-1}$ )
$\tau_y$	Tensão de cisalhamento do fundo na direção do eixo $y$	( $N^1 m^{-1}$ )
$\xi$	Coefficiente da camada esponja	(-)
$\omega$	Frequência angular	( $rad^1 s^{-1}$ )

## Índices

$i$	Referente ao eixo $x$
$j$	Referente ao eixo $y$
$k$	Referente ao eixo $z$
$M$	Referente à superfície livre de determinada coluna de água
$m$	Referente ao fundo de determinada coluna de água
$n$	Referente ao tempo

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Relevância

O estudo dos fluidos sempre fascinou e desafiou os cientistas. No decorrer dos séculos, a Mecânica dos Fluidos teve grande importância nos estudos da humanidade. Isso é possível de se verificar através de indícios históricos, como os aquedutos romanos, os sistemas de irrigação egípcios, os navios a vela e remo dos fenícios e os moinhos de vento inicialmente utilizado pelos persas para a moagem de cereais. Na Renascença (século *XV*), outras máquinas foram criadas que substituíram o trabalho humano ou animal, pelo de máquinas movidas pela energia de fluidos.

Depois da invenção do cálculo por Newton e Leibniz, por volta de 1700, a modelagem da física matemática começou vagarosamente a ter impacto em conceitos do entendimento da natureza e na formação dos sistemas de engenharia. (Oberkampf and Christophe, 2010)[42].

No fim do século *XVIII*, ocorreu a quantificação das teorias até então abstratas da Mecânica dos Fluidos, tendo, assim, um maior impacto sobre a engenharia. Após o desenvolvimento do conhecimento numérico, no século *XIX*, foram criadas a maioria das teorias e equações em Mecânica dos Fluidos que são utilizadas até hoje, como por exemplo, a equação de Navier-Stokes (1845) e a teoria do número de Reynolds (1883). Todas essas teorias eram baseadas, principalmente, nas observações da natureza, conhecimento matemático e experimentos criados na época.

Já no final do século *XIX*, problemas como análise dimensional, escoamento irrotacional,

movimento de vórtices em cavitação e ondas foram estudados. No início do século XX, o aperfeiçoamento da Mecânica dos Fluidos se tornou eminente com a criação do primeiro aeroplano funcionando adequadamente. Nesta mesma época, a teoria sobre a camada limite foi desenvolvida.

No decorrer do século XX, com a entrada das ciências computacionais, houve uma expansão na utilização dos conhecimentos de Mecânica dos Fluidos. Desde sempre, a Mecânica dos Fluidos conquista a atenção dos cientistas, como meteorologistas, oceanógrafos, biólogos, físicos, matemáticos, engenheiros e médicos. Além disso, ela tem seu espaço nas mais diversas áreas industriais, como na geração de energia, criação de novos produtos, aperfeiçoamento dos processamentos de matérias e, atualmente, em animações computacionais de desenhos animados, filmes e jogos virtuais (<http://s2013.siggraph.org/> [48] e <http://www.youtube.com/watch?v=F5KuP6qEuew>) [37].

O equacionamento hidrodinâmico, que existe há séculos como já foi comentado, se desenvolveu com o avanço computacional, quando pode ser comprovado e aplicado de forma satisfatória. Atualmente são desenvolvidos muitos estudos em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - *Computational Fluid Dynamics*). Na prática da engenharia referente a escoamentos, frequentemente, encontramos problemas com a presença de obstáculos de fundo, fenômenos de separação e ondas que podem alterar o próprio escoamento, causando ressaltos hidráulicos, erosões e assoreamento, entre outros. Estes fenômenos tem sua importância econômica por afetarem grandes obras de engenharia. Existem diferentes métodos de cálculo e análise que variam com os problemas a serem estudados.

Nesse contexto, os escoamentos com superfície livre tem sua relevância, pois os mais diversos ambientes estão inclusos nesta temática. Escoamentos em reservatórios, grandes lagos, oceanos, canais artificiais e naturais, assim como planícies e ondas de inundação são fenômenos com superfície livre. Na metade do século XX foram criados os primeiros modelos computacionais sobre escoamento com superfície livre, como é o caso do Modelo de Harlow e Eddie, apresentado em 1965 [28], com a aplicação da modelagem matemática na propagação de ondas provenientes de ruptura de barragem. A partir desse momento, o equacionamento relacionado à superfície livre foi aperfeiçoado, descrevendo fenômenos das mais diversas escalas espaciais,

desde pequenas ondas [33] até tsunamis [25]. Além de ondas, são simuladas as dinâmicas de lagos [6] e fluxos de maré [26], entre outros.

Os modelos numéricos ganharam espaço por serem, muitas vezes, mais rápidos e baratos do que os modelos físicos. Entretanto, deve-se tomar cuidado na utilização dos modelos numéricos, já que estes precisam ser devidamente verificados e validados para os fenômenos específicos que se desejam estudar.

O Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, já implementou modelos com a temática de superfície livre. O primeiro foi o IPH-A, modelo bi-dimensional aplicado a estuários e lagos, desenvolvido por Alejandro Borche Casallas (1996)[4]. O segundo modelo é o IPH-ECO (2012)[24], modelo computacional para corpos de águas tropicais e subtropicais, inicialmente denominado IPH-TRIM2D, desenvolvido por Collischonn e Motta Marques (2003)[15], sendo constantemente aperfeiçoado, já com desenvolvimento em 3D (<https://sites.google.com/site/iphecomodel/>). Ambos modelos trabalham com grandes escalas, não levando em consideração a pressão dinâmica.

No presente trabalho, com base nas equações de Navier-Stokes, foi desenvolvido um código utilizando o equacionamento semi-implícito em diferenças finitas aplicado a simulações de escoamentos com superfície livre. Foi implementada a aproximação não-hidrostática de pressões. Este modelo matemático foi verificado com exemplos já conhecidos na literatura e validado para fenômenos bem definidos com resultados experimentais. Além disso, casos hipotéticos de escoamentos com emissários submarinos submersos foram simulados.

## 1.2 Objetivos

Esta pesquisa tem como objetivo principal analisar problemas relacionados a escoamentos com superfície livre com aproximação não-hidrostática, utilizando simulações numéricas utilizando um método semi-implícito em diferenças finitas.

Para atingir este objetivo, faz-se necessário:

- Verificar o código para diversas situações encontradas na literatura;

- Validar o modelo para fenômenos bem definidos com resultados experimentais;
- Aplicar o código em situações de escoamentos com obstáculo de fundo, sem realizar comparações.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho se divide em cinco capítulos. O primeiro é a introdução, com uma breve descrição sobre a importância da Mecânica dos Fluidos e do presente estudo. O objetivo principal deste trabalho é exposto, assim como os caminhos para o atingir. O segundo capítulo se refere à revisão bibliográfica, que fornece os subsídios para o entendimento da questão apresentada e suas formas de resolução. No terceiro capítulo, denominado Metodologia Numérica, são demonstradas as equações utilizadas e como os métodos numéricos são aplicados para a resolução destas equações. Ainda neste capítulo, são apresentadas as hipóteses assumidas, as condições iniciais e as condições de contorno.

No quarto capítulo, "Aplicações", são apresentadas as verificações e validações do código, suprindo, assim, o primeiro e o segundo passos para atingir o objetivo deste trabalho, além disso, é apresentado o caso hipotético, que não possui dados experimentais ou numéricos. O caso escolhido foi: escoamentos sobre emissários submarinos. No último capítulo é exposta uma breve compilação dos resultados, finalizando o trabalho com as conclusões, assim como recomendações para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta os subsídios necessários para entender a motivação e esclarecer a metodologia numérica e os resultados deste trabalho. Nos três primeiros itens são mencionados fatores relacionados a conceitos da Mecânica dos Fluidos, abordando de forma mais específica assuntos referentes aos escoamentos com superfície livre.

Nos itens seguintes são abordados os métodos numéricos para simulação de escoamentos, discutindo também conceitos como estabilidade, verificação e validação. Por fim, é apresentado um breve histórico sobre os métodos numéricos para o cálculo de escoamentos com superfície livre.

### 2.1 Equacionamento de Escoamentos Incompressíveis

As equações da continuidade e de Navier-Stokes são de conhecimento comum para os pesquisadores de dinâmica dos fluidos. Para escoamentos incompressíveis, a Equação da Continuidade pode ser escrita em coordenadas cartesianas ortogonais  $(x, y, z)$  como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas horizontal longitudinal, horizontal transversal e vertical, respectivamente,  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes da velocidade referentes aos eixos  $0x$ ,  $0y$  e  $0z$

respectivamente. As Equações de Navier-Stokes são escritas como

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.4)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $p$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica. Assim, para problemas tridimensionais, formam um sistema com quatro equações e com quatro incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $p$ ). Nestas equações, admite-se que o sistema de referência não está inclinado e a força de gravidade é expressa apenas no eixo  $0z$ , que é o eixo referente a altura.

Há dois problemas para os quais estas equações diferenciais são úteis: o cálculo do campo de pressão para um campo de velocidade conhecido, ou o cálculo dos campos de velocidade e pressão para um escoamento de geometria conhecida e condições de contorno conhecidas (Çengel e Cimbala, 2007)[11].

Simulações numéricas de superfície livre com formulação baseada nas equações de Navier-Stokes incompressíveis são amplamente aplicadas a rios, estuários e estudos costeiros. Com o rápido aperfeiçoamento da capacidade computacional nos anos recentes, modelos tridimensionais estão sendo desenvolvidos para melhor compreender e diagnosticar tais problemas (Ahmadi et al., 2007)[2].

### 2.1.1 Pressão hidrostática e não-hidrostática

A pressão no escoamento é dividida em parcelas, segundo a sua gênese. De acordo com Çengel e Cimbala, (2007)[11], os diferentes tipos de pressões são: a *pressão estática*, que representa a pressão termodinâmica real do fluido. A *pressão dinâmica*, que representa o aumento de pressão quando o fluido em movimento é parado de forma isoentrópica, cuja medição é feita através do tubo de Pitot-Prandtl. Por fim, a *pressão hidrostática*, que representa a pressão devida à variação de energia potencial, ou seja, o peso da coluna de fluido.

A Equação de Bernoulli é aqui apresentada para exemplificar e entender os diferentes tipos de pressão e suas interações

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh = \text{constante}. \quad (2.5)$$

onde  $V$  é a velocidade na direção do escoamento e  $h$  é a altura da lâmina de água. O primeiro termo desta equação,  $p$ , é a pressão estática, o segundo termo,  $\frac{V^2\rho}{2}$ , refere-se à pressão dinâmica e o terceiro termo,  $\rho gh$ , representa a pressão hidrostática.

Em casos de estudos de fluidos com superfície livre, a pressão estática é nula, já que ela não existe neste tipo de escoamento. Assim, no âmbito científico, um modelo matemático que leva em conta apenas a pressão hidrostática é dito que possui *aproximação hidrostática* e quando este modelo leva em conta tanto a pressão hidrostática quanto a dinâmica é dito que possui *aproximação não-hidrostática*. Ainda existem os modelos que levam em conta as pressões hidrostáticas e parcialmente as pressões dinâmicas, assim possuem *aproximação quasi hidrostática*. De forma reduzida, na literatura, diz-se apenas que o modelo é *hidrostático*, *quasi-hidrostático* ou *não-hidrostático*.

Marshall et al. (1997)[38] discutem as diferenças dos modelos hidrostáticos, quasi-hidrostáticos e não-hidrostáticos para o oceano. Em seu estudo, os autores comentam que em pequenas escalas de comprimento, onde a velocidade de movimentação não pode ser desconsiderada, são necessários modelos não-hidrostáticos (Figura 2.1). Por outro ângulo, observando a Equação 2.5, tem-se que em grandes profundidades, a velocidade não altera significativamente o valor da pressão total.

Estes autores ainda mencionam que, mesmo para grandes escalas de comprimento, o uso da aproximação hidrostática pode não ser suficiente. Fenômenos importantes da climatologia que dependem da pressão dinâmica, como a convecção profunda, são desconsiderados, podendo acarretar em erros na modelagem numérica.

A aproximação hidrostática tem sido amplamente utilizada em estudos de escoamentos em rios, lagos, estuários e oceanos. Esta aproximação é válida para diversos casos e está sendo aplicada com sucesso em modelos hidrodinâmicos tridimensionais. A ideia básica desta aproximação é considerar que a escala vertical é muito menor do que a horizontal, fazendo com

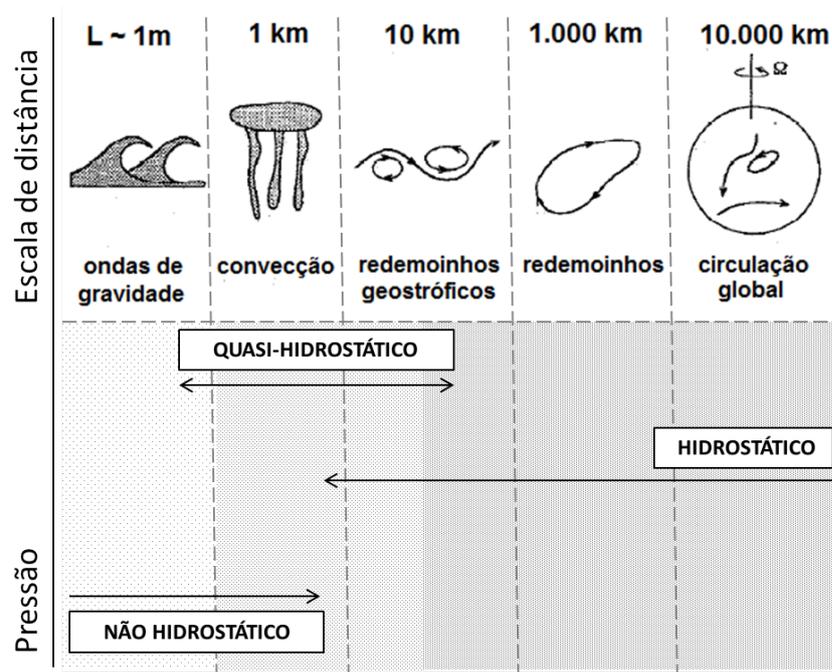


Figura 2.1: Diagrama esquemático mostrando a variação das escalas no oceano relacionada com o tipo de pressão (Adaptado de Marshall et al., 1997)[38].

que os termos de aceleração e viscosidade turbulenta, na Equação do Momentum para as componentes verticais, sejam muito menores do que a aceleração da gravidade, assim podendo ser desconsiderados. Entretanto, existem diversos casos onde esta aproximação é questionável. Um exemplo é o escoamento induzido por um forte gradiente de densidade horizontal. Como outros exemplos se incluem ondas curtas, escoamentos controlados por estruturas e problemas próximos a paredes (e.g. a disposição de uma salmoura na usina de dessalinização, o ponto de retirada em um sistema de captação de água) (Chen, 2003)[13].

### 2.1.2 Superfície Livre

A resolução numérica de escoamentos com superfície livre é especialmente difícil devido, principalmente, aos contornos móveis. A posição do contorno é conhecida apenas no instante inicial e a localização desta nos tempos posteriores tem que ser determinada como parte da solução. Na superfície livre, a condição cinemática e a dinâmica devem ser respeitadas e modeladas corretamente (Ferziger e Peric, 2002)[22].

Para se criar uma equação que expresse a variação da superfície livre no tempo, utiliza-se a condição cinemática e a Equação da Continuidade (2.1) que ao ser integrada da superfície até o

fundo, obtém-se

$$\int_{-h}^{\eta} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0. \quad (2.6)$$

Utilizando a Regra de Integração de Leibniz, temos para  $u$  e  $v$  que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.8)$$

onde  $\eta$  é o desnível da superfície livre e  $h$  é a altura de lâmina de água desde o fundo até o plano  $\eta = 0$  (Figura 2.2). Para  $w$ , utilizando uma integração simples temos que

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-h}^{\eta} w dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_{\eta} - w_{-h}. \quad (2.9)$$

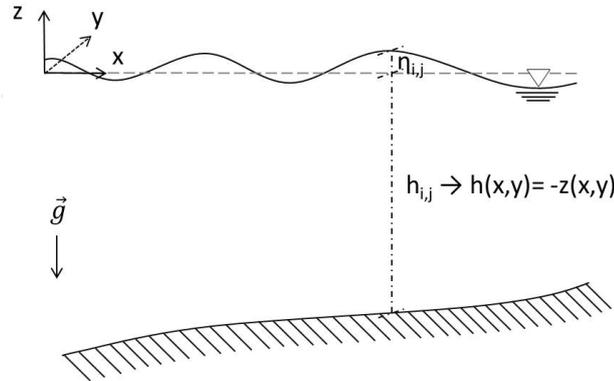


Figura 2.2: Visualização transversal do problema de superfície livre.

Logo, adicionando as Equações 2.7, 2.8 e 2.9 na Equação 2.6, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} + w_{\eta} - w_{-h} = 0. \quad (2.10)$$

A condição cinemática pode ser representada por

$$w_{\eta} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u_{\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} v_{\eta} \quad e \quad w_{-h} = -\frac{Dh}{Dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x} u_{-h} - \frac{\partial h}{\partial y} v_{-h}. \quad (2.11)$$

Observa-se que para fundos fixos  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$  e adicionando a condição cinemática (Eq. 2.11) na Equação da continuidade integrada na profundidade (Eq. 2.10), temos finalmente

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0. \quad (2.12)$$

Na Equação 2.12, tem-se que o desnível não varia com a velocidade vertical ( $w$ ), pois ele a representa.

De acordo com Ferziger e Peric (2002)[22], a condição cinemática deve ser usada apenas quando a diferença de densidade entre os dois fluidos é grande, no caso de superfície livre líquido-gás, fazendo com que não ocorra fluxo na direção normal da superfície livre.

Estes autores ainda mencionam que a condição dinâmica exige que as forças atuantes no fluido, na superfície livre, estejam em equilíbrio. Para simplificar as condições dinâmicas, em diversas aplicações, a tensão de cisalhamento na superfície livre pode ser desconsiderada. A tensão normal e o efeito da tensão superficial também são desconsiderados, e neste caso a condição dinâmica de contorno se reduz a: *pressão líquido = pressão gás*.

Decompondo a pressão total para escoamentos com superfície livre nas soma das parcelas hidrostática e não-hidrostática, tem-se:

$$p(x, y, z, t) = \rho g [\eta(x, y, t) - z] + \rho q(x, y, z, t), \quad (2.13)$$

onde  $q$  é a pressão dinâmica. A pressão da superfície, no caso a atmosférica, é nula, ou seja, trabalha-se com pressões relativas. Derivando a pressão nas três diferentes direções temos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \rho \frac{\partial q}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \rho \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (2.14)$$

Substituindo a Equação 2.14 nas Equações 2.2, 2.3 e 2.4 se obtêm

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.17)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

## 2.2 Escoamento em Canais Abertos

Um dos principais problemas relacionados ao escoamento com superfície livre é o escoamento em canais abertos, um dos temas primordiais no estudo de hidráulica. Por ser um vasto e complexo assunto, serão aqui apresentados conceitos e algumas situações de escoamento permanentes com rugosidade de fundo constante, para situações simplificadas.

### 2.2.1 Efeitos Viscosos

O experimento clássico de Reynolds demonstra que um escoamento, originalmente estável e laminar, quando se aumenta sua velocidade, passa a um estágio de transição e logo para um estágio de turbulência (Novak et al., 2010)[41].

A influência das forças devidas às tensões viscosas com relação à força de inércia é medida com o Número de Reynolds ( $Re$ ), definido por:

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (2.18)$$

onde  $V$  é a velocidade na direção do escoamento e  $L$  é um comprimento, ambos representando grandezas características do problema. Este adimensional é amplamente utilizado para diversos tipos de análises. O Número de Reynolds é um parâmetro importantíssimo para a definição do movimento altamente variado dos fluidos. Quanto maior for o Número de Reynolds, mais turbulento será o escoamento.

### 2.2.2 Efeitos Gravitacionais

Outro efeito importante no escoamento em canais abertos é o da gravidade. Este efeito é representado pela razão entre forças inerciais e as forças gravitacionais. Esta razão é dada pelo

Número de Froude ( $Fr$ ), definido como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}. \quad (2.19)$$

Quando  $V < \sqrt{gL}$ , o escoamento é dito subcrítico, ou seja, as forças gravitacionais são mais pronunciadas. Caso  $V > \sqrt{gL}$ , o escoamento é supercrítico, onde as forças inerciais são dominantes. No caso  $V = \sqrt{gL}$ , o escoamento é dito crítico. Nota-se que  $\sqrt{gL}$  é a celeridade da onda em águas rasas.

A Figura 2.3 representa um ressalto hidráulico forçado pela comporta, que faz com que o escoamento perca energia, passando de subcrítico para supercrítico e novamente para subcrítico.

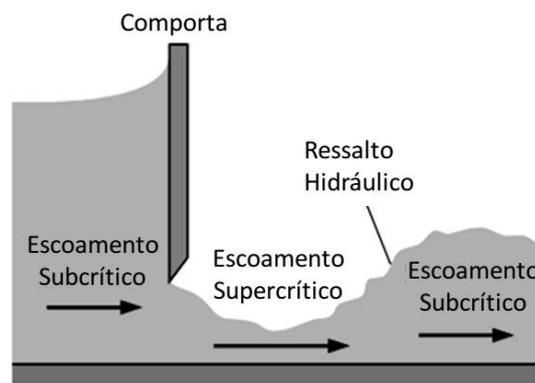


Figura 2.3: Comporta demonstrando um escoamento com diferentes Números de Froude (Çengel e Cimbala, 2007).[11].

### 2.2.3 Ondas Superficiais

Ondas superficiais são aquelas que ocorrem numa massa líquida delimitada na parte superior por uma superfície livre e na parte inferior por um fundo sólido (fixo ou móvel). As variações sofridas pela superfície livre quando da ocorrência da onda são normalmente descritas pela variável  $\eta$ .

O movimento da onda é tão variado e complexo que qualquer tentativa de classificação pode ser enganosa. Qualquer definição corresponde a idealizações de situações que nunca acontecem rigorosamente, sendo apenas aproximações. Por exemplo, um movimento puramente bidimensional não existe. Este é um conveniente conceito matemático que é fisicamente aproximado em um canal ou tanque com paredes paralelas. Efeitos da camada limite e componentes transversais

ainda existem, embora sejam de difícil detecção, principalmente para escoamentos turbulentos (Le Méhauté, 1976)[36].

Em relação ao movimento, as ondas podem ser diferenciadas em lineares e não lineares. A Figura 2.4 apresenta os limites de linearidade da onda, tendo  $h_{onda}$  a altura,  $\lambda$  o comprimento e  $T$  o período. Fala-se em linearidade uma vez que os termos convectivos não-lineares podem ser desconsiderados, contrário à não-linearidade, onde estes termos devem ser obrigatoriamente considerados.

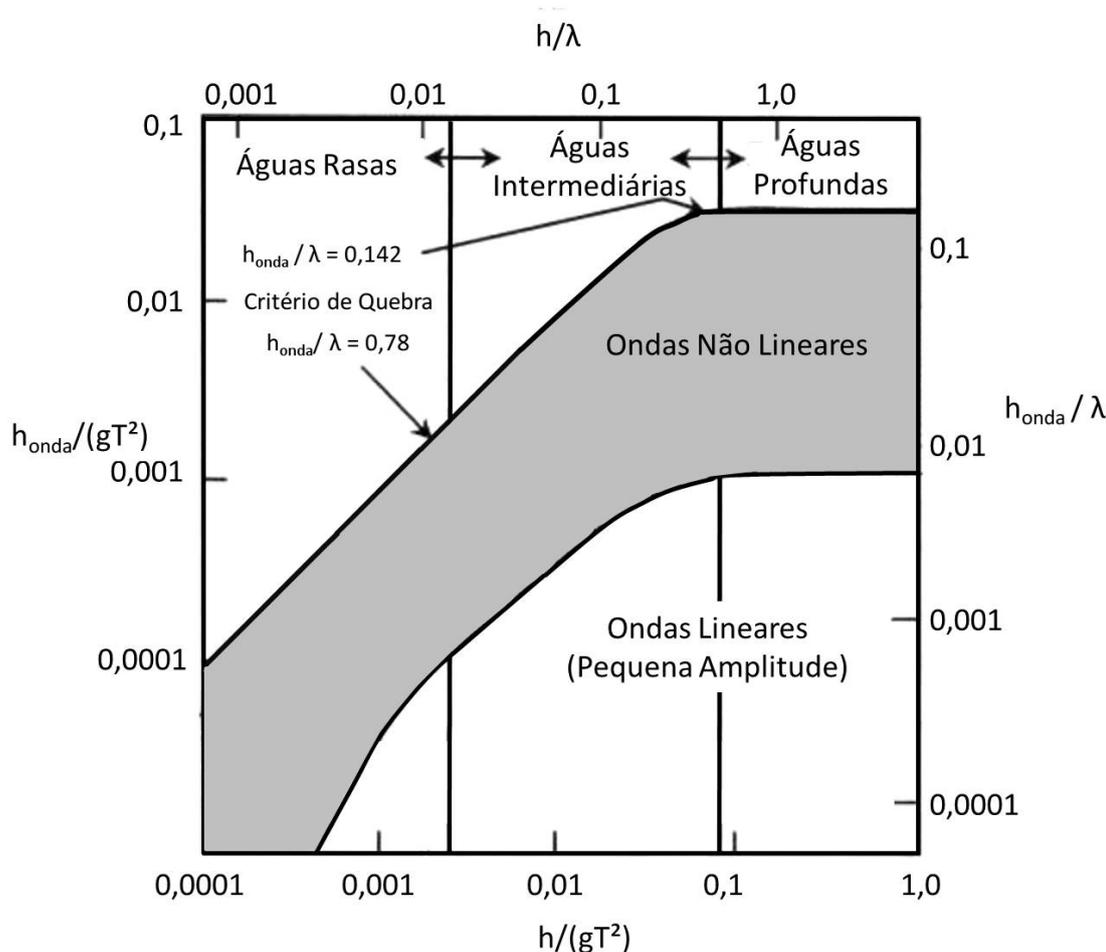


Figura 2.4: Limites de linearidade da onda (Adaptado de Kamphuis, 1988)[31].

A propagação da onda depende do adimensional profundidade relativa ( $h/\lambda$ ), onde  $\lambda$  é o comprimento de onda. Regiões onde a propagação da onda ocorre de formas distintas podem ser limitadas por: *águas profundas*:  $h/\lambda \geq 0,5$ ; *águas intermediárias*:  $0,5 > h/\lambda \geq 0,05$ ; *águas rasas*:  $h/\lambda < 0,05$  (Le Méhauté, 1976)[36].

Rosauro (1999)[47] definiu em seu trabalho as diferenças entre essas regiões. Na *região de*

*águas profundas*, o movimento da onda não é afetado pelo fundo, já que o transporte de energia fica restrito a uma determinada profundidade  $h^* < h$ , onde  $h^*$  é a profundidade virtual afetada pelo movimento. A velocidade varia ao longo da vertical, desde um valor máximo, próximo à superfície (ou na superfície), até zero a profundidade  $h^*$ . Claramente, as velocidades no fundo são nulas.

Na *região de águas intermediárias*  $h^* \approx h$ , assim, as partículas no fundo da seção transversal começam a se movimentar. Com isso, a onda passa a sofrer deformações na sua forma devido ao fundo e ocorre sua desaceleração, o que faz com que diminua o comprimento e aumente a altura desta onda.

Já na *região de águas rasas*  $h^* > h$ , ou seja, as ondas são fortemente afetados pelo fundo. Nesta região, as componentes horizontais da velocidade se tornam praticamente constantes ao longo das verticais, enquanto as componentes verticais tendem a zero.

#### 2.2.4 Obstáculos de Fundo

Os escoamento com obstáculos de fundo fazem parte uma área específica da engenharia hidráulica. Como no exemplo de emissários submarinos, a forma de análise desta situação é a verificação da interação fluxo-estrutura, onde a estrutura é o obstáculo de fundo.

Para se definir como o escoamento irá se comportar ao passar sobre uma deformação de fundo, é necessário definir se este, antes de passar pela deformação, é subcrítico ou supercrítico (Figura 2.5). Para casos de escoamentos subcríticos, o desnível deve se rebaixar na passagem pela deformação, reduzindo assim a sua energia específica. Contrariamente, para escoamentos supercríticos o desnível eleva, aumentando a sua energia específica.

Já, na passagem de uma onda sobre um obstáculo de fundo três situações podem ocorrer: a onda não será afetada pelo obstáculo; a onda sofrerá modificações em sua forma (transformação da onda), mas passará pelo obstáculo sem quebrar, ou a onda quebrará durante a passagem sobre o obstáculo (Figura 2.6). A ocorrência de uma destas situações irá depender da onda (altura e período), das dimensões do obstáculo e da batimetria (Rosauero, 1999)[47].

Rosauero 1999[47] concluiu que a transformação que a onda de superfície sofre ao se propa-

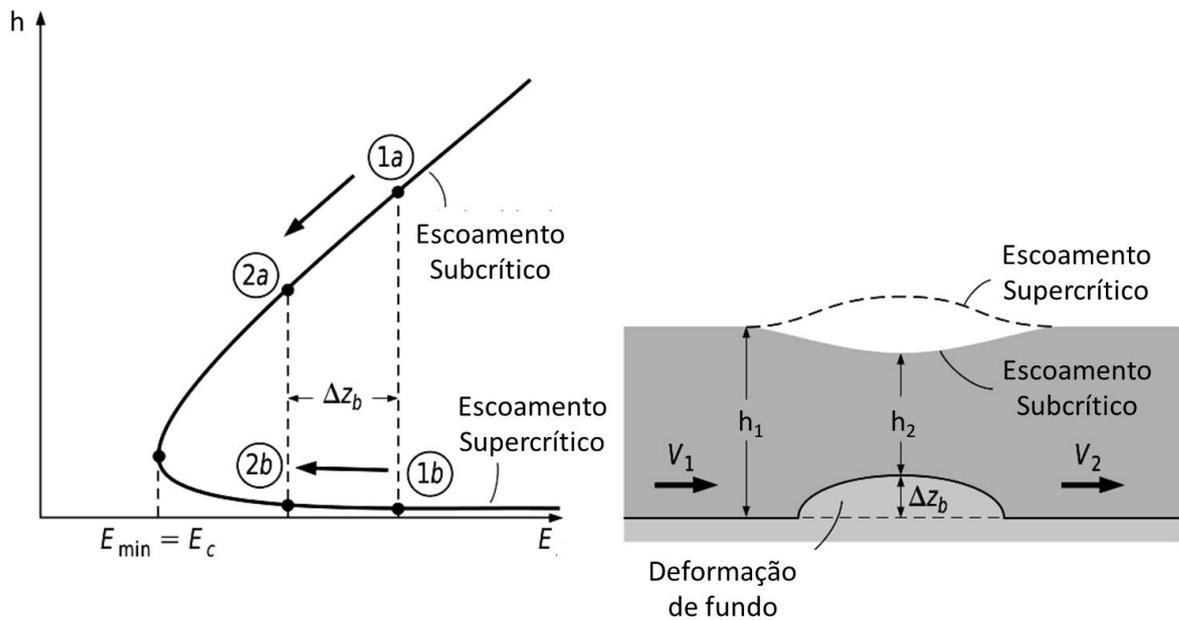


Figura 2.5: Diagrama profundidade-energia específica e escoamentos supercríticos e subcríticos para casos com obstáculos de fundo (Adaptado de Çengel e Cimbala, 2007).[11].

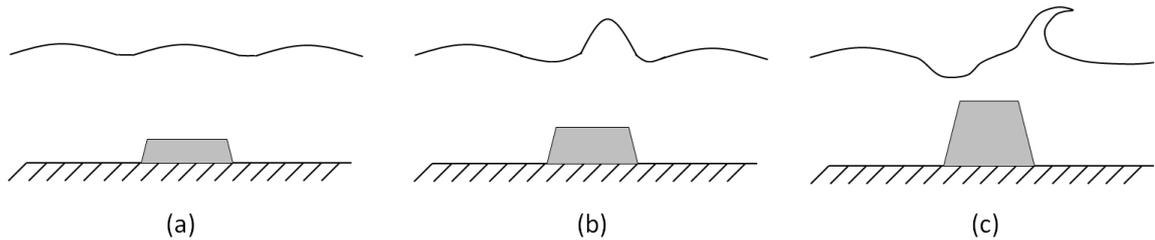


Figura 2.6: Exemplos hipotéticos do desenvolvimento de uma onda sobre um obstáculo: (a) o obstáculo não altera a onda, (b) o obstáculo altera significativamente a onda e (c) o obstáculo altera a onda a ponto dela quebrar durante sua passagem.

gar sobre um obstáculo de fundo (Figura 2.7) é maior com o aumento do período e da altura da onda. O comprimento da rampa de aclave tem grande importância na transformação da onda. Para maiores valores do comprimento da rampa de aclave, a quebra da onda passa a ocorrer para menores valores de onda incidente. Além disso, o comprimento da rampa de declive não afeta de forma significativa na transformação da onda. Já o comprimento do platô é um dos fatores que mais influencia a deformação da onda e a altura do tirante de água sobre o platô é o fator mais importante na transformação da onda.

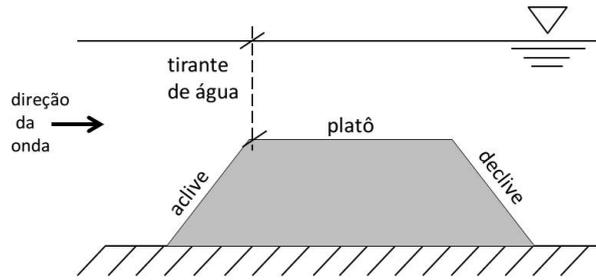


Figura 2.7: Características do obstáculo de fundo.

## 2.3 Métodos Numéricos para Simulação de Escoamentos

Existem diversos métodos numéricos para resolver problemas de escoamentos. Inicialmente, deve-se escolher qual o conjunto de equações que resolvem o problema específico de Mecânica dos Fluidos que se está estudando. Assim, adotam-se as aproximações discretas para as equações diferenciais. Neste capítulo serão apresentados os diferentes tipos de malha, assim como diferentes métodos de cálculo para problemas de escoamentos.

### 2.3.1 Discretização Espacial

De acordo com Laurien e Oertek (2011)[34] existem quatro métodos de discretização espacial que são utilizados com mais frequência na Mecânica dos Fluidos Computacional que podem ser classificados perante a flexibilidade e precisão de cada um (Figura 2.8).

A seguir serão descritos brevemente os métodos mais utilizados para a resolução espacial de equações diferenciais.

#### a) Método das Diferenças Finitas

As aproximações de diferenças finitas efetivamente substituem o operador diferencial contínuo por uma aproximação discreta, calculada a partir dos valores de  $f$  em um número finito de pontos. Estas aproximações finitas podem ser obtidas de várias formas, onde as mais usuais são: expansão por série de Taylor e interpolação polinomial.

O Teorema de Taylor permite aproximar uma função derivável na vizinhança reduzida em torno de um ponto, com

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left( \frac{df}{dx} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{d^3 f}{dx^3} \right)_i + \dots + R_N, \quad (2.20)$$

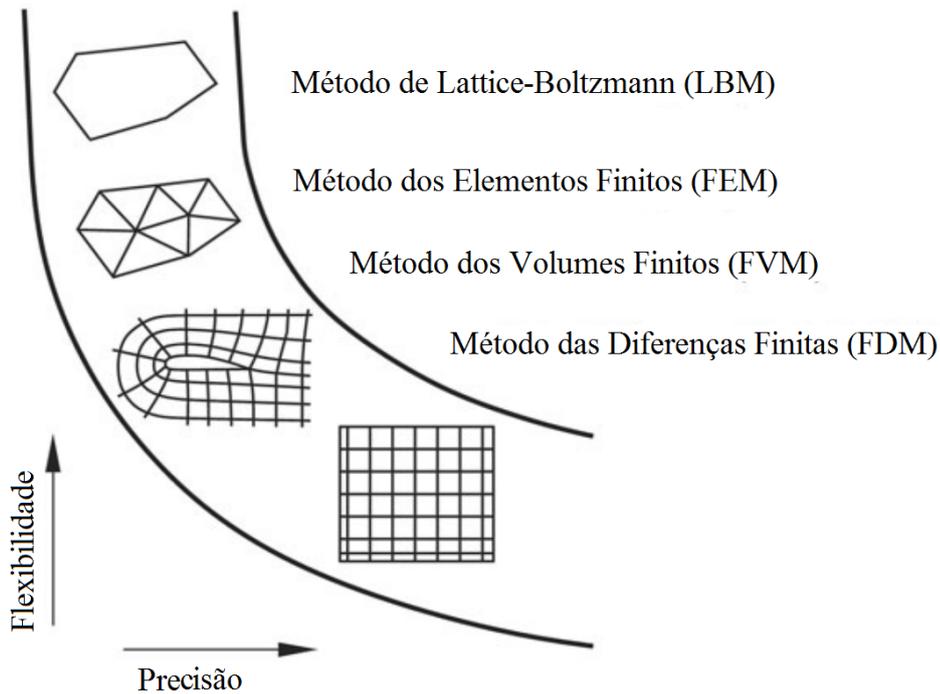


Figura 2.8: Classificação dos Métodos quanto a Flexibilidade e a Precisão (Adaptado de Laurien e Oertel, 2011).[34].

onde  $x_0$  é o ponto anterior a  $x$ ,  $R_N$  é o resto da série de Taylor e o subíndice  $i$  representa um  $i$ -ésimo elemento do conjunto que representa o volume de controle. Considerando uma variável dependente de  $x$ , como dependente da posição do ponto em  $i$  no eixo  $0x$ , pode-se ainda simplificar a expansão para sua aproximação de primeira ordem, tornando-a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.21)$$

onde  $O(\Delta x)$  é o erro cometido pela aproximação de primeira ordem. Cada termo da série de Taylor adicionado a esta equação torna-a mais próxima à diferencial.

### b) Método de Volumes Finitos

O método dos volumes finitos é baseado na resolução de balanços de massa, energia e quantidade de movimento a um determinado volume (ou polígono) de meio contínuo. Assim, o volume de controle é dividido entre uma malha com volumes finitos representados como polígonos (casos bidimensionais) ou como poliedros (casos tridimensionais).

### c) Método dos Elementos Finitos

O FEM fornece uma alternativa que é mais adequada para sistema com geometria irregular. Em contraste com as técnicas de FDM, o FEM divide o domínio da solução em regiões de formas simples ou "elementos". Assim, a solução aproximada para a equação diferencial parcial é desenvolvida para cada um desses elementos. A solução total é gerada juntando ou "montando" as soluções individuais, tomando cuidado para garantir a continuidade das fronteiras entre os elementos (Chapra e Canale, 2008)[12].

### d) Método Lattice-Boltzmann

Laurien e Oertek (2011)[34] mencionam que o LBM foi desenvolvido recentemente e é o mais flexível dentre os métodos de discretização de malha. Um dos primeiros relatos deste método foi de Kadanoff (1986)[30], onde o autor afirma que a ideia fundamental do LBM é a construção de modelos simplificados de cinética que incorporem a física essencial dos processos microscópicos e mesoscópicos para que as propriedades médias macroscópicas obedçam a equação desejada. A premissa básica para o uso deste método é que a dinâmica macroscópica de um fluido é o resultado do comportamento coletivo de muitas partículas microscópicas no sistema, e que a dinâmica geral não é sensível aos detalhes subjacentes da física microscópica. O autor ainda afirma a necessidade de estudos que em sua época eram necessários para a aplicação deste método.

## 2.3.2 Discretização Temporal

Estes métodos apresentados ainda podem ser diferenciados perante a sua discretização temporal. De acordo com Fortuna (2000)[23], a discretização temporal visa fornecer a relação entre os valores da variável em instantes sucessivos de tempo. A discretização temporal pode ser explícita, implícita ou semi-implícita.

### Discretização Explícita

A representação em diferenças finitas de primeira ordem ( $\Delta t$ ) de  $\frac{\partial u}{\partial t}$  é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.22)$$

onde  $n$  é o índice referente ao tempo e  $\Delta t$  é a discretização temporal. Para uma discretização explícita, o termo da derivada temporal à direita da Equação 2.22 segue como

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n). \quad (2.23)$$

Neste tipo de equação,  $u^{n+1}$  à esquerda da equação é o único termo desconhecido.

Como o valor da variável dependente do tempo  $n$  é conhecido de uma solução anterior ou de um dado inicialmente fornecido, o cálculo dos valores de  $n + 1$  dependem apenas do histórico passado (Figura 2.9) (Hoffman e Chiang, 2000)[29].

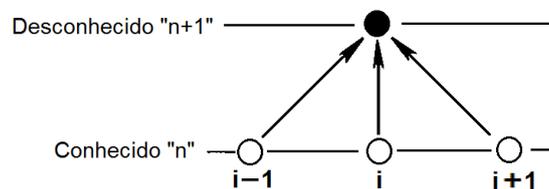


Figura 2.9: Exemplo dos pontos da grade para a formulação explícita (Adaptado de Hoffman e Chiang, 2000)[29]

### Discretização Implícita

Para uma discretização implícita, o termo da derivada temporal à direita da Equação 2.22 toma forma

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^{n+1}). \quad (2.24)$$

Nesta equação existe mais do que uma variável desconhecida, como por exemplo:  $u_{i-1}^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  e  $u_{i+1}^{n+1}$  (Figura 2.10) (Hoffman e Chiang, 2000)[29].

Os métodos totalmente implícitos são mais dispendiosos computacionalmente, já que é ne-

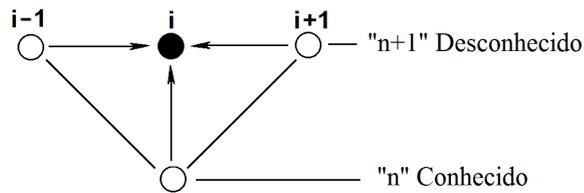


Figura 2.10: Exemplo dos pontos da grade para a formulação implícita (adaptado de Hoffman e Chiang, 2000)[29]

cessário resolver um novo sistema para cada passo de tempo. Porém, por outro lado, este método é incondicionalmente estável, então o passo de tempo pode ser determinado dependendo apenas das considerações de precisão (Peyret, 1995)[46].

### Discretização Semi-implícita

Finalmente, deve-se salientar que é possível formar uma equação ou sistema de equações em diferenças finitas com alguns termos aproximados no nível de tempo  $n$ , e outros em  $n + 1$ . Isto é feito por questões de estabilidade e/ou conveniência de implementação (Fortuna, 2000)[23]. Desta forma, a questão da estabilidade é restringida apenas para a parte explícita da equação. Este tipo de abordagem é aconselhada para tratar os termos os não-lineares, onde não é fácil isolar os termos em  $n + 1$ . Para uma discretização semi-implícita, o termo da derivada temporal à direita da Equação 2.22 segue como

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n, u^{n+1}). \quad (2.25)$$

### Correção quase-implícita

A correção quase-implícita (*Barely implicit correction*), proposta por Patnaik et al. (1987)[45], é aplicada para códigos que possuem termos explícitos, transformando uma fração deles em termos implícitos. Esta correção é feita adicionando uma equação elíptica a ser resolvida implicitamente, semelhante a uma equação parabólica já existente no código, resolvida explicitamente. Esta equação é ponderada, assim como o seu similar explícito através de um ponderador ( $\theta$ ). Estes autores ainda mencionam que com  $\theta = 0,5$  o método fornece o seu melhor resultado. Este método é indicado porque ele torna o código explícito mais estável e preciso.

A discretização apenas de primeira ordem de precisão no tempo, em códigos implícitos, gera um amortecimento artificial quando se usa passos de tempo grandes. Casulli e Catalli (1994)[7] consideram que quando  $\theta = 0,5$ , o gradiente de pressão na Equação do Momentum (Eq. 2.15 à 2.17) e as velocidades na Equação da Superfície Livre (2.12) são avaliadas como um valor médio de seus valores em  $n$  e  $n + 1$ , fazendo com que a discretização se torne de segunda ordem de precisão no tempo.

## 2.4 Métodos para Solução da Superfície Livre

De acordo com Ferziger e Peric (2002)[22], diversos métodos foram usados para encontrar o formato da superfície livre. Eles podem ser classificados nos seguintes grandes grupos:

- Métodos que tratam a superfície livre como o limite da interface superior onde o seu movimento é seguido (*interface-tracking method*). Neste tipo de método, são utilizadas grades encaixadas no contorno e seus tamanhos recalculados a cada passo de tempo para seguir o movimento da superfície livre.
- Métodos que não definem a superfície livre como o limite da interface superior (*interface-capturing method*). Os cálculos são realizados em grades fixas, que se estendem além da superfície livre. O formato da superfície livre é determinado pelo cálculo da fração de cada célula próxima da interface que está parcialmente cheia (de fluido). Com este intuito foi criado o esquema *Marker-and-Cell* ou *MAC* proposto por Harlow e Welch (1965)[28], que trabalha introduzindo partículas sem massa na superfície livre em um tempo inicial e segue seu movimento.
- Métodos híbridos que são uma mistura entre os dois métodos anteriormente apresentados.

O esquema *MAC* pode simular fenômenos complexos, como quebra de ondas. De qualquer forma, o dispêndio computacional é muito grande, especialmente em problemas tridimensionais, pois ele tem que seguir o movimento de muitas partículas (Ferziger e Peric, 2002)[22].

Este esquema foi aperfeiçoado em diversas maneiras, mas a restrição de estabilidade inibe sua aplicação em escoamentos tridimensionais geofísicos com grade suficientemente pequena.

Assim, as pequenas escalas da componente não-hidrostática do escoamento não são desenvolvidas (Casulli, 1999)[6].

Diversas são as aplicações e diferentes são os métodos utilizados na modelagem numérica de escoamentos com superfícies livres. Na Tabela 2.1 são apresentados trabalhos sobre o assunto, diferenciando-os entre os métodos numéricos, a aproximação da pressão (hidrostática e não-hidrostática) e os casos testados e utilizados. Um dos primeiros modelos é o de Harlow e Eddie (1965)[28], que utilizaram métodos simplificados para analisar computacionalmente a onda gerada por rompimento de barragem. Para validar os modelos existem desde casos simples até casos sofisticados nas referências.

## 2.5 Técnicas de Soluções Numéricas

Para resolver as equações discretas que possuem mais de uma variável desconhecida, como no caso da discretização implícita (Eq. 2.24), são necessárias técnicas de soluções numéricas que envolvem um sistema de equações normalmente organizados em matrizes.

Para problemas matriciais, onde

$$\mathbf{A}e = s, \quad (2.26)$$

onde  $A$  é uma matriz quadrática, de dimensões  $N_i \times N_i$ , com elementos conhecidos,  $e$  é um vetor  $N_i$  que representa as variáveis desconhecidas e  $s$  é um vetor  $N_i$  de elementos conhecidos. De acordo com Golub e Van Loan (1996)[27], existem duas aproximações abrangentes para problemas de matrizes esparsas, ou seja, aquelas que possuem muitos elementos que valem zero (ou não existem):

- Método Direto: Deve ser adaptado para se aproveitar da esparsidade de  $A$ . Táticas de adaptação normalmente envolvem o uso inteligente da estrutura de dados e estratégias de pivotamento especiais que maximizam o preenchido de elementos nulos.
- Os Métodos Iterativos que geram uma sequência de soluções aproximadas e envolvem, essencialmente, a matriz  $A$  apenas no contexto da multiplicação matricial. A avaliação de um Método Iterativo invariavelmente é focada em o quão rapidamente as iterações convergem.

Tabela 2.1: Aplicações de métodos de cálculo de escoamentos com superfícies livres.

Referência	Método Numérico	Pressão*	Casos Testados/Utilizados
Harlow e Eddie (1965)[28]	Explícito em diferenças finitas (2D)	NH	Quebra de barragem
Nichols e Hirt (1973)[40]	Explícito em diferenças finitas	NH	Propagação de onda Fluxo com obstáculos
Casulli e Cheng (1992)[8]	Semi-implícito em diferenças finitas	H	Bacia hidrográfica Lagoa
Casalas (1996)[4]	Implícito em diferenças finitas (2D)	H	Águas Rasas
Stansby e Zhou (1998)[49]	Semi-implícito em volume finito (2D)	NH	Escoamento de corrente estável Escoamento com recirculação
Casulli (1999)[6]	Semi-implícito em diferenças finitas	NH	Onda estacionária Propagação de ondas Lagoa
Namin et al. (2001)[39]	Implícito em diferenças finitas (2D)	NH	Propagação de ondas Correntes orientadas por vento
Stelling e Busnelli (2001)[50]	Semi-implícito em diferenças finitas (2D)	NH	Ressalto Hidráulico
Kanarska e Maderich (2003)[32]	Semi-implícito em diferenças finitas	NH	Propagação de ondas Reflexão Estratificação
Collischonn e Mota (2003)[15]	Semi-implícito em diferenças finitas (2D)	H	Águas Rasas
Labeur e Pietrzak (2005)[33]	Implícito em elementos finitos e malha não estruturada	NH	Propagação de ondas
Funke et al. (2011)[25]	Implícito em elementos finitos	NH	Canais inclinados Tsunami
Geng e Wang (2012)[26]	Semi-implícito em volumes finitos e malha não estruturada (2D)	H	Fluxo de maré
Cui et al. (2012)[16]	Volumes finitos e malha não estruturada	NH	Propagação de ondas
Fragoso Jr. (2012)[24]	Volumes finitos, não estruturada	H	Águas Rasas

\*H - hidrostática; NH - não-hidrostática

Os Métodos Diretos, muitas vezes, tornam-se muito complexos para serem utilizados em problemas com matrizes muito grandes e/ou pouco esparsas. Desta maneira, é indicado utilizar apenas os Métodos Iterativos. Um dos Métodos Iterativos mais utilizados e o que será adotado no presente trabalho é o do Gradiente Conjugado.

## Método do Gradiente Conjugado

O Método do Gradiente Conjugado (GC) foi criado por Hestenes e Stiefel (1952). De acordo com seus autores, este é superior aos métodos de eliminação por ser mais simples e necessitar de menor memória de armazenamento. Além disso, ele é ainda mais rápido e eficiente quando se usa em matrizes com grandes quantidades de valores nulos.

O GC pode ser utilizado para resolver sistemas lineares, onde  $A$  é uma matriz  $n$ -diagonal, simétrica e definida positiva ( $e^T A e > 0$ ). Este é um método iterativo baseado na medição de um erro do cálculo e, a cada iteração, se o método estiver adequadamente aplicado, o erro deve diminuir. Os métodos iterativos possuem vantagens perante os métodos diretos e para o caso de matrizes esparsas o primeiro resolve o problema mais rapidamente.

### Algoritmo do GC

Para se encontrar os valores do vetor  $e$ , tendo-se a matrix  $A$  simétrica e definida positiva, e o vetor de elementos conhecidos  $s$ , o seguinte passo-a-passo é utilizado no método do GC. Assim

$$p_0 = r_0 = s - A e_0, \quad (2.27)$$

onde  $e_0$  é arbitrário (preferencialmente = 0) e  $p_0$  e  $r_0$  são erros a serem reduzidos por este método. Continuando

$$\alpha_i = \frac{|r_i|^2}{(p_i, A p_i)}, \quad (2.28)$$

$$e_{i+1} = e_i + \alpha_i p_i, \quad (2.29)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i, \quad (2.30)$$

$$\beta_i = \frac{|r_{i+1}|^2}{|r_i|^2}, \quad (2.31)$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} - \beta_i p_i. \quad (2.32)$$

Nota-se que os subíndices se referem ao passo de tempo da iteração do método do GC. Este processo deve ser repetido até que a condição " $|r_i^2| < Erro$ " seja atingida, onde "*Erro*" é o valor do erro aceitável para a aplicação do método definido pelo usuário. No caso,  $e_{i+1}$  será o valor final fornecido por este método quando a condição de erro for respeitada.

## 2.6 Condições limite e camada esponja

As equações diferenciais parciais são resolvidas em um domínio restrito e definido e para condições auxiliares também restritas. Em outras palavras, cada solução da equação ou do sistema de equações corresponde a uma condição a priori definida para esta solução ainda desconhecida. Portanto, a função e a solução do considerado problema devem satisfazer simultaneamente a condição do domínio e das condições adicionais. Estas condições adicionais são normalmente denominadas de condições limites. As condições limites são divididas em dois tipos: as condições iniciais e as condições de contorno (Szymkiewicz, 2010)[52].

As condições iniciais são dadas durante o instante de tempo inicial do cálculo (em geral  $t = 0s$ ) um tempo definido, normalmente no início da simulação, e as condições de contorno são as aplicadas nos limites do espaço físico (Cunge et al., 1980)[17]. Para o caso do escoamento com superfície livre com aproximação não-hidrostática, as condições iniciais são compostas pelos campos de velocidade, pressão dinâmica e desnível.

Ao longo do plano de contorno  $x = 0$  (Figura 2.11), onde  $Lx$ ,  $Ly$  e  $Lz$  são o comprimento, a largura e a altura do volume de controle respectivamente, tem-se que  $u$  é a velocidade normal ao plano e  $v$  e  $w$  são as velocidades tangenciais ao plano. Define-se, então, as possíveis condições de contorno

- *Condição de não deslizamento:* As velocidades no contorno devem satisfazer a *condição de não deslizamento*. Para os valores que estão diretamente no contorno, apenas deve-se aplicar:

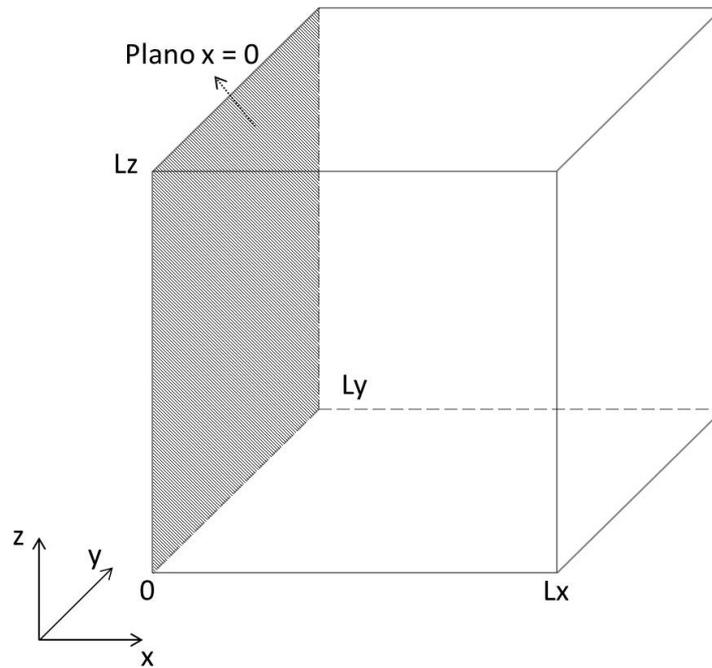


Figura 2.11: Volume de controle e planos de demonstração das condições de contorno

$$u(0, y, z) = 0, \quad v(0, y, z) = 0, \quad w(0, y, z) = 0. \quad (2.33)$$

- *Condição de deslizamento livre:* Esta condição é um caso específico da condição de von Neumann. A componente normal ao contorno deve ser nula, assim como a derivada normal das componentes tangenciais:

$$u(0, y, z) = 0, \quad \partial v(0, y, z) / \partial n = 0, \quad \partial w(0, y, z) / \partial n = 0. \quad (2.34)$$

- *Condição de velocidade prescrita:* Também é conhecida como condição de Dirichlet. As velocidades são fornecidas explicitamente:

$$u(0, y, z) = \text{fornecido}, \quad v(0, y, z) = \text{fornecido}, \quad w(0, y, z) = \text{fornecido}. \quad (2.35)$$

- *Condição de saída de fluxo:* Também chamada de Condição de Radiação de Sommerfeld, ou apenas, condição de radiação. As derivadas normais de todas as componentes (tangenciais e normal) são nulas:

$$\partial u(0, y, z) / \partial n = 0, \quad \partial v(0, y, z) / \partial n = 0, \quad \partial w(0, y, z) / \partial n = 0. \quad (2.36)$$

Assim, pode-se tomar para os outros planos de contornos do volume de controle (planos  $x = Lx$ ,  $y = 0$ ,  $y = Ly$ ,  $z = 0$  e  $z = Lz$ ) definições análogas à Equação 2.33 à 2.36.

Uma condição de radiação ideal seria aquela que não permitisse a ocorrência de reflexão. No entanto, podem existir ondas que não conseguirão sair do domínio e serão refletidas. Uma das maneiras de se evitar este problema é através do uso de uma "camada esponja" associada à condição de radiação. Esta camada tem a finalidade de absorver a onda na saída do domínio computacional (daí seu nome) de modo que a reflexão de qualquer onda seja anulada. Consiste basicamente em uma condição adicional que é incorporada na fronteira do domínio, aonde a onda será absorvida (Rosauero, 1999)[47].

Park et al. (1993)[44] propõem um esquema de amortecimento (camada esponja)

$$\xi_i = \begin{cases} \beta \left( \frac{x_i - x_{i0}}{l_i} \right)^2 \left( \frac{z_m - z}{z_m - z_M} \right) & \text{se } x_i \geq x_{i0}, \\ 0 & \text{se } x_i < 0, \end{cases}$$

onde  $\xi_i$  é o coeficiente da camada esponja,  $\beta$  é o parâmetro de amortecimento,  $x_{i0}$  é o ponto inicial da camada esponja,  $l_i$  é o comprimento da camada esponja e  $m$  e  $M$  representam os índices referentes ao fundo e à superfície livre, respectivamente. Este termo deve ser adicionado no lado direito das Equações 2.2 e 2.3 junto a um termo de velocidade  $u$  e  $v$ , respectivamente.

## 2.7 Estabilidade, Verificação e Validação

Para qualquer modelo numérico, existem formas de garantir seu funcionamento adequado e coerente para determinado problema. Com este intuito, as condições de estabilidade devem ser respeitadas, assim como as simulações devem fornecer bons resultados nos processos de verificação e validação.

### 2.7.1 Estabilidade

Um esquema discretizado é dito estável se o erro numérico não cresce indefinidamente em uma específica direção ao longo dos ciclos de cálculo. Considera-se, tipicamente, que os erros numéricos são provenientes de arredondamentos computacionais, mas também, podem ter outras fontes. Nota-se que o conceito da estabilidade numérica é aplicado somente para as equações discretas, e não deve ser confundido com a instabilidade natural que pode aparecer

nos modelos matemáticos, como por exemplo em problemas caóticos (Oberkampf and Christopher, 2010)[42].

Em escoamentos subcríticos as ondas podem viajar em todas as direções. Se o método de cálculo da superfície livre não for adequadamente implementado, distúrbios na forma de pequenas ondas podem afetar a estabilidade do método. Um esquema satisfaz a *condição de radiação* quando este não gera ondas puramente numéricas (não existem fisicamente) evitando distúrbios.(Chen, 2003)[13].

### Condições de Courant-Friedrichs-Lewy

De acordo com Durran (2010)[21], a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é dada por:

$$0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1 \quad e \quad 0 \leq d \leq 1, \quad (2.37)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $d$  são os Números de Courant ( $Cr$ ) da malha descritos como

$$a = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{max}, \quad b = \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{max} \quad e \quad d = \frac{\Delta t}{\Delta z} w_{max}, \quad (2.38)$$

Esta condição representa uma relação entre a velocidade da partícula e a velocidade que a malha suporta.

Quando se utiliza uma discretização explícita de primeira ordem para representar as Equações de Navier-Stokes (2.2-2.4), através da condição de CFL, tem-se que a seguinte condição de estabilidade deve ser respeitada:

$$\Delta t \leq \left[ \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + 2\nu \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right]^{-1}. \quad (2.39)$$

### Conservação de Massa

Nos modelos matemáticos de Mecânica dos Fluidos a conservação de massa é uma das principais fórmulas a serem respeitadas para se ter a estabilidade do código, também considerada

como a divergência da velocidade ( $\nabla \cdot \vec{V}$ ). O princípio da conservação de massa é de extrema importância para a física. A conservação de massa na forma integral é normalmente apresentada como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dvol + \int_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_r = 0, \quad (2.40)$$

onde  $VC$  é o volume de controle,  $SC$  é a superfície de controle e  $\vec{n}$  é o versor normal exterior à  $SC$ . Para o caso incompressível, a Equação 2.40 se reduz à conservação de volume:

$$\frac{dVC}{dt} = - \int_{SC} \vec{V} \cdot \vec{n} dA_r. \quad (2.41)$$

Representando o sistema de controle para um sistema tridimensional (Figura 2.12), tem-se que

$$\frac{dVC}{dt} = - [-u_{ABEF} dy \cdot dz + u_{CDGH} dy \cdot dz - v_{ABCD} dx \cdot dz + v_{EFGH} dx \cdot dz - w_{ADEH} dx \cdot dy + w_{BCFG} dx \cdot dy]. \quad (2.42)$$

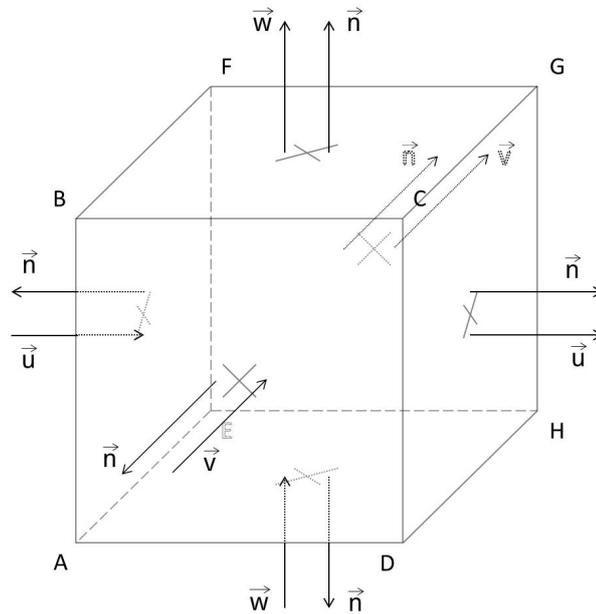


Figura 2.12: Sistema de controle tridimensional

Para se encontrar a variação total de volume com o tempo, define-se que

$$\Delta vol = \Sigma \left( \frac{dVC}{dt} \Delta t \right). \quad (2.43)$$

Facilitando a comparação com diferentes casos, a conservação de volume é expressa como

$$\Delta vol(\%) = \frac{\Delta vol}{vol_0} 100 = \Sigma \left( \frac{dVC}{dt} \Delta t \right) \frac{100}{vol_0}, \quad (2.44)$$

onde  $vol_0$  é o volume na condição inicial.

### 2.7.2 Verificação e Validação

Testes de verificações são necessários para identificar se a implementação de um código numérico foi realizada de forma coerente. A verificação avalia se as formulações matemáticas e numéricas foram aplicadas corretamente. Os testes de validações são necessários para avaliar se a teoria que envolve as equações aplicadas são adequadamente expressas. Então, a validação avalia a exatidão do resultado de um modelo numérico baseando-se na comparação entre os resultados computacionais e os dados experimentais ou analíticos. Assim sendo, verificação e validação são processos primários para quantificar e qualificar a precisão e a exatidão dos resultados computacionais de determinado código.

Fortuna (2000) menciona que a verificação determina se o modelo, representado por equações, parâmetros e métodos numéricos adotados, corresponde a sua descrição conceitual, isto é, se o modelo está corretamente implementado. Os resultados numéricos fornecidos pela implementação do modelo são comparados a outras soluções, consideradas "de referência". Essas soluções podem ser analíticas, numéricas ou experimentais. Já, a validação quantifica o grau de representatividade do modelo em relação ao fenômeno físico real. Essa análise é normalmente realizada por comparações sistemáticas com dados experimentais já consagrados, representativos dos tipos de fenômenos nos quais se espera simular.

Por ou outro ponto de vista, na verificação, a associação ou relação da simulação para o mundo real não é uma questão. Já na validação esta relação é a questão. A essência de cada conceito é captada na expressão compacta: verificar é resolver a equação corretamente; validar é resolver a equação correta (Oberkampf and Christophe, 2010)[42].

## Capítulo 3

# Metodologia Matemática e Numérica

Neste capítulo é apresentado a metodologia matemática e logo após o tratamento numérico para a resolução desta metodologia. Aqui são mostradas as equações utilizadas, suas formas discretizadas e quais os métodos numéricos que são aplicados para a resolução destas equações. Além disso, são apresentadas as hipóteses assumidas e as condições iniciais e de contorno. A metodologia numérica é implementada inteiramente pelo autor deste trabalho, sem a utilização de códigos pré-construídos.

A metodologia apresentada se aplica a casos de escoamentos com superfície livre tridimensionais e o esquema numérico é semi-implícito em diferenças finitas. As pressões são calculadas com aproximação não-hidrostática. Este método é uma simplificação do modelo de turbulência com Equações RANS, onde o tensor de tensões aparentes de Reynolds é considerado constante.

A metodologia para o tratamento da superfície livre foi o método de rastreamento de interface (*interface-tracking method*), que trata a superfície livre como o limite da interface superior onde o seu movimento é seguido pela face superior do volume de controle. Desta forma, fenômenos bifásicos não podem ser representados por este modelo, como a quebra de ondas ou a presença de bolhas. Este método possui a vantagem de ter um baixo dispêndio computacional, se comparado a outros.

### 3.1 Modelo Matemático

O modelo matemático para escoamentos com superfície livre utilizado para calcular o campo de velocidades, de pressões e o desnível, compreende as Equações de Navier-Stokes, com pressões hidrostáticas e dinâmicas segregadas, dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.3)$$

a Equação diferencial da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

e a forma modificada da equação da Continuidade para superfície livre:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0. \quad (3.5)$$

Como apresentado no Item 2.4, diversos autores utilizam estas equações para o cálculo de escoamentos com superfície livre e aproximação não-hidrostática ([6], [10], [13], [25], [35], [50]).

Para resolver o sistema dado pela Equação 3.1 à 3.5, o modelo matemático é dividido em duas etapas. A primeira utiliza as Equações de Navier-Stokes considerando que a pressão se comporta em forma hidrostática, tendo como expressões:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.8)$$

junto com a Equação 3.5, formando um sistema de 4 equações e 4 incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\eta$ ), que dará a solução devida à parte hidrostática.

A segunda etapa consiste no cálculo da pressão dinâmica por meio do sistema de equações formado pelos termos de aceleração local e gradiente de pressão dinâmica da Equação de Navier-Stokes (Eq. 2.2 à 2.4), dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}, \quad (3.11)$$

onde as velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  não são as mesmas apresentadas nas Equações 3.6, 3.7 e 3.8 e serão diferenciadas a seguir, na explicação do Método Numérico. Este passo é desenvolvido junto à Equação 3.5 e à Equação 2.13, considerando-se que a pressão relativa na superfície do líquido é nula, obtendo

$$\eta = \tilde{\eta} + \frac{q_{sup}}{g}. \quad (3.12)$$

onde  $\tilde{\eta}$  é o desnível calculado no primeiro passo. Por fim, o segundo passo forma um sistema de 5 equações e 5 incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\eta$  e  $q$ ).

### 3.1.1 Condições de Contorno

A tensão de cisalhamento de fundo é expressa em termos das componentes da velocidade, tangenciais ao fundo, tomadas na camada adjacente à interface fundo-água. A tensão de cisalhamento no fundo pode ser relacionada com um coeficiente de arrasto associado com a velocidade quadrática ou apenas utilizando a fórmula Manning-Chézy como

$$\tau_x = \nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} u \quad e \quad \tau_y = \nu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} v, \quad (3.13)$$

onde  $\tau_x$  é a tensão de cisalhamento do fundo na direção do eixo  $0x$ ,  $\tau_y$  é a tensão de cisalhamento do fundo na direção do eixo  $0y$  e  $C$  é o coeficiente de atrito de Chézy. Para os casos

estudados neste trabalho, não será considerado o cisalhamento produzido pelo vento sobre a superfície. As condições de contorno para as velocidades podem ser consideradas como alguma das condições mostradas no Item 2.6.

## 3.2 Método Numérico

O método numérico representa como o modelo matemático será desenvolvido e suas equações resolvidas, utilizando-se um esquema de discretização espacial e temporal. Para a resolução discreta das Equações de Navier-Stokes com as pressões hidrostáticas e dinâmicas segregadas (Eq. 3.1 a 3.3), considera-se que a variação temporal é dividida em dois subpassos de tempo. No primeiro é considerado que o escoamento é influenciado apenas pela pressão hidrostática, e são calculados os campo de velocidades e o desnível. Já no segundo subpasso de tempo as pressões dinâmicas são consideradas, assim como sua influência sobre as outras variáveis (velocidades e desnível).

### 3.2.1 O Método Semi-implícito de Diferenças Finitas

Para tornar o código incondicionalmente estável, as variáveis devem ser calculadas implicitamente. Como esses cálculos demandam maior esforço computacional, no presente modelo, certas variáveis são calculadas explicitamente, tendo então, que se respeitar algumas restrições de estabilidade. Em outras palavras, o método utiliza um esquema de passo de tempo fracionado semi-implícito. As variáveis calculadas implicitamente são: o desnível ( $\eta$ ), termos da derivada segunda vertical ( $\partial^2 c / \partial z^2$ ), a tensão de cisalhamento do fundo ( $\tau$ ) e a pressão dinâmica ( $q$ ). Também é aplicada a *correção quase implícita* adicionando o ponderador ( $\theta$ ) nas velocidades e no desnível da Equação 2.12 e nos termos de desnível das Equações 3.6 e 3.7.

O modelo foi desenvolvido para um sistema em coordenadas cartesianas em diferenças finitas, onde  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  representam o número de células nos eixos  $0x$ ,  $0y$  e  $0z$ , respectivamente. Um domínio 3D com comprimento  $L_x$ , largura  $L_y$  e altura  $L_{z,i,j}$  é utilizado para definir espacialmente a configuração adotada. Os limites de fundo e superfície livre variam de acordo com

$1 \leq m \leq M \leq N_z$ , onde  $m$  é o índice que representa o fundo e  $M$  é o índice que representa a superfície livre (Figura 3.1). Nota-se que a altura do domínio é variável. Cada célula é numerada com os índices  $i, j$  e  $k$  em seu centro. Um arranjo de malha deslocada entre velocidade e pressão é empregado (Figura 3.2).

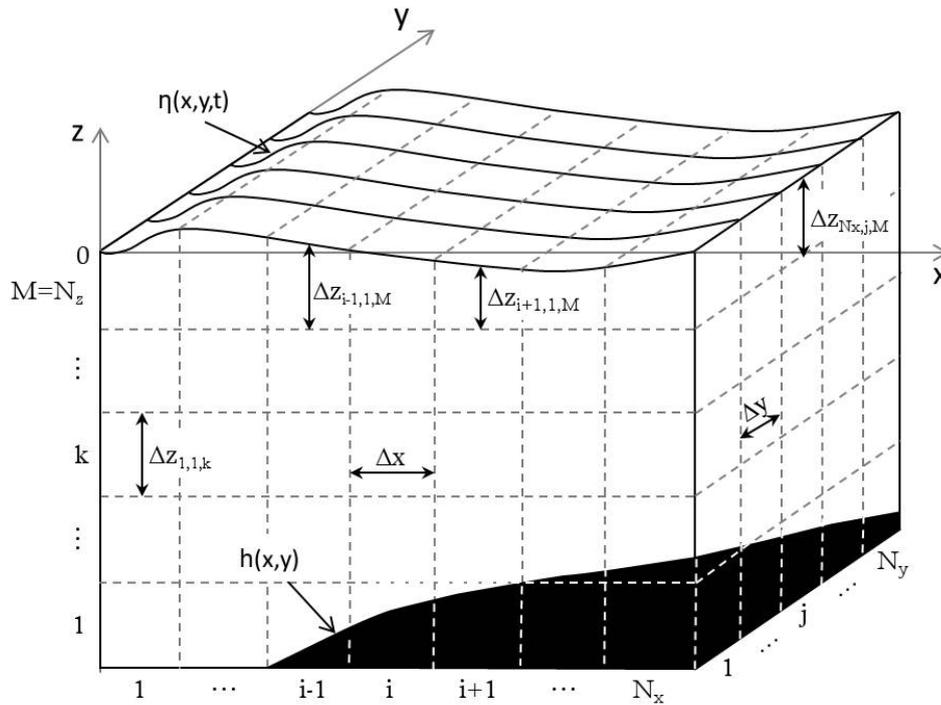


Figura 3.1: Representação do domínio computacional.

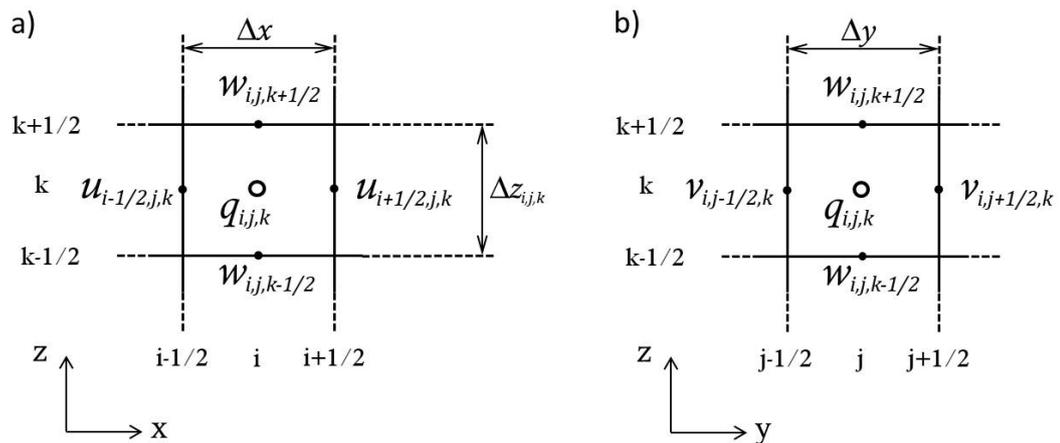


Figura 3.2: Sistema cartesiano de grades com arranjo deslocado onde: a) refere-se aos planos xz; b) refere-se aos planos yz.

O termo da discretização espacial vertical ( $\Delta z_{i,j,k}$ ) é função do espaço e do tempo. Na camada de células próximas a superfície livre ( $\Delta z_{i,j,N_z}$ ), elas tem que modificar o seu tamanho para

acompanhar a variação do desnível (Figura 3.3), logo, utiliza-se a equação:

$$\Delta z_{i,j,Nz}^{n+1} = \Delta z_{i,j,Nz}^n + (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^n). \quad (3.14)$$

Nota-se que para este esquema  $\Delta z_{i,j,Nz}$  não pode ser zero ou negativo limitando o código, e, assim, a condição  $\Delta z_{i,j,Nz}^n > \eta_{i,j}^n - \eta_{i,j}^{n+1}$  deve ser respeitada.

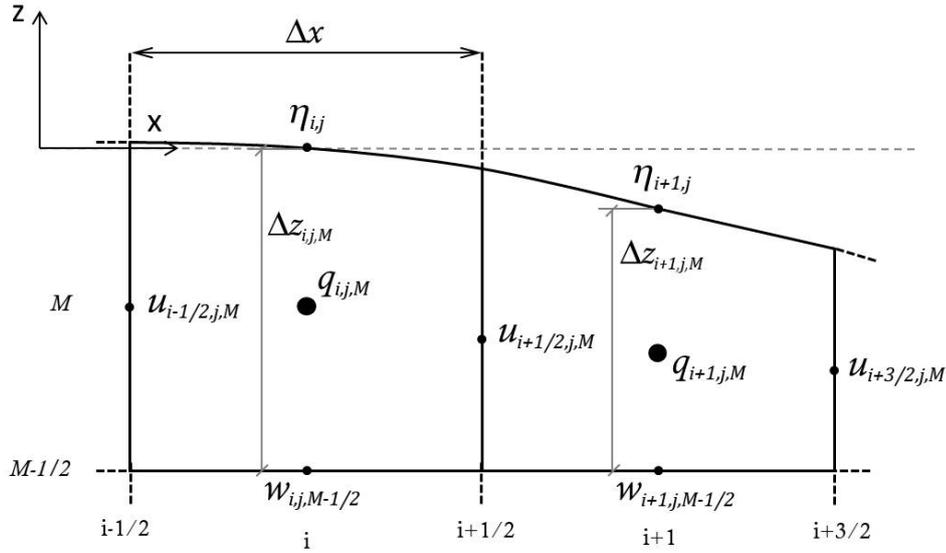


Figura 3.3: Sistema cartesiano de grades deslocadas em um plano  $xz$  próximo à superfície livre.

Existem seis tipos diferentes de  $\Delta z$  que variam com a diferencial a qual foi aproximada (Tabela 3.1 e Figura 3.4). Os outros termos a discretização espacial vertical ( $\Delta x$  e  $\Delta y$ ) não variam com o tempo e a suas distribuições são informadas pelo usuário do código.

Tabela 3.1: Diferentes tipos de  $\Delta z$  e suas obtenções.

$\Delta z$	Referente à	Método de Obtenção
$\Delta z_{i,j,k}$	$\partial\eta/\partial z, \partial q/\partial z$ e $\partial^2 w/\partial z^2$	Fornecido pelo usuário
$\Delta z_{i+1/2,j,k}$	$\partial u/\partial z$	$= (\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i+1,j,k})/2$
$\Delta z_{i,j+1/2,k}$	$\partial v/\partial z$	$= (\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j+1,k})/2$
$\Delta z_{i,j,k+1/2}$	$\partial w/\partial z$	$= (\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k+1})/2$
$\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}$	$\partial^2 u/\partial z^2$	$= (\Delta z_{i+1/2,j,k} + \Delta z_{i+1/2,j,k+1})/2$
$\Delta z_{i,j+1/2,k+1/2}$	$\partial^2 v/\partial z^2$	$= (\Delta z_{i,j+1/2,k} + \Delta z_{i,j+1/2,k+1})/2$

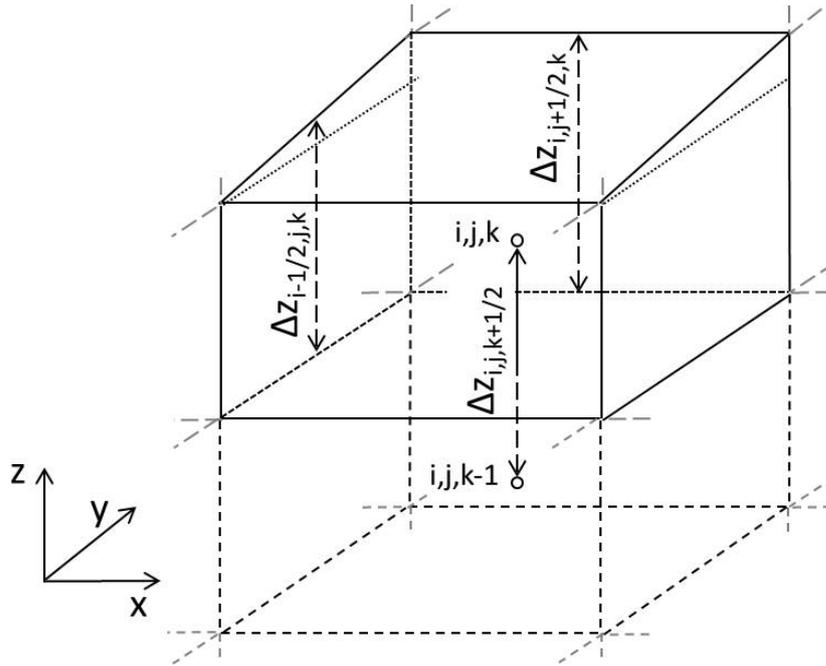


Figura 3.4: Representação dos diferentes tipos de  $\Delta z$

### 3.2.2 Desenvolvimento do Método Numérico

Para resolver discretamente as Equações de Navier Stokes com as pressões hidrostáticas e dinâmicas segregadas (Eq. 2.15 à 2.17) são utilizados dois modelos matemáticos diferentes. Além disso, a discretização temporal é dividida em dois sub-passos de tempo, considera-se que

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} = \frac{c^{n+1} - \tilde{c}^{n+1} + \tilde{c}^{n+1} - c^n}{\Delta t} = \frac{c^{n+1} - \tilde{c}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\tilde{c}^{n+1} - c^n}{\Delta t}, \quad (3.15)$$

onde  $\tilde{c}^{n+1}$  é uma variável no sub-passo de tempo,  $\frac{\tilde{c}^{n+1} - c^n}{\Delta t}$  é o sub-passo referente ao primeiro modelo e  $\frac{c^{n+1} - \tilde{c}^{n+1}}{\Delta t}$  é o sub-passo referente ao segundo modelo.

No primeiro modelo é considerado que o escoamento é influenciado pela pressão apenas hidrostática, e são calculados os campo de velocidades e o desnível, ou seja

$$f(\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}, \tilde{w}^{n+1}, \tilde{\eta}^{n+1}) = F(u^n, v^n, w^n, \eta^n). \quad (3.16)$$

Já no segundo sub-passo de tempo as pressões dinâmicas são consideradas, assim como sua influência sobre as outras variáveis (velocidades e desnível), assim

$$f(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}, q^{n+1}) = F(\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}, \tilde{w}^{n+1}, \tilde{\eta}^{n+1}). \quad (3.17)$$

### Primeiro passo do cálculo: Pressão Hidrostática

O primeiro passo é realizado considerando apenas a contribuição das pressões hidrostáticas. Desta forma, adotam-se velocidades e desnível não corrigidos pela notação  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  e  $\tilde{\eta}$ . Percebe-se que os valores não corrigidos são utilizados apenas para o tempo  $n + 1$ , como um passo de tempo intermediário, já que os valores corrigidos no tempo  $n$  já são conhecidos. A discretização semi-implícita das Equações de Momentum, com as Equação 3.6 e 3.7, levam ao sistema de duas equações

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = & F u_{i+1/2,j,k}^n - (1 - \theta) g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) \\ & + \frac{\nu \Delta t}{\Delta z_{i+1/2,j,k}^n} \left( \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j,k+1}^{n+1} - \tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}^n} - \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \tilde{u}_{i+1/2,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k-1/2}^n} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1} = & F v_{i,j+1/2,k}^n - (1 - \theta) g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{\eta}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) \\ & + \frac{\nu \Delta t}{\Delta z_{i,j+1/2,k}^n} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k+1/2}^n} - \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j+1/2,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k-1/2}^n} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

e a Equação 3.8 ao sistema

$$\tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1} = F w_{i,j,k+1/2}^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta z_{i,j,k+1/2}^n} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k+3/2}^{n+1} - \tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+1}^n} - \frac{\tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \tilde{w}_{i,j,k-1/2}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k}^n} \right), \quad (3.20)$$

onde  $\theta$  é um parâmetro da correção quase implícita. O termo  $F$  é um operador advectivo-difusivo em diferenças finitas, o qual inclui os termos da discretização explícita das derivadas substanciais (termos das acelerações locais e convectivas) e das forças viscosas (termo difusivo) horizontais. Também podem ser considerados neste operador os termos referentes à camada esponja. Uma maneira de calcular o termo  $F$  será mostrada mais tarde.

As Equações 3.18 e 3.19 são sistemas lineares tridiagonais, porém estas, além das velocida-

des no tempo  $n + 1$  possuem os desníveis  $\tilde{\eta}^{n+1}$  como variáveis desconhecidas. Estas equações são utilizadas para o cálculo do desnível. Para determinar  $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$ , e por estabilidade numérica, a Equação 2.12, reescrita em sua forma semi-implícita com as velocidades não corrigidas, é representada por

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} = & \eta_{i,j}^n - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2,j,k}^n \tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2,j,k}^n \tilde{u}_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right] \\ & - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+1/2,k}^n \tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-1/2,k}^n \tilde{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1} \right] \\ & - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^n - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2,j,k}^n u_{i-1/2,j,k}^n \right] \\ & - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+1/2,k}^n v_{i,j+1/2,k}^n - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-1/2,k}^n v_{i,j-1/2,k}^n \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para facilitar o algebrismo matemático, é conveniente escrever as fórmulas em notação vetorial. Multiplicando as Equações 3.18, 3.19 e 3.20 por  $\Delta z_{i+1/2,j,k}^n$ ,  $\Delta z_{i,j+1/2,k}^n$  e  $\Delta z_{i,j,k+1/2}^n$  respectivamente, pode-se reescreve-las da forma:

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\eta}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n \tilde{\mathbf{V}}_{i,j+1/2}^{n+1} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \theta g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{\eta}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{A}_{i,j}^n \tilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i,j}^n, \quad (3.24)$$

onde  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{W}}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\Delta \mathbf{Z}$  são definidos como

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{i+1/2,j,M}^{n+1} \\ \tilde{u}_{i+1/2,j,M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{i+1/2,j,m}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{i,j+1/2,M}^{n+1} \\ \tilde{v}_{i,j+1/2,M-1}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{v}_{i,j+1/2,m}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{i,j,M+1/2}^{n+1} \\ \tilde{w}_{i,j,M-1/2}^{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{i,j,m-1/2}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j} = \begin{bmatrix} \Delta z_{i+1/2,j,M} \\ \Delta z_{i+1/2,j,M-1} \\ \vdots \\ \Delta z_{i+1/2,j,m} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2} = \begin{bmatrix} \Delta z_{i,j+1/2,M} \\ \Delta z_{i,j+1/2,M-1} \\ \vdots \\ \Delta z_{i,j+1/2,m} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{G}_{i+1/2,j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{i+1/2,j,M} \left\{ F u_{i+1/2,j,M}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \\ \Delta z_{i+1/2,j,M-1} \left\{ F u_{i+1/2,j,M-1}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \\ \vdots \\ \Delta z_{i+1/2,j,m} \left\{ F u_{i+1/2,j,m}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{i,j+1/2,M} \left\{ F v_{i,j+1/2,M}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \\ \Delta z_{i,j+1/2,M-1} \left\{ F v_{i,j+1/2,M-1}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \\ \vdots \\ \Delta z_{i,j+1/2,m} \left\{ F v_{i,j+1/2,m}^n - (1-\theta) g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n) \right\} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{G}_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_{i,j,M+1/2} F w_{i,j,M+1/2}^n \\ \Delta z_{i,j,M-1/2} F w_{i,j,M-1/2}^n \\ \vdots \\ \Delta z_{i,j,m-1/2} F w_{i,j,m-1/2}^n \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta z_M + a_{M-1/2} + \zeta_M & -a_{M-1/2} & \cdots & 0 \\ -a_{M-1/2} & \Delta z_{M-1} + a_{M-1/2} + a_{M-3/2} + \zeta_{M-1} & -a_{M-3/2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{m+1/2} & \Delta z_m + a_{m+1/2} + \zeta_m \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

onde  $a_k = v \Delta t / \Delta z_k$  e  $\zeta_k = \frac{g \Delta t \sqrt{(u_k^2 + v_k^2)}}{C^2}$  quando  $k$  representar o fundo, caso contrário  $\zeta_k = 0$ . A Matriz  $\mathbf{A}$  representa os termos implícitos (desconsiderando o desnível e as pressões dinâmicas) e seus elementos e índices variam de acordo com as Equações 3.18, 3.19 e 3.20.

Desta forma, podemos reescrever a Equação 3.21, usando notação vetorial, como

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^* - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n)^T \tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j}^n)^T \tilde{\mathbf{U}}_{i-1/2,j}^{n+1} \right] \\ - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n)^T \tilde{\mathbf{V}}_{i,j+1/2}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z}_{i,j-1/2}^n)^T \tilde{\mathbf{V}}_{i,j-1/2}^{n+1} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde o termo explícito do desnível ( $\eta^*$ ) é dado por

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^* = \eta_{i,j}^n - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n)^T \mathbf{U}_{i+1/2,j}^n - (\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j}^n)^T \mathbf{U}_{i-1/2,j}^n \right] \\ - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n)^T \mathbf{V}_{i,j+1/2}^n - (\Delta \mathbf{Z}_{i,j-1/2}^n)^T \mathbf{V}_{i,j-1/2}^n \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nota-se que o termo  $\eta^*$  não possui significado físico sendo apenas utilizado para o procedimento de cálculo.

Para modificar as variáveis desconhecidas da Equação 3.31 de  $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_{i-1/2,j}^{n+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}_{i,j+1/2}^{n+1}$  e  $\tilde{\mathbf{V}}_{i,j-1/2}^{n+1}$  para  $\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}$ ,  $\tilde{\eta}_{i+1,j}^{n+1}$ ,  $\tilde{\eta}_{i,j+1}^{n+1}$ ,  $\tilde{\eta}_{i-1,j}^{n+1}$  e  $\tilde{\eta}_{i,j-1}^{n+1}$ , deve-se substituir as Equações 3.22 e 3.23 na Equação 3.31, formando

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - g\theta^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i+1/2,j}^n (\tilde{\eta}_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i-1/2,j}^n (\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i-1,j}^{n+1}) \right\} \\ - g\theta^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j+1/2}^n (\tilde{\eta}_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}) - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j-1/2}^n (\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \tilde{\eta}_{i,j-1}^{n+1}) \right\} \\ = \eta_{i,j}^* - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i+1/2,j}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i-1/2,j}^n \right\} \\ - \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j+1/2}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j-1/2}^n \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Essa equação forma um sistema pentadiagonal, simétrico e positivo. O sistema tem solução única e pode ser determinado pelo Método do Gradiente Conjugado, o qual será discutido posteriormente. Uma vez determinados os desníveis não corrigidos  $\tilde{\eta}^{n+1}$ , calculam-se as velocidades  $\tilde{u}^{n+1}$  e  $\tilde{v}^{n+1}$  utilizando as Equações 3.22 e 3.23.

Para cada  $i$  e  $j$ , a Equação 3.20 forma um sistema linear e tridiagonal com variáveis  $\tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1}$  desconhecidas para cada coluna de água. Esta matriz é simétrica, positiva e sua resolução pode ser realizada por método direto utilizando a Equação 3.24.

### Segundo passo do cálculo: Pressão Dinâmica

No segundo passo, são calculadas as pressões dinâmicas e, então, estas são utilizadas para corrigir as velocidades e o desnível. Inicialmente são desenvolvidas as equações necessárias para se definir o sistema utilizado para encontrar as pressões dinâmicas.

Para as correções das velocidades, as Equações Diferenciais 3.9 a 3.11 são representadas em forma discreta e simplificada como

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i+1,j,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}), \quad (3.34)$$

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (q_{i,j+1,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}), \quad (3.35)$$

$$w_{i,j,k+1/2}^{n+1} = \tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j,k+1/2}^n} (q_{i,j,k+1}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}). \quad (3.36)$$

Estas simplificações são aceitas porque os termos da pressão dinâmica superficial deve ser desconsiderada, levando em conta a *condição dinâmica* (pressão do líquido = pressão do ar na superfície livre).

Em cada célula computacional a baixo da superfície livre a condição de incompressibilidade (Eq. 2.1) discretizada é levada em conta e é escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \\ & + w_{i,j,k+1/2}^{n+1} - w_{i,j,k-1/2}^{n+1} = 0, \quad k = m, m + 1, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

As equações discretizadas para a pressão dinâmica  $q^{n+1}$  abaixo da superfície livre são fornecidas pela substituição das expressões das velocidades corrigidas (Eqs. 3.34, 3.35 e 3.36) na Equação

da Continuidade (3.37), assim

$$\begin{aligned}
& \Delta t \left[ \frac{(q_{i+1,j,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}) \Delta z_{i+1/2,j,k}^n - (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i-1,j,k}^{n+1}) \Delta z_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. \frac{(q_{i,j+1,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1}) \Delta z_{i,j+1/2,k}^n - (q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j-1,k}^{n+1}) \Delta z_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{(q_{i,j,k+1}^{n+1} - q_{i,j,k}^{n+1})}{\Delta z_{i,j,k+1/2}^n} - \frac{(q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j,k-1}^{n+1})}{\Delta z_{i,j,k-1/2}^n} \right] \\
& = \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i+1/2,j,k}^n - \tilde{u}_{i-1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j+1/2,k}^n - \tilde{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \\
& \quad + \tilde{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \tilde{w}_{i,j,k-1/2}^{n+1}, \quad k = m, m+1, \dots, M-1.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Na superfície livre ( $k = M$ ), adicionando a equação corrigida da Equação 3.31, descrita como

$$\begin{aligned}
\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^* - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2,j,k}^n u_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right] \\
- \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+1/2,k}^n v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-1/2,k}^n v_{i,j-1/2,k}^{n+1} \right],
\end{aligned} \tag{3.39}$$

na Equação 3.37, escreve-se a condição para a superfície livre

$$\begin{aligned}
\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^* - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \Delta z_{i+1/2,j,M}^n u_{i+1/2,j,M}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2,j,M}^n u_{i-1/2,j,M}^{n+1} \right] \\
- \theta \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \Delta z_{i,j+1/2,M}^n v_{i,j+1/2,M}^{n+1} - \Delta z_{i,j-1/2,M}^n v_{i,j-1/2,M}^{n+1} \right] + \theta \Delta t w_{i,j,M-1/2}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Assumindo a condição dinâmica, a avaliação da pressão  $q_{i,j,M}^{n+1}$  é feita com substituindo Equação 3.12 na Equação 3.40, formando

$$\begin{aligned}
\frac{q_{i,j,M}^{n+1}}{g\theta\Delta t} = \frac{\eta_{i,j}^* - \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1}}{\theta\Delta t} - \frac{\Delta z_{i+1/2,j,M}^n u_{i+1/2,j,M}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2,j,M}^n u_{i-1/2,j,M}^{n+1}}{\Delta x} \\
- \frac{\Delta z_{i,j+1/2,M}^n v_{i,j+1/2,M}^{n+1} - \Delta z_{i,j-1/2,M}^n v_{i,j-1/2,M}^{n+1}}{\Delta y} - w_{i,j,M-1/2}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Por fim, na superfície livre, as equações discretizadas para a pressão dinâmica  $q^{n+1}$  são encon-

tradas adicionando as velocidades corrigidas (Eqs. 3.34, 3.35 e 3.36) na Equação 3.41, logo

$$\begin{aligned}
& \Delta t \left[ \frac{(q_{i+1,j,M}^{n+1} - q_{i,j,M}^{n+1}) \Delta z_{i+1/2,j,M}^n - (q_{i,j,M}^{n+1} - q_{i-1,j,M}^{n+1}) \Delta z_{i-1/2,j,M}^n}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. \frac{(q_{i,j+1,M}^{n+1} - q_{i,j,M}^{n+1}) \Delta z_{i,j+1/2,M}^n - (q_{i,j,M}^{n+1} - q_{i,j-1,M}^{n+1}) \Delta z_{i,j-1/2,M}^n}{\Delta y^2} - \frac{(q_{i,j,M}^{n+1} - q_{i,j,M-1}^{n+1})}{\Delta z_{i,j,M-1/2}^n} \right] - \frac{q_{i,j,M}^{n+1}}{g\theta\Delta t} \\
& = \frac{\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^*}{\theta\Delta t} + \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j,M}^{n+1} \Delta z_{i+1/2,j,M}^n - \tilde{u}_{i-1/2,j,M}^{n+1} \Delta z_{i-1/2,j,M}^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2,M}^{n+1} \Delta z_{i,j+1/2,M}^n - \tilde{v}_{i,j-1/2,M}^{n+1} \Delta z_{i,j-1/2,M}^n}{\Delta y} - \tilde{w}_{i,j,M-1/2}^{n+1}.
\end{aligned} \quad (3.42)$$

As Equações 3.38 e 3.42 geram um sistema linear de equações heptadiagonal resolvidas pelo Método do Gradiente Conjugado.

Com o campo de pressões dinâmicas, as velocidades horizontais ( $u,v$ ) podem ser corrigidas pelas Equações 3.34 e 3.35. Já o campo de velocidades verticais ( $w$ ) é obtido pela Equação da Continuidade (Eq. 3.37), onde considerando que  $w_{i,j,m-1/2}^{n+1} = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
w_{i,j,k+1/2}^{n+1} &= w_{i,j,k-1/2}^{n+1} - \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^{n+1} \Delta z_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \\
&- \frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k}^{n+1} \Delta z_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y}, \quad k = m, m+1, \dots, M-1.
\end{aligned} \quad (3.43)$$

Finalmente a nova elevação da superfície livre é calculada utilizando a forma discretizada da Equação 3.12, dada por

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} + \frac{q_{i,j,M}^{n+1}}{g}. \quad (3.44)$$

Após a correção dos desníveis, a correção da malha na superfície livre  $\Delta z_{i,j,Nz}^{n+1}$  deve ser efetuada com os desníveis  $\eta^{n+1}$ , calcula-se os valores de  $\Delta z_{i,j,Nz}^{n+1}$  através da Equação 3.14, completando assim um ciclo de cálculo.

### 3.2.3 Discretização Euleriana-Lagrangiana

A discretização dos termos convectivos e difusivos compõem uma das maiores dificuldades do tratamento numérico. A Equação de Advecção-Difusão, desconsiderando os termos de fonte

ou de crescimento/decaimento, é descrita como

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = v \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \quad (3.45)$$

onde  $c$  é uma variável genérica que, neste caso, pode ser  $u$ ,  $v$  ou  $w$  (Casulli e Cheng, 1992)[8].

Para aperfeiçoar a estabilidade e precisão da parte explícita do método de diferenças finitas, considera-se que a Equação 3.45 na forma lagrangiana pode ser descrita como

$$\frac{dc}{dt} = v \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right), \quad (3.46)$$

onde  $d/dt$  indica que a derivada substancial que é calculada ao longo da linha de corrente, definida por

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (3.47)$$

Com a consideração da forma lagrangiana para os termos de inércia e sabendo que o termo de difusão vertical é implícito, a consideração de estabilidade (Eq. 2.39), utilizando a condição CFL (Eq. 2.38), pode ser reduzida para as duas direções explícitas ( $x$  e  $y$ ):

$$\Delta t \leq \left[ 2v \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.48)$$

que é uma condição de restrição para  $\Delta t$  relativamente fácil de respeitar.

Discretizando semi-implicitamente a Equação 3.46, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{c_{i,j,k}^{n+1} - c_{i-a,j-b,k-d}^n}{\Delta t} = & v \frac{\frac{c_{i,j,k+1}^{n+1} - c_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} - \frac{c_{i,j,k}^{n+1} - c_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}}}{\Delta z_{i,j,k}} \\ & + v \left( \frac{c_{i-a+1,j-b,k-d}^n - 2c_{i-a,j-b,k-d}^n + c_{i-a-1,j-b,k-d}^n}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_{i-a,j-b+1,k-d}^n - 2c_{i-a,j-b,k-d}^n + c_{i-a,j-b-1,k-d}^n}{\Delta y^2} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $d$  são os Números de Malha de Courant, obtidos segundo a Equação 2.38. A grandeza  $c_{i-a,j-b,k-d}^n$  representa a velocidade de uma partícula do ponto de vista lagrangiano. Para fazer esta transformação do ponto de vista euleriano para o lagrangiano, se retrocede a velo-

cidade no tempo de  $n$  para  $n - 1$ , calculando em qual posição (ponto de vista lagrangiano em  $n - 1$ ) a partícula estaria para chegar no ponto  $i, j, k$  (ponto de vista euleriano em  $n$ ) utilizando uma *técnica de rastreamento* (Figura 3.5).

Oliveira e Baptista (1998)[43] mencionam a existência de diversas *técnicas de rastreamento* e discutem sobre três delas: *one-step backward Euler (BE)*, *multi-step backward Euler (MSE)* e *fifth-order Runge-Kutta (RK)*. Cada uma dessas técnicas tem sua particularidade e deve ser utilizada para diferentes tipos de modelos, sendo *BE* a mais simples (atualmente pouco utilizada) e *RK* a mais complexa. No presente trabalho, optou-se em utilizar a técnica *MSE* pelo bom desempenho na conservação de massa demonstrados por Oliveira e Baptista (1998)[43].

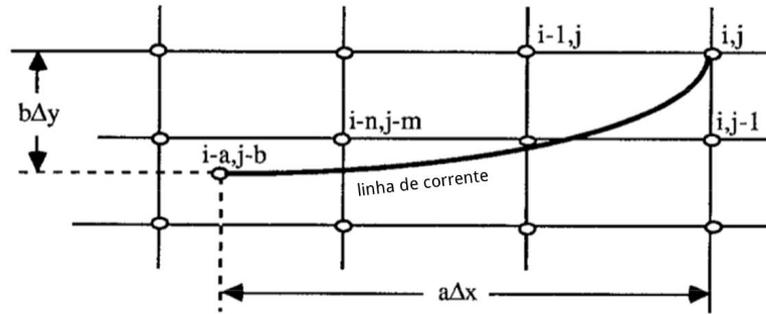


Figura 3.5: A malha euleriana-lagrangiana (Casulli 1990)[5].

Na técnica *MSE*, para se encontrar a velocidade da partícula na forma lagrangiana se utiliza a interpolação bilinear dada por:

$$c_{i-a,j-b,k-d}^n = (1-d) \left\{ (1-a) \left[ (1-b) c_{i,j,k}^n + b c_{i,j\mp 1,k}^n \right] + a \left[ (1-b) c_{i\mp 1,j,k}^n + b c_{i\mp 1,j\mp 1,k}^n \right] \right\} + d \left\{ (1-a) \left[ (1-b) c_{i,j,k\mp 1}^n + b c_{i,j\mp 1,k\mp 1}^n \right] + a \left[ (1-b) c_{i\mp 1,j,k\mp 1}^n + b c_{i\mp 1,j\mp 1,k\mp 1}^n \right] \right\}. \quad (3.50)$$

Caso o valor de  $a$  seja  $\geq 0$  utiliza-se o sinal negativo ( $-$ ) quando se tem o incremento do índice  $i$  e quando  $a$  for  $< 0$  utiliza-se o sinal negativo ( $+$ ). Este procedimento é análogo para os índices  $j$  e  $k$ .

Finalmente, o operador  $F$ , encontrado nas Equações 3.18, 3.19 e 3.20, pode ser definido

explicitamente como

$$F u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = (1 - \xi_x) u_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n + \nu \Delta t \left( \frac{u_{i+1/2-a+1,j-b,k-d}^n - 2u_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n + u_{i+1/2-a-1,j-b,k-d}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2-a,j-b+1,k-d}^n - 2u_{i+1/2-a,j-b,k-d}^n + u_{i+1/2-a,j-b-1,k-d}^n}{\Delta y^2} \right), \quad (3.51)$$

$$F v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = (1 - \xi_y) v_{i-a,j-b+1/2,k-d}^n + \nu \Delta t \left( \frac{v_{i-a+1,j+1/2-b,k-d}^n - 2v_{i-a,j+1/2-b,k-d}^n + v_{i-a-1,j+1/2-b,k-d}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i-a,j+1/2-b+1,k-d}^n - 2v_{i-a,j+1/2-b,k-d}^n + v_{i-a,j+1/2-b-1,k-d}^n}{\Delta y^2} \right), \quad (3.52)$$

$$F w_{i,j,k+1/2}^{n+1} = w_{i-a,j-b,k-d+1/2}^n + \nu \Delta t \left( \frac{w_{i-a+1,j-b,k-d+1/2}^n - 2w_{i-a,j-b,k-d+1/2}^n + w_{i-a-1,j-b,k-d+1/2}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_{i-a,j-b+1,k-d+1/2}^n - 2w_{i-a,j-b,k-d+1/2}^n + w_{i-a,j-b-1,k-d+1/2}^n}{\Delta y^2} \right), \quad (3.53)$$

onde  $\xi$  representa a camada esponja utilizada quando se deseja minimizar a reflexão, tanto em casos de saída de fluxo como de dissipação de energia. Observa-se que as componentes horizontais de velocidade não compõem estas equações, pois são calculadas implicitamente nas Equações 3.18, 3.19 e 3.20.

### 3.2.4 Aplicação Método do Gradiente Conjugado

Para resolver o sistema pentadiagonal formado pelas Equações 3.33 é utilizado o método do Gradiente Conjugado, semelhante ao apresentado no artigo de Casulli (1992)[8]. Para a aplicação deste método em sistemas heptadiagonais, como no caso para resolver os sistemas formados pelas Equações 3.38 e 3.42, deve-se adaptar a metodologia a ser demonstrada a seguir, para sistemas de equações pentadiagonais.

O método do Gradiente Conjugado é aplicado na Equação 3.33. Inicialmente, a equação é reescrita em uma forma mais compacta, a saber:

$$d_{i,j}^n \eta_{i,j}^{n+1} - s_{i+1/2,j}^n \eta_{i+1,j}^{n+1} - s_{i-1/2,j}^n \eta_{i-1,j}^{n+1} - s_{i,j+1/2}^n \eta_{i,j+1}^{n+1} - s_{i,j-1/2}^n \eta_{i,j-1}^{n+1} = q_{i,j}^n, \quad (3.54)$$

onde os coeficientes são dados por

$$s_{i\pm 1/2,j}^n = g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i\pm 1/2,j}^n, \quad s_{i,j\pm 1/2}^n = g \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j\pm 1/2}^n, \quad (3.55)$$

$$d_{i,j}^n = 1 + s_{i+1/2,j}^n + s_{i-1/2,j}^n + s_{i,j+1/2}^n + s_{i,j-1/2}^n, \quad (3.56)$$

$$q_{i,j}^n = \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i+1/2,j}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i-1/2,j}^n \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j+1/2}^n - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j-1/2}^n \right\}. \quad (3.57)$$

A normalização é indicada para que o método atinja a convergência mais rápido. Ela é aplicada na Equação 3.54 e como

$$\begin{aligned} & \sqrt{d_{i,j}^n} \eta_{i,j}^{n+1} - \frac{s_{i+1/2,j}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i+1,j}^n}} \sqrt{d_{i+1,j}^n} \eta_{i+1,j}^{n+1} - \frac{s_{i-1/2,j}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i-1,j}^n}} \sqrt{d_{i-1,j}^n} \eta_{i-1,j}^{n+1} \\ & - \frac{s_{i,j+1/2}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i,j+1}^n}} \sqrt{d_{i,j+1}^n} \eta_{i,j+1}^{n+1} - \frac{s_{i,j-1/2}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i,j-1}^n}} \sqrt{d_{i,j-1}^n} \eta_{i,j-1}^{n+1} = \frac{q_{i,j}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n}}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Fazendo a substituição  $e_{i,j} = \sqrt{d_{i,j}^n} \eta_{i,j}^{n+1}$ , a Equação 3.58 se reduz a:

$$Ae_{i,j} = e_{i,j} - a_{i+1/2,j} e_{i+1,j} - a_{i-1/2,j} e_{i-1,j} - a_{i,j+1/2} e_{i,j+1} - a_{i,j-1/2} e_{i,j-1} = b_{i,j}, \quad (3.59)$$

onde

$$a_{i\pm 1/2,j} = \frac{s_{i\pm 1/2,j}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i\pm 1,j}^n}}, \quad a_{i,j\pm 1/2} = \frac{s_{i,j\pm 1/2}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n d_{i,j\pm 1}^n}}, \quad b_{i,j} = \frac{q_{i,j}^n}{\sqrt{d_{i,j}^n}}. \quad (3.60)$$

Antes de iniciar o processo iterativo deve-se fazer o cálculo de  $e_{i,j}^{(0)}$ , onde são adotados valores para  $\eta_{i,j}^{n+1}$ . Utiliza-se os valores de  $\eta_{i,j}^n$  como aproximação inicial. Após isso, calcula-se as variáveis de erro e inicia-se o método do gradiente conjugado. Após o término das iterações (convergência do método), calcula-se  $\eta_{i,j}^{n+1} = \frac{e_{i,j}}{\sqrt{d_{i,j}^n}}$ , adquirindo o novo desnível, finalizando assim o método do Gradiente Conjugado.

### 3.3 Resumo Passo-a-passo

Sintetizando o método numérico, a composição de um ciclo de cálculo pode ser resumida como:

- 1 - Definição dos parâmetros iniciais, das condições iniciais e de contorno,
- 2 - Cálculo das Funções Euleriana-Lagrangianas (Eqs. 3.51, 3.52 e 3.53),
- 3 - Definição das matrizes  $\Delta\mathbf{Z}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{W}}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{A}$  (Eqs. 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29 e 3.30),
- 4 - Cálculo do desnível não corrigido utilizando a Equação 3.33, com o método do gradiente conjugado,
- 5 - Cálculo das velocidades não corrigidas (Eqs. 3.22, 3.23 e 3.24),
- 6 - Cálculo da pressão dinâmica a partir das Equações 3.38 e 3.42, por meio do gradiente conjugado,
- 7 - Correção das velocidades e desníveis (Eqs. 3.34, 3.35, 3.43 e 3.44),
- 8 - Atualização de  $\Delta z_{i,j,Nz}$ , utilizando a Equação 3.14.

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo são apresentadas as verificações e as validações do código, além de uma aplicação em um caso hipotético envolvendo emissários submarinos. Neste trabalho, as verificações são feitas para casos de ondas lineares e as validações para casos de ondas não lineares, escoamentos com obstáculos de fundo e com recirculação (Tabela 4.1).

Tabela 4.1: Casos onde o código é utilizado.

Casos	Caso nº	Intuito	Outros
Bacia oscilante 2D	Caso 1	Verificação	Discretização espacial e temporal / $H \times NH$
Bacia oscilante 3D	Caso 2	Verificação	Avaliação dos termos da Equação de Navier-Stokes
Ondas sequenciais não-lineares	Caso 3	Verificação	–
Propagação de ondas sobre uma barra	Caso 4	Validação	–
Propagação de ondas sobre barras com diferentes configurações	Caso 5	Validação	–
Canal com cavidade de fundo e de-grau	Caso 6	Validação	–
Propagação de ondas sobre um fundo com deformação circular	Caso 7	Validação	–
Emissário Submarino	Caso 8	Aplicação	–

Para a verificação, são modelados casos que possuem resultados analíticos ou onde códigos com a mesma abordagem matemática já foram empregados por outros autores, analisando-se assim a concordância entre os resultados. Para o primeiro caso, junto com a verificação, são realizadas análises de discretização, ou seja, são verificadas quais as discretizações temporais

e espaciais que melhor se adaptam ao caso simulado. No segundo caso, além da verificação, é avaliada a ordem de grandeza dos termos da Equação de Navier-Stokes (Eq. 2.15 à 2.17).

Na validação, fenômenos bem definidos com resultados experimentais são utilizados para garantir a representatividade física do código. Resultados de experimentos do Laboratório de Hidráulica de Delft [1] e do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul [47] são utilizados.

Por fim, são utilizados escoamentos sintéticos para a simulação com emissários submarinos. A dinâmica do escoamento em relação ao diâmetro do emissário e à profundidade da coluna de água são analisadas. Todas as simulações são realizadas em um computador relativamente simples com Memória RAM de 8GB, processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i5-3570 CPU @ 3.40GHz × 4, na plataforma GNU Fortran 95.

## 4.1 Verificação

Na verificação deve-se identificar se o modelo matemático calcula corretamente. Resultados analíticos de ondas podem ser utilizados com este intuito quando comparados com os resultados do código. No primeiro caso, além da verificação, são comparadas a aproximação hidrostática com a aproximação não-hidrostática em termos de exatidão × dispêndio computacional. Ainda para o primeiro caso, diferentes discretizações temporais e espaciais são simuladas para verificar em qual refinamento a utilização do modelo é adequada. No segundo caso, além da verificação, são analisadas a ordem de grandeza dos termos da Equação de Navier-Stokes (Eq. 2.15 à 2.17). Para ambos os casos os parâmetros de estabilidade são explicitados.

### 4.1.1 Caso 1: Bacia Oscilante 2D

O caso da bacia oscilante bidimensional tem como principal objetivo simular ondas lineares estacionárias. Inicialmente o desnível da bacia está inclinado em apenas um sentido. Com o decorrer do tempo ocorre a oscilação do desnível, que varia de acordo com os campos de pressões e velocidades. Assim, pode-se verificar o código para ondas bidimensionais lineares de grande amplitude.

Como comparação são utilizados tanto o resultado analítico da propagação da onda, como o exemplo que Casulli e Stelling (1998)[9] utilizaram em seu trabalho, onde foram comparados os resultados dos modelos hidrostático e não-hidrostático com os analíticos.

Nesta verificação, é modelada uma bacia cúbica fechada, com arestas  $L = 10m$ , sendo discretizada em 8.000 células cúbicas, com comprimento de malha  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5m$ . O fluido simulado é água, com viscosidade cinemática  $\nu = 1,01 \times 10^{-6} m^2/s$ . A condição inicial de velocidade nula é aplicada em todo o domínio. A fricção de fundo, representada pelo coeficiente de Chézy, é desprezada. Condições de deslizamento livre são adotadas no contorno sólido. O desnível inicial é representado por  $\eta = A \cos(k_x x)$  (Figura 4.1), onde  $A = 0,1m$  é a amplitude da onda e  $k_x = \pi/L_x$  é o número de onda em  $x$ . O intervalo do tempo adotado é  $\Delta t = 0,001s$  e o tempo simulado é  $10s$ .

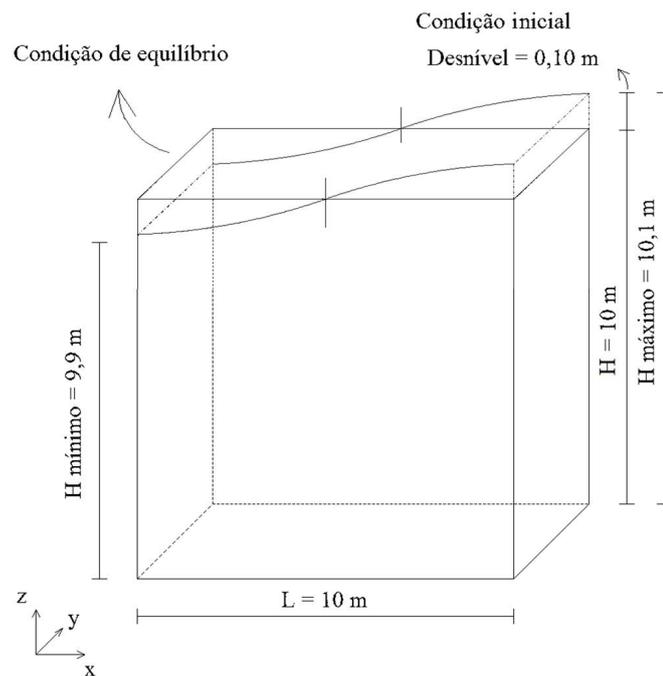


Figura 4.1: Volume de controle e condições iniciais para a bacia oscilante 2D.

Para o resultado analítico do problema é calculada a propagação de uma onda, com comprimento  $\lambda = 2L$ , frequência  $fr = \varsigma/\lambda$ , e celeridade  $\varsigma$  da onda dada por

$$\varsigma = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}. \quad (4.1)$$

Como  $H/\lambda = 0,5$ , temos um caso no limite entre águas profundas e águas intermediárias.

## Resultados

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram os níveis obtidos nas simulações deste trabalho, nas de Casulli e Stelling (1998)[9], além dos resultados analíticos, para  $x = 10m$  em função do tempo. Ainda, no presente trabalho, para se obter um resultado pontual, pois é um modelo tridimensional, a distância do eixo  $y = 5m$  foi adotada. Foram simulados e comparados casos com aproximação hidrostática e com aproximação não-hidrostática.

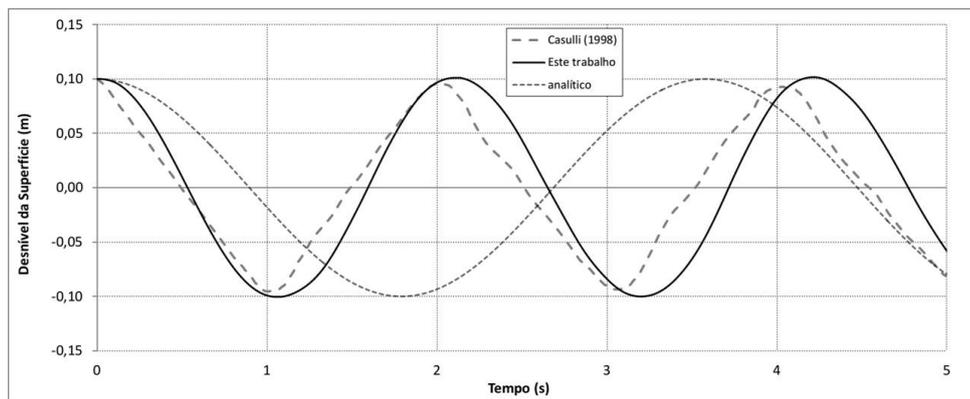


Figura 4.2: Comparação entre os níveis deste trabalho, o de Casulli e Stelling (1998)[9] e o do resultado analítico, utilizando os modelos com aproximação hidrostática, para o caso da bacia oscilante.

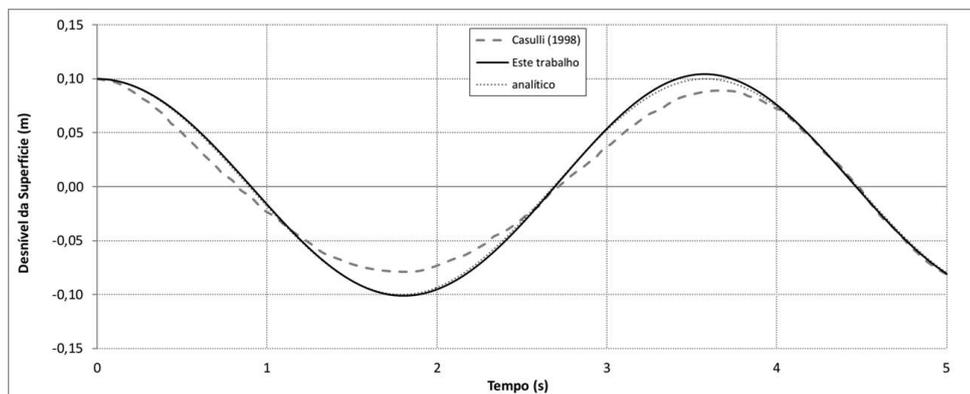


Figura 4.3: Comparação entre os níveis deste trabalho, o de Casulli e Stelling (1998)[9] e o do resultado analítico, utilizando os modelos com aproximação não-hidrostática, para o caso da bacia oscilante.

Na comparação dos desníveis com a solução analítica, os resultados com aproximação não-hidrostática se assemelham muito com os resultados analíticos, ambos com período de 3,6s (Figura 4.3). Já o caso com aproximação hidrostática (Figura 4.2) mostra defasagem importante na frequência, tendo período de oscilação menor que 2,1s. A diferença do desnível máximo

entre os resultados dos códigos deste trabalho com o analítico é de  $0,002m$  para ambas as aproximações, ou seja, um erro de no máximo 2%.

Se comparado ao resultado analítico, o presente modelo se adequa melhor a este caso do que o trabalho de Casulli e Stelling (1998)[9], tanto na aproximação hidrostática como na aproximação não-hidrostática. Isso se deve principalmente às condições iniciais utilizadas, onde no presente trabalho se utiliza uma variação senoidal e no outro se utilizou uma variação linear do desnível inicial, afim de representar mais adequadamente a natureza de uma onda.

A distribuição das velocidades para as duas aproximações se diferenciam com características específicas (Figura 4.4). Na aproximação hidrostática a distribuição da velocidade não difere tão expressivamente com a profundidade da bacia, se comparada à não-hidrostática. No caso de pressão hidrostática (Figura 4.4 à esquerda), as velocidades se dividem em colunas de água. Já no caso não-hidrostático, as velocidades máximas encontram-se sempre próximas da superfície livre (Figura 4.4 à direita).

### Discretização espacial e temporal

A análise da discretização espacial e temporal serve para avaliar o quão refinado ou grosseiro o código pode ser para representar determinado fenômeno. A primeira análise se refere à variação de  $\Delta t$ , até se encontrar limites, como a divergência do código ou a descaracterização dos resultados (Figs. 4.5 e 4.6). Nestes casos foram utilizados  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5m$ .

Analisando os resultados gerados pelas variações de  $\Delta t$ , quanto menor for este valor, melhor será a aproximação, porém, obviamente, maior será o dispêndio computacional. Para  $\Delta t = 1s$ , a solução fica descaracterizada, tanto para a aproximação hidrostática quanto para a não-hidrostática. Para  $\Delta t \leq 10^{-5}s$  o código diverge e ainda, pode-se dizer que para  $0,01s \leq \Delta t \leq 0,0001s$  não existe diferença significativa nos resultados, podendo-se adotar o valor de  $0,01s$  para as simulações, já que é o que tem menor dispêndio computacional. Para  $\Delta t = 0,1s$ , os resultados ainda são adequados, porém podem ser melhorados. Nenhum dos códigos (hidrostático e não-hidrostático) se destacou em relação ao outro no ponto de vista de eficiência de discretização temporal, ou seja, ambas simulações forneceram o melhor resultado com o menor dispêndio computacional em  $\Delta t = 0,01s$ .

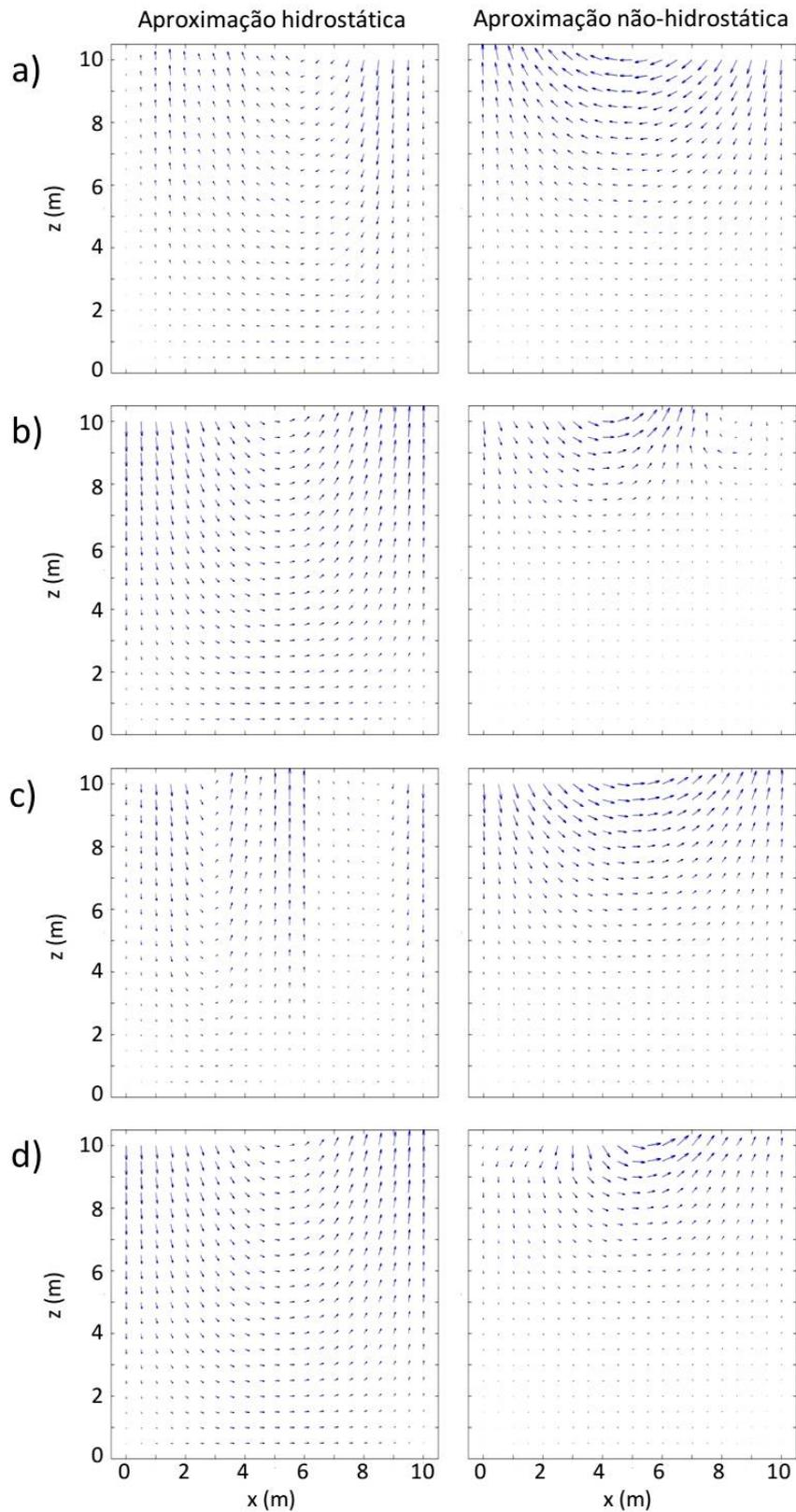


Figura 4.4: Distribuição das velocidades para as aproximações hidrostática (à esquerda) e não-hidrostática (à direita) nos tempos a) 1,05s (vale hidrostático), b) 1,78s (vale não-hidrostático), c) 2,10s (pico hidrostático) e d) 3,60s (pico não-hidrostático).

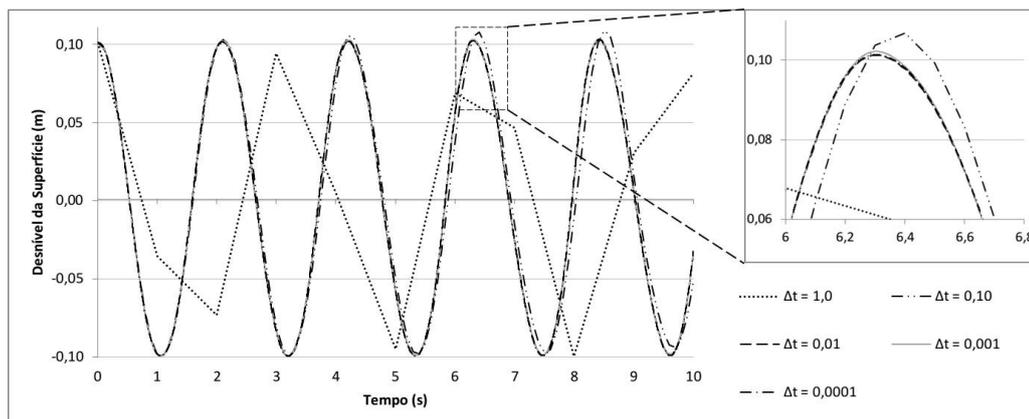


Figura 4.5: Comparação para diferentes  $\Delta t$ , caso com aproximação hidrostática.

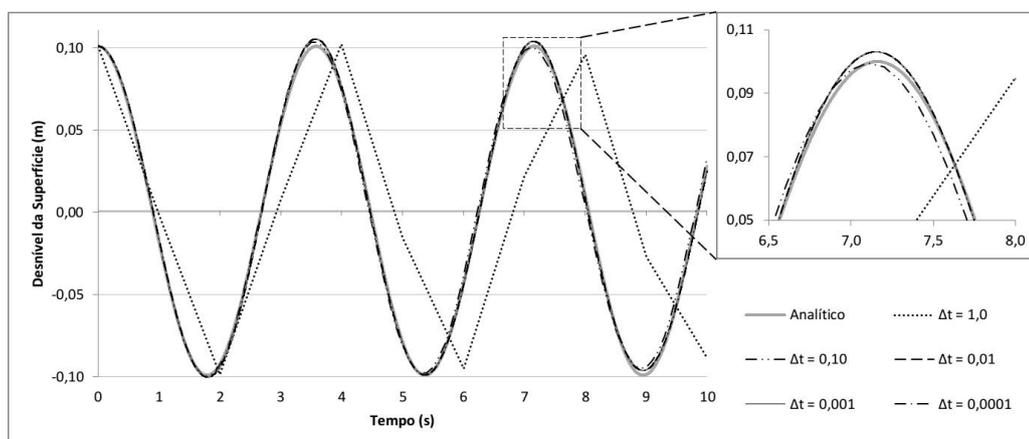


Figura 4.6: Comparação para diferentes  $\Delta t$ , caso com aproximação não-hidrostática.

A segunda análise é sobre a variação da malha ( $\Delta x = \Delta z$  e mantendo  $\Delta y$  fixo) (Figs. 4.7 e 4.8). Nestes casos foi utilizado  $\Delta t = 0,01s$ . Para  $\Delta x = \Delta z = 2m$ , a solução começa a se descaracterizar fornecendo resultados com frequências reduzidas, não interferindo expressivamente nos picos. Para  $\Delta x = \Delta z = 0,0625m$  o código diverge (para ambos os casos), pois a variação do desnível é maior do que o tamanho da grade que representa a superfície livre ( $\Delta z_{i,j,Nz}$ ). Para o modelo não-hidrostático, a partir de  $\Delta x = \Delta z < 1m$ , o erro na frequência já não é percebido, tendo-se o melhor resultado fornecido pelo código. Para o modelo hidrostático não é possível encontrar o melhor resultado, pois quanto mais refinada é a malha, menor é o período de oscilação da onda para as variações espaciais testadas.

O código com a aproximação não-hidrostático se mostrou menos dependente do refinamento espacial do que o código com a aproximação hidrostática, porém para a discretização temporal não encontrou-se um modelo que se sobressaiu.

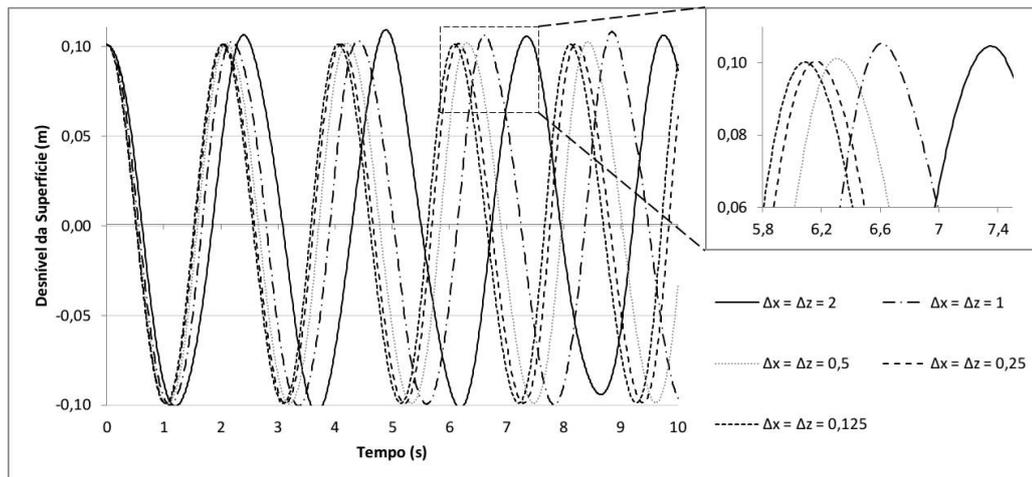


Figura 4.7: Comparação para diferentes  $\Delta x$  e  $\Delta z$ , caso com aproximação hidrostática.

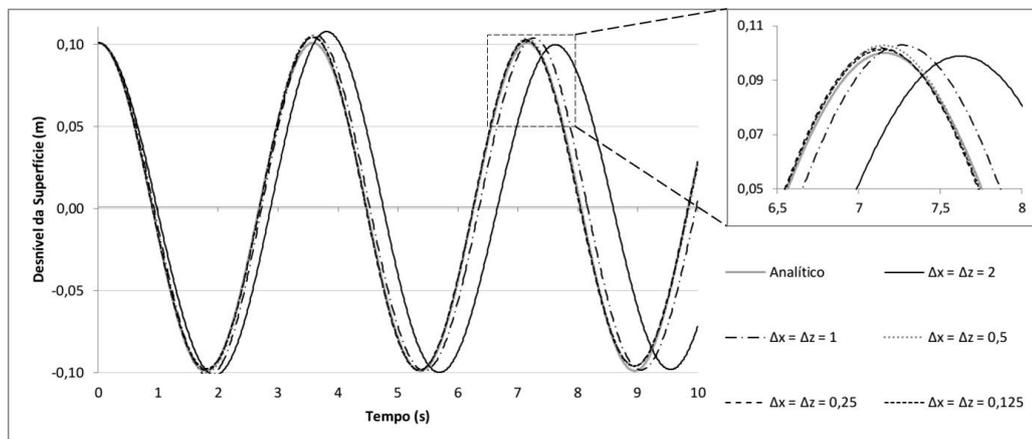


Figura 4.8: Comparação para diferentes  $\Delta x$  e  $\Delta z$ , caso com aproximação não-hidrostática.

### Estabilidade e Dispendio Computacional

Segundo Casulli (1999)[6], a restrição de estabilidade (Eq. 3.48) é pouco efetiva para determinar instabilidades de cálculo, sendo assim desconsiderada. Os parâmetros de estabilidade (Item 2.7.1) de todas as simulações são apresentados na Tabela 4.2 à 4.5, onde **a**, **b**, **d** e o volume de controle (**CV**) são representados pelos valores máximos encontrado ao longo de toda a simulação.

Quando o  $\Delta t$  é reduzido (Tabelas 4.2 e 4.3), ocorre também a redução dos valores da conservação do volume e dos Números de CFL (**a**, **b** e **d**). Quando  $\Delta x = \Delta z$  diminuem (Tabelas 4.4 e 4.5), a divergência também reduz e os Números de Courant aumentam. De qualquer forma, para todas as simulações da discretização espacial, os parâmetros apontam estabilidade numérica do código.

Tabela 4.2: Análise de estabilidade em função da discretização temporal para o caso com aproximação hidrostática ( $\Delta t$  variável e  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  constantes).

$\Delta t$ (s)	$N_t$	$tc^*$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
1,0	10	$\approx 0$	0,15	0	1,43	$6,8 \times 10^{-8}$
0,1	100	1,5	$1,6 \times 10^{-2}$	0	0,16	$1,8 \times 10^{-8}$
0,01	1.000	14	$2,0 \times 10^{-3}$	0	$1,2 \times 10^{-2}$	$7,6 \times 10^{-9}$
0,001	10.000	133	$2,0 \times 10^{-4}$	0	$1,5 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-9}$
0,0001	100.000	1426	$2,0 \times 10^{-5}$	0	$1,2 \times 10^{-4}$	$6,5 \times 10^{-10}$

\*tc = tempo de cálculo

Tabela 4.3: Análise de estabilidade em função da discretização temporal para o caso com aproximação não-hidrostática ( $\Delta t$  variável e  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  constantes).

$\Delta t$ (s)	$N_t$	$tc$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
1,0	10	$\approx 0$	0,36	$7,5 \times 10^{-6}$	0,9	$8,2 \times 10^{-8}$
0,1	100	2,5	$2,7 \times 10^{-2}$	$4,5 \times 10^{-7}$	$6,8 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{-8}$
0,01	1.000	24	$2,8 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-8}$	$7,3 \times 10^{-3}$	$9,7 \times 10^{-9}$
0,001	10.000	211	$2,8 \times 10^{-4}$	$9,0 \times 10^{-10}$	$7,3 \times 10^{-4}$	$6,5 \times 10^{-9}$
0,0001	100.000	1766	$2,8 \times 10^{-5}$	$4,2 \times 10^{-10}$	$7,3 \times 10^{-5}$	$4,7 \times 10^{-9}$

Tabela 4.4: Análise de estabilidade em função da discretização espacial para o caso com aproximação hidrostática ( $\Delta t$  e  $\Delta y$  constantes e  $\Delta x = \Delta z$  variáveis).

$\Delta x$ (m)	$N_x$	$tc$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
2,0	5	$\approx 0$	$5,2 \times 10^{-4}$	0	$2,9 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-9}$
1,0	10	3	$9,6 \times 10^{-4}$	0	$6,7 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-9}$
0,5	20	14	$2,0 \times 10^{-3}$	0	$1,2 \times 10^{-2}$	$4,6 \times 10^{-9}$
0,25	40	152	$3,8 \times 10^{-3}$	0	$3,5 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-8}$
0,125	80	1516	$7,8 \times 10^{-3}$	0	0,16	$3,5 \times 10^{-8}$

Com relação ao dispêndio computacional, a simulação com aproximação hidrostática é resolvida mais rapidamente que a com aproximação não-hidrostática, sendo em média a proporção de  $ts_{NH}/ts_H = 1,53$ . De qualquer forma, é importante frisar que mesmo o código com aproximação não-hidrostática necessite de um tempo de cálculo maior, ele é menos sensível à variação da discretização espacial, podendo-se utilizar discretizações mais grosseiras, e consequentemente, compensar o dispêndio computacional, além de fornecer resultados mais reais.

Tabela 4.5: Análise de estabilidade em função da discretização espacial para o caso com aproximação não-hidrostática ( $\Delta t$  e  $\Delta y$  constantes e  $\Delta x = \Delta z$  variáveis).

$\Delta x$ (m)	$N_x$	$tc$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
2,0	5	$\approx 1$	$4,7 \times 10^{-4}$	0	$1,7 \times 10^{-3}$	$7,3 \times 10^{-8}$
1,0	10	4,5	$1,0 \times 10^{-3}$	$6,9 \times 10^{-9}$	$3,5 \times 10^{-3}$	$4,3 \times 10^{-9}$
0,5	20	24	$2,8 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-8}$	$7,3 \times 10^{-3}$	$9,7 \times 10^{-9}$
0,25	40	188	$6,3 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-8}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-8}$
0,125	80	2403	$1,3 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-8}$	$5,2 \times 10^{-2}$	$9,6 \times 10^{-8}$

### 4.1.2 Caso 2: Bacia Oscilante 3D

Com o caso da bacia oscilante tridimensional também se quer simular ondas lineares estacionárias, semelhante ao caso anterior (Fig. 4.9). Esta é uma simulação para a verificação do código através da comparação com os resultados de desníveis e velocidades do código apresentado por Yuan e Wu (2004)[56] e de métodos analíticos.

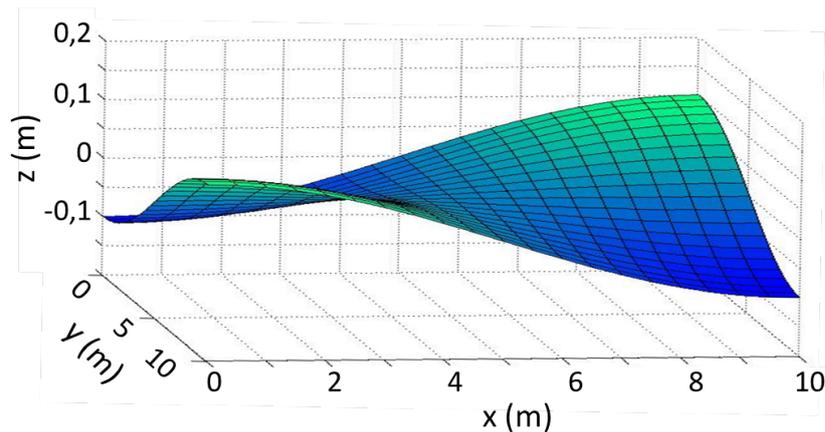


Figura 4.9: Superfície livre inicial para a bacia oscilante 3D.

Uma bacia cúbica fechada com arestas  $L = 10m$  e com 8.000 células,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5m$  é simulada com o passo de tempo de  $0,001s$  em um tempo de simulação de  $30s$ . A superfície livre inicial é descrita analiticamente por

$$\eta(x, y, t = 0) = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad (4.2)$$

onde  $T = 3,01s$  é o período da onda,  $k_x = \pi/L_x$  e  $k_y = \pi/L_y$  são os números de ondas e  $A = 0,1m$  é a amplitude da onda. Para este caso, aproximações satisfatórias das velocidades

orbitais são:

$$u = \frac{Agk_x \cosh [k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t), \quad (4.3)$$

$$v = \frac{Agk_y \cosh [k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t), \quad (4.4)$$

$$w = -\frac{Agk \sinh [k(h+z)]}{\omega \cosh(kh)} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t), \quad (4.5)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular da onda ( $rad/s$ ) dada por

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)}. \quad (4.6)$$

## Resultados

Se comparado com o resultado analítico dos desníveis, o modelo deste trabalho tem uma defasagem acumulada na frequência de oscilação da onda de  $0,3s$  (1%) mais rápido do que o resultado analítico, contra  $0,1s$  (0,3%) de Yuan e Wu (2004)[56] (Fig. 4.10). O desnível oscila entre  $0,095$  e  $0,112$  metros, sendo assim, os picos e vales máximos são bem representados.

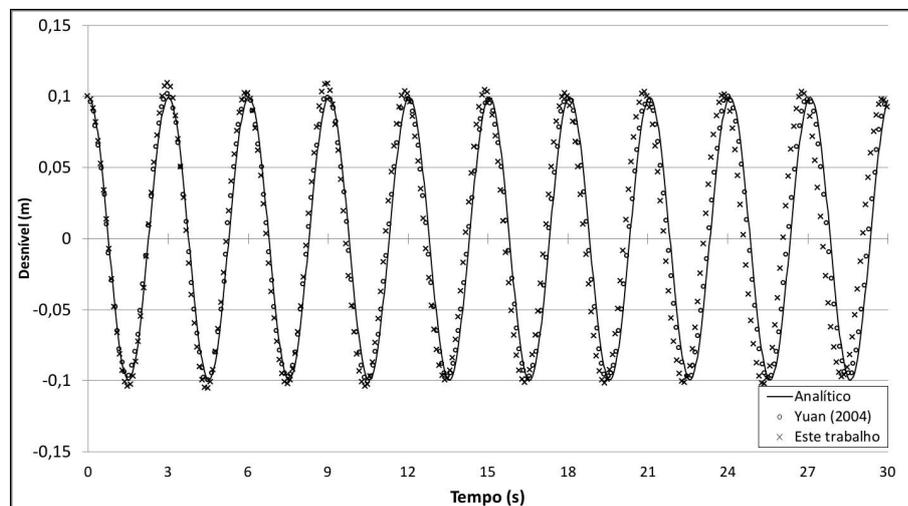


Figura 4.10: Comparação entre a superfície livre dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho no ponto ( $x = 0,25, y = 0,25m$ ).

As velocidades são apresentadas em três tempos diferentes:  $t = T/4$  ( $0,75s$ );  $t = T/2$  ( $1,50s$ );  $t = 3T/4$  ( $2,26s$ ) (Fig. 4.11 à 4.14). Nota-se uma boa representação dos perfis de velocidades pelo modelo, onde, certamente, parte do erro observado ocorre por causa da defasagem na frequência de oscilação. De qualquer forma, para todas as velocidades o modelo é representativo, tendo a pior verificação na velocidade vertical ( $w$ ) em  $t = 1,505s$ . Através

destas comparações, o modelo apresentado por este trabalho é considerado como válido para este caso.

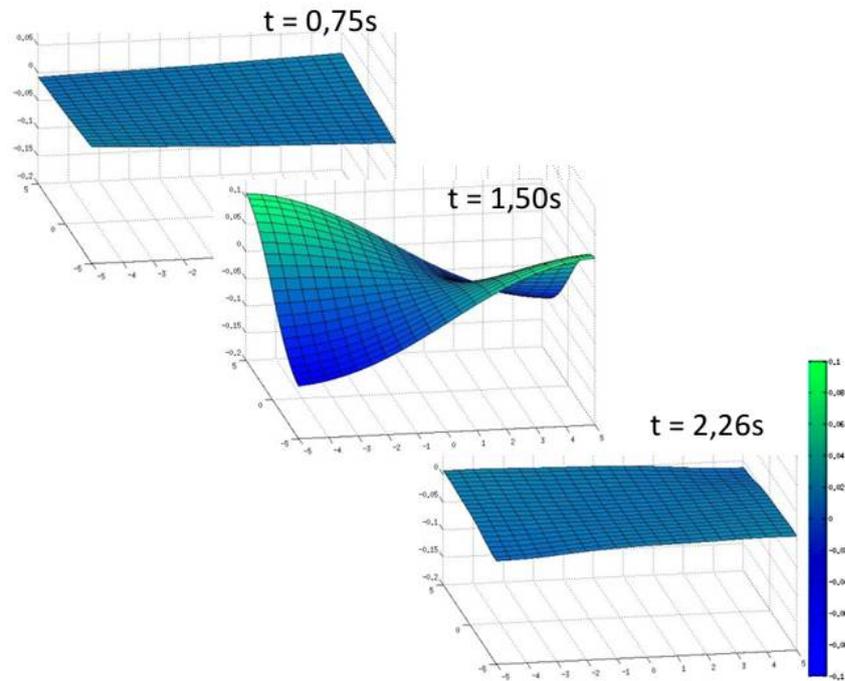


Figura 4.11: O formato da superfície livre em três tempos diferentes.

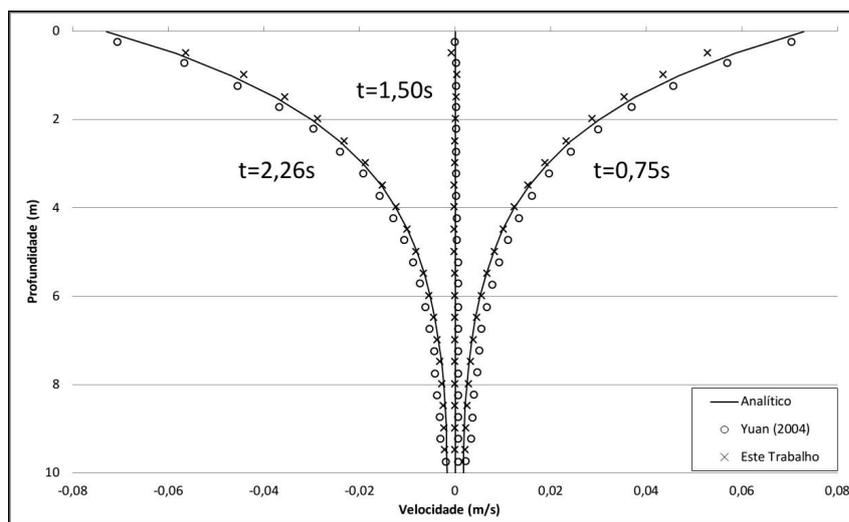


Figura 4.12: Comparação entre as velocidades horizontais ( $u$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0,25, y = 0,25m, z$ ).

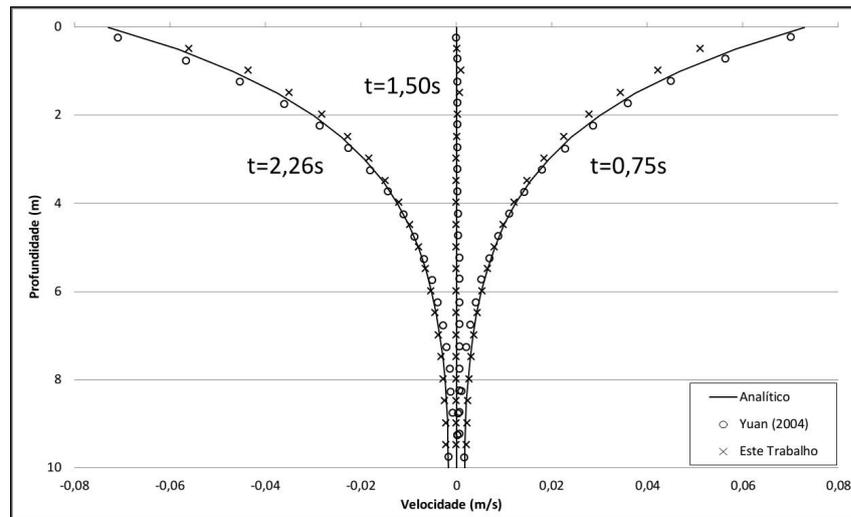


Figura 4.13: Comparação entre as velocidades horizontais ( $v$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0,25, y = 0,25m, z$ ).

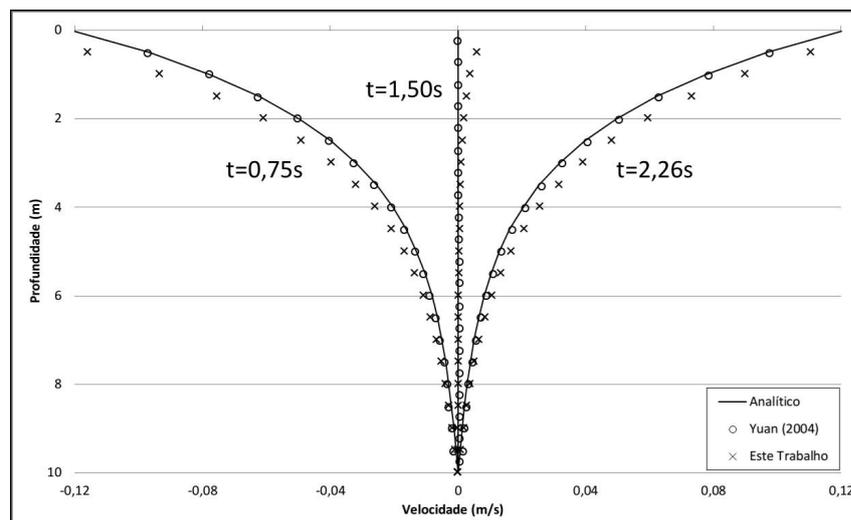


Figura 4.14: Comparação entre as velocidades verticais ( $w$ ) dos resultados analítico, de Yuan e Wu (2004)[56] e deste trabalho na aresta ( $x = 0,25, y = 0,25m, z$ ).

### Ordem de Grandeza dos Termos da Equação de N-S e Estabilidade

Com o intuito de identificar quais são os termos que mais afetam a solução do problema, foi calculada a ordem de grandeza de cada termo da Equação de Navier-Stokes, já com a desagregação das pressões (Eq. 2.15 à 2.17). Para isso são expostos os valores máximos (espaciais) de cada termo da equação para os três tempos utilizados nas análises das velocidades (Tabela 4.6 à 4.8).

Os termos difusivos tem valores muito inferiores aos outros, podendo até serem desprezados para este caso. Isso ocorre porque, o problema em questão não possui características de

Tabela 4.6: Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em  $x$ .

$t$ (s)	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u \frac{\partial u}{\partial x}$	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	$w \frac{\partial u}{\partial z}$	$g \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$\frac{\partial q}{\partial x}$	$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
0,752	$4 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-7}$
1,505	0,315	$3 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	0,315	0,305	$2 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
2,258	0,110	$3 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	0,108	0,105	$8 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-7}$

Tabela 4.7: Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em  $y$ .

$t$ (s)	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x}$	$v \frac{\partial v}{\partial y}$	$w \frac{\partial v}{\partial z}$	$g \frac{\partial \eta}{\partial y}$	$\frac{\partial q}{\partial y}$	$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$
0,752	$4 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-7}$
1,505	0,315	$2 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	0,315	0,305	$2 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
2,258	0,110	$3 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	0,108	0,105	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-7}$	$7 \times 10^{-7}$

turbulência. Os termos convectivos também possuem valores pequenos, representando corretamente um problema de ondas lineares, mas já não podem ser desprezados. De forma clara, os termos da pressão (hidrostática e dinâmica) e da variação temporal da velocidade são muito relevantes. Assim, torna-se evidente a necessidade da representação das pressões não-hidrostáticas para este tipo de problema. Com relação ao cálculo dos parâmetros relacionados à estabilidade (Tabela 4.9), todos estão dentro dos intervalos estabelecidos (Item 2.7).

Tabela 4.8: Ordem de grandeza dos termos da Equação de N-S ( $m/s^2$ ) em  $z$ .

$t$ (s)	$\frac{\partial w}{\partial t}$	$u \frac{\partial w}{\partial x}$	$v \frac{\partial w}{\partial y}$	$w \frac{\partial w}{\partial z}$	$\frac{\partial q}{\partial z}$	$v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	$v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	$v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$
0,752	$6 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-6}$	$8 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-7}$
1,505	0,411	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	0,553	$3 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-7}$
2,258	0,140	$8 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-2}$	0,131	$1 \times 10^{-6}$	$8 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-6}$

Tabela 4.9: Análise de estabilidade para o caso da bacia 3D com aproximação não-hidrostática.

$\Delta t$ (s)	$N_t$	$ts$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
0,001	30.000	494	$3,1 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-3}$	$4,9 \times 10^{-9}$

### 4.1.3 Caso 3: Ondas Sequenciais Não-Lineares

O terceiro caso consiste na propagação de ondas não lineares em um reservatório longo. Diferente dos casos anteriores, o desnível inicial é nulo e as ondas são induzidas pela variação da velocidade horizontal, imposta na condição de contorno de entrada, à esquerda do domínio, efeito semelhante a um batedor de onda. O reservatório é longo o suficiente para que as ondas não encontrem o final do canal (à direita), não havendo assim reflexão. Este caso mostra se o código é próprio para a propagação de ondas.

Os resultados das velocidades de determinada onda não linear são comparados com os resultados analíticos obtidos através da Teoria da Função de Corrente das Ondas, calculados com o software disponibilizado pela Universidade de Delaware, em <http://www.coastal.udel.edu/coastal/>[19]. A Teoria da Função de Corrente das Ondas foi desenvolvida por Dean (1965)[20] para analisar numericamente ondas totalmente não-lineares. O método calcula uma solução para o problema de onda totalmente não-linear, envolvendo a Equação de Laplace com duas condições não-lineares de superfície livre de fronteira (pressão constante, e uma restrição de altura de onda) (Dalrymple, 1974)[18].

As características da simulação (Figura 4.15) são apresentadas na Tabela 4.10. A condição de contorno é utilizada para todos os contornos, sem ser o de entrada (à esquerda) que é utilizada a Condição de Dirichlet.

### Resultados

A velocidade aplicada inicialmente gera ondas de  $0,2038m$  de altura,  $15,5m$  de comprimento e  $2,96s$  de período. Estes valores de altura e período de onda são fornecidos como dados de entrada para a Teoria da Função de Corrente de Ondas, resultando em um comprimento de onda de  $13,7m$  (diferença cerca de 10%) (Fig. 4.16a). Para fins de comparação, são utilizados os perfis de velocidades localizados em  $x = 15m$ ,  $y = 1,5m$  e entre  $77$  a  $80s$  (um período). São comparadas as velocidades horizontais e verticais fornecidas pela resolução analítica com

Tabela 4.10: Características da simulação do Caso 3.

Características	Valores	Características	Valores
$\Delta t$ (s)	0,001	$ts$ (s)	80
$\Delta x$ (m)	0,50	$N_x$	600
$\Delta y$ (m)	0,20	$N_y$	5
$\Delta z$ (m)	0,50	$N_z$	14
$C$ ( $m^{1/2}/s$ )	–	Fluido	Água
$u(z)$ (m/s)	$\frac{z}{Lz} A \cos(2\pi t/T)$	$v$ (m/s)	0
$w$ (m/s)	0	$A$ (m/s)	0,02
$T$ (s)	3	Condição de Contorno	von Neumann

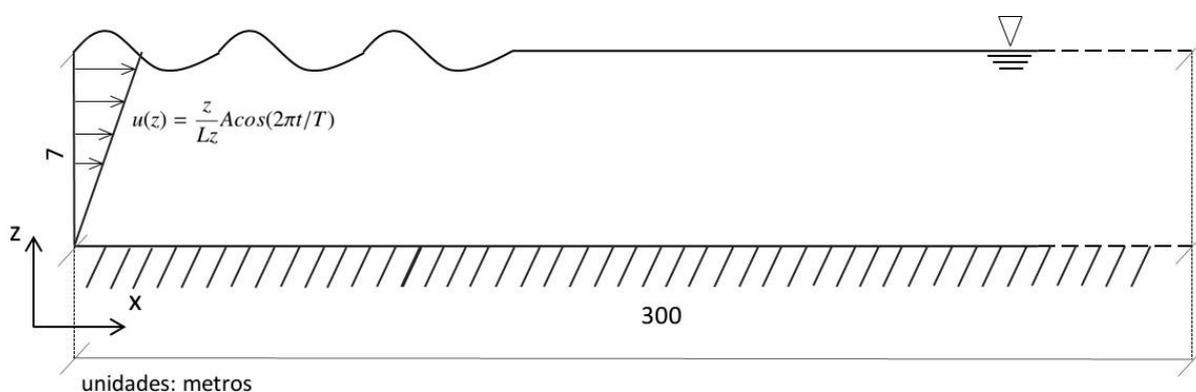


Figura 4.15: Configuração da simulação do canal e das condições de entrada do caso de ondas sequenciais.

o modelo do presente trabalho através de hodógrafas (Fig. 4.16) e através dos perfis de velocidades extremas (Fig. 4.17).

Nota-se uma boa aderência de todos os resultados do código com os analíticos. As hodógrafas (Figs. 4.16b, 4.16c e 4.16d) possuem erro médio de  $0,01m/s$ , porém nas Figuras 4.16b e 4.16c estes erros são mais visíveis, pois são pontos de menores velocidades. Com estes resultados, a verificação do código para a representação de ondas não-lineares é considerada como adequada. A Tabela 4.11 representa as características de estabilidade da simulação.

Tabela 4.11: Análise de estabilidade para o caso das ondas sequenciais.

$\Delta t$ (s)	$N_t$	$ts$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
0,001	80.000	16.423	$4,3 \times 10^{-4}$	0	$2,3 \times 10^{-3}$	$8,6 \times 10^{-9}$

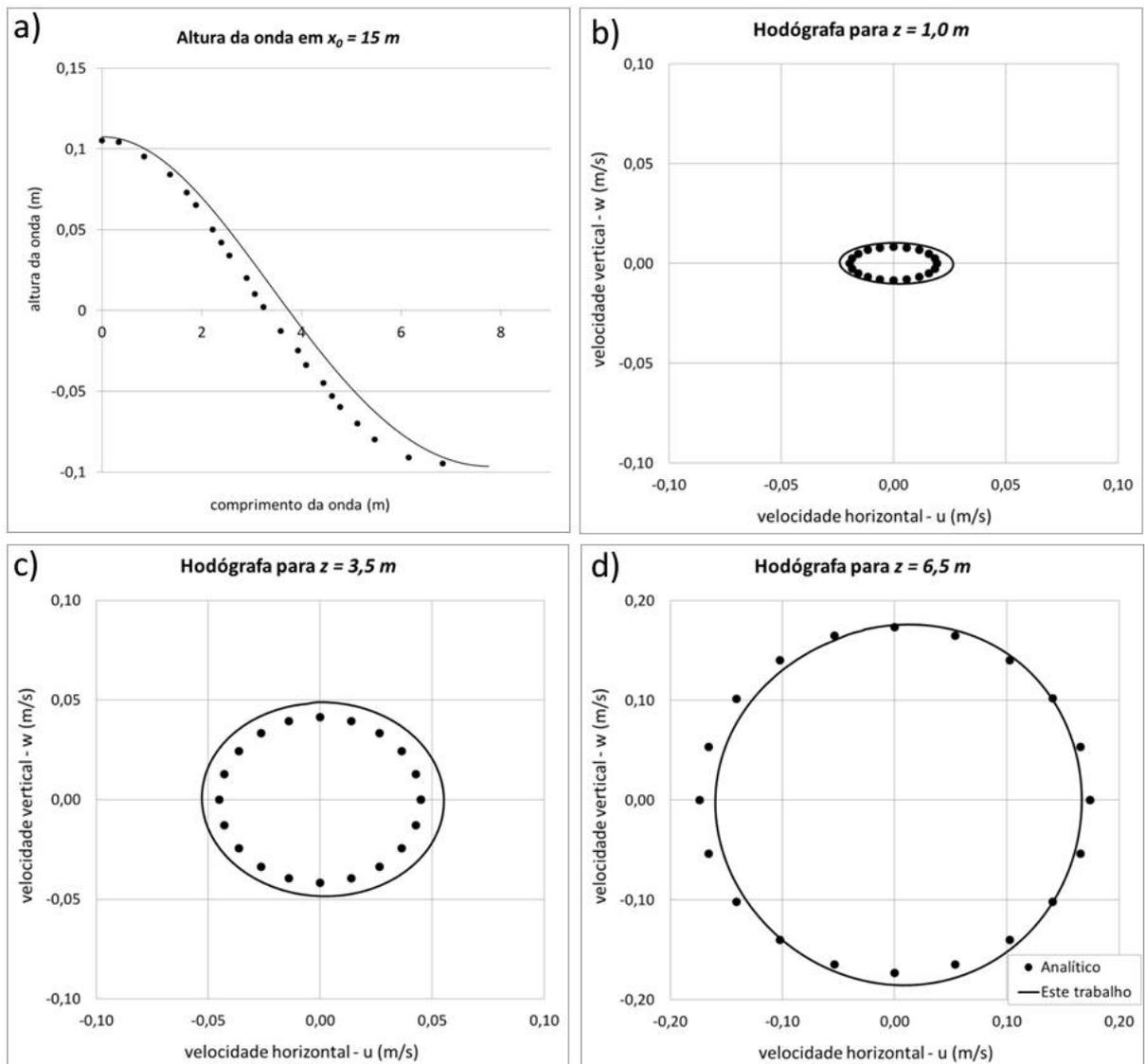


Figura 4.16: Comparação entre as alturas das ondas: a), e entre as hodógrafas: b)  $z = 1,0\text{ m}$ , c)  $z = 3,5\text{ m}$  e d)  $z = 6,5\text{ m}$ .

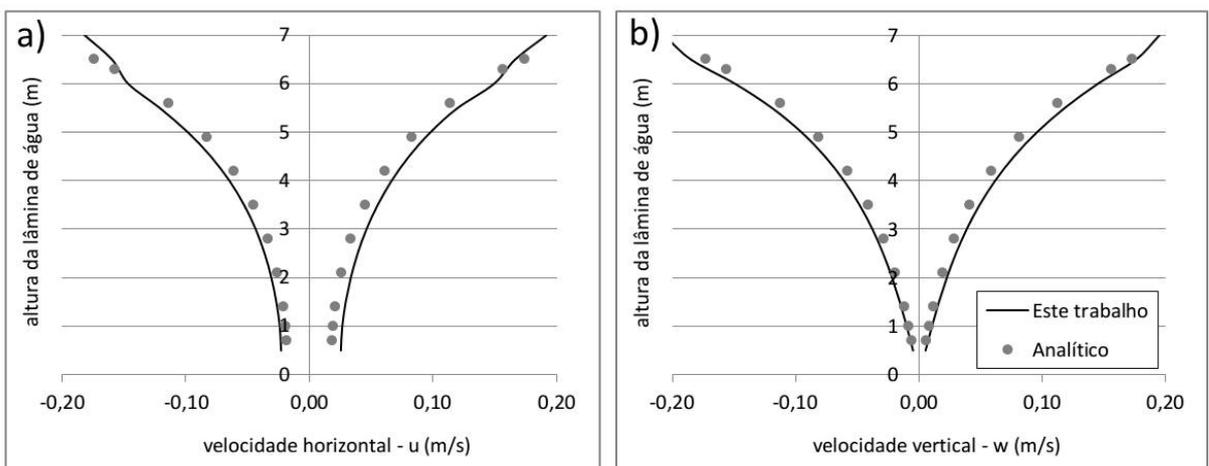


Figura 4.17: Comparação entre o perfil das velocidades extremas: a) velocidade horizontal -  $u$ , b) velocidade vertical -  $w$ .

## 4.2 Validação

Na validação, deve-se identificar quais são os fenômenos que podem ser representados pelo código. Assim, resultados experimentais de modelos físicos, com fenômenos bem definidos, são comparados com os resultados do modelo numérico para validar a representatividade física do código.

Com este intuito, os resultados de modelos experimentais de canal aberto com recirculação, de canal fechado com obstáculo de fundo e outro com diferentes obstáculos de fundo são comparados com o código apresentado no presente trabalho.

### 4.2.1 Caso 4: Propagação de ondas sobre uma barra

Beji e Battjes (1994)[3], no Laboratório de Hidráulica de Delft (*Delft Hydraulics Laboratory*), construíram um modelo físico com o intuito de investigar a influência de uma barra submersa na propagação de ondas superficiais. Neste experimento, em um canal com água e profundidade de  $0,4m$ , um atuador do tipo pistão produz ondas no lado esquerdo do canal, com período  $T = 2s$  e amplitude  $A = 1cm$ . As ondas passam sobre uma barra de  $0,3m$  de altura, onde são deformadas, e logo depois são atenuadas por uma praia de dissipação, minimizando a reflexão das ondas no lado direito do canal. Este experimento se tornou um dos mais utilizados na validação de modelos não-hidrostáticos ([6], [13], [14], [16], [32], [51], [53], [54], [55] e [56]). No presente trabalho, no lugar da praia de dissipação, é utilizada uma camada esponja com comprimento  $l_i = 5m$  e coeficiente  $\beta = 0,5$  (Figura 4.18).

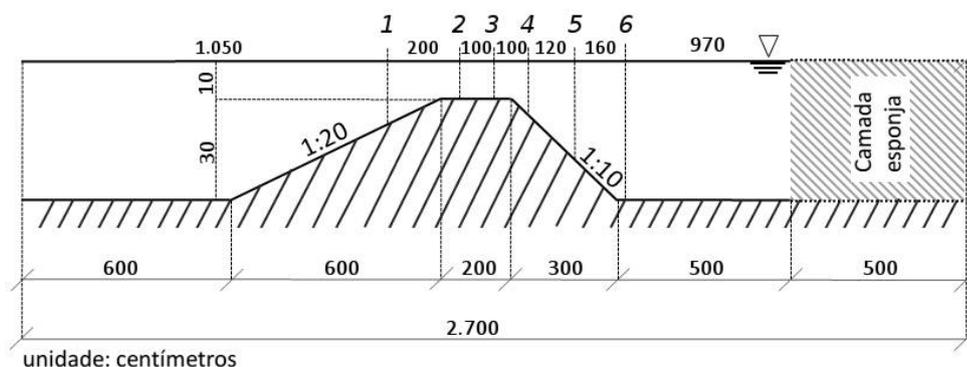


Figura 4.18: Geometria do canal experimental em escala distorcida e pontos de medição de desnível.

O estudo de Chen et al. (2003)[13] prova que a aproximação hidrostática não é realística para este caso, fornecendo resultados dos níveis da superfície livre totalmente diferentes dos dados medidos. Isto ocorre porque o código com aproximação hidrostática não é adequado para representar os efeitos no escoamento provenientes da variação do fundo. Desta maneira, para este trabalho, são apresentadas apenas as simulações do código com aproximação não-hidrostática.

Para simular este experimento, o domínio computacional do mesmo tamanho que o experimental, é discretizado com  $\Delta x = \Delta z = 0,025m$ ,  $\Delta y = 0,25m$ ,  $N_x = 1.080$ ,  $N_y = 5$  e  $N_z = 16$ . Como condição de contorno na esquerda do domínio, a superfície livre forma uma onda com amplitude de  $1cm$  e com período de  $T = 2,02s$ . Nota-se que o período utilizado no experimento é de  $T = 2,00s$ , porém, como o código possui um erro de defasagem na frequência, esta correção torna-se necessária, como utilizada por diversos autores ([6], [13], [16], [51], [53], [55]). O passo do tempo escolhido para a simulação é  $\Delta t = 0,005s$ .

A simulação é realizada com as condições iniciais de velocidades e pressão dinâmica nulas. A fricção de fundo é desconsiderada. No contorno a direita (final do canal) a Condição de Sommerfeld é adotada. Nos outros contornos é considerada a Condição de von Neumann. Como realizado por Beji e Battjes (1994)[3], são analisados os resultados dos desníveis nas distâncias  $10,5m$  (Estação 1),  $12,5m$  (Estação 2),  $13,5m$  (Estação 3),  $14,5m$  (Estação 4),  $15,7m$  (Estação 5) e  $17,3m$  (Estação 6) do eixo  $0x$  ao longo do tempo.

## Resultados

Na Figura 4.19 são mostrados os desníveis dos experimentos e os níveis da simulação deste modelo. Nota-se que pequenas discrepâncias aumentam a partir da 5ª Estação ( $x = 15,7m$ ), já no final da rampa de declive. Portanto, quando o escoamento passa a rampa de declive, os níveis deixam de acompanhar os dados experimentais. Efeito semelhante ocorreu em outros trabalhos ([16], [51], [53], [55]). Outros autores ([6], [13], [32]) realizaram a mesma validação, porém utilizaram dados atribuídos também a Beji e Battjes (1994)[3], mas diferentes dos dados publicados no artigo aqui referenciado. Apenas Choi e Wu (2006)[14], Wang et al. (2009)[54] e Yuan e Wu (2004)[56] obtiveram bons resultados com os dados apresentados por Beji e Battjes

(1994)[3].

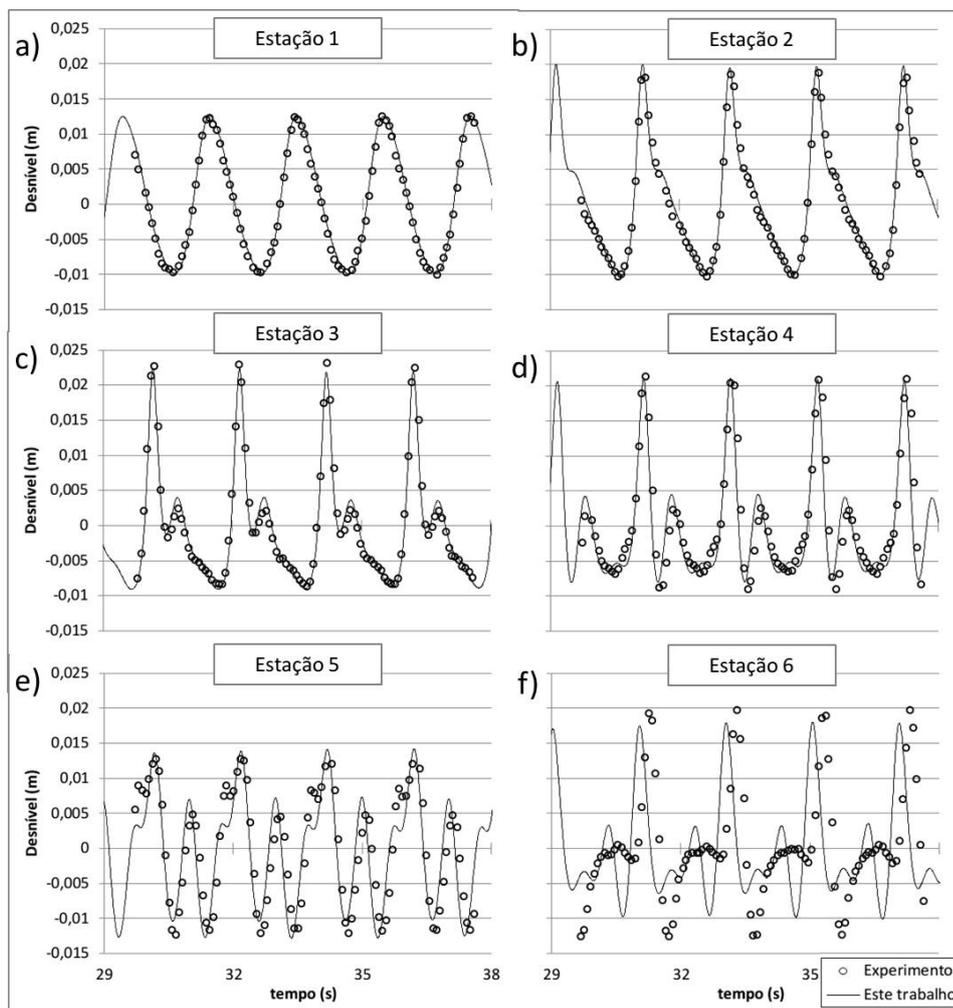


Figura 4.19: Resultados dos desníveis para o experimento e para o modelo a) estação 1 (10,5m), b) estação 2 (12,5m), c) estação 3 (13,5m), d) estação 4 (14,5m), e) estação 5 (15,7m), f) estação 6 (17,3m)

Mediante as diferenças nos resultados na bibliografia em relação aos modelos não-hidrostáticos para este caso, torna-se necessário analisar mais detalhadamente qual é o motivo dos erros nos resultados. A Tabela 4.12 representa as características da simulação, onde os parâmetros relacionados à estabilidade estão dentro dos intervalos estabelecidos (Capítulo 2.8).

Tabela 4.12: Análise de estabilidade para o caso de propagação da onda sobre uma barra.

$\Delta t$ (s)	$N_t$	$t_s$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
0,005	10.000	4.465	$3,4 \times 10^{-2}$	0	$4,4 \times 10^{-2}$	$4,2 \times 10^{-7}$

### 4.2.2 Caso 5: Propagação de ondas sobre barras com diferentes configurações

É proposto um problema de propagação de ondas sobre diferentes barras para analisar a influência do fundo na deformação das ondas. É avaliado para qual obstáculo o código representa melhor, variando-se as rampas de aclave e declive dos obstáculos. Rosauero (1999) [47] analisa as transformações de ondas na passagem sobre obstáculos de fundo, um experimento semelhante ao de Beji e Battjes (1994) [3], onde são analisadas diferentes configurações do obstáculo de fundo. A maior diferença é que as declividades do obstáculo no trabalho de Rosauero (1999) [47] são mais pronunciadas do que as declividades utilizadas por Beji e Battjes (1994) [3]. Desta forma, é possível avaliar qual inclinação do aclave e do declive o código consegue representar adequadamente. Três configurações (C1, C2 e C3) dos obstáculos de fundo são simuladas (Figura 4.20). Semelhante ao caso anterior, no lugar da praia de dissipação, uma camada esponja é considerada com  $l_i = 5m$  e  $\beta = 0,5$ .

Para simular este experimento, o domínio computacional é discretizado com  $\Delta x = 0,025m$ ,  $\Delta z = 0,02m$ ,  $\Delta y = 0,20m$ ,  $N_x = 800$ ,  $N_y = 5$  e  $N_z = 20$ . Como condição de contorno na esquerda do domínio, a superfície livre forma uma onda com amplitude de  $1,4cm$  e com período de  $T = 2,38s$ . O passo do tempo escolhido para a simulação é  $\Delta t = 0,005s$  para uma simulação de  $85s$ . A simulação é realizada com as condições iniciais de velocidades e pressões dinâmicas nulas e a fricção de fundo é desconsiderada. Condições de Contorno de von Neumann são adotadas, exceto no contorno à direita onde é considerada a condição de saída de fluxo. Como realizado por Rosauero (1999)[47], são analisados os resultados dos desníveis nas distâncias  $7,2m$  (Estação 3),  $8,2m$  (Estação 4) e  $9,5m$  (Estação 5) do eixo  $0x$  ao longo do tempo para as configurações C1 e C2 e em  $7,2m$  (Estação 3),  $8,2m$  (Estação 4) e  $11,3m$  (Estação 5) para a configuração C3.

### Resultados

Na comparação dos resultados selecionados de Rosauero (1999)[47] com os das simulações realizadas pelo código deste trabalho (Figuras 4.21, 4.22 e 4.23) para a Estação 3 todas as configurações fornecem resultados semelhantes aos experimentais. Para a Estação 4, a C3, com

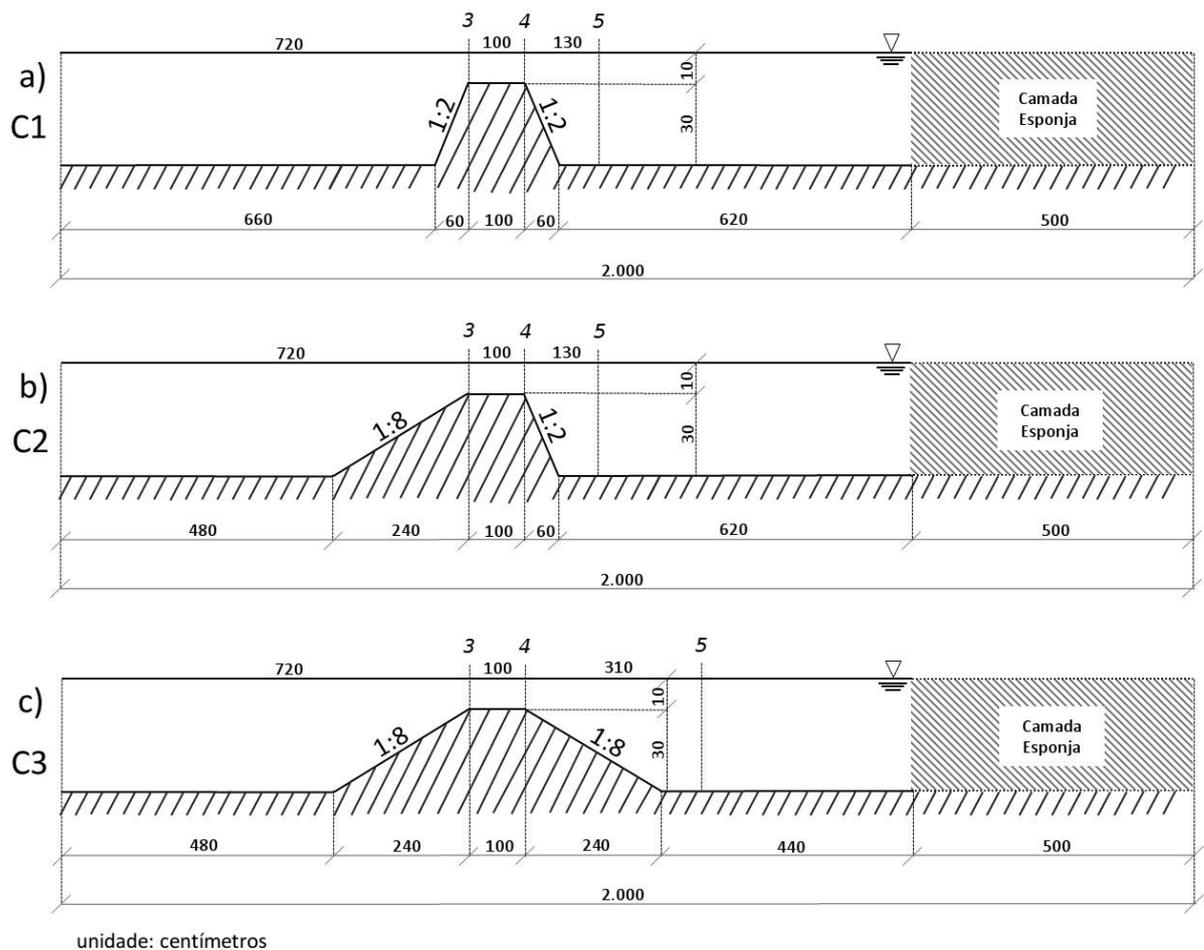


Figura 4.20: Configuração do canal experimental, escala distorcida. a) C1, b) C2 e c) C3

os bancos em menor declividade, fornecem os resultados mais exatos. Já para a Estação 5 todos os resultados se aproximam aos resultados experimentais, sendo que no pico da onda a C1 fornece o melhor resultado e nos vales a C3 é a que se destaca, demonstrando que existe diferença na qualidade dos resultados dependendo da declividade da rampa, tanto de declive quando de aclave.

Nota-se que a rampa de declive não desconfigura o resultado como no Caso anterior, mesmo as rampas sendo mais inclinadas. De forma geral, todas as simulações fornecem bons resultados. O autor do presente trabalho acredita na necessidade de aperfeiçoar o código para problemas com fundos variados, principalmente quando esta variação ocorre de forma mais suave. Uma das formas de efetivar esta melhora é variar a discretização espacial vertical de acordo com o obstáculo.

Na Tabela 4.13 são apresentados os parâmetros de estabilidade das três configurações,

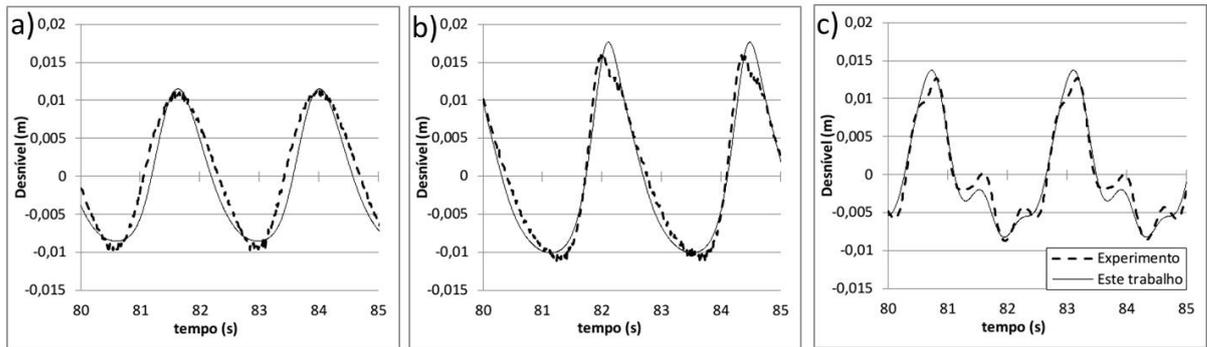


Figura 4.21: Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C1: a)  $x = 7,2m$  (Estação 3) , b)  $x = 8,2m$  (Estação 4) e c)  $x = 9,5m$  (Estação 5).

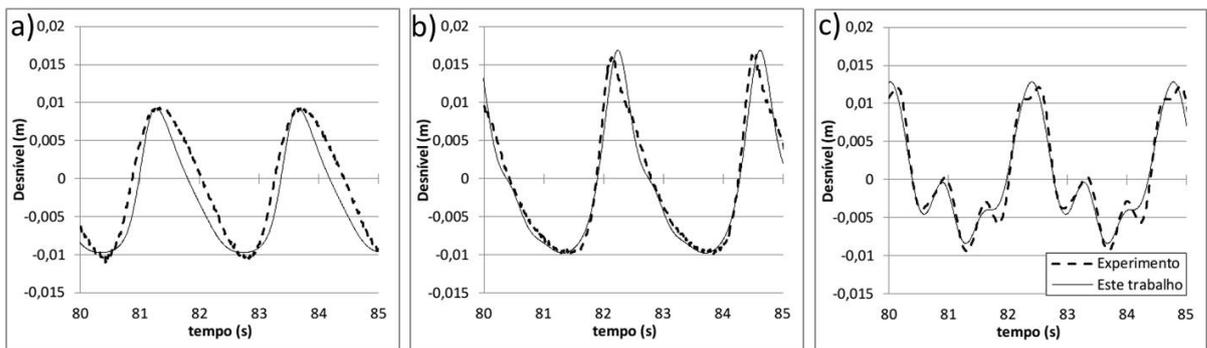


Figura 4.22: Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C2: a)  $x = 7,2m$  (Estação 3) , b)  $x = 8,2m$  (Estação 4) e c)  $x = 9,5m$  (Estação 5).

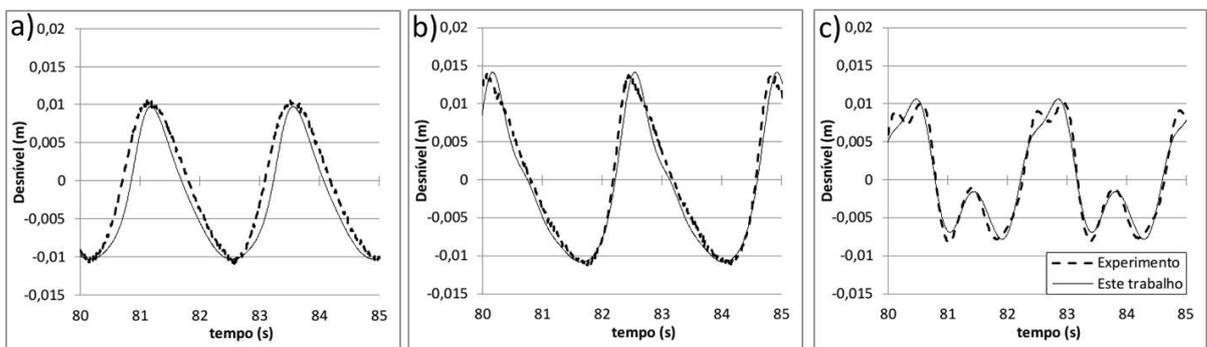


Figura 4.23: Comparação entre o desnível experimental e deste trabalho para a configuração C3: a)  $x = 7,2m$  (Estação 3) , b)  $x = 8,2m$  (Estação 4) e c)  $x = 11,3m$  (Estação 5).

podendo-se notar que os valores dos mesmos se encontram dentro do esperado.

Tabela 4.13: Análise de estabilidade para o caso da propagação da ondas sobre diferentes barras.

Conf.	$\Delta t$ (s)	$N_t$	$t_s$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
C1	0,005	17.000	7.290	$2,9 \times 10^{-2}$	0	$3,7 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{-6}$
C2	0,005	17.000	7.045	$5,1 \times 10^{-2}$	0	$4,9 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-6}$
C3	0,005	17.000	7.158	$3,9 \times 10^{-2}$	0	$4,3 \times 10^{-2}$	$9,9 \times 10^{-7}$

### 4.2.3 Caso 6: Canal com cavidade de fundo e degrau

Diferente dos casos de validação anteriores, o sexto caso tem ênfase nas velocidades do escoamento, quando este passa por uma rampa de declive ou um degrau. Para isso, são utilizados dados de experimentos de recirculação em canais abertos, publicados em 1980 pelo Laboratório de Hidráulica de Delft [1]. São selecionadas as configurações com menor (F1), intermediária (F2) e maior (F3) declividade de fundo (Fig. 4.24).

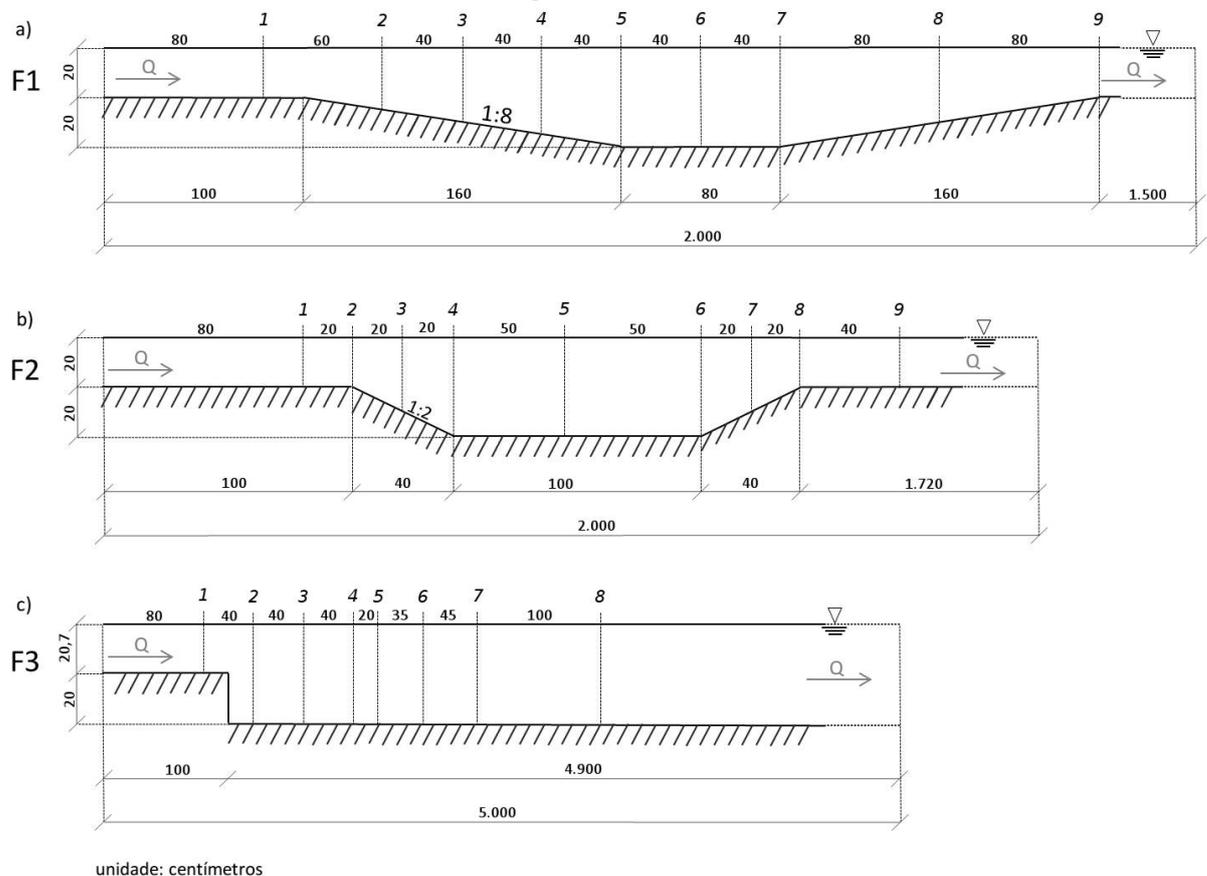


Figura 4.24: Geometria do canais e suas seções de medição (escalas distorcidas) para a) Configuração F1, b) Configuração F2, c) Configuração F3.

Como condição de entrada de fluxo (contorno a esquerda), utilizou-se a velocidade medida na seção 1 para cada configuração. Já na direita foi considerada a condição de saída de fluxo, também denominada de Condição de Radiação de Sommerfeld. Nos outros contornos é considerada a condição de deslizamento livre. Os desníveis são forçados a zero em todo o domínio.

Os canais foram alongados virtualmente para evitar o efeito da onda de retorno até que as velocidades nas seções de interesse se estabilizassem, e assim, evitando-se o retorno da onda. Inicialmente se utilizou a camada esponja, porém não se obteve sucesso para as velocidades destes experimentos.

A Tabela 4.14 apresenta as características de cada configuração utilizadas nas simulações. O líquido simulado é a água. A diferenciação no  $Nx$  na configuração  $F3$  é necessária porque esta configuração forma uma recirculação mais acentuada necessitando de mais tempo para se estabilizar. Todas as configurações reproduzem os dados e características apresentadas no relatório dos experimentos [1]. O Número de Reynolds indica que se tratam de escoamentos turbulentos.

Tabela 4.14: Característica das diferentes configurações do Caso 6.

<b>Características</b>	<i>F1</i>	<i>F2</i>	<i>F3</i>
$\Delta t$ (s)	0,01	0,01	0,01
$ts$ (s)	100	100	100
$\Delta x = \Delta z$ (m)	0,02	0,02	0,02
$\Delta y$ (m)	0,10	0,10	0,10
$Nx$ (-)	1.000	1.000	2.500
$Ny$ (-)	5	5	5
$Nz$ (-)	20	20	20
$C$ ( $m^{1/2}/s$ )	37,6	43,8	43,4
Alongamento Virtual (m)	14,5	16,1	42,7
$Re$ na entrada (-)	$7,4 \times 10^4$	$7,5 \times 10^4$	$7,6 \times 10^4$

## Resultados

Como este é um caso de escoamento turbulento, um valor de viscosidade maior do que o da água ( $\nu = 1,0 \times 10^{-3} m^2/s$ ) é adotado para todas as configurações, impondo uma dissipação de energia nas simulações. Nas simulações de  $F1$  (Fig. 4.25) os resultados são bons. Apenas ao passar pela rampa de aclave os resultados do código não acompanharam os experimentais.

Para a simulação de  $F2$  (Fig. 4.26) os resultados também são bons na maioria dos aspectos. A recirculação demonstrada na seção 4 não é acompanhada. Para a simulação de  $F3$  os resultados são bons em todas as medições e a recirculação é bem representada. Na Figura 4.28 são indicadas as linhas de corrente, onde para  $F1$  e  $F2$  são necessários mais testes com diferentes viscosidades para aperfeiçoar os resultados.

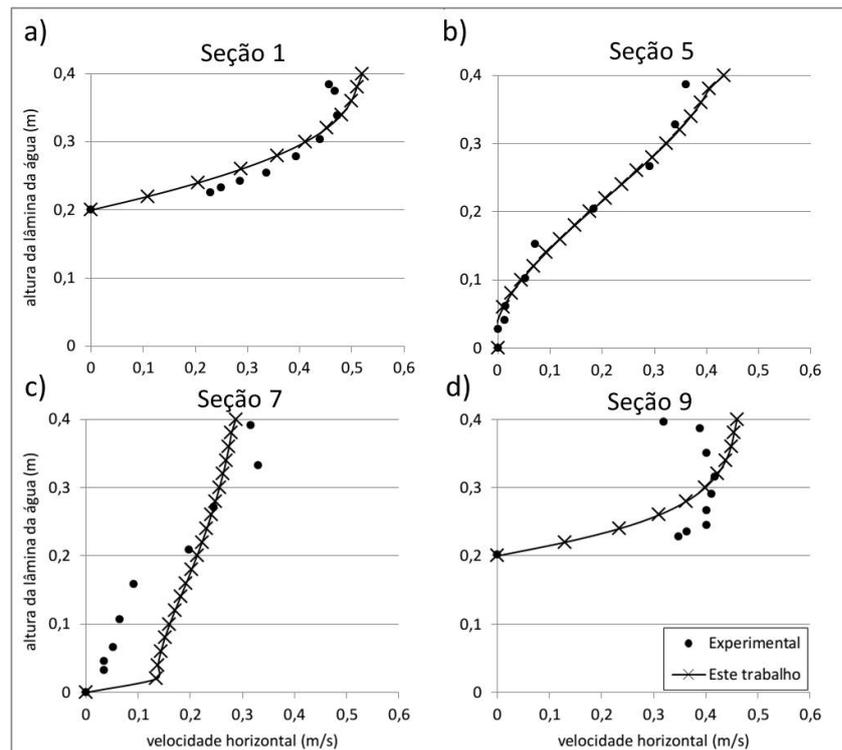


Figura 4.25: Perfil de velocidade horizontal da configuração  $F1$  em a) Seção 1, b) Seção 5, c) Seção 7 e d) Seção 9.

A utilização de uma viscosidade maior que a real, se mostra em partes ineficiente para simular a dissipação de energia, devendo-se aperfeiçoar o presente código para melhor representar escoamentos turbulentos. Para que isso seja possível é indicado acoplar um modelo de turbulência ao presente. A análise da estabilidade das simulações é apresentada na Tabela 4.15 e mostra que os parâmetros estão dentro dos limites esperados.

Tabela 4.15: Análise de estabilidade para o caso dos canais com recirculação com maior viscosidade.

Configurações	$ts$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV</b> (%)
$F1$ ( $t = 100s$ )	22.586	0,28	0	$1,8 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-6}$
$F2$ ( $t = 100s$ )	22.133	0,28	0	$2,1 \times 10^{-2}$	$4,5 \times 10^{-6}$
$F3$ ( $t = 40s$ )	26.085	0,24	0	$1,3 \times 10^{-2}$	$8,9 \times 10^{-7}$

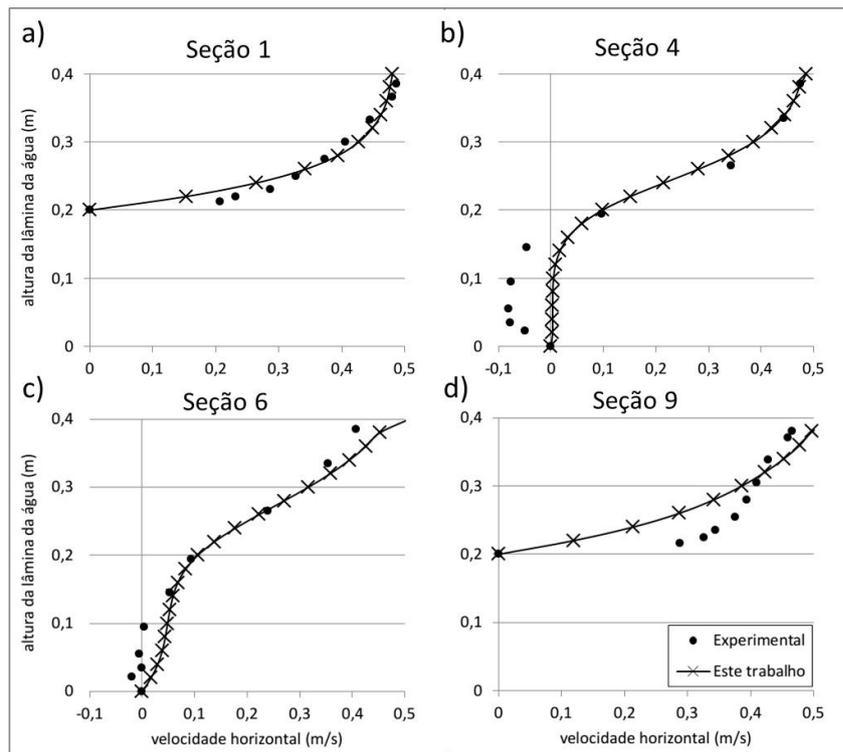


Figura 4.26: Perfil de velocidade horizontal da configuração *F2* em a) Seção 1, b) Seção 4, c) Seção 6 e d) Seção 9.

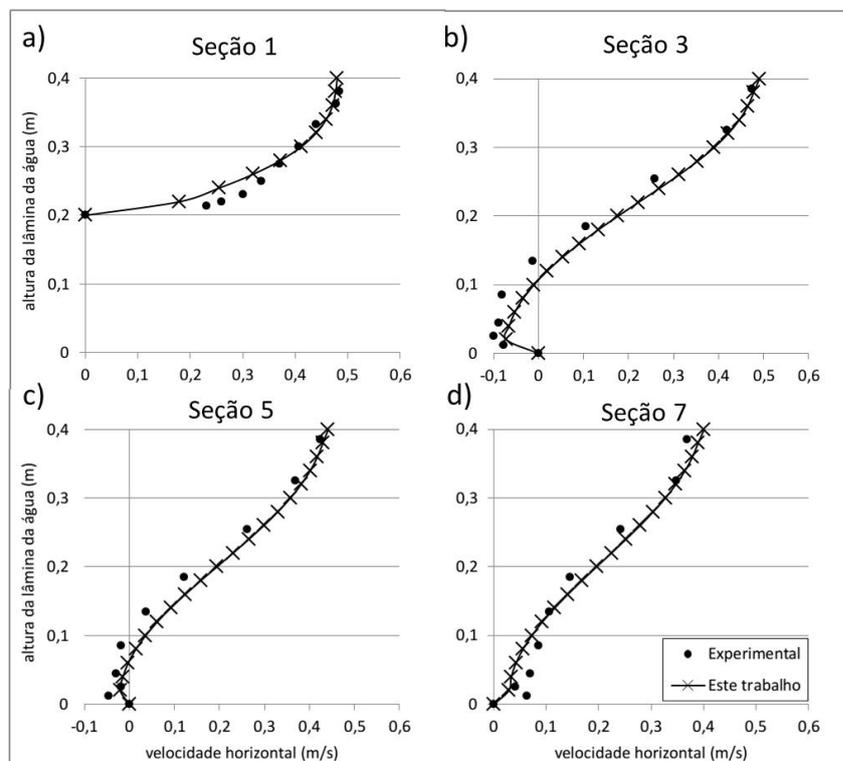


Figura 4.27: Perfil de velocidade horizontal da configuração *F3* em a) Seção 1, b) Seção 3, c) Seção 5 e d) Seção 7.

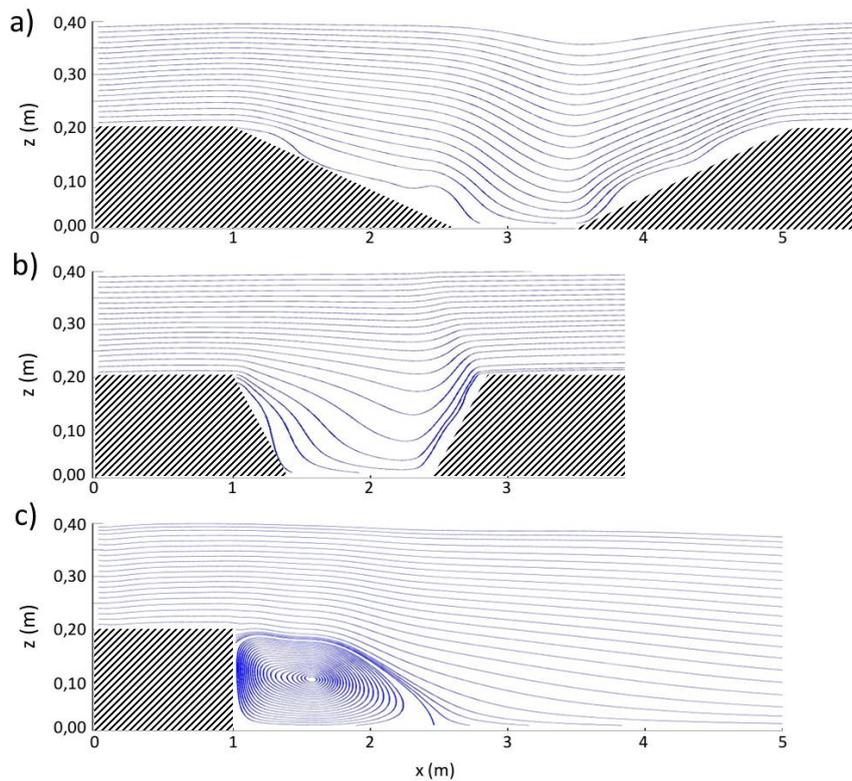


Figura 4.28: Linha de corrente do escoamento para a)  $F1$ , b)  $F2$ , c)  $F3$ .

#### 4.2.4 Caso 7: Propagação de ondas sobre um fundo com deformação circular

Neste caso é simulada uma propagação de ondas sequenciais com a intenção de analisar suas deformações quando passam sobre uma deformação de fundo circular tridimensional. Como comparação experimental é utilizado o experimento que Chawla apud Zijlema e Stelling, 2005 [57] elaborou.

Uma bacia com  $22m$  de comprimento,  $18,2m$  de largura e  $0,45m$  de altura é simulada (Fig. 4.29). Ondas sequenciais são criadas na condição de contorno de entrada (à esquerda). Uma parte de esfera é tida como a deformação de fundo e segue as Equações  $(x - 5)^2 + (y - 8,98)^2 = 2,57^2$  definindo o fundo circular da deformação e  $z = -8,73 + \sqrt{9,1^2 - (x - 5)^2 - (y - 8,98)^2}$  definindo a altura da deformação que segue um padrão circular.

O domínio computacional é discretizado com  $\Delta x = 0,10m$ ,  $\Delta y = 0,10m$ ,  $\Delta z = 0,020m$  exceto da superfície livre que  $\Delta z_M = 0,025m$ ,  $N_x = 220$ ,  $N_y = 182$  e  $N_z = 22$ . Como condição de contorno na esquerda do domínio, a superfície livre forma uma onda com altura de  $alt_0 = 0,118cm$  e com período de  $T = 1,00s$ . O passo do tempo escolhido para a simulação

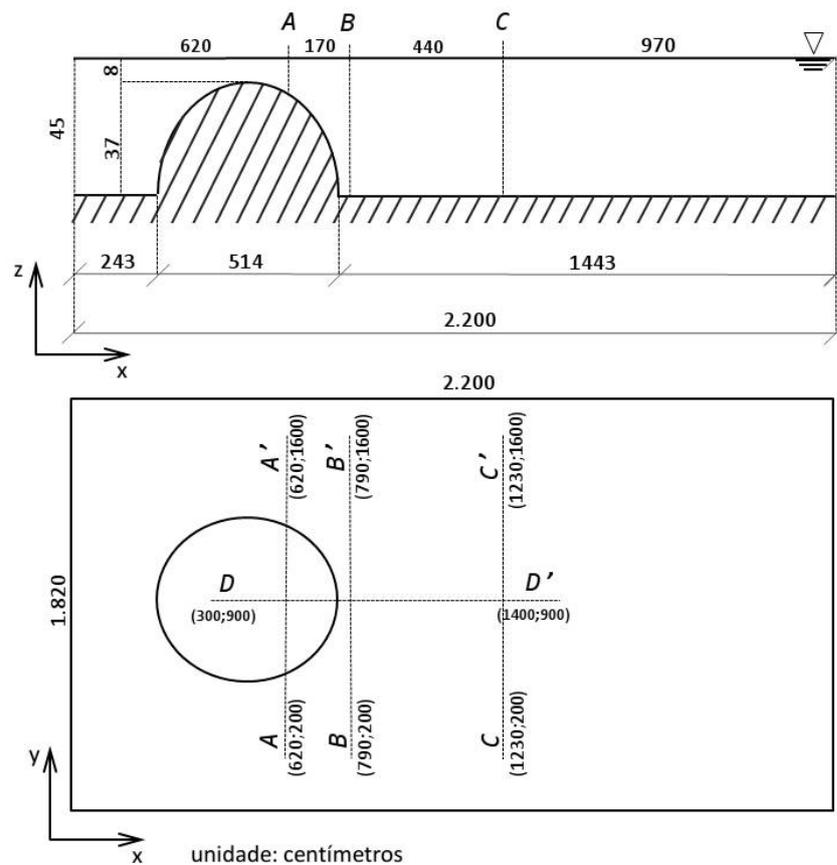


Figura 4.29: Configuração do caso 7 e suas seções de medição, escala distorcida.

é  $\Delta t = 0,005s$  para uma simulação de  $40s$ . Esta é realizada com as condições iniciais de velocidades e pressões dinâmicas nulas, a fricção de fundo é desconsiderada e condições de von Neumann são adotadas, sem ser para o plano  $x = Lx$ , onde a condição de Sommerfeld é a escolhida. São analisados os resultados dos desníveis nas seções transversais  $6,2m$  (seção AA),  $7,9m$  (seção BB) e  $12,3m$  (seção CC) (eixo  $0x$ ) e na seção longitudinal  $9,0m$  (seção DD) (eixo  $0y$ ) em  $t = 40s$  de simulação.

## Resultados

A Figura 4.30 apresenta gráficos com a comparação entre as amplitudes adimensionalizadas com a amplitude da onda inicial da simulações com as medidas experimentalmente para as três seções transversais e uma seção longitudinal.

Para as Figuras 4.30a, 4.30b e 4.30d, os resultados mostram que as tendências da altura da onda são acompanhadas para a maioria dos pontos. A amplitude da onda da simulação é

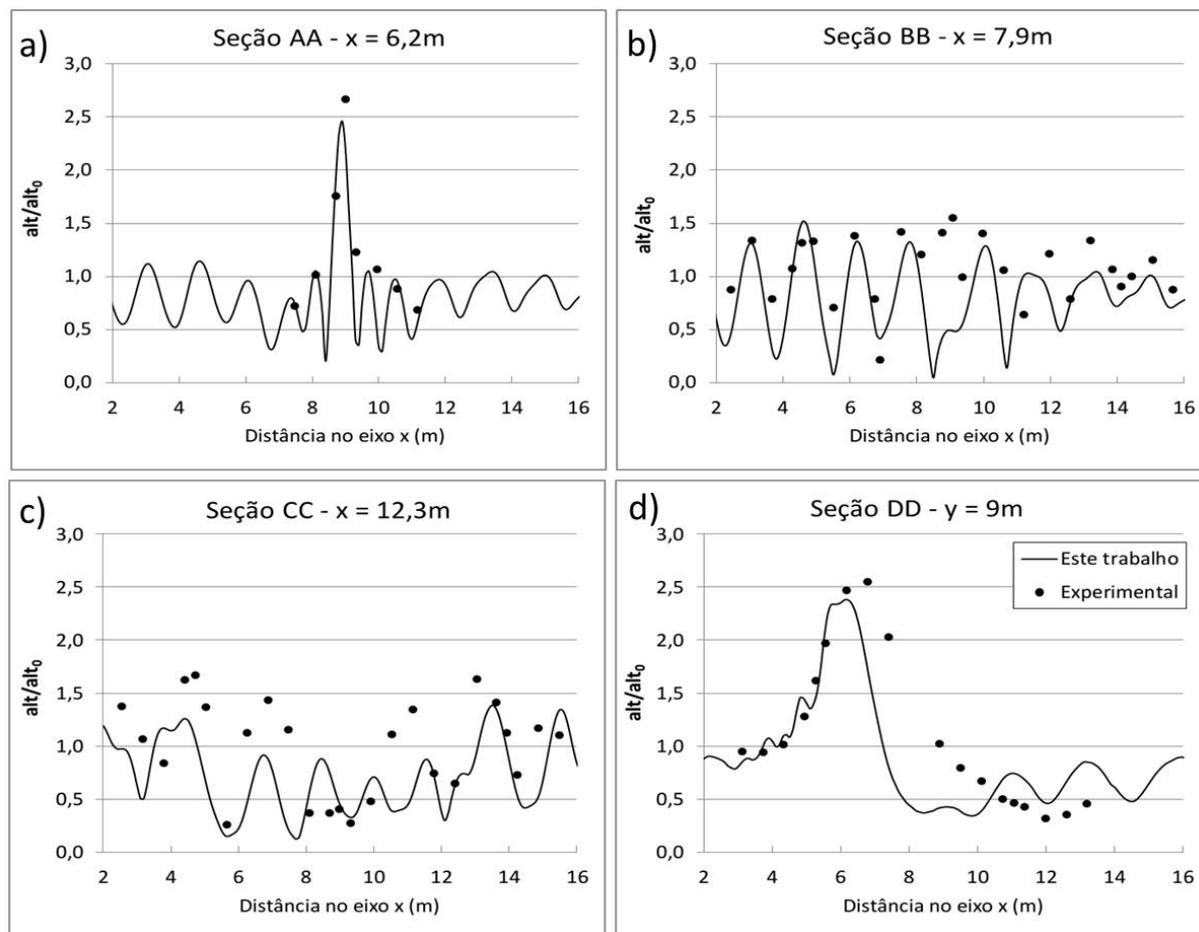


Figura 4.30: Comparação entre os desníveis analítico e deste modelo para a)  $x = 6,2m$ ; b)  $x = 7,9m$ , c)  $x = 12,3m$  e d) b)  $y = 9,0m$ .

levemente menor do que a experimental, provocando erros em todas as seções. A Figura 4.30c apresenta os resultados que menos se ajustam. Por outra parte, há relativamente poucos pontos experimentais por período de onda, impedindo uma conclusão maior nesta comparação. Estes resultados mostram a necessidade da representação mais adequada das deformações de fundo, como também observado no Caso 5.

A Figura 4.31 mostra a configuração da superfície livre, com a deformação da onda incidente quando passa sobre o obstáculo, principalmente a partir das coordenadas horizontais do centro da esfera ( $x = 5, y = 8,98m$ ). A presença do obstáculo de fundo gera uma perturbação tridimensional na direção transversal, que é ampliada pela reflexão das ondas nas paredes  $y = 0$  e  $y = Lz$ , assim como uma diminuição do nível médio.

A Tabela 4.16 representa os parâmetros de estabilidade do caso. Todos os parâmetros estão dentro do esperado. Para este caso não é necessário o uso da camada esponja para evitar a re-

flexão nas seções de medição. Teste alongando virtualmente a bacia para evitar a reflexão nos resultados foram realizados e os mesmo resultados foram gerados. Isso ocorre porque as ondas tem pequeno período e amplitude.

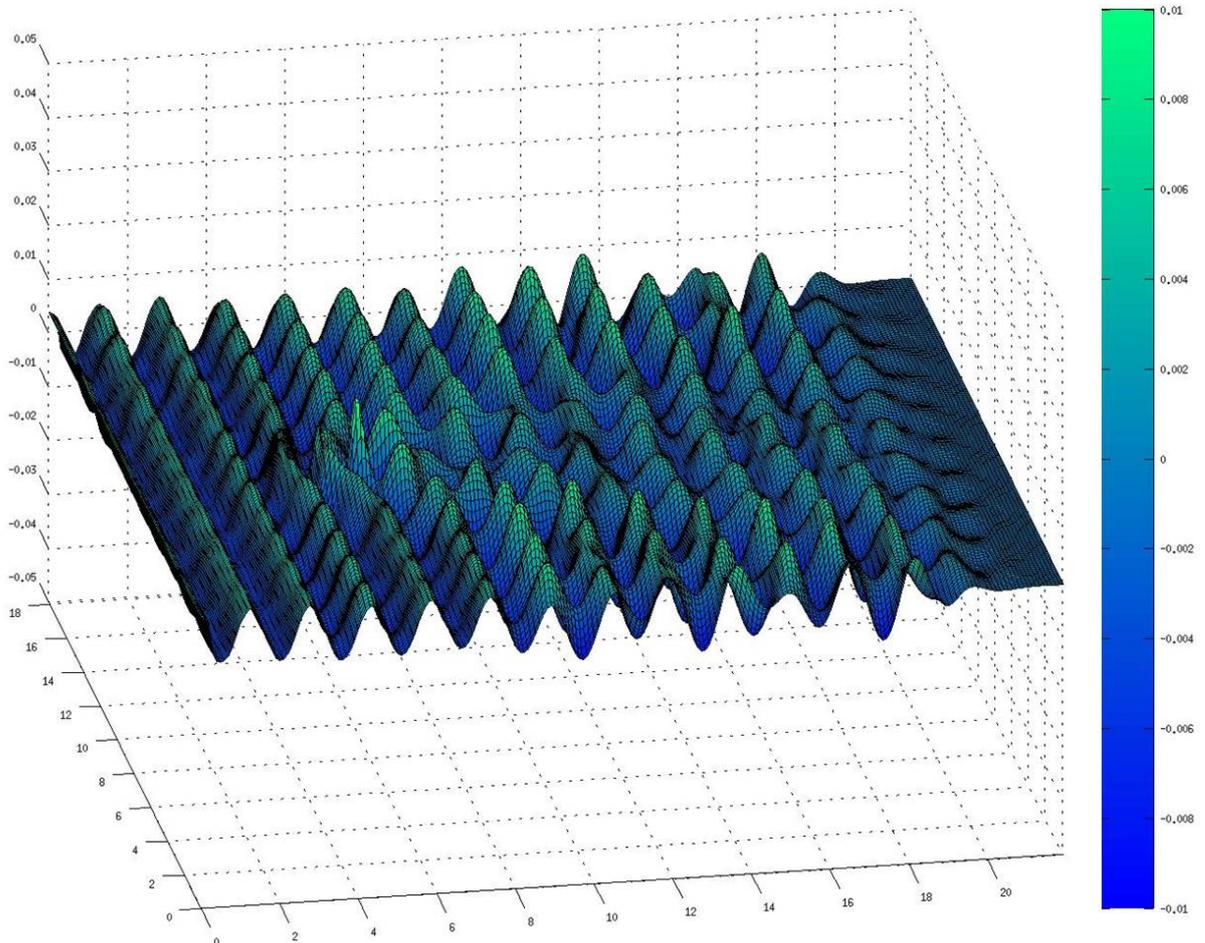


Figura 4.31: Desnível do Caso 7 em  $t = 40s$ , escala distorcida.

Tabela 4.16: Análise de estabilidade para o caso dos da propagação de ondas sobre um fundo com deformação circular .

$ts (s)$	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
56.385	$6,6 \times 10^{-3}$	$3,7 \times 10^{-3}$	$7,0 \times 10^{-2}$	$2,3 \times 10^{-7}$

### 4.3 Caso 8: Emissário Submarino

Foi escolhido um caso hipotético, que consiste em um emissário simulado por um cilindro. A ideia é observar quais são as características do escoamento para determinada situação, e não

de verificação ou validação. Duas situações são apresentadas: a primeira considera uma lâmina de água do escoamento de  $7,2m$ , e a segunda é uma lâmina de  $3,6m$  (Figura 4.32).

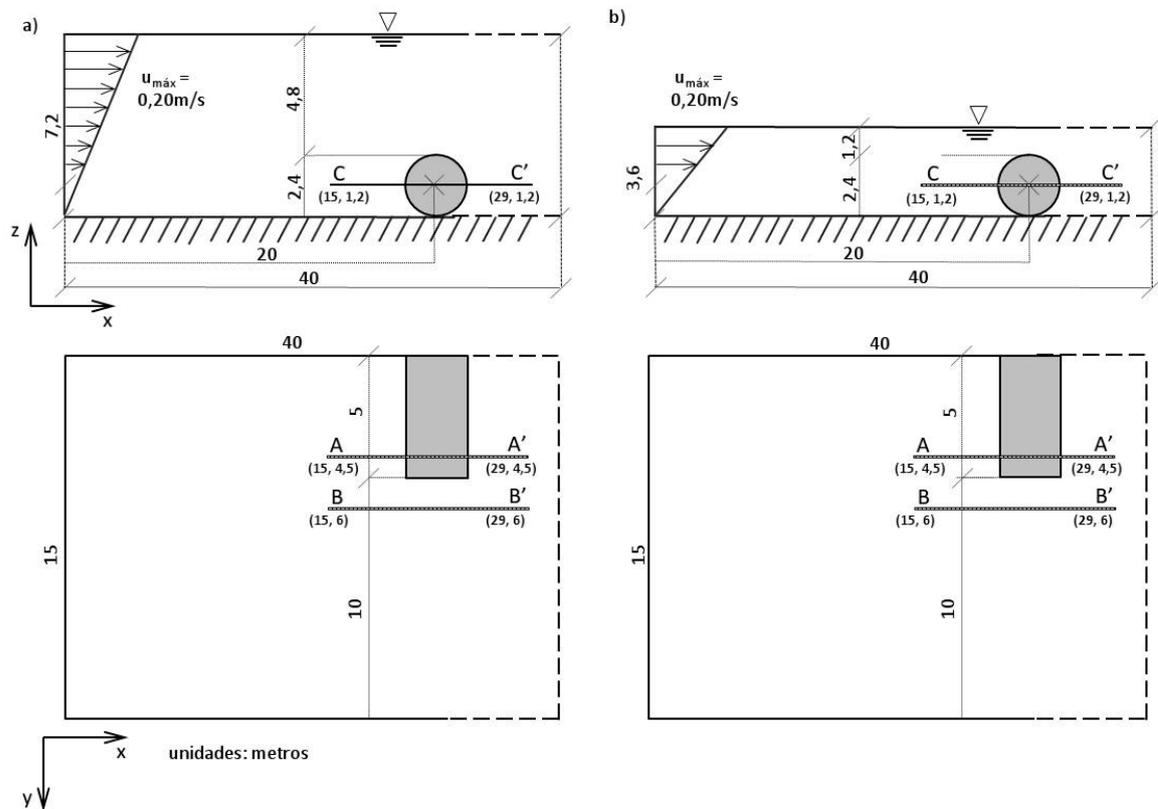


Figura 4.32: Configuração do caso hipotético e seções de medição para: a) E1: Situação com  $7,2m$  de profundidade b) E2: Situação com  $3,6m$  de profundidade.

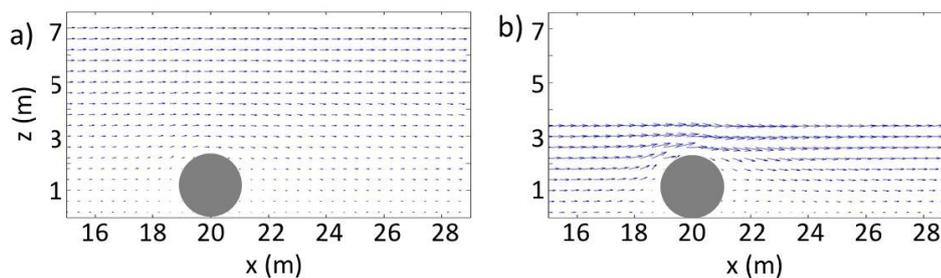
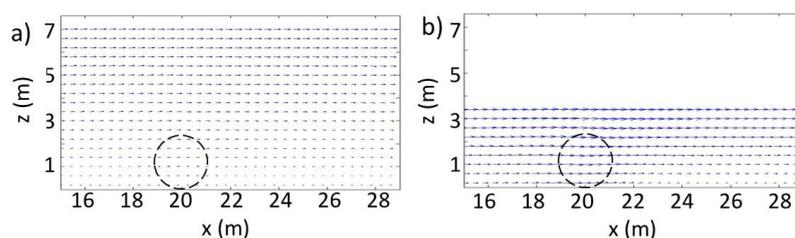
Para simular tal situação, é considerado que a corrente corre perpendicularmente ao emissário a uma velocidade máxima de  $0,2m/s$ . O emissário é representado por um cilindro com diâmetro de  $2,4m$  e comprimento de  $5m$ , está apoiado no fundo e é transversal à direção principal do escoamento. As características de cada caso são apresentadas na Tabela 4.17. O líquido simulado é a água. No contorno de entrada (esquerda) são consideradas velocidades permanentes, respeitando as Equações  $u(z) = 0,2 \frac{z}{Lz} (m/s)$ ;  $v = 0 m/s$  e  $w = 0 m/s$ . Já nos contornos de saída ( $x = Lx$ ) e laterais ( $y = 0$  e  $y = Ly$ ) é considerada a condição de radiação de Sommerfeld. Nos contornos restantes são consideradas condição de von Neumann. As velocidades dentro cilindro são consideradas nulas para representar a estrutura sólida.

Tabela 4.17: Característica das diferentes configurações do caso do emissário submarino.

Características	E1	E2
$\Delta t$ (s)	0,001	0,001
$tS$ (s)	30	30
$\Delta x = \Delta y = \Delta z$ (m)	0,40	0,40
$Nx$ (-)	100	100
$Ny$ (-)	40	40
$Nz$ (-)	18	9
$C$ ( $m^{1/2}/s$ )	50	50

## Resultados

Os resultados dos campos de velocidades das duas configurações deste caso nos planos  $y = 4,5$  e  $y = 6,0m$  são representadas pelas Figuras 4.33 e 4.34. O emissário modifica o escoamento e sua presença ainda é percebida a pelo menos 1 metro de distância, no plano  $y = 6,0m$ . Quanto maior é o emissário, em relação à altura da coluna de água, maior são essas mudanças no escoamento. No plano  $z = 1,2m$  (Figura 4.35), o escoamento também é mais alterado quando se tem uma coluna de água menor. Para os dois casos, ocorre uma área de recirculação logo após o emissário. Ainda, a Figura 4.35 mostra que a uma distância de  $1m$  do conduto na direção  $y$ , para o caso com a maior altura de coluna de água, a velocidade é quase que paralela ao escoamento imposto inicialmente, diferente do caso com a menor altura da água onde o escoamento é fortemente não paralelo. Em ambos casos, aprecia-se uma aceleração do escoamento na região próxima ao emissário.

Figura 4.33: Resultados dos campos de velocidades no plano  $y = 4,5m$  em: a) E1 e b) E2Figura 4.34: Resultados dos campos de velocidades no plano  $y = 6,0m$  em: a) E1 e b) E2

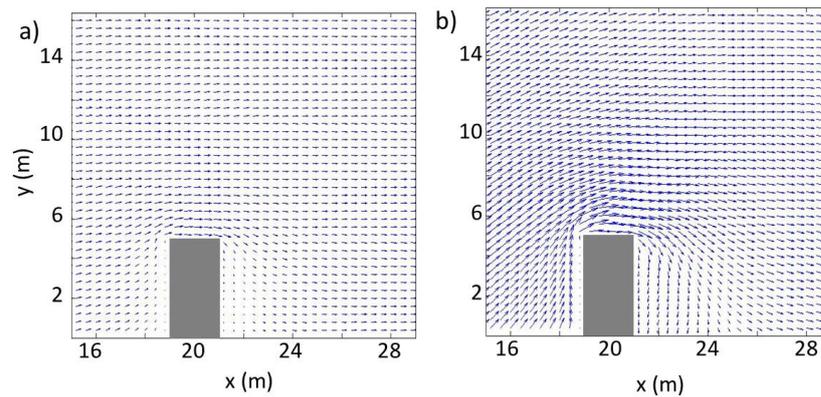


Figura 4.35: Resultados dos campos de velocidades no plano  $z = 1, 2m$  em: a)  $E1$  e b)  $E2$ .

O escoamento em torno do conduto é influenciado pela espessura da lâmina de água sobre o mesmo. Observa-se que, para a maior lâmina de água ( $E1$ , Figura 4.36), a deformação da superfície livre ocorre quase que bidimensionalmente (Figura 4.38a) e para o caso de menor lâmina ( $E2$ , Figura 4.37) ocorre uma deformação tridimensional (Figura 4.38b). Ainda, a variação do desnível é maior para o caso  $E2$ , apresentando gradientes mais acentuados do que para o caso  $E1$ . Com este teste, identifica-se o potencial do código para simular escoamentos com superfície livre com geometrias de fundo complexas. A Tabela 4.18 apresenta os parâmetros de estabilidade deste caso, os quais se encontram na faixa de valores dos outros casos.

Tabela 4.18: Análise de estabilidade para o caso de Emissário Submarino.

Configurações	$ts$ (s)	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>d</b>	<b>CV (%)</b>
$E1$	7.166	$6,5 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-7}$
$E2$	2.445	$5,7 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-7}$

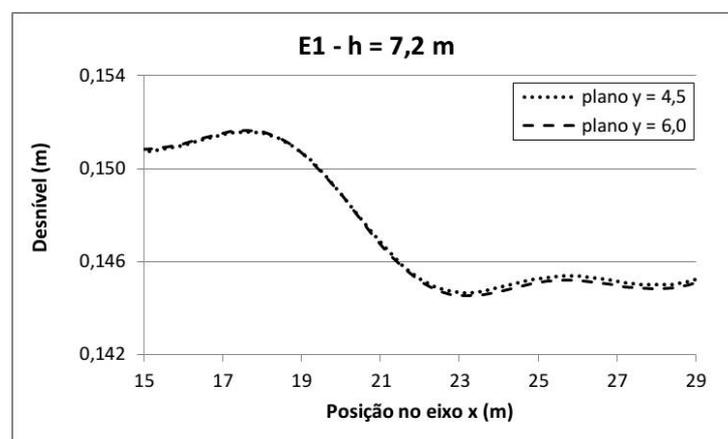


Figura 4.36: Desníveis nos planos  $y = 4, 5$  e  $y = 6, 0$  para  $E1$

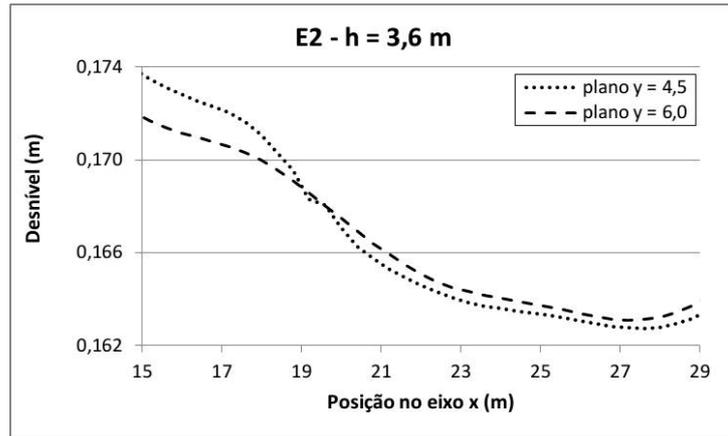


Figura 4.37: Desníveis nos planos  $y = 4,5$  e  $y = 6,0$  para E2

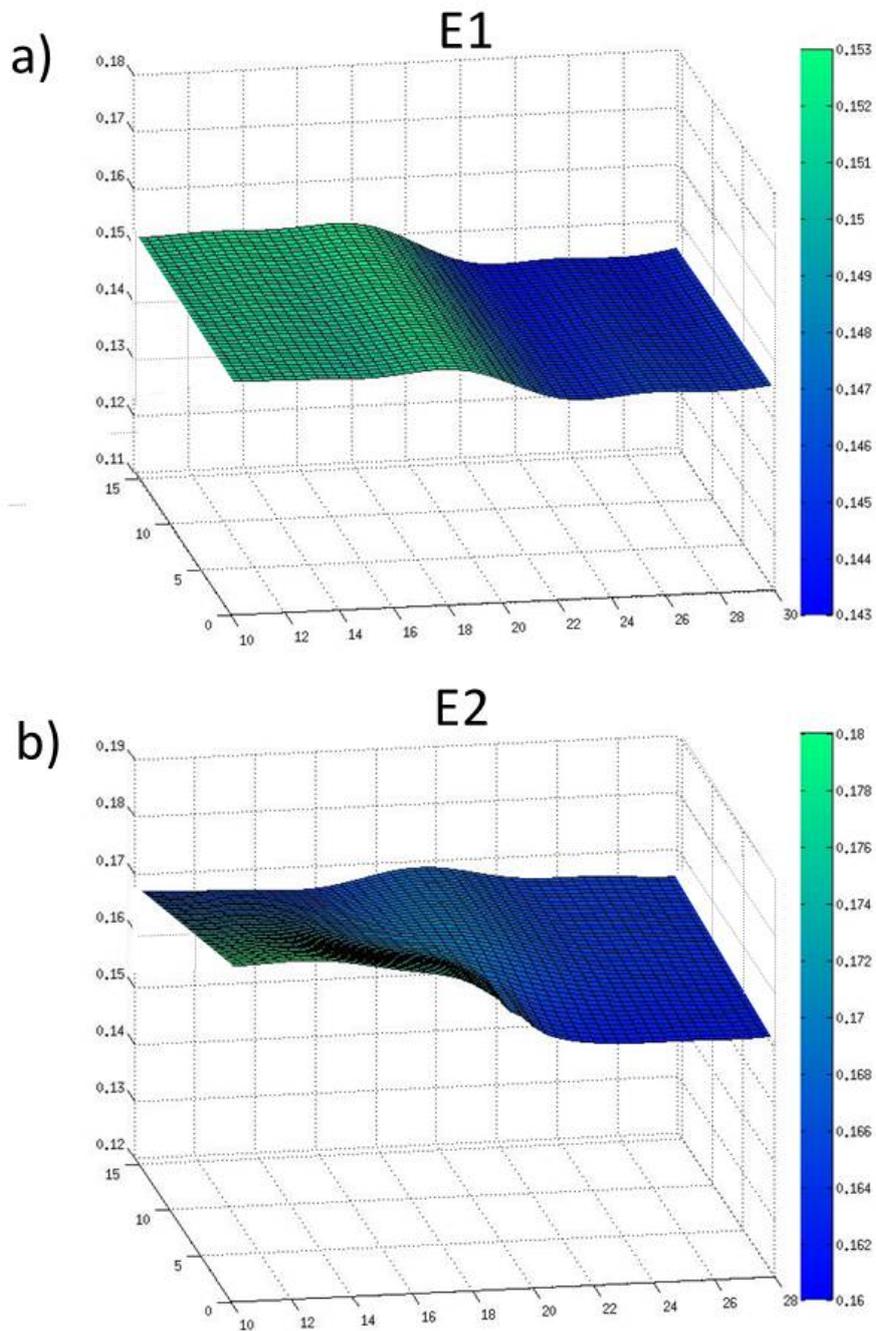


Figura 4.38: Desníveis em: a) E1 e b) E2 (escala distorcida).

# Capítulo 5

## Conclusões e Recomendações

### 5.1 Conclusões

No presente trabalho foi apresentado um código numérico tridimensional para simulação de escoamentos com superfície livre utilizando um método para calcular as pressões dinâmicas. Para isso, resolveram-se numericamente as Equações da Continuidade (2.1) e de Navier-Stokes (2.2, 2.3 e 2.4), com um método semi-implícito em diferenças finitas, com passo de tempo fracionado em dois subpassos. No primeiro subpasso se calcula um primeiro campo de velocidades e desnível, considerando que a pressão varia de forma hidrostática, e no segundo subpasso se calcula a pressão dinâmica e sua influência na velocidade e no desnível.

O código foi verificado para três casos com dados analíticos e numéricos e validado para quatro casos com dados experimentais. Além disso, foi simulado um caso hipotético que representa, de forma esquemática, uma configuração de emissário submarino. Nenhum problema de estabilidade foi encontrado nos resultados que se mostraram adequados.

O primeiro caso, uma onda linear bidimensional confinada em uma bacia com tamanho igual à metade do comprimento de onda, foi simulada para a verificação. O código com aproximação não-hidrostática obteve melhores resultados do que o com aproximação hidrostática, principalmente quando se compara a frequência do fenômeno.

Ainda no primeiro caso, foram analisadas as variações dos resultados alterando a discretização espacial e temporal de ambas as aproximações. Os resultados mostraram que o desempenho dos códigos não mostraram diferenças relevantes quanto à variação do intervalo de tempo. Já

para a discretização espacial, o modelo não-hidrostático apresentou melhores resultados com malhas mais grosseiras que as usadas no código hidrostático. O código hidrostático leva cerca de 65% menos de tempo de processamento que o código não-hidrostático para a mesma simulação, mas não fornece resultados que ajustem satisfatoriamente ao dados analíticos.

No segundo caso foi simulada uma onda linear tridimensional. As comparações entre resultados analíticos e numéricos do trabalho de Yuan e Wu (2004)[56] com o presente trabalho, mostraram-se satisfatórias quanto aos níveis. Os resultados apresentaram uma pequena defasagem no período da onda que, acumulada ao longo de 30s simulados, foi de 0,3s. As distribuições das velocidades também foram analisadas e observaram-se bons resultados. Ainda, foram calculados os valores de cada termo da equação de Navier-Stokes, demonstrando que as escalas estavam de acordo com a teoria e se observou a relevância do termo da pressão dinâmica, que se mostrou como um dos mais importantes.

No terceiro caso da verificação, foi simulada a propagação de uma onda não linear e comparada com resultados analíticos, obtidos com a Teoria da Função de Corrente. A comparação das hodógrafas revelou bons resultados, mas houve um erro no comprimento da onda da ordem de 10%.

O processo de validação do código se inicia no quarto caso. Este consiste na propagação de uma onda sobre uma barra, como no experimento de Beji e Battjes (1994)[3], o qual é amplamente utilizado na validação de códigos de escoamentos com superfície livre. A deformação da onda foi bem representada na região de aclave, na rampa e no início da rampa de declive. Mais a jusante, próximo ao fim da rampa de declive, os resultados não acompanharam os dados experimentais de forma satisfatória.

O quinto caso foi proposto para identificar como as declividades das rampas, principalmente a de declive, influenciam nos resultados. Para isso, três configurações do experimento realizado por Rosauero (1999)[47] foram simuladas para a validação. Para todas as três configurações simuladas, o código apresentou resultados muito satisfatórios. Contrariamente aos resultados obtidos no caso anterior, na rampa de declive foi verificada uma muito boa aderência aos dados experimentais.

No sexto caso, para avaliar os efeitos de recirculação do modelo, três configurações de

canais com cavidades referentes aos experimentos realizados pelo Laboratório de Hidráulica de Delft (1980)[1] foram simulados. Estes experimentos envolvem escoamentos turbulentos, mas mesmo assim decidiu-se em simulá-los para identificar até onde o código poderia ser válido nestes casos. Com a finalidade de levar em conta os efeitos dissipativos da turbulência, considerou-se uma viscosidade maior que da água ( $\nu = 1,0 \times 10^{-3} m^2/s$ ). As velocidades do escoamento calculadas foram satisfatórias, inclusive para os resultados sobre a rampa de declive.

No sétimo caso, propagações de ondas sobre o casco de uma esfera foram simuladas. Esta validação também refere-se à deformação de ondas, porém agora para casos tridimensionais e com uma geometria mais complexa no fundo. O código acompanhou as tendências da deformação da onda, porém a amplitude das ondas foi menor do que as medidas no modelo experimental. Nota-se uma piora nos resultados após a passagem da onda pela deformação de fundo. Assim, acredita-se que, para realizar esta simulação, é necessário aumentar o número de pontos da malha.

O oitavo caso simulado se refere a uma situação hipotética de um emissário submarino. Duas diferentes configurações foram testadas, variando a espessura da lâmina de água sobre o emissário. O código se mostrou adequado para as simulações mostrando as tendências do escoamento com a presença do emissário. A espessura da lâmina da água modificou bastante a influência do emissário no escoamento.

## 5.2 Recomendações

O código ainda possui diversas limitações que podem ser eliminadas ou minimizadas sem recorrer a grandes modificações. Entre elas, podem-se citar:

- Aperfeiçoar os cálculos nas células da superfície livre, permitindo que o desnível seja maior do que o tamanho vertical destas células ( $\Delta z_{i,j,Nz}$ ) e abranja várias células na vertical.
- Aperfeiçoar os cálculos nas células da superfície de fundo, permitindo que geometrias complexas possam ser simuladas.

- Adequar a camada esponja para casos com velocidades mais altas e definir uma relação ideal entre comprimento da camada esponja e seu coeficiente para cada situação (dimensão do canal e velocidade do escoamento).

Ainda, para aperfeiçoar a performance do código, pode ser levado em consideração:

- Aperfeiçoar os cálculos nas células do fundo, permitindo que a variação do fundo modifique o tamanho das células.
- Utilizar outro Método Iterativo mais eficiente do que o Método do Gradiente Conjugado.

Por fim, para abranger as possíveis aplicações do código, em trabalho futuros podem ser desenvolvidos pontos como:

- Acrescentar a variação da massa específica do fluido.
- Acoplar um modelo de turbulência.
- Adicionar cálculo para simular o movimento, transporte e depósito de sedimentos e erosão.
- Adicionar uma função do tipo *wet-dry*, que permite que as células possam passar de secas a molhadas e vice-versa.

# Referências Bibliográficas

- [1] Computation of siltation in dredged trenches, semi-empirical model for the flow in dredged trenches. Technical Report R 1267-III/M 1536, Delft Hydraulics Laboratory, 1980.
- [2] AHMADI, A., BADEI, P., AND NAMIN, M. M. An implicit two-dimensional non-hydrostatic model for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **54** (2007), 1055–1074.
- [3] BEJI, S., AND BATTJES, J. A. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. *Coastal Engineering* **23** (1994), 1–16.
- [4] CASALAS, A. B. IPH-A - Aplicativo para modelação de estuários e lagoas, manual de uso. *Recursos Hídricos n.33* (1996), 37.
- [5] CASULLI, V. Semi-implicit finite difference methods for two-dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics* **86** (1990), 56–74.
- [6] CASULLI, V. A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **30, n.4** (1999), 425–440.
- [7] CASULLI, V., AND CATTANI, E. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers Math. Applic.* **27, n.4** (1994), 99–112.
- [8] CASULLI, V., AND CHENG, R. T. Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **15** (1992), 629–647.

- [9] CASULLI, V., AND STELLING, G. S. Numerical simulation of 3d quasi-hydrostatic free-surface flows. *Journal of Hydraulics Engineering* **2** (1998), 678–686.
- [10] CAUSIN, P., MIGLIO, E., AND SALERI, F. Algebraic factorizations for 3d non-hydrostatic free surface flows. *Comput. Visual Sci.* **5** (2002), 85–94.
- [11] ÇENGEL, Y. A., AND CIMBALA, J. M. *Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações*. McGraw-Hill, São Paulo, 2007.
- [12] CHAPRA, S. C., AND CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. Mc-Graw Hill, São Paulo, 2008.
- [13] CHEN, X. A fully hydrodynamic model for three-dimensional, free-surface flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **42** (2003), 929–952.
- [14] CHOI, D. Y., AND WU, C. H. A new efficient 3d non-hydrostatic free-surface flow model for simulating water wave motions. *Ocean Engineering* **33** (2006), 587–609.
- [15] COLLISCHONN, W., AND MARQUES, D. L. M. Desenvolvimento de um modelo hidrodinâmico de transporte de sedimentos para lagos. *In: Anais do IX Congresso Brasileiro de Limnologia, Juiz de Fora* (2003).
- [16] CUI, H., PIETRZAK, J. D., AND STELLING, G. S. Improved efficiency of a non-hydrostatic, unstructured grid, finite volume model. *Ocean Modelling* **54-55** (2012), 55–67.
- [17] CUNGE, J. A., HOLLY JR., J. A., AND VERWEY, A. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program, Bath, Grã-Bretanha, 1980.
- [18] DALRYMPLE, R. A. A finite amplitude wave on a linear shear current. *J. Geophys. Res.* **79(30)** (1974), 4498–4504.
- [19] DALRYMPLE, R. A. Coastal engineering software and data and software sources. Disponível em: <<http://www.coastal.udel.edu/coastal/>>. Acesso em: Jan. 2014.
- [20] DEAN, R. G. Stream function representation of nonlinear ocean waves. *J. Geophys. Res.* **70(18)** (1965), 4561–4572.

- [21] DURRAN, D. R. *Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics*. Springer Verlag, New York, 2010.
- [22] FERZIGER, J. H., AND PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [23] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. EdUSP, São Paulo, 2000.
- [24] FRAGOSO JR., C. R. *IPH-ECO model - Manual Científico*. Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Porto Alegre, Brasil, 2012.
- [25] FUNKE, S. W., PAIN, C. C., KRAMER, S. C., AND PIGGOTT, M. D. A wetting and drying algorithm with a combined pressure/free-surface formulation for non-hydrostatic models. *Advances in Water Resources* **34** (2011), 1483–1495.
- [26] GENG, Y., AND WANG, Z. A coastal ocean model of semi-implicit finite volume unstructured grid. *China Ocean Eng.* **26-2** (2012), 277–290.
- [27] GOLUB, G. H., AND VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Londres, 1996.
- [28] HARLOW, F. H., AND WELCH, J. W. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids* **8-12** (1965), 2182–2189.
- [29] HOFFMAN, K. A., AND CHIANG, S. T. *Computational Fluid Dynamics: Volume I*. Engineering Education System, Texas, USA, 2000.
- [30] KADANOFF, L. On two levels. *Phys. Today* **39** (1986), 7–9.
- [31] KAMPHUIS, J. W. *Introduction to Coastal Engineering and Management*. World Scientific Publishing, Singapore, Singapore, 2000.
- [32] KANARSKA, Y., AND MADERICH, V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows. *Ocean Dynamics* **53** (2003), 178–185.

- [33] LABEUR, R. J., AND PIETRZAK, J. D. A fully three dimensional unstructured grid non-hydrostatic finite element coastal model. *Ocean Modelling* **10** (2005), 51–67.
- [34] LAURIEN, E., AND OERTEL, H. J. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2011.
- [35] LEE, J. W., TEUBNER, M. D., AND GILL, J. B. NIXON. P. M. A 3-d non-hydrostatic pressure model for small amplitude free surface flows. *Int. J. for Numer. Meth. Fluids* **50** (2006), 649–672.
- [36] LE MÉHAUTÉ, B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Springer-Verlag, New York, USA, 1976.
- [37] MACKLIN, M. Position based fluids - supplemental video. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=f5kup6qeuew>>. Acesso em: Mar. 2014.
- [38] MARSHALL, J., HILL, C., PERELMAN, L., AND ADCROFT, A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and nonhydrostatic ocean modeling. *Journal of Geophysical Research* **102**, n.C3 (1997), 5733–5752.
- [39] NAMIN, M. M., LIN, B., AND FALCONER, R. A. An implicit numerical algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **35** (2001), 341–356.
- [40] NICHOLS, B. D., AND HIRT, C. W. Calculating three-dimensional free surface flow in the vicinity of submerged and exposed structures. *Journal of Computational Physics* **12** (1973), 234–246.
- [41] NOVAK, P., GUINOT, V., JEFFREY, A., AND REEVE, D. E. *Hydraulic Modelling - an Introduction*. Spon Press, Oxfordshire, UK, 2010.
- [42] OBERKAMPF, W. L., AND ROY, C. J. *Verification and Validation in Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, USA, 2010.
- [43] OLIVEIRA, A., AND BAPTISTA, A. On the role of tracking on eulerian-lagrangian solutions of the transport equation. *Advances in Water Resources* **21** (1998), 539–554.

- [44] PARK, J., AND MIYATA, M. ZHU. H. On the accuracy of numerical wave making techniques. *The Society of Naval Architects of Japan* **173** (1993), 35–44.
- [45] PATNAIK, G., GUIRGUIS, R. H., AND ORAN, E. S. A barely implicit correction for flux-corrected transport. *Journal of Computational Physics* **71** (1987), 1–20.
- [46] PEYRET, R. *Handbook of Computational Fluid Mechanics*. Academic Press, Nice, France, 1995.
- [47] ROSAURO, N. M. L. *Transformações de ondas de dispersão não-lineares na passagem sobre obstáculos de fundo - análise e simulação*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.
- [48] SIGGRAPH. The 40th international conference and exhibition on computer graphics and interactive techniques. Disponível em: <<http://s2013.siggraph.org/>>. Acesso em:, Mar. 2014.
- [49] STANSBY, P. K., AND ZHOU, J. G. Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2d vertical plane problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **28** (1998), 541–563.
- [50] STELLING, G. S., AND BUSNELLI, M. M. Numerical simulation of the vertical structure of discontinuous flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **37** (2001), 23–43.
- [51] STELLING, G. S., AND ZIJLEMA, M. An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **43** (2003), 1–23.
- [52] SZYMKIEWICZ, R. *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Springer Science, Gdansk, Poland, 2010.
- [53] WALTERS, R. A. A semi-implicit finite element model for non-hydrostatic (dispersive) surface waves. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **49** (2005), 721–737.

- 
- [54] WANG, K., JIN, S., AND LIU, G. Numerical modelling of free-surface flows with bottom and surface-layer pressure treatment. *Journal of Hydrodynamics* **21(3)** (2009), 352–359.
- [55] YAMAZAKI, Y., KOWALIK, Z., AND CHEUNG, K. F. Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **61** (2009), 473–497.
- [56] YUAN, H., AND WU, C. H. An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **46** (2004), 709–733.
- [57] ZIJLEMA, M., AND STELLING, G. S. Further experiences with computing non-hydrostatic free-surface flows involving water waves. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **48** (2005), 169–197.